



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS (UFG)  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA (IME)  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ANGELLYCARLLEN MARQUES DORNELES

**Equações de Choquard Côncava-Convexas:**  
Soluções via Quociente de Rayleigh Não Linear

GOIÂNIA  
2026



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

## TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

### E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

#### 1. Identificação do material bibliográfico

Dissertação     Tese     Outro\*: \_\_\_\_\_

\*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

Exemplos: Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

#### 2. Nome completo do autor

Angellycarllen Marques Dorneles

#### 3. Título do trabalho

Equações de Choquard Côncava-Convexas: Soluções via Quociente de Rayleigh Não Linear

#### 4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento  SIM     NÃO<sup>1</sup>

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);

b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação. O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

**Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.**



Documento assinado eletronicamente por **Marcos Leandro Mendes Carvalho, Professor do Magistério Superior**, em 25/02/2026, às 08:03, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Angellycarllen Marques Dorneles, Discente**, em 25/02/2026, às 09:09, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **6001580** e o código CRC **CB6354A1**.

---



ANGELLYCARLLEN MARQUES DORNELES

## Equações de Choquard Côncava-Convexas: Soluções via Quociente de Rayleigh Não Linear

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás (UFG), como requisito parcial para obtenção do título de Mestra em Matemática.

Área de concentração: Análise

Orientador: Prof. Dr. Marcos Leandro Mendes Carvalho.

GOIÂNIA  
2026

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Dorneles, Angellycarllen Marques  
Equações de Choquard Côncava-Convexas [digital]: Soluções via  
Quociente de Rayleigh Não Linear / Angellycarllen Marques Dorneles. - 2026.  
108 f.: 2026

Orientador: Prof. Dr. Marcos Leandro Mendes Carvalho  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de  
Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em Matemática,  
Goiânia, 2026.

1. Equações de Choquard. 2. Quociente de Rayleigh. 3. Método de  
Nehari.

I. Carvalho, Marcos Leandro Mendes, orient. II. Título.

CDU 517



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
**ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO**

Ata nº 18 da sessão de Defesa de Dissertação de **Angellycarllen Marques Dorneles**, que confere o título de Mestre em **Matemática**, na área de concentração em **Análise**.

Ao **vigésimo dia do mês de fevereiro do ano de dois mil e vinte e seis**, a partir das **14h00**, no **Auditório do Instituto de Matemática e Estatística**, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada **“Equações de Choquard Côncava-Convexas: Soluções via Quociente de Rayleigh Não Linear”**. Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor **Marcos Leandro Mendes Carvalho - IME/UFG** com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor **Edcarlos Domingos da Silva - IME/UFG**, membro titular interno; Professor Doutor **Claudiney Goulart - ICET/UFJ**, membro titular externo. Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido a candidata **aprovada** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor **Marcos Leandro Mendes Carvalho**, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, ao **vigésimo dia do mês de fevereiro do ano de dois mil e vinte e seis**.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA



Documento assinado eletronicamente por **Marcos Leandro Mendes Carvalho, Professor do Magistério Superior**, em 20/02/2026, às 17:01, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Edcarlos Domingos Da Silva, Professor do Magistério Superior**, em 20/02/2026, às 17:08, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Claudiney Goulart, Usuário Externo**, em 23/02/2026, às 15:40, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **5936885** e o código CRC **2B22EDB3**.



Dedico esse trabalho à minha mãe, que desde cedo me ensinou que a educação é a chave para a autonomia feminina.

---

## Agradecimentos

---

Gostaria de expressar minha sincera gratidão a todas as pessoas que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho.

Em primeiro lugar, à minha mãe, cujo amor incondicional, apoio constante e sábios conselhos foram o alicerce que me sustentou em todos os momentos desta jornada. Ao meu pai, pelo apoio fundamental e por sempre acreditar em meu potencial. Sua confiança em minhas capacidades foi um combustível essencial para a conclusão deste trabalho.

Ao meu orientador, Doutor Marcos Leandro Mendes Carvalho, pela orientação valiosa, paciência e dedicação ao longo de todo este processo. O seu apoio foi fundamental para a realização deste trabalho e para o meu crescimento acadêmico e pessoal.

Aos professores da UFJ, em especial ao Doutor Claudiney Goulart, cujas contribuições foram de extrema importância para minha compreensão do tema deste trabalho. Seu conhecimento e disposição em esclarecer minhas dúvidas me auxiliaram significativamente. Aos professores da UFG, que tanto contribuíram para minha formação acadêmica.

À CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo apoio financeiro que tornou possível a dedicação integral à esta pesquisa. O suporte institucional foi crucial para o desenvolvimento deste trabalho.

Por fim, a todos os colegas e amigos que, direta ou indiretamente, compartilharam conhecimentos, experiências e palavras de incentivo ao longo desta caminhada.

A cada um de vocês, meu mais sincero obrigada.

A matemática, vista corretamente, possui não apenas verdade, mas também suprema beleza.

**Bertrand Russell,**  
*The Study of Mathematics.*

---

## Resumo

---

Dorneles, Angellycarllen Marques. **Equações de Choquard Côncava-Convexas**. Goiânia, 2026. 102p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Este trabalho tem como principal referência [21], onde os autores estudam a existência e multiplicidade de soluções para problemas elípticos semilineares que são obtidos a partir da equação de Choquard, sob certas hipóteses, da seguinte forma

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = (I_\alpha * |u|^p)|u|^{p-2}u + \lambda|u|^{q-2}u, \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

onde  $\lambda > 0$ ,  $N \geq 3$ ,  $\alpha \in (0, N)$ . O potencial  $V$  é uma função contínua e  $I_\alpha$  denota o potencial de Riesz padrão. Assuma também que  $1 < q < 2$ ,  $2_\alpha < p < 2_\alpha^*$ , onde  $2_\alpha = \frac{N+\alpha}{N}$  e  $2_\alpha^* = \frac{N+\alpha}{N-2}$ .

O principal objetivo deste trabalho será estudar a existência e multiplicidade de soluções para o problema, onde a linearidade é côncavo-convexa. Para isso, será considerado um funcional  $E_\lambda$  cujo ponto crítico é equivalente à solução fraca da equação principal. Assim, usando o quociente de Rayleigh não linear, será provado a existência de um parâmetro  $\lambda^* > 0$ , e a partir dele, usando o método de Nehari, prova-se que o problema admite pelo menos duas soluções para cada  $\lambda \in (0, \lambda^*]$ . A ideia básica é assegurar que a fibra  $t \mapsto E_\lambda(tu)$  admita pelo menos dois pontos críticos para cada  $\lambda \in (0, \lambda^*)$ .

Além disso, usando um procedimento de sequência, será analisado o comportamento dessas soluções quando o parâmetro  $\lambda$  tende a zero ou a  $\lambda^*$ . Também será trabalhado um resultado de regularidade para o problema principal. Mais especificamente, será mostrado que qualquer solução fraca pertence a  $C_{loc}^{1,\beta}(\mathbb{R}^N)$  para algum  $\beta \in (0, 1)$ .

### Palavras-chave

Equações de Choquard, Quociente de Rayleigh, Método de Nehari

---

## Abstract

---

Dorneles, Angellycarllen Marques. **Equações de Choquard Convexas-Concavas: Soluções via Quociente de Rayleigh Não Linear**. Goiânia, 2026. 102p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

The principal reference for this work is [21], in which the authors investigate the existence and multiplicity of solutions for semilinear elliptic problems obtained from the Choquard equation, under specific hypotheses, in the form

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = (I_\alpha * |u|^p)|u|^{p-2}u + \lambda|u|^{q-2}u, \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

where  $\lambda > 0$ ,  $N \geq 3$ ,  $\alpha \in (0, N)$ . The potential  $V$  is a continuous function and  $I_\alpha$  denotes the standard Riesz potential. Assume also that  $1 < q < 2$ ,  $2_\alpha < p < 2_\alpha^*$ , where  $2_\alpha = \frac{N+\alpha}{N}$ , and  $2_\alpha^* = \frac{N+\alpha}{N-2}$ .

The primary aim of this work is to study the existence and multiplicity of solutions for problems with concave-convex nonlinearities. To achieve this, we consider a functional  $E_\lambda$  whose critical points correspond to weak solutions of the principal equation. Employing the nonlinear Rayleigh quotient, we establish the existence of a parameter  $\lambda^* > 0$ , and subsequently, using the Nehari manifold method, we demonstrate that the problem admits at least two solutions for each  $\lambda \in (0, \lambda^*]$ . The fundamental approach involves ensuring that the fiber  $t \mapsto E_\lambda(tu)$  admits at least two critical points for each  $\lambda \in (0, \lambda^*)$ .

Additionally, through a sequence-based procedure, we analyze the behavior of these solutions as the parameter  $\lambda$  approaches zero or  $\lambda^*$ . We also develop regularity results for the main problem, specifically showing that any weak solution belongs to  $C_{loc}^{1,\beta}(\mathbb{R}^N)$  for some  $\beta \in (0, 1)$ .

### Keywords

Choquard equations, Rayleigh quotient, Nehari method

---

# Sumário

---

Lista de Figuras	7
<b>1 Fundamentos Teóricos</b>	<b>16</b>
1.1 Estrutura Variacional do Problema	16
1.2 Conjuntos de Nehari	22
1.3 Quocientes de Rayleigh	24
1.4 Principais Resultados	25
<b>2 Resultados Preliminares</b>	<b>30</b>
2.1 Propriedades de $R_n$ e $R_e$	37
2.2 Propriedades dos quocientes de Rayleigh	42
2.3 Propriedades de $\Lambda_e(u)$ e $\Lambda_n(u)$	49
2.4 Existência de ponto crítico para $\phi(t)$	55
<b>3 Demonstração do Teorema 1.1</b>	<b>58</b>
3.1 Características de $\mathcal{E}_\lambda^1$ e $\mathcal{E}_\lambda^2$	58
3.2 Existência de pontos críticos de $E_\lambda$	66
3.3 Demonstração do Teorema 1.1	69
3.3.1 Parte i)	69
3.3.2 Parte ii)	69
3.3.3 Parte iii)	72
<b>4 Demonstração dos Teoremas 1.2, 1.3 e 1.4</b>	<b>73</b>
4.1 Demonstração do Teorema 1.2	73
4.1.1 Parte i)	79
4.1.2 Parte ii)	79
4.1.3 Parte iii)	79
4.2 Demonstração do Teorema 1.3	80
4.2.1 Parte ii)	81
4.2.2 Parte i)	84
4.3 Demonstração do Teorema 1.4	85
Referências Bibliográficas	90
A Espaços de Sobolev	93
B Resultados sobre Equações de Choquard	96

---

## Lista de Figuras

---

1.1	Fibra $t \mapsto E_\lambda(tu)$ para $\lambda \in (0, \lambda_*)$	26
1.2	Fibra $t \mapsto E_\lambda(tu)$ para $\lambda = \lambda_*$	27
1.3	Fibra $t \mapsto E_\lambda(tu)$ para $\lambda \in (\lambda_*, \lambda^*)$	27
2.1	As funções $Q_n(t)$ e $Q_e(t)$ .	56
3.1	Funções $Q_n$ e $Q_e$ para $\lambda \in (0, \lambda_*)$	70
3.2	Funções $Q_n$ e $Q_e$ para $\lambda = \lambda_*$	70
3.3	Funções $Q_n$ e $Q_e$ para $\lambda \in (\lambda_*, \lambda^*)$	71
4.1	Fibra $t \mapsto R_n(tv)$ para $\lambda_1 < \lambda_2$ .	80
4.2	Fibra $t \mapsto E_{\lambda_1}(tv)$ para $\lambda_1 < \lambda_2$ .	80

---

## Lista de Notações

---

### Notações Gerais

$C, \tilde{C}, C_1, C_2$	Constantes positivas (possivelmente diferentes).
$I_\alpha$	Potencial de Riesz.
$\Omega \subset \mathbb{R}^N$	Domínio (aberto e conexo) limitado de $\mathbb{R}^N$ .
$ \Omega $	Medida do conjunto $\Omega$ .
$B_r(x)$	Bola aberta, centrada em $x$ e de raio $r > 0$ .
$\rightarrow$	Convergência forte.
$\rightharpoonup$	Convergência fraca.
$\hookrightarrow$	Imersão contínua.
q.t.p.	Quase todo ponto.
$o_n(1)$	Termo que tende a 0 quando $n$ tende ao infinito.

### Espaços e Normas

$X$	Espaço de trabalho.
$A^c$	Conjunto formado por elementos $x$ tal que $x \notin A$ .
$C^\infty(\mathbb{R}^N)$	Denota o espaço das funções suaves em $\mathbb{R}^N$ .
$C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$	Denota o espaço das funções suaves com suporte compacto em $\mathbb{R}^N$ .
$E^*$	Dual topológico do espaço $E$ .
$\mathcal{N}_\lambda$	Conjunto de Nehari.
$\mathcal{N}_\lambda^+$	Conjunto das funções $u \in \mathcal{N}_\lambda$ tal que $E_\lambda''(u)(u, u) > 0$ .
$\mathcal{N}_\lambda^-$	Conjunto das funções $u \in \mathcal{N}_\lambda$ tal que $E_\lambda''(u)(u, u) < 0$ .
$\mathcal{N}_\lambda^0$	Conjunto das funções $u \in \mathcal{N}_\lambda$ tal que $E_\lambda''(u)(u, u) = 0$ .
$L^p(\mathbb{R}^N)$	Classe de funções $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $u$ é mensurável e $\int_{\mathbb{R}^N}  u ^p dx < +\infty$ , com $1 \leq p < +\infty$ .
$H^1(\Omega)$	$\left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \text{ para } i = 1, \dots, n \right\}$ .
$W^{k,p}(\Omega)$	$\{ u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para todo multi-índice } \alpha \text{ tal que }  \alpha  \leq k \}$ .

**Espaços e Normas**

$\ \cdot\ _{k,p}$	Norma no espaço $W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ .
$\ \cdot\ _r$	Norma no espaço $L^r(\mathbb{R}^N)$ , com $r \in [1, \infty)$ .
$\ \cdot\ _\infty$	Norma no espaço $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ .
$\ \cdot\ $	Norma em $X$ .

---

## Introdução

---

Este trabalho tem como principal objetivo estudar a existência e multiplicidade de soluções fracas para problemas elípticos semilineares que são obtidos apartir da equação de Choquard, descrita a seguir:

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = (I_\alpha * |u|^p)|u|^{p-2}u + \lambda|u|^{q-2}u, & \text{em } \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases} \quad (0-1)$$

Durante todo o texto serão consideradas as seguintes hipóteses sobre o Problema (0-1):

- (Q) Vale  $1 < q < 2$  e  $p \in (2_\alpha, 2_\alpha^*)$ , onde  $2_\alpha = \frac{N + \alpha}{N}$  e  $2_\alpha^* = \frac{N + \alpha}{N - 2}$ ;
- (V<sub>1</sub>) A função  $V : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua e existe uma constante  $V_0 > 0$  tal que  $V(x) \geq V_0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^N$ ;
- (V<sub>2</sub>) Tem-se que  $V^{-1} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ , ou seja, a função  $V$  satisfaz a seguinte condição de integrabilidade

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{V(x)} dx < +\infty.$$

Além disso  $I_\alpha$ , denotado por Potencial de Riesz, é dado por

$$I_\alpha(x) = \frac{A_\alpha(N)}{|x|^{N-\alpha}}, \quad x \in \mathbb{R}^N \text{ com } A_\alpha(N) = \frac{\Gamma\left(\frac{N-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \pi^{\frac{N}{2}} 2^\alpha},$$

onde  $\Gamma$  denota a função gamma, veja em [16]. Vale ressaltar também que  $\lambda > 0$ ,  $N \geq 3$  e  $\alpha \in (0, N)$ .

Um exemplo padrão da função  $V(x)$  que satisfaz as hipóteses (V<sub>1</sub>) e (V<sub>2</sub>) é explicitada no Apêndice B.1.

O espaço de trabalho considerado no Problema (0-1) será

$$X = \left\{ v \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(x)v^2 dx < +\infty \right\}, \quad (0-2)$$

onde  $X$  é um espaço de Banach munido da norma:

$$\|u\| := \left( \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sob tais hipóteses a imersão  $X \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$  é contínua para cada  $r \in [1, 2^*]$  e compacta para cada  $r \in [1, 2^*)$ , onde  $2^* = \frac{2N}{N-2}$ , como será provado na Proposição 2.1.

A equação de Choquard tem diversas aplicações físicas importantes. Por exemplo, ao considerar  $N = 3$ ,  $\alpha = 2$ ,  $p = 2$ ,  $\lambda = 0$  e  $V \equiv 0$ , o Problema (0-1) foi investigado em [17] no contexto da teoria quântica de um polaron em repouso. Essa abordagem forneceu uma base teórica para fenômenos como condutividade, absorção óptica e recombinação em cristais iônicos.

Outra aplicação importante de equações do tipo Choquard surge no cenário da física de plasmas, na teoria de Hartree–Fock, apresentada em [14]. Lieb demonstrou a existência e unicidade da solução minimizante do problema não convexo em questão, utilizando técnicas sofisticadas de reordenamento simétrico decrescente.

Para cada solução  $u$  do Problema (0-1) obtemos a função de onda  $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $\Phi(t, x) = e^{it}u(x)$ , onde  $i$  é a unidade imaginária. A função  $\Phi(t, x)$  obtida dessa forma é, na verdade, uma onda solitária da equação de Hartree dependente do tempo

$$-i\Phi_t - \Delta\Phi + W(x)\Phi - (I_\alpha * |\Phi|^p)|\Phi|^{p-2}\Phi - \lambda|\Phi|^{q-2}\Phi = 0, \quad \text{em } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N,$$

onde  $W(x) = V(x) - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}^N$ . Logo, o Problema (0-1) pode ser entendido como a equação de Hartree não linear estacionária. Nessa direção, o trabalho [18] examina a estabilidade de uma superposição quântica de duas diferentes distribuições de massa estacionárias, onde o efeito perturbador de cada distribuição sobre a estrutura do espaço-tempo é levado em consideração.

Portanto, ao investigar as equações de Choquard, não estamos apenas resolvendo um problema matemático interessante. Estamos construindo ferramentas teóricas que podem ser usadas na física quântica.

Nas últimas décadas, problemas elípticos não locais do tipo Choquard têm sido investigados sob diversas hipóteses quanto ao potencial  $V$ . Muitas literaturas, como atestado em [1, 13, 15, 16], concentra-se especialmente no cenário em que  $\lambda = 0$ , analisando questões de existência, não existência e comportamento qualitativo de soluções fracas. Em tais estudos, frequentemente assume-se que a não linearidade apresenta comportamento superlinear tanto na origem quanto no infinito, esta é uma abordagem consolidada no tratamento de problemas elípticos semilineares com termo não local. Para um panorama complementar, indicamos também as contribuições presentes em [5, 12].

No Problema (0-1), a linearidade é de natureza côncavo-convexa. Esse tipo de

comportamento, que combina concavidade e convexidade em diferentes regiões, aparece com frequência em modelos matemáticos aplicados e tem sido estudado no contexto de operadores diferenciais locais e não locais nos últimos anos.

Neste sentido, citamos o trabalho pioneiro de Ambrosetti, Brezis e Cerami [2]. Os autores demonstram que, para um problema semilinear, quando o parâmetro  $\lambda$  varia no intervalo  $(0, \Lambda)$ , é possível concluir a existência de pelo menos duas soluções positivas em certos intervalos, e a existência de infinitas soluções para o problema simétrico. Além disso o trabalho estuda a estrutura qualitativa do conjunto de soluções.

Enquanto [2] estuda problemas em domínios limitados com termos puramente côncavos e convexos, Wu [26] introduz funções peso que podem ser positivas ou negativas em diferentes regiões do espaço, o que torna a análise mais delicada e realista para aplicações físicas. Além disso, Wu [26] demonstra a existência de no mínimo duas soluções positivas sob condições adequadas nos parâmetros  $\lambda$  e  $\mu$  não negativos, utilizando uma combinação de métodos variacionais, o método de Nehari e técnicas de Lusternik-Schnirelman. Nesta direção, aos leitores interessados, citamos o trabalho [8].

Tendo em vista o problema estudado por Carvalho, Silva e Goulart [21], o principal objetivo em nosso trabalho é utilizar o chamado quociente de Rayleigh, introduzido por Il'yasov [9], para estudar a existência e multiplicidade de soluções para o Problema (0-1). Esta ferramenta transforma um problema de multiplicidade de pontos críticos em um estudo geométrico controlado. Por meio desse quociente, será demonstrado a existência de um extremal positivo  $\lambda^* > 0$ , onde para cada parâmetro  $\lambda$  no intervalo  $(0, \lambda^*]$ , o Problema (0-1) admite pelo menos duas soluções distintas.

O ponto-chave da demonstração reside em garantir que, para todo  $\lambda$  nesse intervalo, a estrutura variacional do problema permite a aplicação do *método de Nehari*, um procedimento que explora a geometria do funcional de energia para obter soluções de diferentes tipos.

Nesta direção, em [4], os autores mostram que os quocientes de Rayleigh são empregados como uma ferramenta para separar e identificar diferentes tipos de pontos críticos na variedade de Nehari. Essa separação é viabilizada justamente através do cálculo de valores extremais, que atuam como fronteiras analíticas no espaço de parâmetros. Estes extremais não apenas delimitam a região onde a variedade de Nehari e o método variacional são aplicáveis, mas também permitem distinguir entre diferentes ramos de soluções, como soluções positivas, estados fundamentais e soluções com energias distintas.

Nos últimos anos vários pesquisadores vêm se dedicando em utilizar o método do quociente de Rayleigh generalizado para estudo de problemas não lineares locais e não locais. Para os leitores interessados neste assunto, recomendamos [9], que não utiliza os quociente de Rayleigh explicitamente mas possui a estrutura conceitual e metodológica análoga à apresentada em [4]. Também recomendamos [10]. Nele os autores estudam

problemas de valor de contorno não lineares, os quais envolvem o p-Laplaciano, uma não linearidade indefinida, e dependem de um parâmetro real  $\lambda$ . Eles utilizam o método do quociente de Rayleigh para encontrar o extremal  $\lambda^*$  da variedade de Nehari, e provar que quando  $\lambda$  está acima desse limiar  $\lambda^*$ , temos no mínimo duas soluções para o problema.

Como citado acima, para elaboração desta dissertação, tomamos como referência principal o estudo desenvolvido por Carvalho, Silva e Goulart [21]. Neste artigo os autores demonstram que ao incorporar as hipóteses  $(Q)$ ,  $(V_1)$  e  $(V_2)$  ao Problema (0-1), é possível assegurar a existência de soluções extritamente positivas para cada valor do parâmetro  $\lambda \in (0, \lambda^*]$ . Além disso, por meio da construção e análise de sequências adequadas, os autores estudam o comportamento assintótico destas soluções para quando  $\lambda \rightarrow \tilde{\lambda}$  onde  $\tilde{\lambda} \in (0, \lambda^*)$ , para quando  $\lambda \rightarrow \lambda^*$  e  $\lambda \rightarrow 0$ . Mais especificamente foram obtidos 4 resultados principais, que estão enunciados a seguir:

**Teorema 1.1.** Suponha que as hipóteses  $(Q)$ ,  $(V_1)$  e  $(V_2)$  sejam válidas. Então  $0 < \lambda_* < \lambda^* < \infty$  e, para cada  $\lambda \in (0, \lambda^*)$ , o Problema (0-1) admite pelo menos duas soluções positivas distintas  $u_\lambda, v_\lambda \in X$  satisfazendo:

- $u_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda^+$  e  $v_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda^-$ .
- $E_\lambda(u_\lambda) < 0$ ;

Além disso,  $u_\lambda$  é solução de energia mínima e  $v_\lambda$  satisfaz:

- (i) Para cada  $\lambda \in (0, \lambda_*)$ , temos  $E_\lambda(v_\lambda) > 0$ ;
- (ii) Para cada  $\lambda = \lambda_*$ , deduzimos  $E_\lambda(v_\lambda) = 0$ ;
- (iii) Para cada  $\lambda \in (\lambda_*, \lambda^*)$ , temos também  $E_\lambda(v_\lambda) < 0$ .

**Teorema 1.2.** Suponha  $(Q)$ ,  $(V_1)$  e  $(V_2)$ . Dado  $\tilde{\lambda} \in (0, \lambda^*)$  fixado, tome a sucessão  $(\lambda_j) \subset (0, \lambda^*)$  tal que  $\lambda_j \rightarrow \tilde{\lambda}$  quando  $j \rightarrow \infty$ . Então

- i) As funções  $\lambda \mapsto \mathcal{E}_\lambda^1$  e  $\lambda \mapsto \mathcal{E}_\lambda^2$  são decrescentes e  $\mathcal{E}_\lambda^1 < \mathcal{E}_\lambda^2$ ;
- ii) As funções  $\lambda \mapsto u_\lambda$  e  $\lambda \mapsto v_\lambda$  são contínuas, i.e.,  $u_{\lambda_j} \rightarrow u_{\tilde{\lambda}}$  e  $v_{\lambda_j} \rightarrow v_{\tilde{\lambda}}$  em  $X$  quando  $j \rightarrow \infty$ , onde

$$E_{\tilde{\lambda}}(u_{\tilde{\lambda}}) = \mathcal{E}_{\tilde{\lambda}}^1, \quad E_{\tilde{\lambda}}(v_{\tilde{\lambda}}) = \mathcal{E}_{\tilde{\lambda}}^2, \quad E_{\lambda_j}(u_{\lambda_j}) = \mathcal{E}_{\lambda_j}^1 \quad e \quad E_{\lambda_j}(v_{\lambda_j}) = \mathcal{E}_{\lambda_j}^2$$

- iii)  $\mathcal{E}_{\lambda_j}^i \rightarrow \mathcal{E}_{\tilde{\lambda}}^i$  quando  $j \rightarrow \infty$ , ou seja,  $\lambda \mapsto \mathcal{E}_\lambda^i$  são funções contínuas para cada  $i = 1, 2$ .

As definições de  $\mathcal{E}_\lambda^1$  e  $\mathcal{E}_\lambda^2$  podem ser encontradas em (1-17) e (1-18).

**Teorema 1.3.** Suponha  $(Q)$ ,  $(V_1)$  e  $(V_2)$ . Tome a sucessão  $(\lambda_j) \subset (0, \lambda^*)$  tal que  $\lambda_j \rightarrow 0$  quando  $j \rightarrow \infty$ . Então obtemos as seguintes afirmações:

- i)  $\mathcal{E}_{\lambda_j}^1 \rightarrow 0$  e  $\mathcal{E}_{\lambda_j}^2 \rightarrow \mathcal{E}_0^2$  quando  $j \rightarrow \infty$ , ou seja, a função  $\lambda \mapsto \mathcal{E}_\lambda^i$  é contínua à direita em  $\lambda = 0$  para cada  $i = 1, 2$ .

ii)  $u_{\lambda_j} \rightarrow 0$  e  $v_{\lambda_j} \rightarrow v_0$  em  $X$  quando  $j \rightarrow \infty$ , onde  $v_0$  é uma solução positiva do Problema (0-1) com  $\lambda = 0$ .

**Teorema 1.4.** Suponha  $(Q)$ ,  $(V_1)$  e  $(V_2)$  e assumamos também que  $\lambda = \lambda^*$ . Então, o Problema (0-1) admite pelo menos duas soluções positivas  $u_{\lambda^*}$  e  $v_{\lambda^*}$ . Além disso,  $\mathcal{E}_{\lambda^*}^1 < \mathcal{E}_{\lambda^*}^2$ .

Diante do exposto, o objetivo central do presente trabalho consistiu em realizar uma análise minuciosa e aprofundada dos teoremas acima, apresentados no Artigo [21]. Buscou-se não apenas compreender de forma clara e estruturada as conclusões alcançadas pelos autores, mas também detalhar passo a passo os desenvolvimentos matemáticos e os cálculos envolvidos.

Para alcançar esses objetivos, dividimos esse trabalho em 4 capítulos. No Capítulo 1 são apresentados alguns conceitos preliminares fundamentais para a análise do Problema (0-1). Inicialmente, associaremos ao Problema (0-1) um funcional de energia cujo pontos críticos serão soluções fracas da Equação (0-1). Em seguida, introduz-se o Conjunto de Nehari e sua decomposição em subconjuntos, ferramenta essencial para distinguir diferentes tipos de pontos críticos e níveis de energia. Na sequência, são definidos os quocientes de Rayleigh não lineares, que desempenham papel central na aplicação do método de Nehari. Por fim, são enunciados os principais resultados do trabalho, com destaque ao Teorema 1.1 que trata da existência e multiplicidade de soluções para (0-1).

O Capítulo 2 é dedicado ao desenvolvimento de resultados preliminares indispensáveis para a análise variacional do funcional associado ao Problema de Choquard. Inicialmente, são estudadas propriedades de imersão contínua e compacta do espaço de trabalho  $X$  em espaços de Lebesgue, garantindo as condições de compacidade necessárias ao método variacional. O capítulo também aborda propriedades essenciais dos quocientes de Rayleigh não lineares e dos funcionais auxiliares associados, bem como o comportamento da fibra do funcional energia. Esses resultados fornecem a base técnica necessária para a caracterização dos pontos críticos e sustentam as demonstrações dos teoremas principais apresentados nos capítulos subsequentes.

No Capítulo 3 será desenvolvida a demonstração do Teorema 1.1 o qual estabelece a existência e a multiplicidade de soluções para o Problema (0-1). Inicialmente, são analisadas as propriedades geométricas do funcional energia quando restrito aos subconjuntos  $\mathcal{N}_\lambda^+$  e  $\mathcal{N}_\lambda^-$  do Conjunto de Nehari, evidenciando a boa definição e o comportamento dos níveis minimizantes associados  $\mathcal{E}_\lambda^1$  e  $\mathcal{E}_\lambda^2$  respectivamente. Em seguida, prova-se a existência de pontos críticos do funcional  $E_\lambda$  por meio de sequências minimizantes nos subconjuntos de Nehari. Por fim, conclui-se a prova do teorema principal, caracterizando a natureza das soluções obtidas, o sinal de suas energias e a dependência desses resultados em relação ao parâmetro  $\lambda$ .

No Capítulo 4 serão apresentadas as demonstrações dos Teoremas 1.2, 1.3 e 1.4. Inicialmente analisa-se a continuidade e monotonicidade nos níveis minimizantes  $\mathcal{E}_\lambda^1$  e  $\mathcal{E}_\lambda^2$ , bem como a continuidade das soluções quando  $\lambda$  varia em  $(0, \lambda^*)$ . Em seguida, estuda-se o comportamento das soluções no limite  $\lambda \rightarrow 0$ . Por fim, é abordado o caso crítico  $\lambda = \lambda^*$ , no qual, apesar das dificuldades associadas à utilização do método de Nehari, demonstra-se a existência de duas soluções distintas, completando assim a análise da estrutura variacional do Problema (0-1).

## Fundamentos Teóricos

Neste capítulo, serão introduzidos ao leitor as principais características do Problema (0-1), principais resultados e teoremas necessários para cumprir o objetivo deste trabalho.

### 1.1 Estrutura Variacional do Problema

Para encontrar soluções fracas do Problema (0-1), empregaremos o *método variacional*. Essa abordagem consiste em estudar um funcional associado ao problema, cujos pontos críticos correspondem às soluções fracas desejadas. Formalmente, o funcional de energia relacionado ao Problema (0-1) é dado por

$$E_\lambda(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx - \frac{\lambda}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx, \quad u \in X. \quad (1-1)$$

**Observação 1.1.** *Considere a aplicação*

$$E : (0, +\infty) \times X \rightarrow \mathbb{R}, \quad E(\lambda, u) := E_\lambda(u)$$

onde  $E_\lambda(u)$  é dado pela Equação (1-1). Afirmamos que  $E$  é contínua em relação a  $\lambda$ .

De fato, note que  $E_\lambda(u)$  é da forma

$$E_\lambda(u) = A(u) - \lambda B(u)$$

onde  $A(u)$  e  $B(u)$  são funcionais que não dependem de  $\lambda$ . Como  $E_\lambda$  é uma função afim em  $\lambda$ , se  $\lambda_j \rightarrow \tilde{\lambda}$  e  $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ , temos

$$\lim_{\lambda_j \rightarrow \tilde{\lambda}} E(\lambda_j, u) = E(\tilde{\lambda}, u).$$

Como nosso principal objetivo é determinar pontos críticos do funcional energia  $E_\lambda$ , associado ao Problema (0-1), é fundamental calcular a sua derivada de Gâteaux. Neste

contexto, obtém-se o seguinte resultado.

**Proposição 1.1.** *O funcional  $E_\lambda$  é Gâteaux diferenciável, e sua derivada é dada por*

$$E'_\lambda(u)\psi = \langle u, \psi \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^{p-2} u \psi dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q-2} u \psi dx. \quad (1-2)$$

*Demonstração.* Por definição, a derivada de Gâteaux  $E'_i(u)$  do funcional  $E_i$  é dada por

$$E'_i(u)\psi := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{E_i(u + t\psi) - E_i(u)}{t}, \quad u \in X \quad \text{e} \quad \psi \in H^1(\mathbb{R}^N)$$

desde que o limite exista.

Para que obtenhamos  $E'_\lambda(u)\psi$ , será calculada a igualdade acima em cada parte do Funcional (1-1) considerando  $\psi \in X$ , posteriormente veremos que esse resultado pode ser estendido para todo  $\psi \in H^1(\mathbb{R}^N)$  (veja Proposição 2.2).

- Para  $E_1(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2$ , temos.

$$\begin{aligned} E'_1(u)\psi &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|u + t\psi\|^2 - \|u\|^2}{t} = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\langle u + t\psi, u + t\psi \rangle - \|u\|^2}{t} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|u\|^2 + 2t \langle u, \psi \rangle + t^2 \|\psi\|^2 - \|u\|^2}{t}, \end{aligned}$$

assim

$$E'_1(u)\psi = \lim_{t \rightarrow 0} \left( \langle u, \psi \rangle + \frac{t}{2} \|\psi\|^2 \right).$$

Portanto

$$E'_1(u)\psi = \langle u, \psi \rangle.$$

- Para  $E_3(u) = -\frac{\lambda}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx$  observamos o que segue.

Pelo Teorema do Valor Médio existe  $\theta \in (0, 1)$  tal que

$$|u + t\psi|^q - |u|^q = tq|u + t\theta\psi|^{q-2}(u + t\theta\psi)\psi,$$

logo

$$\begin{aligned} E'_3(u)\psi &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{\lambda}{q} \int |u + t\psi|^q dx + \frac{\lambda}{q} \int |u|^q dx}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{\lambda}{q} \int |u + t\psi|^q - |u|^q dx}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\frac{\lambda}{q} \int tq|u + t\theta\psi|^{q-2}(u + t\theta\psi)\psi dx}{t}, \end{aligned}$$

então

$$E'_3(u)\psi = -\lambda \lim_{t \rightarrow 0} \int \frac{t|u + t\theta\psi|^{q-2}(u + t\theta\psi)\psi}{t} dx. \quad (1-3)$$

Note que

$$\begin{aligned} |u + t\theta\psi|^{q-2}(u + t\theta\psi)\psi &\leq |u + t\theta\psi|^{q-1}|\psi| \leq (|u| + |\psi|)^{q-1}|\psi| \\ &\leq (2 \max\{|u|, |\psi|\})^{q-1}|\psi| \leq 2^{q-1}(|u|^{q-1} + |\psi|^{q-1})|\psi|. \end{aligned}$$

Queremos agora mostrar que  $2^{q-1}(|u|^{q-1} + |\psi|^{q-1})|\psi| \in L^1(\mathbb{R}^N)$ . De fato

$$\int 2^{q-1}(|u|^{q-1} + |\psi|^{q-1})|\psi| dx = \int 2^{q-1}|u|^{q-1}|\psi| dx + \int 2^{q-1}|\psi|^q dx,$$

como para todo  $1 \leq r \leq 2^*$ , a imersão  $X \hookrightarrow L^r$  é contínua, em particular quando  $r = q$ , temos que  $\int 2^{q-1}|\psi|^q dx < \infty$ . Por outro lado, pela desigualdade de Hölder

$$\int 2^{q-1}|u|^{q-1}|\psi| dx \leq 2^{q-1} \left( \int |u|^{q-1 \frac{q}{q-1}} \right)^{\frac{q-1}{q}} \left( \int \psi^q \right)^{\frac{1}{q}} = 2^{q-1} \|u\|_q^{q-1} \|\psi\|_q$$

pois  $u$  e  $\psi$  estão definidos em  $X \hookrightarrow L^q$ . Assim o integrando de (1-3) é dominado por uma função em  $L^1(\mathbb{R}^N)$ . Pelo Teorema da Convergência Dominada

$$E'_3(u)\psi = -\lambda \int |u|^{q-2}u\psi dx.$$

- Para  $E_2(u) = -\frac{1}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p)|u|^p dx$ , podemos escrever

$$E'_2(u)\psi = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{E_2(u + t\psi) - E_2(u)}{t}.$$

Por outro lado, temos que

$$E_2(u + t\psi) - E_2(u) = -\frac{1}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} [(I_\alpha * |u + t\psi|^p)|u + t\psi|^p - (I_\alpha * |u|^p)|u|^p] dx.$$

Somando e subtraindo  $(I_\alpha * |u|^p)|u + t\psi|^p$  na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} E_2(u + t\psi) - E_2(u) &= -\frac{1}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} \left[ (I_\alpha * |u + t\psi|^p)|u + t\psi|^p - (I_\alpha * |u|^p)|u + t\psi|^p \right. \\ &\quad \left. + (I_\alpha * |u|^p)|u + t\psi|^p - (I_\alpha * |u|^p)|u|^p \right] dx \\ &= -\frac{1}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} \left[ (I_\alpha * (|u + t\psi|^p - |u|^p))|u + t\psi|^p \right. \\ &\quad \left. + (I_\alpha * |u|^p)(|u + t\psi|^p - |u|^p) \right] dx. \end{aligned}$$

Dividindo por  $t$  obtemos

$$\begin{aligned} \frac{E_2(u+t\psi) - E_2(u)}{t} &= -\frac{1}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} \left[ (I_\alpha * \frac{|u+t\psi|^p - |u|^p}{t}) |u+t\psi|^p \right. \\ &\quad \left. + (I_\alpha * |u|^p) \frac{|u+t\psi|^p - |u|^p}{t} \right] dx. \end{aligned} \quad (1-4)$$

Note que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|u+t\psi|^p - |u|^p}{t} = p|u|^{p-2}u\psi,$$

e

$$|u+t\psi|^p \rightarrow |u|^p \quad \text{quando } t \rightarrow 0, \quad \text{q.t.p em } \mathbb{R}^N.$$

Análogo ao que foi feito para  $E_3$  é possível provar que (1-4) é dominada por uma função em  $L^1(\mathbb{R}^N)$ . Assim, passando ao limite em (1-4), pelo Teorema da Convergência Dominada

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{E_2(u+t\psi) - E_2(u)}{t} &= -\frac{1}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{t \rightarrow 0} \left[ (I_\alpha * \frac{|u+t\psi|^p - |u|^p}{t}) |u+t\psi|^p \right. \\ &\quad \left. + (I_\alpha * |u|^p) \frac{|u+t\psi|^p - |u|^p}{t} \right] dx. \end{aligned} \quad (1-5)$$

Para o primeiro termo temos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left( I_\alpha * \frac{|u+t\psi|^p - |u|^p}{t} |u+t\psi|^p \right) = I_\alpha * (p|u|^{p-2}u\psi) |u|^p. \quad (1-6)$$

Para o segundo termo

$$\lim_{t \rightarrow 0} (I_\alpha * |u|^p) \frac{|u+t\psi|^p - |u|^p}{t} = (I_\alpha * |u|^p) p|u|^{p-2}u\psi. \quad (1-7)$$

Das Equações (1-6) e (1-7) obtemos

$$E_2'(u)\psi = -\frac{1}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} \left[ p(I_\alpha * (|u|^{p-2}u\psi)) |u|^p + p(I_\alpha * |u|^p) |u|^{p-2}u\psi \right] dx. \quad (1-8)$$

Por fim, usando a simetria do produto de convolução de Riesz temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} [I_\alpha * (|u|^{p-2}u\psi)] |u|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} [I_\alpha * |u|^p] |u|^{p-2}u\psi dx.$$

Substituindo a igualdade acima em (1-8)

$$\begin{aligned} E'_2(u)\psi &= -\frac{1}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} [p(I_\alpha * |u|^p)|u|^{p-2}u\psi + p(I_\alpha * |u|^p)|u|^{p-2}u\psi] dx \\ &= -\frac{1}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} 2p(I_\alpha * |u|^p)|u|^{p-2}u\psi dx \end{aligned}$$

Portanto

$$E'_2(u)\psi = - \int (I_\alpha * |u|^p)|u|^{p-2}u\psi dx.$$

Somando as três derivadas obtidas temos

$$E'_\lambda(u)\psi = \langle u, \psi \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p)|u|^{p-2}u\psi dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q-2}u\psi dx.$$

Isto conclui a demonstração da proposição.  $\square$

Vale ressaltar que consideramos a última identidade para qualquer função teste  $\psi \in X$ . No entanto, usando algumas estimativas, podemos estendê-la para qualquer  $\psi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ , o que será provado a Proposição 2.2.

**Definição 1.1.** Dizemos que  $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$  é um ponto crítico do funcional  $E$  se

$$E'(u)\psi = 0 \quad \text{para toda } \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N),$$

onde  $E'(u)\psi$  denota a derivada de Gâteaux de  $E$  em  $u$ .

Como ressaltado anteriormente, o objetivo principal deste trabalho é demonstrar a multiplicidade de soluções fracas para o Problema (0-1). Para tanto, a partir do problema principal, consideramos a não linearidade dada por

$$f(x, u) = -V(x)u + (I_\alpha * |u|^p)|u|^{p-2}u + \lambda|u|^{q-2}u. \quad (1-9)$$

Usando a Definição A.1, dizemos que uma função  $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$  é uma solução fraca do Problema (0-1) se satisfaz a seguinte identidade variacional

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla \psi dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u) \psi dx, \quad \forall \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N). \quad (1-10)$$

Dado que  $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$  é denso em  $H^1(\mathbb{R}^N)$  estabelecer a solução fraca para todo  $\psi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ , implica automaticamente sua validade no conjunto  $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ . A formulação acima motiva a definição formal a seguir.

**Definição 1.2.** Dizemos que uma função  $u \in X$  é uma solução fraca para o Problema (0-1) quando satisfaz

$$\langle u, \psi \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^{p-2} u \psi dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q-2} u \psi dx = 0 \quad \text{para toda } \psi \in H^1(\mathbb{R}^N),$$

onde o produto interno em  $X$  é definido por

$$\langle u, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla \psi + V(x) u \psi) dx, \quad u, \psi \in X.$$

Comparando a definição de solução fraca do Problema (0-1) apresentada em 1.2 e a derivada de Gâteaux de  $E_\lambda$  obtida na Proposição 1.1 podemos concluir o seguinte resultado.

**Proposição 1.2.** *Uma função  $u \in X$  é uma solução fraca do Problema elíptico (0-1) se e somente se  $u$  é um ponto crítico do funcional  $E_\lambda$ .*

**Observação 1.2.** *É possível provar que a derivada de Gâteaux de  $E_\lambda$  exposta na Equação (1-2) é contínua. Assim  $E_\lambda$  é Fréchet diferenciável (veja em [25, Proposição 1.3]).*

Dessa forma, será aplicada a teoria variacional, aproveitando a imersão contínua  $X \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$  para todo  $r \in [1, 2^*]$ . Essa propriedade é fundamental para assegurar que o funcional  $E_\lambda$  pertença à classe  $C^1(X, \mathbb{R})$ , ou seja, que seja continuamente diferenciável no espaço  $X$ . Sob essa condição,  $E_\lambda$  admite pontos críticos, os quais correspondem a soluções fracas do Problema (0-1). A existência de tais soluções será estabelecida formalmente na Proposição 3.1.

Para analisar a estrutura variacional do problema e caracterizar os pontos críticos do funcional  $E_\lambda$ , a seguir será feito o cálculo da segunda derivada de Gâteaux de  $E_\lambda$  na direção  $(u, u)$ . Esta quantidade desempenha um papel fundamental na definição do conjunto de Nehari, que será explorado adiante.

**Proposição 1.3.** *Seja  $u$  tal que  $E'_\lambda(u)u = 0$ . A segunda derivada de Gâteaux de  $E_\lambda$  em  $u$ , na direção  $(u, u)$  é dada por*

$$E''_\lambda(u)(u, u) = (2 - q) \|u\|^2 + (q - 2p) \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx.$$

*Demonstração.* Definindo

$$H(u) := E'(u)u = \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx$$

temos que

$$\langle H'(u), \psi \rangle = 2\langle u, \psi \rangle - 2p \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^{p-2} u \psi dx - q\lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q-2} u \psi dx.$$

Por hipótese  $E'(u)u = 0$ , assim

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx = \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx$$

e

$$H'(u)u = 2\|u\|^2 - 2p \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx - q\lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx. \quad (1-11)$$

Logo  $H'(u)u$  pode ser escrita da seguinte forma:

$$H'(u)u = 2\|u\|^2 - 2p \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx - q \left( \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx \right).$$

Portanto

$$E_\lambda''(u)(u, u) = (2 - q)\|u\|^2 + (q - 2p) \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx.$$

Isso finaliza a prova.  $\square$

## 1.2 Conjuntos de Nehari

Para estabelecer a existência de soluções não triviais para o Problema (0-1), adotaremos uma estratégia baseada no Conjunto de Nehari. Esta técnica, amplamente utilizada no cálculo de variações, restringe o funcional energia a um subconjunto onde a análise se torna mais tratável. Formalmente, o Conjunto de Nehari é definido a seguir

$$\mathcal{N}_\lambda := \left\{ u \in X \setminus \{0\} : \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx \right\}, \quad \lambda > 0. \quad (1-12)$$

Visto que  $1 < q < 2$  e  $p \geq 1$ , é importante ressaltar que o conjunto de Nehari pode ser particionado da seguinte maneira

$$\mathcal{N}_\lambda^+ = \{u \in \mathcal{N}_\lambda : E_\lambda''(u)(u, u) > 0\}, \quad (1-13)$$

$$\mathcal{N}_\lambda^- = \{u \in \mathcal{N}_\lambda : E_\lambda''(u)(u, u) < 0\}, \quad (1-14)$$

$$\mathcal{N}_\lambda^0 = \{u \in \mathcal{N}_\lambda : E_\lambda''(u)(u, u) = 0\}. \quad (1-15)$$

A partição do conjunto de Nehari nos subconjuntos  $\mathcal{N}_\lambda^+$ ,  $\mathcal{N}_\lambda^-$  e  $\mathcal{N}_\lambda^0$  está intimamente relacionada com a natureza dos pontos críticos do funcional. Neste contexto, introduzimos a seguinte definição.

**Definição 1.3.** *Uma solução não trivial  $u \in X$  é chamada de solução de energia mínima para o Problema (0-1) se satisfaz*

$$E_\lambda(u) = \inf \{E_\lambda(v) : v \in X \setminus \{0\} \text{ e } E'_\lambda(v) = 0\}. \quad (1-16)$$

Esta definição caracteriza as soluções que minimizam globalmente o funcional energia entre todos os pontos críticos não triviais. Tais soluções possuem importância particular, pois representam os estados de mais baixa energia. Para alcançar este objetivo, adotamos uma estratégia que consiste em buscar minimizantes restritos aos subconjuntos  $\mathcal{N}_\lambda^+$  e  $\mathcal{N}_\lambda^-$ , os quais possuem propriedades geométricas distintas que facilitam a análise variacional. Sendo assim o principal objetivo desse trabalho é encontrar soluções para os seguintes problemas de minimização

$$\mathcal{E}_\lambda^1 := \inf \{E_\lambda(u) : u \in \mathcal{N}_\lambda^+\}, \quad (1-17)$$

$$\mathcal{E}_\lambda^2 := \inf \{E_\lambda(u) : u \in \mathcal{N}_\lambda^-\}, \quad (1-18)$$

onde  $E_\lambda(u)$  é o funcional energia dado por (1-1).

É importante ressaltar que ao comparar os níveis de energia dados em (1-16) e (1-17), qualquer minimizador  $u_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda^+$  fornece uma solução de energia mínima para o Problema (0-1).

Para encontrar tais minimizadores precisaremos dos resultados abaixo.

**Lema 1.1.** *Seja  $u \in X \setminus \{0\}$ ,*

$$u \in \mathcal{N}_\lambda \quad \text{se e somente se} \quad \lambda = \frac{\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx}{\|u\|_q^q}.$$

onde  $\|u\|_q^q = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx$ .

*Demonstração.* Pela definição de  $\mathcal{N}_\lambda$ , se  $u \in \mathcal{N}_\lambda$ , então

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx = \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx.$$

Como será visto na Proposição 2.1,  $X \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ , logo  $\|u\|_q^q \neq 0$ . Dividindo ambos os lados por  $\|u\|_q^q$ , obtemos

$$\lambda = \frac{\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx}{\|u\|_q^q}.$$

Por outro lado, se para algum  $u \in X \setminus \{0\}$  vale

$$\lambda = \frac{\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx}{\|u\|_q^q}.$$

Como uma consequência, podemos concluir que

$$\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx, \text{ ou seja, } u \in \mathcal{N}_\lambda.$$

□

De modo análogo ao lema anterior, porém utilizando a definição do potencial  $E_\lambda(u)$ , demonstra-se o seguinte resultando.

**Lema 1.2.** *Dado  $u \in X$ ,*

$$E_\lambda(u) = 0 \quad \text{se e somente se} \quad \lambda = \frac{\frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx}{\frac{1}{q}\|u\|_q^q}.$$

### 1.3 Quocientes de Rayleigh

Com base nos resultados anteriores, introduziremos os *quocientes de Rayleigh generalizados não lineares*  $R_n, R_e: X \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  associados ao parâmetro  $\lambda > 0$  da seguinte forma

$$R_n(u) = \frac{\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx}{\|u\|_q^q}, \quad u \in X \setminus \{0\}$$

e

$$R_e(u) = \frac{\frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx}{\frac{1}{q}\|u\|_q^q}, \quad u \in X \setminus \{0\}.$$

Dessa forma, os Lemas 1.1 e 1.2 podem ser reformulados, respectivamente, como

$$u \in \mathcal{N}_\lambda \iff R_n(u) = \lambda, u \in X \setminus \{0\}, \quad (1-19)$$

$$E_\lambda(u) = 0 \iff R_e(u) = \lambda, u \in X \setminus \{0\}. \quad (1-20)$$

Sob essas condições, é necessário analisar o comportamento dos funcionais  $R_n$ , o qual nos auxiliará a garantir a existência de soluções de estado fundamental, e  $R_e$ , cuja análise assegura a existência de soluções não triviais com energia zero para o nosso problema principal.

A seguir serão introduzidos os funcionais  $\Lambda_e(u), \Lambda_n(u): X \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  essenciais para a aplicação do quociente de Rayleigh não-linear.

$$\Lambda_e(u) := \max_{t>0} R_e(tu) = \max_{t>0} \left\{ \frac{t^{2-q} \|u\|^2 - \frac{t^{2p-q}}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx}{\frac{1}{q} \|u\|_q^q} \right\}$$

$$\Lambda_n(u) := \max_{t>0} R_n(tu) = \max_{t>0} \left\{ \frac{t^{2-q} \|u\|^2 - t^{2p-q} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx}{\|u\|_q^q} \right\}.$$

Estes fornecem condições precisas para o método de Nehari, garantindo a existência de soluções  $u \in X$  para o Problema (0-1) para cada  $\lambda \in (0, \lambda^*)$ .

Com o intuito de caracterizar os pontos críticos não degenerados e o sinal da energia nesses pontos críticos não triviais, definimos duas quantidades fundamentais conhecidas por *valores extremais*. A primeira, denotada por  $\lambda_*$ , representa o ínfimo dos valores de  $\lambda$  para os quais o funcional energia se anula. A segunda,  $\lambda^*$ , corresponde ao ínfimo dos valores de  $\lambda$  associados ao conjunto de Nehari. Formalmente, estas grandezas são dadas por

$$\lambda_* := \inf_{u \in X \setminus \{0\}} \Lambda_e(u) \quad (1-21)$$

e

$$\lambda^* := \inf_{u \in X \setminus \{0\}} \Lambda_n(u). \quad (1-22)$$

Será demonstrado que, para todo  $\lambda \in (0, \lambda^*)$ , os pontos críticos  $\mathcal{E}_\lambda^1$  e  $\mathcal{E}_\lambda^2$  são efetivamente atingidos. Além disso, como será visto na Observação 2.6, o conjunto  $\mathcal{N}_\lambda^0$  permanece vazio para cada  $\lambda \in (0, \lambda^*)$ , o que torna possível aplicar o método de Nehari explorando a unicidade das projeções sobre  $\mathcal{N}_\lambda^+$  e  $\mathcal{N}_\lambda^-$ , veja a Proposição 2.9. Além disso, o parâmetro  $\lambda = \lambda^*$  desempenha um papel crucial pois, como será visto na Proposição 4.6, este é o primeiro valor positivo para o qual o conjunto  $\mathcal{N}_\lambda^0$  deixa de ser vazio.

## 1.4 Principais Resultados

Introduzido tais definições, conjuntos e hipóteses, é possível compreender os teoremas principais desse trabalho, que serão enunciados a seguir. Porém para demonstração destes, será necessário resultados adicionais que serão apresentados nos capítulos seguintes.

A seguir, enunciamos o primeiro resultado principal.

**Teorema 1.1.** *Suponha que as hipóteses (Q), (V<sub>1</sub>) e (V<sub>2</sub>) sejam válidas. Então  $0 < \lambda_* < \lambda^* < \infty$  e, para cada  $\lambda \in (0, \lambda^*)$ , o Problema (0-1) admite pelo menos duas soluções positivas distintas  $u_\lambda, v_\lambda \in X$  satisfazendo:*

- $u_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda^+$  e  $v_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda^-$ .
- $E_\lambda(u_\lambda) < 0$ ;

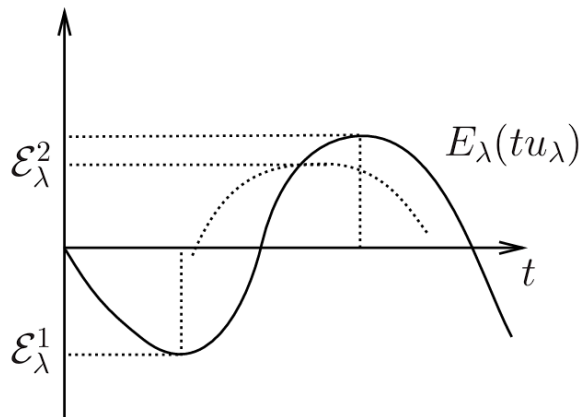
Além disso,  $u_\lambda$  é solução de energia mínima e  $v_\lambda$  satisfaz:

- (i) Para cada  $\lambda \in (0, \lambda_*)$ , temos  $E_\lambda(v_\lambda) > 0$ ;
- (ii) Para cada  $\lambda = \lambda_*$ , deduzimos  $E_\lambda(v_\lambda) = 0$ ;
- (iii) Para cada  $\lambda \in (\lambda_*, \lambda^*)$ , temos também  $E_\lambda(v_\lambda) < 0$ .

Sob as hipóteses do Teorema acima  $u_\lambda$  e  $v_\lambda$  são soluções dos problemas de minimização  $\mathcal{E}_\lambda^1$  e  $\mathcal{E}_\lambda^2$  respectivamente, mais precisamente  $\mathcal{E}_\lambda^1 := E_\lambda(u_\lambda)$  e  $\mathcal{E}_\lambda^2 := E_\lambda(v_\lambda)$ .

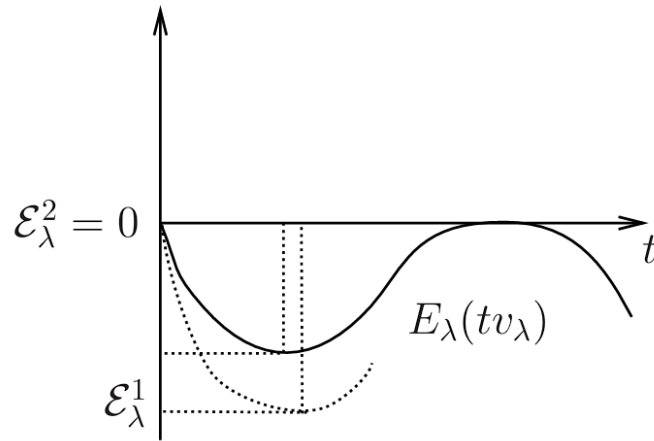
O teorema acima nos fornece a existência e a natureza dos níveis críticos de  $E_\lambda$ , bem como o sinal da energia aplicada em  $v_\lambda$  com base na relação de ordem entre  $\lambda$  e  $\lambda^*$ .

Os gráficos a seguir têm como objetivo fornecer uma interpretação geométrica do comportamento da fibra  $t \mapsto E_\lambda(tv_\lambda)$  em função do parâmetro  $\lambda$ . Em particular, o caso  $\lambda \in (0, \lambda_*)$  é apresentado na Figura 1.1, onde graficamente temos a presença de valores estritamente positivos para  $\mathcal{E}_\lambda^2$ . O caso  $\lambda = \lambda_*$  é apresentado na Figura 1.2, onde a curva de energia tangencia o nível 0 refletindo a condição  $\mathcal{E}_{\lambda_*}^2 = 0$ . E por fim, a Figura 1.3 representa graficamente a fibra sob a condição  $\lambda \in (\lambda_*, \lambda^*)$  onde  $\mathcal{E}_\lambda^2$  possui valores estritamente negativos. Dessa forma, as figuras ilustram de maneira intuitiva a transição estrutural prevista pelo teorema, conectando o resultado analítico à sua interpretação geométrica.



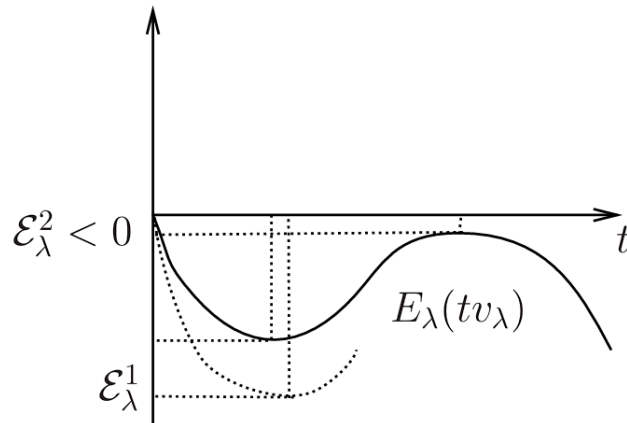
**Figura 1.1:** Fibra  $t \mapsto E_\lambda(tu)$  para  $\lambda \in (0, \lambda_*)$

Fonte: SILVA et al. (2021)



**Figura 1.2:** Fibra  $t \mapsto E_\lambda(tu)$  para  $\lambda = \lambda_*$

Fonte: SILVA et al. (2021)



**Figura 1.3:** Fibra  $t \mapsto E_\lambda(tu)$  para  $\lambda \in (\lambda_*, \lambda^*)$

Fonte: SILVA et al. (2021)

É essencial compreender como os níveis críticos e seus respectivos pontos se comportam em relação ao parâmetro  $\lambda$ . O próximo resultado mostra que estas dependências são bem comportadas. Os níveis críticos variam de forma monótona, as soluções são contínuas com relação a  $\lambda$  e, além disso, os valores críticos convergem quando  $\lambda$  se aproxima de um limite dentro do intervalo  $(0, \lambda^*)$ . Esse comportamento será fundamental para a análise da geometria do funcional associado. A seguir, apresentamos o teorema que formaliza essas propriedades.

**Teorema 1.2.** *Suponha  $(Q)$ ,  $(V_1)$  e  $(V_2)$ . Dado  $\tilde{\lambda} \in (0, \lambda^*)$  fixado, tome a sucessão  $(\lambda_j) \subset (0, \lambda^*)$  tal que  $\lambda_j \rightarrow \tilde{\lambda}$  quando  $j \rightarrow \infty$ . Então:*

- i) *As funções  $\lambda \mapsto \mathcal{E}_\lambda^1$  e  $\lambda \mapsto \mathcal{E}_\lambda^2$  são decrescentes e  $\mathcal{E}_\lambda^1 < \mathcal{E}_\lambda^2$ ;*

ii) As funções  $\lambda \mapsto u_\lambda$  e  $\lambda \mapsto v_\lambda$  são contínuas, i.e.,  $u_{\lambda_j} \rightarrow u_{\tilde{\lambda}}$  e  $v_{\lambda_j} \rightarrow v_{\tilde{\lambda}}$  em  $X$  quando  $j \rightarrow \infty$ , onde

$$E_{\tilde{\lambda}}(u_{\tilde{\lambda}}) = \mathcal{E}_{\tilde{\lambda}}^1, \quad E_{\tilde{\lambda}}(v_{\tilde{\lambda}}) = \mathcal{E}_{\tilde{\lambda}}^2, \quad E_{\lambda_j}(u_{\lambda_j}) = \mathcal{E}_{\lambda_j}^1 \quad e \quad E_{\lambda_j}(v_{\lambda_j}) = \mathcal{E}_{\lambda_j}^2$$

iii)  $\mathcal{E}_{\lambda_j}^i \rightarrow \mathcal{E}_{\tilde{\lambda}}^i$  quando  $j \rightarrow \infty$ , ou seja,  $\lambda \mapsto \mathcal{E}_\lambda^i$  são funções contínuas para cada  $i = 1, 2$ .

Assim o Teorema 1.2 garante a continuidade das funções  $\lambda \mapsto E_\lambda^i$ ,  $\lambda \mapsto u_\lambda$  e  $\lambda \mapsto v_\lambda$  para  $\lambda \rightarrow \tilde{\lambda} \in (0, \lambda^*)$  e para cada  $i = 1, 2$ . No próximo teorema analisaremos o comportamento destas funções quando  $\lambda \rightarrow 0$ .

Mais precisamente, o item i) do teorema abaixo garante que para cada  $i = 1, 2$  a função  $\lambda \mapsto \mathcal{E}_\lambda^i$  é contínua à direita em  $\lambda = 0$ . Já o item ii) mostra que quando  $\lambda_j \rightarrow 0$  as sequências  $(u_{\lambda_j})$  e  $(v_{\lambda_j})$  são convergentes para 0 e  $v_0$  respectivamente, que são soluções não negativas do Problema (0-1).

**Teorema 1.3.** *Suponha  $(Q)$ ,  $(V_1)$  e  $(V_2)$ . Tome a sucessão  $(\lambda_j) \subset (0, \lambda^*)$  tal que  $\lambda_j \rightarrow 0$  quando  $j \rightarrow \infty$ . Então obtemos as seguintes afirmações:*

- i)  $\mathcal{E}_{\lambda_j}^1 \rightarrow 0$  e  $\mathcal{E}_{\lambda_j}^2 \rightarrow \mathcal{E}_0^2$  quando  $j \rightarrow \infty$ , ou seja, a função  $\lambda \mapsto \mathcal{E}_\lambda^i$  é contínua à direita em  $\lambda = 0$  para cada  $i = 1, 2$ .
- ii)  $u_{\lambda_j} \rightarrow 0$  e  $v_{\lambda_j} \rightarrow v_0$  em  $X$  quando  $j \rightarrow \infty$ , onde  $v_0$  é uma solução positiva do Problema (0-1) com  $\lambda = 0$ .

Os Teoremas 1.2 e 1.3 juntos, mostram que tanto as energias quanto as soluções variam continuamente com o parâmetro  $\lambda$  em todo o intervalo  $[0, \lambda^*)$ , com a particularidade de que, quando  $\lambda$  tende a zero, a solução  $u_\lambda$  converge para a solução trivial, enquanto  $v_\lambda$  converge para uma solução positiva do Problema (0-1).

Vale ressaltar que pela condição de Nehari,  $E'_\lambda(u)u = 0$ . Assim, quando  $\lambda \rightarrow 0$

$$\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx \rightarrow 0.$$

Note que a única solução que satisfaz

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx,$$

com  $u_\lambda \in H^1(\mathbb{R}^N)$  é  $u = 0$ . Assim  $u_\lambda \rightarrow 0$  quando  $\lambda \rightarrow 0$ .

O próximo resultado lidará com o caso  $\lambda = \lambda^*$ . Como foi mencionado antes,  $\lambda^*$  é o menor número positivo tal que  $\mathcal{N}_\lambda^0$  é um conjunto não vazio, assim, o método de Nehari não pode ser aplicado diretamente com esse parâmetro.

Ainda assim, para demonstração desse resultado precisamos garantir que  $u_\lambda$  e  $v_\lambda$  não pertençam a  $\mathcal{N}_\lambda^0$ , de forma que esses continuem sendo os minimizadores de  $\mathcal{E}_\lambda^1$  e  $\mathcal{E}_\lambda^2$ .

Para isso usamos um resultado de regularidade junto com um comportamento assintótico de  $u_\lambda$  e  $v_\lambda$  no infinito. Devido ao termo não local, consideramos algumas estimativas refinadas para mostrar que qualquer solução fraca para nossos problemas principais é suave, provando que qualquer ponto crítico do funcional  $E_\lambda$  não pertence a  $\mathcal{N}_{\lambda^*}^0$ . Sob essas condições segue o teorema.

**Teorema 1.4.** *Suponha  $(Q)$ ,  $(V_1)$  e  $(V_2)$  e assuma também que  $\lambda = \lambda^*$ . Então, o Problema (0-1) admite pelo menos duas soluções positivas  $u_{\lambda^*}$  e  $v_{\lambda^*}$ . Além disso,  $\mathcal{E}_{\lambda^*}^1 < \mathcal{E}_{\lambda^*}^2$ .*

Vale ressaltar que  $u_{\lambda^*} \in \mathcal{N}_{\lambda^*}^+$  e  $v_{\lambda^*} \in \mathcal{N}_{\lambda^*}^-$  são os minimizadores para  $\mathcal{E}_{\lambda^*}^1$  e  $\mathcal{E}_{\lambda^*}^2$ , respectivamente, assim  $u_{\lambda^*}$  e  $v_{\lambda^*}$  são soluções distintas. Além disso, sob as hipóteses do Teorema 1.4 podemos concluir que  $u_{\lambda^*}$  e  $v_{\lambda^*}$  possuem energia negativa.

## Resultados Preliminares

Com base nas definições, conjuntos e resultados apresentados no Capítulo 1, este capítulo dedica-se ao estudo detalhado da estrutura variacional do funcional  $E_\lambda$ , com ênfase na análise dos quocientes de Rayleigh,  $R_n$  e  $R_e$ . Será tratado também propriedades essenciais dos funcionais  $\Lambda_n$  e  $\Lambda_e$  e o comportamento da fibra  $\phi(t) = E_\lambda(tu)$ .

A compreensão desses elementos é crucial para a caracterização dos pontos críticos de  $E_\lambda$  e para a investigação das propriedades geométricas do funcional. Os resultados aqui estabelecidos fornecerão base teórica para as demonstrações dos Teoremas 1.1 - 1.4, que serão provados nos capítulos subsequentes.

Inicialmente, consideramos algumas ferramentas fundamentais para o estudo de problemas elípticos não locais associados à equação de Choquard. A seguir, descrevemos a desigualdade de Hardy - Littlewood - Sobolev [16], que é amplamente conhecida e pode ser enunciada da seguinte forma.

**Lema 2.1.** *Sejam  $t, r > 1$  e  $0 < \alpha < N$  tais que  $\frac{1}{t} + \frac{N - \alpha}{N} + \frac{1}{r} = 2$ . Sejam  $\phi \in L^t(\mathbb{R}^N)$  e  $\psi \in L^r(\mathbb{R}^N)$  funções fixas. Então existe uma constante sharp  $C = C(N, \alpha, t) > 0$  tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\phi(x)\psi(y)|}{|x-y|^{N-\alpha}} dx dy \leq C \|\phi\|_t \|\psi\|_r.$$

Além disso, assumindo que  $t = r = \frac{2N}{N + \alpha}$ , mencionamos que

$$C = \pi^{N-\alpha} \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{N+\alpha}{2})} \left\{ \frac{\Gamma(\frac{N}{2})}{\Gamma(N)} \right\}^{\frac{-\alpha}{N}}.$$

*Demonstração.* Ao leitor interessado, a demonstração do lema pode ser encontrada em [16]. □

O próximo resultado é fundamental para o estudo desse texto, este mostra propriedades fundamentais da imersão dos espaços de trabalho  $X$  em  $L^r(\mathbb{R}^N)$  para  $r \in$

$[1, 2^*]$ , onde  $2^* = \frac{2N}{N-2}$ .

**Proposição 2.1.** *Suponha que  $(V_1)$  e  $(V_2)$  sejam válidas. Então, a imersão  $X \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$  é contínua para cada  $r \in [1, 2^*]$ . Além disso, a imersão  $X \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$  é compacta para cada  $r \in [1, 2^*]$ .*

*Demonstração.* Fixe  $u \in X$ . Pela desigualdade de Hölder para  $p = q = 2$ :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u| dx = \int_{\mathbb{R}^N} \sqrt{V(x)^{-1}} \sqrt{V(x)} |u| dx \leq \left( \int_{\mathbb{R}^N} V(x)^{-1} dx \right)^{1/2} \left( \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 dx \right)^{1/2}.$$

Como a hipótese  $(V_2)$  é satisfeita e

$$\|u\| = \left( \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) dx \right)^{1/2} \geq \left( \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx \right)^{1/2} \quad (2-1)$$

temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u| dx \leq \left( \int_{\mathbb{R}^N} V(x)^{-1} dx \right)^{1/2} \|u\|_X < \infty, \quad u \in X. \quad (2-2)$$

Mais precisamente, a Desigualdade (2-2) afirma que existe uma constante  $C$  tal que:  $\|u\|_1 \leq C\|u\|$ , assim a imersão  $X \hookrightarrow L^1(\mathbb{R}^N)$  é contínua. Sabendo que  $X$  é subespaço de  $H^1$ , pelo Teorema de Gagliardo-Nirenberg A.1, a imersão  $X \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$  é contínua.

Fixe  $p^* = 2^*$  e  $q \in (1, p^*)$ . Podemos usar as desigualdades  $1/p^* < 1/q < 1$  para obter  $\theta \in (0, 1)$  tal que

$$\frac{1}{q} = 1 - \theta + \theta \frac{1}{p^*},$$

assim

$$1 = (1 - \theta)q + \frac{\theta q}{p^*}.$$

Segue então da desigualdade de Hölder que

$$\int_{\Omega} |u|^q = \int_{\Omega} |u|^{\theta q} |u|^{(1-\theta)q} \leq \left( \int_{\Omega} |u|^{\theta q \frac{p^*}{\theta q}} \right)^{\frac{\theta q}{p^*}} \left( \int_{\Omega} |u|^{(1-\theta)q \frac{1}{(1-\theta)q}} \right)^{(1-\theta)q},$$

isto é,

$$\|u\|_q^q \leq \|u\|_{p^*}^{\theta q} \|u\|_1^{(1-\theta)q},$$

assim

$$\|u\|_q \leq \|u\|_{p^*}^{\theta} \|u\|_1^{1-\theta}.$$

Visto que as imersões  $X \hookrightarrow L^1(\mathbb{R}^N)$  e  $X \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$  são contínuas, temos:

$$\|u\|_q \leq C_1 \|u\|^{\theta} C_2 \|u\|^{1-\theta} \leq C \|u\|, \quad \forall u \in X.$$

Desse modo, a imersão  $X \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$  é contínua para todo  $q \in [1, 2^*]$ .

Em relação à compacidade em  $r \in [1, 2^*)$ , tome  $(u_j) \in X$  uma sequência limitada. Pelo Teorema de Rellich Kondrachov A.2 para todo  $R > 0$  a imersão  $H^1(B_R(0)) \hookrightarrow L^1(B_R(0))$  é contínua e compacta em  $B_R(0)$ , assim pela compacidade da imersão, toda sequência limitada  $(u_k)$  em  $H^1(B_R(0))$  têm subsequência convergente em  $L^1(B_R(0))$ , sem perda de generalidade temos que

$$\int_{B_R(0)} |u_k - u| dx \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty, \quad (2-3)$$

é válida para cada  $R > 0$ .

Por outro lado, dado  $\varepsilon > 0$  e levando em conta a hipótese  $(V_2)$ , existe  $R(\varepsilon) > 0$  tal que, para cada  $R \geq R(\varepsilon)$

$$\int_{B_R(0)^c} V(x)^{-1} dx < \varepsilon. \quad (2-4)$$

Usando a desigualdade de Hölder para  $p = q = 2$ , as Hipóteses  $(V_1)$  e  $(V_2)$  e as Equações (2-4) e (2-1), deduzimos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u_k - u| dx &= \int_{B_R(0)} |u_k - u| dx + \int_{B_R(0)^c} \frac{1}{\sqrt{V(x)}} \sqrt{V(x)} |u_k - u| dx \\ &\leq \int_{B_R(0)} |u_k - u| dx + \left( \int_{B_R(0)^c} V(x)^{-1} dx \right)^{1/2} \left( \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u_k - u|^2 dx \right)^{1/2} \\ &< \int_{B_R(0)} |u_k - u| dx + \varepsilon^{1/2} \|u_k - u\|_X \\ &\leq \int_{B_R(0)} |u_k - u| dx + C\varepsilon^{1/2}, \end{aligned}$$

pois  $(u_k)$  é uma sequência limitada em  $X$ .

Por fim, usando a última estimativa juntamente com (2-3) e o fato de que  $\varepsilon > 0$  é arbitrário, obtemos que  $\|u_k - u\|_1 \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Em outras palavras, a imersão  $X \hookrightarrow L^1(\mathbb{R}^N)$  é compacta.

Usando a lei de interpolação juntamente com a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg [3, p. 313], para cada  $q \in (1, 2^*)$  temos

$$\|u_k - u\|_q \leq \|u_k - u\|_{2^*}^\theta \|u_k - u\|_1^{1-\theta} \rightarrow 0.$$

Segue que a imersão  $X \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$  é compacta para cada  $r \in [1, 2^*)$ .  $\square$

A propriedade de compacidade para  $r \in [1, 2^*)$  será uma ferramenta crucial ao longo deste texto, pois permite concluir a convergência forte em  $L^r(\mathbb{R}^N)$  a partir da convergência fraca em  $X$ .

Observe que na Proposição 1.1,  $\psi$  está definida apenas em  $X$ . O próximo resultado irá mostrar que podemos estender esse resultado para qualquer  $\psi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ .

Essa extensão é importante, pois permite interpretar  $u$  como solução fraca da equação associada ao funcional (veja Definição A.1), visto que, ao estendermos a identidade para todo  $\psi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ , ela passa a valer em particular para funções teste suaves com suporte compacto, pois  $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$  é denso em  $H^1(\mathbb{R}^N)$  (veja em [3, p.265]).

Assim, temos o seguinte resultado.

**Proposição 2.2.** *Suponha que (Q), (V<sub>1</sub>) e (V<sub>2</sub>) sejam satisfeitas. Seja  $u \in X$  um ponto crítico do funcional  $E_\lambda$ , isto é,  $E'_\lambda(u)\psi = 0$  para todo  $\psi \in X$ . Então*

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla \psi + V(x)u\psi) dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(u)\psi dx, \quad \text{para todo } \psi \in H^1(\mathbb{R}^N), \quad (2-5)$$

onde  $g(u) = (I_\alpha * |u|^p)|u|^{p-2}u + \lambda|u|^{q-2}u$ .

*Demonstração.* Inicialmente considere  $\psi \in H^1(\mathbb{R}^N)$  uma função fixa não negativa, e considere  $(\eta_k)_{k \in \mathbb{N}}$  uma sequência não decrescente de funções em  $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$  tal que

$$\begin{cases} 0 \leq \eta_k(x) \leq 1 & \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N, \\ \eta_k(x) \leq \eta_{k+1}(x), & x \in \mathbb{R}^N, \\ \eta_k(x) = 1 & \text{se } |x| \leq k, \\ \eta_k(x) = 0 & \text{se } |x| \geq k+1, \\ |\nabla \eta_k(x)| \leq C & \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Note que  $\eta_k(x)\psi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ , pois  $|\eta_k(x)\psi(x)| \leq |\psi(x)|$ , assim  $\eta_k\psi$  está em  $L^2(\mathbb{R}^N)$  e como podemos escrever

$$\nabla(\eta_k\psi) = \nabla\eta_k\psi + \eta_k\nabla\psi, \quad (2-6)$$

então  $\nabla(\eta_k\psi)$  está em  $L^2(\mathbb{R}^N)$ , visto que o produto de uma função limitada por uma função em  $L^2(\mathbb{R}^N)$  está em  $L^2(\mathbb{R}^N)$ .

Queremos provar agora que  $\eta_k(x)\psi \rightarrow \psi$  em  $H^1(\mathbb{R}^N)$ . De fato fixado  $x$ , existe  $k_x$  tal que  $\eta_k(x) = 1$  para todo  $k \geq k_x$ , assim

$$\eta_k(x)\psi(x) \rightarrow \psi(x) \quad \text{quando } k \rightarrow \infty$$

q.t.p. em  $\mathbb{R}^N$ .

Além disso,

$$|\eta_k(x)\psi(x) - \psi(x)| = |(\eta_k(x) - 1)\psi(x)| \leq |\psi(x)|.$$

Como  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^N)$ , pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\eta_k \psi - \psi|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{k \rightarrow \infty} |(\eta_k(x) - 1)\psi(x)|^2 dx = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\eta_k \psi - \psi\|_2 = 0.$$

Por outro lado, da Equação (2-6)

$$\nabla(\eta_k \psi) - \nabla \psi = \nabla \eta_k \psi + (\eta_k - 1)\nabla \psi.$$

Assim

$$\|\nabla(\eta_k \psi) - \nabla \psi\|_2 \leq \|\nabla \eta_k \psi\|_2 + \|(\eta_k - 1)\nabla \psi\|_2. \quad (2-7)$$

Em relação a norma  $\|\nabla \eta_k \psi\|_2$ , observe que  $\nabla \eta_k$  é diferente de zero apenas em  $B(0, k+1) \setminus B(0, k)$ , então

$$\|\nabla \eta_k \psi\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \eta_k \psi|^2 dx \leq C^2 \int_{B(0, k+1) \setminus B(0, k)} |\psi|^2 dx.$$

Como  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^N)$ , a cauda da integral converge a zero, isto é

$$\int_{|x| \geq k} |\psi|^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{quando } k \rightarrow \infty,$$

assim,

$$\int_{B(0, k+1) \setminus B(0, k)} |\psi|^2 dx \leq \int_{|x| \geq k} |\psi|^2 dx \rightarrow 0,$$

o que implica

$$\|\nabla \eta_k \psi\|_{L^2} \rightarrow 0.$$

Em relação à norma  $\|(\eta_k - 1)\nabla \psi\|_2$  da desigualdade (2-7), temos que  $\eta_k(x) \rightarrow 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}^N$ , logo  $(\eta_k(x) - 1) \rightarrow 0$  pontualmente. Além disso

$$|(\eta_k(x) - 1)\nabla \psi(x)| \leq |\nabla \psi(x)| \in L^2(\mathbb{R}^N).$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |(\eta_k - 1)\nabla \psi|^2 dx \rightarrow 0,$$

ou seja,

$$\|(\eta_k - 1)\nabla \psi\|_2 \rightarrow 0.$$

Assim,  $\|\nabla(\eta_k \psi) - \nabla \psi\|_2 \rightarrow 0$  e portanto  $\eta_k(x)\psi \rightarrow \psi$  em  $H^1(\mathbb{R}^N)$ .

Pelo Corolário A.1 do Apêndice,  $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$  é contínua para  $r \in [2, 2^*]$ , com  $2^* = \frac{2N}{N-2}$ , logo  $\eta_k(x)\psi \rightarrow \psi$  em  $L^s(\mathbb{R}^N)$  para cada  $2 \leq s \leq 2^*$ . Além disso, usando o fato de que  $V(x)$  é limitada e que  $\eta_k(x)\psi$  tem suporte compacto, temos que existe  $M_k$  tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)(\eta_k\psi)^2 dx \leq M_k \int_{\mathbb{R}^N} (\eta_k\psi)^2 dx \leq M_k \int_{\mathbb{R}^N} \psi^2 dx < \infty.$$

Assim, pela definição do conjunto  $X$ , (0-2),  $\eta_k(x)\psi \in X$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ .

Como  $u$  é ponto crítico e tomando  $\eta_k(x)\psi$  como função teste na definição de solução fraca, podemos escrever

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u \nabla (\eta_k(x)\psi) + V(x)u(\eta_k(x)\psi)] dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(u)\eta_k(x)\psi dx. \quad (2-8)$$

Usando a convergência forte em  $H^1(\mathbb{R}^N)$  e levando em conta que  $g$  é subcrítica, deduzimos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla (\eta_k(x)\psi) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \psi dx, \quad (2-9)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} g(u)\eta_k(x)\psi dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(u)\psi dx. \quad (2-10)$$

Por outro lado, usando o fato de que  $(\eta_k)$  é uma sequência não decrescente, observamos que

$$0 \geq V(x)u\eta_k(x)\psi(x) \geq V(x)u\eta_{k+1}(x)\psi(x) \quad \text{q.t.p. } x \in [u \leq 0],$$

$$0 \leq V(x)u\eta_k(x)\psi(x) \leq V(x)u\eta_{k+1}(x)\psi(x) \quad \text{q.t.p. } x \in [u \geq 0],$$

vale para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Agora, usando a última afirmação em conjunto com o Teorema da Convergência Monótona, obtemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u\eta_k(x)\psi dx = \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u\psi dx. \quad (2-11)$$

Passando ao limite em (2-8) e usando as convergências dadas em (B-11), (B-12) e (B-13), vemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla \psi + V(x)u\psi) dx = \int_{\mathbb{R}^N} g(u)\psi dx$$

é verdade para cada  $\psi \in H^1(\mathbb{R}^N)$  satisfazendo  $\psi \geq 0$  em  $\mathbb{R}^N$ .

Será provado agora que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \psi dx < +\infty, \quad \int_{\mathbb{R}^N} g(u)\psi dx < +\infty, \quad (2-12)$$

Para isso, note que em relação à primeira Desigualdade de (2-12), temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \psi dx \leq \left( \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla \psi)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \|\nabla u\|_2 \|\nabla \psi\|_2.$$

Como  $u$  e  $\psi$  estão em  $H^1(\mathbb{R}^N)$  resulta que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \psi dx < \infty.$$

Em relação à segunda desigualdade de (2-12), pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(u) \psi dx = \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^{p-2} u \psi dx + \int_{\mathbb{R}^N} \lambda |u|^{q-2} u \psi dx. \quad (2-13)$$

Em relação à primeira integral da equação (2-13), temos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^{p-2} u \psi dx \right| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^{p-1} \psi dx \right| \\ &= A_\alpha(N) \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^p |u(y)|^{p-1} |\psi|}{|x-y|^{N-\alpha}} dx dy. \end{aligned}$$

Aplicando o Lema 2.1 com  $\phi = |u|^p$  e  $\psi = |u(y)|^{p-1} |\psi|$ , existem  $t = r = \frac{2N}{N+\alpha}$  e  $0 < \alpha < N$  com  $\frac{1}{t} + \frac{N-\alpha}{N} + \frac{1}{r} = 2$  tais que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^{p-2} u \psi dx \right| \leq C_1 \| |u|^p \|_r \| |u|^{p-1} |\psi| \|_r,$$

onde  $C^1 = A_\alpha(N)C$  e  $t = r = \frac{2N}{N+\alpha}$ . Já sabemos que  $\| |u|^p \|_r < \infty$ , em relação à  $\| |u|^{p-1} |\psi| \|_r$  temos

$$\| |u|^{p-1} |\psi| \|_r \leq \left( \int_{\mathbb{R}^N} (|u|^{p-1} |\psi|)^{\frac{2N}{N+\alpha}} dx \right)^{\frac{N+\alpha}{2N}} = \left( \int_{\mathbb{R}^N} (|u|^{(p-1)\frac{2N}{N+\alpha}} |\psi|^{\frac{2N}{N+\alpha}} dx \right)^{\frac{N+\alpha}{2N}}.$$

Por Holder, para  $q = \frac{p}{p-1}$  temos

$$\| |u|^{p-1} |\psi| \|_r \leq \left[ \left( \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{(p-1)\frac{2N}{N+\alpha} \frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\psi|^{p\frac{2N}{N+\alpha}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \right]^{\frac{N+\alpha}{2N}}.$$

Como  $p \frac{2N}{N+\alpha} < \frac{N+\alpha}{N-2} \frac{2N}{N+\alpha} = 2^*$ , segue que

$$\| |u|^{p-1} |\Psi| \|_r \leq \left[ \left( \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p \frac{2N}{N+\alpha}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \right]^{\frac{N+\alpha}{2N}} \left[ \left( \int_{\mathbb{R}^N} |\Psi|^{p \frac{2N}{N+\alpha}} dx \right)^{\frac{1}{p}} \right]^{\frac{N+\alpha}{2N}} < \infty.$$

Portanto

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^{p-2} u \Psi dx \right| < \infty$$

Em relação à segunda integral de (2-13), aplicando Holder com  $p = \frac{q}{1-q}$ , temos

$$\left| \int |u|^{q-2} u \Psi dx \right| \leq \left| \int |u|^{q-1} |\Psi| dx \right| \leq \left( \int |u|^{q-1 \cdot \frac{q}{q-1}} \right)^{\frac{q-1}{q}} \|\Psi\|_q = \|u\|_q^{q-1} \|\Psi\|_q,$$

como a imersão  $X \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$  é contínua para cada  $r \in [1, 2^*]$ , e  $q \leq 2^*$ , temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(u) \Psi dx \leq C_3 \|u\|^{q-1} \|\Psi\| < \infty.$$

Assim inferimos que  $\int_{\mathbb{R}^N} V(x) u \Psi dx < \infty$  é verificado para cada  $\Psi \in H^1(\mathbb{R}^N)$  satisfazendo  $\Psi \geq 0$  em  $\mathbb{R}^N$ .

Analogamente, prova-se a Identidade (2-5) para cada  $\Psi \in H^1(\mathbb{R}^N)$  tal que  $\Psi$  é não positiva em  $\mathbb{R}^N$ . A prova para o caso geral  $\Psi \in H^1(\mathbb{R}^N)$  segue imediatamente escrevendo  $\Psi = \Psi^+ + \Psi^-$ , onde  $\Psi^+ = \max(\Psi, 0)$  e  $\Psi^- = \min(\Psi, 0)$ .  $\square$

## 2.1 Propriedades de $R_n$ e $R_e$

Agora consideremos o método de Nehari aplicado ao Problema (0-1). Nosso objetivo é analisar a geometria da função de fibração

$$\phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(t) = E_\lambda(tu), \quad t \geq 0, \quad u \in X \setminus \{0\}.$$

É importante lembrar que o mapa de fibração está diretamente relacionado à variedade de Nehari  $\mathcal{N}_\lambda$ , introduzida anteriormente e definida por

$$\mathcal{N}_\lambda := \{u \in X \setminus \{0\} : \phi'(1) = E'_\lambda(u)u = 0\},$$

ou, equivalentemente,

$$\mathcal{N}_\lambda = \left\{ u \in X \setminus \{0\} : \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx \right\}. \quad (2-14)$$

Assim, um ponto crítico da aplicação fibração  $\phi$  fornece automaticamente um elemento da variedade de Nehari. De fato, para cada  $\lambda \in (0, \lambda^*)$  e para todo  $u \in X \setminus \{0\}$ , a condição

$$E_\lambda''(tu)(tu, tu) < 0$$

garante a existência de um único  $t > 0$  tal que  $tu \in \mathcal{N}_\lambda^-$ , como veremos posteriormente na Proposição 2.9.

A mesma propriedade permanece válida quando  $E_\lambda''(tu)(tu, tu) > 0$ , assegurando novamente a unicidade do parâmetro que projeta  $tu$  na variedade. Além disso, todo ponto crítico não trivial do funcional de energia  $E_\lambda$  pertence necessariamente a  $\mathcal{N}_\lambda$ .

Mais geralmente, vemos que.

**Proposição 2.3.**  $tu \in \mathcal{N}_\lambda$  se, e somente se,  $\phi'(t) = E_\lambda'(tu)u = 0$ .

*Demonstração.* De fato, pela regra da cadeia

$$\phi'(t) = \frac{d}{dt} E_\lambda(tu) = E_\lambda'(tu) \cdot u,$$

onde  $E_\lambda'(tu)$  é a derivada de Fréchet de  $E_\lambda$  no ponto  $tu$ . Assumindo que  $tu \in \mathcal{N}_\lambda$ , temos que então  $u \neq 0$  e  $t > 0$ , além disso  $tu \in \mathcal{N}_\lambda$ , se e somente se,  $E_\lambda'(tu)(tu) = 0$ , assim

$$E_\lambda'(tu)(tu) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad tE_\lambda'(tu)u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad E_\lambda'(tu)u = 0.$$

Portanto, pontos críticos para a fibra  $\phi$  nos dão funções na variedade de Nehari. □

Sob essas condições, e conforme mencionado na introdução, podemos dividir a variedade de Nehari  $\mathcal{N}_\lambda$  em três subconjuntos disjuntos, de acordo com o sinal da segunda derivada ao longo da fibração

$$\mathcal{N}_\lambda^+ = \{u \in \mathcal{N}_\lambda : \phi''(1) = E_\lambda''(u)(u, u) > 0\}$$

$$\mathcal{N}_\lambda^- = \{u \in \mathcal{N}_\lambda : \phi''(1) = E_\lambda''(u)(u, u) < 0\}$$

$$\mathcal{N}_\lambda^0 = \{u \in \mathcal{N}_\lambda : \phi''(1) = E_\lambda''(u)(u, u) = 0\}.$$

Defina agora

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &:= \{u \in X \setminus \{0\} : E_\lambda(u) = 0\} \\ &= \left\{ u \in X \setminus \{0\} : \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx = \frac{\lambda}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx \right\}. \end{aligned} \quad (2-15)$$

Serão definidos, a seguir, os quocientes de Rayleigh generalizados não lineares  $R_n$  e  $R_e$ . Consideramos os funcionais  $R_n, R_e : X \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  associados ao parâmetro  $\lambda > 0$  da seguinte forma

$$R_n(u) = \frac{\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx}{\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx}, \quad u \in X \setminus \{0\} \quad (2-16)$$

$$R_e(u) = \frac{\frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx}{\frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx}, \quad u \in X \setminus \{0\}. \quad (2-17)$$

Vale ressaltar que  $R_e$  e  $R_n$  são quocientes de funções Gâteaux diferenciáveis e contínuas (veja as Equações (2-18) e (1-19)). Assim, temos que  $R_e$  e  $R_n$  pertencem a  $C^1(X \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ .

É importante destacar que os quocientes de Rayleigh generalizados não lineares estão diretamente relacionado com as Equações (2-14) e (2-15). Mais formalmente temos as seguintes observações.

**Observação 2.1.** *Seja  $u \in X \setminus \{0\}$  fixado. Então, usando (2-14) obtemos as seguintes afirmações:*

- i)  $R_n(u) = \lambda$  se, e somente se,  $E'_\lambda(u)u = 0$ ,
- ii)  $R_n(u) > \lambda$  se, e somente se,  $E'_\lambda(u)u > 0$ ,
- iii)  $R_n(u) < \lambda$  se, e somente se,  $E'_\lambda(u)u < 0$ .

**Observação 2.2.** *Seja  $u \in X \setminus \{0\}$  fixado. Então, usando (2-15) deduzimos as seguintes afirmações:*

- i)  $R_e(u) = \lambda$  se, e somente se,  $E_\lambda(u) = 0$ ,
- ii)  $R_e(u) > \lambda$  se, e somente se,  $E_\lambda(u) > 0$ ,
- iii)  $R_e(u) < \lambda$  se, e somente se,  $E_\lambda(u) < 0$ .

As Proposições 2.4 e 2.5, apresentadas a seguir, estabelecem uma relação fundamental entre o comportamento variacional das funções  $R_e(tu)$  e  $R_n(tu)$  e as derivadas de primeira e segunda ordem do funcional  $E_\lambda$  ao longo da direção  $tu$ , respectivamente.

**Proposição 2.4.** *Suponha  $(Q)$ ,  $(V_1)$  e  $(V_2)$ . Assuma também que  $u \in X \setminus \{0\}$  satisfaz  $R_e(tu) = \lambda$  para algum  $t > 0$ . Então*

- i)  $\frac{d}{dt}R_e(tu) > 0$  se, e somente se,  $E'_\lambda(tu)tu > 0$ ,
- ii)  $\frac{d}{dt}R_e(tu) < 0$  se, e somente se,  $E'_\lambda(tu)tu < 0$ ,
- iii)  $\frac{d}{dt}R_e(tu) = 0$  se, e somente se,  $E'_\lambda(tu)tu = 0$ .

*Demonstração.* Para  $t > 0$ , temos que

$$R_e(tu) = \frac{\frac{1}{2}\|tu\|^2 - \frac{1}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |tu|^p) |tu|^p dx}{\frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |tu|^q dx}.$$

Defina o funcional auxiliar  $G: X \rightarrow \mathbb{R}$  da forma  $G(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx$ ,  $u \in X$ . Assim podemos escrever

$$R_e(tu) = \frac{E_\lambda(tu) + \frac{\lambda}{q}G(tu)}{\frac{1}{q}G(tu)} = \frac{E_\lambda(tu)}{\frac{1}{q}G(tu)} + \lambda \quad (2-18)$$

Derivando  $R_e(tu)$  em relação a  $t$ , temos

$$\frac{d}{dt}R_e(tu) = q \frac{E'_\lambda(tu)uG(tu) - E_\lambda(tu)G'(tu)u}{[G(tu)]^2}$$

Se  $R_e(tu) = \lambda$  então  $E_\lambda(tu) = 0$ , assim

$$\frac{d}{dt}R_e(tu) = q \frac{E'_\lambda(tu)u}{G(tu)}, \quad t > 0 \quad (2-19)$$

vale para cada  $u \in X \setminus \{0\}$  tal que  $R_e(tu) = \lambda$ . Em particular, como  $G(tu) > 0$  e  $1 < q < 2$  temos que o sinal de  $\frac{d}{dt}R_e(tu)$  é igual ao sinal de  $E'_\lambda(tu)tu$ . Isto encerra a prova.  $\square$

Analogamente para  $t > 0$ , observamos que

$$R_n(tu) = \frac{\|tu\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |tu|^p) |tu|^p dx}{\int_{\mathbb{R}^N} |tu|^q dx}.$$

Além disso, a derivada de  $G(tu)$  na direção  $tu$  é

$$G'(tu)(tu) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(tu + h(tu)) - G(tu)}{h}.$$

Note que

$$G(tu + h(tu)) = t^q(1+h)^q \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx,$$

então

$$G'(tu)(tu) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{t^q(1+h)^q \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx - t^q \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx}{h} = t^q \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^q - 1}{h}.$$

Observe que o limite acima é a derivada de  $(1+h)^q$  em  $h=0$ , que é  $q$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^q - 1}{h} = q,$$

portanto

$$G'(tu)(tu) = t^q \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx \cdot q = q \int_{\mathbb{R}^N} |tu|^q dx.$$

Desta forma, podemos escrever

$$R_n(tu) = \frac{E'_\lambda(tu)(tu) + \frac{\lambda}{q} G'(tu)(tu)}{\frac{1}{q} G'(tu)(tu)}.$$

Assim

$$R_n(tu) = q \frac{E'_\lambda(tu)(tu)}{G'(tu)(tu)} + \lambda \quad (2-20)$$

Derivando  $R_n(tu)$  em relação a  $t$ , temos

$$\frac{d}{dt} R_n(tu) = q \frac{(E''_\lambda(tu)(tu)u + E'_\lambda(tu)u)G'(tu)(tu) - E'_\lambda(tu)(tu)(G''(tu)(tu)u + G'(tu)u)}{[G'(tu)(tu)]^2},$$

Se  $R_n(tu) = \lambda$  então  $E'_\lambda(tu)(tu) = 0$ , assim

$$\frac{d}{dt} R_n(tu) = \frac{q E''_\lambda(tu)(tu, tu)}{t G'(tu)(tu)}, \quad t > 0. \quad (2-21)$$

vale para cada  $u \in X \setminus \{0\}$  tal que  $R_n(tu) = \lambda$ . Em particular, sabendo que  $1 < q < 2$  e  $G'(tu)(tu) > 0$ , obtemos o seguinte resultado.

**Proposição 2.5.** *Suponha  $(Q)$ ,  $(V_1)$  e  $(V_2)$  sejam satisfeitas. Assuma também que  $u \in X \setminus \{0\}$  satisfaz  $R_n(tu) = \lambda$  para algum  $t > 0$ . Então obtemos as seguintes afirmações:*

- i)  $\frac{d}{dt} R_n(tu) > 0$  se, e somente se,  $E''_\lambda(tu)(tu, tu) > 0$ ,
- ii)  $\frac{d}{dt} R_n(tu) < 0$  se, e somente se,  $E''_\lambda(tu)(tu, tu) < 0$ ,
- iii)  $\frac{d}{dt} R_n(tu) = 0$  se, e somente se,  $E''_\lambda(tu)(tu, tu) = 0$ .

*Demonstração.* A prova segue de (2-21). □

Em outras palavras temos que:

- $tu$  é ponto crítico de  $R_e(tu)$  se, e somente se, é ponto crítico de  $E_\lambda(tu)$ .
- $tu$  é ponto de mínimo local na direção radial para  $E_\lambda$  se, e somente se,  $R_n(tu) = \lambda$  e  $R_n(tu)$  é crescente em  $t$ .
- $tu$  é ponto de máximo local na direção radial para  $E_\lambda$  se, e somente se,  $R_n(tu) = \lambda$  e  $R_n(tu)$  é decrescente em  $t$ .
- Um ponto de ponto de inflexão radial para  $E_\lambda$  coincide com um ponto crítico para  $R_n(tu)$ .

Essa caracterização é crucial para a busca de soluções de problemas variacionais, pois permite buscar pontos críticos de  $E_\lambda$  a partir de  $R_e$  e identificar a natureza destes estudando o comportamento da função  $R_n$ , que é frequentemente mais simples de se analisar. Portanto, estas proposições fornecem um poderoso critério para classificar soluções e entender a estrutura do conjunto de soluções do problema associado.

## 2.2 Propriedades dos quocientes de Rayleigh

Agora serão abordadas propriedades diferenciais das fibras de  $R_n$  e de  $R_e$ . Nesta etapa, consideramos a fibra de  $R_n$  para cada  $t > 0$  dada por

$$\begin{aligned} Q_n(t) = R_n(tu) &= \frac{t^2 \|u\|^2 - t^{2p} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx}{t^q \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx} \\ &= \frac{1}{\|u\|_q^q} \left[ t^{2-q} \|u\|^2 - t^{2p-q} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx \right]. \end{aligned}$$

Como consequência, obtemos a seguinte identidade

$$Q'_n(t) = \frac{1}{\|u\|_q^q} \left[ (2-q)t^{1-q} \|u\|^2 - (2p-q)t^{2p-q-1} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx \right]. \quad (2-22)$$

**Proposição 2.6.** *Suponha que as hipóteses (Q), (V<sub>1</sub>) e (V<sub>2</sub>) sejam satisfeitas. Defina  $Q_n(t) = R_n(tu)$ . Então  $Q_n(t)$  admite um único ponto crítico  $t_n(u) > 0$ , dado explicitamente por*

$$t_n(u) = \left( \frac{2-q}{2p-q} \frac{\|u\|^2}{\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx} \right)^{\frac{1}{2p-2}} \quad (2-23)$$

e este é ponto de máximo global de  $Q_n$ .

*Demonstração.* Note que o ponto crítico  $t_n(u)$  de  $Q_n(t)$  é determinado pela condição  $Q'_n(t_n) = 0$ . Desenvolvendo esta equação, obtemos

$$(2-q)t_n^{1-q}\|u\|^2 = (2p-q)t_n^{2p-q-1} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p)|u|^p dx$$

Para isolar  $t_n(u)$ , reescrevemos a equação agrupando os termos em potências de  $t_n(u)$

$$\frac{(2p-q)t_n^{2p-q-1}}{(2-q)t_n^{1-q}} = \frac{\|u\|^2}{\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p)|u|^p dx}$$

Simplificando as potências de  $t_n(u)$

$$\frac{2p-q}{2-q} t_n^{(2p-q-1)-(1-q)} = \frac{\|u\|^2}{\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p)|u|^p dx},$$

$$\frac{2p-q}{2-q} t_n^{2p-2} = \frac{\|u\|^2}{\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p)|u|^p dx}.$$

Portanto, o ponto crítico de  $Q_n(t)$ ,  $t_n$ , é dado explicitamente por

$$t_n = \left( \frac{2-q}{2p-q} \frac{\|u\|^2}{\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p)|u|^p dx} \right)^{\frac{1}{2p-2}}.$$

Como  $p > 1$  e  $q < 2$ , esta expressão está bem definida.

Para provar a unicidade de  $t_n$  reescrevemos  $Q'_n(t)$  na forma fatorada

$$Q'_n(t) = \frac{t^{1-q}}{\|u\|^q} \left[ (2-q)\|u\|^2 - (2p-q)t^{2p-2} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p)|u|^p dx \right],$$

e definimos a função auxiliar

$$g(t) = (2-q)\|u\|^2 - (2p-q)t^{2p-2} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p)|u|^p dx.$$

Note que  $Q'_n(t) > 0$  se, e somente se,  $g(t) > 0$ . Assim, calculando  $g(t)$  no ponto crítico  $t = t_n(u)$ , temos

$$g(t_n(u)) = (2-q)\|u\|^2 - (2p-q) \left( \frac{(2-q)}{(2p-q)} \frac{\|u\|^2}{\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p)|u|^p dx} \right) \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p)|u|^p dx$$

$$= (2-q)\|u\|^2 - (2-q)\|u\|^2 = 0.$$

Analisando a monotonicidade de  $g(t)$ ,

$$g'(t) = -(2p-q)(2p-2)t^{2p-3} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx < 0$$

Pela condição (Q) temos que  $g(t)$  é estritamente decrescente para  $t > 0$  e se anula em  $t_n(u)$ . Portanto  $Q'_n(t) > 0$  para cada  $t \in (0, t_n(u))$  e  $Q'_n(t) < 0$  para cada  $t > t_n(u)$ . Assim, o número  $t_n(u) > 0$  é o único ponto crítico para  $Q_n(t)$ .

Além disso, observe que  $Q_n(0) = 0$ ,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{Q_n(t)}{t^{2-q}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\|u\|_q^q} \left[ \|u\|^2 - t^{2p-2} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx \right] > 0.$$

Assim,  $Q_n(t)$  é extritamente positivo, e

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} Q_n(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{2p-q}}{\|u\|_q^q} \left[ t^{(2-q)-(2p-q)} \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{2p-q}}{\|u\|_q^q} \left[ t^{-(2p-2)} \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx \right]. \end{aligned}$$

Isto implica que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} Q_n(t) = -\infty.$$

Logo  $Q_n(t)$  admite máximo global e portanto

$$Q_n(t_n(u)) = \max_{t>0} Q_n(t).$$

□

Sob essas condições, tome  $A$  de forma que  $t_n(u) = A^{\frac{1}{2p-2}}$ , isto é

$$A = \frac{(2-q)}{(2p-q)} \frac{\|u\|^2}{\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx},$$

logo, podemos escrever,

$$\begin{aligned} Q_n(t_n) &= \frac{1}{\|u\|_q^q} \left[ t_n^{2-q} \|u\|^2 - t_n^{2p-q} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx \right] \\ &= \frac{1}{\|u\|_q^q} \left[ A^{\frac{2-q}{2p-2}} \|u\|^2 - A^{\frac{2p-q}{2p-2}} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx \right] \\ &= \frac{1}{\|u\|_q^q} A^{\frac{2p-q}{2p-2}} \left[ A^{-1} \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx \right], \end{aligned}$$

visto que  $\frac{2p-q}{2p-2} = \frac{2-q}{2p-2} + 1$ . Note que

$$A^{-1}\|u\|^2 = \frac{(2p-q)}{(2-q)} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx.$$

Logo

$$\begin{aligned} Q_n(t_n(u)) &= \frac{1}{\|u\|_q^q} A^{\frac{2p-q}{2p-2}} \left[ \frac{(2p-q)}{(2-q)} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx \right] \\ &= \frac{1}{\|u\|_q^q} A^{\frac{2p-q}{2p-2}} \left[ \frac{(2p-2)}{(2-q)} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx \right]. \end{aligned}$$

Expressando explicitamente  $A^{\frac{2p-q}{2p-2}}$  em  $Q_n(t_n)$  e sabendo que  $\frac{2p-q}{2p-2} = \frac{2-q}{2p-2} + 1$  temos

$$\begin{aligned} Q_n(t_n(u)) &= \frac{1}{\|u\|_q^q} \left( \frac{2p-2}{2-q} \right) \left[ \frac{(2-q)}{(2p-q)} \frac{\|u\|^2}{\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx} \right]^{\frac{2p-q}{2p-2}} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx. \\ &= \frac{1}{\|u\|_q^q} \left( \frac{2p-2}{2-q} \right) \frac{(2-q)}{(2p-q)} \|u\|^2 \left[ \frac{(2-q)}{(2p-q)} \frac{\|u\|^2}{\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx} \right]^{\frac{2-q}{2p-2}} \\ &= \frac{1}{\|u\|_q^q} \left( \frac{2p-2}{2p-q} \right) \|u\|^2 \left[ \frac{(2-q)}{(2p-q)} \frac{\|u\|^2}{\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx} \right]^{\frac{2-q}{2p-2}} \\ &= \frac{1}{\|u\|_q^q} \left( \frac{2p-2}{2p-q} \right) \left( \frac{2-q}{2p-q} \right)^{\frac{2-q}{2p-2}} \|u\|^2 \left[ \frac{\|u\|^2}{\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx} \right]^{\frac{2-q}{2p-2}} \\ &= \frac{1}{\|u\|_q^q} \left( \frac{2p-2}{2p-q} \right) \left( \frac{2-q}{2p-q} \right)^{\frac{2-q}{2p-2}} \|u\|^2 \frac{\|u\|^{\frac{2-q}{p-1}}}{\left( \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx \right)^{\frac{2-q}{2p-2}}}. \end{aligned}$$

Portanto, podemos reescrever  $Q_n(t_n)$  da seguinte maneira

$$Q_n(t_n(u)) = C_{p,q} \frac{\|u\|^{\frac{2p-q}{p-1}}}{\|u\|_q^q \left[ \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx \right]^{\frac{2-q}{2p-2}}}, \quad (2-24)$$

onde

$$C_{p,q} = \left( \frac{2-q}{2p-q} \right)^{\frac{2-q}{2p-2}} \left( \frac{2p-2}{2p-q} \right).$$

Analogamente é possível encontrar resultados similares para a fibra de  $R_e$ . Mais precisamente, consideramos a função

$$\begin{aligned} Q_e(t) = R_e(tu) &= \frac{\frac{t^2}{2}\|u\|^2 - \frac{t^{2p}}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p)|u|^p dx}{\frac{t^q}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx} \\ &= \frac{q}{\|u\|_q^q} \left[ \frac{t^{2-q}}{2}\|u\|^2 - \frac{t^{2p-q}}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p)|u|^p dx \right]. \end{aligned}$$

Como consequência, a derivada é dada pela seguinte identidade

$$Q'_e(t) = \frac{q}{\|u\|_q^q} \left[ \frac{(2-q)}{2} t^{1-q} \|u\|^2 - \frac{(2p-q)}{2p} t^{2p-q-1} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p)|u|^p dx \right]. \quad (2-25)$$

Como foi feito anteriormente, é possível mostrar que  $Q'_e(t) = 0$  se, e somente se,  $t = t_e(u)$ , onde

$$t_e(u) = \left[ p \frac{(2-q)}{(2p-q)} \frac{\|u\|^2}{\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p)|u|^p dx} \right]^{\frac{1}{2p-2}}.$$

Mais uma vez, garantimos que  $t_e(u) > 0$  é o único ponto crítico de  $Q_e$  e  $Q_e(t_e(u)) = \max_{t>0} Q_e(t)$ . Formalmente obtemos o seguinte resultado.

**Proposição 2.7.** *Suponha que as hipóteses (Q), (V<sub>1</sub>) e (V<sub>2</sub>) sejam satisfeitas. Defina  $Q_e(t) = R_e(tu)$ . Então  $Q_e(t)$  admite um único ponto crítico  $t_e(u) > 0$ , dado explicitamente por*

$$t_e(u) = \left[ p \frac{(2-q)}{(2p-q)} \frac{\|u\|^2}{\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p)|u|^p dx} \right]^{\frac{1}{2p-2}} \quad (2-26)$$

e este é ponto de máximo global de  $Q_e$ .

Além disso mencionamos que

$$Q_e(t_e(u)) = \tilde{C}_{p,q} \frac{\|u\|^{\frac{2p-q}{p-1}}}{\|u\|_q^q \left[ \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p)|u|^p dx \right]^{\frac{2-q}{2p-2}}},$$

onde

$$\tilde{C}_{p,q} = \left( p \frac{2-q}{2p-q} \right)^{\frac{2-q}{2p-2}} \left( q \frac{p-1}{2p-q} \right) > 0.$$

A seguinte proposição estabelece uma relação fundamental entre  $Q_n(t)$  e  $Q_e(t)$ . A ideia é entender como estas funções diferem quando variamos  $t$ . Mais especificamente, ela mostra que essa diferença pode ser escrita diretamente em termos da derivada de  $Q_e$ , o que simplifica bastante a análise de resultados futuros.

**Proposição 2.8.** *Seja  $u \in X \setminus 0$  uma função fixada. Então*

$$Q_n(t) - Q_e(t) = \frac{t}{q} Q_e'(t),$$

para todo  $t > 0$ .

*Demonstração.* De fato, temos que  $R_n(tu) - R_e(tu)$  equivale a

$$\frac{1}{\|u\|_q^q} \left[ t^{2-q} \|u\|^2 - t^{2p-q} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx \right] - \frac{q}{\|u\|_q^q} \left[ \frac{t^{2-q}}{2} \|u\|^2 - \frac{t^{2p-q}}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx \right].$$

Assim

$$R_n(tu) - R_e(tu) = \frac{1}{\|u\|_q^q} \left[ t^{2-q} \|u\|^2 \left( \frac{2-q}{2} \right) - t^{2p-q} \left( \frac{2p-q}{2p} \right) \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx \right]. \quad (2-27)$$

Da Igualdade (2-25), obtemos que

$$\frac{d}{dt} (R_e(tu)) = \frac{q}{\|u\|_q^q} \left( t^{1-q} \|u\|^2 \left( \frac{2-q}{2} \right) - t^{2p-q-1} \left( \frac{2p-q}{2p} \right) \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx \right). \quad (2-28)$$

Das Equações (2-27) e (2-28) obtemos que  $R_n(tu) - R_e(tu) = \frac{t}{q} \frac{d}{dt} (R_e(tu))$ , finalizando a prova.  $\square$

**Observação 2.3.** *É importante mencionar que  $R_n(tu) = R_e(tu)$  se e somente se  $t = t_e(u)$ .*

De fato, a identidade

$$R_n(tu) = R_e(tu)$$

vale se, e somente se

$$\frac{1}{\|u\|_q^q} \left[ t^{2-q} \|u\|^2 - t^{2p-q} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx \right] = \frac{q}{\|u\|_q^q} \left[ \frac{t^{2-q}}{2} \|u\|^2 - \frac{t^{2p-q}}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx \right].$$

Simplificando a igualdade acima, chegamos à condição

$$t^{2-q} \|u\|^2 \left( \frac{2-q}{2} \right) - t^{2p-q} \left( \frac{2p-q}{2p} \right) \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx = 0.$$

Reescrevendo de forma mais conveniente, obtemos

$$t^{1-q}\|u\|^2 \left(\frac{2-q}{2}\right) - t^{2p-q-1} \left(\frac{2p-q}{2p}\right) \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx = 0.$$

Por outro lado, pela Equação (2-25), obtemos que  $\frac{d}{dt}(R_e(tu)) = 0$  se, e somente se

$$\frac{q}{\|u\|_q^q} \left( t^{1-q}\|u\|^2 \left(\frac{2-q}{2}\right) - t^{2p-q-1} \left(\frac{2p-q}{2p}\right) \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx \right) = 0.$$

Como  $\frac{q}{\|u\|_q^q} \neq 0$  para todo  $u \in X \setminus \{0\}$ , e  $t_e(u)$  é o único ponto crítico de  $R_e(tu)$ , temos que  $R_n(tu) = R_e(tu)$  se, e somente se,  $t = t_e(u)$ .

**Observação 2.4.** *Afirmamos que*

$$R_n(tu) > R_e(tu) \quad \text{se } t \in (0, t_e(u))$$

e

$$R_n(tu) < R_e(tu) \quad \text{se } t \in (t_e(u), \infty).$$

De fato, defina a função diferença

$$\begin{aligned} D(t) &= R_n(tu) - R_e(tu) \\ &= \frac{1}{\|u\|_q^q} \left[ t^{2-q}\|u\|^2 \left(1 - \frac{q}{2}\right) - t^{2p-q} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx \left(1 - \frac{q}{2p}\right) \right]. \end{aligned}$$

Assim  $D(t) > 0$  se, e somente se,

$$t^{2-q}\|u\|^2 \left(1 - \frac{q}{2}\right) - t^{2p-q} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx \left(1 - \frac{q}{2p}\right) > 0,$$

como  $t > 0$  e  $\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx \left(1 - \frac{q}{2p}\right) > 0$  podemos escrever

$$\frac{t^{2p-q}}{t^{2-q}} < \frac{\|u\|^2 \left(\frac{2-q}{2}\right)}{\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx \left(\frac{2p-q}{2p}\right)},$$

assim

$$t < \left[ p \frac{(2-q)}{(2p-q)} \frac{\|u\|^2}{\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx} \right]^{\frac{1}{2p-2}} = t_e(u).$$

Portanto  $R_n(tu) > R_e(tu)$  se  $t \in (0, t_e(u))$ .

Analogamente prova-se que  $R_n(tu) < R_e(tu)$  se  $t \in (t_e(u), \infty)$ .

## 2.3 Propriedades de $\Lambda_e(u)$ e $\Lambda_n(u)$

Ao definir  $\frac{d}{dt}Q_n(t_n(u)) = 0$ , pela Proposição 2.6, encontramos que  $t_n(u)$  é unico e é ponto de máximo global de  $Q_n(t)$ . O funcional

$$\Lambda_n(u) = Q_n(t_n(u))$$

possibilita a captura do valor ótimo de  $Q_n$  ao longo da fibra gerada por  $u$ .

O próximo lema reúne propriedades fundamentais de  $\Lambda_n$ , sua homogeneidade, a existência de um mínimo positivo e, especialmente, a ligação desse mínimo com uma solução fraca de um problema elíptico associado. Essas propriedades serão essenciais para a construção e identificação da solução desejada. Formalmente descrevemos o seguinte resultado:

**Lema 2.2.** *Suponha  $(Q)$ ,  $(V_1)$  e  $(V_2)$  sejam satisfeitas. Seja*

$$\Lambda_n(u) := Q_n(t_n(u)) = C_{p,q} \frac{\|u\|^{\frac{2p-q}{p-1}}}{\|u\|_q^q \left[ \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx \right]^{\frac{2-q}{2p-2}}}.$$

com  $C_{p,q} = \left( \frac{2-q}{2p-q} \right)^{\frac{2-q}{2p-2}} \left( \frac{2p-2}{2p-q} \right)$ . Então

- i)  $\Lambda_n(u)$  é 0-homogênea, i.e.,  $\Lambda_n(tu) = \Lambda_n(u)$  para cada  $t > 0, u \in X \setminus \{0\}$ ;
- ii) Existe  $u \in X \setminus \{0\}$  tal que  $\lambda^* = \Lambda_n(u) = \inf_{v \in X \setminus \{0\}} \Lambda_n(v)$ . Além disso, obtemos que  $\lambda^* > 0$ .
- iii) Considere a função  $u \in X \setminus \{0\}$  dada pelo item ii). Defina a função  $v = t_n(u)u$ , onde  $t_n(u)$  é dada por (2-23). Então  $v$  é uma solução fraca para o seguinte problema elíptico:

$$\begin{cases} -2\Delta w + 2V(x)w = 2p(I_\alpha * |w|^p) |w|^{p-2}w + q\lambda^* |w|^{q-2}w \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ w \in X. \end{cases} \quad (2-29)$$

*Demonstração.* Para a parte *i*) temos

$$\begin{aligned}\Lambda_n(tu) &= C_{p,q} \frac{\|tu\|_{\frac{2p-q}{p-1}}^{\frac{2p-q}{p-1}}}{\|tu\|_q^q \left[ \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |tu|^p) |tu|^p dx \right]^{\frac{2-q}{2p-2}}} \\ &= C_{p,q} \frac{t^{\frac{2p-q}{p-1}} \|u\|_{\frac{2p-q}{p-1}}^{\frac{2p-q}{p-1}}}{t^q \|u\|_q^q t^{2p \frac{2-q}{2p-2}} \left[ \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx \right]^{\frac{2-q}{2p-2}}} \\ &= t^{\frac{2p-q-pq+q-2p+pq}{p-1}} C_{p,q} \frac{\|u\|_{\frac{2p-q}{p-1}}^{\frac{2p-q}{p-1}}}{\|u\|_q^q \left[ \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx \right]^{\frac{2-q}{2p-2}}}.\end{aligned}$$

Logo  $\Lambda_n(tu)$  pode ser escrita como

$$\Lambda_n(tu) = C_{p,q} \frac{\|u\|_{\frac{2p-q}{p-1}}^{\frac{2p-q}{p-1}}}{\|u\|_q^q \left[ \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx \right]^{\frac{2-q}{2p-2}}} = \Lambda_n(u).$$

Portanto  $\Lambda_n(tu) = \Lambda_n(u)$  complementando assim a prova do ítem *i*).

Em relação ao ítem *ii*), primeiramente mostraremos que  $\Lambda_n$  é limitado inferiormente. Para isso, note que podemos escrever

$$(I_\alpha * |u|^p)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{A_\alpha(N) |u(y)|^p}{|x-y|^{N-\alpha}} dy.$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx = A_\alpha(N) \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^p |u(y)|^p}{|x-y|^{N-\alpha}} dx dy.$$

Aplicando o Lema 2.1 com  $\phi = |u|^p$  e  $\psi = |u|^p$ , existem  $t, r > 1$  e  $0 < \alpha < N$  com  $\frac{1}{t} + \frac{N-\alpha}{N} + \frac{1}{r} = 2$  tais que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx \leq A_\alpha(N) C \| |u|^p \|_t \| |u|^p \|_r.$$

Tomando  $C_1 = A_\alpha(N)C$  e  $t = r = \frac{2N}{N+\alpha}$ , obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx \leq C_1 \| |u|^p \|_{\frac{2N}{N+\alpha}}^2 = C_1 \left( \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p \frac{2N}{N+\alpha}} \right)^{\frac{N+\alpha}{2N} \frac{2}{p}} = C_1 \|u\|_{\frac{2pN}{N+\alpha}}^{\frac{2p}{N+\alpha}}.$$

Note que, em vista das hipóteses dadas sobre  $p$  em  $(Q)$ , podemos escrever

$$\frac{2pN}{N+\alpha} < \frac{2N}{N+\alpha} \frac{N+\alpha}{N-2} = \frac{2N}{N-2} = 2^*.$$

Logo pela Proposição 2.1 a imersão  $X \hookrightarrow L^{\frac{p2N}{N+\alpha}}(\mathbb{R}^N)$  é compacta, assim existe  $C_2 > 0$  tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx \leq C_2 \|u\|^{2p}. \quad (2-30)$$

Por outro lado, visto que  $\Lambda_n(u)$  é 0-homogênia, podemos normalizar  $u$  de forma conveniente, assim pelo Lema 2.1 segue que a imersão  $X \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$  é compacta para cada  $u \in X$  com  $\|u\| = 1$ , assim, existe  $C_3 > 0$  tal que  $\|u\|_q \leq C_3$ . Com isto, associado ao ítem *i*) e à Equação (2-30), temos:

$$\|u\|_q^q \left[ \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx \right]^{\frac{2-q}{2p-2}} \leq (C_3)^q \cdot (C_2)^{\frac{2-q}{2p-2}},$$

assim:

$$\Lambda_n(u) \geq C_{p,q} \frac{1}{(C_3)^q (C_2)^{\frac{2-q}{2p-2}}} =: \tilde{C} > 0.$$

Em outras palavras  $\Lambda_n$  é limitado inferiormente.

Visto que o quociente de Rayleigh, definido em (1-22), é dado por  $\lambda^* := \inf_{v \in X \setminus \{0\}} \Lambda_n(v)$ , assim  $\lambda^* > 0$  como foi mencionado anteriormente.

Provaremos agora que existe  $u \in X \setminus \{0\}$  tal que  $\lambda^* = \Lambda_n(u)$ . De fato considere uma sequência minimizante  $(u_k) \in X \setminus \{0\}$  ou seja,  $\Lambda_n(u_k) \rightarrow \lambda^*$  quando  $k \rightarrow \infty$ .

Sem perda de generalidade, usando o fato de que  $\Lambda_n$  é homogêneo de grau zero, podemos assumir que  $(u_k)$  é normalizada em  $L^q(\mathbb{R}^N)$ , ou seja, temos  $\|u_k\|_q = 1$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ . Agora afirmamos que  $(u_k)$  é limitada em  $X$ . De fato, usando o fato de que  $(u_k)$  é normalizada em  $L^q(\mathbb{R}^N)$  e que  $\Lambda_n$  é distante de zero, obtemos

$$\Lambda_n(u_k) = C_{p,q} \frac{\|u_k\|^{\frac{2p-q}{p-1}}}{\left[ \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u_k|^p) |u_k|^p dx \right]^{\frac{2-q}{2p-2}}} \geq \tilde{C}. \quad (2-31)$$

Assim,

$$\|u_k\|^{\frac{q-2p}{p-1}} \leq \frac{C_{p,q}}{\tilde{C}} \left[ \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u_k|^p) |u_k|^p dx \right]^{\frac{q-2}{2(p-1)}}.$$

Usando a Equação (2-30) e tomando  $C' = \frac{C_{p,q}}{\tilde{C}} C_2$

$$\|u_k\|_{\frac{q-2p}{p-1}} \leq C'(\|u\|^p)^{\frac{q-2}{p-1}}.$$

Dividindo ambos os lados por  $(\|u\|)^{\frac{p(q-2)}{p-1}}$  temos

$$\|u_k\|_{\frac{q-2p}{p-1} - \frac{p(q-2)}{p-1}} \leq C',$$

logo

$$\|u_k\|^q \geq C'^{-1}.$$

Assim  $\|u_k\|$  é distante de zero.

Por outro lado, por contradição, suponha que  $\|u_k\|$  não seja limitada superiormente, assim existe uma subsequência  $(u_{k_j}) := (u_j)$  tal que  $\|u_j\| \rightarrow \infty$ . Das Igualdades (2-31) e (2-30) temos

$$\Lambda_n(u_j) \geq C_{p,q} \frac{\|u_j\|_{\frac{2p-q}{p-1}}^{\frac{2p-q}{p-1}}}{C_2^{\frac{2-q}{2p-2}} \|u_j\|_{\frac{p(2-q)}{p-1}}^{\frac{p(2-q)}{p-1}}},$$

assim

$$\Lambda_n(u_j) \geq C_{p,q} C_2^{-\frac{2-q}{2p-2}} \|u_j\|^q,$$

portanto  $\Lambda_n(u_j) \rightarrow \infty$  quando  $j \rightarrow \infty$ , o que é absurdo, visto que  $(u_k)$  é uma sequencia minimizante de  $\Lambda_n$ . Assim,  $(u_k)$  é uma sequência limitada, logo existe  $u \in X$  tal que  $u_k \rightharpoonup u$  em  $X$ .

Usando a compacidade imersão  $X \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$  para cada  $r \in [1, 2^*)$ , obtemos também que  $\|u\|_q = 1$ . A última afirmação implica que  $u \neq 0$ .

Agora, usando o fato de que a norma  $\|\cdot\|$  é fracamente semicontínua inferiormente e a imersão  $X \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$  é compacta para cada  $r \in [1, 2^*)$ , observamos que  $\Lambda_n$  também é fracamente semicontínua inferiormente. Portanto,

$$\Lambda_n(u) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \Lambda_n(u_k) = \lambda^*.$$

Deste resultado e visto que  $\lambda^*$  é o ínfimo do conjunto, resulta que

$$\lambda^* = \Lambda_n(u) = \inf_{v \in X \setminus \{0\}} \Lambda_n(v).$$

Em relação ao item *iii*), note que pela Equação (2-24) e lembrando que  $Q_n(t) := R_n(tu)$  podemos concluir que

$$\lambda^* := \inf_{v \in X \setminus \{0\}} \Lambda_n(v) = \Lambda_n(u) := R_n(t_n(u)u).$$

Além disso, como  $t_n(u)$  é o ponto de máximo de  $Q_n(t) := R_n(tu)$ , observamos

$$0 = Q'_n(t_n(u)) = (R_n)'(t_n(u)u)u, \quad w \in X. \quad (2-32)$$

Por outro lado, usando o fato de que  $u$  é um ponto crítico de  $\Lambda_n$ , inferimos que

$$0 = (\Lambda_n)'(u)w = (R_n(t_n(u)u))'w.$$

Visto que

$$(R_n(t_n(u)u))'w = (R_n)'(t_n(u)u)[(t_n)'(u)w]u + (R_n)'(t_n(u)u)t_n(u)w = 0, \quad (2-33)$$

para todo  $w \in X$ , segue das Equações (2-32) e (2-33) que  $(R_n)'(t_n(u)u)w = 0$  vale para todo  $w \in X$ .

Agora, definindo a função auxiliar  $v := t_n(u)u \in X \setminus \{0\}$ , podemos escrever

$$\lambda^* = R_n(v) = \frac{\|v\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |v|^p)|v|^p dx}{\|v\|_q^q}.$$

Nosso objetivo agora é calcular  $R'_n(v)w$ , para isso tomemos

$$A(v) = \|v\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |v|^p)|v|^p dx,$$

$$B(v) = \|v\|_q^q.$$

Assim as derivadas de Gateaux de  $A(v)$  e  $B(v)$  são dadas por

$$A'(v)w = 2\langle v, w \rangle - 2p \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |v|^p)|v|^{p-2}v w dx,$$

$$B'(v)w = q \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{q-2}v w dx,$$

logo

$$R'_n(v)w = \frac{\left[ 2\langle v, w \rangle - 2p \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |v|^p)|v|^{p-2}v w dx \right] B(v) - A(v) \cdot q \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{q-2}v w dx}{[B(v)]^2}$$

note que  $A(v) = \lambda^* B(v)$ , assim

$$R'_n(v)w = \frac{\left[ 2\langle v, w \rangle - 2p \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |v|^p)|v|^{p-2}v w dx \right] B(v) - \lambda^* B(v) \cdot q \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{q-2}v w dx}{[B(v)]^2},$$

portanto obtemos a seguinte identidade

$$0 = R'_n(v)w = \frac{1}{\|v\|_q^q} \left[ 2\langle v, w \rangle - 2p \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |v|^p) |v|^{p-2} v w dx - q\lambda^* \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{q-2} v w dx \right]$$

vale para todo  $w \in X$ . A última afirmação diz que  $v$  é uma solução fraca para o problema (2-29). Isso conclui a prova do item *iii*.  $\square$

**Observação 2.5.** *Observe o funcional*

$$\Lambda_e(u) = Q_e(t_e(u)) = \tilde{C}_{p,q} \frac{\|u\|^{\frac{2p-q}{p-1}}}{\|u\|_q^q \left[ \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx \right]^{\frac{2-q}{2p-2}}},$$

onde

$$\tilde{C}_{p,q} = \left( p \frac{2-q}{2p-q} \right)^{\frac{2-q}{2p-2}} \left( q \frac{p-1}{2p-q} \right) > 0.$$

Note que

$$\tilde{C}_{p,q} = \frac{1}{2} q p^{\frac{2-q}{2p-2}} C_{p,q}$$

assim

$$\Lambda_e(v) = C \Lambda_n(v) \tag{2-34}$$

para cada  $v \in X$  onde  $C \in (0, 1)$ .

Desta forma, contas análogas às realizadas no lema acima são feitas para garantir que o funcional  $\Lambda_e$  também é uma função homogênea de grau zero, e que existe uma função  $u \in X$  tal que

$$\lambda_* = \Lambda_e(u) = \inf_{v \in X \setminus \{0\}} \Lambda_e(v).$$

Usando a Igualdade (2-34), é fácil ver que  $\inf_{v \in X \setminus \{0\}} \Lambda_e(v)$  e  $\inf_{v \in X \setminus \{0\}} \Lambda_n(v)$  são atingidos pela mesma função  $u \in X$ , além disso, dada a natureza da constante  $C$  observamos que  $0 < \lambda_* < \lambda^* < \infty$ . Formalmente, obtemos o seguinte resultado.

**Lema 2.3.** *Suponha (Q), (V<sub>1</sub>) e (V<sub>2</sub>) sejam satisfeitas. Seja*

$$\Lambda_e(u) = Q_e(t_e(u)) = \tilde{C}_{p,q} \frac{\|u\|^{\frac{2p-q}{p-1}}}{\|u\|_q^q \left[ \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx \right]^{\frac{2-q}{2p-2}}},$$

com  $\tilde{C}_{p,q} = \left(p \frac{2-q}{2p-q}\right)^{\frac{2-q}{2p-2}} \left(q \frac{p-1}{2p-q}\right) > 0$ . Então obtemos as seguintes afirmações:

- i)  $\Lambda_e(u)$  é 0-homogênea, i.e.,  $\Lambda_e(tu) = \Lambda_e(u)$  para cada  $t > 0, u \in X \setminus \{0\}$ ;
- ii) Existe  $u \in X \setminus \{0\}$  tal que  $\lambda_* = \Lambda_e(u) = \inf_{v \in X \setminus \{0\}} \Lambda_e(v)$ . Além disso, obtemos que  $\lambda_* > 0$ ;
- iii) Considere a função  $u \in X \setminus \{0\}$  dada pelo item ii). Defina a função  $v = t_e(u)u$ , onde  $t_e(u)$  é dada por (2-26). Então  $v$  é uma solução fraca para o seguinte problema elíptico

$$\begin{cases} -2\Delta w + 2V(x)w = 2p(I_\alpha * |w|^p)|w|^{p-2}w + q\lambda_*|w|^{q-2}w \text{ em } \mathbb{R}^N, \\ w \in X. \end{cases} \quad (2-35)$$

## 2.4 Existência de ponto crítico para $\phi(t)$

Agora, usando os Lemas 2.2 e 2.3, podemos mostrar que a fibra  $\phi(t) = E_\lambda(tu)$  tem exatamente dois pontos críticos distintos para cada  $\lambda \in (0, \lambda^*)$ , veja o gráfico de  $Q_n(t)$  na Figura 2.1 e Observação 2.1. Mais especificamente, provamos o seguinte resultado:

**Proposição 2.9.** *Suponha que (Q), (V<sub>1</sub>) e (V<sub>2</sub>) sejam satisfeitas. Então, para cada  $\lambda \in (0, \lambda^*)$  e  $u \in X \setminus \{0\}$ , a fibra  $\phi(t) = E_\lambda(tu)$  tem exatamente dois pontos críticos distintos  $0 < t_\lambda^{n,+}(u) < t_n(u) < t_\lambda^{n,-}(u)$ . Além disso*

- i) A função  $t_\lambda^{n,+}(u)$  é um ponto de mínimo local para a fibra  $\phi$  que satisfaz  $t_\lambda^{n,+}(u)u \in \mathcal{N}_\lambda^+$ . Além disso, o funcional  $t_\lambda^{n,-}(u)$  é um ponto de máximo local para a fibra  $\phi$  que verifica  $t_\lambda^{n,-}(u)u \in \mathcal{N}_\lambda^-$ .
- ii) As funções  $u \mapsto t_\lambda^{n,+}(u)$  e  $u \mapsto t_\lambda^{n,-}(u)$  pertencem a  $C^1(X \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ .

*Demonstração.* Sejam  $0 < \lambda < \lambda^*$  e  $u \in X \setminus \{0\}$  fixos. Pela definição de  $\lambda^*$ , temos que

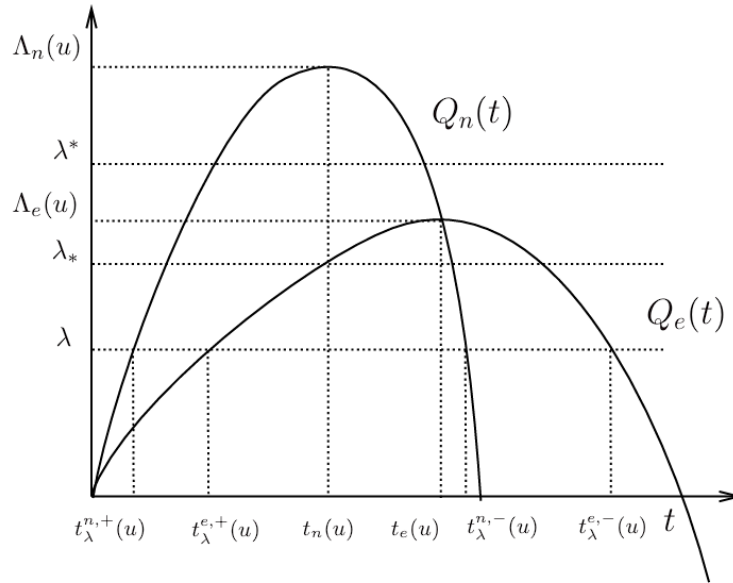
$$R_n(t_n(u)u) = Q_n(t_n(u)) \geq \lambda^* > \lambda.$$

Para essa demonstração será usado análise do gráfico das funções  $Q_n(t)$  e  $Q_e(t)$  que se encontra na Figura 2.1.

Vale ressaltar que na Figura 2.1 foi usado que  $Q_n(t_n(u)) = \max_{t>0} Q_n(t)$ . Como consequência, obtemos que  $Q_n(t) = R_n(tu) = \lambda$  admite exatamente duas raízes, e consideramos suas raízes na seguinte forma

$$0 < t_\lambda^{n,+}(u) < t_n(u) < t_\lambda^{n,-}(u).$$

Portanto, pela Observação 2.1, podemos concluir que as raízes  $t_\lambda^{n,+}(u)$  e  $t_\lambda^{n,-}(u)$  são pontos críticos para a fibra  $\phi(t) = E_\lambda(tu)$ .



**Figura 2.1:** As funções  $Q_n(t)$  e  $Q_e(t)$ .

Fonte: SILVA et al. (2021)

Sob essas condições, como visto na Proposição 2.6 observamos também que

$$Q'_n(t_\lambda^{n,+}(u)) > 0 \text{ e } Q'_n(t_\lambda^{n,-}(u)) < 0. \quad (2-36)$$

Por outro lado, usando a Equação (2-21) e sabendo que  $G(u) = \|u\|_q^q$  mencionamos que

$$0 < Q'_n(t_\lambda^{n,+}(u)) = \frac{d}{dt} R_n(t_\lambda^{n,+}(u)u) = \frac{q}{t_\lambda^{n,+}(u)} \frac{E''_\lambda(t_\lambda^{n,+}(u)u)(t_\lambda^{n,+}(u)u, t_\lambda^{n,+}(u)u)}{G'(t_\lambda^{n,+}(u)u)(t_\lambda^{n,+}(u)u)},$$

para todo  $u \in X \setminus \{0\}$ . Logo

$$E''_\lambda(t_\lambda^{n,+}(u)u)(t_\lambda^{n,+}(u)u, t_\lambda^{n,+}(u)u) > 0.$$

Assim,  $t_\lambda^{n,+}(u)u$  é ponto de mínimo local. Além disso, pela definição de  $\mathcal{N}_\lambda^+$  deduzimos que

$$t_\lambda^{n,+}(u)u \in \mathcal{N}_\lambda^+.$$

Da mesma forma, concluímos que  $t_\lambda^{n,-}(u)u$  é ponto de máximo local de  $Q$  e que

$$t_\lambda^{n,-}(u)u \in \mathcal{N}_\lambda^-.$$

Estas afirmações concluem a prova do item *i*).

Agora provaremos o item *ii*). Inicialmente, observamos que pela definição de  $\lambda^*$ ,

temos que  $\lambda \in (0, \lambda^*)$  implica que  $\lambda < Q_n(t_n(u)) = R_n(t_n(u)u)$  para todo  $u \in X \setminus \{0\}$ .

Como foi mencionado anteriormente, pela Figura 2.1 obtemos exatamente duas raízes para a equação  $R_n(tu) = \lambda$ , e essas raízes satisfazem

$$0 < t_\lambda^{n,+}(u) < t_n(u) < t_\lambda^{n,-}(u),$$

com  $t_\lambda^{n,+}(u)u \in \mathcal{N}_\lambda^+$  e  $t_\lambda^{n,-}(u)u \in \mathcal{N}_\lambda^-$ . Portanto, obtemos que  $\mathcal{N}_\lambda = \mathcal{N}_\lambda^+ \cup \mathcal{N}_\lambda^-$  é satisfeito para cada  $\lambda \in (0, \lambda^*)$ , veja definição de  $\mathcal{N}_\lambda$  em (1-12). Aqui remetemos o leitor interessado ao importante trabalho [11].

Sob essas condições, usando o fato de que  $Q_n \in C^1(\mathbb{R}^+, X)$  juntamente com (2-36), segue do Teorema da Função Implícita que as funções  $u \mapsto t_\lambda^{n,+}(u)$  e  $u \mapsto t_\lambda^{n,-}(u)$  pertencem a  $C^1(X \setminus \{0\}, \mathbb{R})$  para qualquer  $\lambda \in (0, \lambda^*)$ . De fato, definindo  $L^\pm : (0, \infty) \times (X \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $L^\pm(t, u) = E'_\lambda(tu)tu$ , obtemos que  $L^\pm(t, u) = 0$  se, e somente se,  $tu \in \mathcal{N}_\lambda$ . Além disso, observamos que  $\frac{\partial}{\partial t} L^\pm(t, u) \neq 0$  para cada  $(t, u) \in (0, \infty) \times (X \setminus \{0\})$  tal que  $tu \in \mathcal{N}_\lambda^\pm$ . Isso conclui a prova.  $\square$

**Observação 2.6.** *Sob as hipóteses da Proposição 2.9, segue que  $\mathcal{N}_\lambda^0$  é vazio para cada  $\lambda \in (0, \lambda^*)$ . Este fato nos permite aplicar o método de Nehari levando em conta a unicidade das projeções em  $\mathcal{N}_\lambda^+$  e  $\mathcal{N}_\lambda^-$ . Esta é a principal característica para o parâmetro  $\lambda = \lambda^* > 0$ . Em relação ao parâmetro  $\lambda = \lambda^*$  temos que este o primeiro número positivo tal que  $\mathcal{N}_\lambda^0$  não é vazio, veja [11].*

Similar às contas apresentadas na Proposição 2.9, é possível provar um resultado análogo usando o funcional  $Q_e$  em vez de  $Q_n$ . Mais especificamente, consideramos o seguinte resultado.

**Proposição 2.10.** *Suponha que valham (Q), (V<sub>1</sub>) e (V<sub>2</sub>). Então, para cada  $\lambda \in (0, \lambda_*)$  e  $u \in X \setminus \{0\}$ , a fibra  $\phi(t) = E_\lambda(tu)$  admite dois pontos  $0 < t_\lambda^{e,+}(u) < t_e(u) < t_\lambda^{e,-}(u)$  tais que*

- i)  $t_\lambda^{e,-}(u)u, t_\lambda^{e,+}(u)u \in \mathcal{E}$  e  $Q'_e(t_\lambda^{e,-}(u)) < 0 < Q'_e(t_\lambda^{e,+}(u))$ .
- ii)  $u \mapsto t_\lambda^{e,+}(u)$  e  $u \mapsto t_\lambda^{e,-}(u)$  pertencem a  $C^1(X \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ .

Ademais, mencionamos que  $0 < t_\lambda^{n,+}(u) < t_\lambda^{e,+}(u) < t_n(u) < t_e(u) < t_\lambda^{n,-}(u) < t_\lambda^{e,-}(u) < \infty$  vale para cada  $\lambda \in (0, \lambda_*)$ .

## Demonstração do Teorema 1.1

Neste capítulo provamos nosso primeiro resultado principal. Em relação à existência dos pontos críticos, usando o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, veremos que se  $u \in \mathcal{N}_\lambda^- \cup \mathcal{N}_\lambda^+$  é um minimizador local para  $E_\lambda$  em  $\mathcal{N}_\lambda$ , então  $u$  é um ponto crítico de  $E_\lambda$  em  $X$ , (veja Lema 3.3). Para garantir a existência desses minimizadores, nos Lemas 3.4 e 3.6 consideramos duas seqüências minimizantes  $(v_k)$  em  $\mathcal{N}_\lambda^-$  e  $(u_k)$  em  $\mathcal{N}_\lambda^+$  e vemos que essas seqüências convergem para valores  $v_\lambda$  e  $u_\lambda$  em  $X \setminus \{0\}$  respectivamente. Além disso esses lemas garantem que

$$\mathcal{E}_\lambda^2 = E_\lambda(v_\lambda) \quad \text{e} \quad \mathcal{E}_\lambda^1 = E_\lambda(u_\lambda).$$

Por outro lado, usando resultados apresentados no Capítulo 2, é fácil de concluir que  $\mathcal{E}_\lambda^1 < 0$ .

### 3.1 Características de $\mathcal{E}_\lambda^1$ e $\mathcal{E}_\lambda^2$

Primeiramente, provaremos um resultado o qual garantirá que seqüências minimizantes são limitadas.

**Lema 3.1.** *Suponha que as hipóteses  $(Q)$ ,  $(V_1)$  e  $(V_2)$  sejam satisfeitas. Então o funcional de energia  $E_\lambda$  é coercivo sobre  $\mathcal{N}_\lambda$  para cada  $\lambda > 0$ . Em particular, o funcional  $E_\lambda$  é limitado inferiormente em  $\mathcal{N}_\lambda$ .*

*Demonstração.* Note que para cada  $u \in \mathcal{N}_\lambda$ , temos que  $E'(u)u = 0$ , assim

$$\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx = \|u\|^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx.$$

Consequentemente

$$E_\lambda(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{2p} \left( \|u\|^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx \right) - \frac{\lambda}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx.$$

Usando a continuidade da imersão  $X \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$  para cada  $r \in [1, 2^*)$ , temos que

$$\left[ \left( \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx \right)^{1/q} \right]^q \leq C^q \|u\|^q,$$

e usando o fato de que  $p > 1$  e  $1 < q < 2$  deduzimos que

$$E_\lambda(u) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{p} \right) \|u\|^2 - \lambda \left( \frac{1}{q} - \frac{1}{2p} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx \geq C_1 \|u\|^2 - \lambda C_2 \|u\|^q$$

vale para algumas constantes  $C_1, C_2 > 0$ . Assim  $E_\lambda$  é limitado inferiormente em  $\mathcal{N}_\lambda$ .

Por fim, como  $q < 2$ ,  $E_\lambda(u) \rightarrow +\infty$  à medida que  $\|u\| \rightarrow +\infty$  com  $u \in \mathcal{N}_\lambda$ . Isso completa a demonstração.  $\square$

O lema a seguir estabelece propriedades fundamentais para os conjuntos do tipo Nehari. Ele assegura que as sequências minimizantes associadas a esses conjuntos permanecem afastadas da origem, o que é fundamental para mostrar que qualquer minimizador sobre  $\mathcal{N}_\lambda^-$  é não nulo. Além disso, o lema afirma que  $\mathcal{N}_\lambda^-$  e  $\mathcal{N}_\lambda^0$  são conjuntos fechados, o que fornece a compacidade necessária para garantir a existência de extremos na minimização, o que será indispensável para a demonstração dos resultados de existência que se seguem no trabalho.

**Lema 3.2.** *Suponha que  $(Q)$ ,  $(V_1)$  e  $(V_2)$  sejam satisfeitas. Assuma também que  $\lambda \in (0, \lambda^*)$  vale. Então, para cada  $u \in \mathcal{N}_\lambda^- \cup \mathcal{N}_\lambda^0$  existe uma constante  $c = c(N, p, q) > 0$  que não depende de  $\lambda$  de tal forma que  $\|u\| \geq c$ . Em particular*

- Quando  $\lambda \in (0, \lambda^*)$ , o conjunto  $\mathcal{N}_\lambda^-$  é fechado;
- Quando  $\lambda \in (0, \lambda^*]$ , o conjunto  $\mathcal{N}_\lambda^0$  é fechado.

*Demonstração.* Seja  $u \in \mathcal{N}_\lambda^-$  uma função fixa com  $\lambda \in (0, \lambda^*)$ . Neste caso, assumimos  $t_\lambda^{n,-}(u) = 1$ . Segue de (2-23) e (2-30) que

$$1 = t_\lambda^{n,-}(u) \geq t_n(u) = \left[ \frac{(2-q)}{(2p-q)} \frac{\|u\|^2}{\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx} \right]^{\frac{1}{2p-2}} \geq [C \|u\|^{2-2p}]^{\frac{1}{2p-2}}. \quad (3-1)$$

Assim

$$\|u\|^{2-2p} \leq \frac{1}{C}.$$

Como  $2 - 2p < 0$  segue que  $\|u\| \geq C_1$  é verdadeira para algum  $C_1 = C_1(N, p, q) > 0$  com  $\lambda \in (0, \lambda^*)$ . Observe que  $\mathcal{N}_\lambda^0 = \emptyset$  para cada  $\lambda \in (0, \lambda^*)$ .

Para o caso  $\lambda = \lambda^*$  também observamos que  $\mathcal{N}_{\lambda^*}^0 \neq \emptyset$ . Tome agora,  $u \in \mathcal{N}_{\lambda^*}^-$ , pela definição de  $\lambda^*$  sabemos que  $\lambda^* \leq \Lambda_n(u)$ . Suponha, por absurdo, que  $\lambda^* = \Lambda_n(u)$ , assim pela Figura 2.1, para  $t = 1$ , temos que  $R'_n(u) = 0$ , logo  $E''(u)(u, u) = 0$  o que contradiz a hipótese de  $u \in \mathcal{N}_{\lambda^*}^-$ , assim  $\lambda^* < \Lambda_n(u)$ .

Sabendo que  $\Lambda_n(u) = \max_{t>0} R_n(tu)$ , podemos concluir que  $Q'_n(1) < 0$ . Em outras palavras, em  $t = 1$  a função  $Q_n(t)$  é decrescente, e como  $t_n(u)$  é ponto de máximo global, segue que  $t_n(u) < 1$ . Usando ideias similares às apresentadas em (3-1) inferimos que existe  $C_2 = C_2(N, p, q)$  tal que  $\|u\| \geq C_2$  para cada  $u \in \mathcal{N}_{\lambda^*}^-$ .

Tomemos agora  $u \in \mathcal{N}_{\lambda^*}^0$  pela Proposição 2.5 obtemos que  $R'_n(tu)tu = 0$  para  $t = 1$ . Observando a Figura 2.1 temos que  $\lambda^* = \Lambda_n(u)$ . Como  $t_n(u)$  é o único ponto de máximo para a função  $Q_n$ , segue que  $t_n(u) = 1$ . Como consequência, usando as mesmas ideias empregadas em (3-1), obtemos que  $\|u\| \geq C_3$  é verdadeira para algum  $C_3 = C_3(N, p, q) > 0$  onde  $u \in \mathcal{N}_{\lambda^*}^0$ .

Portanto, obtemos que  $\|u\| \geq C$  para qualquer  $u \in \mathcal{N}_\lambda^- \cup \mathcal{N}_\lambda^0$  onde  $C = \min(C_1, C_2, C_3) > 0$ .

Por fim, suponha que  $\{u_k\} \subset \mathcal{N}_\lambda^0$  seja uma sequência convergente para algum  $u \in X$ . Como  $\|u_k\| \geq c > 0$  para todo  $n$ , o limite  $u$  também satisfaz  $\|u\| \geq c > 0$ . Além disso, temos

$$E'_\lambda(u_k)(u_k) \rightarrow E'_\lambda(u)(u) \quad \text{e} \quad E''_\lambda(u_k)(u_k, u_k) \rightarrow E''_\lambda(u)(u, u).$$

Como  $u_n \in \mathcal{N}_\lambda^0$ , temos  $E'_\lambda(u_k)(u_k) = 0$  e  $E''_\lambda(u_k)(u_k, u_k) = 0$ . Passando ao limite, obtemos

$$E'_\lambda(u)(u) = 0 \quad \text{e} \quad E''_\lambda(u)(u, u) = 0.$$

Isso implica que  $u \in \mathcal{N}_\lambda^0$ , e portanto  $\mathcal{N}_\lambda^0$  é um conjunto fechado.

Por outro lado, tome a sequência convergente  $(u_k) \in \mathcal{N}_\lambda^-$ , tal que  $u_k \rightarrow u \in X$ . Bem como o caso em  $\mathcal{N}_\lambda^0$ , passando ao limite, temos as seguintes duas possibilidades. A primeira

$$E''(u)(u, u) < 0,$$

neste caso  $u$  está em  $\mathcal{N}_\lambda^-$ , ou

$$E''(u)(u, u) = 0,$$

e neste caso  $u \in \mathcal{N}_\lambda^0$ , o que não ocorre pois  $\mathcal{N}_\lambda^0$  é vazia quando  $\lambda < \lambda^*$ , ou  $u = 0$ , o que não ocorre pois  $\|u_k\| > c > 0$ , o que implica que  $\|u\| \geq c > 0$ . Assim, toda sequência convergente de  $\mathcal{N}_\lambda^-$  convergente para um elemento de  $\mathcal{N}_\lambda^-$  e portanto,  $\mathcal{N}_\lambda^-$  também é fechado. Isto encerra a prova.  $\square$

Para o próximo resultado, devemos provar que  $\mathcal{N}_\lambda$  é uma restrição natural para

nosso problema principal para cada  $\lambda \in (0, \lambda^*)$ . De fato, será provado que qualquer minimizador  $u \in \mathcal{N}_\lambda^+ \cup \mathcal{N}_\lambda^-$  para o funcional de energia  $E_\lambda$  restrito à variedade de Nehari é um ponto crítico para  $E_\lambda$  em todo o espaço de trabalho  $X$ . Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

**Lema 3.3.** *Suponha que as hipóteses (Q), (V<sub>1</sub>) e (V<sub>2</sub>) são satisfeitas. Assuma que  $u \in \mathcal{N}_\lambda^- \cup \mathcal{N}_\lambda^+$  é um minimizador local para  $E_\lambda$  em  $\mathcal{N}_\lambda$ . Então  $u$  é um ponto crítico de  $E_\lambda$  em  $X$ , isto é, obtemos que  $E'_\lambda(u)\psi = 0$  para cada  $\psi \in X$  com  $\lambda \in (0, \lambda^*)$ .*

*Demonstração.* Seja  $u \in X$  um minimizador local para  $E_\lambda$  em  $\mathcal{N}_\lambda$  onde  $\lambda \in (0, \lambda^*)$ . Tome  $J(u) = E'(u)u$ , assim  $J'(u)\psi = E''(u)(u, \psi) + E'(u)\psi$  em particular como  $E''(u)(u, u) = \phi'_u(1) \neq 0$  e  $u \in \mathcal{N}_\lambda$ , então para  $\psi = u$  temos que  $J'(u)u = E''(u)(u, u) + E'(u)u \neq 0$ .

Como  $u$  é um minimizador local de  $E_\lambda$  sob a restrição  $J(u) = 0$ , e como  $J'(u) \neq 0$ , segue do Teorema dos Multiplicadores de Lagrange [6] para funcionais que existe  $\mu \in \mathbb{R}$  tal que

$$E'_\lambda(u) = \mu J'(u) \quad \text{em } X^*, \quad (3-2)$$

assim

$$E'_\lambda(u)u = \mu J'(u)u.$$

Como  $J'(u)u = E''_\lambda(u)(u, u) \neq 0$ , e  $E'_\lambda(u)u = 0$ , segue que  $\mu = 0$ . Da Igualdade (3-2) segue que

$$E'_\lambda(u) = 0 \quad \text{em } X^*,$$

isto é

$$E'_\lambda(u)\psi = 0 \quad \text{para cada } \psi \in X. \quad \square$$

Para o próximo resultado, provaremos que qualquer sequência minimizante em  $\mathcal{N}_\lambda^-$  possui uma subsequência que converge fortemente em  $X$  o que nos permite afirmar a existência um minimizador local para  $E_\lambda$  em  $\mathcal{N}_\lambda^-$ . Usando o Lema 3.3, podemos concluir que esse minimizador é um ponto crítico para o funcional de energia  $E_\lambda$ . Nesta direção obtemos o seguinte resultado.

**Lema 3.4.** *Suponha que as hipóteses (Q), (V<sub>1</sub>) e (V<sub>2</sub>) seja satisfeitas. Assuma também que  $\lambda \in (0, \lambda^*)$ . Seja  $(v_k) \subset \mathcal{N}_\lambda^-$  uma sequência minimizante. Então, tomando uma subsequência se necessário, existe  $v_\lambda \in X \setminus \{0\}$  tal que,  $v_k \rightarrow v_\lambda$  em  $X$  onde  $v_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda^-$ . Além disso, obtemos que*

$$\mathcal{E}_\lambda^2 = E_\lambda(v_\lambda).$$

*Demonstração.* Inicialmente, consideremos uma sequência minimizante  $(v_k) \subset \mathcal{N}_\lambda^-$ , ou seja,  $E_\lambda(v_k) = \mathcal{E}_\lambda^2 + o_k(1)$ , onde  $\lim_{k \rightarrow \infty} o_k(1) = 0$ , veja Definição (1-18). Sem perda de

generalidade, assumimos a subsequência  $v_k \rightharpoonup v_\lambda$  em  $X$ . Como consequência, usando a compacidade da imersão  $X \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$  para cada  $r \in [1, 2^*)$ , inferimos que  $v_k \rightarrow v_\lambda$  em  $L^r(\mathbb{R}^N)$  e  $v_k(x) \rightarrow v_\lambda(x)$  q.t.p. em  $\mathbb{R}^N$ . Além disso, usando a última afirmação, existe  $h_r \in L^r(\mathbb{R}^n)$  tal que  $|v_k| \leq h_r$  q.t.p. em  $\mathbb{R}^N$ , assim

$$(I_\alpha * |v_k|^p)|v_k|^p \leq (I_\alpha * |h_r|^p)|h_r|^p.$$

Sob estas condições, pelo Teorema da Convergência Dominada temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |v_k|^p)|v_k|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |v_\lambda|^p)|v_\lambda|^p dx + o_k(1) \\ \int_{\mathbb{R}^N} |v_k|^q dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |v_\lambda|^q dx + o_k(1). \end{aligned} \quad (3-3)$$

Observe que  $v_\lambda \neq 0$ . De fato, argumentando por contradição, assumimos que  $v_\lambda \equiv 0$  e  $v_k \rightarrow 0$  em  $X$ . Agora, defina a sequência normalizada

$$w_k = \frac{v_k}{\|v_k\|} \in S^1$$

onde  $S^1$  é a esfera unitária de  $X$ . Note que podemos escrever  $v_k$  como  $v_k = \|v_k\|(v_k/\|v_k\|) = \|v_k\|w_k$ , assim  $\|v_k\|w_k$ , está em  $\mathcal{N}_\lambda^-$ . Uma vez que  $t_\lambda^{n,-}(w_k)$  é o único que multiplicado por  $w_k$  estará em  $\mathcal{N}_\lambda^-$ , então necessariamente  $t_\lambda^{n,-}(w_k) = \|v_k\|$ . Assim, podemos escrever

$$v_k = \|v_k\|w_k = t_\lambda^{n,-}(w_k)w_k.$$

Para facilitar a leitura, usaremos a partir de agora que  $t_k = t_\lambda^{n,-}(w_k)$ . Em vista do Lema 3.2 e levando em conta que  $v_k \in \mathcal{N}_\lambda^-$ , existe uma constante  $C_1 > 0$  tal que  $t_k \geq C_1 > 0$ . Além disso, visto que  $(v_k)$  é uma sequência minimizante, pelo Lema 3.1,  $t_k = \|v_k\| \leq C_2$ . Assim, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass,  $t_k \rightarrow t_0 > 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Logo,  $v_k \rightharpoonup 0$  é equivalente a  $w_k \rightharpoonup 0$  em  $X$ . Note que

$$\frac{\lambda}{t_0^{2-q}} + o_k(1) = \frac{\lambda}{t_k^{2-q}}. \quad (3-4)$$

Sob estas condições, usando o fato de que  $v_k \in \mathcal{N}_\lambda^-$  e a Observação 2.1, obtemos

$$\frac{\lambda}{t_0^{2-q}} + o_k(1) = \frac{1}{t_k^{2-q}} \frac{\|t_k w_k\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |t_k w_k|^p) |t_k w_k|^p dx}{\int_{\mathbb{R}^N} |t_k w_k|^q dx},$$

visto que  $t_k > 0$  e  $\|w_k\| = 1$  temos

$$\frac{\lambda}{t_0^{2-q}} + o_k(1) = \frac{1}{t_k^{2-q}} \frac{\|t_k\|^2 - t_k^{2p} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |w_k|^p) |w_k|^p dx}{t_k^q \int_{\mathbb{R}^N} |w_k|^q dx},$$

portanto

$$\frac{\lambda}{t_0^{2-q}} + o_k(1) = \frac{1 - t_k^{2p-2} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |w_k|^p) |w_k|^p dx}{\|w_k\|_q^q}.$$

Como consequência, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$1 - t_k^{2p-2} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |w_k|^p) |w_k|^p dx < \left( \frac{\lambda}{t_0^{2-q}} + \varepsilon \right) \|w_k\|_q^q \quad (3-5)$$

vale para cada  $k > k_0$ . Por outro lado, usando o fato de que  $w_k \rightharpoonup 0$  e a compacidade da imersão  $X \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$  para cada  $r \in [1, 2^*)$  temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |w_k|^p) |w_k|^p dx = o_k(1), \quad \int_{\mathbb{R}^N} |w_k|^q dx = o_k(1).$$

Mas usando (3-5) obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |w_k|^p) |w_k|^p dx > \frac{1}{t_k^{2p-2}}$$

o que é absurdo. Assim,  $v_\lambda \neq 0$ .

Por outro lado, pela Proposição 2.9 obtemos que o mapa de fibração  $\phi(t) = E_\lambda(tu)$ ,  $t \geq 0$ , admite um único ponto crítico  $t_\lambda^{n,-}(v_\lambda) > 0$  de modo que  $t_\lambda^{n,-}(v_\lambda)v_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda^-$ .

Agora, por contradição, suponha que  $v_k$  não converge fortemente para  $v_\lambda$  em  $X$ . Pela Proposição A.1,  $\|v_\lambda\| < \liminf \|v_k\|$ . Uma vez que  $(v_k) \in \mathcal{N}_\lambda^-$ , também mencionamos que

$$E_\lambda(sv_k) \leq E_\lambda(v_k) \quad (3-6)$$

vale para qualquer  $s \geq t_\lambda^{n,+}(v_k)$ .

Agora afirmamos que  $t_\lambda^{n,-}(v_\lambda) > t_\lambda^{n,+}(v_k)$ . A prova desta afirmação segue usando o fato de que  $v \mapsto E'_\lambda(v)v$  é fracamente semicontínua inferiormente. De fato, obtemos que

$$0 = E'_\lambda(t_\lambda^{n,-}(v_\lambda)v_\lambda)v_\lambda < \liminf_{k \rightarrow \infty} E'_\lambda(t_\lambda^{n,-}(v_\lambda)v_k)v_k.$$

Assim,

$$E'_\lambda(t_\lambda^{n,-}(v_\lambda)v_k)v_k > 0 \quad (3-7)$$

para todo  $k$  suficientemente grande. A última afirmação mostra que

$$t_\lambda^{n,-}(v_\lambda) \in (t_\lambda^{n,+}(v_k), t_\lambda^{n,-}(v_k)),$$

veja as Figuras 1.1, 1.2 e 1.3. Pela Desigualdade (3-7), como  $v \mapsto E_\lambda(v)v$  é fracamente semicontínua inferiormente e  $(v_k)$  não converge fortemente para  $v_\lambda$  temos

$$E_\lambda(t_\lambda^{n,-}(v_\lambda)v_\lambda) < \liminf_{k \rightarrow \infty} E_\lambda(t_\lambda^{n,-}(v_\lambda)v_k) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} E_\lambda(t_\lambda^{n,-}(v_k)v_k),$$

e pela Inequação (3-6), afirmamos que

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} E_\lambda(t_\lambda^{n,-}(v_k)v_k) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} E_\lambda(v_k) = \mathcal{E}_\lambda^2,$$

assim

$$E_\lambda(t_\lambda^{n,-}(v_\lambda)v_\lambda) < \mathcal{E}_\lambda^2.$$

Isto é uma contradição devido ao fato de que  $t_\lambda^{n,-}(v_\lambda)v_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda^-$ .

Em resumo, usando as últimas afirmações, inferimos que  $v_k \rightarrow v_\lambda$  em  $X$ . Usando a convergência forte em  $X$ , segue também que  $\mathcal{E}_\lambda^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} E_\lambda(v_k) = E_\lambda(v_\lambda)$ . Isto termina a prova.  $\square$

**Lema 3.5.** *Suponha (Q), (V<sub>1</sub>) e (V<sub>2</sub>). Assuma também que  $\lambda \in (0, \lambda^*)$ . Então  $\mathcal{E}_\lambda^1 < 0$ .*

*Demonstração.* Seja  $\lambda \in (0, \lambda^*)$  fixo. Como visto na Observação 2.4,  $R_e(tu) < R_n(tu)$  vale se  $t \in (0, t_e(u))$  e para todo  $u \in X \setminus \{0\}$ . Pela Proposição 2.10 temos que  $t_\lambda^{n,+}(u) < t_e(u)$ . Além disso

$$R_e(t_\lambda^{n,+}(u)u) < R_n(t_\lambda^{n,+}(u)u) = \lambda.$$

Por fim, usando a desigualdade acima e Observação 2.2, temos:  $E_\lambda(t_\lambda^{n,+}(u)u) < 0$ . Além disso, usando o fato de que  $t_\lambda^{n,+}(u)u \in \mathcal{N}_\lambda^+$ , inferimos que

$$\mathcal{E}_\lambda^1 = \inf_{u \in \mathcal{N}_\lambda^+} E_\lambda(u) \leq E_\lambda(t_\lambda^{n,+}(u)u) < 0.$$

Isso conclui a prova.  $\square$

A análise de sequências minimizantes constitui uma ferramenta fundamental no cálculo variacional. No próximo lema, consideramos sequências em  $\mathcal{N}_\lambda^+$ , que desempenha um papel crucial na busca por soluções de energia positiva para o funcional  $E_\lambda$ . Em resumo ele demonstra que toda sequência minimizante em  $\mathcal{N}_\lambda^+$  admite uma subsequência convergente cujo limite é uma função  $u_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda^+$ .

**Lema 3.6.** *Suponha (Q),  $(V_1)$  e  $(V_2)$  e  $\lambda \in (0, \lambda^*)$ . Seja  $(u_k) \subset \mathcal{N}_\lambda^+$  uma sequência minimizante para  $E_\lambda$  em  $\mathcal{N}_\lambda^+$ . Então, existe  $u_\lambda \in X \setminus \{0\}$  e uma subsequência de  $(u_k)$ , tal que,  $u_{k_j} \rightarrow u_\lambda$  em  $X$  onde  $u_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda^+$ . Além disso, obtemos que*

$$\mathcal{E}_\lambda^1 = E_\lambda(u_\lambda).$$

*Demonstração.* Argumentando como feito na prova do Lema 3.4, obtemos que  $u_k \rightarrow u_\lambda$  em  $L^r(\mathbb{R}^N)$ ,  $u_k(x) \rightarrow u_\lambda(x)$  e  $|u_k| \leq h_r$  q.t.p. em  $\mathbb{R}^N$  onde  $h_r \in L^r(\mathbb{R}^N)$ ,  $r \in [1, 2^*)$ .

Usando o fato de que  $u_k \in \mathcal{N}_\lambda^+$ , temos que  $E'_\lambda(u_k)u_k = 0$  assim

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p) |u|^p dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx.$$

Da igualdade acima e pela Equação (1-1) temos que

$$E_\lambda(u_k) = \frac{p-1}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u_k|^p) |u_k|^p dx + \frac{\lambda q - 2\lambda}{2q} \int_{\mathbb{R}^N} |u_k|^q dx.$$

Assim

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u_k|^q dx = \left( \frac{2q}{2-q} \right) \left( \frac{2(p-1)}{4p} \right) \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u_k|^p) |u_k|^p dx - \frac{2q}{2-q} E_\lambda(u_k).$$

Note que, usando a hipótese (Q) temos

$$\left( \frac{2q}{2-q} \right) \left( \frac{2(p-1)}{4p} \right) \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u_k|^p) |u_k|^p dx \geq 0.$$

Logo

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u_k|^q dx \geq -\frac{2q}{2-q} E_\lambda(u_k).$$

Levando em conta que  $(u_k) \subset \mathcal{N}_\lambda^+$  é uma sequência minimizante para  $E_\lambda$  e usando os mesmos argumentos de (3-3), temos que

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u_\lambda|^q dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u_k|^q dx + o_k(1).$$

Por fim, pelo Lema 3.5, inferimos que

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u_\lambda|^q dx \geq -\frac{2q}{2-q} \mathcal{E}_\lambda^1 > 0.$$

Sendo assim,  $u_\lambda \neq 0$ .

De agora em diante, a prova da convergência forte  $u_k \rightarrow u_\lambda$  em  $X$  segue argumentando por contradição. Sendo assim, suponha que  $(u_k)$  não convirja fortemente para  $u_\lambda$  em  $X$ . Visto que vale a convergência fraca, pela Proposição A.1, obtemos

$\|u_\lambda\| < \liminf \|u_k\|$ . De acordo com a Proposição 2.9 existe um único  $t_\lambda^{n,+}(u_\lambda) > 0$  tal que  $t_\lambda^{n,+}(u_\lambda)u_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda^+$ . Além disso, sabemos que,  $\phi'(t_\lambda^{n,+}(u_\lambda)) = E'_\lambda(t_\lambda^{n,+}(u_\lambda)u_\lambda)u_\lambda = 0$  e  $\phi(t_\lambda^{n,+}(u_\lambda)) = E_\lambda(t_\lambda^{n,+}(u_\lambda)u_\lambda) < 0$ , veja o Lema 3.5.

Usando a compacidade da imersão  $X \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$  para cada  $r \in [1, 2^*)$ , a hipótese de que a norma não converge fortemente em  $X$ , e o fato de que  $(u_k) \subset \mathcal{N}_\lambda^+$ , obtemos

$$\frac{d}{dt}E_\lambda(tu_\lambda) = E'_\lambda(tu_\lambda)u_\lambda < \liminf_{k \rightarrow \infty} E'_\lambda(tu_k)u_k = \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{d}{dt}E_\lambda(tu_k) \leq 0$$

vale para qualquer  $t \in (0, 1]$ . Em vista dessa afirmação, temos que  $t_\lambda^{n,+}(u_\lambda) \geq 1$ , e como  $E_\lambda(tu)$  é não crescente em  $(0, t_\lambda^{n,+}(u_\lambda)]$  temos

$$E_\lambda(t_\lambda^{n,+}(u_\lambda)u_\lambda) \leq E_\lambda(u_\lambda).$$

Sob estas condições como  $(u_k)$  é uma sequência minimizante, que por hipótese não converge fortemente, deduzimos

$$E_\lambda(t_\lambda^{n,+}(u_\lambda)u_\lambda) \leq E_\lambda(u_\lambda) < \liminf_{k \rightarrow \infty} E_\lambda(u_k) = \mathcal{E}_\lambda^1.$$

Usando que  $t_\lambda^{n,+}(u_\lambda)u_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda^+$ , podemos concluir que essa desigualdade estrita é uma contradição provando que  $u_k \rightarrow u_\lambda$  em  $X$ . Isto encerra a prova.  $\square$

## 3.2 Existência de pontos críticos de $E_\lambda$

Vale lembrar que a análise da existência e multiplicidade de soluções para o Problema (0-1) é o tema central deste trabalho. Neste contexto, o método utilizado é o estudo dos pontos críticos do funcional de energia associado.

A Proposição 3.1, que apresentamos a seguir, estabelece um resultado típico nessa direção. Em geral ele garante, para um parâmetro  $\lambda \in (0, \lambda^*)$ , a existência de pelo menos dois pontos críticos distintos, um no subconjunto de Nehari  $\mathcal{N}_\lambda^+$  e outro no  $\mathcal{N}_\lambda^-$ . Além disso, as soluções obtidas são estritamente positivas, uma propriedade essencial do ponto de vista físico e matemático.

**Proposição 3.1.** *Suponha que as hipóteses (Q), (V<sub>1</sub>) e (V<sub>2</sub>) sejam satisfeitas. Então o funcional de energia  $E_\lambda$  admite pelo menos dois pontos críticos  $u_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda^+$  e  $v_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda^-$  para cada  $\lambda \in (0, \lambda^*)$ . Além disso,  $u_\lambda$  e  $v_\lambda$  são estritamente positivos em  $\mathbb{R}^N$ .*

*Demonstração.* Pelo Lema 3.1 sabemos que  $E_\lambda$  é coercivo e limitado inferiormente em  $\mathcal{N}_\lambda^-$ . Seja  $(v_k)$  uma sequência minimizante para  $E_\lambda$  em  $\mathcal{N}_\lambda^-$ . Como  $(v_k)$  é minimizante e  $E_\lambda$  é coerciva, segue que  $(v_k)$  é limitada em  $X$ .

A menos de uma subsequência, existe  $v_\lambda \in X$  tal que  $v_k \rightharpoonup v_\lambda$  em  $X$ . Pelo Lema 3.4 temos que  $v_k \rightarrow v_\lambda$  em  $X$ , assim  $\mathcal{E}_\lambda^2 = E_\lambda(v_\lambda) = \lim E_\lambda(v_k)$  vale para cada  $\lambda \in (0, \lambda^*)$ . Além disso, note que  $E_\lambda(0) = 0$ , assim  $v_\lambda \neq 0$  e como  $\mathcal{N}_\lambda^-$  é fechado,  $v_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda^-$ . Assim,  $v_\lambda$  é minimizador de  $E_\lambda$ , portanto, pelo Lema 3.3,  $v_\lambda$  é uma solução fraca para o Problema (0-1).

É claro que o funcional  $E_\lambda$  é par, logo  $E_\lambda(v_\lambda) = E_\lambda(|v_\lambda|)$ , assim  $E'_\lambda(|v_\lambda|)|v_\lambda| = E'_\lambda(v_\lambda)v_\lambda = 0$  e conseqüentemente  $|v_\lambda| \in \mathcal{N}_\lambda$ . Note que  $v \mapsto E''_\lambda(v)(v, v)$  também é um funcional par, assim  $E''_\lambda(|v_\lambda|)(|v_\lambda|, |v_\lambda|) = E''_\lambda(v_\lambda)(v_\lambda, v_\lambda) < 0$ , provando que  $|v_\lambda| \in \mathcal{N}_\lambda^-$ . Então  $|v_\lambda|$  é um minimizador local em  $\mathcal{N}_\lambda^-$ , mostrando que  $|v_\lambda|$  é agora um ponto crítico para o funcional de energia  $E_\lambda$ .

Sem perda de generalidade, tome  $v_\lambda \geq 0$  em  $\mathbb{R}^N$ . Então o funcional  $E_\lambda$  admite pelo menos um ponto crítico  $v_\lambda \in X$  para cada  $\lambda \in (0, \lambda^*)$  que satisfaz  $v_\lambda \geq 0$  em  $\mathbb{R}^N$ . Agora, inferimos que  $v_\lambda \in C_{loc}^{1,\beta}(\mathbb{R}^N)$  para algum  $\beta \in (0, 1)$ , veja o Teorema B.1 no Apêndice B.

Agora, o principal objetivo é garantir que  $v_\lambda$  seja estritamente positiva. Para isso, por contradição, suponha que existe  $x_0 \in \mathbb{R}^N$  tal que  $v_\lambda(x_0) = 0$ . Observe também que  $v_\lambda \in C^{1,\beta}(B_r(x_0))$  para algum  $\beta \in (0, 1)$  e para cada  $r > 0$ . Portanto,  $v_\lambda$  satisfaz as seguintes desigualdades

$$\begin{cases} -\Delta v_\lambda + V(x)v_\lambda \geq 0 & \text{em } B_r(x_0), \\ v_\lambda \geq 0 & \text{em } \partial B_r(x_0). \end{cases}$$

Afim de esclarecimento, considere as seguintes funções auxiliares:  $\hat{A} : B_r(x_0) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ ,  $\hat{B} : B_r(x_0) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por  $\hat{A}(x, u, \nabla u) = \nabla u$  e  $\hat{B}(x, u, \nabla u) = -V(x)u$ , respectivamente. Por definição, a norma em  $L^\infty(\Omega)$  de uma função  $V$  é definida como:

$$\|V\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{ess sup}_{x \in \Omega} |V(x)|$$

assim

$$|V(x)| \leq \|V\|_{L^\infty(B_r(x_0))}$$

para todo  $x \in B_r(x_0)$ , e como  $v_\lambda \geq 0$ , temos:

$$\hat{B}(x, v_\lambda, \nabla v_\lambda) = -V(x)v_\lambda \geq -\|V\|_{L^\infty(B_r(x_0))}v_\lambda.$$

para todo  $x \in B_r(x_0)$ . Logo, usando o fato de que  $v_\lambda \in C^{1,\beta}(B_r(x_0))$ , o Princípio do Máximo Forte para operadores elípticos de segunda ordem definidos em domínios limitados e suaves implica que  $v_\lambda > 0$  em  $B_r(x_0)$  ou  $v_\lambda \equiv 0$  em  $B_r(x_0)$ , veja por exemplo o Teorema 2.5.10 de [19]. Suponha que  $v \equiv 0$  em  $B_r(x_0)$  e usando o fato de que  $r > 0$  é arbitrário, garantimos que  $v_\lambda \equiv 0$  em  $\mathbb{R}^N$ . Isto é uma contradição, pois pelo lema 3.2  $\|v_\lambda\| \geq c > 0$

para cada  $\lambda \in (0, \lambda^*)$ . Como resultado, obtemos que  $v_\lambda > 0$  em  $\mathbb{R}^N$ .

Em relação à existência da segunda solução, argumentando como foi feito acima. Sabemos que  $E_\lambda$  é coercivo e limitado inferiormente em  $\mathcal{N}_\lambda^+$ . Seja  $(u_k)$  uma sequência minimizante para  $E_\lambda$  em  $\mathcal{N}_\lambda^+$ . É fácil ver que  $(u_k)$  também é limitada em  $X$ . A menos de uma subsequência, existe  $u_\lambda \in X$  tal que  $u_k \rightharpoonup u_\lambda$  em  $X$ . Pelo Lema 3.6 segue que  $u_k \rightarrow u_\lambda$  em  $X$ . Sob esta condição, temos que  $\mathcal{E}_\lambda^1 = \lim E_\lambda(u_k) = E_\lambda(u_\lambda)$ . Usando o Lema 3.3, temos que  $u_\lambda$  é uma solução fraca para o Problema (0-1). Lembre-se também que  $E_\lambda(u_\lambda) < 0$  para cada  $\lambda \in (0, \lambda^*)$ , veja Lema 3.5. A última afirmação implica que  $u_\lambda \neq 0$  e, argumentando como foi feito antes, assumimos também que  $u_\lambda > 0$  em  $\mathbb{R}^N$ .

Uma vez que  $\mathcal{N}_\lambda^- \cap \mathcal{N}_\lambda^+ = \emptyset$ , obtemos que o Problema (0-1) admite pelo menos duas soluções positivas para cada  $\lambda \in (0, \lambda^*)$ . Isto encerra a prova.  $\square$

Para concluir o primeiro resultado principal, precisamos considerar o caso  $\lambda = \lambda_*$ . Em resumo, sob nossas hipóteses, garantimos a existência de um ponto crítico para o funcional  $E_\lambda$  com energia zero. Mais precisamente, consideramos o seguinte resultado.

**Proposição 3.2.** *Suponha  $(Q)$ ,  $(V_1)$  e  $(V_2)$ . Assuma também que  $\lambda = \lambda_*$  é válido. Então o funcional de energia  $E_{\lambda_*}$  admite um ponto crítico  $w_{\lambda_*} \in X \setminus \{0\}$  tal que  $w_{\lambda_*}$  é um minimizador para o funcional  $\Lambda_e$ .*

*Demonstração.* Primeiramente, recordamos que  $\Lambda_e$  é atingido, veja a Observação 2.5. Como consequência, temos que

$$\lambda_* := \inf_{v \in X \setminus \{0\}} \Lambda_e(v) = \Lambda_e(u) := Q_e(t_e(u)) := R_e(t_e(u)u)$$

vale para algum  $u \in X \setminus \{0\}$ . Uma vez que  $t_e(u) > 0$  é o ponto de máximo de  $Q_e(t) := R_e(tu)$ , observamos que

$$0 = Q'_e(t_e(u)) = (R_e)'(t_e(u)u)u. \quad (3-8)$$

Por outro lado, usando o fato de que  $u$  é um ponto crítico para o funcional  $\Lambda_e$ , inferimos que

$$0 = (\Lambda_e)'(u)w = [R_e(t_e(u)u)]'w = (R_e)'(t_e(u)u)[t'_e(u)u + t_e(u)]w.$$

Assim

$$0 = [t'_e(u)w][(R_e)'(t_e(u)u)u] + (R_e)'(t_e(u)u)t_e(u)w, \quad w \in X. \quad (3-9)$$

Segue de (3-8) e (3-9) que

$$(R_e)'(t_e(u)u)w = 0$$

vale para todo  $w \in X$ . Agora, definimos a nova função  $w_{\lambda_*} := t_e(u)u$ , usando a Equação (2-19), obtemos as seguintes identidades

$$0 = R'_e(w_{\lambda_*})w = q\|w_{\lambda_*}\|_q^{-q}E'_{\lambda_*}(w_{\lambda_*})w, \text{ para todo } w \in X.$$

A última afirmação diz que  $E'_{\lambda_*}(w_{\lambda_*})w = 0$  é verdadeira para cada  $w \in X$ , assim  $w_{\lambda_*}$  é ponto crítico para o funcional  $E'_{\lambda_*}$ .

Além disso, como  $\Lambda_e$  é 0-homogênea, assim  $w_{\lambda_*}$  é ponto crítico de  $\Lambda_e$  e como visto na Observação 2.5  $w_{\lambda_*}$  é minimizador de  $\Lambda_e$ . Isto conclui a prova.  $\square$

### 3.3 Demonstração do Teorema 1.1

A primeira parte do Teorema 1.1 que afirma a existencia de pelo menos duas soluções positivas distintas  $u_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda^+$  e  $v_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda^-$  em  $X$  para o Problema (0-1) foi provada na Proposição 3.1, e a parte que afirma que  $E_\lambda(u_\lambda) < 0$  foi provada no Lema 3.5.

Agora será estudada a prova dos itens *i*), *ii*) e *iii*) do Teorema 1.1. Para demonstração destes resultados usaremos amplamente a Observação 2.2 para mostrar que o sinal de  $E_\lambda(v_\lambda)$  varia de acordo com a localização de  $\lambda$  no intervalo  $(0, \lambda^*)$ . Mais precisamente, provaremos que  $E_\lambda(v_\lambda) > 0$  para cada  $\lambda \in (0, \lambda_*)$ , também que  $E_\lambda(v_{\lambda_*}) = 0$  e  $E_\lambda(v_\lambda) < 0$  para cada  $\lambda \in (\lambda_*, \lambda^*)$ .

#### 3.3.1 Parte i)

Pela Proposição 3.1, para cada  $\lambda \in (0, \lambda_*)$  obtemos que o Problema (0-1) admite pelo menos duas soluções positivas  $u_\lambda, v_\lambda \in X$ .

Agora será provado que  $v_\lambda$  tem energia positiva para cada  $\lambda \in (0, \lambda_*)$ , veja a Figura 3.1. Como existem projeções únicas nas variedades de Nehari  $\mathcal{N}_\lambda^-$  e  $\mathcal{N}_\lambda^+$ , respectivamente, temos que  $t_\lambda^{n,-}(v_\lambda) = 1 > t_e(v_\lambda)$  vale para cada  $\lambda \in (0, \lambda_*)$ .

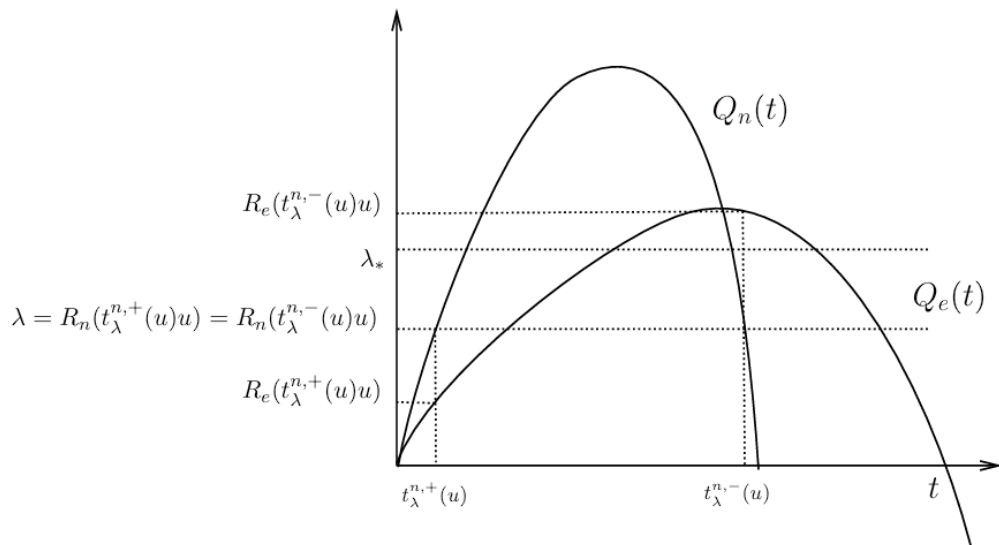
Por outro lado, pela Observação 2.4 temos que  $R_n(tv_\lambda) < R_e(tv_\lambda)$  vale para cada  $t > t_e(u)$ . Em particular, pelas Observações 2.1 e 2.4 para  $t = t_\lambda^{n,-}(v_\lambda) = 1$ , obtemos

$$\lambda = R_n(v_\lambda) = R_n(t_\lambda^{n,-}(v_\lambda)v_\lambda) < R_e(t_\lambda^{n,-}(v_\lambda)v_\lambda) = R_e(v_\lambda).$$

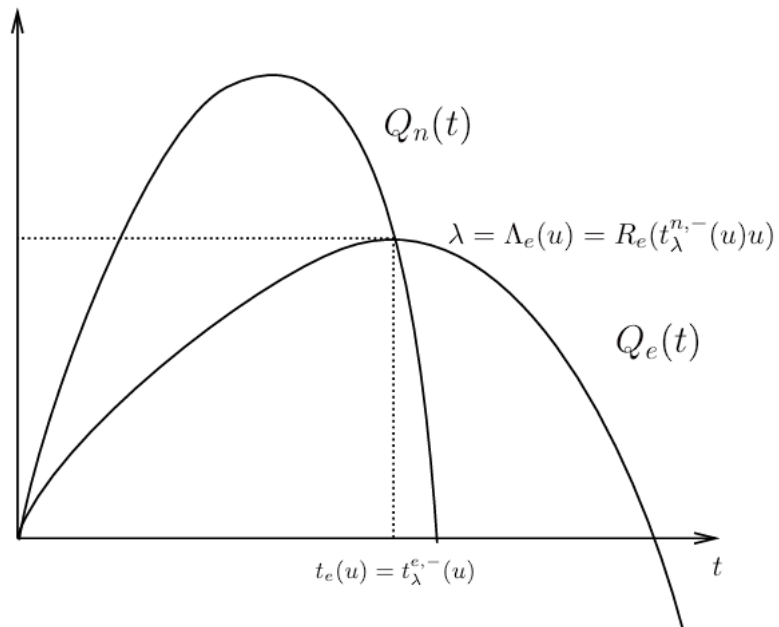
Portanto pela Observação 2.2 temos que  $\mathcal{E}_\lambda^2 = E_\lambda(v_\lambda) > 0$ .

#### 3.3.2 Parte ii)

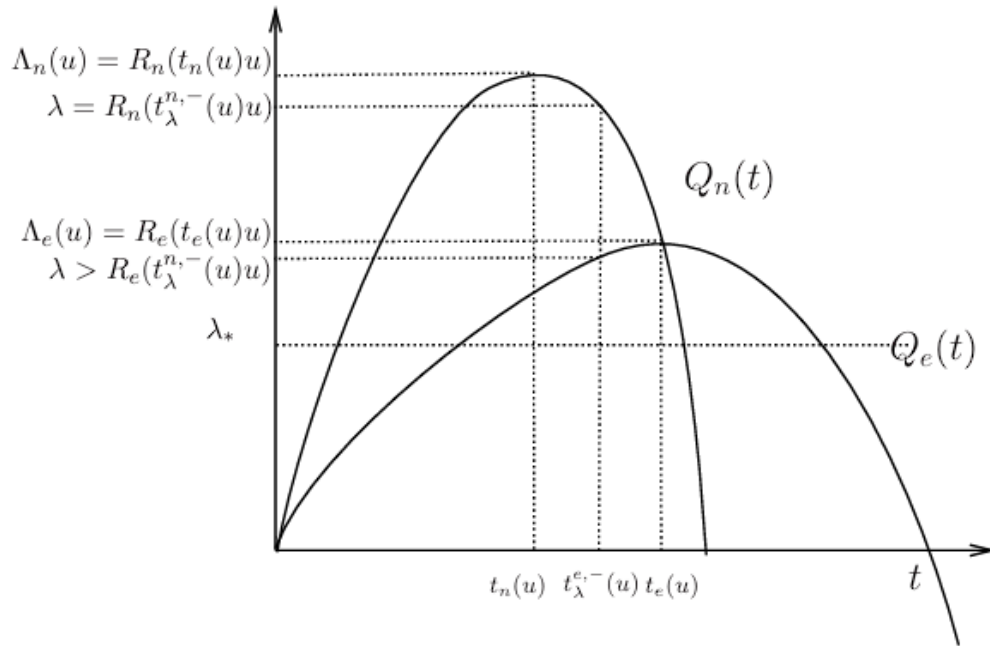
Primeiramente, tome  $\lambda = \lambda_*$ . Como foi feito na prova do item anterior, obtemos que o Problema (0-1) admite pelo menos duas soluções fracas  $u_\lambda, v_\lambda \in X$ , veja Proposição



**Figura 3.1:** Funções  $Q_n$  e  $Q_e$  para  $\lambda \in (0, \lambda_*)$   
**Fonte:** SILVA et al. (2021)



**Figura 3.2:** Funções  $Q_n$  e  $Q_e$  para  $\lambda = \lambda_*$   
**Fonte:** SILVA et al. (2021)



**Figura 3.3:** Funções  $Q_n$  e  $Q_e$  para  $\lambda \in (\lambda_*, \lambda^*)$

Fonte: SILVA et al. (2021)

### 3.1.

Segue da Proposição 3.2 e da Definição (1-21) que  $\lambda_* = \Lambda_e(w_{\lambda_*}) = \max_{t>0} R_e(tw_{\lambda_*})$  para algum  $w_{\lambda_*} \in X$ , onde  $w_{\lambda_*}$  é um ponto crítico para o funcional  $E_{\lambda_*}$ . De fato, a função  $w_{\lambda_*}$  pertence a  $\mathcal{N}_{\lambda_*}^-$ , ver Figura 3.2.

Agora provaremos que  $E_{\lambda_*}(w_{\lambda_*}) = 0$ . Para isso, observe a Figura 2.1 levando em consideração que  $\lambda = \lambda_*$ , e que  $\lambda_* = \Lambda_e(w_{\lambda_*})$  assim temos

$$t_{\lambda_*}^{n,-}(w_{\lambda_*}) = t_e(w_{\lambda_*}) = t_{\lambda_*}^{e,+}(w_{\lambda_*}) = t_{\lambda_*}^{e,-}(w_{\lambda_*}) = 1 \quad (3-10)$$

visto que  $w_{\lambda_*} \in \mathcal{N}_{\lambda_*}^-$  (veja Figura 3.2). Assim obtemos a seguinte identidade

$$\lambda_* = \Lambda_e(w_{\lambda_*}) = R_e(t_e(w_{\lambda_*})w_{\lambda_*}) = R_e(w_{\lambda_*}).$$

A última afirmação juntamente com a Observação 2.2 nos diz que  $E_{\lambda_*}(w_{\lambda_*}) = 0$ . Em outras palavras, podemos encontrar um ponto crítico  $w_{\lambda_*} \in X$  para o funcional de energia  $E_\lambda$  com energia zero.

Em vista da Proposição 3.1 sabemos também que existe  $v_\lambda \in N_\lambda^-$  tal que

$$E_\lambda(v_\lambda) = \inf_{w \in \mathcal{N}_\lambda^-} E_\lambda(w) \leq E_\lambda(w_{\lambda_*}) = 0. \quad (3-11)$$

Portanto,  $E_\lambda(v_\lambda) \leq 0$ .

A estimativa dada em (3-11) nos diz que  $R_e(v_\lambda) \leq \lambda_*$ , veja a Observação 2.2. Note também que como  $\lambda_* := \inf_{u \in X \setminus \{0\}} \Lambda_e(u)$ , temos que

$$\lambda_* \leq \Lambda_e(v_\lambda) = R_e(t_e(v_\lambda)v_\lambda) \quad (3-12)$$

é verdadeiro para algum  $t_e(v_\lambda) > 0$ . Além disso, usando a equação (3-10) e o fato de que  $v_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda^-$ , tem-se

$$t_n(v_\lambda) < t_e(v_\lambda) \leq t_\lambda^{n,-}(v_\lambda) = 1. \quad (3-13)$$

Como consequência, obtemos que  $\lambda = R_n(v_\lambda) \leq R_e(v_\lambda)$ , haja visto que pela Observação 2.4  $R_n(tv) \leq R_e(tv)$  para cada  $t \geq t_e(v)$  com  $v \in X \setminus \{0\}$ .

De acordo com a Observação 2.2, obtemos que  $E_\lambda(v_\lambda) \geq 0$ . Usando essa afirmação juntamente com a Estimativa (3-11) temos  $E_\lambda(v_\lambda) = 0$ . Novamente pela Observação 2.2,  $R_e(v_\lambda) = \lambda = \lambda_*$ . Assim, de (3-12) e (3-13),  $\Lambda_e(v_\lambda) = \lambda_*$ . Logo  $E_\lambda(v_\lambda) = E_\lambda(w_{\lambda_*}) = 0$ . Como consequência, o minimizador em  $\mathcal{N}_\lambda^-$  tem energia zero. Isto conclui a prova do segundo ítem do Teorema 1.1.

### 3.3.3 Parte iii)

Como foi mencionado anteriormente na Proposição 3.1 para cada  $\lambda \in (\lambda_*, \lambda^*)$  obtemos que o Problema (0-1) admite pelo menos duas soluções positivas  $u_\lambda, v_\lambda \in X$ .

Seja  $v \in X \setminus \{0\}$  fixado tal que

$$\lambda_* \leq \Lambda_e(v) = R_e(t_e(v)v) < \lambda.$$

Sabendo que  $R_n(t_\lambda^{n,-}(v)v) = \lambda$ , temos que

$$R_e(t_e(v)v) < R_n(t_\lambda^{n,-}(v)v),$$

assim analisando a Figura 3.3 deduzimos que  $t_\lambda^{n,-}(v) \in (0, t_e(v))$ .

Além disso, para cada  $t \in (0, t_e(v))$  temos que  $\frac{d}{dt}(R_e(tv)) > 0$ , assim pela Proposição 2.8  $R_e(tv) < R_n(tv)$  quando  $t \in (0, t_e(v))$ . Em particular, assumindo que  $t = t_\lambda^{n,-}(v)$  obtemos  $R_e(t_\lambda^{n,-}(v)v) < R_n(t_\lambda^{n,-}(v)v) = \lambda$ . Então pela Observação 2.2

$$E_\lambda(t_\lambda^{n,-}(v)v) < 0, \quad t_\lambda^{n,-}(v) \in (0, t_e(v)).$$

Por fim, usando o fato de que  $t_\lambda^{n,-}(v)v \in \mathcal{N}_\lambda^-$ , tem-se  $\mathcal{E}_\lambda^2 \leq E_\lambda(t_\lambda^{n,-}(v)v) < 0$ , portanto  $E_\lambda(v_\lambda) < 0$ . Isto conclui a prova.

## Demonstração dos Teoremas 1.2, 1.3 e 1.4

Neste capítulo serão provados os Teoremas 1.2, 1.3 e 1.4. O Teorema 1.2 traz informações sobre a continuidade e monotonicidade de  $\mathcal{E}_\lambda^1$  e  $\mathcal{E}_\lambda^2$  em relação ao parâmetro  $\lambda \in (0, \lambda^*)$ , além disso, o Teorema 1.3 aborda o comportamento desses funcionais quando  $\lambda \rightarrow 0$ . E por fim o Teorema 1.4 discorre sobre a existencia de pontos críticos para o funcional energia quando  $\lambda = \lambda^*$ . Vale ressaltar que o caso  $\lambda = \lambda^*$  não entra na demonstração do Teorema 1.1 pois nesse nível, o conjunto  $\mathcal{N}_{\lambda^*}^0$  não é vazio, assim não é possível aplicar o método de Nehari diretamente com esse parâmetro.

Primeiramente consideramos a prova do Teorema 1.2.

### 4.1 Demonstração do Teorema 1.2

Nesta seção, consideraremos  $(\lambda_j) \subset (0, \lambda^*)$  tal que  $\lambda_j \rightarrow \tilde{\lambda} \in (0, \lambda^*)$  quando  $j \rightarrow \infty$ . Lembre que  $\mathcal{E}_\lambda^1 := E_\lambda(u_\lambda)$  e  $\mathcal{E}_\lambda^2 := E_\lambda(v_\lambda)$ .

Aqui faremos a prova para a função  $\mathcal{E}_\lambda^1$ . Uma prova similar pode ser feita para a função  $\mathcal{E}_\lambda^2$ .

**Proposição 4.1.** *Suponha que (Q), (V<sub>1</sub>) e (V<sub>2</sub>) sejam satisfeitas. Seja  $u_{\tilde{\lambda}} \in N_{\tilde{\lambda}}^+$  a solução fraca do Problema (0-1), onde  $\tilde{\lambda} \in (0, \lambda^*)$ . Então  $t_{\lambda_j}^{n,+}(u_{\tilde{\lambda}}) \rightarrow t_{\tilde{\lambda}}^{n,+}(u_{\tilde{\lambda}}) = 1$ , com  $j \rightarrow \infty$ , onde  $t_{\lambda_j}^{n,+}(u_{\tilde{\lambda}})$  e  $t_{\tilde{\lambda}}^{n,+}(u_{\tilde{\lambda}})$  são dados pela Proposição 2.9.*

*Demonstração.* Uma vez que  $u_{\tilde{\lambda}} \in N_{\tilde{\lambda}}^+$  é uma solução fraca do Problema (0-1) para algum  $\tilde{\lambda} \in (0, \lambda^*)$ , sabemos que  $t_{\tilde{\lambda}}^{n,+}(u_{\tilde{\lambda}}) = 1$

A ideia principal aqui é considerar uma função auxiliar  $F : (0, \lambda^*) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$F(\lambda, t) = R_n(tu_{\tilde{\lambda}}) - \lambda, \quad \lambda \in (0, \lambda^*), t > 0.$$

Note também que  $F \in C^1((0, \lambda^*) \times (0, \infty), \mathbb{R})$ . Como  $u_{\tilde{\lambda}}$  é ponto crítico do funcional energia, pela Observação 2.1

$$F(\tilde{\lambda}, 1) = \tilde{\lambda} - \tilde{\lambda} = 0.$$

Além disso, como  $u_{\tilde{\lambda}} \in \mathcal{N}_{\tilde{\lambda}}^+$ , de acordo com a Proposição 2.4, obtemos

$$\frac{d}{dt}F(\tilde{\lambda}, t)|_{t=1} = (R_n)'(u_{\tilde{\lambda}})(u_{\tilde{\lambda}}) > 0.$$

Agora, aplicamos o Teorema da Função Implícita [6] provando que existem  $\delta > 0$  e uma função de classe  $C^1$  denotada por  $t(\cdot) : (\tilde{\lambda} - \delta, \tilde{\lambda} + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  de tal modo que

- (i)  $F(\lambda, t(\lambda)) = 0$ ,  $\lambda \in (\tilde{\lambda} - \delta, \tilde{\lambda} + \delta)$ ;
- (ii)  $\frac{d}{dt}F(\lambda, t)|_{t=t(\lambda)} = (R_n)'(t(\lambda)u_{\tilde{\lambda}})(t(\lambda)u_{\tilde{\lambda}}) > 0$ ,  $\lambda \in (\tilde{\lambda} - \delta, \tilde{\lambda} + \delta)$ .

Como consequência, afirmamos que

$$t(\lambda) = t_{\lambda}^{n,+}(u_{\tilde{\lambda}}).$$

De fato, dado  $\lambda \in (0, \lambda^*)$  pela Proposição 2.9 para cada  $u \in X \setminus \{0\}$ , em particular para  $u_{\tilde{\lambda}}$ , tem-se  $t_{\lambda}^{n,+}(u_{\tilde{\lambda}})u_{\tilde{\lambda}} \in \mathcal{N}_{\lambda}^+$ . Assim

$$E'_{\lambda}(t_{\lambda}^{n,+}(u_{\tilde{\lambda}})u_{\tilde{\lambda}})t_{\lambda}^{n,+}(u_{\tilde{\lambda}})u_{\tilde{\lambda}} = 0$$

logo, pela Observação 2.1 temos que

$$R_n(t_{\lambda}^{n,+}(u_{\tilde{\lambda}})u_{\tilde{\lambda}}) = \lambda,$$

portanto

$$F(\lambda, t_{\lambda}^{n,+}(u_{\tilde{\lambda}})) = R_n(t_{\lambda}^{n,+}(u_{\tilde{\lambda}})u_{\tilde{\lambda}}) - \lambda = 0.$$

Além disso, vemos que

$$\frac{d}{dt}F(\lambda, t)|_{t=t_{\lambda}^{n,+}(u_{\tilde{\lambda}})} = (R_n)'(t_{\lambda}^{n,+}(u_{\tilde{\lambda}})u_{\tilde{\lambda}})(t_{\lambda}^{n,+}(u_{\tilde{\lambda}})u_{\tilde{\lambda}}) > 0, \quad \lambda \in (\tilde{\lambda} - \delta, \tilde{\lambda} + \delta).$$

A última afirmação implica que  $t_{\lambda}^{n,+}(u_{\tilde{\lambda}})u_{\tilde{\lambda}} \in \mathcal{N}_{\lambda}^+$  vale para cada  $\lambda \in (\tilde{\lambda} - \delta, \tilde{\lambda} + \delta)$ . Como consequência, usando a unicidade da projeção na variedade de Nehari  $\mathcal{N}_{\lambda}^+$  dada pela Proposição 2.9 deduzimos que  $t(\lambda) = t_{\lambda}^{n,+}(u_{\tilde{\lambda}})$  vale. Como resultado, em vista da continuidade da função  $t(\cdot) : (\tilde{\lambda} - \delta, \tilde{\lambda} + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  obtemos  $t_{\lambda_j}^{n,+}(u_{\tilde{\lambda}}) \rightarrow t_{\tilde{\lambda}}^{n,+}(u_{\tilde{\lambda}}) = 1$  quando  $j \rightarrow \infty$ . Isto conclui a prova.  $\square$

É importante mencionar que para cada  $\lambda_j \in (0, \lambda^*)$  satisfazendo  $\lambda_j \rightarrow \tilde{\lambda}$  existe um ponto crítico  $u_{\lambda_j}$  de  $E_{\lambda_j}$ . A partir de agora, iremos considerar  $\mathcal{E}_{\lambda_j}^1 = E_{\lambda_j}^1(u_{\lambda_j})$  e  $\mathcal{E}_{\lambda_j}^2 = E_{\lambda_j}^2(v_{\lambda_j})$ , onde  $u_{\lambda_j}$  e  $v_{\lambda_j}$  são minimizadores nas variedades de Nehari  $\mathcal{N}_{\lambda_j}^+$  e  $\mathcal{N}_{\lambda_j}^-$ , respectivamente. A característica principal aqui é considerar como as soluções fracas  $u_{\lambda_j}$  e  $v_{\lambda_j}$  se comportam quando  $j \rightarrow \infty$ . Nesta direção, provaremos os seguintes resultados:

**Proposição 4.2.** *Suponha (Q), (V<sub>1</sub>) e (V<sub>2</sub>) sejam satisfeitas. Então (u<sub>λ<sub>j</sub></sub>) e (v<sub>λ<sub>j</sub></sub>) são sequências limitadas em X.*

*Demonstração.* Nesta parte, será feita a prova para a sequência (u<sub>λ<sub>j</sub></sub>). A prova para a sequência (v<sub>λ<sub>j</sub></sub>) é análoga.

Em vista da Observação 1.1 e Proposição 4.1, observamos que

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{\lambda_j}^1 \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} E_{\lambda_j}(t_{\lambda_j}^{n,+}(u_{\tilde{\lambda}})u_{\tilde{\lambda}}) = E_{\tilde{\lambda}}(t_{\tilde{\lambda}}^{n,+}(u_{\tilde{\lambda}})u_{\tilde{\lambda}}) = \mathcal{E}_{\tilde{\lambda}}^1, \quad (4-1)$$

assim

$$\mathcal{E}_{\tilde{\lambda}}^1 \geq \limsup_{j \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{\lambda_j}^1 = \limsup_{j \rightarrow \infty} E_{\lambda_j}(u_{\lambda_j}) \quad (4-2)$$

Note também que como visto na demonstração anterior  $u_{\lambda_j} \in \mathcal{N}_{\lambda_j}^+$ , assim,  $E'_{\lambda_j}(u_{\lambda_j})u_{\lambda_j} = 0$ .

Então

$$\int_{\mathbb{R}^N} (I_{\alpha} * |u_{\lambda_j}|^p) |u_{\lambda_j}|^p dx = \|u_{\lambda_j}\|^2 - \lambda_j \int_{\mathbb{R}^N} |u_{\lambda_j}|^q dx.$$

Assim

$$E_{\lambda_j}(u_{\lambda_j}) = \frac{1}{2} \|u_{\lambda_j}\|^2 - \frac{1}{2p} \left( \|u_{\lambda_j}\|^2 - \lambda_j \int_{\mathbb{R}^N} |u_{\lambda_j}|^q dx \right) - \frac{\lambda_j}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |u_{\lambda_j}|^q dx.$$

Segue da imersão  $X \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$  e de (4-2) que

$$\mathcal{E}_{\tilde{\lambda}}^1 \geq \limsup_{j \rightarrow \infty} E_{\lambda_j}(u_{\lambda_j}) \geq \limsup_{j \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2p} \right) \|u_{\lambda_j}\|^2 - \lambda_j C \left( \frac{1}{q} - \frac{1}{2p} \right) \|u_{\lambda_j}\|^q \right]$$

vale para algum  $C > 0$ . Uma vez que  $1 < q < 2$ , a última desigualdade implica que (u<sub>λ<sub>j</sub></sub>) é limitada em X. A prova para a sequência (v<sub>λ<sub>j</sub></sub>) segue usando as mesmas ideias.  $\square$

**Proposição 4.3.** *Suponha (Q), (V<sub>1</sub>) e (V<sub>2</sub>) sejam satisfeitas. Então, a menos de uma subsequência, existem  $u_{\tilde{\lambda}}, v_{\tilde{\lambda}} \in X$  de tal modo que  $u_{\lambda_j} \rightarrow u_{\tilde{\lambda}}$  e  $v_{\lambda_j} \rightarrow v_{\tilde{\lambda}}$  em X quando  $j \rightarrow \infty$ .*

*Demonstração.* Lembre que pela Proposição 4.2 (u<sub>λ<sub>j</sub></sub>) e (v<sub>λ<sub>j</sub></sub>) são sequências limitadas em X. Como consequência, a menos de uma subsequência, existem  $u_{\tilde{\lambda}}, v_{\tilde{\lambda}} \in X$  tais que  $u_{\lambda_j} \rightarrow u_{\tilde{\lambda}}$  e  $v_{\lambda_j} \rightarrow v_{\tilde{\lambda}}$  em X. Agora consideraremos a prova para a sequência (u<sub>λ<sub>j</sub></sub>). A prova para a sequência (v<sub>λ<sub>j</sub></sub>) segue usando as mesmas ideias. Vale lembrar  $u_{\lambda_j}$  é solução para  $\mathcal{E}_{\lambda_j}^1$ , assim (u<sub>λ<sub>j</sub></sub>) é uma sequência de soluções para o seguinte problema de minimização

$$\mathcal{E}_{\lambda_j}^1 = \inf_{w \in \mathcal{N}_{\lambda_j}^+} E_{\lambda_j}(w).$$

Além disso,  $u_{\lambda_j}$  é um ponto crítico para o funcional  $E_{\lambda_j}$  para cada  $j \in \mathbb{N}$ , ou seja, sabemos que  $\langle E'_{\lambda_j}(u_{\lambda_j}), \Psi \rangle = 0$  para todo  $\Psi \in X$ , vide Lema 3.3. Portanto,  $\langle E'_{\tilde{\lambda}}(u_{\tilde{\lambda}}), \Psi \rangle = 0$  vale para todo  $\Psi \in X$ . Em particular, obtemos

$$\langle E'_{\lambda_j}(u_{\lambda_j}), u_{\lambda_j} - u_{\tilde{\lambda}} \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle E'_{\tilde{\lambda}}(u_{\tilde{\lambda}}), u_{\lambda_j} - u_{\tilde{\lambda}} \rangle = 0.$$

Por outro lado, tomando  $\lambda = \lambda_j$ ,  $u = u_{\lambda_j}$  e  $\Psi = u_{\lambda_j} - u_{\tilde{\lambda}}$  na Equação (1-2) temos que

$$\langle u_{\lambda_j}, u_{\lambda_j} - u_{\tilde{\lambda}} \rangle = \lambda_j \int_{\mathbb{R}^N} |u_{\lambda_j}|^{q-2} u_{\lambda_j} (u_{\lambda_j} - u_{\tilde{\lambda}}) dx + \int_{\mathbb{R}^N} (I_{\alpha} * |u_{\lambda_j}|^p) |u_{\lambda_j}|^{p-2} u_{\lambda_j} (u_{\lambda_j} - u_{\tilde{\lambda}}) dx.$$

Tomando o módulo na igualdade acima, obtemos

$$|\langle u_{\lambda_j}, u_{\lambda_j} - u_{\tilde{\lambda}} \rangle| \leq \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda_j |u_{\lambda_j}|^{q-1} |u_{\lambda_j} - u_{\tilde{\lambda}}| dx + \int_{\mathbb{R}^N} (I_{\alpha} * |u_{\lambda_j}|^p) |u_{\lambda_j}|^{p-1} |u_{\lambda_j} - u_{\tilde{\lambda}}| dx.$$

assim inferimos que

$$|\langle u_{\lambda_j}, u_{\lambda_j} - u_{\tilde{\lambda}} \rangle| \leq \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda_j |u_{\lambda_j}|^{q-1} + (I_{\alpha} * |u_{\lambda_j}|^p) |u_{\lambda_j}|^{p-1}) |u_{\lambda_j} - u_{\tilde{\lambda}}| = o_j(1). \quad (4-3)$$

Analogamente obtemos

$$|\langle u_{\tilde{\lambda}}, u_{\lambda_j} - u_{\tilde{\lambda}} \rangle| \leq \int_{\mathbb{R}^N} (\tilde{\lambda} |u_{\tilde{\lambda}}|^{q-1} + (I_{\alpha} * |u_{\tilde{\lambda}}|^p) |u_{\tilde{\lambda}}|^{p-1}) |u_{\lambda_j} - u_{\tilde{\lambda}}| = o_j(1). \quad (4-4)$$

De acordo com (4-3) e (4-4) obtemos que  $u_{\lambda_j} \rightarrow u_{\tilde{\lambda}}$  em  $X$ . Este mesmo argumento pode ser aplicado para a sequência  $(v_{\lambda_j})$ . Isto conclui a prova.  $\square$

**Proposição 4.4.** *Suponha (Q), (V<sub>1</sub>) e (V<sub>2</sub>). Então  $u_{\tilde{\lambda}} \in \mathcal{N}_{\tilde{\lambda}}^+$  e  $v_{\tilde{\lambda}} \in \mathcal{N}_{\tilde{\lambda}}^-$  onde  $u_{\tilde{\lambda}}$  e  $v_{\tilde{\lambda}}$  foram obtidos pela Proposição 4.3.*

*Demonstração.* Lembre-se que  $u_{\lambda_j} \rightarrow u_{\tilde{\lambda}}$  e  $v_{\lambda_j} \rightarrow v_{\tilde{\lambda}}$  em  $X$  para alguns  $u_{\tilde{\lambda}}, v_{\tilde{\lambda}} \in X$ , veja a Proposição 4.3. Dividiremos a prova em partes, primeiro será provado o resultado sobre  $u_{\tilde{\lambda}}$  e posteriormente sobre  $v_{\tilde{\lambda}}$ .

Para contemplar a primeira parte, nosso objetivo é garantir que  $u_{\tilde{\lambda}} \neq 0$ ,  $E'_{\tilde{\lambda}}(u_{\tilde{\lambda}})u_{\tilde{\lambda}} = 0$  e  $E''_{\tilde{\lambda}}(u_{\tilde{\lambda}})(u_{\tilde{\lambda}}, u_{\tilde{\lambda}}) < 0$ . Sendo assim, considere a sequência  $(u_{\lambda_j})$  onde  $u_{\lambda_j} \rightarrow u_{\tilde{\lambda}}$ . Usando (4-1), o Lema 3.5 e o fato de que  $E_{\lambda}$  é contínua, inferimos que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{\lambda_j}^1 = \lim_{j \rightarrow \infty} E_{\lambda_j}(u_j) = E_{\tilde{\lambda}}(u_{\tilde{\lambda}}) \leq \mathcal{E}_{\tilde{\lambda}}^1 < 0.$$

A última afirmação assegura que  $u_{\tilde{\lambda}} \neq 0$ .

Devido ao fato de que  $E'_{\lambda_j}(u_{\lambda_j})w = 0, w \in X$ , usando a continuidade em  $E'_\lambda$  e em  $u$  e a convergência forte de  $(u_{\lambda_j})$ , obtemos que  $E'_\lambda(u_\lambda)w = 0, w \in X$ . Em outras palavras,  $u_\lambda$  é um ponto crítico para  $E_\lambda$  satisfazendo  $u_\lambda \neq 0$ .

Por outro lado, note que pelas Equações (2-20) e (2-21),  $R_n(tu)$  e sua derivada são contínuas. Em particular, como  $u_{\lambda_j}$  observamos que  $R_n(u_{\lambda_j}) = \lambda_j$  e  $(R_n)'(u_{\lambda_j})(u_{\lambda_j}) > 0$ . Tomando o limite nessas expressões, deduzimos que

$$R_n(u_\lambda) = \tilde{\lambda} \quad \text{e} \quad (R_n)'(u_\lambda)(u_\lambda) \geq 0.$$

Sabendo que  $\mathcal{N}_\lambda^0$  é vazio, pela Proposição 2.5 temos que  $E''_\lambda(u_\lambda) > 0$ , portanto  $u_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda^+$ .

Agora consideraremos a segunda parte envolvendo a sequência  $(v_{\lambda_j})$ . É importante salientar que o argumento similar usado em (4-1) ainda é válido para  $\mathcal{E}_\lambda^2$ . Neste caso obtemos que

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{\lambda_j}^2 \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} E_{\lambda_j}(t_{\lambda_j}^{n,+}(u_\lambda)u_\lambda) = E_\lambda(t_{\lambda_j}^{n,+}(u_\lambda)u_\lambda) = \mathcal{E}_\lambda^2.$$

Pelas Equações (2-23) e (2-30), existe  $C > 0$  tal que a desigualdade  $t_n(u) \geq C\|u\|^{(2-2p)/(2p-2)}$  é verdadeira para qualquer  $u \in X \setminus \{0\}$ .

Além disso, usando a Proposição 2.9, mencionamos também que

$$C\|v_{\lambda_j}\|^{\frac{2-2p}{2p-2}} \leq t_n(v_{\lambda_j}) \leq t_{\lambda_j}^{n,-}(v_{\lambda_j}) = 1,$$

assim

$$\frac{C}{\|v_{\lambda_j}\|^{\frac{2p-2}{2p-2}}} \leq 1$$

A última desigualdade implica que a desigualdade

$$\|v_{\lambda_j}\| \geq C > 0 \tag{4-5}$$

é verdadeira para qualquer  $j \in \mathbb{N}$  com  $C > 0$ . Passando ao limite na expressão acima obtemos que  $C \leq \|v_\lambda\|$  é satisfeita. Em particular, vemos também que  $v_\lambda \neq 0$  está agora verificado. Isto termina a prova.  $\square$

**Proposição 4.5.** *Suponha que as hipóteses (Q), (V<sub>1</sub>) e (V<sub>2</sub>) sejam satisfeitas. Então obtemos que  $\lambda \mapsto \mathcal{E}_\lambda^1$  e  $\lambda \mapsto \mathcal{E}_\lambda^2$  são funções decrescentes em  $(0, \lambda^*)$ .*

*Demonstração.* Sejam  $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, \lambda^*)$  números fixos satisfazendo  $\lambda_1 < \lambda_2$ . Note que como  $t_{\lambda_2}^{n,-}(v_{\lambda_1})$  e  $t_{\lambda_1}^{n,-}(v_{\lambda_1})$  são pontos críticos de  $E_{\lambda_1}$  e  $E_{\lambda_2}$  respectivamente, assim pela Observação 2.1

$$\lambda_1 = R_n(t_{\lambda_1}^{n,-}(v_{\lambda_1})v_{\lambda_1}) < R_n(t_{\lambda_2}^{n,-}(v_{\lambda_1})v_{\lambda_1}) = \lambda_2.$$

Uma vez que  $t_{\lambda_2}^{n,-}(v_{\lambda_1}), t_{\lambda_1}^{n,-}(v_{\lambda_1}) \in (t_n(v_{\lambda_1}), +\infty)$  e  $t \mapsto R_n(tv_{\lambda_1})$  é uma função decrescente nesse intervalo para todo  $\lambda$  em  $(0, \lambda^*)$ , obtemos que  $t_{\lambda_2}^{n,-}(v_{\lambda_1}) < t_{\lambda_1}^{n,-}(v_{\lambda_1}) = 1$ .

Agora afirmamos que  $t \mapsto E_{\lambda_1}(tv_{\lambda_1})$  é crescente em  $[t_{\lambda_1}^{n,+}(v_{\lambda_1}), t_{\lambda_1}^{n,-}(v_{\lambda_1})]$ , veja a Figura 4.2. A prova desta afirmação segue do fato de que  $t \mapsto E_{\lambda_1}(tv_{\lambda_1})$  tem exatamente dois pontos críticos dados por  $t_{\lambda_1}^{n,+}(v_{\lambda_1})$  e  $t_{\lambda_1}^{n,-}(v_{\lambda_1})$ . Além disso, sabemos que  $t_{\lambda_1}^{n,+}(v_{\lambda_1})$  é um ponto de máximo local e  $t_{\lambda_1}^{n,-}(v_{\lambda_1})$  é um ponto de mínimo local para a fibra  $t \mapsto \phi(t) = E_{\lambda}(tu)$ . Usando o fato de que  $t_{\lambda_2}^{n,-}(v_{\lambda_1}), t_{\lambda_1}^{n,-}(v_{\lambda_1}) \in [t_{\lambda_1}^{n,+}(v_{\lambda_1}), t_{\lambda_1}^{n,-}(v_{\lambda_1})]$  é fácil ver que

$$E_{\lambda_1}(t_{\lambda_2}^{n,-}(v_{\lambda_1})v_{\lambda_1}) < E_{\lambda_1}(t_{\lambda_1}^{n,-}(v_{\lambda_1})v_{\lambda_1}) = E_{\lambda_1}(v_{\lambda_1}) \quad (4-6)$$

Além disso, usando a definição de  $\mathcal{E}_{\lambda_1}^2$  e sabendo que  $v_{\lambda_2}$  é minimizador de  $E_{\lambda_2}$ , temos

$$\mathcal{E}_{\lambda_2}^2 = E_{\lambda_2}(v_{\lambda_2}) \leq E_{\lambda_2}(t_{\lambda_2}^{n,-}(v_{\lambda_1})v_{\lambda_1}),$$

além disso, pela definição de  $E_{\lambda}(u)$  é claro que

$$E_{\lambda_2}(t_{\lambda_2}^{n,-}(v_{\lambda_1})v_{\lambda_1}) = E_{\lambda_1}(t_{\lambda_2}^{n,-}(v_{\lambda_1})v_{\lambda_1}) - (\lambda_2 - \lambda_1) \|t_{\lambda_2}^{n,-}(v_{\lambda_1})v_{\lambda_1}\|_q^q,$$

como  $-(\lambda_2 - \lambda_1) \|t_{\lambda_2}^{n,-}(v_{\lambda_1})v_{\lambda_1}\|_q^q < 0$ , pela Equação (4-6) podemos concluir

$$\mathcal{E}_{\lambda_2}^2 < E_{\lambda_1}(t_{\lambda_2}^{n,-}(v_{\lambda_1})v_{\lambda_1}) < E_{\lambda_1}(v_{\lambda_1}) = \mathcal{E}_{\lambda_1}^2. \quad (4-7)$$

Assim  $\lambda \mapsto \mathcal{E}_{\lambda}^2$  é decrescente em  $(0, \lambda^*)$ .

Usando as mesmas ideias discutidas acima, obtemos algumas propriedades análogas para a variedade de Nehari  $\mathcal{N}_{\lambda}^+$ . Nomeadamente, podemos mostrar as seguintes propriedades:

- $1 = t_{\lambda_1}^{n,+}(u_{\lambda_1}) < t_{\lambda_2}^{n,+}(u_{\lambda_1})$ ;
- $t \mapsto E_{\lambda_2}(tu_{\lambda_1})$  é decrescente em  $[0, t_{\lambda_2}^{n,+}(u_{\lambda_1})]$ ;
- $E_{\lambda_2}(t_{\lambda_2}^{n,+}(u_{\lambda_1})u_{\lambda_1}) < E_{\lambda_2}(t_{\lambda_1}^{n,+}(u_{\lambda_1})u_{\lambda_1}) = E_{\lambda_2}(u_{\lambda_1})$ ;
- $\mathcal{E}_{\lambda_2}^1 < \mathcal{E}_{\lambda_1}^1, \lambda_1 < \lambda_2$ .

A demonstração dos itens acima segue argumentando como foi feito para a variedade de Nehari  $\mathcal{N}_{\lambda}^-$ . Isto conclui a demonstração.  $\square$

Relembrando o que diz o Teorema 1.2 temos o seguinte.

Suponha  $(Q)$ ,  $(V_1)$  e  $(V_2)$ . Dado  $\tilde{\lambda} \in (0, \lambda^*)$  fixado, tome a sucessão  $(\lambda_j) \subset (0, \lambda^*)$  tal que  $\lambda_j \rightarrow \tilde{\lambda}$  quando  $j \rightarrow \infty$ . Então obtemos as seguintes afirmações:

- i) As funções  $\lambda \mapsto \mathcal{E}_\lambda^1$  e  $\lambda \mapsto \mathcal{E}_\lambda^2$  são decrescentes e  $\mathcal{E}_\lambda^1 < \mathcal{E}_\lambda^2$ ;
- ii) As funções  $\lambda \mapsto u_\lambda$  e  $\lambda \mapsto v_\lambda$  são contínuas, i.e.,  $u_{\lambda_j} \rightarrow u_{\tilde{\lambda}}$  e  $v_{\lambda_j} \rightarrow v_{\tilde{\lambda}}$  em  $X$  quando  $j \rightarrow \infty$ , onde

$$E_{\tilde{\lambda}}(u_{\tilde{\lambda}}) = \mathcal{E}_{\tilde{\lambda}}^1, \quad E_{\tilde{\lambda}}(v_{\tilde{\lambda}}) = \mathcal{E}_{\tilde{\lambda}}^2, \quad E_{\lambda_j}(u_{\lambda_j}) = \mathcal{E}_{\lambda_j}^1 \quad e \quad E_{\lambda_j}(v_{\lambda_j}) = \mathcal{E}_{\lambda_j}^2;$$

- iii)  $\mathcal{E}_{\lambda_j}^i \rightarrow \mathcal{E}_{\tilde{\lambda}}^i$  quando  $j \rightarrow \infty$ , ou seja,  $\lambda \mapsto \mathcal{E}_\lambda^i$  são funções contínuas para cada  $i = 1, 2$ .

#### 4.1.1 Parte i)

Usando a Proposição 4.5, sabe-se que as funções  $\lambda \mapsto \mathcal{E}_\lambda^1$  e  $\lambda \mapsto \mathcal{E}_\lambda^2$  são decrescentes. Além disso, também foi mencionado na Equação (4-7) que

$$\mathcal{E}_\lambda^1 < \mathcal{E}_\lambda^2.$$

Estes fatos garantem que o item *i*) está agora verificado.

#### 4.1.2 Parte ii)

Segue do item anterior e da definição de  $\mathcal{N}_\lambda^1$  juntamente com a Proposição 2.9 que afirma que existe  $u \in \mathcal{N}_\lambda^+$  tal que

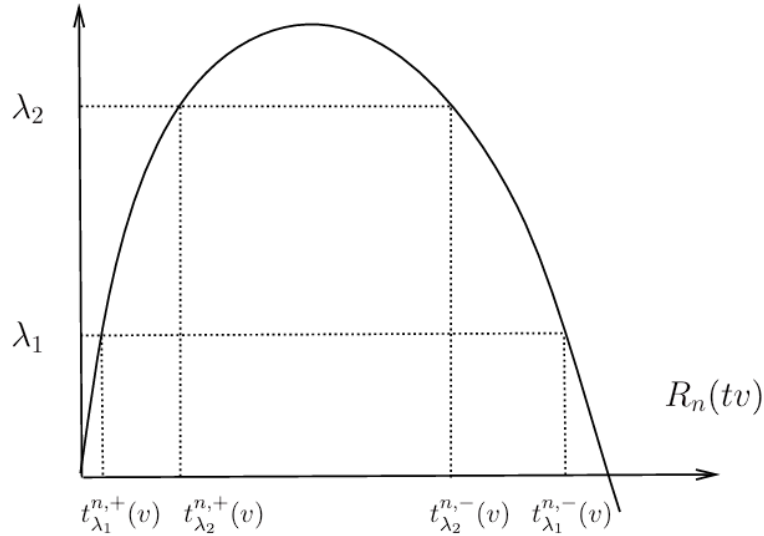
$$E_\lambda(u) = \mathcal{E}_\lambda^1 := E_\lambda(u_\lambda).$$

Aqui foi usado o fato de que  $u, u_\lambda \in \mathcal{N}_\lambda^+$ . Em particular, pela Proposição 4.3 obtemos que existe uma sequência  $(u_{\lambda_j})$  em  $X$  tal que  $u_{\lambda_j} \rightarrow u_\lambda$  quando  $j \rightarrow \infty$ . O mesmo argumento pode ser aplicado para a sequência  $(v_{\lambda_j})$  provando que  $v_{\lambda_j} \rightarrow v_\lambda$  quando  $j \rightarrow \infty$ . Isto conclui a demonstração do item *ii*).

#### 4.1.3 Parte iii)

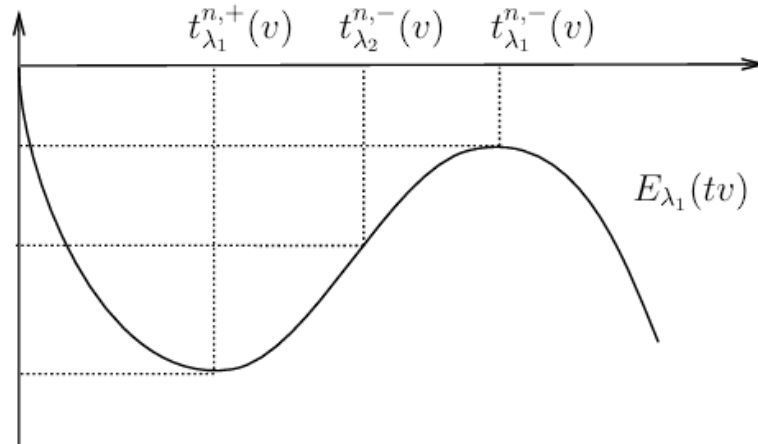
Por fim, demonstraremos que  $\lambda \mapsto \mathcal{E}_\lambda^i, \lambda \in (0, \lambda^*), i = 1, 2$ , é contínua. De fato, defina a função  $E : (0, +\infty) \times X \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $E(\lambda, u) := E_\lambda(u)$ . Pela Observação 1.1  $E$  é uma função contínua. Em particular, dada qualquer sequência  $\lambda_j \subset (0, \lambda^*)$  tal que  $\lambda_j \rightarrow \tilde{\lambda} \in (0, \lambda^*)$  pela Proposição 4.3 tem-se que  $u_{\lambda_j} \rightarrow u_{\tilde{\lambda}}$ . Portanto, obtemos  $\mathcal{E}_{\lambda_j}^1 = E(\lambda_j, u_{\lambda_j}) \rightarrow E(\tilde{\lambda}, u_{\tilde{\lambda}}) = \mathcal{E}_{\tilde{\lambda}}^1$ . A última afirmação implica que  $\lambda \mapsto \mathcal{E}_\lambda^1$  é uma função

contínua para cada  $\lambda \in (0, \lambda^*)$ . O mesmo argumento pode ser aplicado para a função  $\mathcal{E}_\lambda^2$ , mostrando que o item *iii*) está agora verificado. Isto termina a demonstração.



**Figura 4.1:** Fibra  $t \mapsto R_n(tv)$  para  $\lambda_1 < \lambda_2$ .

Fonte: SILVA et al. (2021)



**Figura 4.2:** Fibra  $t \mapsto E_{\lambda_1}(tv)$  para  $\lambda_1 < \lambda_2$ .

Fonte: SILVA et al. (2021)

## 4.2 Demonstração do Teorema 1.3

Antes da demonstração do Teorema 1.3 deve-se considerar alguns resultados auxiliares que são apresentados a seguir.

**Lema 4.1.** *Suponha que as hipóteses (Q), (V<sub>1</sub>) e (V<sub>2</sub>) sejam satisfeitas. Então  $\mathcal{N}_0^+$  e  $\mathcal{N}_0^0$  são conjuntos vazios.*

*Demonstração.* A demonstração segue por contradição. Assuma que existe  $u_0 \in \mathcal{N}_0^0$ . Portanto, a função  $u_0$  satisfaz as seguintes identidades

$$E_0'(u_0)(u_0) = 0 \quad \text{e} \quad E_0''(u_0)(u_0, u_0) = 0, \quad \text{com} \quad u_0 \neq 0.$$

Assim, como  $\lambda = 0$ , pelas Equações (1-2) e (1-11) temos que

$$\|u_0\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u_0|^p) |u_0|^p dx = 0$$

e que

$$\|u_0\|^2 - p \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u_0|^p) |u_0|^p dx = 0,$$

respectivamente. Logo

$$(p-1) \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u_0|^p) |u_0|^p dx = 0.$$

Visto que  $p > 1$  tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u_0|^p) |u_0|^p dx = 0.$$

Portanto

$$\|u_0\| = 0.$$

Como consequência,  $u_0 \equiv 0$ , o que é um absurdo. A última afirmação implica que  $\mathcal{N}_0^0 = \emptyset$ .

A demonstração para  $\mathcal{N}_0^+$  segue as mesmas ideias discutidas acima, porém  $E_0''(u_0)(u_0, u_0) > 0$ , assim

$$\|u_0\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u_0|^p) |u_0|^p dx$$

e

$$\|u_0\|^2 > p \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u_0|^p) |u_0|^p dx,$$

o que é absurdo pois  $p > 1$ . Isto termina a demonstração.  $\square$

### 4.2.1 Parte ii)

Suponha que as hipóteses (Q), (V<sub>1</sub>) e (V<sub>2</sub>) sejam satisfeitas. Seja  $(\lambda_j) \subset (0, \lambda^*)$  uma sequência tal que  $\lambda_j \rightarrow 0$ . Queremos provar agora que  $u_{\lambda_j} \rightarrow 0$ .

De fato, considere a sequência  $(u_{\lambda_j})$ , onde  $u_{\lambda_j} \in \mathcal{N}_{\lambda_j}^+$  é uma solução fraca para o Problema (0-1) com  $\lambda = \lambda_j$ . Note que  $(u_{\lambda_j})$  é limitada, pois como  $u_{\lambda_j} \in \mathcal{N}_{\lambda_j}$  então

$E'_{\lambda_j}(u)(u) = 0$ , ou seja

$$\|u_j\|^2 - \lambda_j \int_{\mathbb{R}^N} |u_j|^q dx = \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u_j|^p) |u_j|^p dx.$$

Substituindo essa integral no funcional  $E_{\lambda_j}(u_j)$  obtem-se

$$\begin{aligned} E_{\lambda_j}(u_j) &= \frac{1}{2} \|u_j\|^2 - \frac{1}{2p} \left( \|u_j\|^2 - \lambda_j \int_{\mathbb{R}^N} |u_j|^q dx \right) - \frac{\lambda_j}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |u_j|^q dx \\ &= \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2p} \right) \|u_j\|^2 - \lambda_j \left( \frac{1}{q} - \frac{1}{2p} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |u_j|^q dx. \end{aligned}$$

Pela compacidade da imersão  $X \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$  para cada  $r \in [1, 2^*)$ , obtemos

$$E_{\lambda_j}(u_j) \geq \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2p} \right) \|u_j\|^2 - \lambda_j \left( \frac{1}{q} - \frac{1}{2p} \right) C^q \|u_j\|^q,$$

onde  $C > 0$ . Pelo Lema 3.5 obtemos

$$\left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2p} \right) \|u_{\lambda_j}\|^2 - \lambda_j \left( \frac{1}{q} - \frac{1}{2p} \right) C \|u_{\lambda_j}\|^q \leq \mathcal{E}_{\lambda_j}^1 < 0.$$

Note que podemos expressar essa desigualdade da seguinte maneira

$$a \|u_j\|^2 - b \|u_j\|^q < 0$$

com  $a$  e  $b$  positivos e  $q < 2$ , portanto, a sequência  $(u_{\lambda_j})$  é limitada.

Usando as mesmas ideias discutidas na prova da Proposição 4.3, é possível deduzir que  $u_{\lambda_j} \rightarrow u_0$  em  $X$ . Note que como a condição de solução fraca para  $u_{\lambda_j}$  é

$$\langle u_{\lambda_j}, \varphi \rangle - \lambda_j \int_{\mathbb{R}^N} |u_{\lambda_j}|^{q-2} u_{\lambda_j} \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u_{\lambda_j}|^p) |u_{\lambda_j}|^{p-2} u_{\lambda_j} \varphi dx = 0 \quad (4-8)$$

para todo  $\varphi \in X$ . Passando ao limite para  $j \rightarrow \infty$  cada parcela da expressão (4-8) temos que pela continuidade do produto interno, o termo linear converge para  $\langle u_0, \varphi \rangle$ . Para o termo com  $\lambda_j$ , usando novamente a compacidade da imersão  $X \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$  para cada  $r \in [1, 2^*)$

$$\left| \lambda_j \int_{\mathbb{R}^N} |u_{\lambda_j}|^{q-2} u_{\lambda_j} \varphi dx \right| \leq \lambda_j C \|u_{\lambda_j}\|^{q-1} \|\varphi\| \rightarrow 0$$

pois  $\lambda_j \rightarrow 0$  e  $u_{\lambda_j}$  é limitada. Por fim para o termo não local

$$\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u_{\lambda_j}|^p) |u_{\lambda_j}|^{p-2} u_{\lambda_j} \varphi dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u_0|^p) |u_0|^{p-2} u_0 \varphi dx$$

pela convergência forte  $u_{\lambda_j} \rightarrow u_0$  em  $X$  e continuidade do operador não linear. Assim

$$\langle u_0, \Phi \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u_0|^p) |u_0|^{p-2} u_0 \Phi dx = 0 \quad (4-9)$$

logo  $u_0$  é uma solução de (0-1) com  $\lambda = 0$ . A Equação (4-9) também nos diz que  $u_0$  satisfaz  $E'_0(u_0)(u_0) = 0$ . Além disso, como  $E''_{\lambda_j}(u_{\lambda_j})(u_{\lambda_j}, u_{\lambda_j}) > 0$ , pela continuidade de  $E''_{\lambda_j}$  temos que  $E''_0(u_0)(u_0, u_0) \geq 0$ .

Portanto  $u_0 \in \mathcal{N}_0^+ \cup \mathcal{N}_0^0 \cup \{0\}$ . Em vista do Lema 4.1, os conjuntos  $\mathcal{N}_0^+$  e  $\mathcal{N}_0^0$  são vazios, como consequência deduzimos que  $u_0 \equiv 0$ . A última afirmação diz que

$$u_{\lambda_j} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad j \rightarrow \infty. \quad (4-10)$$

Agora considere a sequência  $(v_{\lambda_j})$  onde  $v_{\lambda_j} \in \mathcal{N}_{\lambda_j}^-$  é uma solução fraca para o Problema (0-1) com  $\lambda = \lambda_j$ . Note que

$$E_{\lambda_j}(v_{\lambda_j}) = \min_{v \in \mathcal{N}_{\lambda_j}^-} E_{\lambda_j}(v) = \mathcal{E}_{\lambda_j}^2.$$

Além disso, como

$$E_{\lambda_j}(u) = E_0(u) - \frac{\lambda_j}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^q dx,$$

inferimos que

$$\mathcal{E}_{\lambda_j}^2 = E_{\lambda_j}(v_{\lambda_j}) \leq E_0(u)$$

vale para todo  $u \in X$ . Como  $\lambda_j \rightarrow 0$ , temos

$$-\frac{\lambda_j}{q} \|v_{\lambda_j}\|_q^q \geq -\frac{1}{q} \|v_{\lambda_j}\|_q^q,$$

logo

$$E_{\lambda_j}(v_{\lambda_j}) \geq \frac{1}{2} \|v_{\lambda_j}\|^2 - \frac{1}{q} \|v_{\lambda_j}\|_q^q - \frac{1}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |v_{\lambda_j}|^p) |v_{\lambda_j}|^p dx.$$

E como  $E_{\lambda_j}(v_{\lambda_j}) \leq \mathcal{E}_0^2$ , obtemos a desigualdade.

$$\frac{1}{2} \|v_{\lambda_j}\|^2 - \frac{1}{2p} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |v_{\lambda_j}|^p) |v_{\lambda_j}|^p dx - \frac{1}{q} \|v_{\lambda_j}\|_q^q \leq \mathcal{E}_0^2.$$

Como  $v_{\lambda_j} \in \mathcal{N}_{\lambda_j}$ , vale que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |v_{\lambda_j}|^p) |v_{\lambda_j}|^p dx = \|v_{\lambda_j}\|^2 - \lambda_j \int_{\mathbb{R}^N} |v_{\lambda_j}|^q dx,$$

substituindo no funcional obtem-se

$$\begin{aligned} E_{\lambda_j}(v_{\lambda_j}) &= \frac{1}{2}\|v_{\lambda_j}\|^2 - \frac{\lambda_j}{q} \int_{\mathbb{R}^N} |v_{\lambda_j}|^q dx - \frac{1}{2p} \left( \|v_{\lambda_j}\|^2 - \lambda_j \int_{\mathbb{R}^N} |v_{\lambda_j}|^q dx \right) \\ &= \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2p} \right) \|v_{\lambda_j}\|^2 - \lambda_j \left( \frac{1}{q} - \frac{1}{2p} \right) \int_{\mathbb{R}^N} |v_{\lambda_j}|^q dx \end{aligned}$$

como  $\lambda_j \leq \lambda^*$  e usando a compacidade da imersão  $X \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$  para cada  $r \in [1, 2^*)$ , obtemos

$$\mathcal{E}_0^2 \geq E_{\lambda_j}(v_{\lambda_j}) \geq \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2p} \right) \|v_{\lambda_j}\|^2 - \lambda^* \left( \frac{1}{q} - \frac{1}{2p} \right) C \|v_{\lambda_j}\|^q.$$

Analogamente ao caso de  $(u_{\lambda_j})$  conclui-se que  $(v_{\lambda_j})$  é limitada em  $X$ . Usando as ideias empregadas acima, deduzimos que  $v_{\lambda_j} \rightarrow v_0$  em  $X$  quando  $j \rightarrow \infty$ . Além disso, usando as mesmas ideias discutidas na prova da Equação (4-5) é possível concluir que existe uma constante  $C > 0$  que não depende de  $\lambda$  tal que  $C \leq \|v_{\lambda_j}\|$ . A última afirmação e a convergência forte mostram que  $v_0 \neq 0$ . Sob estas condições, de forma análoga à apresentada para  $u_{\lambda_j}$  tomando o limite  $j \rightarrow \infty$ , segue que  $v_0$  é uma solução fraca para o Problema (0-1) com  $\lambda = 0$ , assim  $E'_0(v_0)(v_0) = 0$ .

Pela continuidade de  $E''_\lambda$ , obtem-se  $E''_0(v_0)(v_0, v_0) \leq 0$ . Agora argumentando por contradição, suponha que a função  $v_0$  satisfaça  $E''_0(v_0)(v_0, v_0) = 0$ . Como consequência, usando a mesma estratégia empregada na prova do Lema 4.1,  $v_0 \equiv 0$ . Isto é uma contradição, provando que a função  $v_0$  satisfaz as seguintes condições

$$E'_0(v_0)(v_0) = 0 \quad \text{e} \quad E''_0(v_0)(v_0, v_0) < 0.$$

Portanto,  $v_0 \in \mathcal{N}_0^-$ . Assim  $v_0$  é uma solução fraca do Problema (0-1).

## 4.2.2 Parte i)

Como foi visto na Equação (4-10)  $u_{\lambda_j} \rightarrow 0$  quando  $\lambda_j \rightarrow 0$ . Usando a continuidade do funcional  $(\lambda, u) \mapsto E(\lambda, u)$  temos que

$$\mathcal{E}_{\lambda_j}^1 = E(\lambda_j, u_{\lambda_j}) \longrightarrow E(0, 0) = 0.$$

Assim quando  $u_{\lambda_j} \rightarrow 0$  temos  $\mathcal{E}_{\lambda_j}^1 \longrightarrow 0$ . Por outro lado como visto na Seção 4.2.1,  $v_{\lambda_j} \rightarrow v_0$  quando  $j \rightarrow \infty$ , onde  $v_0$  é uma solução fraca para o Problema (0-1) com  $\lambda = 0$ , assim

$$\mathcal{E}_{\lambda_j}^2 = E(\lambda_j, v_{\lambda_j}) \longrightarrow E(0, v_0) = \mathcal{E}_0^2.$$

Isto conclui a prova.

### 4.3 Demonstração do Teorema 1.4

Nesta seção o principal objetivo é encontrar existência de soluções fracas para o Problema (0-1) assumindo que  $\lambda = \lambda^*$ . Para fazer isso, consideraremos uma sequência  $\lambda_j \in (\lambda_*, \lambda^*)$  tal que  $\lambda_j \uparrow \lambda^*$ . Segue do Teorema 1.1 que existem soluções fracas  $u_{\lambda_j}$  e  $v_{\lambda_j}$  para o Problema (0-1) para cada  $j \in \mathbb{N}$ . Agora, consideramos alguns resultados auxiliares que descrevem como a variedade de Nehari se comporta assumindo que  $\lambda = \lambda^*$ . Inicialmente, consideramos o seguinte resultado:

**Proposição 4.6.** *Suponha que as hipóteses (Q) e (V<sub>1</sub>) e (V<sub>2</sub>) são satisfeitas. Então  $\mathcal{N}_{\lambda^*}^0 \neq \emptyset$ .*

*Demonstração.* Em vista do Lema 2.2, existe  $u_{\lambda^*} \in X \setminus \{0\}$  tal que

$$\lambda^* = \Lambda_n(u_{\lambda^*}) = \inf_{u \in X \setminus \{0\}} \Lambda_n(u) = R_n(u_{\lambda^*}).$$

A última equação garante que  $u_{\lambda^*} \in \mathcal{N}_{\lambda^*}$ . Note que pela Equação (2-21)

$$Q'_n(1) = \frac{d}{dt} R_n(u_{\lambda^*}) = \frac{q E''_{\lambda^*}(u_{\lambda^*})(u_{\lambda^*}, u_{\lambda^*})}{t G'(u_{\lambda^*})(u_{\lambda^*})},$$

e usando o fato de que  $t = 1$  é um ponto de máximo para  $Q_n(t) := R_n(tu_{\lambda^*})$ , temos que

$$0 = \frac{q E''_{\lambda^*}(u_{\lambda^*})(u_{\lambda^*}, u_{\lambda^*})}{t G'(u_{\lambda^*})(u_{\lambda^*})},$$

assim  $E''_{\lambda^*}(u_{\lambda^*})(u_{\lambda^*}, u_{\lambda^*}) = 0$ . Portanto  $u_{\lambda^*} \in \mathcal{N}_{\lambda^*}^0$ . Isto conclui a prova.  $\square$

É importante enfatizar que o método de Nehari funciona bem quando podemos encontrar um minimizador  $u \in \mathcal{N}_{\lambda^*}^+ \cup \mathcal{N}_{\lambda^*}^-$  para o funcional  $E_{\lambda}$  para cada  $\lambda > 0$ . A principal razão é que o multiplicador de Lagrange precisa ser zero e sua derivada diferente de zero. No entanto, assumindo que  $u \in \mathcal{N}_{\lambda^*}^0$  é um minimizador para o funcional  $E_{\lambda}$  restrito a  $\mathcal{N}_{\lambda^*}^0$ , não é fácil verificar que  $u$  é um ponto crítico para o funcional  $E_{\lambda}$ . Para resultados adicionais sobre este assunto, referimos o leitor interessado a referência [20]. Para este contexto, será provado que qualquer solução fraca  $u \in X$  não pertence a  $\mathcal{N}_{\lambda^*}^0$ , mais especificamente, o seguinte resultado:

**Proposição 4.7.** *Suponha (Q) e (V<sub>1</sub>) e (V<sub>2</sub>) sejam satisfeitas. Então não existem soluções fracas  $u \in X$  para o Problema (0-1) tais que  $u \in \mathcal{N}_{\lambda^*}^0$ .*

*Demonstração.* A prova segue por contradição. Suponha que exista  $u \in \mathcal{N}_{\lambda^*}^0$ , assim  $E''_{\lambda^*}(u)(u, u) = 0$ , de modo que  $u$  é uma solução fraca para nosso problema principal (0-1), assim

$$-\Delta u + V(x)u = 2(I_{\alpha} * |u|^p)|u|^{p-2}u + 2\lambda^*|u|^{q-2}u, \quad (4-11)$$

e  $E'_{\lambda^*}(u)\psi = 0$  para todo  $\psi \in X$ . Assim  $u$  satisfaz  $\lambda^* = \Lambda_n(u)$ . Como consequência, a função  $u$  também é uma solução fraca de (2-29), logo de (2-29) e (4-11)

$$2(I_\alpha * |u|^p)|u|^{p-2}u + 2\lambda^*|u|^{q-2}u = 2p(I_\alpha * |u|^p)|u|^{p-2}u + q\lambda^*|u|^{q-2}u,$$

assim

$$(I_\alpha * |u|^p)|u|^{p-2}u = \frac{(2-q)\lambda^*}{2p-2}|u|^{q-2}u, \quad \text{q.t.p. em } \mathbb{R}^N.$$

A última afirmação implica que

$$(I_\alpha * |u|^p)|u|^{p-q} = \frac{(2-q)\lambda^*}{2p-2}, \quad \text{q.t.p. em } [u \neq 0]. \quad (4-12)$$

Por outro lado, observe também que  $u \in C_{loc}^{1,\beta}(\mathbb{R}^N)$  para algum  $\beta \in (0, 1)$ , o que pode ser feito usando o Teorema B.1 no Apêndice. Vale lembrar que a imersão  $X \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$  é contínuo para cada  $r \in [1, 2^*]$ , veja a Proposição 2.1. Em particular, obtém-se também que  $u \in C_{loc}^{1,\beta}(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N)$  para algum  $\beta \in (0, 1)$ . A última afirmação assegura que  $u(x) \rightarrow 0$  quando  $|x| \rightarrow \infty$ . Neste caso, usando o princípio do máximo forte e as mesmas ideias discutidas na prova da Proposição 3.1, mencionamos que  $u > 0$  em  $\mathbb{R}^N$ . Além disso, usando o Lema B.1 no Apêndice, e sabendo que  $\|u\|_p^p = 0$ , existem constantes  $C, R > 0$  tais que

$$\left| \frac{(I_\alpha * |u|^p)(x)}{I_\alpha(x)} \right| \leq C\|u\|_p^p. \quad (4-13)$$

Além disso, note que como  $I_\alpha(x) = \frac{A_\alpha(N)}{|x|^{N-\alpha}}$ , temos que  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} I_\alpha(x) = 0$ . Dado  $\varepsilon = \frac{1}{C\|u\|_p^p}$ , existe  $R > 0$  tal que

$$|x| > R \Leftrightarrow I_\alpha(x) < \varepsilon,$$

logo

$$I_\alpha(x) < \frac{1}{C\|u\|_p^p}, \quad x \in B_R(0)^c. \quad (4-14)$$

Das Equações (4-13) e (4-14) obtemos

$$\frac{(I_\alpha * |u|^p)(x)}{I_\alpha(x)} I_\alpha(x) < 1$$

Observe também que,  $|u|^{p-q} < \frac{(2-q)\lambda^*}{2p-2}$  em  $B_R(0)^c$  vale para qualquer  $R > 0$  suficientemente grande. Como produto,

$$\frac{(2-q)\lambda^*}{2p-2} = \frac{(I_\alpha * |u|^p)(x)}{I_\alpha(x)} I_\alpha(x) |u(x)|^{p-q}(x) < \frac{(2-q)\lambda^*}{2p-2}, \quad \text{q.t.p. em } B_R(0)^c.$$

Isto é uma contradição, provando que qualquer solução fraca  $u$  para o Problema (0-1) satisfaz  $u \notin \mathcal{N}_{\lambda^*}^0$ . Isto conclui a prova.  $\square$

**Proposição 4.8.** *Suponha que as hipóteses (Q), (V<sub>1</sub>) e (V<sub>2</sub>) sejam satisfeitas. Seja (v<sub>k</sub>) uma sequência minimizante para E<sub>λ\*</sub> restrita a  $\mathcal{N}_{\lambda^*}^-$ . Então existe v<sub>λ\*</sub> ∈ X \ {0} tal que v<sub>k</sub> → v<sub>λ\*</sub> em X \ {0}.*

*Demonstração.* Inicialmente, observamos que existe  $\psi \in \mathcal{N}_{\lambda^*}^-$  tal que  $E_{\lambda^*}(\psi) < 0$ . De fato, usando a definição de  $\lambda_*$ , existe  $u \in X$  tal que  $\lambda_* < \Lambda_e(u) < \lambda^*$ . Pela Observação 2.5, como  $\Lambda_e(u) \neq \lambda_*$  temos que  $\Lambda_n(u) \neq \lambda^*$ , assim,  $\Lambda_n(u) > \lambda^*$ , provando que  $t_{\lambda^*}^{n,-}(u)$  está bem definido.

Além disso, como  $\Lambda_e(u) < \lambda^*$ , deduzimos que  $t_{\lambda^*}^{n,-}(u) < t_e(u)$ , veja a Figura 3.3. Mais uma vez usando o fato de que  $R_n(tu) > R_e(tu)$  para qualquer  $t \in (0, t_e(u))$ , a última desigualdade nos diz que

$$\lambda^* = R_n(t_{\lambda^*}^{n,-}(u)u) > R_e(t_{\lambda^*}^{n,-}(u)u).$$

Assim, pelo ítem iii) da Observação 2.2 concluímos que  $E_{\lambda^*}(t_{\lambda^*}^{n,-}(u)u) < 0$ .

Para nossos propósitos, definimos  $\psi = t_{\lambda^*}^{n,-}(u)u \in \mathcal{N}_{\lambda^*}^-$ . Seja (v<sub>k</sub>) uma sequência minimizante para  $E_{\lambda^*}|_{\mathcal{N}_{\lambda^*}^-}$ . Uma vez que  $E_{\lambda^*}|_{\mathcal{N}_{\lambda^*}^-}$  é coerciva, observamos que (v<sub>k</sub>) é limitada em X. Portanto, a menos de uma subsequência, existe v<sub>λ\*</sub> ∈ X tal que v<sub>k</sub> → v<sub>λ\*</sub> em X. Note também que o funcional  $u \mapsto E_{\lambda^*}(u)$  é fracamente semicontínuo inferiormente. Como consequência, obtemos que

$$E_{\lambda^*}(v_{\lambda^*}) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} E_{\lambda^*}(v_k) = \mathcal{E}_{\lambda^*}^2 \leq E_{\lambda^*}(\psi) < 0$$

é verdadeira para  $\psi \in \mathcal{N}_{\lambda^*}^-$  definido acima. Em particular, a última estimativa garante que  $v_{\lambda^*} \neq 0$ .

De agora em diante, a prova segue argumentando por contradição. Suponha que (v<sub>k</sub>) não convirja para v<sub>λ\*</sub> em X. A última afirmação implica que

$$E_{\lambda^*}(v_{\lambda^*}) < \liminf_{k \rightarrow \infty} E_{\lambda^*}(v_k) \tag{4-15}$$

$$R_n(v_{\lambda^*}) < \liminf_{k \rightarrow \infty} R_n(v_k) = \lambda^* \tag{4-16}$$

$$R'_n(v_{\lambda^*})v_{\lambda^*} < \liminf_{k \rightarrow \infty} R'_n(v_k)v_k \leq 0. \tag{4-17}$$

Em vista de (4-16), inferimos que  $E'_{\lambda^*}(v_{\lambda^*})(v_{\lambda^*}) < 0$ , veja a Observação 2.1. Lembre também que  $E''_{\lambda^*}(v_k)(v_k, v_k) < 0$ , que juntamente com 4-17 implica que  $E''_{\lambda^*}(v_{\lambda^*})(v_{\lambda^*}, v_{\lambda^*}) < 0$ , veja a Proposição 2.5. Como produto, obtemos que  $t_{\lambda^*}^{n,-}(v_{\lambda^*}) < 1 = t_{\lambda^*}^{n,-}(v_k)$  vale para qualquer  $k \in \mathbb{N}$ . Uma vez que  $(v_k)$  não converge para  $v_{\lambda^*}$  em  $X$ , deduzimos as seguintes estimativas

$$\mathcal{E}_{\lambda^*}^2 \leq E_{\lambda^*}(t_{\lambda^*}^{n,-}(v_{\lambda^*})v_{\lambda^*}) < \liminf_{k \rightarrow \infty} E_{\lambda^*}(t_{\lambda^*}^{n,-}(v_{\lambda^*})v_k) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} E_{\lambda^*}(v_k) = \mathcal{E}_{\lambda^*}^2.$$

Isto é uma contradição, provando que  $v_k \rightarrow v_{\lambda^*}$ . Isto termina a prova.  $\square$

Agora, recordando que  $(u_{\lambda_j})$  e  $(v_{\lambda_j})$  são soluções fracas para o Problema (0-1), onde  $\lambda_j \in (\lambda_k, \lambda^*)$  é uma sequência tal que  $\lambda_j \uparrow \lambda^*$ . Portanto, podemos provar o seguinte resultado:

**Proposição 4.9.** *Suponha que as hipóteses (Q), (V<sub>1</sub>) e (V<sub>2</sub>) sejam satisfeitas. Assuma também que  $\lambda_j \uparrow \lambda^*$  quando  $j \rightarrow \infty$ . Então, a menos de subsequências, existem  $u_{\lambda^*} \in X$  e  $v_{\lambda^*} \in X \setminus \{0\}$  tais que*

- (i)  $u_{\lambda_j} \rightarrow u_{\lambda^*}$  e  $v_{\lambda_j} \rightarrow v_{\lambda^*}$  em  $X$ ;
- (ii)  $u_{\lambda^*} \in \mathcal{N}_{\lambda^*}^+$  e  $v_{\lambda^*} \in \mathcal{N}_{\lambda^*}^-$ ;
- (iii)  $u_{\lambda^*}$  e  $v_{\lambda^*}$  são soluções fracas distintas do Problema (0-1) com  $\lambda = \lambda^*$ ;
- (iv)  $\mathcal{E}_{\lambda^*}^1 < \mathcal{E}_{\lambda^*}^2$ .

*Demonstração.* Inicialmente provaremos o item (i). Usando as mesmas ideias discutidas na prova da prova do item (ii) do Teorema 1.3 apresentado na Subseção 4.2.1, inferimos que  $(u_{\lambda_j})$  e  $(v_{\lambda_j})$  são sequências limitadas. Agora, usando mais uma vez as mesmas ideias empregadas na prova da Proposição 4.3, vemos que  $u_{\lambda_j} \rightarrow u_{\lambda^*}$  e  $v_{\lambda_j} \rightarrow v_{\lambda^*}$  em  $X$ .

Agora provaremos o item (ii). Note que

$$E'_{\lambda_j}(u_{\lambda_j})u_{\lambda_j} = E'_{\lambda_j}(v_{\lambda_j})v_{\lambda_j} = 0 \quad (4-18)$$

e como  $u_{\lambda_j}, v_{\lambda_j}$  são soluções fracas do Problema (0-1) para  $\lambda = \lambda^*$ , estes são pontos críticos do funcional  $E_{\lambda_j}$ . Além disso, observamos que  $E''_{\lambda_j}(u_{\lambda_j})(u_{\lambda_j}, u_{\lambda_j}) > 0$  e  $E''_{\lambda_j}(v_{\lambda_j})(v_{\lambda_j}, v_{\lambda_j}) < 0$ . Neste estágio, passando ao limite em (4-18) e usando a convergência forte citada no item (i), deduzimos que

$$E'_{\lambda^*}(u_{\lambda^*})u_{\lambda^*} = E'_{\lambda^*}(v_{\lambda^*})v_{\lambda^*} = 0.$$

Da mesma forma, também obtemos

$$E''_{\lambda^*}(u_{\lambda^*})(u_{\lambda^*}, u_{\lambda^*}) \geq 0 \quad \text{e} \quad E''_{\lambda^*}(v_{\lambda^*})(v_{\lambda^*}, v_{\lambda^*}) \leq 0. \quad (4-19)$$

Além disso, usando o Lema 3.2, obtemos  $v_{\lambda^*} \neq 0$ . Pela segunda desigualdade de (4-19) temos que  $v_{\lambda^*} \in \mathcal{N}_{\lambda^*}^- \cup \mathcal{N}_{\lambda^*}^0$ . No entanto, não existe nenhuma solução fraca  $v \in X$  para o Problema (0-1) tal que  $v \in \mathcal{N}_{\lambda^*}^0$ , veja a Proposição 4.7. Assim  $v_{\lambda^*}$  está em  $\mathcal{N}_{\lambda^*}^-$ .

Segundo a Proposição 4.5, sabemos que  $(\mathcal{E}_{\lambda_j}^1)_{\lambda_j}$  é uma sequência decrescente. Assim, usando que  $\lambda_j \uparrow \lambda^*$  e  $u_{\lambda_j} \rightarrow u_{\lambda^*}$  em  $X$ , inferimos também que

$$E_{\lambda^*}(u_{\lambda^*}) = \lim_{j \rightarrow \infty} E_{\lambda_j}(u_{\lambda^*}) < E_{\lambda_j}(u_{\lambda_j}) = \mathcal{E}_{\lambda_j}^1 < 0, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

assim  $E_{\lambda^*}(u_{\lambda^*}) < 0$  logo,  $u_{\lambda^*} \neq 0$ . Analogamente ao que foi feito para  $v_{\lambda_j}$  prova-se que  $u_{\lambda^*} \in \mathcal{N}_{\lambda^*}^+$ . Isso conclui a prova do item (ii).

Em relação ao item (iii), note que pela Definição 1.2 de solução fraca de (0-1),  $u_{\lambda_j}$  satisfaz

$$\langle u_{\lambda_j}, \Psi \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u_{\lambda_j}|^p) |u_{\lambda_j}|^{p-2} u_{\lambda_j} \Psi dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u_{\lambda_j}|^{q-2} u_{\lambda_j} \Psi dx = 0, \quad \Psi \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

Pela compacidade da imersão  $X \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$  para cada  $r \in [1, 2^*)$ , e pela convergência forte dada no item (i) obtemos que  $u_{\lambda^*}$  é solução fraca do Problema (0-1). A distinção entre  $u_{\lambda^*}$  e  $v_{\lambda^*}$  vem do item (ii).

A prova do item (iv) segue do fato, de que existe  $t_{\lambda^*}^{n,+}(v_{\lambda^*})v_{\lambda^*} \in \mathcal{N}_{\lambda^*}^+$  tal que  $\mathcal{E}_{\lambda^*}^2 = E_{\lambda^*}(t_{\lambda^*}^{n,+}(v_{\lambda^*})v_{\lambda^*})$ . Note também que  $t_{\lambda^*}^{n,+}(v_{\lambda^*}) > 0$  está bem definido, veja a Proposição 2.9. Como consequência, mencionamos que

$$\mathcal{E}_{\lambda^*}^1 \leq E_{\lambda^*}(t_{\lambda^*}^{n,+}(v_{\lambda^*})v_{\lambda^*}) < E_{\lambda^*}(v_{\lambda^*}) = \mathcal{E}_{\lambda^*}^2.$$

Isso conclui a prova. □

Como mencionado anteriormente, consideramos uma sequência  $\lambda_j \in (\lambda_*, \lambda^*)$  tal que  $\lambda_j \uparrow \lambda^*$ . Segue do Teorema 1.1 que existem soluções fracas  $u_{\lambda_j}$  e  $v_{\lambda_j}$  para o Problema (0-1) para cada  $j \in \mathbb{N}$ .

Pela Proposição 4.9 temos que  $u_{\lambda_j} \rightarrow u_{\lambda^*}$  e  $v_{\lambda_j} \rightarrow v_{\lambda^*}$  em  $X$ , além disso essa proposição garante que  $u_{\lambda^*}$  e  $v_{\lambda^*}$  são soluções fracas distintas para o Problema (0-1). E o item (iv) garante que  $\mathcal{E}_{\lambda^*}^1 < \mathcal{E}_{\lambda^*}^2$ .

Vale ressaltar que, usando as mesmas ideias empregadas na prova da Proposição 3.1, observamos que  $u_{\lambda^*} > 0$  e  $v_{\lambda^*} > 0$  em  $\mathbb{R}^N$ .

**Observação 4.1.** *É possível obter duas soluções para  $\lambda \in (\lambda^*, \lambda^* + \varepsilon)$ , para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno. Basta aplicar as técnicas usadas em [23].*

---

## Referências Bibliográficas

---

- [1] ALVES, C. O.; YANG, J. **Existence and regularity of solutions for a choquard equation with zero mass.** *Milan Journal of Mathematics*, 86:329–342, 2018.
- [2] AMBROSETTI, A.; BREZIS, H.; CERAMI, G. **Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems.** *Journal of Functional Analysis*, 122:519–543, 1994.
- [3] BREZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.** Springer, New York, 2010.
- [4] CARVALHO, M. L. M.; IL'YASOV, Y.; SANTOS, C. A. **Separating of critical points on the Nehari manifold via the nonlinear generalized Rayleigh quotients.** *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, 58:453–480, 2021.
- [5] CHEN, S.; TANG, X. **Ground state solutions for general choquard equations with a variable potential and a local nonlinearity.** *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A, Matemáticas*, 114:Paper No. 14, 2020. 14 pages.
- [6] DRÁBEK, P.; MILOTA, J. **Methods of Nonlinear Analysis: Applications to Differential Equations.** Birkhäuser Basel, 2 edition, 2013.
- [7] GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S. **Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.** Springer, Berlin, reprint of the 1998 edition edition, 2015.
- [8] HUANG, Y.; WU, T. F.; WU, Y. **Multiple positive solutions for a class of concave-convex elliptic problems in  $\mathbb{R}^n$  involving sign-changing weight, II.** *Communications in Contemporary Mathematics*, 17(6):1450045, 2015.
- [9] IL'YASOV, Y. **On nonlocal existence results for elliptic equations with convex-concave nonlinearities.** *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, p. 211–236, 2005.

- [10] IL'YASOV, Y.; SILVA, K. **On branches of positive solutions for  $p$ -laplacian problems at the extreme value of the nehari manifold method.** *Proceedings of the American Mathematical Society*, 146(7):2925–2935, 2018.
- [11] IL'YASOV, Y. **On extreme values of Nehari manifold method via nonlinear Rayleigh's quotient.** *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 49(2):683–714, 2017.
- [12] LI, X.; LIU, X.; MAB, S. **Infinitely many bound states for choquard equations with local nonlinearities.** *Nonlinear Analysis*, 189:111583, 2019.
- [13] LI, X.; MA, S. **Choquard equations with critical nonlinearities.** *Communications in Contemporary Mathematics*, 22, 2020.
- [14] LIEB, E. H. **Existence and uniqueness of the minimizing solution of choquard's nonlinear equation.** *Studies in Applied Mathematics*, 57(2):93–105, 1977.
- [15] MOROZ, V.; VAN SCHAFTINGEN, J. **Ground states of nonlinear Choquard equations: Existence, qualitative properties and decay asymptotics.** *Journal of Functional Analysis*, 265:153–184, 2013.
- [16] MOROZ, V.; VAN SCHAFTINGEN, J. **A guide to the Choquard equation.** *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 19:773–813, 2017.
- [17] PEKAR, S. **Untersuchung Ber die Elektronentheorie der Kristalle.** Akademie Verlag, Berlin, 1954.
- [18] PENROSE, R. **On gravity's role in quantum state reduction.** *General Relativity and Gravitation*, 28(5):581–600, 1996.
- [19] PUCCI, P.; SERRIN, J. **The Maximum Principle.** Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.
- [20] SANTOS, C. A.; ALVES, R. L.; SILVA, K. **Multiplicity of negative-energy solutions for singular-superlinear schrödinger equations with indefinite-sign potential.** *Communications in Contemporary Mathematics*, 2018.
- [21] SILVA, E. D. D.; CARVALHO, M. L. M.; GOULART, C. **Choquard equations via nonlinear rayleigh quotient for concave-convex nonlinearities.** *Communications on Pure and Applied Analysis*, 20(10):3445–3479, 2021.
- [22] SILVA, J. D. S. **Problemas Elípticos Quasilineares Envolvendo Não-Linearidades Interagindo com Autovalores de Alta Energia.** Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2019.

- [23] SILVA, K.; MACEDO, A. **Local minimizers over the Nehari manifold for a class of concave–convex problems with sign changing nonlinearity.** *Journal of Differential Equations*, 265(5):1894–1921, 2018.
- [24] STRUWE, M. **Variational Methods: Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems.** Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer Verlag, Berlin, 2000. 3rd Edition.
- [25] WILLEM, M. **Minimax Theorems**, volume 24 de **Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications.** Birkhäuser, Boston, MA, 1996.
- [26] WU, T. F. **Multiple positive solutions for a class of concave-convex elliptic problems in  $\mathbb{R}^n$  involving sign-changing weight.** *Journal of Functional Analysis*, 258(1):99–131, 2010.

## Espaços de Sobolev

No presente Apêndice reunimos algumas definições e resultados básicos sobre continuidade e Espaços de Sobolev, extraídos dos Capítulos 3, 8 e 9 de [3].

**Definição A.1** (Solução fraca). *Seja  $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ . Dizemos que  $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$  é uma solução fraca da equação*

$$-\Delta u = f \quad \text{em } \mathbb{R}^N,$$

se

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} f \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Seja  $E$  um espaço de Banach,  $E^*$  o espaço dual de  $E$  (conjunto de todos os funcionais lineares contínuos definidos em  $E$ ) e seja  $f \in E^*$ . Denotamos por  $\varphi_f : E \rightarrow \mathbb{R}$  o funcional linear  $\varphi_f(x) = \langle f, x \rangle$ . Quando  $f$  percorre  $E^*$ , obtemos uma coleção  $(\varphi_f)_{f \in E^*}$  de aplicações de  $E$  em  $\mathbb{R}$ . Ignoramos agora a topologia usual em  $E$  (associada à norma  $\|\cdot\|$ ) e definimos uma nova topologia no conjunto  $E$  da seguinte forma:

**Definição A.2.** *A topologia fraca  $\sigma(E, E^*)$  em  $E$  é a topologia mais grosseira associada à coleção  $(\varphi_f)_{f \in E^*}$ .*

*Se uma sequência  $(x_n)$  em  $E$  converge para  $x$  na topologia fraca  $\sigma(E, E^*)$ , escrevemos*

$$x_n \rightharpoonup x.$$

**Definição A.3.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços normados. Dizemos que  $X$  está continuamente imerso em  $Y$ , denotado por  $X \hookrightarrow Y$ , se*

1.  $X \subseteq Y$  (como conjuntos),
2. A aplicação identidade  $\iota : X \rightarrow Y$ ,  $\iota(x) = x$ , é trivialmente linear e contínua.

*Equivalentemente, existe  $C > 0$  tal que*

$$\|x\|_Y \leq C\|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

**Proposição A.1.** *Seja  $(x_n)$  uma sequência em  $E$ . Então*

- (i)  $[x_n \rightharpoonup x \text{ em } \sigma(E, E^*)] \Leftrightarrow [\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle \forall f \in E^*]$ .
- (ii) Se  $x_n \rightarrow x$ , então  $x_n \rightharpoonup x$  em  $\sigma(E, E^*)$ .
- (iii) Se  $x_n \rightharpoonup x$  em  $\sigma(E, E^*)$ , então  $(\|x_n\|)$  é limitada e  $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$ .
- (iv) Se  $x_n \rightharpoonup x$  em  $\sigma(E, E^*)$  e se  $f_n \rightarrow f$  em  $E^*$  (i.e.,  $\|f_n - f\|_{E^*} \rightarrow 0$ ), então  $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$ .

*Demonstração.* A prova desse teorema pode ser encontrada na página 58 da Referência [3]. □

**Teorema A.1** (Sobolev, Gagliardo, Nirenberg). *Seja  $1 \leq p < N$ . Então*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N), \quad \text{onde } p^* \text{ é dado por } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N},$$

e existe uma constante  $C = C(p, N)$  tal que

$$\|u\|_{p^*} \leq C \|\nabla u\|_p \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N). \quad (17)$$

*Demonstração.* A prova desse teorema pode ser encontrada na página 278 da Referência [3]. □

**Corolário A.1.** *Seja  $1 \leq p < N$ . Então*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N) \quad \forall q \in [p, p^*]$$

com imersão contínua.

*Demonstração.* A prova desse teorema pode ser encontrada na página 281 da Referência [3]. □

**Teorema A.2.** (RellichKondrachov) *Suponha que  $\Omega$  seja limitado e de classe  $C^1$ . Então temos as seguintes imersões compactas:*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \forall q \in [1, p^*), \quad \text{onde } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}, \quad \text{se } p < N,$$

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \forall q \in [p, +\infty), \quad \text{se } p = N,$$

$$W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega}), \quad \text{se } p > N.$$

*Em particular,  $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$  com **imersão compacta** para todo  $p$  (e todo  $N$ ).*

*Demonstração.* A prova desse teorema pode ser encontrada na página 285 da Referência [3]. □

## Resultados sobre Equações de Choquard

---

Neste Apêndice, reunimos alguns resultados úteis para problemas elípticos não locais envolvendo a equação de Choquard.

**Exemplo B.1.** *Considere a função*

$$V(x) = 1 + x_1^{2\beta} [(senx_1)^{2\gamma} + x_2^2 + \cdots + x_N^2]^\ell.$$

onde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ ,  $\max\{\beta(N-1), 1/\gamma\} < \ell < \beta/\gamma$ ,  $\beta > 1$  e  $0 < \gamma < \frac{1}{N-1}$ ,  $N \geq 3$ . Então  $V(x)$  satisfaz as hipóteses  $(V_1)$  e  $(V_2)$ .

*Demonstração.* Note que

- $x_1^{2\beta} \geq 0$  (potência par),
- $(senx_1)^{2\gamma} \geq 0$ ,
- $x_2^2 + \cdots + x_N^2 \geq 0$ ,

logo o termo entre colchetes é  $\geq 0$  e elevado a  $\ell > 0$  continua  $\geq 0$ . Portanto,

$$x_1^{2\beta} [(senx_1)^{2\gamma} + x_2^2 + \cdots + x_N^2]^\ell \geq 1 = V_0 > 0.$$

Assim a hipótese  $(V_1)$  é satisfeita. Por outro lado, observe que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x_1^{2\beta} (senx_1)^{2\ell\gamma}} dx_1 = C(\beta, \gamma, \ell) < \infty. \quad (\text{B-1})$$

Note que podemos escrever (B-1) da forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x_1^{2\beta} (senx_1)^{2\ell\gamma}} dx_1 = 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + x_1^{2\beta} (senx_1)^{2\ell\gamma}} dx_1. \quad (\text{B-2})$$

Sabendo que  $\lim_{x_1 \rightarrow k\pi} \left( \frac{senx_1}{x_1 - k\pi} \right)^2 = 1$ , onde  $k \in \mathbb{N}$  com  $k \geq 1$ , temos que dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$(1 - \varepsilon)(x_1 - k\pi)^{2\ell\gamma} \leq (\text{sen}x_1)^{2\ell\gamma} \leq (1 + \varepsilon)(x_1 - k\pi)^{2\ell\gamma}, \quad (\text{B-3})$$

sempre que  $k\pi - \delta \leq x_1 \leq k\pi + \delta$ . Defina os seguintes intervalos

$$I_k = [k\pi - \delta, k\pi + \delta] \quad \text{e} \quad L_k = (k\pi + \delta, 2k\pi - \delta), \quad k \in \mathbb{N}, k \geq 1.$$

Assim podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{1 + x_1^{2\beta}(\text{sen}x_1)^{2\ell\gamma}} dx_1 &= \int_0^{\pi-\delta} \frac{1}{1 + x_1^{2\beta}(\text{sen}x_1)^{2\ell\gamma}} dx_1 \\ &+ \sum_{k=1}^\infty \left( \int_{I_k} \frac{1}{1 + x_1^{2\beta}(\text{sen}x_1)^{2\ell\gamma}} dx_1 \right) \\ &+ \sum_{k=1}^\infty \left( \int_{L_k} \frac{1}{1 + x_1^{2\beta}(\text{sen}x_1)^{2\ell\gamma}} dx_1 \right). \end{aligned} \quad (\text{B-4})$$

Agora mostraremos que cada uma das séries de integrais acima são finitas. De fato, para cada  $k \in \mathbb{N}$  com  $k \geq 1$ , temos por (B-3) que

$$\int_{I_k} \frac{1}{1 + x_1^{2\beta}(\text{sen}x_1)^{2\ell\gamma}} dx_1 \leq \int_{I_k} \frac{1}{1 + (k\pi - \delta)^{2\beta}(1 - \varepsilon)(x_1 - k\pi)^{2\ell\gamma}} dx_1. \quad (\text{B-5})$$

Fazendo a mudança de variável  $y = x_1 - k\pi$  em (B-5) obtemos que

$$\begin{aligned} \int_{I_k} \frac{1}{1 + (k\pi - \delta)^{2\beta}(1 - \varepsilon)(x_1 - k\pi)^{2\ell\gamma}} dx_1 &= \int_{-\delta}^\delta \frac{1}{1 + (k\pi - \delta)^{2\beta}(1 - \varepsilon)y^{2\ell\gamma}} dy \\ &\leq \int_{-\delta}^\delta \frac{1}{1 - \varepsilon + (k\pi - \delta)^{2\beta}(1 - \varepsilon)y^{2\ell\gamma}} dy. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade acima em (B-5) temos a seguinte estimativa

$$\int_{I_k} \frac{1}{1 + x_1^{2\beta}(\text{sen}x_1)^{2\ell\gamma}} dx_1 \leq C(\varepsilon) \int_{-\delta}^\delta \frac{1}{1 + ((k\pi - \delta)^{\beta/\ell\gamma}y)^{2\ell\gamma}} dy. \quad (\text{B-6})$$

Fazendo a mudança de variável  $z = (k\pi - \delta)^{\beta/\ell\gamma}y$  em (B-6) obtemos que

$$\int_{-\delta}^\delta \frac{1}{1 + ((k\pi - \delta)^{\beta/\ell\gamma}y)^{2\ell\gamma}} dy = \frac{1}{(k\pi - \delta)^{\beta/\ell\gamma}} \int_{-\delta(k\pi - \delta)^{\beta/\ell\gamma}}^{\delta(k\pi - \delta)^{\beta/\ell\gamma}} \frac{1}{1 + z^{2\ell\gamma}} dz. \quad (\text{B-7})$$

Observe que podemos escrever

$$\int_{-\delta(k\pi - \delta)^{\beta/\ell\gamma}}^{\delta(k\pi - \delta)^{\beta/\ell\gamma}} \frac{1}{1 + z^{2\ell\gamma}} dz = 2 \int_0^{\delta(k\pi - \delta)^{\beta/\ell\gamma}} \frac{1}{1 + z^{2\ell\gamma}} dz. \quad (\text{B-8})$$

Usando que  $\max\{\beta(N-1), 1/\gamma\} < \ell < \beta/\gamma$ , temos que  $\ell\gamma > 1$ . Assim, obtemos a seguinte estimativa

$$\int_0^{\delta(k\pi-\delta)^{\beta/\ell\gamma}} \frac{1}{1+z^{2\ell\gamma}} dz \leq \int_0^1 \frac{1}{1+z^{2\ell\gamma}} dz + \int_1^\infty \frac{1}{1+z^2} dz \leq C, \quad (\text{B-9})$$

para alguma constante  $C > 0$ . Usando (B-9) em (B-8), temos que

$$\int_{-\delta(k\pi-\delta)^{\beta/\ell\gamma}}^{\delta(k\pi-\delta)^{\beta/\ell\gamma}} \frac{1}{1+z^{2\ell\gamma}} dz \leq C_1.$$

Aplicando esta última estimativa em (B-7) obtemos de (B-6) que

$$\int_{I_k} \frac{1}{1+x_1^{2\beta}(\text{sen}x_1)^{2\ell\gamma}} dx_1 \leq \frac{C_1(\varepsilon)}{(k\pi-\delta)^{\beta/\ell\gamma}}.$$

Usando esta última desigualdade e o fato de  $\ell\gamma < \beta$ , temos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \int_{I_k} \frac{1}{1+x_1^{2\beta}(\text{sen}x_1)^{2\ell\gamma}} dx_1 \right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_1(\varepsilon)}{(k\pi-\delta)^{\beta/\ell\gamma}} < \infty. \quad (\text{B-10})$$

Para as integrais sobre os intervalos  $L_k$ , observemos primeiramente que existe uma constante  $\alpha$  dependendo de  $\delta$  tal que  $(\text{sen}x_1)^{2\ell\gamma} \geq \alpha$  para todo  $x_1 \in L_k$ . Desta forma

$$\int_{L_k} \frac{1}{1+x_1^{2\beta}(\text{sen}x_1)^{2\ell\gamma}} dx_1 \leq \int_{k\pi+\delta}^{2k\pi-\delta} \frac{1}{1+\alpha x_1^{2\beta}} dx_1.$$

Assim, usando que  $\beta > 1$ , temos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \int_{L_k} \frac{1}{1+x_1^{2\beta}(\text{sen}x_1)^{2\ell\gamma}} dx_1 \right) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left( \int_{L_k} \frac{1}{1+\alpha x_1^{2\beta}} dx_1 \right) \\ &= \int_{\bigcup_{k=1}^{\infty} L_k} \frac{1}{1+\alpha x_1^{2\beta}} dx_1 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+\alpha x_1^{2\beta}} dx_1 \\ &= \frac{1}{\alpha^{1/2\beta}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+y^{2\beta}} dy < \infty. \end{aligned} \quad (\text{B-11})$$

onde aqui foi feita a mudança de variável  $y = \alpha^{1/2\beta}x_1$ . Usando as estimativas (B-10) e (B-11) temos que (B-1) é verificada.

Agora, para verificarmos que  $[V(x)]^{-1}$  é integrável, dado  $A > 0$ , escrevemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{V(x)} dx = \int_{|\tilde{x}| \leq A} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{V(x)} dx_1 \right) d\tilde{x} + \int_{|\tilde{x}| > A} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{V(x)} dx_1 \right) d\tilde{x}, \quad (\text{B-12})$$

onde  $\tilde{x} = (x_2, \dots, x_N)$ . Mostremos primeiramente que

$$\int_{|\tilde{x}| \leq A} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{V(x)} dx_1 \right) d\tilde{x} < \infty.$$

De fato, usando (B-1) temos

$$\begin{aligned} \int_{|\tilde{x}| \leq A} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{V(x)} dx_1 \right) d\tilde{x} &\leq \int_{|\tilde{x}| \leq A} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + x_1^{2\beta} (\sin x_1)^2} dx_1 \right) d\tilde{x} \\ &\leq \int_{|\tilde{x}| \leq A} C(\beta, \gamma, \ell) d\tilde{x} < \infty. \end{aligned} \quad (\text{B-13})$$

Para verificarmos que  $\int_{|\tilde{x}| > A} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{V(x)} dx_1 \right) d\tilde{x} < \infty$ , usamos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned} \int_{|\tilde{x}| > A} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{V(x)} dx_1 \right) d\tilde{x} &\leq \int_{|\tilde{x}| > A} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + x_1^{2\beta} (x_2^2 + \dots + x_N^2)^\ell} dx_1 \right) d\tilde{x} \\ &= \int_{|\tilde{x}| > A} \frac{1}{(x_2^2 + \dots + x_N^2)^{\ell/2\beta}} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + y^{2\beta}} dy \right) d\tilde{x}, \end{aligned} \quad (\text{B-14})$$

onde aqui foi feita a mudança de variável  $y = x_1 (x_2^2 + \dots + x_N^2)^{\ell/2\beta}$ . Usando que  $\beta > 1$ , temos que existe uma constante positiva  $C_1$  tal que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + y^{2\beta}} dy < C_1.$$

Usando essa informação em (B-14), temos da fórmula da coarea que

$$\begin{aligned} \int_{|\tilde{x}| > A} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{V(x)} dx_1 \right) d\tilde{x} &\leq C_1 \int_{|\tilde{x}| > A} \frac{1}{(x_2^2 + \dots + x_N^2)^{\ell/2\beta}} d\tilde{x} \\ &\leq C_2 \int_A^{+\infty} \frac{1}{(r^2)^{\ell/2\beta}} r^{N-2} dr = C_2 \int_A^{+\infty} r^{N-2-\ell/\beta} dr < \infty, \end{aligned} \quad (\text{B-15})$$

onde aqui foi usado que  $\ell > \beta(N-1)$ . Por fim, juntando (B-13) e (B-15) em (B-12), temos que  $[V(x)]^{-1}$  é integrável.  $\square$

O próximo resultado foi motivado pelo Lema 6.2 de [15].

**Lema B.1.** *Suponha que  $N \geq 3$ ,  $\alpha \in (0, N)$  e  $2\alpha < p < 2\alpha^*$  se verificam. Então existe uma constante  $C > 0$  tal que*

$$\left| \frac{(I_\alpha * |u|^p)(x)}{I_\alpha(x)} - \|u\|_p^p \right| \leq C \|u\|_p^p, \quad u \in X.$$

*Demonstração.* Inicialmente, observamos que existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\left| \frac{1}{|x-y|^{N-\alpha}} - \frac{1}{|x|^{N-\alpha}} \right| \leq \frac{C}{|x|^{N-\alpha}}$$

vale para todos  $x, y \in \mathbb{R}^N$ , veja Lema 6.2 de [15]. Como consequência, obtemos

$$|(I_\alpha * |u|^p)(x) - I_\alpha(x) \|u\|_p^p| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \left| \frac{1}{|x-y|^{N-\alpha}} - \frac{1}{|x|^{N-\alpha}} \right| dx \leq C \frac{\|u\|_p^p}{|x|^{N-\alpha}}, \quad u \in X.$$

Isto conclui a prova. □

Neste ponto, demonstraremos um resultado de regularidade para nosso problema principal. Mais especificamente, consideramos o seguinte resultado:

**Teorema B.1.** *Suponha que  $V \in L_{loc}^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N)$  e  $1 < q \leq 2^*$  e  $p \in (2_\alpha, 2_\alpha^*)$ . Assuma que  $u \in X$  é uma solução fraca do Problema 0-1. Então  $u \in W_{loc}^{2,r}(\mathbb{R}^N) \cap C_{loc}^{1,\beta}(\mathbb{R}^N)$  para todo  $r \in (1, \infty)$  e para algum  $\beta \in (0, 1)$ .*

*Demonstração.* Seja  $u \in X$  uma solução fraca do Problema 0-1, isto é, temos que

$$-\Delta u + V(x)u = (I_\alpha * |u|^p) |u|^{p-2}u + \lambda |u|^{q-2}u, \quad \text{em } \mathbb{R}^N.$$

Aqui definimos

$$a(x) = \frac{g(x, u)}{1 + |u|}.$$

onde  $g(x, u) = (I_\alpha * |u|^p) |u|^{p-2}u + \lambda |u|^{q-2}u - V(x)u$ ,  $x \in \mathbb{R}^N$ . Agora reescrevemos o problema não local dado acima como segue

$$-\Delta u = a(x)(1 + |u|), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Não é difícil ver que

$$\lambda |u|^{q-1} \leq \begin{cases} \lambda(1 + |u|), & \text{para } q \in (1, 2), \\ \lambda |u|^{q-2}(1 + |u|), & \text{para } q \in [2, 2^*], \end{cases} \quad (\text{B-16})$$

$$V(x)|u| \leq V(x)(1 + |u|),$$

$$(I_\alpha * |u|^p) |u|^{p-1} \leq (I_\alpha * |u|^p) |u|^{p-2}(1 + |u|).$$

Como consequência, também vemos que

$$|a(x)|^{\frac{N}{2}} \leq \begin{cases} [(I_\alpha * |u|^p)|u|^{p-2} + \lambda + V(x)]^{\frac{N}{2}}, & \text{para } q \in (1, 2), \\ [(I_\alpha * |u|^p)|u|^{p-2} + \lambda|u|^{q-2} + V(x)]^{\frac{N}{2}}, & \text{para } q \in [2, 2^*]. \end{cases} \quad (\text{B-17})$$

Agora dividiremos a prova em três casos. No primeiro, assumimos que  $1 \leq (q-2)N/2$ . Observe que  $(q-2)\frac{N}{2} \leq 2^*$  onde  $2^* = 2N/(N-2)$  para cada  $N \geq 3$ . Como consequência, usando a imersão de Sobolev  $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L_{loc}^r(\mathbb{R}^N)$ ,  $r \in [1, 2^*]$ ,  $2^* = \frac{2N}{N-2}$ , deduzimos que  $\lambda|u|^{q-2} \in L_{loc}^{N/2}(\mathbb{R}^N)$ . No segundo caso, assumimos que  $0 \leq (q-2)\frac{N}{2} < 1$ . Para este caso, observamos que

$$\lambda|u|^{(q-2)N/2} \leq \begin{cases} \lambda, & \text{para } |u| \leq 1, \\ \lambda|u|, & \text{para } |u| \geq 1 \end{cases} \quad (\text{B-18})$$

Portanto, usando a última estimativa, garantimos que  $\lambda|u|^{q-2} \in L_{loc}^{N/2}(\mathbb{R}^N)$  para cada  $q$  satisfazendo  $0 \leq (q-2)\frac{N}{2} < 1$ . Resta considerar o terceiro caso, onde  $1 < q < 2$  é verdadeiro. Para este caso, usando (B-16), mencionamos que  $\lambda|u|^{q-1} \leq \lambda(1+|u|)$ . Além disso, afirmamos que  $(I_\alpha * |u|^p)|u|^{p-2} \in L_{loc}^{N/2}(\mathbb{R}^N)$  é válido. Assumindo a afirmação dada acima, inferimos que  $a \in L_{loc}^{N/2}(\mathbb{R}^N)$ . Isso pode ser feito usando a afirmação juntamente com as Equações (B-17) e (B-18). Em vista do Lema B3 de [24], concluímos que  $u \in W_{loc}^{2,r}(\mathbb{R}^N)$  é verdadeiro para qualquer  $r > 1$ . Aqui foi usado o Teorema de Calderon-Zygmund, veja o Teorema 9.9 de [7]. Agora, usando a imersão de Sobolev, inferimos que  $u \in C_{loc}^{1,\beta}(\mathbb{R}^N)$  para algum  $\beta \in (0, 1)$ . Resta provar que

$$(I_\alpha * |u|^p)|u|^{p-2} \in L_{loc}^{N/2}(\mathbb{R}^N).$$

Para provar isso, definimos  $b : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$b(x) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^N} (I_\alpha * |u|^p)|u|^{p-2} dx, & \text{para } u \neq 0, \\ 0 & \text{para } u = 0. \end{cases}$$

Portanto, usando a desigualdade de Hölder, para qualquer  $B_R(0) \subset \mathbb{R}^N$ ,  $R > 0$ , obtemos

$$\int_{B_R(0)} |b(x)|^{\frac{N}{2}} dx \leq \left( \int_{B_R(0)} (I_\alpha * |u|^p)^{\frac{N}{2}r'} dx \right)^{\frac{1}{r'}} \|u\|_{2^*}^{\frac{(p-2)N}{2 \cdot 2^*}}$$

onde  $r = \frac{4}{(N-2)(p-2)} > 1$ . A última estimativa pode ser reescrita na seguinte forma

$$\int_{B_R(0)} |b(x)|^{\frac{N}{2}} dx \leq \left( \int_{B_R(0)} (I_\alpha * |u|^p)^{\frac{2^*}{2^*-p}} dx \right)^{\frac{1}{r}} \|u\|_{2^*}^{\frac{2^*}{2^*-p}}.$$

Para nosso propósito, é suficiente garantir que

$$\int_{B_R(0)} ((I_\alpha * |u|^p))^{\frac{2^*}{2^*-p}} dx < +\infty$$

Em vista do Lema 2.1, a última integral é finita desde que  $|u|^p \in L^s(\mathbb{R}^N)$  onde  $s \in (1, N/\alpha)$  satisfaz a seguinte condição  $\frac{Ns}{N-\alpha s} = \frac{2^*}{2^*-p}$ . A última identidade pode ser escrita na seguinte forma  $s = \frac{2N}{4+2\alpha-(N-2)(p-2)}$ . Sob estas condições, inferimos que

$$\int_{B_R(0)} |u|^{ps} dx = \int_{B_R(0)} |u|^{\frac{2Np}{4+2\alpha-(N-2)(p-2)}} dx < +\infty.$$

Aqui também usamos o fato de que

$$1 \leq \frac{2Np}{4+2\alpha-(N-2)(p-2)} \leq 2^* = \frac{2N}{N-2}.$$

As últimas estimativas são verificadas devido ao fato de que  $2\alpha < p < 2_\alpha^* < 2^*$ . Isto conclui a prova.  $\square$