Universidade Federal de Goiás (UFG)
Instituto de Matemática e Estatística (IME)
Programa de Pós Graduação em Matemática

Maria Eduarda Pereira Costa

Boa colocação do problema de Cauchy para a equação de Benjamin-Ono-Zakharov-Kuznetsov (BO-ZK)

Goiânia
2025

UFG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

[X] Dissertação [ ] Tese [ ] Outro*:______________

*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

Exemplos: Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

2. Nome completo do autor

Maria Eduarda Pereira Costa

3. Título do trabalho

Boa colocação do problema de Cauchy para a equação de Benjamin-Ono-Zakharov-Kuznetsov (BO-ZK)

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:
a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.
O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.

Documento assinado eletronicamente por **Alysson Tobias Ribeiro Da Cunha**, **Professor do Magistério Superior**, em 11/12/2025, às 15:21, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020 .

Documento assinado eletronicamente por **Maria Eduarda Pereira Costa**, **Discente**, em 11/12/2025, às 15:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **5851910** e o código CRC **C2DDA4C0**.

Referência: Processo nº 23070.059764/2025-40 SEI nº 5851910

MARIA EDUARDA PEREIRA COSTA

Boa colocação do problema de Cauchy para a equação de Benjamin-Ono-Zakharov-Kuznetsov (BO-ZK)

Dissertação apresentada ao Programa de Pós–Graduação em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística (IME) da Universidade Federal de Goiás (UFG), como requisito parcial para obtenção do título de Mestra em Matemática.

Área de concentração: Análise

Orientador: Professor Doutor Alysson Tobias Ribeiro da Cunha

Goiânia
2025

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Costa, Maria Eduarda Pereira
Boa colocação do problema de Cauchy para a equação de Benjamin Ono-Zakharov-Kuznetsov (BO-ZK) [manuscrito] / Maria Eduarda Pereira Costa. - 2025.
68 f.

Orientador: Prof. Dr. Alysson Tobias Ribeiro da Cunha.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em Matemática, Goiânia, 2025.
Bibliografia.

1. Equação BO-ZK. 2. Problema de Cauchy. 3. Boa colocação local. 4. Persistência. I. Cunha, Alysson Tobias Ribeiro da, orient. II. Título.

CDU 517

UFG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº **15** da sessão de Defesa de Dissertação de **Maria Eduarda Pereira Costa**, que confere o título de Mestra em **Matemática**, na área de concentração em **Análise**.

Ao **primeiro dia do mês de dezembro do ano de dois mil e vinte e cinco**, a partir da(s) **16h00**, de forma hibrida: na Sala Geraldo Ávila e Google Meet, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada **"Boa colocação do problema de Cauchy para a equação de Benjamin-Ono-Zakharov-Kuznetsov (BO-ZK)"**. Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor **Alysson Tobias Ribeiro da Cunha - IME/UFG** com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor **Edcarlos Domingos da Silva - IME/UFG**, membro titular interno; Professor Doutor **Ademir Pastor Ferreira - IMECC/UNICAMP**, membro titular externo. Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido a candidata **aprovada** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor **Alysson Tobias Ribeiro da Cunha**, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, ao **primeiro dia do mês de dezembro do ano de dois mil e vinte e cinco**.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Alysson Tobias Ribeiro Da Cunha**, **Professor do Magistério Superior**, em 01/12/2025, às 21:24, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020 .

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Ademir Pastor Ferreira**, **Usuário Externo**, em 02/12/2025, às 09:11, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Edcarlos Domingos Da Silva**, **Professor do Magistério Superior**, em 02/12/2025, às 15:53, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020 .

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **5794888** e o código CRC **84F8EAAA**.

Referência: Processo nº 23070.059764/2025-40 | SEI nº 5794888

Maria Eduarda Pereira Costa

Graduou-se em Licenciatura em Matemática (2023) pelo IFG - Instituto Federal de Goiás. Durante sua graduação, foi monitora de Cálculo Diferencial e Integral I e II. Anteriormente, completou o Ensino Médio Integrado ao curso técnico de Nutrição e Dietética (2018), também pelo IFG. Durante o ensino médio, foi monitora da disciplina de Matemática.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Domingos Salvio da Costa e Deuzelia Pereira de Carvalho Costa, pelo apoio desde o princípio.

À minha irmã, Ana Clara Pereira Costa, por me ouvir e compreender.

Ao meu namorado, Matheus Costa Ferraz, pelo incentivo, pela escuta e pelo acolhimento.

Ao meu orientador, Alysson Tobias Ribeiro da Cunha, pela orientação e paciência durante todo o processo da dissertação.

Aos meus colegas e amigos, Thayllìne Rocha Madureira e Douglas Matheus Nunes Bonfim, pela ajuda nas disciplinas e pela companhia essencial para que o mestrado não fosse uma fase tão difícil.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Costa, Maria Eduarda Pereira. **Boa colocação do problema de Cauchy para a equação de Benjamin-Ono-Zakharov-Kuznetsov (BO-ZK)**. Goiânia, 2025. 67p. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós Graduação em Matemática, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Universidade Federal de Goiás (UFG).

Nesta dissertação, estudamos o problema de valor inicial associado à equação de Benjamin–Ono–Zakharov–Kuznetsov. Provamos a boa colocação local do PVI nos espaços de Sobolev usuais $H^s(\mathbb{R}^2)$, $s > 2$, e nos espaços anisotrópicos $H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$, $s_2 > 2$, $s_1 \geq s_2$. Também estudamos as propriedades de persistência da solução e a boa colocação local em espaços de Sobolev com peso

$$\mathcal{Z}_{s,r} = H^s(\mathbb{R}^2) \cap L^2((1 + x^2 + y^2)^r \, dxdy),$$

onde $s > 2$, $r \geq 0$, e $s \geq 2r$. Princípios de continuação única também são demonstrados, mostrando que nossas propriedades de persistência são *sharp*.

Palavras–chave

Equação BO-ZK, Problema de Cauchy, Boa colocação local, Persistência.

Abstract

Costa, Maria Eduarda Pereira. **Boa colocação do problema de Cauchy para a equação de Benjamin-Ono-Zakharov-Kuznetsov (BO-ZK)**. Goiânia, 2025. 67p. MSc. Dissertation. Programa de Pós Graduação em Matemática, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Universidade Federal de Goiás (UFG).

In this dissertation we study the initial value problem associated with the Benjamin-Ono-Zakharov-Kuznetsov equation. We prove the local well-posedness of the IVP in the usual Sobolev spaces $H^s(\mathbb{R}^2)$, $s > 2$, and in the anisotropic spaces $H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$, $s_2 > 2$, $s_1 \geq s_2$. We also investigate the persistence properties of the solution and the local well-posedness in weighted Sobolev spaces

$$\mathcal{Z}_{s,r} = H^s(\mathbb{R}^2) \cap L^2((1 + x^2 + y^2)^r\, dxdy),$$

where $s > 2$, $r \geq 0$, and $s \geq 2r$. Unique continuation principles are also proved, showing that our persistence properties are sharp.

Keywords

BO-ZK equation, Cauchy problem, Local well-posedness, Persistence.

Sumário

CAPÍTULO 1

Introdução

Equações Diferenciais Parciais (EDP) são utilizadas para modelar fenômenos naturais, físicos, químicos, biológicos, entre outros. O estudo de suas soluções é importante, pois, por meio dele, é possível compreender tais fenômenos.

Dentre as EDPs, temos as do tipo dispersivo, como a equação de Benjamin-Ono (BO), que descreve o comportamento de ondas internas unidimensionais em águas profundas, e é dada por

$$u_t + \mathcal{H}\partial_x^2 u + uu_x = 0,\ x, t \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

onde $\mathcal{H}$ denota a transformada de Hilbert

$$\mathcal{H}u(t,x) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{|y-x|\geq \epsilon} \frac{u(t,y)}{y-x}\, dy \text{ q.t.p.}$$

Na teoria das EDPs, é fundamental o conceito de boa colocação local. A definição desse conceito, entendida no sentido de Kato, é dada a seguir. Sejam X e Y espaços de Banach, e considere o problema de valor inicial (PVI):

$$\begin{cases} u_t = G(t, u(t)) \in X,\ t \in [0, \bar{T}], \\ u(0) = \phi \in Y, \end{cases} \tag{1-1}$$

onde $G : [0, \bar{T}] \times Y \to X$ é contínua. Dizemos que (1-1) é localmente bem colocado se as seguintes condições forem satisfeitas:

1) Existência de solução: Existe $T \in [0, \bar{T}]$ e uma aplicação $u \in C([0, T]; Y)$ tal que $u(0) = \phi$ e
$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - G(t, u(t)) \right\|_X = 0,$$
onde as derivadas em $t = 0$ e $t = T$ são calculadas, respectivamente, pela direita e pela esquerda.
2) Unicidade: Existe no máximo uma solução de (1-1) em $C([0, T]; Y)$;

3) Dependência contínua: A aplicação $\phi \in Y \mapsto u \in C([0,T];Y)$ é contínua. Mais precisamente, dados $\phi \in Y$, $u(0) = \phi$, $u \in C([0,T];Y)$, $u_n(0) = \phi_n$ e as soluções correspondentes $u_n \in C([0,T_n];Y)$, se $\phi_n \to \phi$, então as u_n podem ser estendidas ao intervalo $[0,T]$ para n suficientemente grande e

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \|u_n(t) - u(t)\|_Y = 0.$$

Observe que, nesta definição, está implícita a propriedade de persistência da solução, isto é, se $\phi \in Y$, então $u(t) \in Y$ para todo $t \in [0,T]$. Diremos que (1-1) é globalmente bem colocado se 1)–3) forem satisfeitas para $T > 0$ arbitrário.

Este trabalho é baseado no artigo [4], que consiste em um estudo sobre o PVI para a equação de Benjamin–Ono–Zakharov–Kuznetsov (BO–ZK):

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{H}\partial_x^2 u + u_{xyy} + uu_x = 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ t > 0, \\ u(x,y,0) = \phi(x,y), \end{cases} \tag{1-2}$$

onde $u = u(x,y,t)$ é uma função de valores reais e $\mathcal{H}$ representa a transformada de Hilbert definida como

$$\mathcal{H}u(x,y,t) = \text{v.p.}\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{u(z,y,t)}{x-z}\,dz = \mathcal{F}^{-1}(-i\,\text{sgn}(\xi)\hat{u})(x,y,t).$$

Lembrando que v.p. denota o valor principal de Cauchy.

A equação BO–ZK foi introduzida em [15] e [18], tendo aplicações na descrição da eletromigração em nanocondutores finos depositados sobre um substrato dielétrico. Além disso, pode ser vista como uma generalização bidimensional natural da equação BO.

Pesquisas anteriores trazem resultados referentes ao problema (1-2). Entre elas, destacam-se aquelas que tratam das propriedades de continuação única, abordadas em [7], nas quais os autores mostraram que, se uma solução suficientemente suave possui suporte contido em um retângulo para todo t no intervalo de existência da solução, então ela deve anular-se identicamente.

O PVI (1-2) possui características semelhantes às da equação BO. De fato, seguindo as ideias de [20], os autores de [6] estabeleceram a má colocação de (1-2), no sentido de que a equação não é bem colocada nos espaços de Sobolev usuais (ou anisotrópicos), com base em um teorema do ponto fixo.

Agora, voltando aos resultados do presente texto, começamos com o seguinte.

Teorema 1.1 *Seja $s > 2$. Então, para $\phi \in H^s(\mathbb{R}^2)$, existem $T = T(\|\phi\|_{H^s})$ positivo e uma única solução $u \in C([0,T];H^s(\mathbb{R}^2))$ do PVI (1-2). Além disso, a aplicação $\phi \mapsto u(t)$*

é contínua na norma H^s, e existe uma função $\rho \in C([0,T];\mathbb{R})$ *tal que* $\|u(t)\|_{H^s}^2 \leq \rho(t)$, $t \in [0,T]$.

Com respeito aos espaços de Sobolev anisotrópicos, temos o seguinte.

Teorema 1.2 *Seja* $\phi \in H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$*, onde* $s_2 > 2$ *e* $s_1 \geq s_2$*. Então existem* $T = T(\|\phi\|_{s_1,s_2})$ *e uma única solução* $u \in C([0,T];H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2))$ *do PVI* (1-2)*. Além disso, a aplicação* $\phi \mapsto u(t)$ *é contínua na norma* H^{s_1,s_2}*, e existe uma função* $\rho \in C([0,T];\mathbb{R})$ *tal que* $\|u(t)\|_{s_1,s_2}^2 \leq \rho(t)$, $t \in [0,T]$.

Os Teoremas 1.1 e 1.2 são provados utilizando o método da regularização parabólica. Como as suas demonstrações são bastante semelhantes, apresentaremos apenas a prova do Teorema 1.2.

O nosso foco principal é provar propriedades de persistência e boa colocação local em espaços de Sobolev com pesos. Abordaremos a seguinte questão: suponha que tenhamos um dado inicial no espaço de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^2)$, com algum decaimento adicional no infinito; será que a solução herda o mesmo decaimento?

Para a BO, esta questão foi abordada, por exemplo, em [9, 8, 12, 13], e a resposta produz resultados bastante interessantes. Em particular, não existem soluções não triviais com decaimento forte.

Nosso primeiro resultado nessa direção diz respeito à persistência e à boa colocação local nos espaços de Sobolev com peso $H^s(w^2)$ (veja a definição no Capítulo 2).

Teorema 1.3 *Seja w um peso suave, cujas derivadas de primeira a terceira ordem são limitadas. Então, o PVI* (1-2) *é localmente bem colocado em* $H^s(w^2)$, $s > 2$.

Para provar o Teorema 1.3, seguimos os argumentos de [13] e [19], com algumas adaptações para o nosso problema.

Envolvendo o estudo do problema de Cauchy em espaços de Sobolev com pesos fracionários, temos o seguinte resultado.

Teorema 1.4 *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) *Se* $s > 2$ *e* $r \in [0,1]$*, então o PVI* (1-2) *é localmente bem colocado em* $\mathcal{Z}_{s,r}$*. Além disso, se* $r \in (1,5/2)$ *e* $s \geq 2r$*, então o PVI* (1-2) *é localmente bem colocado em* $\mathcal{Z}_{s,r}$.

(ii) *Se* $r \in [5/2,7/2)$ *e* $s \geq 2r$*, então o PVI* (1-2) *é localmente bem colocado em* $\dot{\mathcal{Z}}_{s,r}$.

O Teorema 1.4 é inspirado no resultado obtido por Fonseca e Ponce [9] para a equação BO (veja também [8, 10, 12, 13]). Aqui, estendemos suas ideias para o caso bidimensional a fim de estabelecer nossos resultados. Obviamente, como (1-2) inclui uma derivada de terceira ordem e os pesos em questão são bidimensionais, esperam-se problemas adicionais em comparação com a equação BO. No entanto, com estimativas adequadas, somos capazes de lidar com essas dificuldades.

Note que o Teorema 1.4 estabelece um equilíbrio entre a regularidade e a taxa de decaimento do dado inicial. Em particular, a condição $s \geq 2r$ é necessária quando $r > 1$. De fato, vejamos essa afirmação para pesos inteiros. Seja $\phi \in L_1^2(\mathbb{R}^2)$ e suponha que $u(t) \in L_1^2(\mathbb{R}^2)$, para todo $t \in [0, T]$. Então,

$$\begin{aligned}\partial_\xi \widehat{u} &= \partial_\xi e^{it(|\xi|\xi+\xi\eta^2)}\widehat{\phi} + e^{it(|\xi|\xi+\xi\eta^2)}\partial_\xi\widehat{\phi}\\ &= it(2|\xi|+\eta^2)e^{it(|\xi|\xi+\xi\eta^2)}\widehat{\phi} + e^{it(|\xi|\xi+\xi\eta^2)}\partial_\xi\widehat{\phi},\end{aligned}$$

pelo membro direito da última igualdade devemos ter

$$\xi\widehat{\phi} \in L^2 \quad \text{e} \quad \eta^2\widehat{\phi} \in L^2.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\partial_\eta \widehat{u} &= \partial_\eta e^{it(|\xi|\xi+\xi\eta^2)}\widehat{\phi} + e^{it(|\xi|\xi+\xi\eta^2)}\partial_\eta\widehat{\phi}\\ &= 2it\xi\eta e^{it(|\xi|\xi+\xi\eta^2)}\widehat{\phi} + e^{it(|\xi|\xi+\xi\eta^2)}\partial_\eta\widehat{\phi},\end{aligned}$$

portanto

$$\xi\eta\widehat{\phi} \in L^2.$$

Então, o dado inicial ϕ deve pertencer ao espaço

$$\widetilde{H}^2 = \{\psi \in L^2 : \partial_x\psi,\ \partial_y^2\psi,\ \partial_x\partial_y\psi \in L^2\}.$$

Em particular, se $\phi \in H^2(\mathbb{R}^2)$, então ϕ pertence a este espaço. Se $\phi \in L_2^2$, observe que

$$\partial_\xi^2\widehat{u} = \Big([2it\,\mathrm{sgn}(\xi) - t^2(2|\xi|+\eta^2)^2]\widehat{\phi} + it(2|\xi|+\eta^2)\partial_\xi\widehat{\phi} + \partial_\xi\widehat{\phi}\Big)e^{it(|\xi|\xi+\xi\eta^2)}$$

e

$$\partial_\eta^2\widehat{u} = \Big([2it\xi + 2i(t\xi\eta)^2]\widehat{\phi} + 2\eta ti\xi\partial_\eta\widehat{\phi} + \partial_\eta\widehat{\phi}\Big)e^{it(|\xi|\xi+\xi\eta^2)}.$$

Para garantirmos a persistência da solução u em L_2^2, o dado inicial ϕ deve pertencer ao espaço

$$\widetilde{H}^4 = \Big\{\psi \in L^2(\mathbb{R}^2) : \partial_x\psi,\ \partial_x^2\psi,\ \partial_y^4\psi,\ \partial_x(x\psi),\ x\partial_y^2\psi,\ \partial_y^2\partial_y^2(y\psi) \in L^2(\mathbb{R}^2)\Big\}.$$

Observe que $\widetilde{H}^4 \supset H^4$. Isto nos leva a buscar soluções da BO–ZK nos espaços da forma

$\mathcal{Z}_{s,r}$, onde $s \geq 2r$.

O Teorema 1.4 é *sharp*, como evidenciam os princípios de continuação única a seguir.

Teorema 1.5 *Seja* $u \in C([0,T];\mathcal{Z}_{4,2})$ *uma solução do PVI* (1-2). *Se existem dois tempos distintos* $t_1, t_2 \in [0,T]$ *tais que* $u(t_j) \in \mathcal{Z}_{5,5/2}$, $j = 1,2$, *então* $\hat{u}(0,\eta,t) = 0$ *para todo* $\eta \in \mathbb{R}$ *e* $t \in [0,T]$.

Teorema 1.6 *Seja* $u \in C([0,T];\mathcal{Z}_{4,2})$ *uma solução do PVI* (1-2). *Se existem três tempos distintos* $t_1, t_2, t_3 \in [0,T]$ *tais que* $u(t_j) \in \mathcal{Z}_{7,7/2}$, $j = 1,2,3$, *então* $u(x,y,t) = 0$ *para todo* $x, y \in \mathbb{R}$ *e* $t \in [0,T]$.

A partir dos Teoremas 1.5 e 1.6, temos duas conclusões importantes. A primeira é que a condição $\widehat{\phi}(0,\eta) = 0$, para todo $\eta \in \mathbb{R}$, é necessária para obter a propriedade de persistência em $\mathcal{Z}_{s,5/2}$, $s \geq 5$. Em particular, isso mostra que a parte (i) do Teorema 1.4 é *sharp*. A segunda é que, se um dado inicial ϕ tem um decaimento mais forte do que $|(x,y)|^{7/2}$, então a propriedade de persistência não é garantida, a menos que ele se anule identicamente. Isso mostra que a parte (ii) do Teorema 1.4 também é *sharp*. Uma conclusão semelhante para a equação BO foi obtida em [9].

No Capítulo 2, introduziremos as notações utilizadas ao longo deste trabalho e apresentaremos alguns resultados preliminares que serão necessários para provar nossos resultados. Usando o método da regularização parabólica, provaremos no Capítulo 3 a boa colocação local de (1-2) em espaços de Sobolev. Os Capítulos 4 e 5 são dedicados a demonstrar os Teoremas 1.3 e 1.4, respectivamente. Finalmente, no Capítulo 6 provamos os princípios de continuação única, isto é, os Teoremas 1.5 e 1.6.

CAPÍTULO 2

Preliminares

2.1 Notações e resultados preliminares

Primeiramente, introduziremos algumas notações. Para as constantes, usaremos c; também utilizaremos subscritos para indicar dependência de parâmetros, se necessário. Ao usarmos $[A, B]$, referimo-nos ao comutador dos operadores A e B. Por $\|\cdot\|_p$ denotaremos a norma usual L^p, e por $\|\cdot\|$ a norma L^2, que será frequentemente utilizada. O produto escalar em L^2 será representado por $(\cdot,\cdot)$. Note que, em particular, se $f = f(x, y)$ então $\|f\| = \|\|f(x, y)\|_{L^2_x}\|_{L^2_y}$, onde $\|\cdot\|_{L^2_z}$ é a norma L^2_z com respeito à variável z. Além disso, $\int f$ denotará usualmente a integral em $\mathbb{R}^2$; caso contrário, será especificado.

Como é usual, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ denotará o espaço de Schwartz, que é o conjunto de todas as funções $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tais que

$$\|f\|_{\alpha\beta} = \sup|x^\alpha\partial^\beta f(x)| < \infty,$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^2$. Além disso, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ denotará o conjunto de todas as distribuições temperadas, que por definição são funcionais lineares contínuos em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

A transformada de Fourier é definida como

$$\mathcal{F}f(\xi,\eta) = \hat{f}(\xi,\eta) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(x\xi+y\eta)}f(x, y)\,dx\,dy.$$

Dado $s \in \mathbb{R}$, o espaço de Sobolev $H^s := H^s(\mathbb{R}^2)$ é a coleção de todas as funções $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ tais que $(1+\xi^2+\eta^2)^{\frac{s}{2}}\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^2, d\xi d\eta)$, isto é, $\hat{f}$ é uma função mensurável e

$$\|f\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}^2}(1+\xi^2+\eta^2)^s|\hat{f}(\xi,\eta)|^2 d\xi d\eta < \infty.$$

Dado $z \in \mathbb{C}$, definimos os operadores J_x^z, J_y^z, e J^z via suas transformadas de Fourier por

$$\widehat{J_x^z f}(\xi,\eta) = (1+\xi^2)^{z/2}\hat{f}(\xi,\eta);$$

$$\widehat{J_y^z f}(\xi,\eta) = (1+\eta^2)^{z/2}\hat{f}(\xi,\eta);$$

$$\widehat{J^z f}(\xi, \eta) = (1 + \xi^2 + \eta^2)^{z/2} \hat{f}(\xi, \eta).$$

Dados $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, o espaço de Sobolev anisotrópico $H^{s_1,s_2} = H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$ é o conjunto de todas as distribuições temperadas f tais que

$$\|f\|^2_{s_1,s_2} = \|f\|^2 + \|J_x^{s_1} f\|^2 + \|J_y^{s_2}\|^2 < \infty.$$

O produto escalar em H^{s_1,s_2} será denotado por $(\cdot,\cdot)_{s_1,s_2}$.

Dados $s \in \mathbb{R}$ e $w : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$, definimos o espaço de Sobolev com peso por

$$H^s(w^2) := H^s(\mathbb{R}^2) \cap L^2(w^2 dx\, dy).$$

Em particular, para $r > 0$, denotamos

$$\mathcal{Z}_{s,r} := H^s(\mathbb{R}^2) \cap L^2_r,$$

onde $L^2_r := L^2(\langle x, y\rangle^{2r}\, dx\, dy)$ com $\langle x, y\rangle := (1 + x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$. A norma em $\mathcal{Z}_{s,r}$ é dada por $\|\cdot\|^2_{\mathcal{Z}_{s,r}} = \|\cdot\|^2_{H^s} + \|.\|^2_{L^2_r}$. Além disso, o subespaço $\dot{\mathcal{Z}}_{s,r}$ de $\mathcal{Z}_{s,r}$ é definido como

$$\dot{\mathcal{Z}}_{s,r} := \{f \in \mathcal{Z}_{s,r} \mid \hat{f}(0, \eta) = 0, \eta \in \mathbb{R}\}.$$

Suponha $\phi \in \mathcal{Z}_{s,r}$ e seja u a solução local suficientemente regular de (1-2). Pela regularidade, temos que u se anula em $-\infty$ e ∞, e, portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\partial_t \int_{\mathbb{R}} u(x, y, t)dx &= \int_{\mathbb{R}} u_t(x, y, t)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} -(\mathcal{H}\partial_x^2 u + u_{xyy} + uu_x)dx \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}\partial_x^2 u dx - \int_{-\infty}^{\infty} u_{xyy}\, dx - \int_{-\infty}^{\infty} uu_x\, dx \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} \partial_x^2 \mathcal{H} u dx - u_{yy}|_{-\infty}^{\infty} - \left.\frac{u^2}{2}\right|_{-\infty}^{\infty} \\
&= -\partial_x \mathcal{H} u|_{-\infty}^{\infty} - u_{yy}|_{-\infty}^{\infty} - \left.\frac{u^2}{2}\right|_{-\infty}^{\infty} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo, $\int_{\mathbb{R}} u(x, y, t)dx$ é constante em relação a t, ou seja, $\int_{\mathbb{R}} u(x, y, t)dx = c(y)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$. Pela condição inicial de (1-2),

$$\int_{\mathbb{R}} u(x, y, 0)dx = \int_{\mathbb{R}} \phi(x, y)dx \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \phi(x, y)dx = c(y),$$

e, portanto, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,y,t)dx = \int_{\mathbb{R}} \phi(x,y)dx, \quad y \in \mathbb{R}, \tag{2-1}$$

desde que a solução exista.

Note que isto implica que

$$\hat{u}(0,\eta,t) = \hat{\phi}(0,\eta), \quad \eta \in \mathbb{R}, \tag{2-2}$$

para todo t em que a solução existe. De fato,

$$\begin{aligned}
\hat{u}(0,\eta,t) &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(0x+\eta y)} u(x,y,t)dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-i(0x+\eta y)} \int_{\mathbb{R}} u(x,y,t)dx \right) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-i(0x+\eta y)} \int_{\mathbb{R}} \phi(x,y)dx \right) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(0x+\eta y)} \phi(x,y)dxdy \\
&= \widehat{\phi}(0,\eta).
\end{aligned}$$

Em particular, se $\phi \in \dot{\mathcal{Z}}_{s,r}$, então $\hat{u}(0,\eta,t) = 0$, para todo $\eta \in \mathbb{R}$ e t em que a solução existe.

Seja $N \in \mathbb{Z}^+$. Definimos uma função $\beta_N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\beta_N(x) := \begin{cases} \langle x \rangle \ se \ |x| \leq N, \\ 2N \ se \ |x| \geq 3N, \end{cases} \tag{2-3}$$

onde $\langle x \rangle = (1+x^2)^{\frac{1}{2}}$. Também assumimos que β_N é suave, simétrica e não decrescente em $|x|$ com $\beta'_N(x) \leq 1$, para qualquer $x \geq 0$, e que existe uma constante c, independente de N, tal que $|\beta''_N(x)| \leq c\partial_x^2 \langle x \rangle$ (veja mais em [9]). Agora podemos definir os pesos truncados

$$w_N(x,y) := \beta_N(r), \tag{2-4}$$

onde $\langle r \rangle = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$.

A seguir, apresentaremos alguns resultados que serão úteis nas demonstrações dos próximos capítulos.

Definição 2.1 *Dizemos que uma função não-negativa $w \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ satisfaz a condição A_p, com $1 < p < \infty$, se*

$$\sup_{Q \ intervalo} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w^{1-p'} \right)^{p-1} = c(w) < \infty, \tag{2-5}$$

onde $1/p + 1/p' = 1$.

Como, posteriormente, trataremos de espaços com peso, precisamos lidar com a transformada de Hilbert nesse tipo de espaço. Para tanto, temos o seguinte teorema, cuja demonstração não será apresentada aqui devido à sua extensão.

Teorema 2.2 *A condição (2-5) é necessária e suficiente para a limitação da transformada de Hilbert $\mathcal{H}$ em $L^p(w(x)dx)$, isto é,*

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{H}f|^p w(x)dx\right)^{1/p} \leq c^* \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f|^p w(x)dx\right)^{1/p}. \tag{2-6}$$

Prova. Ver [11]. □

Observação 2.3 *Note que $|x|^\alpha$ satisfaz a condição A_p para $p = 2$ se, e somente se, $\alpha \in (-1, 1)$. De fato, suponha $Q = (a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$ e $p = 2$ em (2-5). Assim, $p' = 2$. Temos que*

$$\int_a^b |x|^\alpha dx = \left.\frac{sgn(x)|x|^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_a^b = \frac{sgn(b)|b|^{\alpha+1} - sgn(a)|a|^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

e

$$\int_a^b |x|^{-\alpha} dx = \left.\frac{sgn(x)|x|^{-\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_a^b = \frac{sgn(b)|b|^{-\alpha+1} - sgn(a)|a|^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}.$$

Então,

$$\sup_{(a,b)}\left(\frac{1}{(b-a)}\int_a^b |x|^\alpha\right)\left(\frac{1}{(b-a)}\int_a^b |x|^{-\alpha}\right) = \sup_{(a,b)}\left(\frac{|b|^2 - ab(|b/a|^\alpha + |a/b|^\alpha) + |a|^2}{(b-a)^2(-\alpha^2+1)}\right).$$

Escreva $t = \dfrac{|b|}{|a|} > 0$ e $s = sgn(ab)$. Colocando $|a|^2$ em evidência, temos que a expressão a qual o supremo está sendo calculado pode ser escrita como

$$F_\alpha(t, s) = \frac{t^2 - st(t^\alpha + t^{-\alpha}) + 1}{(ts-1)^2(1-\alpha^2)}.$$

Observe que:

- *Se $|\alpha| \geq 1$, então para $(a, b) = (0, b)$ temos que $\int_0^b |x|^{-\alpha}$ diverge enquanto $\int_0^b |x|^\alpha$ converge. Isto é, $c(|x|^\alpha)$ em (2-5) não é finita;*
- *Se $|\alpha| < 1$, então $F_\alpha(t, s)$ é uma função limitada.*

Logo, $c(|x|^\alpha)$ em (2-5) é finito se, e só se, $\alpha \in (-1, 1)$. Em geral, $|x|^\alpha$ satisfaz a condição A_p se, e só se, $\alpha \in (-1, p-1)$. Entretanto, para realizarmos as demonstrações de nossos resultados nos interessa apenas o caso $p = 2$.

Os três resultados a seguir serão amplamente utilizados na demonstração do Teorema 1.4.

Teorema 2.4 *Para $p \in [2,\infty)$, a desigualdade (2-6) é válida com $c^* \leq c(p)c(w)$, onde $c(p)$ depende apenas de p e $c(w)$ é como em (2-5). Além disso, para $p = 2$, a estimativa é sharp.*

Prova. Ver [16]. □

O teorema a seguir é uma generalização da estimativa do comutador de Calderón [3], com aplicações a diversos modelos dispersivos. A demonstração pode ser encontrada em [5].

Teorema 2.5 *Para quaisquer $p \in (1,\infty)$ e $l,m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, $l+m \geq 1$, existe $c = c(p;l;m) > 0$ tal que*

$$\|\partial_x^l[\mathcal{H},a]\partial_x^m f\|_p \leq c\|\partial_x^{l+m}a\|_\infty \|f\|_p. \tag{2-7}$$

Lembremos que $L_s^p := (1-\Delta)^{-s/2}L^p(\mathbb{R}^n)$, onde Δ denota o Laplaciano. Esses espaços podem ser caracterizados pelo seguinte resultado, demonstrado em [22].

Teorema 2.6 *Sejam $b \in (0,1)$ e $2n/(n+2b) < p < \infty$. Então, $f \in L_b^p(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se,*

(a) $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$,

(b)

$$\mathcal{D}^b f(x) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{n+2b}}dy\right)^{1/2} \in L^p(\mathbb{R}^n),$$

com

$$\|f\|_{b,p} \equiv \|(1-\Delta)^{b/2}f\|_p = \|J^b f\|_p \simeq \|f\|_p + \|D^b f\|_p \simeq \|f\|_p + \|\mathcal{D}^b f\|_p, \tag{2-8}$$

onde, para $s \in \mathbb{R}$, $D^s f = (-\Delta)^{s/2}f = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^s\widehat{f})$, com $D^s = (\mathcal{H}\partial_x)^s$ se $n = 1$.

Pela parte (b) do teorema anterior, com $p = 2$ e $b \in (0,1)$, temos

$$\|\mathcal{D}^b(fg)\| \leq \|f\mathcal{D}^b g\| + \|g\mathcal{D}^b f\|. \tag{2-9}$$

De fato,

$$
\begin{aligned}
((\mathcal{D}^b(fg)(x))^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)g(x)-f(y)g(y)|^2}{|x-y|^{n+2b}}\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)g(x)-f(x)g(y)+f(x)g(y)-f(y)g(y)|^2}{|x-y|^{n+2b}}\,dy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|^2|g(x)-g(y)|^2+|g(y)|^2|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{n+2b}}\,dy \\
&= |f(x)|^2\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|g(x)-g(y)|^2}{|x-y|^{n+2b}}\,dy + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|g(y)|^2|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{n+2b}}\,dy \\
&= |f(x)|^2(\mathcal{D}^b(g)(x))^2 + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|g(y)|^2|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{n+2b}}\,dy.
\end{aligned}
$$

O que implica que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}((\mathcal{D}^b(fg)(x))^2\,dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^2(\mathcal{D}^b(g)(x))^2\,dx + \iint_{\mathbb{R}^n}\frac{|g(y)|^2|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{n+2b}}\,dydx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^2(\mathcal{D}^b(g)(x))^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^n}\left(|g(y)|^2\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{n+2b}}\,dx\right)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^2(\mathcal{D}^b(g)(x))^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^n}|g(y)|^2(\mathcal{D}^b(f)(y))^2\,dy.
\end{aligned}
$$

Então, lembrando que a norma em $L^2(\mathbb{R}^n)$ é dada por $\|f\| = \left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^2dx\right)^{1/2}$, temos

$$\|(\mathcal{D}^b(fg)\|^2 \leq \|f\mathcal{D}^b(g)\|^2 + \|g\mathcal{D}^b(f)\|^2.$$

Logo,

$$\|(\mathcal{D}^b(fg)\| \leq \left(\|f\mathcal{D}^b(g)\|^2 + \|g\mathcal{D}^b(f)\|^2\right)^{1/2} \leq \|f\mathcal{D}^b g\| + \|g\mathcal{D}^b f\|.$$

Observação 2.7 *O operador $\mathcal{D}^b$ introduzido no Teorema 2.6 é chamado de derivada de Stein de ordem b. A última equivalência em (2-8) indica que a norma em L_b^p pode ser calculada tanto usando D^b quanto $\mathcal{D}^b$. No entanto, utilizar $\mathcal{D}^b$ é mais vantajoso, pois permite realizar estimativas pontuais de forma direta, como na Proposição 2.8 (provada em [21]) e no Lema 2.9 a seguir.*

Proposição 2.8 *Seja $b \in (0,1)$. Para quaisquer $t > 0$ e $x \in \mathbb{R}$,*

$$\mathcal{D}^b(e^{-itx|x|}) \leq c(t^{b/2} + t^b|x|^b). \tag{2-10}$$

Lema 2.9 *Seja $b \in (0,1)$. Então, para todo $t > 0$ e $x, \eta \in \mathbb{R}$,*

$$\mathcal{D}^b(e^{it\eta^2 x}) \leq c(b)\eta^{2b}t^b, \tag{2-11}$$

onde $c(b)$ só depende de b.

Prova. Note que, pelo item (b) do Teorema 2.6,

$$(\mathcal{D}^b(e^{it\eta^2x}))^2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{|e^{it\eta^2x} - e^{it\eta^2y}|^2}{|x-y|^{1+2b}}\,dy,$$

e tomando $y := x - y$,

$$\begin{aligned}(\mathcal{D}^b(e^{it\eta^2x}))^2 &= \int_{\mathbb{R}} \frac{|e^{it\eta^2x} - e^{it\eta^2(x-y)}|^2}{|y|^{1+2b}}\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{|e^{it\eta^2x}|^2|1 - e^{-it\eta^2y}|^2}{|y|^{1+2b}}\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{|1 - e^{-it\eta^2y}|^2}{|y|^{1+2b}}\,dy.\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis $-t\eta^2 y := y$, então $dy = -\frac{dy}{t\eta^2}$ e obtemos

$$\begin{aligned}(\mathcal{D}^b(e^{it\eta^2x}))^2 &= \int_{\mathbb{R}} \frac{|1 - e^{iy}|^2}{|-\frac{y}{t\eta^2}|^{1+2b}}\frac{1}{-t\eta^2}\,dz \\ &= (\eta^2t)^{2b}\int_{\mathbb{R}} \frac{|1 - e^{iy}|^2}{|y|^{1+2b}}\,dy \\ &= (\eta^2t)^{2b}\left(\int_{-1}^{1} \frac{|1 - e^{iy}|^2}{|y|^{1+2b}}\,dy + \int_{|y|>1} \frac{|1 - e^{iy}|^2}{|y|^{1+2b}}\,dy\right).\end{aligned}$$

Da desigualdade $|1 - e^{iy}| \leq 2|y|$, para $y \in [-1, 1]$, temos

$$\int_{-1}^{1} \frac{|1 - e^{iy}|^2}{|y|^{1+2b}}\,dy \leq 4\int_{-1}^{1} \frac{1}{|y|^{2b-1}}\,dy = 8\int_{0}^{1} \frac{1}{y^{2b-1}}\,dy = \frac{4}{1-b}.$$

Ainda,

$$\int_{|y|>1} \frac{1}{|y|^{1+2b}}\,dy = 2\int_{1}^{\infty} \frac{1}{y^{1+2b}}\,dy = \frac{1}{b}.$$

Logo,

$$\mathcal{D}^b(e^{it\eta^2x}) \leq \left(\frac{4}{1-b} + \frac{1}{b}\right)^{1/2}(\eta^2t)^b.$$

Isso completa a demonstração do lema. □

A proposição que apresentamos a seguir será utilizada na prova dos Teoremas 1.5 e 1.6.

Proposição 2.10 *Seja $p \in (1,\infty)$. Se $f \in L^p(\mathbb{R})$ tal que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ para o qual $f(x_0^+), f(x_0^-)$ são definidos e $f(x_0^+) \neq f(x_0^-)$, então para qualquer $\delta > 0$, $\mathcal{D}^{1/p} f \notin L^p_{loc}(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e, consequentemente, $f \notin L^p_{1/p}(\mathbb{R})$.*

Prova. Esta prova é uma consequência do Teorema 2.6. Suponha $x_0 = 0$, e $|f(0^+) - f(0^-)| = 2A$. Para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, $x \in (-\delta, 0)$ e $y \in (0,\delta)$ temos que $|f(x) - f(y)| \geq A$. Então, para $x \in (-\delta, 0)$,

$$\mathcal{D}^b f(x) = \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{1+2b}} dy \right)^{1/2} \geq \left(\int_{0 \leq y \leq |x|} \frac{|f(x)-f(y)|^2}{|x-y|^{1+2b}} dy \right)^{1/2}$$
$$\geq \left(\int_{0 \leq y \leq |x|} \frac{2^{-1-2b} A^2}{|x|^{1+2b}} dy \right)^{1/2} \geq \frac{C}{|x|^b}.$$

Dessa desigualdade e para $b = 1/p$ obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{D}^{1/p} f(x)|^p \, dx \geq \int_{-\delta}^{0} |\mathcal{D}^{1/p} f(x)|^p \, dx \geq C \int_{-\delta}^{0} \frac{1}{|x|} dx,$$

e então $\mathcal{D}^{1/p} f \notin L^p_{loc}(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e, consequentemente, $f \notin L^p_{1/p}(\mathbb{R})$. □

Por fim, apresentamos alguns resultados que serão utilizados na demonstração dos Teoremas 1.4, 1.5 e 1.6.

Lema 2.11 *Sejam $a, b > 0$. Assuma que $J^a f = (1-\Delta)^{a/2} f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ e $\langle x,y \rangle^b f = (1 + x^2 + y^2)^{b/2} f \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Então, para qualquer $\alpha \in (0,1)$,*

$$\| J^{\alpha a}(\langle x,y \rangle^{(1-\alpha)b} f)\| \leq c \| \langle x,y \rangle^b f\|^{1-\alpha} \| J^a f\|^{\alpha}. \tag{2-12}$$

Além disso, a desigualdade (2-12) permanece válida ao substituir $\langle x,y \rangle$ por $w_N(x,y)$, com a constante c sendo independente de N.

Prova. A prova é semelhante à demonstração do Lema 1 em [9], com a única diferença de que aqui consideramos o espaço $\mathbb{R}^2$. □

Nas demonstrações em que utilizaremos o Lema 2.11, aplicaremos a desigualdade de Young com $p = 1/(1-\alpha)$ e $q = 1/\alpha$ na equação (2-12), obtendo

$$\| J^{\alpha a}(\langle x,y \rangle^{(1-\alpha)b} f)\| \leq c \| \langle x,y \rangle^b f\|^{1-\alpha} \| J^a f\|^{\alpha} \leq c(\| \langle x,y \rangle^b f\| + \| J^a f\|).$$

Proposição 2.12 *Se $f \in L^2(\mathbb{R})$ e $\phi \in H^2(\mathbb{R})$, então*

$$\|[D^{1/2}, \phi] f\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq c \|\phi\|_{H^2(\mathbb{R})} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{2-13}$$

Prova. Note que

$$
\begin{aligned}
(\widehat{[D^{1/2},\phi]f})(\xi) &= (D^{1/2}\widehat{(\phi f)-\phi}D^{1/2}f)(\xi) \\
&= \int (|\xi|^{1/2}-|\eta|^{1/2})\widehat{\phi}(\xi-\eta)\hat{f}(\eta)\,d\eta.
\end{aligned}
$$

Ainda, observe que, pela desigualdade triangular, temos $|\xi| = |\eta+\xi-\eta| \leq |\eta|+|\xi-\eta|$ e $|\eta| = |\xi+\eta-\xi| \leq |\xi|+|\xi-\eta|$. Então,

$$|\xi|^{1/2} \leq |\eta|^{1/2} + |\xi-\eta|^{1/2}$$

e

$$|\eta|^{1/2} \leq |\xi|^{1/2} + |\xi-\eta|^{1/2}.$$

Assim, vale que

$$|\xi|^{1/2} - |\eta|^{1/2} \leq |\xi-\eta|^{1/2}$$

e

$$|\eta|^{1/2} - |\xi|^{1/2} \leq |\xi-\eta|^{1/2}.$$

O que implica que $||\xi|^{1/2}-|\eta|^{1/2}| \leq |\xi-\eta|^{1/2}$.

Logo,

$$
\begin{aligned}
|(\widehat{[D^{1/2},\phi]}f)(\xi)| &\leq \int |\xi-\eta|^{1/2}|\widehat{\phi}(\xi-\eta)||\hat{f}(\eta)|\,d\eta \\
&= c(|\widehat{D^{1/2}\phi}| * |\hat{f}|)(\xi).
\end{aligned}
$$

Portanto, pela desigualdade de Young,

$$
\begin{aligned}
\|[D^{1/2},\phi]f\| &\leq c\||\widehat{D^{1/2}\phi}| * |\hat{f}|\| \\
&\leq c\|\widehat{D^{1/2}\phi}\|_{L^1}\|\hat{f}\| \\
&\leq c\|\phi\|_{H^2}\|f\|,
\end{aligned}
$$

onde usamos que

$$\|\widehat{D^{1/2}\phi}\|_{L^1} \leq \|D^{1/2}\phi\|_{H^1} \leq \|\phi\|_{H^2}.$$

Isso conclui a prova.

□

2.2 Resultados Clássicos

Nesta seção, enunciaremos alguns resultados clássicos da Teoria da Medida e de Equações Diferenciais Parciais (EDPs) que serão amplamente utilizados em nossas demonstrações. Tais resultados podem ser encontrados em [1] e [14], respectivamente.

Teorema. *(Desigualdade de Hölder - caso particular) Sejam* $f \in L^p$, $g \in L^\infty$, *com* $1 \leq p < \infty$. *Então,* $fg \in L^p$ *e*

$$\|fg\|_p \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_\infty.$$

Teorema. *(Desigualdade de Cauchy-Schwarz) Para quaisquer* $f, g \in L^2$, *temos*

$$\left| \int fg \, d\mu \right| \leq \|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Teorema. *(Desigualdade de Minkowski) Para* $f, g \in L^p$ *com* $1 \leq p \leq \infty$, *vale*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Teorema. *(Teorema da convergência monótona) Seja* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência crescente de funções mensuráveis não-negativas e*

$$f_n \to f.$$

Então,

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

Teorema. *(Desigualdade de Young) Sejam* $a, b \in \mathbb{R}$ *e* $\varepsilon > 0$. *Sejam* $p, q > 1$ *tais que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Então, existe uma constante* $C(\varepsilon) > 0$ *tal que*

$$ab \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q.$$

Teorema. *(Teorema de Plancherel) Sejam* $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ *com transformadas de Fourier* $\mathcal{F}f$, $\mathcal{F}g$. *Então,*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)} \, dx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}f(\xi)\overline{\mathcal{F}g(\xi)} \, d\xi.$$

Teorema. *(Teorema do ponto fixo de Banach) Seja* (X, d) *um espaço métrico completo e* $T : X \to X$ *uma contração, ou seja, existe* $0 < c < 1$ *tal que*

$$d(Tx, Ty) \leq c\, d(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Então, existe um único ponto fixo $x^* \in X$ *tal que* $Tx^* = x^*$.

Lema. *(Lema de Grönwall) Seja* $k \in L^1([a, b])$, *com* $k \geq 0$, *e* $f, g \in C([a, b])$ *tais que*

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t k(s) f(s)\, ds, \quad \text{para todo } t \in [a, b].$$

Então,

$$f(t) \leq g(t) + \int_a^t k(s) e^{\int_s^t k(r)\, dr} g(s)\, ds, \quad \text{para todo } t \in [a, b].$$

Em particular, se $g(t) = g$ *constante, então:*

$$f(t) \leq g \cdot e^{\int_a^t k(s)\, ds}, \quad \text{para todo } t \in [a, b].$$

CAPÍTULO 3

Boa colocação local em espaços de Sobolev

Neste capítulo, analisaremos a boa colocação local associada ao problema em espaços de Sobolev anisotrópicos. Limitamo-nos à demonstração do Teorema 1.2, uma vez que o Teorema 1.1 pode ser obtido por argumentos análogos. A apresentação que se segue inspira-se em [12].

Seja $\mu > 0$ e considere a seguinte perturbação da BO-ZK:

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{H}\partial_x^2 u + u_{xyy} + uu_x = \mu\Delta u, \ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ t > 0, \\ u(x,y,0) = \phi(x,y). \end{cases} \tag{3-1}$$

Consideremos, primeiramente, a parte linear do PVI

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{H}\partial_x^2 u + u_{xyy} - \mu\Delta u = 0, \ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ t > 0, \\ u(x,y,0) = \phi(x,y). \end{cases} \tag{3-2}$$

Calculando a transformada de Fourier em (3-2), obtemos

$$\begin{aligned} \widehat{u_t} + \widehat{\mathcal{H}\partial_x^2 u} + \widehat{u_{xyy}} - \widehat{\mu\Delta u} &= \widehat{u_t} - i\,\mathrm{sgn}(\xi)\widehat{\partial_x^2 u} + (i\eta)^2\widehat{u_x} - \mu(\widehat{\partial_x^2 u + \partial_y^2 u}) \\ &= \widehat{u_t} - i\,\mathrm{sgn}(\xi)(i\xi)^2\widehat{u} + (i\eta)^2(i\xi)\widehat{u} - \mu\left[(i\xi)^2\widehat{u} + (i\eta)^2\widehat{u}\right] \\ &= \widehat{u_t} + \left(i\xi|\xi| - i\xi\eta^2 + \mu(\xi^2+\eta^2)\right)\hat{u}. \end{aligned}$$

Então, de (3-2), obtemos $\widehat{u_t} + \left(i\xi|\xi| - i\xi\eta^2 + \mu(\xi^2+\eta^2)\right)\hat{u} = 0$ e $\hat{u}(\xi,\eta,0) = \widehat{\phi}(\xi,\eta)$. Assim, podemos resolver esse novo PVI que agora envolve uma EDO da forma

$$\frac{d\widehat{u}}{dt} = -\left(i\xi|\xi| - i\xi(\eta)^2 + \mu(\xi^2+\eta^2)\right)\hat{u}.$$

Utilizando o método da separação de variáveis, temos que

$$\int \frac{1}{\hat{u}}\, d\hat{u} = -\left(i\xi|\xi| - i\xi(\eta)^2 + \mu(\xi^2+\eta^2)\right)\int dt$$

implica em

$$\ln \hat{u} = -\left(i\xi|\xi| - i\xi(\eta)^2 + \mu(\xi^2+\eta^2)\right)t + c.$$

Logo, $\hat{u} = e^{-t(i\xi|\xi|-i\xi(\eta)^2+\mu(\xi^2+\eta^2))}c$ e $c = \widehat{\phi}(\xi,\eta)$. Então,

$$\hat{u}(\xi,\eta,t) = e^{-t(i\xi|\xi|-i\xi(\eta)^2+\mu(\xi^2+\eta^2))}\widehat{\phi}(\xi,\eta).$$

Portanto, a solução de (3-2) é dada por

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(x\xi+y\eta)}e^{-t(i\xi|\xi|-i\xi(\eta)^2+\mu(\xi^2+\eta^2))}\widehat{\phi}(\xi,\eta)\,d\xi d\eta \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(t(-\xi|\xi|+\xi\eta^2)+x\xi+y\eta)-t\mu(\xi^2+\eta^2)}\widehat{\phi}(\xi,\eta)\,d\xi d\eta \\ &:= E_\mu(t)\phi(x,y). \end{aligned} \tag{3-3}$$

As duas proposições a seguir serão utilizadas para mostrar a boa colocação local da BO-ZK perturbada (3-1).

Proposição 3.1 *Sejam $\lambda_1,\lambda_2 \in [0,\infty)$ e $\mu > 0$. Então,*

(a) para quaisquer $t > 0$ e $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $E_\mu(t)$ é um operador linear limitado de H^{s_1,s_2} em $H^{s_1+\lambda_1,s_2+\lambda_2}$. Além disso,

$$\|E_\mu(t)\phi\|_{s_1+\lambda_1,s_2+\lambda_2} \leq C_{\lambda_1,\lambda_2,\mu}(1+t^{-\lambda_1/2}+t^{-\lambda_2/2})\|\phi\|_{s_1,s_2},\ \phi \in H^{s_1,s_2},$$

e $t \in (0,\infty) \mapsto E_\mu(t)\phi \in H^{s_1+\lambda_1,s_2+\lambda_2}$ é contínua.

(b) $E_\mu(t)$ é um semigrupo de contrações em H^{s_1,s_2} e pode ser estendido, quando $\mu = 0$, a um grupo unitário.

Prova. Ver em [12]. □

O próximo resultado estabelece que H^{s_1,s_2} é uma álgebra de Banach.

Proposição 3.2 *Sejam $u, v \in H^{s_1,s_2}$, com $s_1, s_2 > 1$. Então,*

$$\|uv\|_{s_1,s_2} \leq c_{s_1,s_2}\|u\|_{s_1,s_2}\|v\|_{s_1,s_2}.$$

Prova. Primeiramente, note que para toda $f \in H^{s_1,s_2}$,

$$\|f\|_\infty \leq c_{s_1,s_2}\|f\|_{s_1,s_2}. \tag{3-4}$$

De fato, sem perda de generalidade, podemos supor que $s_1 \geq s_2$. Assim,

$$\begin{aligned}
\|f\|_\infty &\leq c\|\hat{f}\|_1 \\
&= c\int_{\mathbb{R}^2}(1+\xi^{2s_1}+\eta^{2s_2})^{-1/2}(1+\xi^{2s_1}+\eta^{2s_2})^{1/2}|\hat{f}(\xi,\eta)|\,d\xi d\eta \\
&\leq c\left[\int_{\mathbb{R}^2}\frac{d\xi d\eta}{(1+\xi^{2s_1}+\eta^{2s_2})}\right]^{1/2}\|f\|_{s_1,s_2} \\
&= c_{s_1 s_2}\|f\|_{s_1,s_2},
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
c_{s_1 s_2} &= \int_{|\xi|,|\eta|\leq 1}\frac{d\xi d\eta}{(1+\xi^{2s_1}+\eta^{2s_2})}+\int_{|\xi|,|\eta|>1}\frac{d\xi d\eta}{(1+\xi^{2s_1}+\eta^{2s_2})} \\
&\leq c+c_{s_2}\int_{|\xi|,|\eta|>1}\frac{d\xi d\eta}{(1+\xi^2+\eta^2)^{s_2}}<\infty.
\end{aligned}$$

Fixando y no Lema X4 em [17], temos

$$\|J_x^{s_1}(uv)\|_{L_x^2} \leq c\big(\|u\|_{L_x^\infty}\|J_x^{s_1}v\|_{L_x^2}+\|v\|_{L_x^\infty}\|J_x^{s_1}u\|_{L_x^2}\big).$$

Agora, tomando a norma L^2 com respeito a y, usando a desigualdade de Hölder e (3-4), deduzimos

$$\begin{aligned}
\|J_x^{s_1}(uv)\| &= \|\|J_x^{s_1}(uv)\|_{L_x^2}\|_{L_y^2} \\
&\leq c\Big(\|\|u\|_{L_x^\infty}\|J_x^{s_1}v\|_{L_x^2}+\|v\|_{L_x^\infty}\|J_x^{s_1}u\|_{L_x^2}\|_{L_y^2}\Big) \\
&\leq c\Big(\|u\|_{L_{xy}^\infty}\|\|J_x^{s_1}v\|_{L_x^2}\|_{L_y^2}+\|v\|_{L_{xy}^\infty}\|\|J_x^{s_1}u\|_{L_x^2}\|_{L_y^2}\Big) \\
&\leq c_{s_1,s_2}\big(\|u\|_{s_1,s_2}\|J_x^{s_1}v\|+\|v\|_{s_1,s_2}\|J_x^{s_1}u\|\big) \\
&\leq c_{s_1,s_2}\|u\|_{s_1,s_2}\|v\|_{s_1,s_2}.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\|J_y^{s_2}(uv)\| \leq c_{s_1,s_2}\|u\|_{s_1,s_2}\|v\|_{s_1,s_2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|uv\|_{s_1,s_2}^2 &= \|uv\|^2+\|J_x^{s_1}(uv)\|^2+\|J_y^{s_2}(uv)\|^2 \\
&\leq \|u\|_\infty^2\|v\|^2+2c_{s_1,s_2}^2\|u\|_{s_1,s_2}^2\|v\|_{s_1,s_2}^2 \\
&\leq c_{s_1,s_2}^2\|u\|_{s_1,s_2}^2\|v\|_{s_1,s_2}^2+2c_{s_1,s_2}^2\|u\|_{s_1,s_2}^2\|v\|_{s_1,s_2}^2 \\
&= c_{s_1,s_2}^2\|u\|_{s_1,s_2}^2\|v\|_{s_1,s_2}^2.
\end{aligned}$$

□

Com os resultados anteriores em mãos, estamos prontos para demonstrar a boa colocação local do PVI (3-1).

Teorema 3.3 *Sejam* $\mu > 0$, *e* $\phi \in H^{s_1,s_2}$, *onde* $s_1, s_2 > 1$ *e* $s_1 \geq s_2$. *Então existem* $T_\mu = T_\mu(\|\phi\|_{s_1,s_2}, \mu)$ *e* $u_\mu \in C([0, T_\mu]; H^{s_1,s_2})$ *única satisfazendo a equação integral*

$$u_\mu(t) = E_\mu(t)\phi - \int_0^t E_\mu(t-t')\frac{1}{2}\partial_x(u_\mu^2)(t')dt'. \tag{3-5}$$

Prova. Esta demonstração é baseada no princípio de contração. Considere o espaço métrico

$$X_{s_1,s_2}(T) = \Big\{ f \in C([0,T]; H^{s_1,s_2}) \mid \|f(t) - E_\mu(t)\phi\|_{s_1,s_2} \leq \|\phi\|_{s_1,s_2}, \forall t \in [0,T] \Big\},$$

com a norma do supremo. Seja

$$Af(t) = E_\mu(t)\phi - \int_0^t E_\mu(t-t')(f f_x)(t')dt'.$$

A ideia é mostrar que A tem um único ponto fixo em $X_{s_1,s_2}(T)$ para algum $T > 0$. Pela Proposição 3.1, para todo $f \in X_{s_1,s_2}(T)$ temos

$$\begin{aligned} \|J_x^{s_1} E_\mu(t-t')\partial_x f^2\| &\leq c_\mu(1 + (t-t')^{-1/2})\|J_x^{s_1-1}\partial_x f^2\| \\ &\leq c_{\mu,s_1,s_2}(1 + (t-t')^{-1/2})\|\phi\|^2_{s_1 s_2}. \end{aligned}$$

Como $\frac{s_2}{s_1} \leq 1$, existe um número real α que satisfaz $\frac{s_2}{s_1} \leq \alpha \leq 1$. Então,

$$\begin{aligned} \|J_y^{s_2} E(t-t')\partial_x f^2\| &\leq c_{\alpha,\mu}(1 + (t-t')^{-\alpha/2})(\|J_x^{s_1} f^2\| + \|J_y^{s_2} f^2\|) \\ &\leq c_{\alpha,\mu}(1 + (t-t')^{-\alpha/2})\|f^2\|_{s_1,s_2} \\ &\leq c_{\alpha,\mu}(1 + (t-t')^{-\alpha/2})\|\phi\|^2_{s_1,s_2}, \end{aligned}$$

onde usamos o teorema de Plancherel e a desigualdade de Young com $p = s_1$, $q = \frac{s_1}{s_1-1}$. Logo, pelas desigualdades deduzidas acima,

$$\|Af(t) - E(t)\phi\|_{s_1,s_2} \leq \left[c\|\phi\|_{s_1,s_2} \int_0^t (1 + (t-t')^{-1/2} + (t-t')^{-\alpha/2})dt' \right] \|\phi\|_{s_1,s_2}.$$

Como consequência, existe $T'_\mu = T'_\mu(\mu, \|\phi\|_{s_1,s_2})$ tal que $A : X_{s_1,s_2}(T'_\mu) \to X_{s_1,s_2}(T'_\mu)$. De forma similar, podemos mostrar que $A : X_{s_1,s_2}(T_\mu) \to X_{s_1,s_2}(T_\mu)$ é uma contração. Pelo Teorema do ponto fixo de Banach conclui-se a prova do teorema.

□

Observação 3.4 *Usaremos posteriormente que* $u_\mu \in H^{\infty,\infty} = \cap_{s_1,s_2\in\mathbb{R}} H^{s_1,s_2}$ *para todo* $t \in (0,T]$ *e* $\mu > 0$. *É possível provar essa afirmação usando a equação integral* (3-5)*, a parte (a) da Proposição* 3.1*, e um argumento de "bootstrapping", como em* [12]*.*

Proposição 3.5 *Sejam* $s_2 > 2$ *e* $s_1 \geq s_2$. *Se* $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ *é real, então*

$$|(u, uu_x)_{s_1,s_2}| \leq c\|u\|^3_{s_1,s_2}.$$

Prova. Note que

$$(u, uu_x)_{s_1,s_2} = (u, uu_x) + (J_x^{s_1} u, J_x^{s_1}(uu_x)) + (J_y^{s_2} u, J_y^{s_2}(uu_x)),$$

onde, por integração por partes,

$$(u, uu_x) = \int_{\mathbb{R}^2} u^2 u_x \, dx = u^3\big|_{-\infty}^{+\infty} - 2\int_{\mathbb{R}^2} u^2 u_x \, dx = u^3\big|_{-\infty}^{+\infty} - 2(u, uu_x).$$

O que implica que $(u, uu_x) = \dfrac{u^3}{3}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$. Então,

$$\begin{aligned}(u, uu_x)_{s_1,s_2} &= (J_x^{s_1} u, J_x^{s_1}(uu_x)) + (J_y^{s_2} u, J_y^{s_2}(uu_x)) \\ &= (J_x^{s_1} u, [J_x^{s_1}, u]u_x) + (J_x^{s_1} u, uJ_x^{s_1} u_x) + (J_y^{s_2} u, [J_y^{s_2}, u]u_x) + (J_y^{s_2} u, uJ_y^{s_2} u_x).\end{aligned}$$

Fixando y no Lema X1 de [17], obtemos

$$\|[J_x^{s_1}, u]u_x\|_{L_x^2} \leq c\big(\|u_x\|_{L_x^\infty}\|J_x^{s_1-1}u_x\|_{L_x^2} + \|J_x^{s_1}u\|_{L_x^2}\|u_x\|_{L_x^\infty}\big).$$

Calculando a norma L^2 em y, usando a desigualdade de Hölder e (3-4), segue que

$$\begin{aligned}\|[J_x^{s_1}, u]u_x\| &\leq c\big(\|\|u_x\|_{L_x^\infty}\|J_x^{s_1-1}u_x\|_{L_x^2} + \|J_x^{s_1}u\|_{L_x^2}\|u_x\|_{L_x^\infty}\|_{L_y^2}\big) \\ &\leq c\big(\|u_x\|_{L_{xy}^\infty}\|J_x^{s_1-1}u_x\| + \|J_x^{s_1}u\|\|u_x\|_{L_{xy}^\infty}\big) \\ &\leq c_{s_1,s_2}(\|u\|_{s_1,s_2}\|J_x^{s_1-1}u_x\| + \|J_x^{s_1}u\|\|u\|_{s_1,s_2}) \\ &\leq c_{s_1,s_2}\|u\|^2_{s_1,s_2}.\end{aligned}$$

De forma similar e utilizando a desigualdade de Young, deduzimos

$$\|[J_y^{s_2}, u]u_x\| \leq c_{s_1,s_2}\|u\|^2_{s_1,s_2}.$$

Usando integração por partes,

$$
\begin{aligned}
(J_x^{s_1}u, uJ_x^{s_1}u_x) &= \int J_x^{s_1}u.uJ_x^{s_1}u_x\,dxdy \\
&= \int J_x^{s_1}u\partial_x(J_x^{s_1}u)u\,dxdy \\
&= \frac{1}{2}\int \partial_x(J_x^{s_1}u)^2u\,dxdy \\
&= -\frac{1}{2}\big((J_x^{s_1}u)^2, \partial_x u\big) \\
&\leq \|u_x\|_\infty\|J_x^{s_1}u\|^2 \\
&\leq c\|u\|_{s_1,s_2}^3.
\end{aligned}
$$

Analogamente, conclui-se que

$$(J_y^{s_2}u, uJ_y^{s_2}u_x) \leq c\|u\|_{s_1,s_2}^3.$$

Além disso, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$|(J_x^{s_1}u, [J_x^{s_1}, u]u_x)| \leq \|J_x^{s_1}u\|\|[J_x^{s_1}, u]u_x\| \leq c\|u\|_{s_1,s_2}^3$$

e

$$|(J_y^{s_2}u, [J_y^{s_2}, u]u_x)| \leq \|J_y^{s_2}u\|\|[J_y^{s_2}, u]u_x\| \leq c\|u\|_{s_1,s_2}^3.$$

Portanto,

$$|(u, uu_x)_{s_1,s_2}| \leq c\|u\|_{s_1,s_2}^3.$$

□

Observação 3.6 *Com o Teorema 3.3 e a Proposição 3.5, concluímos o Teorema 1.2. De fato, pela Proposição 3.5, podemos mostrar que a solução $u_\mu \in C([0, T_\mu]; H^{s_1,s_2})$, obtida no Teorema 3.3, pode ser estendida, para todo $\mu > 0$, a um intervalo $[0, T]$, onde T depende apenas de s_1, s_2 e $\|\phi\|_{s_1,s_2}$, independentemente de μ. Além disso, existe uma função $\rho \in C([0, T]; \mathbb{R}_+)$ tal que*

$$\|u_\mu\|_{s_1,s_2}^2 \leq \rho(t), \;\; \rho(0) = \|\phi\|_{s_1,s_2}^2, \;\; t \in [0, T].$$

A seguir apenas esboçaremos a ideia dessa demonstração, que é análoga ao que está feito em [12]. Multiplicando a equação BO-ZK por u_μ e tomando o produto interno em H^{s_1,s_2}, obtemos uma inequação envolvendo $\partial_t\|u_\mu(t)\|_{s_1,s_2}^2$ e $\|u_\mu(t)\|_{s_1,s_2}$. Assim, resolvendo uma EDO encontramos $\rho(t)$ tal que $\|u_\mu(t)\|_{s_1,s_2}^2 \leq \rho(t)$ e $\rho(0) = \|\phi\|_{s_1,s_2}^2$. Estudando o domínio da função $\rho(t)$ conclui-se que $t \in [0, T]$, onde T não depende de μ. Isto por sua vez nos *permite passar o limite em* (3-1) *com* $\mu \to 0$*, obtendo assim uma solução de* (1-2) *em* H^{s_1,s_2}*. A dependência contínua da solução em relação ao dado inicial decorre do método de aproximação no estilo Bona–Smith [2].*

CAPÍTULO 4

Boa colocação local em $H^s(w^2)$

Este capítulo é dedicado à demonstração do Teorema 1.3. Iniciamos com o seguinte lema, que será amplamente utilizado na prova da persistência da solução.

Lema 4.1 *Seja w um peso suave, cujas derivadas de primeira a terceira ordem são todas limitadas. Defina*

$$w_\lambda(x,y) = w(x,y)e^{-\lambda(x^2+y^2)}, \ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \ \lambda \in (0,1).$$

Então, existe uma constante $c > 0$, independente de λ, tal que

$$\|D^\alpha w_\lambda\|_\infty \leq c,$$

onde $\alpha \in \mathbb{N}^2$, com $|\alpha| = 1, 2$ ou 3.

Prova. Seja $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Pelo Teorema do valor médio e observando que, por definição, $|\nabla w| \leq \|\nabla w\|_\infty$, obtemos

$$|w(x,y) - w(0,0)| \leq r\|\nabla w\|_\infty. \tag{4-1}$$

Assim, $|w(x,y)| \leq r\|\nabla w\|_\infty + |w(0,0)|$. Como $\partial_x w_\lambda = (w_x - 2\lambda x w)e^{-\lambda r^2}$, temos

$$\begin{aligned} |\partial_x w_\lambda| &= |(w_x - 2\lambda x w)e^{-\lambda r^2}| \leq |w_x|e^{-\lambda r^2} + 2\lambda|x||w|e^{-\lambda r^2} \\ &\leq \|w_x\|_\infty + 2\lambda r^2\|\nabla w\|_\infty e^{-\lambda r^2} + 2\lambda r|w(0,0)|e^{-\lambda r^2}. \end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade $r^a e^{-\lambda r^2} \leq c_a \lambda^{-a/2}$, válida para todo $\lambda, a > 0$, deduzimos

$$2\lambda r^2 e^{-\lambda r^2} \leq 2\lambda c_2 \lambda^{-1} = 2c_2 \quad e \quad 2\lambda r e^{-\lambda r^2} \leq 2\lambda c_1 \lambda^{-1/2} = 2c_1\lambda^{1/2} \leq 2c_1.$$

Então, $|\partial_x w_\lambda| \lesssim \|w_x\|_\infty + \|\nabla w\|_\infty + |w(0,0)|$. Da mesma forma, como

$$\partial_x^2 w_\lambda = (w_{xx} - 4\lambda x w_x - 2\lambda w + 4\lambda^2 x^2 w)e^{-\lambda r^2},$$

deduzimos

$$|\partial_x^2 w_\lambda| \lesssim \|w_{xx}\|_\infty + \|\nabla w\|_\infty + |w(0,0)|.$$

O caso das derivadas mistas de segunda ordem é análogo. Finalmente,

$$\partial_x^3 w_\lambda = (w_{xxx} - 6\lambda x w_{xx} - 6\lambda w_x + 12\lambda^2 x^2 w_x + 12\lambda^2 x w - 8\lambda^3 x^3 w)e^{-\lambda r^2}.$$

Aplicando os mesmos argumentos anteriores, concluímos que existe c_3, independente de λ, tal que $\|\partial_x^3 w_\lambda\|_\infty \le c_3$. De forma análoga, o mesmo vale para as derivadas mistas de terceira ordem. $\square$

Suponha que w satisfaça as hipóteses do Lema 4.1. Para todo $\lambda \in (0,1)$, a desigualdade (4-1) implica a existência de uma constante $c_\lambda > 0$, dependente de λ, tal que

$$|w(x,y)| \le c_\lambda e^{\lambda(x^2+y^2)}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Pois,

$$\frac{|w(x,y)|}{e^{\lambda r^2}} \le \frac{r\|\nabla w\|_\infty}{e^{\lambda r^2}} + \frac{|w(0,0)|}{e^{\lambda r^2}},$$

onde para o termo da direita da desigualdade $c_\lambda > 0$ é um supremo em r.

Passemos agora à demonstração do Teorema 1.3.

Prova. Existência e unicidade: Assuma que $\phi \in H^s(w^2)$, $s > 2$. Pelo Teorema 1.1 e pela Observação 3.6, existe $T > 0$, tal que, para todo $\mu \ge 0$, as únicas soluções (em H^s) de (1-2) e (3-1) estão definidas no intervalo $[0, T]$ e satisfazem

$$\|u_\mu(t)\|_{H^s}^2 \le \rho(t), \qquad t \in [0, T]. \tag{4-2}$$

Aqui, $u_0 := u$ e u_μ são as soluções de (1-2) e (3-1), respectivamente. Defina $M := \sup_{t\in[0,T]} \|u_\mu(t)\|_{H^s}$. De (4-2), pode-se assumir que M não depende de $\mu > 0$.

Persistência: Por simplicidade, adotemos $u_\mu = v$ para $\mu > 0$. Seja w_λ como no Lema 4.1. Utilizando a Observação 3.4 (que nos permite derivar sob o sinal de integração), multiplicando a Equação (3-1) por $w_\lambda^2 v$, isolando v_t e integrando em $\mathbb{R}^2$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} w_\lambda^2 v v_t \, dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} (-w_\lambda^2 v \mathcal{H}\partial_x^2 v - w_\lambda^2 v v_{xyy} - w_\lambda^2 v^2 v_x + \mu w_\lambda^2 v \Delta v) dxdy.$$

Como $uu_t = \frac{1}{2}\partial_t u^2$, temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_\lambda v\|^2 = (w_\lambda v, -w_\lambda v \mathcal{H}\partial_x^2 v - w_\lambda v_{xyy} - w_\lambda v v_x + \mu w_\lambda \Delta v). \tag{4-3}$$

Vamos estimar o lado direito de 4-3. Primeiramente, note que $(w_\lambda v, \mathcal{H}\partial_x^2(w_\lambda v)) = 0$, pois, pelo Teorema de Plancherel,

$$\int_{\mathbb{R}^2} (w_\lambda v)\big(\mathcal{H}\partial_x^2(w_\lambda v)\big)\, dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} \overline{\widehat{(w_\lambda v)}}(\widehat{\mathcal{H}\partial_x^2(w_\lambda} v)\, d\xi d\eta$$
$$= i\int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{(w_\lambda v)}|^2 sgn(\xi)\xi^2\, d\xi d\eta.$$

Portanto, podemos escrever

$$(w_\lambda v, w_\lambda \mathcal{H}\partial_x^2 v) = (w_\lambda v, [w_\lambda, \mathcal{H}]\partial_x^2 v) + (w_\lambda v, \mathcal{H}[w_\lambda, \partial_x^2]v). \tag{4-4}$$

Aplicando o Teorema 2.5, a desigualdade de Hölder e o Lema 4.1, obtemos

$$\|[w_\lambda, \mathcal{H}]\partial_x^2 v\| \leq c\|\partial_x^2 w_\lambda\|_\infty \|v\| \leq c\|\partial_x^2 w_\lambda\|_\infty \|v\|_{H^s} \leq cM.$$

Além disso, como $\mathcal{H}$ é uma isometria em $L^2(\mathbb{R})$, o Lema 4.1 implica que

$$\begin{aligned}\|\mathcal{H}[w_\lambda, \partial_x^2]v\| = \|[w_\lambda, \partial_x^2]v\| &= \|w_\lambda \partial_x^2 v - \partial_x^2 w_\lambda v - 2\partial_x w_\lambda \partial_x v - w_\lambda \partial_x^2 v\| \\ &\leq \|\partial_x^2 w_\lambda v\| + 2\|\partial_x w_\lambda \partial_x v\| \\ &\leq \|\partial_x^2 w_\lambda\|_\infty \|v\| + 2\|\partial_x w_\lambda\|_\infty \|\partial_x v\| \\ &\leq c_1\|v\|_{H^s} + c_2\|v\|_{H^s} \leq cM.\end{aligned}$$

Logo, a partir de (4-4) e da desigualdade de Cauchy–Schwarz,

$$|(w_\lambda v, w_\lambda \mathcal{H}\partial_x^2 v)| \leq cM\|w_\lambda v\|. \tag{4-5}$$

Observe que $(w_\lambda v, \partial_{xyy}^3(w_\lambda v)) = 0$, por Plancherel, e, pelo Lema 4.1, obtemos

$$\begin{aligned}\|[w_\lambda, \partial_{xyy}^3]v\| &= \|\partial_{xyy}^3 w_\lambda v + 2\partial_{xy}^2 w_\lambda \partial_y v + \partial_x w_\lambda \partial_y^2 v + \partial_y^2 w_\lambda \partial_x v + 2\partial_y w_\lambda \partial_{yx}^2 v\| \\ &\leq cM.\end{aligned}$$

Então,

$$(w_\lambda v, w_\lambda v_{xyy}) = (w_\lambda v, [w_\lambda, \partial_{xyy}^3]v) + (w_\lambda v, \partial_{xyy}^3(w_\lambda v)) \leq cM\|w_\lambda v\|.$$

Integrando por partes, podemos ver que

$$\begin{aligned}(w_\lambda v, w_\lambda \Delta v) &= (w_\lambda v, [w_\lambda, \Delta]v) + (w_\lambda v, \Delta(w_\lambda v)) \\ &= (w_\lambda v, [w_\lambda, \Delta]v) - \|\nabla(w_\lambda v)\|^2 \\ &\leq |(w_\lambda v, [w_\lambda, \Delta]v)| \\ &\leq \|w_\lambda v\|\|[w_\lambda, \Delta]v\| \\ &\leq cM\|w_\lambda v\|,\end{aligned} \tag{4-6}$$

onde utilizamos o Lema 4.1, a desigualdade de Minkowski e a desigualdade de Hölder para obter

$$\begin{aligned}
\|[w_\lambda, \Delta]v\| &= \|w_\lambda \nabla^2 v - \nabla^2 w_\lambda v\| \\
&= \|w_\lambda \nabla^2 v - (\nabla^2 w_\lambda v + 2\nabla w_\lambda.\nabla v + w_\lambda \nabla^2 v)\| \\
&= \|(\Delta w_\lambda)v - 2\nabla w_\lambda.\nabla v\| \\
&\leq \|\Delta w_\lambda\|_\infty \|v\| + 2\|\nabla w_\lambda\|_\infty \|\nabla v\| \\
&\leq cM.
\end{aligned} \tag{4-7}$$

Finalmente,

$$|(w_\lambda v, w_\lambda v v_x)| \leq \|w_\lambda v\| \|w_\lambda v v_x\| \leq \|v_x\|_\infty \|w_\lambda v\|^2 \leq M\|w_\lambda v\|^2. \tag{4-8}$$

Logo, de (4-5)-(4-8), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_\lambda v\|^2 &= (w_\lambda v, -w_\lambda v \mathcal{H}\partial_x^2 v - w_\lambda v_{xyy} - w_\lambda v v_x + \mu w_\lambda \Delta v) \\
&\leq (2+\mu)cM\|w_\lambda v\| + M\|w_\lambda v\|^2
\end{aligned}$$

e, pela desigualdade de Young,

$$\frac{d}{dt}\|w_\lambda v(t)\|^2 \leq c^2 M^2 + (\mu^2 + 1 + cM)\|w_\lambda v(t)\|^2.$$

Então, pelo Lema de Grönwall, para $t \in [0, T]$,

$$\|w_\lambda v(t)\|^2 \leq \|w_\lambda \phi\|^2 + tc^2 M^2 + \int_0^t g_\lambda(s)\,ds = \|w_\lambda \phi\|^2 + G_\lambda(t,\mu)^2, \tag{4-9}$$

onde $g_\lambda(s) = (\|w_\lambda \phi\|^2 + sc^2 M^2)(\mu^2 + 1 + cM)\exp[s(\mu^2 + 1 + cM)]$. Tomando o limite quando $\lambda \to 0$, e utilizando o Teorema da Convergência Monótona juntamente com a desigualdade (4-2), obtemos

$$\begin{aligned}
\|wv(t)\|^2 &\leq \|w\phi\|^2 + tc^2 M^2 + \int_0^t g_0(s)\,ds \\
&\leq \|w\phi\|^2 + tc^2 \rho(t) + \int_0^t g_0(s)\,ds \\
&= \|w\phi\|^2 + G_0(t,\mu)^2, \quad t \in [0, T],
\end{aligned} \tag{4-10}$$

onde G_0 é contínua. Portanto, a persistência da solução u_μ para todo $\mu > 0$ está garantida.

Fixado $\lambda \in (0,1)$, e utilizando a inequação (4-2), a equação (3-1) e o Lema de Grönwall, podemos provar que $\{u_\mu\}_{\mu>0}$ forma uma rede de Cauchy em $L^2_{w_\lambda} = L^2(w_\lambda^2\,dxdy)$ e que $u_\mu \to u$ em $L^2_{w_\lambda}$ quando $\mu \downarrow 0$. Portanto, se $\varphi \in L^2_{w_\lambda}$, a partir de (4-9), obtemos

$$|(u,\varphi)_{L^2_{w_\lambda}}| = \lim_{\mu\to 0}|(u_\mu,\varphi)_{L^2_{w_\lambda}}| \leq \|\varphi\|_{L^2_{w_\lambda}} \lim_{\mu\to 0}(\|w_\lambda\phi\| + G_\lambda(t,\mu)).$$

Tomando o supremo sobre todas as funções φ com $\|\varphi\|_{L^2_{w_\lambda}} = 1$ na equação anterior, deduzimos

$$\|w_\lambda u(t)\| \leq \|w_\lambda \phi\| + G_\lambda(t,0), \;\; t \in [0,T].$$

Tomando o limite quando $\lambda \downarrow 0$ e aplicando o Teorema da Convergência Monótona, obtemos

$$\|wu(t)\| \leq \|w\phi\| + G_0(t,0), \;\; t \in [0,T], \tag{4-11}$$

onde $G_0(t,0) \to 0$ quando $t \to 0$. Portanto, garante-se a persistência da solução u em $L^2_w = L^2(w^2 dxdy)$.

Continuidade: Primeiro, afirmamos que $u : [0,T] \to L^2_w$ é fracamente contínua. De fato, para $\varphi \in L^2_w$, definimos $\varphi_\lambda = \varphi e^{-\lambda(x^2+y^2)}$. Pelo Teorema da Convergência Monótona, tem-se que $\varphi_\lambda \to \varphi$ em L^2_w quando $\lambda \downarrow 0$. Seja $\epsilon > 0$ dado, e tome $\lambda_0 > 0$ tal que

$$\|\varphi - \varphi_{\lambda_0}\|_{L^2_w} < \frac{\epsilon}{4(\|\phi\|_{L^2_w} + G(T,0))}. \tag{4-12}$$

Fixado $t \in [0,T]$, seja $\delta > 0$ tal que

$$|t-s| < \delta \implies \|u(t) - u(s)\| < \frac{\epsilon}{2\|\varphi_{\lambda_0}\|_{L^2(w^4)}}. \tag{4-13}$$

Isso é possível graças à teoria de H^s e à seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned}
\|\varphi_{\lambda_0}\|_{L^2(w^4)} &= \int w^4|\varphi(x,y)|^2 e^{-2\lambda_0(x^2+y^2)} \\
&\leq \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \{w^2 e^{-2\lambda_0(x^2+y^2)}\} \int w^2|\varphi(x,y)|^2 \\
&\leq \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \{((x^2+y^2)\|\nabla u\|^2_\infty + |w(0,0)|) e^{-2\lambda_0(x^2+y^2)}\} \int w^2|\varphi(x,y)|^2 \\
&\leq c(w,\lambda_0)\|\varphi\|_{L^2_w} < \infty.
\end{aligned}$$

Logo, se $|t-s| < \delta$, de (4-11), obtemos

$$\begin{aligned}
|(\varphi, u(t)-u(s))_{L^2_w}| &\leq |(\varphi - \varphi_{\lambda_0}, u(t)-u(s))_{L^2_w}| + |(\varphi_{\lambda_0}, u(t)-u(s))_{L^2_w}| \\
&\leq \|\varphi - \varphi_{\lambda_0}\|_{L^2_w}(\|u(t)\|_{L^2_w} + \|u(s)\|_{L^2_w}) + |(w^2\varphi_{\lambda_0}, u(t)-u(s))| \\
&\leq 2\|\varphi - \varphi_{\lambda_0}\|_{L^2_w}(\|\phi\|_{L^2_w} + G(T,0)) + \|\varphi_{\lambda_0}\|^2_{L^2(w^4)}\|u(t)-u(s)\| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Com isso, concluímos a nossa afirmação.

Observe agora que

$$\begin{aligned}\|u(t)-\phi\|_{L^2_w}^2 &= \|u(t)\|_{L^2_w}^2+\|\phi\|_{L^2_w}^2-(\phi,u(t))_{L^2_w}-(\phi,u(t))_{L^2_w}\\ &\le G(t,0)+\|\phi\|_{L^2_w}^2+\|\phi\|_{L^2_w}^2-(\phi,u(t))_{L^2_w}-(\phi,u(t))_{L^2_w}.\end{aligned}$$

A continuidade fraca de u em L^2_w e o fato de que $G(t,0)\to 0$ quando $t\to 0$ asseguram a continuidade à direita de u em $t=0$. Para concluir o argumento, fixamos $\tau\in(0,T)$ e utilizamos a invariância da solução sob translação

$$(t,x,y)\in[0,T-\tau]\times\mathbb{R}^2\mapsto(t+\tau,x,y),$$

o que permite concluir que u é contínua à direita em $[0,T)$. A continuidade à esquerda em $t=T$ é garantida pela mudança de variáveis $(t,x,y)\in[0,T]\times\mathbb{R}^2\mapsto(T-t,x,y)$. Finalmente, utilizando a transformação $(t,x,y)\mapsto(\tau-t,-x,-y)$, concluímos a continuidade à esquerda. Portanto, u é contínua em $[0,T]$.

Dependência contínua: Sejam u e v soluções de (1-2) definidas no mesmo intervalo $[0,T]$, com condições iniciais $u(x,y,0)=\phi(x,y)$ e $v(x,y,0)=\psi(x,y)$, sendo $\phi,\psi\in H^s(w^2)$, com $s>2$. Sejam u_μ e v_μ soluções de (3-1) com $u_\mu(x,y,0)=\phi(x,y)$ e $v_\mu(x,y,0)=\psi(x,y)$. Denotando $z=u_\mu-v_\mu$, temos

$$z_t+\mathcal{H}\partial_x^2 z+z_{xyy}+z\partial_x u_\mu+v_\mu z_x=\mu\Delta z.$$

Multiplicando a equação anterior por $w_\lambda^2 z$ e integrando em $\mathbb{R}^2$, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_\lambda z\|^2+(w_\lambda z,w_\lambda\mathcal{H}\partial_x^2 z+w_\lambda z_{xyy}+w_\lambda z\partial_x u_\mu+w_\lambda v_\mu z_x-w_\lambda\mu\Delta z)=0. \tag{4-14}$$

Seja $\tilde{M}=\sup_{[0,T]}\{\|u_\mu(t)\|_{H^s(w^2)}+\|v_\mu(t)\|_{H^s(w^2)}\}$, então, por (4-2) e (4-11), $\tilde{M}$ é limitado por uma constante independente de μ. Subtraindo o produto interno de ambos os lados em (4-14), utilizando argumentos semelhantes aos anteriores para estimar o lado direito da igualdade e aplicando a desigualdade de Young, obtemos

$$\frac{d}{dt}\|w_\lambda z\|^2\le k_1\|w_\lambda z\|^2+k_2\|z\|_{L_T^\infty H^s}^2,\ \ 0\le t\le T,$$

onde k_1 e k_2 são constantes que dependem apenas de $\tilde{M}$. Então, aplicando novamente o Lema de Grönwall, deduzimos

$$\|w_\lambda z\|^2\le\left(\|w_\lambda(\phi-\psi)\|^2+k_2T\|z\|_{L_T^\infty H^s}^2\right)e^{k_1T}.$$

Tomando o limite quando $\mu \downarrow 0$, temos

$$\|w_\lambda(u-v)\|^2 \leq \left(\|w_\lambda(\phi-\psi)\|^2 + k_2 T\|u-v\|^2_{L^\infty_T H^s}\right)e^{k_1 T}.$$

Finalmente, fazendo $\lambda \downarrow 0$,

$$\|w(u-v)\|^2 \leq \left(\|w(\phi-\psi)\|^2 + k_2 T\|u-v\|^2_{L^\infty_T H^s}\right)e^{k_1 T}. \tag{4-15}$$

De (4-15) e da dependência contínua em $H^s(\mathbb{R}^2)$, segue que $u \to v$ em $H^s(w^2)$ quando $\phi \to \psi$ em $H^s(w^2)$. Portanto, a prova do Teorema 1.3 está concluída. $\square$

Observação 4.2 *Note que* $w(x,y) = (1+x^2+y^2)^{\gamma/2}$*, com* $\gamma \in [0,1]$*, satisfaz as hipóteses do Teorema 1.3. É fácil ver que* $w(x,y)$ *é um peso suave e que*

$$\partial_x w = \gamma x(1+x^2+y^2)^{\gamma/2-1},$$

$$\partial_x^2 w = \gamma x(1+x^2+y^2)^{\gamma/2-1} + \gamma(\gamma-2)x^2(1+x^2+y^2)^{\gamma/2-2},$$

$$\partial_{xy}^2 w = 2\gamma xy(\gamma/2-1)(1+x^2+y^2)^{\gamma/2-2},$$

$$\partial_{xxx}^3 w = 6\gamma x(\gamma/2-1)\left(1+x^2+y^2\right)^{\gamma/2-2} + 4\gamma x^3\left(\gamma/2-1\right)\left(\gamma/2-2\right)\left(1+x^2+y^2\right)^{\gamma/2-3},$$

$$\partial_{xxy}^3 w = 2\gamma y(\gamma/2-1)\left(1+x^2+y^2\right)^{\gamma/2-2} + 4\gamma x^2 y\left(\gamma/2-1\right)\left(\gamma/2-2\right)\left(1+x^2+y^2\right)^{\gamma/2-3},$$

assim como as derivadas de primeira a terceira ordem em relação a y *e as derivadas mistas, são limitadas para* $\gamma \in [0,1]$.

CAPÍTULO 5

Boa colocação local em $\mathcal{Z}_{s,r}$

Neste capítulo, provaremos o Teorema 1.4. Assuma que $\phi \in Z_{s,r}$. Primeiramente, observe que precisamos lidar apenas com o espaço L^2_r, pois a existência local de uma solução $u : [0, T] \to H^s$ é garantida pelo Teorema 1.1. Além disso, uma vez obtida a propriedade de persistência da solução em L^2_r, a continuidade de $u : [0, T] \to L^2_r$ e a dependência contínua seguem exatamente como feito anteriormente para o Teorema 1.3.

Prova. **Parte (i):** Nesta primeira parte do teorema, o caso $s > 2$ e $r \in [0, 1]$ já foi provado pelo Teorema 1.3, considerando o que foi exposto na Observação 4.2. Portanto, consideremos agora o caso $r \in (1, 5/2)$ e dividamos a análise em dois subcasos.

Caso (a): Considere $r \in (1, 2]$ e $s \geq 2r$. Escreva $r = 1 + \theta$, com $\theta \in (0, 1]$. Defina $M_1 := \sup_{[0,T]}(\|u\|_{H^s} + \|\langle x, y\rangle^{\theta} u\|)$. Como $\theta \in (0, 1]$, o segundo termo em M_1 é finito devido à primeira parte do teorema.

Seja w_N como em (2-4). Multiplicando a equação (1-2) por $w_N^{2+2\theta} u$, integrando em $\mathbb{R}^2$ e utilizando a identidade $uu_t = \frac{1}{2}\partial_t u^2$, como feito anteriormente, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_N^{1+\theta} u\|^2 + (w_N^{1+\theta} u, w_N^{1+\theta}\mathcal{H}\partial_x^2 u + w_N^{1+\theta} u_{xyy} + w_N^{1+\theta} uu_x) = 0. \tag{5-1}$$

Vamos estimar o produto escalar em L^2. Usando comutador e a regra de Leibniz, podemos escrever

$$\begin{aligned} w_N^{1+\theta}\mathcal{H}\partial_x^2 u &= [w_N^{1+\theta}, \mathcal{H}]\partial_x^2 u + \mathcal{H}(w_N^{1+\theta}\partial_x^2 u) \\ &= A_1 + \mathcal{H}\partial_x^2(w_N^{1+\theta} u) - 2\mathcal{H}(\partial_x w_N^{1+\theta}\partial_x u) - \mathcal{H}\partial_x^2 w_N^{1+\theta} u \\ &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.5 e pela desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \|A_1\| &= \|\|[w_N^{1+\theta}, \mathcal{H}]\partial_x^2 u\|_{L^2_x}\|_{L^2_y} \\ &\leq c\|\|\partial_x^2 w_N^{1+\theta}\|_{L^\infty_x}\|u\|_{L^2_x}\|_{L^2_y} \leq c\|\partial_x^2 w_N^{1+\theta}\|_{L^\infty_{xy}}\|u\| \leq cM_1. \end{aligned} \tag{5-2}$$

Como

$$|\partial_x(w_N^{1+\theta})| = |(1+\theta)w_N^{\theta}\partial_x w_N| \leq c w_N^{\theta},$$

e $\mathcal{H}$ é uma isometria em L^2, temos

$$\|A_3\| \leq c\|w_N^{\theta}\partial_x u\| \leq c(\|\partial_x(w_N^{\theta}u)\| + \|\partial_x w_N^{\theta}u\|) \leq c(\|\partial_x(w_N^{\theta}u)\| + \|u\|). \tag{5-3}$$

Uma aplicação do Lema 2.11, com $a = 1+\theta$, $\alpha = \frac{1}{1+\theta}$ e $b = 1+\theta$, nos permite estimar

$$\|\partial_x(w_N^{\theta}u)\| \leq \|J^1(w_N^{\theta}u)\| \leq c\|w_N^{1+\theta}u\|^{\theta/(1+\theta)}\|J^{1+\theta}u\|^{1/(1+\theta)}.$$

Então, aplicando a desigualdade de Young acima e substituindo em (5-3), obtemos

$$\|A_3\| \leq c\big(\|J^1(w_N^{\theta}u)\| + \|u\|\big) \leq c\big(\|w_N^{1+\theta}u\| + M_1\big). \tag{5-4}$$

Observe que

$$\|A_4\| = \|\mathcal{H}\partial_x^2 w_N^{1+\theta}u\| \leq c\|\partial_x^2 w_N^{1+\theta}\|_\infty \|u\| \leq cM_1. \tag{5-5}$$

Além disso, inserindo o termo A_2 em (5-1) e utilizando integração por partes, vemos que sua contribuição é nula. A constante c que apareceu anteriormente nas estimativas de A_1, A_3, A_4, e que aparecerá no restante da demonstração, é sempre independente de N. Pelo Lema 2.11, com $a = 2+2\theta$, $\alpha = \frac{1}{2+2\theta}$ e $b = 1+\theta$, obtemos

$$\|J^1(w_N^{1/2+\theta}u)\| \leq c\big(\|w_N^{1+\theta}u\| + \|J^{2+2\theta}u\| + M_1\big). \tag{5-6}$$

Outra aplicação do Lema 2.11, com $a = 2+2\theta$, $\alpha = \frac{2}{2+2\theta}$ e $b = 1+\theta$, implica que

$$\|J^2(w_N^{\theta}u)\| \leq c\big(\|w_N^{1+\theta}u\| + \|J^{2+2\theta}u\| + M_1\big). \tag{5-7}$$

Utilizando integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned}
\int w_N^{2+2\theta}u\partial_x\partial_y^2 u &= -\int (\partial_y w_N^{2+2\theta}u + \partial_y u w_N^{2+2\theta})\partial_x\partial_y u \\
&= -\int \partial_y w_N^{2+2\theta}u\partial_x\partial_y u - \int \partial_y u w_N^{2+2\theta}\partial_x\partial_y u \\
&= -\frac{1}{2}\int 2\partial_y w_N^{2+2\theta}u\partial_x\partial_y u - \frac{1}{2}\int 2\partial_y u w_N^{2+2\theta}\partial_x\partial_y u \\
&= \frac{1}{2}\int \big(-2\partial_y w_N^{2+2\theta}u\partial_x\partial_y u + \partial_x w_N^{2+2\theta}(\partial_y u)^2\big).
\end{aligned} \tag{5-8}$$

Agora, usando a desigualdade $|\partial_x(w_N^{2+2\theta})| \leq c w_N^{1+2\theta}$, a desigualdade de Cauchy-Schwarz, (5-6) e (5-7), obtemos

$$
\begin{aligned}
\int w_N^{2+2\theta} u\partial_x\partial_y^2 u &= \frac{1}{2}\int\Big(-2\partial_y w_N^{2+2\theta} u\partial_x\partial_y u + \partial_x w_N^{2+2\theta}(\partial_y u)^2\Big)\\
&\leq \|w_N^{1+\theta}u\|\|w_N^{\theta}\partial_x\partial_y u\| + \|w_N^{1/2+\theta}\partial_y u\|^2\\
&\leq c\Big(\|J^2(w_N^{\theta}u)\|^2 + \|J(w_N^{1/2+\theta}u)\|^2 + \|w_N^{1+\theta}u\|^2 + M_1^2\Big)\\
&\leq c\Big(\|w_N^{1+\theta}u\|^2 + M_1^2\Big).
\end{aligned}
\tag{5-9}
$$

Finalmente, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, a desigualdade de Hölder e a imersão de Sobolev (pois $s > 2$), temos

$$
|(w_N^{1+\theta}u, w_N^{1+\theta}uu_x)| \leq \|w_N^{1+\theta}u\|\|w_N^{1+\theta}uu_x\| \leq \|w_N^{1+\theta}u\|^2\|u_x\|_\infty \leq M_1\|w_N^{1+\theta}u\|^2. \tag{5-10}
$$

Então, utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e as estimativas anteriores em (5-1), temos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w_N^{1+\theta}u\|^2 &\leq |(w_N^{1+\theta}u, w_N^{1+\theta}\mathcal{H}\partial_x^2 u + w_N^{1+\theta}u_{xyy} + w_N^{1+\theta}uu_x)|\\
&\leq |(w_N^{1+\theta}u, w_N^{1+\theta}\mathcal{H}\partial_x^2 u)| + |(w_N^{1+\theta}u, w_N^{1+\theta}u_{xyy})| + |(w_N^{1+\theta}u, w_N^{1+\theta}uu_x)|\\
&\leq \|w_N^{1+\theta}u\|\|w_N^{1+\theta}\mathcal{H}\partial_x^2 u\| + c\big(\|w_N^{1+\theta}u\|^2 + M_1^2\big) + M_1\|w_N^{1+\theta}u\|^2)\\
&\leq \|w_N^{1+\theta}u\|c\big(M_1 + \|w_N^{1+\theta}u\|\big) + c\big(\|w_N^{1+\theta}u\|^2 + M_1^2\big) + M_1\|w_N^{1+\theta}u\|^2
\end{aligned}
$$

Ainda, pela desigualdade de Young, temos

$$
\frac{d}{dt}\|w_N^{1+\theta}u\|^2 \leq c\big(1 + \|w_N^{1+\theta}u\|^2\big),
$$

e aplicando o Lema de Grönwall, obtemos

$$
\|w_N^{1+\theta}u\|^2 \leq \|w_N^{1+\theta}\phi\|^2 + tc + c\int_0^t e^{ct'}\big(\|w_N^{1+\theta}\phi\|^2 + t'c\big)\,dt'.
$$

Então, pelo Teorema da Convergência Monótona,

$$
\|\langle x,y\rangle^{1+\theta}u\|^2 \leq \|\langle x,y\rangle^{1+\theta}\phi\|^2 + g(t), \tag{5-11}
$$

onde $g(t) \to 0$ quando $t \downarrow 0$. Isso garante a persistência da solução em L_r^2.

Caso (b): Considere $r \in (2, 5/2)$ e $s \geq 2r$. Seja $r = 2+\theta$, com $\theta \in (0, 1/2)$. Defina

$$
M_2 := \sup_{[0,T]}\{\|\langle x,y\rangle^2 u\| + \|u\|_{H^s}\}.
$$

Nesse caso, vamos multiplicar a equação BO-ZK (1-2) por $x^2 w_N^{2+2\theta u}$ e integrar em $\mathbb{R}^2$.

Dessa forma, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|xw_N^{1+\theta}u\|^2 \leq |(xw_N^{1+\theta}u, xw_N^{1+\theta}\mathcal{H}\partial_x^2 u)| + |(xw_N^{1+\theta}u, xw_N^{1+\theta}u_{xyy})| + |(xw_N^{1+\theta}u, xw_N^{1+\theta}uu_x)|. \tag{5-12}$$

Vamos estimar o lado direito da inequação (5-12), começando pelo primeiro termo. Como $\partial_x^2(xu) = 2\partial_x u + x\partial_x^2 u$ e $\mathcal{H}(x\partial_x^2 u) = x\mathcal{H}(\partial_x^2 u)$, podemos escrever

$$x\mathcal{H}\partial_x^2 u = \mathcal{H}\partial_x^2(xu) - 2\mathcal{H}\partial_x u = B_1 + B_2.$$

Pela definição de w_N e sabendo que $1 + x^2 + y^2 \leq (1 + |x| + |y|)^2$, deduzimos

$$w_N^{1+\theta}(x,y) \leq \langle x,y\rangle^{1+\theta} \leq (1 + |x| + |y|)\langle x,y\rangle^{\theta}. \tag{5-13}$$

Utilizando a desigualdade (5-13), os Teoremas 2.2 e 2.4, a Observação 2.3, e a identidade $\widehat{\partial_x u}(0,\eta,t) = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|w_N^{1+\theta}B_2\| &\leq c\|w_N^{1+\theta}\mathcal{H}\partial_x u\| \\
&\leq c\Big(\|w_N^{\theta}\mathcal{H}\partial_x u\| + \|xw_N^{\theta}\mathcal{H}\partial_x u\| + \|yw_N^{\theta}\mathcal{H}\partial_x u\|\Big) \\
&\leq c\Big(\|\langle x,y\rangle^{\theta}\mathcal{H}\partial_x u\| + \|x\langle x,y\rangle^{\theta}\mathcal{H}\partial_x u\| + \|y\langle x,y\rangle^{\theta}\mathcal{H}\partial_x u\|\Big) \\
&\leq c\Big(\|\langle x,y\rangle^{\theta}\mathcal{H}\partial_x u\| + \|\langle x,y\rangle^{\theta}\mathcal{H}(x\partial_x u)\| + \|\langle x,y\rangle^{\theta}\mathcal{H}(y\partial_x u)\|\Big) \\
&\leq c\Big(\|\mathcal{H}\partial_x u\| + \||x|^{\theta}\mathcal{H}\partial_x u\| + \||y|^{\theta}\mathcal{H}\partial_x u\| + \|\mathcal{H}(x\partial_x u)\| + \||x|^{\theta}\mathcal{H}(x\partial_x u)\| \\
&\quad + \||y|^{\theta}\mathcal{H}(x\partial_x u)\| + \|\mathcal{H}(y\partial_x u)\| + \||x|^{\theta}\mathcal{H}(y\partial_x u)\| + \||y|^{\theta}\mathcal{H}(y\partial_x u\|\Big) \\
&\leq c\Big(\|\partial_x u\| + c^*\||x|^{\theta}\partial_x u\| + \||y|^{\theta}\partial_x u\| + \|x\partial_x u\| + c^*\||x|^{\theta}x\partial_x u\| \\
&\quad + \||y|^{\theta}x\partial_x u\| + \|y\partial_x u\| + c^*\||x|^{\theta}y\partial_x u\| + \||y|^{\theta}y\partial_x u\|\Big) \\
&\leq c\|\langle x,y\rangle^{1+\theta}\partial_x u\| \\
&= C.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 2.11, segue que

$$C \leq c\Big(\|J(\langle x,y\rangle^{1+\theta}u)\| + M_2\Big) \leq c\Big(\|\langle x,y\rangle^{3/2+\theta}u\| + \|J^{3+2\theta}u\| + M_2\Big) \leq cM_2.$$

Para estimar o termo com B_1, note que

$$\begin{aligned}
w_N^{1+\theta}\mathcal{H}\partial_x^2(xu) &= [w_N^{1+\theta},\mathcal{H}]\partial_x^2(xu) + \mathcal{H}\big(w_N^{1+\theta}\partial_x^2(xu)\big) \\
&= D_1 + \mathcal{H}\big(\partial_x^2(w_N^{1+\theta}xu)\big) - 2\mathcal{H}\big(\partial_x w_N^{1+\theta}\partial_x(xu)\big) - \mathcal{H}\big(\partial_x^2 w_N^{1+\theta}xu\big) \qquad (5\text{-}14) \\
&= D_1 + D_2 + D_3 + D_4,
\end{aligned}$$

onde usamos

$$\mathcal{H}(\partial_x^2(w_N^{1+\theta}xu)) = \mathcal{H}\partial_x^2 w_N^{1+\theta}xu + 2\mathcal{H}\partial_x w_N^{1+\theta}\partial_x(xu) + \mathcal{H}w_N^{1+\theta}\partial_x^2(xu).$$

Inserindo D_2 em (5-12), observamos que sua contribuição é nula. Além disso, usando argumentos semelhantes aos anteriores, temos $\|D_1\| \leq cM_2$ e $\|D_4\| \leq cM_2$. Para estimarmos D_3, usamos $|\partial_x w_N| \leq 1$ para obter

$$\begin{aligned}\|D_3\| &= 2\|\mathcal{H}(\partial_x w_N^{1+\theta}\partial_x(xu))\| = 2\|(1+\theta)w_N^{\theta}\partial_x w_N(u+x\partial_x u)\| \leq c\big(\|w_N^{\theta}u\| + \|xw_N^{\theta}\partial_x u\|\big)\\ &\leq cM_2.\end{aligned}$$

Agora, vamos estimar o segundo termo do lado direito da equação (5-12). Pelas desigualdades $|x\partial_x w_N| \leq 3w_N$ e $|x\partial_y^2 w_N| \leq 1$, temos

$$\begin{aligned}|\partial_x(x^2 w_N^{2+2\theta})| &= |2xw_N^{2+2\theta} + x^2\partial_x w_N^{2+2\theta}|\\ &\leq 2|xw_N^{2+2\theta}| + |x^2\partial_x w_N^{2+2\theta}|\\ &\leq 2|xw_N^{2+2\theta}| + |x(6+6\theta)w_N^{2+2\theta}|\\ &\leq c|xw_N^{2+2\theta}|,\end{aligned} \tag{5-15}$$

e

$$\begin{aligned}|\partial_y^2(x^2 w_N^{2+2\theta})| &= |x^2\partial_y((2+2\theta)w_N^{1+2\theta}\partial_y w_N)|\\ &= |x^2[(2+2\theta)(1+2\theta)w_N^{2\theta}\partial_y w_N + ((2+2\theta)w_N^{1+2\theta}\partial_y^2 w_N)]|\\ &\leq c|x^2 w_N^{2\theta}\partial_y w_N| + |x^2 w_N^{1+2\theta}\partial_y^2 w_N|\\ &\leq c|xw_N^{2+2\theta}|.\end{aligned} \tag{5-16}$$

Além disso, pelo Lema 2.11, com $\alpha = 1/(2+\theta)$, $a = 4+2\theta$, $b = 2+\theta$, obtemos

$$\|J^2(w_N^{1+\theta}u)\| \leq c\|w_N^{2+\theta}u\|^{(1+\theta)/(2+\theta)}\|J^{4+2\theta}u\|^{1/(2+\theta)} \leq c\big(\|w_N^{2+\theta}u\| + \|J^{4+2\theta}u\|\big). \tag{5-17}$$

Utilizando integração por partes,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} x^2 w_N^{2+2\theta}u\partial_x\partial_y^2 u &= -\int_{\mathbb{R}^2}\partial_x(x^2 w_N^{2+2\theta})\partial_y^2 uu - \int_{\mathbb{R}^2} x^2 w_N^{2+2\theta}\partial_x u\partial_y^2 u\\ &= -\int_{\mathbb{R}^2}\partial_x(x^2 w_N^{2+2\theta})\partial_y^2 uu - \int_{\mathbb{R}^2}\partial_y^2(x^2 w_N^{2+2\theta})\partial_x uu\\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^2} 2\partial_y(x^2 w_N^{2+2\theta})\partial_y\partial_x uu - \int_{\mathbb{R}^2} x^2 w_N^{2+2\theta}u\partial_x\partial_y^2 u\\ &= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}(\partial_y^2(x^2 w_N^{2+2\theta})u\partial_x u + \partial_x(x^2 w_N^{2+2\theta})\partial_y^2 uu\\ &\quad + 2\partial_y(x^2 w_N^{2+2\theta})\partial_x\partial_y uu).\end{aligned}$$

Assim, as desigualdades (5-15), (5-16) e (5-17) garantem

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} x^2 w_N^{2+2\theta} u\partial_x\partial_y^2 u = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} &\Big(\partial_y^2\big(x^2 w_N^{2+2\theta}\big)u\partial_x u + \partial_x\big(x^2 w_N^{2+2\theta}\big)\partial_y^2 uu \\
&+ 2\partial_y\big(x^2 w_N^{2+2\theta}\big)\partial_x\partial_y uu\Big) \\
\leq\ & \|w_N^{1+\theta}\partial_x u\|\|xw_N^{1+\theta}u\| + \|xw_N^{1+\theta}u\|^2 + \|w_N^{1+\theta}\partial_y^2 u\|\|xw_N^{1+\theta}u\| + \\
&+ \|w_N^{1+\theta}\partial_x\partial_y u\|\|xw_N^{1+\theta}u\| \\
\leq\ & c\big(M_2^2 + \|xw_N^{1+\theta}u\|^2 + \|w_N^{1+\theta}\partial_y^2 u\|^2 + \|w_N^{1+\theta}\partial_x\partial_y u\|^2\big) \\
\leq\ & c\big(M_2^2 + \|xw_N^{1+\theta}u\|^2 + \|w_N^{2+\theta}u\|^2 + \|J^{4+2\theta}u\|^2\big) \\
\leq\ & c\big(M_2^2 + \|xw_N^{1+\theta}u\|^2 + \|yw_N^{1+\theta}u\|^2\big).
\end{aligned}
$$

Finalmente, o último termo do lado direito da desigualdade (5-12), utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, a desigualdade Hölder e a imersão de Sobolev, pode ser estimado por

$$
|(xw_N^{1+\theta}u, xw_N^{1+\theta}uu_x)| \leq \|xw_N^{1+\theta}u\|\|xw_N^{1+\theta}uu_x\| \leq \|xw_N^{1+\theta}u\|^2\|u_x\|_\infty \leq M_2\|xw_N^{1+\theta}u\|^2.
$$

Portanto, aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e as estimativas obtidas anteriormente, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|xw_N^{1+\theta}u\|^2 \leq & |(xw_N^{1+\theta}u, xw_N^{1+\theta}\mathcal{H}\partial_x^2 u)| + |(xw_N^{1+\theta}u, xw_N^{1+\theta}u_{xyy})| + |(xw_N^{1+\theta}u, xw_N^{1+\theta}uu_x)| \\
\leq & \|xw_N^{1+\theta}u\|\|xw_N^{1+\theta}\mathcal{H}\partial_x^2 u\| + c\big(M_2^2 + \|xw_N^{1+\theta}u\|^2 + \|yw_N^{1+\theta}u\|^2\big) \\
& + M_2\|xw_N^{1+\theta}u\|^2 \\
\leq & cM_2\|xw_N^{1+\theta}u\| + c\big(M_2^2 + \|xw_N^{1+\theta}u\|^2 + \|yw_N^{1+\theta}u\|^2\big) + M_2\|xw_N^{1+\theta}u\|^2.
\end{aligned} \tag{5-18}
$$

Assim, pela desigualdade de Young,

$$
\frac{d}{dt}\|xw_N^{1+\theta}u\|^2 \leq c\big(M_2^2 + \|xw_N^{1+\theta}u\|^2 + \|yw_N^{1+\theta}u\|^2\big). \tag{5-19}
$$

Um cálculo análogo, com y no lugar de x, nos dá

$$
\frac{d}{dt}\|yw_N^{1+\theta}u\|^2 \leq c\big(M_2^2 + \|xw_N^{1+\theta}u\|^2 + \|yw_N^{1+\theta}u\|^2\big). \tag{5-20}
$$

Pelas equações (5-19) e (5-20), aplicando a desigualdade de Grönwall e o Teorema da Convergência Monótona, estabelecemos a propriedade de persistência, provando assim o Caso (b).

Parte (ii). Também dividiremos em dois casos.

Caso (a): $r \in [5/2, 3)$ e $s \geq 2r$. Seja $r = 2 + \theta$, com $\theta \in [1/2, 1)$, $s \geq 2r$. Seja

$$M_3 = \sup_{[0,T]} \{ \| \langle x, y \rangle^{3/2+\theta} u \| + \| u \|_{H^s} \}.$$

Multiplicando a BO-ZK (1-2) por $x^4 w_N^{2\theta} u$ e integrando em $\mathbb{R}^2$, temos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| x^2 w_N^\theta u \|^2 + (x^2 w_N^\theta u, x^2 w_N^\theta \mathcal{H} \partial_x^2 u + x^2 w_N^\theta u_{xyy} + x^2 w_N^\theta u u_x) = 0 \tag{5-21}$$

Utilizando o fato de que

$$\mathcal{H} \partial_x^2 (x^2 u) = \mathcal{H} \partial_x (2xu + x^2 \partial_x u) = \mathcal{H}(2u + 4x \partial_x u + x^2 \partial_x^2 u)$$

implica que

$$x^2 \mathcal{H} \partial_x^2 u = \mathcal{H} \partial_x^2 (x^2 u) - 4 \mathcal{H} \partial_x (xu) + 2 \mathcal{H} u,$$

obtemos

$$\begin{aligned} w_N^\theta x^2 \mathcal{H} \partial_x^2 u &= w_N^\theta \mathcal{H} \partial_x^2 (x^2 u) - 4 w_N^\theta \mathcal{H} \partial_x (xu) + 2 w_N^\theta \mathcal{H} u \\ &= Q_1 + Q_2 + Q_3. \end{aligned}$$

Note que, pelo cálculo feito anteriormente no Capítulo 2, é válido (2-2) e como $\phi \in \dot{\mathcal{Z}}_{s,r}$, deduzimos que $\hat{\phi}(0, \eta) = \hat{u}(t, 0, \eta) = 0$, para todo $t \in [0, T]$. O que implica em $\mathcal{H}(xu) = x \mathcal{H} u$. De fato, calculando a transformada de Fourier de $\mathcal{H}(xu)$ e $x \mathcal{H} u$, temos

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{H}(xu)}(\xi, \eta) &= -i \,\mathrm{sgn}(\xi) \widehat{(xu)}(\xi, \eta) = -i \,\mathrm{sgn}(\xi) i \partial_\xi \hat{u} = i \partial_\xi \big(-i \,\mathrm{sgn}(\xi) \hat{u} \big) = i \partial_\xi \widehat{\mathcal{H} u} \\ &= \widehat{x \mathcal{H} u}(\xi, \eta). \end{aligned}$$

Logo, a limitação de $\mathcal{H}$ em L_x^2 nos dá

$$\| Q_3 \| = 2 \| w_N^\theta \mathcal{H} u \| \leq c \big(\| \mathcal{H} u \| + \| x \mathcal{H} u \| + \| y \mathcal{H} u \| \big) = c \big(\| u \| + \| \mathcal{H}(xu) \| + \| \mathcal{H}(yu) \| \big) \leq c M_3.$$

Observe que

$$Q_2 = w_N^\theta \mathcal{H} \partial_x (xu) = [w_N^\theta, \mathcal{H}] \partial_x (xu) + \mathcal{H} \big(w_N^\theta \partial_x (xu) \big) = Q_2^1 + Q_2^2. \tag{5-22}$$

Utilizando o Teorema 2.5,

$$\| Q_2^1 \| = \| [w_N^\theta, \mathcal{H}] \partial_x (xu) \| \leq c \| \partial_x w_N^\theta \|_\infty \| xu \| \leq c M_3.$$

Além disso, pela desigualdade de Minkowski e pelo Lema 2.11, temos

$$\begin{aligned}
\| Q_2^2\| &= \|\mathcal{H}(w_N^{\theta} u + x w_N^{\theta}\partial_x u)\|\\
&\leq \|\mathcal{H}(w_N^{\theta} u)\| + \|x w_N^{\theta}\partial_x u\|\\
&\leq \|\mathcal{H}\langle x,y\rangle^{\theta} u\| + \|\langle x,y\rangle^{\theta+1}\partial_x u\|\\
&\leq c\big(\|\langle x,y\rangle u\| + \|\langle x,y\rangle^{3/2+\theta} u\| + \|J^{3+2\theta}\|\big)\\
&\leq cM_3.
\end{aligned}$$

Para Q_1 podemos escrever

$$\begin{aligned}
Q_1 &= w_N^{\theta}\mathcal{H}\partial_x^2(x^2 u)\\
&= [w_N^{\theta},\mathcal{H}]\partial_x^2(x^2 u) + \mathcal{H}\big(w_N^{\theta}\partial_x^2(x^2 u)\big)\\
&= V_1 + \mathcal{H}\partial_x^2(x^2 w_N^{\theta} u) - 2\mathcal{H}\big(\partial_x w_N^{\theta}\partial_x(x^2 u)\big) - \mathcal{H}(\partial_x^2 w_N^{\theta} x^2 u)\\
&= V_1 + V_2 + V_3 + V_4,
\end{aligned}$$

pois

$$\mathcal{H}\partial_x^2(x^2 w_N^{\theta} u) = \mathcal{H}\big(\partial_x^2(x^2 u) w_N^{\theta} + 2\partial_x(x^2 u)\partial_x w_N^{\theta} + x^2 u\partial_x^2 w_N^{\theta}\big).$$

Inserindo V_2 em (5-21), observamos que sua contribuição é nula. Pelo Teorema 2.5, deduzimos

$$\| V_1\| = \|[w_N^{\theta},\mathcal{H}]\partial_x^2(x^2 u)\| \leq c\|\partial_x^2 w_N^{\theta}\|_\infty \|x^2 u\| \leq cM_3,$$

$$\| V_4\| = \|\mathcal{H}(\partial_x^2 w_N^{\theta} x^2 u)\| \leq c\|\partial_x^2 w_N^{\theta}\|_\infty \|x^2 u\| \leq cM_3.$$

Utilizando a regra de Leibniz, a desigualdade de Minkowski e aplicando o Lema 2.11, obtemos

$$\begin{aligned}
\| V_3\| &= \|2\mathcal{H}(\partial_x w_N^{\theta}\partial_x(x^2 u))\|\\
&= 2\|(\partial_x w_N^{\theta}(2xu + x^2\partial_x u))\|\\
&\leq c\big(\|x^2\partial_x w_N^{\theta}\partial_x u\| + 2\|x\partial_x w_N^{\theta} u\|\big)\\
&\leq c\big(\|x w_N^{\theta}\partial_x u\| + \|w_N^{\theta} u\|\big)\\
&\leq cM_3.
\end{aligned}$$

Também, pelas desigualdades de Cauchy-Schwarz e Hölder,

$$|(x^4 w_N^{2\theta} u, uu_x)| \leq \|x^4 w_N^{2\theta} u\|\|uu_x\| \leq \|u_x\|_\infty \|x^2 w_N^{\theta} u\|^2. \tag{5-23}$$

Cálculos semelhantes aos que foram feitos nos casos anteriores nos dão as desigualdades

$$|\partial_x(x^4 w_N^{2\theta})|, |\partial_y(x^4 w_N^{2\theta})|, |\partial_y^2(x^4 w_N^{2\theta})| \leq c|x^3 w_N^{2\theta}|. \tag{5-24}$$

Assim, integrando por partes e utilizando (5-24) juntamente com o Lema 2.11, obtemos

$$\begin{aligned}
\int x^4 w_N^{2\theta} u\partial_x\partial_y^2 u =& -\frac{1}{2}\int\Big(\frac{1}{2}\partial_y^2\big(x^4w_N^{2\theta}\big)u\partial_x u - \partial_x\big(x^4w_N^{2\theta}\big)\partial_y^2 uu - 2\partial_y(x^4w_N^{2\theta})\partial_x\partial_y uu\Big)\\
\leq& \int|\partial_y^2(x^4w_N^{2\theta})u\partial_x u| + \int|x^3w_N^{2\theta}\partial_y^2 uu| + \int|x^3w_N^{2\theta}\partial_x\partial_y uu|\\
\leq& \|x^2w_N^{\theta}u\|\|xw_N^{\theta}\partial_x u\| + \|xw_N^{\theta}\partial_y^2 u\|\|x^2w_N^{\theta}u\|\\
&+\|xw_N^{\theta}\partial_x\partial_y u\|\|x^2w_N^{\theta}u\|\\
\leq& c\big(M_3^2 + \|x^2w_N^{\theta}u\|^2 + \|xw_N^{\theta}\partial_y^2 u\|^2 + \|xw_N^{\theta}\partial_x\partial_y u\|^2\big)\\
=& c\big(M_3^2 + \|x^2w_N^{\theta}u\|^2 + F_1 + F_2\big).
\end{aligned}$$

Portanto, com as estimativas obtidas, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|x^2w_N^{\theta}u\|^2 \leq& |(x^2w_N^{\theta}u, x^2w_N^{\theta}\mathcal{H}\partial_x^2 u + x^2w_N^{\theta}u_{xyy} + x^2w_N^{\theta}uu_x)|\\
\leq& |(x^2w_N^{\theta}u, x^2w_N^{\theta}\mathcal{H}\partial_x^2 u)| + |(x^2w_N^{\theta}u, x^2w_N^{\theta}u_{xyy})| + |(x^4w_N^{2\theta}u, uu_x)|\\
\leq& \|x^2w_N^{\theta}u\|\|x^2w_N^{\theta}\mathcal{H}\partial_x^2 u\| + c\big(M_3^2 + \|x^2w_N^{\theta}u\|^2 + \|xw_N^{\theta}\partial_y^2 u\|^2\\
&+\|xw_N^{\theta}\partial_x\partial_y u\|^2\big) + M_3\|x^2w_N^{\theta}u\|^2\\
\leq& cM_3\|x^2w_N^{\theta}u\| + c\big(M_3^2 + \|x^2w_N^{\theta}u\|^2 + \|xw_N^{\theta}\partial_y^2 u\|^2 + \|xw_N^{\theta}\partial_x\partial_y u\|^2\big)\\
&+M_3\|x^2w_N^{\theta}u\|^2.
\end{aligned}$$

Logo, pela desigualdade de Young,

$$\frac{d}{dt}\|x^2w_N^{\theta}u\|^2 \leq c\big(M_3^2 + \|x^2w_N^{\theta}u\|^2 + \|xw_N^{\theta}\partial_y^2 u\|^2 + \|xw_N^{\theta}\partial_x\partial_y u\|^2\big). \tag{5-25}$$

Observe que a estimativa (5-25) não é suficientemente precisa para o nosso objetivo devido aos termos F_1 e F_2. Portanto, a seguir, iremos estimá-los. A ideia é obter uma estimativa da forma

$$\frac{d}{dt}G \leq cG, \tag{5-26}$$

onde G é uma soma de termos que inclui F_1 e F_2.

Derivando duas vezes com respeito a y em (1-2), multiplicando por $x^2w_N^{2\theta}\partial_y^2 u$ e integrando em $\mathbb{R}^2$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|xw_N^{\theta}\partial_y^2 u\|^2 + \big(xw_N^{\theta}\partial_y^2 u, xw_N^{\theta}\mathcal{H}\partial_x^2(\partial_y^2 u)\big) + \big(x^2w_N^{2\theta}\partial_y^2 u, \partial_x\partial_y^2\partial_y^2 u\big)\\
&+\big(x^2w_N^{2\theta}\partial_y^2 u, \partial_y^2(uu_x)\big) = 0.
\end{aligned} \tag{5-27}$$

Pela identidade

$$x\mathcal{H}\partial_x^2(\partial_y^2 u) = \mathcal{H}\big(\partial_x^2(x\partial_y^2 u)\big) - 2\mathcal{H}\partial_x\partial_y^2 u,$$

deduzimos

$$w_N^\theta x\mathcal{H}\partial_x^2(\partial_y^2 u) = w_N^\theta \mathcal{H}\big(\partial_x^2(x\partial_y^2 u)\big) - 2w_N^\theta \mathcal{H}\partial_x\partial_y^2 u = E_1 + E_2.$$

A seguir, decompomos

$$\begin{aligned} E_2 &= -2w_N^\theta \mathcal{H}\partial_x\partial_y^2 u \\ &= [w_N^\theta;\mathcal{H}]\partial_x\partial_y^2 u + \mathcal{H}(w_N^\theta\partial_x\partial_y^2 u) \\ &= E_2^1 + E_2^2. \end{aligned}$$

Então, pelo Teorema 2.5,

$$\|E_2^1\| \leq \|\partial_x w_N^\theta\|_\infty \|\partial_y^2 u\| \leq cM_3.$$

Aplicando o Lema 2.11, com $a = 3+2\theta$, $\alpha = \frac{3}{3+2\theta}$ e $b = 3/2+\theta$, temos

$$\|E_2^2\| \leq \|w_N^\theta \partial_x\partial_y^2 u\| \leq \|\langle x,y\rangle^\theta \partial_x\partial_y^2 u\| \leq M_3 + 2(\|\langle x,y\rangle^{3/2+\theta}u\| + \|J^{3+2\theta}u\|) \leq cM_3.$$

Agora, escrevemos

$$\begin{aligned} E_1 &= [w_N^\theta;\mathcal{H}]\partial_x^2(x\partial_y^2 u) + \mathcal{H}(w_N^\theta\partial_x^2(x\partial_y^2 u)) \\ &= k_1 + \mathcal{H}\partial_x^2(xw_N^\theta\partial_y^2 u) - 2\mathcal{H}\partial_x w_N^\theta \partial_x(x\partial_y^2 u) + \mathcal{H}(\partial_x^2 w_N^\theta x\partial_y^2 u) \\ &= k_1 + k_2 + k_3 + k_4. \end{aligned}$$

Utilizando novamente o Teorema 2.5 e a desigualdade de Hölder, garantimos

$$\|k_1\|, \|k_4\| \leq \|\partial_x^2 w_N^\theta\|_\infty \|x\partial_y^2 u\| \leq M_3.$$

Além disso, inserindo k_2 em (5-27), observando que sua contribuição é nula. Ainda,

$$\begin{aligned} k_3 &\leq \|\mathcal{H}\partial_x w_N^\theta \partial_y^2 u\| + \|\mathcal{H}\partial_x w_N^\theta x\partial_x\partial_y^2 u\| \\ &\leq \|w_N^{\theta-1}\partial_y^2 u\| + \|w_N^\theta \partial_x\partial_y^2 u\| \\ &\leq cM_3. \end{aligned}$$

Uma nova aplicação do Lema 2.11, com $a = 4+2\theta$, $\alpha = \frac{2}{2+\theta}$ e $b = 2+\theta$, nos dá

$$\|w_N^\theta \partial_y^2\partial_y^2 u\| \leq M_3 + \|w_N^{2+\theta}u\| + \|J^{4+2\theta}u\| \leq M_3 + \|x^2 w_N^\theta u\| + \|y^2 w_N^\theta u\|. \tag{5-28}$$

De maneira semelhante,

$$\|w_N^\theta \partial_x\partial_y\partial_y^2 u\| \leq M_3 + \|x^2 w_N^\theta u\| + \|y^2 w_N^\theta u\|. \tag{5-29}$$

Tomando as seguintes derivadas, é fácil ver que

$$|\partial_x(x^2 w_N^{2\theta})|, |\partial_y(x^2 w_N^{2\theta})|, |\partial_y^2(x^2 w_N^{2\theta})| \leq c|x w_N^{2\theta}|. \tag{5-30}$$

Usando as desigualdades (5-28), (5-29) e (5-30), e integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned}\int x^2 w_N^{2\theta} \partial_y^2 u \partial_x \partial_y^2 \partial_y^2 u =& -\frac{1}{2}\int \Big(\partial_y^2(x^2 w_N^{2\theta})\partial_y^2 u \partial_x \partial_y^2 u - \partial_x(x^2 w_N^{2\theta})\partial_y^2\partial_y^2 u \partial_y^2 u \\ & - 2\partial_y(x^2 w_N^{2\theta})\partial_x\partial_y\partial_y^2 u \partial_y^2 u\Big)\, dxdy \\ \leq & c\big(M_3^2 + \|w_N^\theta \partial_y^2 \partial_y^2 u\| \|x w_N^\theta \partial_y^2 u\| + \|w_N^\theta \partial_x \partial_y \partial_y^2 u\| \|x w_N^\theta \partial_y^2 u\|\big) \\ \leq & c\big(M_3^2 + \|x^2 w_N^\theta u\|^2 + \|y^2 w_N^\theta u\|^2 + \|x w_N^\theta \partial_y^2 u\|^2\big).\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\big(x^2 w_N^{2\theta}\partial_y^2 u, \partial_y^2(u u_x)\big) &= \big(x^2 w_N^{2\theta}\partial_y^2 u, \partial_y^2 u u_x + 2u_y u_{xy} + u u_{xyy}\big) \\ &\leq \|x w_N^\theta \partial_y^2 u\|^2 \|u_x\|_\infty + \|x w_N^\theta \partial_y^2 u\| \big(\|x w_N^\theta \partial_y u\| \|u_{xy}\|_\infty \\ &\quad + \|x w_N^\theta u\| \|u_{xyy}\|_\infty\big) \\ &\leq \big(M_3 + 1\big)\|x w_N^\theta \partial_y^2 u\|^2 + M_3.\end{aligned}$$

Com todas essas estimativas, podemos deduzir que

$$\frac{d}{dt}\|x w_N^\theta \partial_y^2 u\|^2 \leq c\big(M_3^2 + \|x^2 w_N^\theta u\|^2 + \|y^2 w_N^\theta u\|^2 + \|x w_N^\theta \partial_y^2 u\|^2\big). \tag{5-31}$$

Analogamente, conseguimos obter uma inequação envolvendo F_2.

Multiplicando a equação (1-2) por $y^4 w_N^{2\theta} u$, podemos obter uma estimativa similar à (5-25), na qual surgem dois termos adicionais análogos a F_1 e F_2, mas agora com um fator de multiplicação y no lugar de x. Portanto, podemos proceder exatamente como fizemos anteriormente.

Como passo final, definindo

$$g_1 = \|x^2 w_N^\theta u\|, \quad g_2 = \|x w_N^\theta \partial_y^2 u\|, \quad g_3 = \|x w_N^\theta \partial_x \partial_y u\|$$

e

$$g_4 = \|y^2 w_N^\theta u\|, \quad g_5 = \|y w_N^\theta \partial_y^2 u\|, \quad g_6 = \|y w_N^\theta \partial_x \partial_y u\|,$$

deduzimos o seguinte sistema de desigualdades

$$\frac{d}{dt} g_j^2 \leq c\sum_{i=1}^{6} g_i^2, \; j = 1, \ldots, 6.$$

Definindo $G = \sum_{i=1}^6 g_i^2$, obtemos a estimativa desejada (5-26). Assim como no primeiro

Caso (a), aplicando a desigualdade de Grönwall e o Teorema da Convergência Monótona, concluímos a prova deste caso.

Caso (b). Considere $r \in [3, 7/2)$ e $s \geq 2r$. Escreva $r = 2 + \theta$, onde $\theta \in [1, 3/2)$. Defina

$$M_4 = \sup_{[0,T]} \{ \| \langle x, y \rangle^{3/2+\theta} u \| + \| u \|_{H^s} \}.$$

Neste ponto, podemos proceder exatamente como no Caso (a) anterior para realizar as estimativas, exceto para os termos

$$\tilde{Q}_3 = 2 w_N^{\theta} \mathcal{H} u,$$

$$\tilde{Q}_2 = w_N^{\theta} \mathcal{H} \partial_x (xu),$$

e

$$\tilde{E}_2 = -2 w_N^{\theta} \mathcal{H} \partial_x \partial_y^2 u,$$

os quais podem ser estimados utilizando os Teoremas 2.2 e 2.4, bem como a Observação 2.3. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\| \tilde{Q}_3 \| &\leq 2 \| \langle x, y \rangle^{\theta} \mathcal{H} u \| \\
&\leq c \big(\| \langle x, y \rangle^{\theta - 1} \mathcal{H} u \| + \| x \langle x, y \rangle^{\theta - 1} \mathcal{H} u \| + \| y \langle x, y \rangle^{\theta - 1} \mathcal{H} u \| \big) \\
&\leq c \big(\| \mathcal{H} u \| + \| x \mathcal{H} u \| + \| |x|^{\theta - 1} \mathcal{H} u \| + \| |y|^{\theta - 1} \mathcal{H} u \| + \| x |x|^{\theta - 1} \mathcal{H} u \| + \\
&\quad + \| x |y|^{\theta - 1} \mathcal{H} u \| + \| y \mathcal{H} u \| + \| y |x|^{\theta - 1} \mathcal{H} u \| + \| y |y|^{\theta - 1} \mathcal{H} u \| \big) \\
&= c \big(\| \mathcal{H} u \| + \| \mathcal{H}(xu) \| + \| |x|^{\theta - 1} \mathcal{H} u \| + \| |y|^{\theta - 1} \mathcal{H} u \| + \| |x|^{\theta - 1} \mathcal{H}(xu) \| + \\
&\quad + \| |y|^{\theta - 1} \mathcal{H}(xu) \| + \| \mathcal{H}(yu) \| + \| |x|^{\theta - 1} \mathcal{H}(yu) \| + \| |y|^{\theta - 1} \mathcal{H}(yu) \| \big) \\
&\leq c \big(\| u \| + \| xu \| + c^* \| |x|^{\theta - 1} u \| + \| \mathcal{H}(|y|^{\theta - 1} u) \| + c^* \| |x|^{\theta - 1} xu \| + \\
&\quad + \| \mathcal{H}(|y|^{\theta - 1} xu) \| + \| yu \| + c^* \| |x|^{\theta - 1} yu \| + \| \mathcal{H}(|y|^{\theta - 1} yu) \| \big) \\
&\leq c \| \langle x, y \rangle^{\theta} u \| \\
&\leq c M_4,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{Q}_2\| &= 4\|w_N^{\theta}\mathcal{H}\partial_x(xu)\| \\
&\leq c\big(\|\langle x,y\rangle^{\theta-1}\mathcal{H}\partial_x(xu)\| + \|\langle x,y\rangle^{\theta-1}\mathcal{H}(x\partial_x(xu))\| + \|\langle x,y\rangle^{\theta-1}\mathcal{H}(y\partial_x(xu))\|\big) \\
&\leq c\big(\|\mathcal{H}\partial_x(xu)\| + \||x|^{\theta-1}\mathcal{H}\partial_x(xu)\| + \||y|^{\theta-1}\mathcal{H}\partial_x(xu)\| + \|\mathcal{H}(x\partial_x(xu))\| \\
&\quad + \||x|^{\theta-1}\mathcal{H}(x\partial_x(xu))\| + \||y|^{\theta-1}\mathcal{H}(x\partial_x(xu))\| + \|\mathcal{H}(y\partial_x(xu))\| \\
&\quad + \||x|^{\theta-1}\mathcal{H}(y\partial_x(xu))\| + \||y|^{\theta-1}\mathcal{H}(y\partial_x(xu))\|\big) \\
&\leq c\big(\|\partial_x(xu)\| + c^*\||x|^{\theta-1}\partial_x(xu)\| + \||y|^{\theta-1}\partial_x(xu)\| + \|x\partial_x(xu)\| \\
&\quad + c^*\||x|^{\theta-1}x\partial_x(xu)\| + \||y|^{\theta-1}x\partial_x(xu)\| + \|y\partial_x(xu)\| + c^*\||x|^{\theta-1}y\partial_x(xu)\| \\
&\quad + \||y|^{\theta-1}y\partial_x(xu)\|\big) \\
&\leq c\big(M_4 + \|\langle x,y\rangle^{\theta}u\| + \|\langle x,y\rangle^{\theta+1}\partial_x u\|\big) \\
&\leq c\big(M_4 + \|\langle x,y\rangle^{3/2+\theta}u\| + \|J^{3+2\theta}u\|\big) \\
&\leq cM_4,
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{E}_2\| &\leq \|\langle x,y\rangle^{\theta-1}\mathcal{H}\partial_x\partial_y^2 u\| + \|\langle x,y\rangle^{\theta-1}x\mathcal{H}\partial_x\partial_y^2 u\| + \|\langle x,y\rangle^{\theta-1}y\mathcal{H}\partial_x\partial_y^2 u\| \\
&\leq \|\langle x,y\rangle^{\theta-1}\mathcal{H}\partial_x\partial_y^2 u\| + \|\langle x,y\rangle^{\theta-1}\mathcal{H}(x\partial_x\partial_y^2 u)\| \\
&\quad + \|\langle x,y\rangle^{\theta-1}\mathcal{H}(y\partial_x\partial_y^2 u)\| \\
&\leq c\big(\|\mathcal{H}\partial_x\partial_y^2 u\| + \||x|^{\theta-1}\mathcal{H}(x\partial_x\partial_y^2 u)\| + \||y|^{\theta-1}\mathcal{H}(y\partial_x\partial_y^2 u)\| \\
&\quad + \|\mathcal{H}(x\partial_x\partial_y^2 u)\| + \||x|^{\theta-1}\mathcal{H}(x\partial_x\partial_y^2 u)\| + \||y|^{\theta-1}\mathcal{H}(x\partial_x\partial_y^2 u)\| \\
&\quad + \|\mathcal{H}(y\partial_x\partial_y^2 u)\| + \||x|^{\theta-1}\mathcal{H}(y\partial_x\partial_y^2 u)\| + \||y|^{\theta-1}\mathcal{H}(y\partial_x\partial_y^2 u)\|\big) \\
&\leq c\|\langle x,y\rangle^{\theta}\partial_x\partial_y^2 u\| \\
&\leq M_4 + 2(\|\langle x,y\rangle^{3/2+\theta}u\| + \|J^{3+2\theta}u\|) \\
&\leq cM_4.
\end{aligned}
$$

A partir deste ponto, procedemos como no Caso (a) e concluímos a prova do Caso (b). Portanto, a demonstração do Teorema 1.4 está completa.

□

CAPÍTULO 6

Princípios de continuação única

Neste capítulo, provaremos os Teoremas 1.5 e 1.6, seguindo os argumentos apresentados em [9]. A ideia principal é analisar o mau comportamento da equação BO-ZK (1-2) na direção x. Ressaltamos que uma abordagem semelhante foi aplicada com sucesso à equação de Benjamin em [23].

6.1 Teorema 1.5

Prova. Note que a solução de (1-2) pode ser representada pela fórmula de Duhamel

$$u(t) = U(t)\phi - \int_0^t U(t-\tau)u(\tau)\partial_x u(\tau)\, d\tau, \tag{6-1}$$

onde $U(t)\phi$ é a solução do PVI associado à equação BO-ZK linear. De fato, tomando $\mu = 0$ em (3-1) e procedendo de forma análoga a (3-3), obtemos $\widehat{u}(\xi,\eta,t) = e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\widehat{\phi}(\xi,\eta)$ e

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(x\xi+y\eta)} e^{-t(i\xi|\xi|-i\xi\eta^2)}\widehat{\phi}(\xi,\eta)\, d\xi d\eta \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(t(-\xi|\xi|+\xi\eta^2)+x\xi+y\eta)}\widehat{\phi}(\xi,\eta)\, d\xi d\eta \\ &:= U(t)\phi(x,y). \end{aligned}$$

Aplicando o mesmo procedimento com $-uu_x = G$ em (1-2), obtemos a seguinte EDO:

$$\widehat{u_t} + (i\xi|\xi| - i\xi\eta^2)\hat{u} = \widehat{G}.$$

Multiplicando-a pelo fator integrante $\varphi(t) = e^{t(i\xi|\xi|-i\xi\eta^2)}$, temos

$$\widehat{u_t}\varphi(t) + \varphi(t)(i\xi|\xi| - i\xi\eta^2)\hat{u} = \varphi(t)\widehat{G},$$

isto é, $\frac{d}{dt}(\widehat{u}\varphi) = \varphi(t)\widehat{G}$. Observe que, integrando de 0 a t de ambos os lados da equação anterior, obtemos

$$\widehat{u}(t)\varphi(t) - \widehat{u}(0)\varphi(0) = \int_0^t \varphi(\tau)\widehat{G}(\tau)d\tau.$$

Portanto,

$$\widehat{u}(t)\varphi(t) = \widehat{\phi} + \int_0^t \varphi(\tau)\widehat{G}(\tau)d\tau.$$

Multiplicando por $\varphi(-t)$ segue que

$$\widehat{u}(t) = e^{-t(i\xi|\xi|-i\xi\eta^2)}\widehat{\phi} + \int_0^t e^{(\tau-t)(i\xi|\xi|-i\xi\eta^2)}\widehat{(-uu_x)}(\tau)d\tau,$$

e calculando a transformada de Fourier inversa de ambos os lados, obtemos

$$u(t) = U(t)\phi - \int_0^t U(t-\tau)u(\tau)\partial_x u(\tau)d\tau,$$

como afirmamos.

Sem perda de generalidade, assuma $t_1 = 0$. Então, como $\phi \in \mathcal{Z}_{5,5/2}$, segue pelo Teorema 1.4 que

$$u \in C([0,T]; H^5 \cap L^2_r),\ 0 < r < 5/2. \tag{6-2}$$

Multiplicando (6-1) por $|x|^{5/2}$ e tomando a transformada de Fourier, obtemos

$$D_\xi^{1/2}\partial_\xi^2(\widehat{u(t)}) = D_\xi^{1/2}\partial_\xi^2(e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\widehat{\phi}) - \int_0^t D_\xi^{1/2}\partial_\xi^2(e^{i(t-\tau)\xi(\eta^2-|\xi|)}\widehat{z})d\tau, \tag{6-3}$$

onde $z = \frac{1}{2}\partial_x u^2$. Fixado $t \in [0,T]$, observe que, se $\langle x,y\rangle^{5/2}\, U(t)\phi \in L^2(\mathbb{R}^2)$, então $|x|^{5/2}\, U(t)\phi \in L^2(\mathbb{R}^2)$, o que, pela identidade de Plancherel, implica que

$$D_\xi^{1/2}\partial_\xi^2(e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\widehat{\phi}) \in L^2(\mathbb{R}^2).$$

Vamos provar que isso é possível somente se $\widehat{\phi}(0,\eta) = 0$, para todo $\eta \in \mathbb{R}$. A ideia é a seguinte: como

$$\begin{aligned}\partial_\xi^2(e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\widehat{\phi}) =& \partial_\xi\big(e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\partial_\xi\widehat{\phi} + (it\eta^2 - 2it|\xi|)e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\widehat{\phi}\big)\\ =& e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\Big(\big(-2it\mathrm{sgn}(\xi) - 4t^2\xi^2 + 4t^2\eta^2|\xi| - t^2\eta^4\big)\widehat{\phi} + \big(2it\eta^2\\ &-4it|\xi|\big)\partial_\xi\widehat{\phi} + \partial_\xi^2\widehat{\phi}\Big),\end{aligned} \tag{6-4}$$

provaremos que todos os termos em (6-3), exceto aquele envolvendo sgn(ξ), provenientes da parte linear (veja (6-4)), possuem decaimento adequado para todo $t \in [0,T]$. Isso, por sua vez, implicará o resultado desejado.

Por um lado, na direção x, a equação BO-ZK (1-2) apresenta um comportamento similar ao da equação BO. Assim, seguindo as ideias de [9], precisamos realizar uma localização na direção ξ. Por outro lado, para controlar todos os termos, é necessário algum decaimento forte na direção η, embora não seja necessária a localização. Para isso, definimos $\chi(\xi,\eta) = \widetilde{\chi}(\xi)e^{-\eta^2}$, onde $\widetilde{\chi} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ é tal que $supp\,\widetilde{\chi} \subset (-\epsilon,\epsilon)$ e $\widetilde{\chi} = 1 \in (-\epsilon/2,\epsilon/2)$. Note que, em particular, $\chi \in L^\infty_\eta H^2_\xi$.

Com a função χ definida, escrevemos a parte linear da fórmula de Duhamel como

$$\begin{aligned}\chi D_\xi^{1/2}\partial_\xi^2(e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\widehat{\phi}) &= [\chi, D_\xi^{1/2}]\partial_\xi^2(e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\widehat{\phi}) + D_\xi^{1/2}\big(\chi\partial_\xi^2(e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\widehat{\phi})\big)\\ &= A + B.\end{aligned}$$

A constante c que aparecerá a seguir depende de T e das normas de χ. Pela Proposição 2.12, pelo Lema 2.11, pela identidade de Plancherel e por (6-4), segue que

$$\begin{aligned}\|A\| =& \big\| \|[\chi, D_\xi^{1/2}]\partial_\xi^2(e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\widehat{\phi})\|_{L^2_\xi}\big\|_{L^2_\eta}\\ \leq& c\big\| \|\chi\|_{H^1_\xi}\|\partial_\xi^2(e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\widehat{\phi})\|_{L^2_\xi}\big\|_{L^2_\eta}\\ \leq& c\big(\|\widehat{\phi}\| + \|\xi^2\widehat{\phi}\| + \|\eta^2\xi\widehat{\phi}\| + \|\eta^4\widehat{\phi}\| + \|\eta^2\partial_\xi\widehat{\phi}\| + \|\xi\partial_\xi\widehat{\phi}\| + \|\partial_\xi^2\widehat{\phi}\|\big)\\ =& c\big(\|\phi\| + \|\partial_x^2\phi\| + \|\partial_y^2\partial_x\phi\| + \|\partial_y^4\phi\| + \|\partial_y^2(x\phi)\| + \|\partial_x(x\phi)\| + \|x^2\phi\|\big).\end{aligned} \tag{6-5}$$

Todos os termos no lado direito de (6-5) são finitos, uma vez que $\phi \in \mathcal{Z}_{4,2}$.

Agora, escrevemos

$$\begin{aligned}B =& D_\xi^{1/2}\Big(\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\big((-2it\,\mathrm{sgn}(\xi) - 4t^2\xi^2 + 4t^2\eta^2|\xi| - t^2\eta^4)\widehat{\phi} + (2it\eta^2 - 4it|\xi|)\partial_\xi\widehat{\phi}\\ &+ \partial_\xi^2\widehat{\phi}\big)\Big)\\ =& B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5 + B_6 + B_7.\end{aligned}$$

Vamos estimar a norma L^2 de B_7. O Teorema 2.6, a Proposição 2.8 e o Lema 2.9 implicam que

$$
\begin{aligned}
\|B_7\| =& \|D_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\partial_\xi^2\widehat{\phi})\|\\
=& \|\|D_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\partial_\xi^2\widehat{\phi})\|_{L^2_\xi}\|_{L^2_\eta}\\
\le& c\big(\|\|\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\partial_\xi^2\widehat{\phi}\|_{L^2_\xi}+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\partial_\xi^2\widehat{\phi})\|_{L^2_\xi}\|_{L^2_\eta}\big)\\
\le& c\big(\|\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\partial_\xi^2\widehat{\phi}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\partial_\xi^2\widehat{\phi})\|\big)\\
\le& c\big(\|x^2\phi\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{-it\xi|\xi|})\chi e^{it\xi\eta^2}\partial_\xi^2\widehat{\phi}\|+\|e^{-it\xi|\xi|}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi\eta^2}\partial_\xi^2\widehat{\phi})\|\big)\\
\le& c\big(\|x^2\phi\|+\|(t^{1/4}+t^{1/2}|\xi|^{1/2})\chi\partial_\xi^2\widehat{\phi}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{it\xi\eta^2})\chi\partial_\xi^2\widehat{\phi}\|+\|e^{it\xi\eta^2}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\partial_\xi^2\widehat{\phi})\|\big)\\
\le& c\big(\|x^2\phi\|+\|(t^{1/4}+t^{1/2}|\xi|^{1/2})\chi\|_\infty\|\partial_\xi^2\widehat{\phi}\|+\|(\eta^2 t)^{1/2}\chi\partial_\xi^2\widehat{\phi}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi)\partial_\xi^2\widehat{\phi}\|\\
&+\|\chi\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\partial_\xi^2\widehat{\phi})\|\big)\\
\le& c\big(\|x^2\phi\|+\|(\eta^2 t)^{1/2}\chi\|_\infty\|\partial_\xi^2\widehat{\phi}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi)\|_\infty\|\partial_\xi^2\widehat{\phi}\|+\|\chi\|_\infty\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}\partial_\xi^2\widehat{\phi}\|\big)\\
\le& c\|\langle x,y\rangle^{2+1/2}\phi\|.
\end{aligned}
$$

As estimativas de B_2, B_3, B_4, B_5 e B_6 em $L^2(\mathbb{R}^2)$ são obtidas de forma análoga; por isso, omitimos os detalhes. Note que não estimamos B_1. No entanto, se mostrarmos que a parte integral da fórmula de Duhamel pertence a $L^2(|x|^5dxdy)$, então poderemos concluir que $B_1 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ para qualquer $t \in [0, T]$ fixado.

Para isso, realizamos novamente a localização utilizando a função χ. Por meio de comutadores, a parte integral em (6-3) pode ser escrita como

$$
\begin{aligned}
\int_0^t &[\chi, D_\xi^{1/2}]\Big(e^{i(t-\tau)\xi(\eta^2-|\xi|)}\big(-2i(t-\tau)\mathrm{sgn}(\xi)\hat{z}-4(t-\tau)^2\xi^2\hat{z}+4(t-\tau)^2\eta^2|\xi|\hat{z}\\
&-(t-\tau)^2\eta^4\hat{z}-4(t-\tau)|\xi|\partial_\xi\hat{z}+2i(t-\tau)\eta^2\partial_\xi\hat{z}+\partial_\xi^2\hat{z}\big)\Big)\\
&+D_\xi^{1/2}\Big(\chi\big(e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}(-2i(t-\tau)\mathrm{sgn}(\xi)\hat{z}-4(t-\tau)^2\xi^2\hat{z}+4(t-\tau)^2\eta^2|\xi|\hat{z}\\
&-(t-\tau)^2\eta^4\hat{z}-4i(t-\tau)|\xi|\partial_\xi\hat{z}+2i(t-\tau)\eta^2\partial_\xi\hat{z}+\partial_\xi^2\hat{z})\big)\Big)d\tau\\
=& C_1+\ldots+C_7+D_1+\ldots+D_7,
\end{aligned} \tag{6-6}
$$

Observe que os termos que envolvem a maior regularidade e decaimento são C_4 e D_7, respectivamente. Em seguida, apresentaremos as estimativas de suas normas em L^2. Pela

Proposição 2.12, obtemos

$$
\begin{aligned}
\|C_4\| =&\|[\chi, D_\xi^{1/2}]e^{i(t-\tau)\xi(\eta^2-|\xi|)}(t-\tau)^2\eta^4\hat{z}\| \\
\leq& t^2\|\|\|\chi\|_{H_\xi^1}\|e^{i(t-\tau)\xi(\eta^2-|\xi|)}(t-\tau)^2\eta^4\hat{z}\|_{L_\xi^2}\|_{L_\eta^2}\|_{L_T^1} \\
\leq& c\|\|\partial_y^4 z\|\|_{L_T^1} \\
\leq& c\|\|\partial_y^4\partial_x u^2\|\|_{L_T^1} \\
\leq& c\|u\|^2_{L_T^\infty H^5}.
\end{aligned} \tag{6-7}
$$

O lado direito de (6-7) é finito em decorrência de (6-2).

Quanto à norma L^2 de D_7, observe primeiro que, utilizando o Lema 2.11, deduzimos que

$$
xu \in H^2(\mathbb{R}^2) \text{ e } \||x|^{3/2}\partial_x u\| \leq c\big(\|u\|_{\mathcal{Z}_{4,2}} + \|\langle x, y\rangle^{1/2} u\|\big). \tag{6-8}
$$

Seja $\bar{D}_7 = D_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-\tau)\xi(\eta^2-|\xi|)})\partial_\xi^2\hat{z}$. O Teorema 2.6, a Proposição 2.8, o Lema 2.9 e (6-8) garantem que

$$
\begin{aligned}
\|\bar{D}_7\| =&\|D_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-\tau)\xi(\eta^2-|\xi|)})\partial_\xi^2\hat{z}\| \\
=&\|\|D_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-\tau)\xi(\eta^2-|\xi|)})\partial_\xi^2\hat{z}\|_{L_\xi^2}\|_{L_\eta^2} \\
\leq&\|\|\chi e^{i(t-\tau)\xi(\eta^2-|\xi|)}\partial_\xi^2\hat{z}\|_{L_\xi^2} + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-\tau)\xi(\eta^2-|\xi|)}\partial_\xi^2\hat{z})\|_{L_\xi^2}\|_{L_\eta^2} \\
\leq& c\big(\|\chi e^{i(t-\tau)\xi(\eta^2-|\xi|)}\partial_\xi^2\hat{z}\| + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-\tau)\xi(\eta^2-|\xi|)}\partial_\xi^2\hat{z})\|\big) \\
\leq& c\big(\|x^2 z\| + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{-i(t-\tau)\xi|\xi|})\chi e^{i(t-\tau)\xi\eta^2}\| + \|e^{-i(t-\tau)\xi|\xi|}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-\tau)\xi\eta^2}\partial_\xi^2\hat{z})\|\big) \\
\leq& c\big(\|x^2 z\| + \|\chi(T^{1/4} + T^{1/2}|\xi|^{1/2})\|_\infty\|\partial_\xi^2\hat{z}\| + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{i(t-\tau)\xi\eta^2})\chi\partial_\xi^2\hat{z}\| \\
&+ \|e^{i(t-\tau)\xi\eta^2}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\partial_\xi^2\hat{z})\|\big) \\
\leq& c\big(\|x^2 z\| + \|(\eta^2 t)^{1/2}\chi\|_\infty\|\partial_\xi^2\hat{z}\| + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi)\|_\infty\|\partial_\xi^2\hat{z}\| + \|\chi\|_\infty\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}\partial_\xi^2\hat{z}\|\big) \\
\leq& c\big(\|x^2 z\| + \|D_\xi^{1/2}\partial_\xi^2\hat{z}\|\big) \\
=& c\big(\|x^2 z\| + \||x|^{2+1/2} z\|\big) \\
\leq& c\big(\|x^2 u u_x\| + \||x|^{2+1/2} u u_x\|\big) \\
\leq& c\big(\|u_x\|_\infty\|x^2 u\| + \||x|^{3/2}\partial_x u\|\|xu\|_{L^\infty}\big) \\
\leq& c\big(\|u_x\|_\infty\|x^2 u\| + \|xu\|_\infty\|u\|_{\mathcal{Z}_{4,2}} + \|\langle x, y\rangle^{1/2} u\|\big).
\end{aligned}
$$

Consequentemente,

$$
\|D_7\| \leq \|\|\bar{D}_7\|\|_{L_T^1} < \infty.
$$

Como $\hat{z}(0) = \frac{1}{2}\widehat{\partial_x u^2}(0) = \frac{1}{2}(i.0)\widehat{u^2} = 0$, podemos estimar D_1 da seguinte forma. Primeiramente, observe que, pela identidade de Plancherel, pelo fato de que $\mathcal{H}$ é isometria em L^2

e pela desigualdade de Minkowski, temos

$$\begin{aligned}
\|D_\xi^{1/2}(\mathrm{sgn}(\xi)\hat{z})\| &= \|\widehat{|x|^{1/2}\mathcal{H}z}\| \\
&\leq \|(1+|x|)^{1/2}\mathcal{H}z\| \\
&\leq \|(1+|x|)\mathcal{H}z\| \\
&\leq \|z\| + \|x\mathcal{H}z\| \\
&\leq \|z\| + \|\mathcal{H}(xz)\| \\
&\leq \|z\| + \|xz\| \\
&\leq c\|u\|_{\mathcal{Z}_{4,2}}.
\end{aligned} \tag{6-9}$$

Seja $\bar{D}_1 = D_\xi^{1/2}\Big(\chi\big(e^{i(t-\tau)\xi(\eta^2-|\xi|)}((t-\tau)\mathrm{sgn}(\xi)\hat{z})\big)\Big)$. O Teorema 2.6, a Proposição 2.8, o Lema 2.9 e (6-9) garantem que

$$\begin{aligned}
\|\bar{D}_1\| &= \|D_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-\tau)\xi(\eta^2-|\xi|)}\mathrm{sgn}(\xi)\hat{z})\| \\
&= \|\|D_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-\tau)\xi(\eta^2-|\xi|)}\mathrm{sgn}(\xi)\hat{z})\|_{L^2_\xi}\|_{L^2_\eta} \\
&\leq \|\|\|\chi e^{i(t-\tau)\xi(\eta^2-|\xi|)}\mathrm{sgn}(\xi)\hat{z}\|_{L^2_\xi} + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-\tau)\xi(\eta^2-|\xi|)}\mathrm{sgn}(\xi)\hat{z})\|_{L^2_\xi}\|_{L^2_\eta} \\
&\leq c\big(\|\chi e^{i(t-\tau)\xi(\eta^2-|\xi|)}\mathrm{sgn}(\xi)\hat{z}\| + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-\tau)\xi(\eta^2-|\xi|)}\mathrm{sgn}(\xi)\hat{z})\|\big) \\
&\leq c\big(\|z\| + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{-i(t-\tau)\xi|\xi|})\chi e^{i(t-\tau)\xi\eta^2}\mathrm{sgn}(\xi)\hat{z}\| \\
&+ \|e^{-i(t-\tau)\xi|\xi|}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{i(t-\tau)\xi\eta^2}\mathrm{sgn}(\xi)\hat{z})\|\big) \\
&\leq c\big(\|z\| + \|\chi(T^{1/4}+T^{1/2}|\xi|^{1/2})\|_\infty\|\mathrm{sgn}(\xi)\hat{z}\| + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{i(t-\tau)\xi\eta^2})\chi\mathrm{sgn}(\xi)\hat{z}\| \\
&+ \|e^{i(t-\tau)\xi\eta^2}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\mathrm{sgn}(\xi)\hat{z})\|\big) \\
&\leq c\big(\|z\| + \|(\eta^2 t)^{1/2}\chi\|_\infty\|\mathrm{sgn}(\xi)\hat{z}\| + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi)\|_\infty\|\mathrm{sgn}(\xi)\hat{z}\| + \|\chi\|_\infty\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\mathrm{sgn}(\xi)\hat{z})\|\big) \\
&\leq c\big(\|z\| + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\mathrm{sgn}(\xi)\hat{z})\|\big) \\
&\leq c\|u\|_{\mathcal{Z}_{4,2}}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\|D_1\| \leq \|\bar{D}_1\|_{L^1_T} < \infty$.

Os demais termos em (6-6) são estimados de maneira análoga; por isso, omitimos os detalhes. Portanto, as estimativas anteriores das partes linear e integral de (6-3), juntamente com o fato de que $u(t_2) \in \mathcal{Z}_{5,5/2}$, nos permitem concluir que

$$B_1 = -2it_2 D_\xi^{1/2}\big(\chi e^{it_2\xi(\eta^2-|\xi|)}\mathrm{sgn}(\xi)\widehat{\phi}\big) \in L^2(\mathbb{R}^2).$$

O Teorema de Fubini garante, então, que $B_1 \in L^2_\xi(\mathbb{R})$ para quase todo $\eta \in \mathbb{R}$. Assim, pelo Teorema 2.6, deduzimos

$$\mathcal{D}_\xi^{1/2}\big(\chi e^{it_2\xi(\eta^2-|\xi|)}\mathrm{sgn}(\xi)\widehat{\phi}\big) \in L^2_\xi(\mathbb{R}),\ \text{q.t.p. } \eta \in \mathbb{R}. \tag{6-10}$$

Uma aplicação da Proposição 2.10 nos dá

$$\widehat{\phi}(0,\eta) = 0, \text{ q.t.p. } \eta \in \mathbb{R}.$$

Como $\widehat{\phi}$ é contínua, segue que $\widehat{\phi}(0,\eta) = 0$ para todo $\eta \in \mathbb{R}$. Com isso, a conclusão do teorema decorre de (2-2).

□

6.2 Teorema 1.6

Prova. Sem perda de generalidade, assuma $t_1 = 0 < t_2 < t_3$. Nesta demonstração, seguiremos também os argumentos de [9]. Inicialmente, multiplicando (6-1) por $|x|^{7/2}$ e tomando a transformada de Fourier, obtemos

$$D_\xi^{1/2}\partial_\xi^3\widehat{u(t)} = D_\xi^{1/2}F(t,\xi,\eta,\widehat{\phi}) - \int_0^t D_\xi^{1/2}F(t-\tau,\xi,\eta,\hat{z}(\tau))\,d\tau, \tag{6-11}$$

onde $F(t,\xi,\eta,\widehat{\phi}) = \partial_\xi^3(e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\widehat{\phi})$ e $z = \frac{1}{2}\partial_x u^2$. Assim, o Teorema de Plancherel garante que, se assumirmos que o lado direito de (6-11) pertence a $L^2(\mathbb{R}^2)$ para $t_1 = 0 < t_2 < t_3$, então chegaremos a uma contradição.

Primeiramente, note que nossas suposições, juntamente com os Teoremas 1.4 e 1.5, implicam que

$$u \in C([0,T]; H^7 \cap L_r^2), \; \frac{5}{2} \leq r < \frac{7}{2}.$$

Além disso, derivando (6-4) em relação a ξ, temos

$$\begin{aligned}
\partial_\xi^3(e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\widehat{\phi}) = &\big(it\eta^2 - 2it|\xi|\big)\, e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\Big(\big(-2it\,\mathrm{sgn}(\xi) - 4t^2\xi^2 + 4t^2\eta^2|\xi| - t^2\eta^4\big)\widehat{\phi}\\
&+ \big(2it\eta^2 - 4it|\xi|\big)\partial_\xi\widehat{\phi} + \partial_\xi^2\widehat{\phi}\Big) + e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\Big((-2it\,\mathrm{sgn}(\xi) - 4t^2\xi^2\\
&+ 4t^2\eta^2|\xi| - t^2\eta^4)\partial_\xi\widehat{\phi} + \big(-4it\delta_\xi - 8t^2\xi + 4t^2\eta^2\mathrm{sgn}(\xi)\big)\widehat{\phi}\\
&+ (2it\eta^2 - 4it|\xi|)\partial_\xi^2\widehat{\phi} + \big(-4it\,\mathrm{sgn}(\xi)\big)\partial_\xi\widehat{\phi} + \partial_\xi^3\widehat{\phi}\Big)\\
= &\Big(\big(-4it\delta_\xi - it^3\eta^6 - 12t^2\xi + 6t^2\eta^2\mathrm{sgn}(\xi) + 8it^3|\xi|^3\\
&+ 6it^3\eta^4|\xi| - 12it^3\eta^2\xi^2\big)\widehat{\phi} + \big(-6it\,\mathrm{sgn}(\xi) - 12t^2\xi^2 + 12t^2\eta^2|\xi|\\
&- 3t^2\eta^4\big)\partial_\xi\widehat{\phi} + 3it(\eta^2 - 2|\xi|)\partial_\xi^2\widehat{\phi} + \partial_\xi^3\widehat{\phi}\Big)\, e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)},
\end{aligned} \tag{6-12}$$

onde δ_ξ é a distribuição delta de Dirac com respeito a ξ, isto é, $\langle\delta_\xi,\varphi\rangle = \varphi(0,\eta)$, para toda $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

A demonstração segue de forma semelhante aos argumentos da Seção 6.1. Utilizaremos novamente $\chi(\xi,\eta)=\widetilde{\chi}(\xi)e^{-\eta^2}$, onde $\widetilde{\chi}\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ é tal que $supp\,\widetilde{\chi}\subset(-\epsilon,\epsilon)$ e $\widetilde{\chi}=1\in(-\epsilon/2,\epsilon/2)$. Em seguida, escrevemos

$$\begin{aligned}\chi D_\xi^{1/2}\partial_\xi^3(e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\widehat{\phi}) &= [\chi,D_\xi^{1/2}]\partial_\xi^3(e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\widehat{\phi})+D_\xi^{1/2}\big(\chi\partial_\xi^3(e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\widehat{\phi})\big)\\ &=\tilde{A}+\tilde{B}.\end{aligned}$$

Para estimar a norma L^2 de $\tilde{A}$, podemos proceder de forma análoga ao que fizemos para A na Seção 6.1; por isso, omitimos os detalhes.

Observe que,

$$\begin{aligned}\tilde{B}=&D_\xi^{1/2}\big(\chi\partial_\xi^3(e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\widehat{\phi})\big)\\ =&D_\xi^{1/2}\Big(\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\big((-4it\delta_\xi-it^3\eta^6-24t^2\xi+6t^2\eta^2\mathrm{sgn}(\xi)+8it^3|\xi|^3\\ &+6it^3\eta^4|\xi|-12it^3\eta^2\xi^2)\widehat{\phi}+(-6it\mathrm{sgn}(\xi)-12t^2\xi^2+12t^2\eta^2|\xi|\\ &-3t^2\eta^4)\partial_\xi\widehat{\phi}+3it(\eta^2-2|\xi|)\partial_\xi^2\widehat{\phi}+\partial_\xi^3\widehat{\phi}\big)\Big)\\ =&\tilde{B}_2+\cdots+\tilde{B}_{14}.\end{aligned}\tag{6-13}$$

A partir de nossas suposições, o Teorema 1.5 implica que o dado inicial ϕ também pertence a $\dot{\mathcal{Z}}_{5,5/2}$. Desse modo, o primeiro termo envolvendo a delta de Dirac em (6-13) deve desaparecer; ou seja, o termo B_1 não aparece. Para estimar $\tilde{B}_4$, utilizamos que $\widehat{\phi}(0,\eta)=0$. Em resumo, estimaremos em detalhes apenas os termos mais complexos, $\tilde{B}_2$ e $\tilde{B}_{14}$, que envolvem a maior regularidade e decaimento do dado inicial. Os demais termos, exceto $\tilde{B}_8$, podem ser tratados de forma análoga.

Pelo Teorema 2.6, pela equação (2-9), pela Proposição 2.8, pelo Lema 2.9 e pela desigualdade de Hölder, segue que

$$\begin{aligned}\|\tilde{B}_2\|\le&c\big(\|\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\eta^6\widehat{\phi}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\eta^6\widehat{\phi})\|\big)\\ \le&c\big(\|\eta^6\widehat{\phi}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{-it|\xi|\xi})\chi e^{it\xi\eta^2}\eta^6\widehat{\phi}\|+\|e^{-it\xi|\xi|}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\eta^6\widehat{\phi})\|\big)\\ \le&c\big(\|\eta^6\widehat{\phi}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{it\xi\eta^2})\chi\eta^6\widehat{\phi}\|+\|e^{it\xi\eta^2}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi\eta^2}\eta^6\widehat{\phi})\|\big)\\ \le&c\big(\|\eta^6\widehat{\phi}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\eta^6)\widehat{\phi}\|+\|\chi\eta^6\mathcal{D}_\xi^{1/2}\widehat{\phi}\|\big)\\ \le&c\big(\|\eta^6\widehat{\phi}\|+\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\eta^6)\|_\infty\|\widehat{\phi}\|+\|\chi\eta^6\|_\infty\|\mathcal{D}_\xi^{1/2}\widehat{\phi}\|\big)\\ \le&c\big(\|\eta^6\widehat{\phi}\|+\|\widehat{\phi}\|+\|D_\xi^{1/2}\widehat{\phi}\|\big)\\ =&c\big(\|\partial_y^6\phi\|+\|\phi\|+\||x|^{1/2}\phi\|\big).\end{aligned}$$

Analogamente,

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{B}_{14}\| \leq & c\big(\|\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\partial_\xi^3\widehat{\phi}\| + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\partial_\xi^3\widehat{\phi})\|\big)\\
\leq & c\big(\|x^3\phi\| + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{-it\xi|\xi|})\chi e^{it\xi\eta^2}\partial_\xi^3\widehat{\phi}\| + \|e^{-it\xi|\xi|}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi e^{it\xi\eta^2}\partial_\xi^3\widehat{\phi})\|\big)\\
\leq & c\big(\|x^3\phi\| + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}(e^{it\xi\eta^2})\chi\partial_\xi^3\widehat{\phi}\| + \|e^{i\xi\eta^2}\mathcal{D}_\xi^{1/2}(\chi\partial_\xi^3\widehat{\phi})\|\big)\\
\leq & c\big(\|x^3\phi\| + \|\mathcal{D}_\xi^{1/2}\chi\|_\infty\|\partial_\xi^3\widehat{\phi}\| + \|\chi\|_\infty\|D_\xi^{1/2}\partial_\xi^3\widehat{\phi}\|\big)\\
\leq & c\|\langle x,y\rangle^{3+1/2}\phi\|.
\end{aligned}
$$

Agora, analisando a parte integral, realizamos novamente a localização próxima à origem do espaço de Fourier e utilizamos um comutador para obter

$$
\begin{aligned}
\int_0^t & [\chi, D_\xi^{1/2}](\{e^{i(t-\tau)\xi(\eta^2-|\xi|)}[(-4i(t-\tau)\delta_\xi - i(t-\tau)^3\eta^6 - 24(t-\tau)^2\xi\\
&+6(t-\tau)^2\eta^2\mathrm{sgn}(\xi) + 8i(t-\tau)^3|\xi|^3 + 6i(t-\tau)^3\eta^4|\xi|\\
&-12i(t-\tau)^3\eta^2\xi^2)\hat{z} + (-6i(t-\tau)\mathrm{sgn}(\xi) - 12(t-\tau)^2\xi^2 + 12(t-\tau)^2\eta^2|\xi|\\
&-3(t-\tau)^2\eta^4)\partial_\xi\hat{z} + 3i(t-\tau)(\eta^2-2|\xi|)\partial_\xi^2\hat{z} + \partial_\xi^3\hat{z}]\}\\
&+D_\xi^{1/2}\{\chi e^{i(t-\tau)\xi(\eta^2-|\xi|)}[(-4i(t-\tau)\delta_\xi - i(t-\tau)^3\eta^6 - 24(t-\tau)^2\xi\\
&+6(t-\tau)^2\eta^2\mathrm{sgn}(\xi) + 8i(t-\tau)^3|\xi|^3 + 6i(t-\tau)^3\eta^4|\xi|\\
&-12i(t-\tau)^3\eta^2\xi^2)\hat{z} + (-6i(t-\tau)\mathrm{sgn}(\xi) - 12(t-\tau)^2\xi^2 + 12(t-\tau)^2\eta^2|\xi|\\
&-3(t-\tau)^2\eta^4)\partial_\xi\hat{z} + 3i(t-\tau)(\eta^2-2|\xi|)\partial_\xi^2\hat{z} + \partial_\xi^3\hat{z}]\})\,d\tau\\
&=\tilde{C}_1 + \cdots + \tilde{C}_{14} + \tilde{D}_1 + \cdots + \tilde{D}_{13} + \tilde{E},
\end{aligned}
\tag{6-14}
$$

onde

$$
\tilde{E} = -6i\int_0^t D_\xi^{1/2}\big(e^{i(t-\tau)\xi(\eta^2-|\xi|)}\chi(t-\tau)\mathrm{sgn}(\xi)\partial_\xi\hat{z}\big)\,d\tau,
$$

e $z = \frac{1}{2}\partial_x u^2$ como anteriormente. A partir de $\hat{z}(0,\eta,\tau)$, deduzimos que $\tilde{C}_1 = 0$ e $\tilde{D}_1 = 0$. As estimativas para os termos $\tilde{C}_2, ..., \tilde{C}_{14}, \tilde{D}_2, ..., \tilde{D}_{13}$ são essencialmente as mesmas feitas para $C_1, ..., C_7, D_1, ..., D_7$ na Seção 6.1. Por exemplo, para estimar o termo $\tilde{C}_2$, podemos usar a Proposição 2.12 para obter

$$
\begin{aligned}
\|\tilde{C}_2\| \leq & |t|^3\|\|\|\chi\|_{H_\xi^1}\|e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}(t-\tau)^2\eta^6\hat{z}\|_{L_\xi^2}\|_{L_\eta^2}\|_{L_T^1}\\
\leq & c\|\|\partial_y^6 z\|\|_{L_T^1}\\
\leq & c\|\|\partial_y^6\partial_x u^2\|\|_{L_T^1}\\
\leq & c\|u\|_{L_T^\infty H^7}^2.
\end{aligned}
$$

Seja $t = t_2$. Como $\phi, u(t_2) \in \mathcal{Z}_{7,7/2}$, a partir de (6-14) e das estimativas anteriores, concluímos que

$$\begin{aligned}
R(t) =&\tilde{B}_8 - \tilde{E}\\
=&6i\int_0^t D_\xi^{1/2}\big(e^{i(t-\tau)\xi(\eta^2-|\xi|)}\chi(t-\tau)\mathrm{sgn}(\xi)\partial_\xi(\frac{i\xi}{2}\hat{u}*\hat{u})\big)\,d\tau\\
&-6iD_\xi^{1/2}\big(e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\chi t\,\mathrm{sgn}(\xi)\partial_\xi\widehat{\phi}\big)\\
=&6i\int_0^t D_\xi^{1/2}\Big(e^{i(t-\tau)\xi(\eta^2-|\xi|)}\chi(t-\tau)\mathrm{sgn}(\xi)\big(\partial_\xi\hat{z}(\xi,\eta,\tau)-\partial_\xi\hat{z}(0,\eta,\tau)\big)\Big)\,d\tau\\
&-6iD_\xi^{1/2}\Big(e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\chi t\,\mathrm{sgn}(\xi)\big(\partial_\xi\widehat{\phi}(\xi,\eta)-\partial_\xi\widehat{\phi}(0,\eta)\big)\Big)\\
&-6iD_\xi^{1/2}\big(e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)}\chi t\,\mathrm{sgn}(\xi)\partial_\xi\widehat{\phi}(0,\eta)\big)\\
&+6i\int_0^t D_\xi^{1/2}\big(e^{i(t-\tau)\xi(\eta^2-|\xi|)}\chi(t-\tau)\mathrm{sgn}(\xi)\partial_\xi\hat{z}(0,\eta,\tau)\big)\,d\tau\\
=&R_1(t)+R_2(t)+R_3(t)+R_4(t)\in L^2(\mathbb{R}^2).
\end{aligned}$$

Vamos verificar que $R_1\in L^2(\mathbb{R}^2)$. De fato, seja

$$f(\xi,\eta,\tau)=e^{i(t-\tau)\xi(\eta^2-|\xi|)}\chi(t-\tau)\mathrm{sgn}(\xi)g(\xi,\eta,\tau),$$

onde $g(\xi,\eta,\tau)=(\partial_\xi\hat{z}(\xi,\eta,\tau)-\partial_\xi\hat{z}(0,\eta,\tau))$. Um simples cálculo nos dá

$$g=\frac{i}{2}\big(\widehat{u^2}+\xi\partial\widehat{u^2}-\widehat{u^2}(0,\eta,\tau)\big),\ \partial_\xi g=i\partial_\xi\widehat{u^2}+\frac{i}{2}\xi\partial_\xi^2\widehat{u^2},$$

e

$$\partial_\eta g=\frac{i}{2}\big(\partial_\eta\widehat{u^2}+\xi\partial_\eta\partial_\xi\widehat{u^2}-\partial_e ta\widehat{u^2}(0,\eta,\tau)\big).$$

Como $u^2\in C([0,\eta];\mathcal{Z}_{7,7/2-\epsilon})$, para qualquer $0<\epsilon<1/2$, segue que

$$\widehat{u^2}\in C([0,\eta];\mathcal{Z}_{7/2-\epsilon,7}).$$

Assim, a identidade $g\delta_\xi=0$ e a imersão de Sobolev garantem que

$$\begin{aligned}
\|f\|\le& c\big(\|\chi\|\|\widehat{u^2}\|_\infty+\|\xi\chi\|\|\partial_\xi\widehat{u^2}\|_\infty\big)<\infty,\\
\|\partial_\xi f\|\le& c\big(\|(\eta^2+2|\xi|)\chi\|\|\widehat{u^2}\|_\infty+\|(\eta^2+2|\xi|)\xi\chi\|\|\partial_\xi\widehat{u^2}\|_\infty+\|\partial_\xi\chi\|\|\widehat{u^2}\|_\infty\\
&+\|\xi\partial_\xi\chi\|\|\partial_\xi\widehat{u^2}\|_\infty+\|\chi\|\|\partial_\xi\widehat{u^2}\|_\infty+\|\xi\chi\|\|\partial_\xi^2\widehat{u^2}\|_\infty\big)<\infty,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\|\partial_\eta f\|\le c\big(&\|\xi\eta\chi\|\|\widehat{u^2}\|_\infty+\|\xi^2\eta\chi\|\|\partial_\xi\widehat{u^2}\|_\infty+\|\partial_\eta\chi\|\|\widehat{u^2}\|_\infty+\|\xi\partial_\eta\chi\|\|\partial_\xi\widehat{u^2}\|_\infty\\
&+\|\xi\partial_\eta\chi\|\|\partial_\xi\widehat{u^2}\|_\infty+\|\chi\|\|\partial_\eta\widehat{u^2}\|_\infty+\|\xi\chi\|\|\partial_\eta\partial_\xi\widehat{u^2}\|_\infty\big)<\infty.
\end{aligned}$$

Portanto, $f(\cdot,\cdot,\tau) \in H^1(\mathbb{R}^2)$ para todo $\tau \in [0,t]$. Além disso, por argumentos similares, $D_\xi^{1/2} f \in C([0,T]; L^2(\mathbb{R}^2))$.

De forma análoga, verifica-se que $R_2(t) \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Assim, conclui-se que $R_3 + R_4 \in L^2(\mathbb{R}^2)$.

Note que

$$\partial_\xi \left(\frac{i\xi}{2} \hat{u} * \hat{u} \right)(0,\eta,\tau) = \frac{i}{2} \int e^{-i\eta y} u^2(x,y,\tau)\, dxdy.$$

Além disso, a partir de (1-2), obtemos

$$\frac{d}{d\tau} \int x e^{-i\eta y} u(x,y,\tau)\, dxdy = \frac{1}{2} \int e^{-i\eta y} u^2(x,y,\tau)\, dxdy, \ \forall \eta \in \mathbb{R}, \tag{6-15}$$

o que implica a identidade

$$\partial_\xi \left(\frac{i\xi}{2} \hat{u} * \hat{u} \right)(0,\eta,\tau) = i \frac{d}{d\tau} \int x e^{-i\eta y} u(x,y,\tau)\, dxdy. \tag{6-16}$$

Substituindo (6-16) em R_4 e integrando por partes, temos

$$\begin{aligned}
R_4(t) =& 6i \int_0^t D_\xi^{1/2} \big(e^{i(t-\tau)\xi(\eta^2-|\xi|)} \chi(t-\tau) \mathrm{sgn}(\xi) \big) \Big(i \frac{d}{d\tau} \int_{\mathbb{R}^2} x e^{-i\eta y} u(x,y,\tau)\, dxdy \Big) d\tau \\
=& -6 D_\xi^{1/2} \big(e^{i(t-\tau)\xi(\eta^2-|\xi|)} \chi(t-\tau) \mathrm{sgn}(\xi) \big) \int x e^{-i\eta y} u(x,y,\tau) \big|_{\tau=0}^{\tau=t} + \\
& + 6 \int_0^t D_\xi^{1/2} \big((i\xi|\xi| - i\xi\eta^2) e^{i(t-\tau)\xi(\eta^2-|\xi|)} \chi(t-\tau) \mathrm{sgn}(\xi) \big) \int x e^{-i\eta y} u\, dxdy d\tau \\
& - 6 \int_0^t D_\xi^{1/2} \big(e^{i(t-\tau)\xi(\eta^2-|\xi|)} \chi \mathrm{sgn}(\xi) \int x e^{-i\eta y} u(x,y,\tau)\, dxdy \big) d\tau \\
=& 6 D_\xi^{1/2} \big(e^{it\xi(\eta^2-|\xi|)} \chi t \mathrm{sgn}(\xi) \int x e^{-i\eta y} \phi(x,y)\, dxdy \big) \\
& + 6 \int_0^t D_\xi^{1/2} \big((i\xi|\xi| - i\xi\eta^2) e^{i(t-\tau)\xi(\eta^2-|\xi|)} \chi \mathrm{sgn}(\xi) \big) \int x e^{-i\eta y} u(x,y,\tau)\, dxdy d\tau \\
& - 6 \int_0^t D_\xi^{1/2} \big(e^{i(t-\tau)\xi(\eta^2-|\xi|)} \chi \mathrm{sgn}(\xi) \big) \int x e^{-i\eta y} u(x,y,\tau)\, dxdy d\tau \\
=& -R_3 + R_5 + R_6,
\end{aligned}$$

onde utilizamos a identidade

$$\partial_\xi \widehat{\phi}(0,\eta) = -i \int x e^{-i\eta y} \phi(x,y)\, dxdy.$$

Portanto,

$$R = R_1 + R_2 + R_5 + R_6.$$

De modo semelhante ao que fizemos para R_1, podemos mostrar que $R_5 \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Assim,

$$\begin{aligned} R_6(t) =& 6\int_0^t D_\xi^{1/2}\Big(e^{i(t-\tau)\xi(\eta^2-|\xi|)}\chi\text{sgn}(\xi)\int xe^{-i\eta y}u(x,y,\tau)dxdy\Big)d\tau \\ =& 6D_\xi^{1/2}\int_0^t\Big(e^{i(t-\tau)\xi(\eta^2-|\xi|)}\chi\text{sgn}(\xi)\int xe^{-i\eta y}u(x,y,\tau)dxdy\Big)d\tau \in L^2(\mathbb{R}^2). \end{aligned}$$

Pelo teorema de Fubini, $R_6(t) \in L^2_\xi(\mathbb{R})$, q.t.p. $\eta \in \mathbb{R}$. O Teorema 2.6 garante,então, que

$$\mathcal{D}_\xi^{1/2}\left(\chi\text{sgn}(\xi)\int_0^t\big(e^{i(t-\tau)\xi(\eta^2-|\xi|)}\int xe^{-i\eta y}u(x,y,\tau)dxdy\big)d\tau\right) \in L^2_\xi(\mathbb{R}),\ \text{q.t.p.}\ \eta \in \mathbb{R},$$

o que, da Proposição 2.10, implica que

$$\begin{aligned} 0 =& \int_0^{t_2}\Big(\int xe^{-i\eta y}u(x,y,\tau)dxdy\Big)d\tau \\ =& \int_{\mathbb{R}} e^{-i\eta y}\left(\int_0^{t_2}\int_{\mathbb{R}} xu(x,y,\tau)dxd\tau\right)dy =: g(\eta),\ \text{q.t.p.}\ \eta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Pela injetividade da Transformada de Fourier, temos

$$\int_0^{t_2}\int_{\mathbb{R}} xu(x,y,\tau)dxd\tau = 0\ \text{q.t.p.}\ y \in \mathbb{R}.$$

Integrando ambos os lados da equação com respeito a y,

$$\int_0^{t_2}\int_{\mathbb{R}^2} xu(x,y,\tau)dxdyd\tau = 0.$$

Pelo Lema de Rolle, existe $\tau_1 \in (0,t_2)$ tal que

$$\int xu(x,y,\tau_1)dxdy = 0. \tag{6-17}$$

De forma análoga, utilizando que $u(t_2), u(t_3) \in \mathcal{Z}_{7,7/2}$ podemos mostrar a existência de $\tau_2 \in (t_2,t_3)$ tal que

$$\int xu(x,y,\tau_2)dxdy = 0. \tag{6-18}$$

Finalmente, a partir de (6-17), (6-18) e (6-15) (com $\eta = 0$), e considerando que a norma L^2 de u é conservada, concluímos que $\|\phi\| = 0$. A unicidade das soluções garante o resultado desejado.

Portanto, a prova do teorema está completa.

□

Referências Bibliográficas

[1] BARTLE, R. G. **The Elements of Integration and Lebesgue Measure**. John Wiley & Sons, New York, 1995.

[2] BONA, J. L.; SMITH, R. **The initial-value problem for the Korteweg-de Vries equation**. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 278:555–604, 1975.

[3] CALDERÓN, A. P. **Commutators of singular integral operators**. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, 53:1092–1099, 1965.

[4] CUNHA, A.; PASTOR, A. **The IVP for the Benjamin–Ono–Zakharov–Kuznetsov equation in weighted Sobolev spaces**. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 417:660–693, 2014.

[5] DAWSON, L.; MCGAHAGAN, H.; PONCE, G. **On the decay properties of solutions to a class of Schrödinger equations**. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 136:2081–2090, 2008.

[6] ESFAHANI, A.; PASTOR, A. **Ill-posedness results for the (generalized) Benjamin–Ono–Zakharov–Kuznetsov equation**. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 139:943–956, 2011.

[7] ESFAHANI, A.; PASTOR, A. **On the unique continuation property for Kadomtsev–Petviashvili-I and Benjamin–Ono–Zakharov–Kuznetsov equations**. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 43:1130–1140, 2011.

[8] FONSECA, G.; LINARES, F.; PONCE, G. **The IVP for the Benjamin–Ono equation in weighted Sobolev spaces II**. *Journal of Functional Analysis*, 262:2031–2049, 2012.

[9] FONSECA, G.; PONCE, G. **The IVP for the Benjamin–Ono equation in weighted Sobolev spaces**. *Journal of Functional Analysis*, 260:436–459, 2011.

[10] FONSECA, G.; LINARES, F.; PONCE, G. **The IVP for the dispersion generalized Benjamin–Ono equation in weighted Sobolev spaces**. *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire*, 30(5):763–790, 2013.

[11] HUNT, R.; MUCKENHOUPT, B.; WHEEDEN, R. **Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform**. *Transactions of the American Mathematical Society*, 176:227–251, 1973.

[12] IORIO, R. J. **On the Cauchy problem for the Benjamin–Ono equation**. *Communications in Partial Differential Equations*, 11:1031–1084, 1986.

[13] IORIO, R. J. **The Benjamin–Ono equation in weighted Sobolev spaces**. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 157:577–590, 1990.

[14] IORIO, R. J. J.; IORIO, V. D. M. **Fourier Analysis and Partial Differential Equations**. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[15] JORGE, M. C.; CRUZ-PACHECO, G.; MIER-Y TERAN-ROMERO, L.; SMYTH, N. F. **Evolution of two-dimensional lump nanosolitons for the Zakharov–Kuznetsov and electromigration equations**. *Chaos*, 15:037104, 2005.

[16] KAIKINA, E.; KATO, K.; NAUMKIN, P. I.; OGAWA, T. **Well-posedness and analytic smoothing effect for the Benjamin–Ono equation**. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, 38:651–691, 2002.

[17] KATO, T.; PONCE, G. **Commutator estimates and the Euler and Navier–Stokes equations**. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 41:891–907, 1988.

[18] LATORRE, J. C.; MINZONI, A. A.; SMYTH, N. F.; VARGAS, C. A. **Evolution of Benjamin–Ono solitons in the presence of weak Zakharov–Kuznetsov lateral dispersion**. *Chaos*, 16:043103, 2006.

[19] MILANÉS, A. **Some results about a bidimensional version of the generalized BO**. *Communications on Pure and Applied Analysis*, 2:233–250, 2003.

[20] MOLINET, L.; SAUT, J.-C.; TZVETKOV, N. **Ill-posedness issues for the Benjamin–Ono and related equations**. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 33:982–985, 2001.

[21] NAHAS, J.; PONCE, G. **On the persistent properties of solutions to semi-linear Schrödinger equation**. *Communications in Partial Differential Equations*, 34:1–20, 2009.

[22] STEIN, E. M. **The characterization of functions arising as potentials**. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 67:102–104, 1961.

[23] URREA, J. J. **The Cauchy problem associated to the Benjamin equation in weighted Sobolev spaces**. *Journal of Differential Equations*, 254:1863–1892, 2013.