UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Superfícies Mínimas em $\mathbb{H}_3$ e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

por

Wesley da Silva Ruys

Orientador: Dr. Armando Mauro Vasquez Corro

Dissertação de Mestrado em Matemática

Goiânia, Goiás

2008

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Superfícies Mínimas em $\mathbb{H}_3$ e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

por

Wesley da Silva Ruys

Área de Concentração : **Geometria e Topologia**

Orientador: **Dr. Armando Mauro Vasquez Corro**

Dissertação submetida à Banca Examinadora designada pelo Conselho Diretor do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Goiânia, Goiás

2008

Aos meus queridos pais;

Expedito e Conceição da Silva

Agradecimentos

À Deus, por ter me dado a oportunidade e a capacidade de poder vivenciar esse momento, pois sem Deus nada disso seria possível. À ele toda honra e toda glória.

Ao Prof. Dr. Armando Mauro Vasquez Corro, pela orientação, compreensão, paciência, e por todos os seus ensinamentos tão importantes durante todo o longo caminho percorrido para escrever esse trabalho.

À meus pais, pela amizade, compreensão e ajudas dadas, não só nos últimos anos mas durante todo o meu período de estudante.

A todos os meus amigos e demais familiares, que me deram força para suportar todos os momentos difíceis que passei durante o curso. Em especial, aos colegas de mestrado, que viveram tudo isso comigo, vocês fazem parte de tudo isso, obrigado a todos.

À (CAPES), pela Bolsa de Estudos Concedida, sem a qual seria difícil a realização desta dissertação[1]

[1]Este trabalho teve suporte financeiro da CAPES.

Sumário

Resumo

Neste trabalho estudamos alguns resultados do artigo de *Mercuri, F., Piu, Stefano Montaldo P, Weierstrass Representation Formula for Minimal Surfaces in* $\mathbb{H}_3$ *and* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Conseqüentemente fazemos um estudo de superfícies mínimas simplesmente conexas em variedades Riemaniannas tridimensionais, buscando determinar as condições necessárias para encontrar superfícies mínimas nestes espaços. Alem disso, dar exemplos dessas superfícies no grupo tridimensional de Heisenberg e no produto do plano hiperbólico com a reta real.

Abstract

In this work we study some results from the article of *Mercuri, F., Piu, P., Montaldo, S; Weierstrass Representation Formula for Minimal Surfaces in* $\mathbb{H}_3$ *and* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Therefore, we do a study of the minimal surfaces simply connected in three-dimensional Riemaniann manifold. Furthermore, searching for to determine the necessary conditions to find minimal surfaces in these spaces. Moreover, to give examples of the surfaces in the three-dimensional Heisenberg group and in the product of the hyperbolic with the real line.

Introdução

Geralmente admitimos que as investigações a respeito de superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$ teve início em 1760 com Lagrange, mas a sua primeira solução geral para as equações de superfícies mínimas foi dada por Weierstrass em 1866. Nos últimos anos surgiu um grande interesse em fazer estudos de superfícies mínimas, nos espaços $\mathbb{H}_3$ e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, motivados pelos estudos feitos para superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$. O objetivo principal deste trabalho é estudar as condições necessárias para encontrar superfícies mínimas nestes dois espaços. Para isso usamos como referência o artigo de Mercuri e Montaldo P, [9], onde encontramos alguns exemplos de superfícies mínimas em $\mathbb{H}_3$ e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Buscamos escrever um texto que possa ser compreendido por todos aqueles que já estão acostumados com a linguagem usada na teoria de superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$.

No primeiro capítulo nós introduzimos algumas definições básicas de geometria Riemanniana, como a definição de conexão, de imersões e de curvatura média para hipersuperfícies. Alem disso apresentamos alguns conceitos de formas diferenciais e grupos de Lie, para determinar algumas características dos espaços $\mathbb{H}_3$ e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

No segundo capítulo caracterizamos superfícies mínimas em variedades tridimensionais quaisquer e damos algumas condições necessárias para encontrar superfícies mínimas imersas em tais variedades e em especial em grupos de Lie.

Nos capítulos 3 e 4 fazemos um estudo de superfícies mínimas em $\mathbb{H}_3$ e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$. Como boa parte dos resultados serão obtidos nas seções anteriores, nesses capítulos praticamente nos limitamos a utilização das métricas específicas para apresentar alguns exemplos.

Capítulo 1

Conceitos Preliminares

1.1 Variedades Riemannianas

A noção de variedade diferenciável é fundamental para estender os métodos de cálculo diferencial a espaços mais gerais que o $\mathbb{R}^n$, alem disso nesta seção obteremos propriedades importantes que utilizaremos ao longo do trabalho.

Definição 1.1. *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $x_\alpha\colon U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$, de abertos U_α de $\mathbb{R}^n$ em M tais que:*
(1) $\cup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$.
(2)*Para todo par α, β,com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ são diferenciáveis.*
(3)*A família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ é máxima relativamente às condições* (1) *e* (2)*.*

Observação 1.1. *Se a dimensão de M for igual a 2 então chamaremos M de superfície.*

Definição 1.2. *Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi\colon M_1 \to M_2$ é diferenciável em $p \in M_1$ se dada uma parametrização $y\colon V \subset \mathbb{R}^m \to M_2$ em $\varphi(p)$ existe uma parametrização $x\colon U \subset \mathbb{R}^n \to M_1$ em p tal que $\varphi(x(U)) \subset y(V)$ e a* *aplicação* $y^{-1} \circ \varphi \circ x\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *é diferenciável em* $x^{-1}(p)$*. E ainda dizemos que* φ *é diferenciável em um aberto de* M_1 *se é difenciável em todos os pontos desse aberto.*

As definições acima nos mostram que através das parametrizações não realizamos cálculos sobre a variedade M, e passamos a fazê-los em $\mathbb{R}^n$. Iremos agora dar o conceito de vetores e planos tangentes.

Definição 1.3. *Seja* M *uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável* $\alpha\colon (-\epsilon, \epsilon) \to M$ *é chamada de curva (diferenciável) em* M*. Suponha que* $\alpha(0) = p \in M$*, e seja* $\mathcal{D}$ *o conjunto das funções de* M *diferenciáveis em* p*. O vetor tangente à curva* α *em* $t = 0$ *é a função* $\alpha'(0)\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ *dada por:*

$$\alpha'(0)f = \left.\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\right|_{t=0} \qquad f \in \mathcal{D}.$$

Um vetor tangente em p *é o vetor tangente em* $t = 0$ *de alguma curva* $\alpha\colon (-\epsilon, \epsilon) \to M$ *com* $\alpha(0) = p$*. O conjunto de vetores tangentes a* M *em* p *será indicado por* T_pM*.*

Convêm destacar que $TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_pM\}$, trata-se de um conjunto de pares formados por pontos e vetores que é conhecido como *fibrado tangente* de M.

Definição 1.4. *Sejam* M^m *e* N^n *variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável* $\varphi\colon M \to N$ *é uma imersão se e somente se* $d\varphi_p\colon T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ *é injetiva para todo* $p \in M$*.*

Até agora temos trabalhado com variedades diferenciáveis, mas para definirmos variedades e superfícies Riemannianas é muito importante introduzir a definição de orientação em uma variedade e uma forma de medir comprimentos de vetores tangentes, ou seja, é interessante que tenhamos uma métrica. Por tanto segue as seguintes definições:

Definição 1.5. *Seja* M *uma variedade diferenciável. Diz-se que* M *é orientável se* M *admite uma estrutura diferenciável* $\{U_\alpha, x_\alpha\}$ *tal que:*
(i) Para todo par α, β *com* $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$*, a diferencial da mudança de coordenadas* $x_\beta \circ x_\alpha^{-1}$ *tem determinante positivo.*

Caso contrário, diz-se que M é não orientável. Se M é orientável, a escolha de uma estrutura diferenciável satisfazendo (i) é chamada uma orientação de M e M é então orientada.

Definição 1.6. *Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno $\langle , \rangle_p$ no espaço tangente T_pM, que varia diferencialmente no seguinte sentido: Se $x\colon U \subset R^n \to M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p, com $x(x_1, x_2, ..., x_n) = q \in x(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx(0, ..., 1, ..., 0)$, então $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \rangle_q = g_{ij}(x_1, x_2, ..., x_n)$ é uma função diferenciável em U.*

Uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana é chamada de variedade Riemanniana e poderá ser denotada por: (M^n, g), significa que a variedade M é dotada de uma métrica g.

Dizemos que uma função $\psi\colon U \to \mathbb{R}^3$, de um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$, é conforme se:

$$|\psi_u| = |\psi_v| \quad \text{e} \quad \langle \psi_u, \psi_v \rangle = 0,$$

neste caso, ψ induz sobre U a métrica: $ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2)$, onde $\lambda = |\psi_u| = |\psi_v|$, então dizemos que (u, v) são parâmetros isotérmicos.

Perceba que se $f\colon \Sigma \to M$, é uma função de uma superfície Σ em uma variedade Riemanniana M, podemos ter de maneira análoga: $|f_u| = |f_v|$ e $\langle f_u, f_v \rangle = 0$, pois podemos por um abuso de linguagem considerar: $f = f \circ \beta$, onde β é uma parametrização de Σ, já que $f \circ \beta\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to M$.

Se uma superfície M é orientável, podemos considerar uma família de parâmetros isotérmicos cujas escolhas de coordenadas preservam a orientação de M. A superfície M juntamente com a família de parâmetros isotérmicos é chamada de superfície de Riemann.

1.2 Conexão Riemanniana

Indicaremos por $\mathcal{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M e por $\mathcal{D}(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M.

O campo vetorial $Z = XY - YX$, será chamado de colchete e denotado por $[X, Y] = XY - YX$, onde $X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\quad Y = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$, e
$XYf = X\big(\sum_j b_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\big) = \sum_{i,j} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

Definição 1.7. *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação:*

$$\nabla \colon \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$$

que se indica por $(X, Y) \xrightarrow{\nabla} \nabla_X Y$ e que satisfaz as seguintes propriedades:
i)$\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,
ii)$\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,
iii)$\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,
onde $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ e $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Proposição 1.1. *Seja M uma variedade diferenciável com conexão afim ∇. Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo de uma curva diferenciável $c \colon I \to M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c, denominada derivada covariante de V ao longo de c, tal que:*
a)$\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$, *onde W é um campo de vetores ao longo de c e f é uma função diferenciável em I;*
b)$\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$,
c) Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathcal{X}(M)$, isto é, $V(t) = Y(c(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y$.

Proposição 1.2. *Seja M uma variedade Riemanniana. Uma conexão ∇ em M é compatível com a métrica se e só se para todo par V e W de campos de vetores ao longo da curva diferenciável $c \colon I \to M$ tem-se:*

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \langle \frac{DV}{dt}, W\rangle + \langle V, \frac{DW}{dt}\rangle, \quad t \in I. \tag{1.1}$$

Corolário 1.1. *Uma conexão ∇ em uma variedade Riemanniana M é compatível com a métrica se e só se*

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \quad X, Y, Z \in \mathcal{X}(M).$$

A prova de todos os resultados obtidos acima podem ser encontrados em [3]

Definição 1.8. *Uma Conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é dita simétrica quando:*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \ \textit{para todo} X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

Teorema 1.1. *(Levi-Civita). Dada uma variedade Riemanniana M, existe uma conexão afim ∇ em M satisfazendo as seguintes definições:*
a)∇ é simétrica.
b)∇ é compatível com a métrica Riemanniana.

Demonstração. Suponhamos inicialmente a existência de tal ∇. Então

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \tag{1.2}$$

$$Y\langle Z, X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle, \tag{1.3}$$

$$Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle, \tag{1.4}$$

Somando as equações (1.2) e (1.3) e subtraindo (1.4), teremos, usando a simetria de ∇, que

$$\begin{aligned} X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle &= \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle + \langle \nabla_Y Z, X\rangle \\ &\quad + \langle Z, \nabla_Y X\rangle - \langle \nabla_Z X, Y\rangle - \langle X, \nabla_Z Y\rangle \\ &= \langle [X, Z], Y\rangle + \langle [Y, Z], X\rangle + \langle [X, Y], Z\rangle + 2\langle Z, \nabla_Z X\rangle \end{aligned}$$

Portanto

$$\langle Z, \nabla_Y X\rangle = \frac{1}{2}\{X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle - \langle [X, Z], Y\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle - \langle [X, Y], Z\rangle\}. \tag{1.5}$$

A expressão (1.5) mostra que ∇ está univocamente determinada pela métrica $\langle , \rangle$. Portanto, caso exista, ela será única.

Para mostrar a existência, basta definirmos ∇ por (1.5). É fácil verificar que ∇ está bem definida e que satisfaz as propriedades desejadas. $\square$

Observação 1.2. *A conexão dada pelo Teorema acima é denominada conexão Levi-Civita (ou Riemanniana) de M.*

1.3 Formas diferenciais

Dados os espaços vetoriais E, F, uma aplicação $\varphi\colon E \times E ... \times E \to F$, definida no produto cartesiano de r fatores iguais a E, diz-se r-linear quando seus valores $\varphi(v_1, v_2, ..., v_r)$ dependem linearmente de cada uma das variáveis $v_1, ..., v_r \in E$. Por sua vez uma aplicação r-linear $\varphi\colon E \times E ... \times E \to F$ chama-se alternada quando se tem $\varphi(v_1, v_2, ..., v_r) = 0$ sempre que a sequência $(v_1, ..., v_r)$ possuir repetições (isto é, existirem $i \neq j$ com $v_i = v_j$).

Usaremos a notação $\mathcal{A}_r(E, F)$ para indicar o conjunto das aplicações r-linear alternadas de E em F. Já o espaço vetorial $\mathcal{A}_r(E, \mathbb{R})$ será indicado pela notação simplificada $\mathcal{A}_r(E)$.

Considere $\{dx_1, dx_2, ..., dx_n\}$ para indicar a base canônica dual de $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, onde $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, e $e_i = (0, ..., i, ..., 0)$. Para cada conjunto $I = \{i_1 < ... < i_r\} \subset \{1, 2, ..., m\}$, as formas r-linear alternadas dx_I constituem a base canônica do espaço vetorial $\mathcal{A}(\mathbb{R}^m)$. Assim segue

Definição 1.9. *Uma forma diferencial de grau r num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação $\omega\colon U \to \mathcal{A}_r(\mathbb{R}^m)$, tal que a cada ponto $x \in U$, ω faz corresponder à forma r-linear alternada $\omega(x) = \sum_I a_I(x) dx_I$.*

Uma forma diferencial de grau r numa superfície m-dimensional $M \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação: $\omega\colon x \in M \to \omega(x) \in \mathcal{A}_r(T_xM)$, que associa a cada ponto $x \in M$ uma forma r-linear alternada $\omega(x)$ no espaço vetorial tangente T_xM.

Seja $f\colon M \to N$ uma aplicação diferenciável de uma superfície M em uma superfície N. Dada uma forma ω, de grau r sobre N, definiremos a forma $f^*\omega$, de grau r sobre M, pondo para cada $x \in M$ e cada r-lista de vetores $w_1, w_2, ..., w_r \in T_xM$:

$$[(f^*\omega)(x)](w_1, ..., w_r) = \omega(f(x)).(f'(x).w_1, ..., f'(x).w_r).$$

Observação 1.3. *A forma $f^*\omega$ chama-se* pull-back *da forma ω por meio de f.*

1.4 Grupos de Lie

Definição 1.10. *Um grupo de Lie é um grupo G com estrutura diferenciável tal que a aplicação:*
$G \times G \to G$
$(x, y) \mapsto x * y^{-1}$ *é diferenciável.(Lembrando que $*$ é a operação do grupo)*

Chamaremos a aplicação: $L_x : G \to G$, dada por $L_x(y) = x * y$, de translação à esquerda, e de translação à direita a aplicação $R_x : G \to G$, dada por $R_x(y) = y * x$.

Definição 1.11. *Uma métrica Riemanniana é dita invariante à esquerda se:*

$$\langle u, v\rangle_y = \langle d(L_x)_y u, d(L_x)_y v\rangle_{L_x(y)}$$

ou seja, se L_x é uma isometria.

Dizemos ainda que um campo diferenciável de vetores W em um grupo de Lie é invariante à esquerda se $dL_aW_e = W_a$, para todo $a \in G$. Isto permite introduzir uma estrutura adicional no espaço tangente no elemento neutro $e \in G$ da maneira seguinte. A cada vetor $W_e \in T_eG$ associamos o campo invariante à esquerda W definido por $W_a = dL_aW_e$, $a \in G$. Sejam W, Y campos de G invariantes à esquerda. Como para todo $x \in G$ e toda função diferenciável f em G,

$$dL_x[W, Y] = [W, Y](f \circ L_x) = W(dL_xY)f - Y(dL_xW)f = (WY - YW)f = [W, Y]f,$$

concluimos que o colchete de campos invariantes à esquerda é invariante à esquerda. Se $W_e, Y_e \in T_eG$, definimos $[W_e, Y_e] = [W, Y]_e$. Com esta operação, T_eG é chamada a àlgebra de Lie de G.

Para introduzir em G uma métrica invariante à esquerda, tome um produto interno qualquer $\langle , \rangle_e$ na àlgebra de Lie e defina

$$\langle u, v\rangle_x = \langle d(L_{x^{-1}})_x u, d(L_{x^{-1}})_x v\rangle_e, \quad x \in G,\ u, v \in T_xG.$$

Como L_x depende diferencialmente de x isto fornece realmente uma métrica Riemanniana, evidentemente invariante à esquerda.

1.5 Imersões Isométricas

Nesta seção iremos considerar $F\colon M \to \overline{M}$ uma imersão de uma variedade diferenciável M de dimensão n em uma variedade Riemanniana $\overline{M}$ de dimensão igual a $k = n + m$. A métrica Riemanniana de $\overline{M}$ induz de maneira natural uma métrica Riemanniana em M: se $v_1, v_2 \in T_pM$, define-se $\langle v_1, v_2\rangle = \langle df_p(v_1), df_p(v_2)\rangle$.

Seja $F\colon M^n \to \overline{M}^k$ uma imersão. Então, para cada $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $F(U) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade de $\overline{M}$. Portanto existe uma vizinhaça $\overline{U} \subset \overline{M}$ de $F(p)$ e um difeomorfismo $\varphi\colon \overline{U} \to V \subset \mathbb{R}^k$ em um aberto V do $\mathbb{R}^k$. Assim para simplificar a notação podemos identificar U com $F(U)$ e cada vetor $v \in T_qM$, $q \in U$ com $dF_q(v) \in T_{F(q)}\overline{M}$. Desta forma podemos estender, por exemplo, um campo local definido em U de vetores de M a um campo local definido em $\overline{U}$ de vetores em $\overline{M}$.

Para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p\overline{M}$ decompõe $T_p\overline{M}$ em soma direta

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^{\perp}$$

onde $(T_pM)^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$. Se $v \in T_p\overline{M}, p \in M$, podemos escrever

$$v = v^T + v^N, \quad v^T \in T_pM, \quad v^N \in (T_pM)^{\perp}.$$

onde v^T é a componente tangencial de v e v^N é a componente normal de v.

A conexão Riemanniana de $\overline{M}$ será indicada por $\overline{\nabla}$. Se X e Y são campos locais de vetores em M, e $\overline{X}, \overline{Y}$ são extensões locais a $\overline{M}$, definimos

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^T.$$

Se X, Y são campos locais em M,

$$B(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y$$

é um campo local em $\overline{M}$ normal a M. $B(X,Y)$ não depende das extensões $\overline{X}, \overline{Y}$, como é verificado na página 140 de [3].

Proposição 1.3. *Se $X, Y \in \mathcal{X}(U)$, a aplicação $B\colon \mathcal{X}(U) \times \mathcal{X}(U) \to \mathcal{X}(U)^{\perp}$ dada por*

$$B(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y$$

é bilinear e simétrica.

a demostração desta proposição pode ser encontrada nas páginas 140 e 141 de [3].

Considere $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. A aplicação $H_\eta\colon T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(x,y) = \langle B(x,y), \eta \rangle, \quad x, y \in T_pM,$$

é pela proposição 1.5, uma forma bilinear simétrica.

Definição 1.12. *A forma quadrática II_η definida em T_pM por*

$$II_\eta = H_\eta(x,x)$$

é chamada a segunda forma fundamental de F em p segundo o vetor normal η.

Às vezes se utiliza também a segunda formal fundamental para desiginar a aplicação B que em cada $p \in M$ é uma aplicação bilinear, simétrica, tomando valores em $(T_pM)^{\perp}$.

A aplicação bilinear H_η pode ser associada a uma aplicação linear auto-adjunta $S_\eta\colon T_pM \to T_pM$ por

$$\langle S_\eta, y \rangle = H_\eta(x,y) = \langle B(x,y), \eta \rangle.$$

Proposição 1.4. *Seja $p \in M, x \in T_pM$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. Seja N uma extensão local de η normal a M. Então*

$$S_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^T$$

a demostração desta proposição está na página 142 de [3].

Se considerarmos o caso particular em que a codimensão é 1, istó é, $F\colon M^n \to \overline{M}^{n+1}; F(M) \subset \overline{M}$ é então denomindada uma hipersuperfície. Como $S_\eta\colon T_pM \to T_pM$ é simétrica, existe uma base ortonormal de vetores próprios $\{e_1, ..., e_n\}$ de T_pM com valores próprios reais $\lambda_1, ..., \lambda_n$, isto é, $S_\eta(e_i) = \lambda_i e_i, 1 \leq i \leq n$. Se M e $\overline{M}$ são ambas orientáveis, e exirgirmos que $\{e_1, ..., e_n\}$ seja uma base na orientação de M e $\{e_1, ..., e_n, \eta\}$ uma base na orientação de $\overline{M}$, então denominamos os e_i direções principais e os $\lambda_i = k_i$ curvaturas principais de F. As funções simétricas são invariantes da imersão.

Definição 1.13. *Seja $F\colon M^n \to \overline{M}^{n+1}$ e λ_i as curvaturas principais de F. Então $\frac{1}{n}(\lambda_1 + ... + \lambda_n)$ é denominada a curvatura média de F e denotado por H.*

Alem disso o $det(S_\eta) = \lambda_1.\lambda_2...\lambda_n$ é denominada a curvatura de Gauss-Kronecker de F.

Definição 1.14. *Uma imersão $F\colon M \to \overline{M}$ é mínima se para todo $p \in M$ e todo $\eta \in (T_pM)^{\perp}$ tem-se que traço $S_\eta = 0$.*

Capítulo 2

Superfícies Mínimas em Variedades e Grupos de Lie tridimensionais

2.1 Superfícies Mínimas em Variedades tridimensionais

O objetivo desse capítulo é fazer um estudo de superfícies mínimas em variedades Riemannianas tridimensionais, utizando-se das definições e resultados do capítulo anterior. Para tanto iremos considerar M uma superfície de Riemann e $\overline{M}$ uma variedade tridimensional e (u, v) coordenadas locais sobre M.

Definição 2.1. *Uma imersão* $\overrightarrow{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \overline{M}^3$ *é dita conforme se* $\langle \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u}, \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u} \rangle = \langle \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v}, \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v} \rangle$ *e* $\langle \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u}, \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v} \rangle = 0.$
onde $(u, v) \in \Omega$*.*

neste caso (u, v) são parâmetros isotérmicos para a superfície descrita por $\overrightarrow{F}$.

Se $\overrightarrow{F} : M \to \overline{M}$ é uma imersão conforme então a métrica induzida é

$$ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2), \quad \text{onde } \lambda^2 = \langle \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u}, \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u} \rangle = \langle \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v}, \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v} \rangle$$

Lema 2.1. *Seja* $(\overline{M}, \overline{g})$ *uma variedade Riemanniana com métrica* $\overline{g}$ *e* $\overrightarrow{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \overline{M}$ *uma imersão conforme. Então*

$$\lambda^{-2}\left[\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u} + \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial v}}\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v}\right] = 2HN$$

onde $(u, v) \in \Omega$.

Demonstração. Como $\overrightarrow{F}$ é conforme, temos

$$\langle\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u}, \frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u}\rangle = \langle\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v}, \frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v}\rangle \qquad e \qquad \langle\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u}, \frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u}\rangle = 0$$

Logo

$$\frac{\partial}{\partial u}\langle\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u}, \frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u}\rangle = \frac{\partial}{\partial u}\langle\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v}, \frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v}\rangle$$

usando as propriedades de conexão

$$\langle\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u}, \frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u}\rangle = \langle\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v}, \frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v}\rangle \tag{2.1}$$

Da mesma forma,

$$\frac{\partial}{\partial v}\langle\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u}, \frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v}\rangle = 0$$

assim

$$\langle\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial v}}\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u}, \frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v}\rangle + \langle\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u}, \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial v}}\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v}\rangle = 0$$

Usando (2.1) obtemos

$$\langle\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u} + \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial v}}\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v}, \frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u}\rangle = \langle\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v}, \frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v}\rangle - \langle\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial v}}\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u}, \frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v}\rangle = 0$$

De maneira análoga podemos mostrar que:

$$\langle\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u} + \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial v}}\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v}, \frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v}\rangle = 0$$

portanto, $\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u} + \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial v}}\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v}$ é normal a M.

Se $N \in (T_pM)^{\perp}$, ou seja um vetor normal a superfície, através da aplicação S_N podemos escrever

$$\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u}} N = a_{11}\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u} + a_{12}\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v} \quad \text{e} \quad \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial v}} N = a_{21}\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u} + a_{22}\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v}$$

e a curvatura média pode ser escrita como

$$H = -\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}).$$

logo

$$\begin{aligned}
\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u} + \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial v}} \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v}, N\rangle &= \langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u} + \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial v}} \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v}, N\rangle \\
&= -\langle \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u}, \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u}} N\rangle - \langle \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v}, \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial v}} N\rangle \\
&= -a_{11}\langle \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u}, \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u}\rangle - a_{22}\langle \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v}, \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v}\rangle \\
&= -(a_{11} + a_{22})\lambda^2 = 2\lambda^2 H
\end{aligned}$$

Portanto

$$\lambda^{-2}\left[\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u}} \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u} + \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial v}} \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v}\right] = 2HN$$

□

Lema 2.2. *Sejam $(\overline{M}, \overline{g})$ uma variedade Riemanniana com métrica $\overline{g}$ e $\overrightarrow{F} : M \to \overline{M}$ uma imersão conforme, então $\overrightarrow{F}$ é mínima se e somente se*

$$\frac{\partial^2 F_i}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial v^2} + \sum_{j,k=1}^{3}\left(\frac{\partial F_j}{\partial u}\frac{\partial F_k}{\partial u} + \frac{\partial F_j}{\partial v}\frac{\partial F_k}{\partial v}\right)\overline{\Gamma}^i_{jk}(\overrightarrow{F}) = 0. \tag{2.2}$$

Demonstração. Podemos escrever $\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u}$ em termos da base $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$;

$$\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial F_j}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x_j}$$

Assim

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u} &= \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u}}(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial F_j}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x_j})\\ &= \sum_{j=1}^{3}\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial F_j}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x_j}.\end{aligned}$$

Usando as propriedades de conexão, temos

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u} &= \sum_{j=1}^{3}(\frac{\partial^2 F_j}{\partial u^2}\frac{\partial}{\partial x_j}+\frac{\partial F_j}{\partial u}\overline{\nabla}_{\frac{\partial F}{\partial u}}\frac{\partial}{\partial x_j})\\ &= \sum_{j=1}^{3}(\frac{\partial^2 F_j}{\partial u^2}\frac{\partial}{\partial x_j}+\frac{\partial F_j}{\partial u}\overline{\nabla}_{\sum_{k=1}^{3}(\frac{\partial F_k}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x_k})}\frac{\partial}{\partial x_j})\\ &= \sum_{j=1}^{3}(\frac{\partial^2 F_j}{\partial u^2}\frac{\partial}{\partial x_j}+\frac{\partial F_j}{\partial u}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial F_k}{\partial u}\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_k}}\frac{\partial}{\partial x_j})\\ &= \sum_{j=1}^{3}(\frac{\partial^2 F_j}{\partial u^2}\frac{\partial}{\partial x_j}+\frac{\partial F_j}{\partial u}\sum_{i,k=1}^{3}\frac{\partial F_k}{\partial u}\overline{\Gamma}_{jk}^{i}(\overrightarrow{F})\frac{\partial}{\partial x_i})\end{aligned}$$

Mudando os índices, obtemos

$$\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u} = \sum_{i=1}^{3}(\frac{\partial^2 F_i}{\partial u^2}+\sum_{j,k=1}^{3}\frac{\partial F_j}{\partial u}\frac{\partial F_k}{\partial u}\overline{\Gamma}_{jk}^{i}(\overrightarrow{F}))\frac{\partial}{\partial x_i}$$

Analogamente temos

$$\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial v}}\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v} = \sum_{i=1}^{3}(\frac{\partial^2 F_i}{\partial v^2}+\sum_{j,k=1}^{3}\frac{\partial F_j}{\partial v}\frac{\partial F_k}{\partial v}\overline{\Gamma}_{jk}^{i}(\overrightarrow{F}))\frac{\partial}{\partial x_i}$$

Portanto

$$\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u}+\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial v}}\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v} = \sum_{i=1}^{3}[\frac{\partial^2 F_i}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 F_i}{\partial v^2}+\sum_{j,k=1}^{3}(\frac{\partial F_j}{\partial u}\frac{\partial F_k}{\partial u}+\frac{\partial F_j}{\partial v}\frac{\partial F_k}{\partial v})\overline{\Gamma}_{jk}^{i}(\overrightarrow{F})]\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

portanto o resultado desejado segue do Lema 2.1. □

Sejam $(\overline{M}^3, \overline{g})$ uma variedade Riemanniana tridimensional, M^2 uma superfície de Riemann e $\overrightarrow{F} : M^2 \to \overline{M}^3$ uma função diferenciável. O fibrado pull-back $\overrightarrow{F}^{-1}(T\overline{M})$

tem métrica e conexão compatíveis, a conexão pull-back, induzida pela métrica Riemanniana e conexão Levi-Civita de $\overline{M}$. Considere o fibrado complexificado
$\mathbb{E} = \overrightarrow{F}^{-1}(T\overline{M}) \otimes \mathbb{C}$. A métrica induzida g pode ser estendida para $\mathbb{E}$ como:
• uma forma bilinear complexa $\langle .,. \rangle ; \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{C}$.

Considere (u, v) coordenadas locais sobre $\overline{M}$, $z = u+iv$ o parâmetro local complexo, e os operadores

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}) \qquad e \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v})$$

Definição 2.2. *Uma secção ϕ: $M \to \mathbb{E}$ é holomorfa se e somente se $\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}}\phi = 0$, onde $\overline{\nabla}$ é a conexão pull-back.*

Observação 2.1. *A definição de secção holomorfa independe da mudança de variáveis em uma parametrização. De fato, se considerarmos $w = w(z)$, podemos escrever*

$$\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial \overline{w}} = \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial w}\frac{\partial z}{\partial \overline{w}} + \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial \overline{z}}\frac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{w}}$$

mas como z é holomorfa $\dfrac{\partial z}{\partial \overline{w}} = 0$, logo

$$\overline{\nabla}_{\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial \overline{w}}}\phi(w(z)) = \frac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{w}}\overline{\nabla}_{\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial \overline{z}}}\phi(w(z))$$

portanto,

$$\overline{\nabla}_{\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial \overline{w}}}\phi = 0$$

se e somente se

$$\overline{\nabla}_{\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial \overline{z}}}\phi = 0.$$

Lema 2.3. *Sejam $(\overline{M}, \overline{g})$ uma variedade Riemanniana com métrica $\overline{g}$, M uma superfície de Riemann e $\overrightarrow{F} : M \to \overline{M}$ uma imersão conforme. Então $\overrightarrow{F}$ é mínima se e somente se $\nabla_{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}}\phi = 0$.*

Demonstração. De fato, como $\phi = \dfrac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial z}$ e $4\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}\dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{\partial}{\partial u} + \dfrac{\partial}{\partial v}\dfrac{\partial}{\partial v}$. Podemos escrever

$$4\frac{\partial \phi_i}{\partial \overline{z}} = 4\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(\frac{\partial F_i}{\partial z}) = \frac{\partial^2 F_i}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial v^2} \tag{2.3}$$

Como $\dfrac{\partial F_k}{\partial z} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial F_k}{\partial u} - i\dfrac{\partial F_k}{\partial v})$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k=1}^{3} \frac{\partial F_k}{\partial z}\frac{\partial F_j}{\partial \overline{z}} &= \sum_{j,k=1}^{3} [\frac{1}{4}(\frac{\partial F_k}{\partial u} - i\frac{\partial F_k}{\partial v})(\frac{\partial F_j}{\partial u} + i\frac{\partial F_j}{\partial v})] \\
&= \frac{1}{4}\sum_{j,k=1}^{3}(\frac{\partial F_k}{\partial u}\frac{\partial F_j}{\partial u} + \frac{\partial F_k}{\partial v}\frac{\partial F_j}{\partial v}) + \frac{i}{4}\sum_{j,k=1}^{3}(\frac{\partial F_k}{\partial u}\frac{\partial F_j}{\partial v} - \frac{\partial F_j}{\partial u}\frac{\partial F_k}{\partial v}) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{j,k=1}^{3}(\frac{\partial F_k}{\partial u}\frac{\partial F_j}{\partial u} + \frac{\partial F_k}{\partial v}\frac{\partial F_j}{\partial v})
\end{aligned}$$

por outro lado $\dfrac{\partial F_k}{\partial u} = \dfrac{\partial F_k}{\partial z} + \dfrac{\partial F_k}{\partial \overline{z}}$ e $\dfrac{\partial F_k}{\partial v} = i(\dfrac{\partial F_k}{\partial z} - \dfrac{\partial F_k}{\partial \overline{z}})$. Portanto

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k=1}^{3}(\frac{\partial F_k}{\partial u}\frac{\partial F_j}{\partial u} + \frac{\partial F_k}{\partial v}\frac{\partial F_j}{\partial v}) &= \sum_{j,k=1}^{3}(\frac{\partial F_k}{\partial u}\frac{\partial F_j}{\partial u}) + \sum_{j,k=1}^{3}(\frac{\partial F_k}{\partial v}\frac{\partial F_j}{\partial v}) \\
&= \sum_{j,k=1}^{3}(\frac{\partial F_k}{\partial z} + \frac{\partial F_k}{\partial \overline{z}})(\frac{\partial F_j}{\partial z} + \frac{\partial F_j}{\partial \overline{z}}) \\
&- \sum_{j,k=1}^{3}(\frac{\partial F_k}{\partial z} - \frac{\partial F_k}{\partial \overline{z}})(\frac{\partial F_j}{\partial z} - \frac{\partial F_j}{\partial \overline{z}}) \\
&= 2\sum_{j,k=1}^{3}(\frac{\partial F_j}{\partial z}\frac{\partial F_k}{\partial \overline{z}}) + 2\sum_{j,k=1}^{3}(\frac{\partial F_k}{\partial z}\frac{\partial F_j}{\partial \overline{z}}) \\
&= 4\sum_{j,k=1}^{3}\frac{\partial F_j}{\partial z}\frac{\partial F_k}{\partial \overline{z}}
\end{aligned}$$

as equações $\displaystyle\sum_{j,k=1}^{3}(\frac{\partial F_k}{\partial u}\frac{\partial F_j}{\partial u} + \frac{\partial F_k}{\partial v}\frac{\partial F_j}{\partial v})$ e $\displaystyle 4\sum_{j,k=1}^{3}\frac{\partial F_k}{\partial z}\frac{\partial F_j}{\partial \overline{z}}$ são portanto equivalentes. Reescrevendo a equação

$$\frac{\partial^2 F_i}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial v^2} + \sum_{j,k=1}^{3}(\frac{\partial F_k}{\partial u}\frac{\partial F_j}{\partial u} + \frac{\partial F_k}{\partial v}\frac{\partial F_j}{\partial v})\overline{\Gamma}^i_{jk}(\overrightarrow{F}) = 0$$

obtemos

$$4\frac{\partial \phi_i}{\partial \overline{z}} + 4\sum_{j,k=1}^{3}\frac{\partial F_k}{\partial z}\frac{\partial F_j}{\partial \overline{z}}\overline{\Gamma}^i_{jk}(\overrightarrow{F}) = 0$$

ou

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \overline{z}} + \sum_{j,k=1}^{3} \overline{\phi_j}\phi_k \overline{\Gamma}_{jk}^i(\overrightarrow{F}) = 0 \tag{2.4}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}}\phi = \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}}(\sum_{i=1}^{3}\phi_i \frac{\partial}{\partial x_i}) &= \sum_{i=1}^{3}(\frac{\partial \phi_i}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial x_i} + \phi_i \overline{\nabla}_{\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial \overline{z}}}\frac{\partial}{\partial x_i}) \\
&= \sum_{i=1}^{3}(\frac{\partial \phi_i}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial x_i} + \phi_i \overline{\nabla}_{\sum_{j=1}^{3}\overline{\phi_j}\frac{\partial}{\partial x_j}}\frac{\partial}{\partial x_i}) \\
&= \sum_{i=1}^{3}(\frac{\partial \phi_i}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{3}\overline{\phi_j}\phi_i \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\frac{\partial}{\partial x_i}) \\
&= \sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{\partial \phi_i}{\partial \overline{z}} + \sum_{j,k=1}^{3}\overline{\phi_j}\phi_k \overline{\Gamma}_{jk}^i(\overrightarrow{F})\Big)\frac{\partial}{\partial x_i}
\end{aligned}$$

Como as equações (2.2) e (2.4) são equivalentes, através do Lema 2.2 podemos dizer que $\overrightarrow{F}$ é mínima se e somente se

$$\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \overline{z}}}\phi = \sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{\partial \phi_i}{\partial \overline{z}} + \sum_{j,k=1}^{3}\overline{\Gamma}_{jk}^i(\overrightarrow{F})\phi_k\overline{\phi_j}\Big)\frac{\partial}{\partial x_i} = 0 \tag{2.5}$$

□

Teorema 2.1. *Sejam* $(\overline{M}^3, \overline{g})$ *uma variedade Riemanniana tridimensional com métrica* $\overline{g}$ *e* $\{x_1, x_2, x_3\}$ *coordenadas locais. Sejam* $F_i\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ *e* $\phi_i\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq 3$ *soluções do sistema de equações:*

$$\begin{cases}
\phi_i = \dfrac{\partial F_i}{\partial z} \\
\sum_{j,k=1}^{3}\overline{g}_{jk}\phi_j\overline{\phi_k} \neq 0 \\
\sum_{j,k=1}^{3}\overline{g}_{jk}\phi_j\phi_k = 0 \\
\dfrac{\partial \phi_i}{\partial \overline{z}} + \sum_{j,k=1}^{3}\overline{\Gamma}_{jk}^i(\overrightarrow{F})\phi_k\overline{\phi_j} = 0
\end{cases} \tag{2.6}$$

Então, $\overrightarrow{F} = (F_1, F_2, F_3)$ *define uma imersão mínima conforme em* $\overline{M}^3$.

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned}
\langle\phi,\phi\rangle &= \frac{1}{4}\langle\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u}-i\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v},\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u}-i\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v}\rangle\\
&= \frac{1}{4}\langle\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u},\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u}\rangle-\frac{i}{2}\langle\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u},\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v}\rangle-\frac{1}{4}\langle\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v},\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v}\rangle
\end{aligned}$$

mas

$$\begin{aligned}
\langle\phi,\phi\rangle &= \langle\sum_{j=1}^{3}\phi_j\frac{\partial}{\partial x_j},\sum_{k=1}^{3}\phi_k\frac{\partial}{\partial x_k}\rangle\\
&= \sum_{j,k=1}^{3}\phi_j\phi_k\langle\frac{\partial}{\partial x_j},\frac{\partial}{\partial x_k}\rangle\\
&= \sum_{j,k=1}^{3}\overline{g}_{jk}\phi_j\phi_k
\end{aligned}$$

Analogamente, podemos mostrar que

$$\begin{aligned}
\langle\phi,\overline{\phi}\rangle &= \frac{1}{4}\langle\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u}-i\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v},\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u}+i\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v}\rangle\\
&= \frac{1}{4}\langle\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u},\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u}\rangle+\frac{1}{4}\langle\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v},\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v}\rangle
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle\phi,\overline{\phi}\rangle &= \langle\sum_{j=1}^{3}\phi_j\frac{\partial}{\partial x_j},\sum_{k=1}^{3}\overline{\phi_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\rangle\\
&= \sum_{j,k=1}^{3}\phi_j\overline{\phi_k}\langle\frac{\partial}{\partial x_j},\frac{\partial}{\partial x_k}\rangle\\
&= \sum_{j,k=1}^{3}\overline{g}_{jk}\phi_j\overline{\phi_k}
\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que

$$\sum_{j,k=1}^{3}\overline{g}_{jk}\phi_j\phi_k=\frac{1}{4}\langle\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u},\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u}\rangle-\frac{i}{2}\langle\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u},\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v}\rangle-\frac{1}{4}\langle\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v},\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v}\rangle \tag{2.7}$$

e

$$\sum_{j,k=1}^{3} \overline{g}_{jk}\phi_j\overline{\phi_k} = \frac{1}{4}\langle\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u}, \frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u}\rangle + \frac{1}{4}\langle\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v}, \frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v}\rangle \tag{2.8}$$

Se cada F_i satisfaz o sistema de equações (2.6), as equações (2.7) e (2.8) mostram que se

$$\sum_{j,k=1}^{3} \overline{g}_{jk}\phi_j\phi_k = 0$$

então, devemos ter

$$\langle\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u}, \frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u}\rangle = \langle\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v}, \frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v}\rangle \quad \text{e} \quad \langle\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u}, \frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v}\rangle = 0$$

e portanto $\overrightarrow{F}$ é conforme. Analogamente se

$$\sum_{j,k=1}^{3} \overline{g}_{jk}\phi_j\overline{\phi_k} \neq 0$$

então devemos ter

$$\langle\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u}, \frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u}\rangle = \langle\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v}, \frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v}\rangle \neq 0$$

logo $d\overrightarrow{F} \neq 0$, donde $\overrightarrow{F}$ é uma imersão conforme.

A equação

$$\frac{\partial\phi_i}{\partial\overline{z}} + \sum_{j,k=1}^{3} \overline{\Gamma}^i_{jk}(\overrightarrow{F})\phi_k\overline{\phi_j} = 0$$

pode ser escrita como

$$\frac{\partial\phi_i}{\partial\overline{z}} + \sum_{j>k} \overline{\Gamma}^i_{jk}(\overrightarrow{F})\phi_k\overline{\phi_j} + \sum_{j<k} \overline{\Gamma}^i_{jk}(\overrightarrow{F})\phi_k\overline{\phi_j} + \sum_{j=1}^{3} \overline{\Gamma}^i_{jj}(\overrightarrow{F})\phi_j\overline{\phi_j} = 0$$

$$\frac{\partial\phi_i}{\partial\overline{z}} + 2\sum_{j>k} Re(\overline{\phi_j}\phi_k)\overline{\Gamma}^i_{jk}(\overrightarrow{F}) + \sum_{j=1}^{3} |\phi_j|^2\overline{\Gamma}^i_{jj}(\overrightarrow{F}) = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

isso implica que $\dfrac{\partial\phi_i}{\partial\overline{z}} \in \mathbb{R}$ e assim

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi_i}{\partial\overline{z}} &= \frac{1}{2}(\frac{\partial\phi_i}{\partial u} + i\frac{\partial\phi_i}{\partial v})\\ &= \frac{1}{2}[\frac{\partial(Re(\phi_i) + iIm(\phi_i))}{\partial u} + i\frac{\partial(Re(\phi_i) + iIm(\phi_i))}{\partial v}]\\ &= \frac{1}{2}[\frac{\partial Re(\phi_i)}{\partial u} - \frac{\partial Im(\phi_i)}{\partial v}] + \frac{i}{2}[\frac{\partial Re(\phi_i)}{\partial v} + \frac{\partial Im(\phi_i)}{\partial u}]\end{aligned}$$

logo

$$\frac{\partial Re(\phi_i)}{\partial v} + \frac{\partial Im(\phi_i)}{\partial u} = 0 \tag{2.9}$$

ou seja,

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F_i}{\partial u} = 2Re(\phi_i)\\ \dfrac{\partial F_i}{\partial v} = -2Im(\phi_i)\end{cases}$$

como devemos ter

$$\frac{\partial}{\partial v}(\frac{\partial F_i}{\partial u}) = \frac{\partial}{\partial u}(\frac{\partial F_i}{\partial v})$$

então;

$$2\frac{\partial}{\partial v}\big(Re(\phi_i)\big) = -2\frac{\partial}{\partial u}\big(Im(\phi_i)\big).$$

ou seja,

$$\frac{\partial Re(\phi_i)}{\partial v} + \frac{\partial Im(\phi_i)}{\partial u} = 0.$$

Para concluir que $\overrightarrow{F}$ é uma imersão mínima conforme, lembramos que na demostração do Lema 2.3 verificamos que a equação:

$$\frac{\partial^2 F_i}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F_i}{\partial v^2} + \sum_{j,k=1}^{3}(\frac{\partial F_k}{\partial u}\frac{\partial F_j}{\partial u} + \frac{\partial F_k}{\partial v}\frac{\partial F_j}{\partial v})\overline{\Gamma}^i_{jk}(\overrightarrow{F}) = 0$$

é equivalente a equação (2.5):

$$\frac{\partial\phi_i}{\partial\overline{z}} + \sum_{j,k=1}^{3}\overline{\Gamma}^i_{jk}(\overrightarrow{F})\phi_k\overline{\phi_j} = 0.$$

Portanto segue do Lema 2.2 que $\overrightarrow{F}$ é uma imersão mínima conforme. $\square$

2.2 Superfícies Mínimas em Grupos de Lie

Nesta seção estudaremos imersões $\overrightarrow{F}: M^2 \to G$, onde G é um Grupo de Lie tridimensional com métrica invariante à esquerda $\overline{g}$.

Seja $\overrightarrow{F}: M^2 \to G$, uma função de uma superfície de Riemann em um grupo de Lie com métrica invariante à esquerda $\overline{g}$. Sejam E_i, $i = 1, 2, 3$, uma base de campo de vetores ortonormais e invariante à esquerda e $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, 3$, um campo de vetores coordenadas em alguma parte U de G. Então podemos escrever:

$$\phi = \sum_{i=1}^{3} \phi_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{3} \psi_i E_i,$$

para algumas funções complexas $\phi_i, \psi_i : \Omega \to \mathbb{C}$, onde $\Omega \subset M$ é um aberto de M. Alem disso, existe uma matriz $A = (A_{ij})$, com funções entradas $A_{ij} : f(\Omega) \cap U \to \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2, 3$, tal que :

$$\phi_i = \sum_{j=1}^{3} A_{ij} \psi_j.$$

Considere as constantes de estrutura da àlgebra de Lie, C_{ij}^k, obtidas a partir do colchete $[E_i, E_j]$, isto é, $[E_i, E_j] = \sum_{k=1}^{3} C_{ij}^k E_k$. A fórmula Kozul para a conexão de Levi-Civita é dada por:

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_{E_i} E_j, E_k \rangle &= \{E_j \langle E_i, E_k \rangle + E_i \langle E_k, E_j \rangle - E_k \langle E_j, E_i \rangle \\ &- \langle [E_j, E_k], E_i \rangle - \langle [E_i, E_k], E_j \rangle - \langle [E_j, E_i], E_k \rangle \} \\ &= -C_{jk}^i - C_{ik}^j + C_{ji}^k \end{aligned}$$

Portanto;

$$2\langle \nabla_{E_i} E_j, E_k \rangle = C_{ij}^k - C_{jk}^i + C_{ki}^j = L_{ij}^k. \tag{2.10}$$

Teorema 2.2. *Sejam $(G, \overline{g})$ um grupo de Lie tridimensional com métrica $\overline{g}$ e $\{x_1, x_2, x_3\}$ coordenadas locais. Sejam $F_i \colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ e $\psi_i \colon \Omega \to \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq 3$ soluções do sis-*

tema de equações

$$\begin{cases} \phi_i = \dfrac{\partial F_i}{\partial z}, \quad \phi_i = \sum_j A_{ij}\psi_j \\ \sum_{i=1}^3 \psi_i \overline{\psi_i} \neq 0 \\ \sum_{i=1}^3 {\psi_i}^2 = 0. \\ \dfrac{\partial \psi_i}{\partial \overline{z}} + \dfrac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \overline{\psi_j}\psi_k L^i_{jk} = 0. \end{cases} \tag{2.11}$$

Então $\overrightarrow{F} = (F_1, F_2, F_3)$ *define uma imersão mínima conforme em* G.

Demonstração. De acordo com o Teorema 2.1, devemos somente mostrar que o sistema (2.6) é equivalente ao sistema (2.11). Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^3 \overline{g}_{jk}\phi_j\overline{\phi_k} = \langle \phi, \overline{\phi} \rangle &= \langle \sum_{j=1}^3 \psi_j E_j, \sum_{k=1}^3 \overline{\psi_k} E_k \rangle \\ &= \sum_{j,k=1}^3 \psi_j \overline{\psi_k} \langle E_j, E_k \rangle \\ &= \sum_{i=1}^3 \psi_i \overline{\psi_i} \neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^3 \overline{g}_{jk}\phi_j\phi_k = \langle \phi, \phi \rangle &= \langle \sum_{j=1}^3 \psi_j E_j, \sum_{k=1}^3 \overline{\psi_k} E_k \rangle \\ &= \sum_{j,k=1}^3 \psi_j \psi_k \langle E_j, E_k \rangle \\ &= \sum_{i=1}^3 {\psi_i}^2 = 0. \end{aligned}$$

Escrevendo a condição de ϕ ser uma secção holomorfa em termos do campo de vetores invariante À esquerda $\{E_1, E_2, E_3\}$, através de (2.10) obtemos

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}}\phi &= \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}}\big(\sum_{i=1}^{3}\psi_i E_i\big) \\
&= \sum_{i=1}^{3}\big(\frac{\partial \psi_i}{\partial \bar{z}}E_i + \psi_i \overline{\nabla}_{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}}E_i\big) \\
&= \sum_{i=1}^{3}\big(\frac{\partial \psi_i}{\partial \bar{z}}E_i + \psi_i \overline{\nabla}_{\sum_{j=1}^{3}\overline{\psi_j}E_j}E_i\big) \\
&= \sum_{i=1}^{3}\big(\frac{\partial \psi_i}{\partial \bar{z}}E_i + \sum_{j=1}^{3}\overline{\psi_j}\psi_i \overline{\nabla}_{E_j}E_i\big) \\
&= \sum_{i=1}^{3}\big(\frac{\partial \psi_i}{\partial \bar{z}} + \sum_{j=1}^{3}\psi_i\overline{\psi_j}\frac{1}{2}\sum_{k}L_{ji}^{k}E_k\big)E_i \\
&= \sum_{i=1}^{3}\big(\frac{\partial \psi_i}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{3}L_{jk}^{i}\psi_k\overline{\psi_j}\big)E_i
\end{aligned}$$

Logo

$$\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}}\phi = \frac{\partial \psi_i}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{3}L_{jk}^{i}\psi_k\overline{\psi_j} = 0$$

portanto, $\overrightarrow{F}$ é mínima pelo Lema 2.3. □

Já que a dimensão de $\overline{M}$ é três, como no caso de superfícies em $\mathbb{R}^3$, podemos dar Uma simples descrição geométrica das soluções da equação $\sum_{i=1}^{3}\psi_i^2 = 0$. A idéia é a seguinte, da equação $\sum_{i=1}^{3}\psi_i^2 = 0$, temos

$$(\psi_1 - i\psi_2)(\psi_1 + i\psi_2) = -\psi_3^2.$$

o que sugere a definição de duas novas funções complexas:

$$f = \psi_1 - i\psi_2, \quad g = \frac{\psi_3}{\psi_1 - i\psi_2}, \quad \text{onde} \quad (g \neq 0) \text{ e } (f \neq 0) \tag{2.12}$$

Desta forma obtemos

$$\begin{cases} \psi_1 = \dfrac{1}{2}(1-g^2)f \\ \psi_2 = \dfrac{i}{2}(1+g^2)f \\ \psi_3 = fg \end{cases} \tag{2.13}$$

Se z_0 é um ponto onde g tem um polo de ordem m, então, é claro que f deve ter um zero de ordem exatamente $2m$ em z_0. Neste caso se obtém a representação de Weierstrass de superfícies mínimas de maneira análoga à teoria clássica do $\mathbb{R}^3$.

Se escrevermos a métrica induzida em termos das funções f e g, obtemos: $ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2)$. Para verficarmos, lembramos que:

$$\lambda^2 = \langle \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u}, \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u} \rangle = \langle \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v}, \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v} \rangle$$

mas,

$$\phi = \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u} - i\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v}) \quad \text{e} \quad \overline{\phi} = \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u} + i\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v})$$

por outro lado podemos escrever:

$$\phi = \sum_{i=1}^{3} \psi_i E_i \quad \text{e} \quad \overline{\phi} = \sum_{i=1}^{3} \overline{\psi}_i E_i$$

logo

$$\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u} = \phi + \overline{\phi} = \sum_{i=1}^{3} \psi_{i=1}^{3} E_i + \sum_{i=1}^{3} \overline{\psi}_i E_i = \sum_{i=1}^{3} (\psi_i + \overline{\psi}_i) E_i$$

portanto

$$\begin{aligned}
\langle \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u}, \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u} \rangle &= \langle \sum_{i=1}^{3} (\psi_i + \overline{\psi}_i) E_i, \sum_{j=1}^{3} (\psi_j + \overline{\psi}_j) E_j \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{3} (\psi_i + \overline{\psi}_i).\overline{(\psi_j + \overline{\psi}_j)} \langle E_i, E_j \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{3} (\psi_i + \overline{\psi}_i).(\overline{\psi}_j + \psi_j) \langle E_i, E_j \rangle
\end{aligned}$$

Como a base de vetores invariante à esquerda é ortonormal, podemos dizer que:

$$\langle E_i, E_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

Logo

$$\begin{aligned}\langle\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u},\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u}\rangle &= \sum_{i=1}^{3}(\psi_i+\overline{\psi}_i)^2\\ &= \sum_{i=1}^{3}(\psi_i^2+2\psi_i\overline{\psi_i}+\overline{\psi_i}^2)\\ &= \sum_{i=1}^{3}\psi_i^2+2\sum_{i=1}^{3}\psi_i\overline{\psi_i}+\sum_{i=1}^{3}\overline{\psi_i}^2\end{aligned}$$

de maneira análoga podemos verificar que

$$\langle\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v},\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v}\rangle = -\sum_{i=1}^{3}\psi_i^2+2\sum_{i=1}^{3}\psi_i\overline{\psi_i}-\sum_{i=1}^{3}\overline{\psi_i}^2$$

Mas sabemos que: $\langle\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u},\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u}\rangle = \langle\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v},\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v}\rangle$. Portanto usando as equações acima, obtemos

$$\sum_{i=1}^{3}\psi_i^2+2\sum_{i=1}^{3}\psi_i\overline{\psi_i}+\sum_{i=1}^{3}\overline{\psi_i}^2 = -\sum_{i=1}^{3}\psi_i^2+2\sum_{i=1}^{3}\psi_i\overline{\psi_i}-\sum_{i=1}^{3}\overline{\psi_i}^2$$

como $\sum_{i=1}^{3}\psi_i^2=0$, temos

$$\sum_{i=1}^{3}\overline{\psi_i}^2=0$$

Para a obtenção de uma expressão para a métrica induzida em termos de g e f devemos substituir λ^2 por uma equação que dependa somente de g e f. Como

$$\begin{aligned}\lambda^2=\langle\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u},\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u}\rangle=\langle\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v},\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v}\rangle &= 2\sum_{i=1}^{3}\psi_i\overline{\psi_i}\\ &= 2(\psi_1\overline{\psi_1}+\psi_2\overline{\psi_2}+\psi_3\overline{\psi_3})\end{aligned}$$

Usando (3.3), temos

$$\begin{aligned}
\lambda^2 &= 2\big[\frac{1}{4}(f-g^2f)(\overline{f}-\overline{g}^2\overline{f})+\frac{1}{4}(f+g^2f)(\overline{f}+\overline{g}^2\overline{f})+gf\overline{g}\overline{f}\big]\\
&= \frac{1}{2}\big[|f|^2-\overline{g}^2|f|^2-g^2|f|^2+|g|^4|f|^2+|f|^2\\
&+ \overline{g}^2|f|^2+g^2|f|^2+|g|^4|f|^2+4|g|^2|f|^2\big]\\
&= \frac{1}{2}\big[2|f|^2+2|g|^4|f|^2+4|g|^2|f|^2\big]\\
&= |f|^2(1+|g|^4+2|g|^2)\\
&= |f|^2(1+|g|^2)^2
\end{aligned}$$

Logo a métrica induzida é dada por

$$ds^2=\lambda^2(du^2+dv^2)=|f|^2(1+|g|^2)^2(du^2+dv^2)$$

Podemos obter também a forma da aplicação normal de Gauss em função de g e f. Para tanto, seja

$$\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial z}=\frac{1}{2}(\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u}-i\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v})\quad \text{e} \quad \frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial \overline{z}}=\frac{1}{2}(\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u}+i\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v})$$

como $\phi=\dfrac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial z}$ e $\overline{\phi}=\dfrac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial \overline{z}}$, temos

$$\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u}=\phi+\overline{\phi}\quad \text{e} \quad \frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v}=i(\phi-\overline{\phi})$$

Na base de campos de vetores invariantes à esquerda $\{E_1,E_2,E_3\}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial u}=\phi+\overline{\phi} &= \psi_1E_1+\psi_2E_2+\psi_3E_3+\overline{\psi_1}E_1+\overline{\psi_2}E_2+\overline{\psi_3}E_3\\
&= (\psi_1+\overline{\psi_1},\psi_2+\overline{\psi_2},\psi_3+\overline{\psi_3})
\end{aligned}$$

da mesma forma, escevemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial v}=i(\phi-\overline{\phi}) &= i(\psi_1-\overline{\psi_1})E_1+i(\psi_2-\overline{\psi_2})E_2+i(\psi_3-\overline{\psi_3})E_3\\
&= \big(i(\psi_1-\overline{\psi_1}),i(\psi_2-\overline{\psi_2}),i(\psi_3-\overline{\psi_3})\big)
\end{aligned}$$

Calculando $\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v}$, encontramos um vetor que tem a direção da normal.

$$\begin{pmatrix} I & J & K \\ (\psi_1 + \overline{\psi_1}) & (\psi_2 + \overline{\psi_2}) & (\psi_3 + \overline{\psi_3}) \\ i(\psi_1 - \overline{\psi_1}) & i(\psi_2 - \overline{\psi_2}) & i(\psi_3 - \overline{\psi_3}) \end{pmatrix}$$

Fazendo os cálculos do vetor $\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v}$ na direção de E_3 encontramos $(\psi_1 + \overline{\psi_1}).(\psi_2 - \overline{\psi_2})i - (\psi_1 - \overline{\psi_1}).(\psi_2 + \overline{\psi_2})i = (2\psi_2\overline{\psi_1} - 2\overline{\psi_2}\psi_1)i = 2\psi_2\overline{\psi_1}i - 2\overline{\psi_2}\psi_1 i$

Escrevendo essa expressão em termos de g e f temos

$$\begin{aligned} 2\psi_2\overline{\psi_1}i - 2\overline{\psi_2}\psi_1 i &= -\frac{1}{2}[(f + g^2 f)(\overline{f} - \overline{g}^2\overline{f}) + (f - g^2 f)(\overline{f} + \overline{g}^2\overline{f})] \\ &= -\frac{1}{2}|f|^2 + \frac{1}{2}|f|^2\overline{g}^2 - \frac{1}{2}g^2|f|^2 + \frac{1}{2}|g|^4|f|^2 - \frac{1}{2}|f|^2 \\ &- \frac{1}{2}|f|^2\overline{g}^2 + \frac{1}{2}g^2|f|^2 + \frac{1}{2}|g|^4|f|^2 \\ &= |f|^2(|g|^4 - 1) \\ &= |f|^2(|g|^2 - 1)(|g|^2 + 1) \end{aligned}$$

Analogamente verifica-se que as componentes de $\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v}$ na direção de E_1 e E_2 são respectivamente $2|f|^2(|g|^2 + 1)Re(g)$ e $2|f|^2(|g|^2 + 1)Im(g)$. portanto,

$$\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v} = |f|^2(|g|^2 + 1)\big(2Re(g)E_1 + 2Im(g)E_2 + (|g|^2 - 1)E_3\big)$$

Podemos considerar um campo $V = 2Re(g)E_1 + 2Im(g)E_2 + (|g|^2 - 1)E_3$ que é paralelo a $\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v}$. Normalizando, temos

$$N = \frac{1}{|g|^2 + 1}\big(2Re(g)E_1 + 2Im(g)E_2 + (|g|^2 - 1)E_3\big)$$

Se $\pi\colon \mathbb{S}^2(1) \setminus \{0, 0, 1\} \to \mathbb{R}^2$ é uma projeção estereográfica a partir do pólo norte. Então $\pi \circ N = (Re(g), Im(g))$. Para tanto considere a reta que liga o pólo norte de coordenadas $(0, 0, 1)$ e a extremidade do vetor normal de coordenadas:

$$\Big((\frac{2}{|g|^2 + 1})Re(g), (\frac{2}{|g|^2 + 1})Im(g), (\frac{1}{|g|^2 + 1})(|g|^2 - 1)\Big)$$

Essa reta tem a seguinte expressão:

$$\begin{cases} x_1 = 0 + Re(g)t \\ x_2 = 0 + Im(g)t \\ x_3 = 1 - 1t \end{cases}$$

Como a projeção é feita no plano $x_3 = 0$, a terceira equação indica que $t = 1$, e segue que $\pi \circ N = (Re(g), Im(g))$. Se identificarmos $\mathbb{R}^2$ com o plano complexo $\mathbb{C}$ e estendermos π a função $\widetilde{\pi}\colon \mathbb{S}^2(1) \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, com $\widetilde{\pi}(0,0,1) = \infty$, então

$$\pi \circ N = g.$$

Esse cálculo nos mostra que a função g pode ser identificada com a aplicação de Gauss de $\overrightarrow{F}$.

Capítulo 3

Superfícies Mínimas no Grupo de Heisenberg $\mathbb{H}_3$

O Grupo de Heisenberg é um grupo de Lie que possui a seguinte representação em $GL_3(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z+\dfrac{xy}{2} \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

O fato de $\mathbb{H}_3$ ser um grupo se deve ao fato de ser um subgrupo de $GL_3(\mathbb{R})$, o grupo multiplicativo de matrizes não-singulares 3×3 com entradas reais. Assim o elemento neutro de $\mathbb{H}_3$ é a matriz identidade, que é obtida quando $x = y = z = 0$.

Com a operação de produto de matrizes, é fácil ver que se

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3+\dfrac{x_1x_2}{2} \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{então} \quad X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x_1 & -x_3+\dfrac{x_1x_2}{2} \\ 0 & 1 & -x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos também identificar $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ com a matriz acima. Com isso associamos ao Grupo de Heisenberg a seguinte operação:

$$(x_1, y_1, z_1) * (x_2, y_2, z_2) = \left(\ x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 - \frac{y_1x_2}{2} + \frac{x_1y_2}{2} \ \right)$$

com essa operação obtemos o elemento neutro $e = (0,0,0)$ e o inverso $x^{-1} = (-x_1, -x_2, -x_3)$.

Podemos definir a aplicação translação à esquerda por

$$L_{x^{-1}}(y) = x^{-1} * y = (-x_1 + y_1, -x_2 + y_2, -x_3 + y_3 + \frac{x_2 y_1}{2} - \frac{x_1 y_2}{2})$$

Calculando a diferencial, temos

$$d(L_{x^{-1}})_y = \begin{pmatrix} \frac{\partial(-x_1+y_1)}{\partial y_1} & \frac{\partial(-x_1+y_1)}{\partial y_2} & \frac{\partial(-x_1+y_1)}{\partial y_3} \\ \frac{\partial(-x_2+y_2)}{\partial y_1} & \frac{\partial(-x_2+y_2)}{\partial y_2} & \frac{\partial(-x_2+y_2)}{\partial y_3} \\ \frac{\partial(-x_3+y_3+\frac{x_2y_1}{2}-\frac{x_1y_2}{2})}{\partial y_1} & \frac{\partial(-x_3+y_3+\frac{x_2y_1}{2}-\frac{x_1y_2}{2})}{\partial y_2} & \frac{\partial(-x_3+y_3+\frac{x_2y_1}{2}-\frac{x_1y_2}{2})}{\partial y_3} \end{pmatrix}$$

logo

$$d(L_{x^{-1}})_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{x_2}{2} & -\frac{x_1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

desta forma;

$$d(L_{x^{-1}})_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{x_2}{2} & -\frac{x_1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Considerando $e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)$, temos

$$d(L_{x^{-1}})_x(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{x_2}{2} & -\frac{x_1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{x_2}{2} \end{pmatrix}$$

$$d(L_{x^{-1}})_x(e_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{x_2}{2} & -\frac{x_1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{x_1}{2} \end{pmatrix}$$

$$d(L_{x^{-1}})_x(e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{x_2}{2} & -\frac{x_1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Consideramos em $T_e\mathbb{H}_3$, onde $e = (0,0,0)$ é o elemento neutro de $\mathbb{H}_3$, a métrica canônica, com base ortonormal $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ e $e_3 = (0,0,1)$. Estentendo para a métrica invariante à esquerda conforme a seção 1.4, temos

$$\langle e_i, e_j\rangle_x = \langle d(L_{x^{-1}})_x(e_i), d(L_{x^{-1}})_x(e_j)\rangle_e.$$

Portanto

$$\begin{aligned} g_{11}(x) = \langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_1}\rangle_x = &= \langle d(L_{x^{-1}})_x(e_1), d(L_{x^{-1}})_x(e_1)\rangle_e \\ &= \langle (1,0,\frac{x_2}{2}),(1,0,\frac{x_2}{2})\rangle \\ &= 1 + \frac{x_2^2}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{21}(x) = g_{12}(x) = \langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\rangle_x = &= \langle d(L_{x^{-1}})_x(e_1), d(L_{x^{-1}})_x(e_2)\rangle_e \\ &= \langle (1,0,\frac{x_2}{2}),(0,1,-\frac{x_1}{2})\rangle \\ &= -\frac{x_1x_2}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{31}(x) = g_{13}(x) = \langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_3}\rangle_x = &= \langle d(L_{x^{-1}})_x(e_1), d(L_{x^{-1}})_x(e_3)\rangle_e \\ &= \langle (1,0,\frac{x_2}{2}),(0,0,1)\rangle \\ &= \frac{x_2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{22}(x) = \langle \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_2}\rangle_x = &= \langle d(L_{x^{-1}})_x(e_2), d(L_{x^{-1}})_x(e_2)\rangle_e \\ &= \langle (0,1,-\frac{x_1}{2}),(0,1,-\frac{x_1}{2})\rangle \\ &= 1 + \frac{x_1^2}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{33}(x) = \langle \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_3}\rangle_x = &= \langle d(L_{x^{-1}})_x(e_2), d(L_{x^{-1}})_x(e_2)\rangle_e \\ &= \langle (0,0,1),(0,0,1)\rangle \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
g_{23}(x) = g_{32}(x) = \langle \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_2} \rangle_x = &= \langle d(L_{x^{-1}})_x(e_3), d(L_{x^{-1}})_x(e_2) \rangle_e \\
&= \langle (0,0,1), (0,1,-\frac{x_1}{2}) \rangle \\
&= -\frac{x_1}{2}
\end{aligned}
$$

Desta forma podemos escrever a métrica invariante à esquerda como

$$
\widetilde{g} = dx_1^2 + dx_2^2 + \big(dx_3^2 + \frac{1}{2}x_2 dx_1 - \frac{1}{2}x_1 dx_2\big)^2 \tag{3.1}
$$

Para encontrar uma base de vetores invariantes à esquerda, consideramos a base $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $T_e\mathbb{H}_3$ e $d(L_x)_e$, daí

$$
d(L_x)_e(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{x_2}{2} & \frac{x_1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{x_2}{2} \end{pmatrix}
$$

$$
d(L_x)_e(e_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{x_2}{2} & \frac{x_1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{x_1}{2} \end{pmatrix}
$$

$$
d(L_x)_e(e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{x_2}{2} & \frac{x_1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

Com os cálculos acima podemos concluir que a base de vetores $\{E_1, E_2, E_3\}$ de $T_x\mathbb{H}_3$ dada por

$$
\begin{cases}
E_1 = \dfrac{\partial}{\partial x_1} - \dfrac{x_2}{2}\dfrac{\partial}{\partial x_3} \\
E_2 = \dfrac{\partial}{\partial x_2} + \dfrac{x_1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x_3} \\
E_3 = \dfrac{\partial}{\partial x_3}
\end{cases}
$$

é invariante à esquerda, e segue da definição de campos de vetores invariante à esquerda que esta base é ortonormal.

Seja $\overrightarrow{F}: \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{H}_3$ uma imersão e $\phi = \frac{\partial F}{\partial z} = \sum_{i=1}^{3} \phi_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{3} \psi_i E_i$. podemos escrever $\phi_i = \sum_{j=1}^{3} A_{ij}\psi_j$, onde $A = (A_{ij})$ é a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{-x_2}{2} & \dfrac{x_1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Neste contexto o Teorema 3.1 assume a seguinte forma

Teorema 3.1. $(\mathbb{H}_3, \widetilde{g})$ *o grupo de Heisenberg tridimensional com métrica* $\widetilde{g}$ *e* $\{x_1, x_2, x_3\}$ *coordenadas locais. Sejam* $F_i\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ *e* $\phi_i, \psi_i\colon \Omega \to \mathbb{C}$, $1 \leq i \leq 3$ *soluções do sistema de equações:*

$$\begin{cases} \phi_i = \dfrac{\partial F_i}{\partial z}, \quad \phi_i = \sum_j A_{ij}\psi_j \\ \sum_{i=1}^{3} \psi_i \overline{\psi_i} \neq 0 \\ \sum_{i=1}^{3} {\psi_i}^2 = 0. \\ \dfrac{\partial \psi_1}{\partial \overline{z}} + Re(\psi_2 \overline{\psi_3}) = 0 \\ \dfrac{\partial \psi_2}{\partial \overline{z}} - Re(\psi_1 \overline{\psi_3}) = 0 \\ \dfrac{\partial \psi_3}{\partial \overline{z}} - iIm(\psi_1 \overline{\psi_2}) = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

Então, $\overrightarrow{F} = (F_1, F_2, F_3)$ *define uma imersão mínima conforme em* $\mathbb{H}_3$*.*

Demonstração. A prova desse Teorema é análoga à apresentada no Teorema 2.2, restando somente verificar a equivalência entre a equação:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \overline{z}} + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{3} \overline{\psi_j} \psi_k \overline{L}_{jk}^{i} = 0$$

e o sistema de equações

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi_1}{\partial \overline{z}} + Re(\psi_2 \overline{\psi_3}) = 0 \\ \dfrac{\partial \psi_2}{\partial \overline{z}} - Re(\psi_1 \overline{\psi_3}) = 0 \\ \dfrac{\partial \psi_3}{\partial \overline{z}} - iIm(\psi_1 \overline{\psi_2}) = 0 \end{cases}$$

Primeiramente precisamos calcular as constantes da àlgebra de Lie C_{ij}^k. Mas $[E_i, E_j] = \sum_{k=1}^3 C_{ij}^k E_k$. De forma que

$$\begin{aligned}
[E_1, E_2] &= [\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{x_2}{2}\frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{x_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_3}] \\
&= [\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}] + [\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{x_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_3}] - [\frac{x_2}{2}\frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_2}] - [\frac{x_2}{2}\frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{x_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_3}] \\
&= \frac{x_1}{2}[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_3}] + \frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{x_1}{2})\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{x_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_3}(1)\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{x_2}{2}[\frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_2}] - \frac{x_2}{2}\frac{\partial}{\partial x_3}(1)\frac{\partial}{\partial x_2} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_2}(\frac{x_2}{2})\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{x_1 x_2}{4}[\frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_3}] - \frac{x_2}{2}\frac{\partial}{\partial x_3}(\frac{x_1}{2})\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{x_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_3}(\frac{x_2}{2})\frac{\partial}{\partial x_3} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_3} = E_3
\end{aligned}$$

portanto $[E_1, E_2] = 1E_3$, o que significa que $C_{12}^1 = C_{12}^2 = 0$ e $C_{12}^3 = 1$.

$$\begin{aligned}
[E_1, E_3] &= [\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{x_2}{2}\frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_3}] \\
&= [\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_3}] - [\frac{x_2}{2}\frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_3}] \\
&= -\frac{x_2}{2}[\frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_3}] - \frac{x_2}{2}\frac{\partial}{\partial x_3}(1)\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_3}(\frac{x_2}{2})\frac{\partial}{\partial x_3} = 0
\end{aligned}$$

como $[E_1, E_3] = 0$, temos $C_{13}^1 = C_{13}^2 = C_{13}^3 = 0$.

$$\begin{aligned}
[E_2, E_3] &= [\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{x_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_3}] \\
&= [\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}] + [\frac{x_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_3}] \\
&= \frac{x_1}{2}[\frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_3}] + \frac{x_1}{2}\frac{\partial}{\partial x_3}(1)\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_3}(\frac{x_1}{2})\frac{\partial}{\partial x_3} = 0
\end{aligned}$$

logo $[E_2, E_3] = 0$, e $C_{23}^1 = C_{23}^2 = C_{23}^3 = 0$.

Os demais colchetes do tipo $[E_i, E_i]$ são nulos pois por definição $[E_i, E_i] = E_i E_i - E_i E_i = 0$. Como $[X, Y] = -[Y, X]$, concluímos facilmente que $C_{ij}^k = C_{ji}^k$. Portanto $C_{12}^3 = 1$ e $C_{21}^3 = -1$, e todas as demais constantes da àlgebra de Lie são nulas. Agora para determinarmos as constantes L_{ij}^k, basta lembrarmos que $L_{ij}^k = C_{ij}^k - C_{jk}^i + C_{ki}^j$.

Assim

$$\begin{aligned}
L_{12}^3 &= C_{12}^3 - C_{23}^1 + C_{31}^2 = 1\\
L_{23}^1 &= C_{23}^1 - C_{31}^2 + C_{12}^3 = -1\\
L_{31}^2 &= C_{31}^2 - C_{12}^3 + C_{23}^1 = 1\\
L_{21}^3 &= C_{21}^3 - C_{13}^2 + C_{32}^1 = -1\\
L_{13}^2 &= C_{13}^2 - C_{32}^1 + C_{21}^3 = 1\\
L_{32}^1 &= C_{32}^1 - C_{21}^3 + C_{13}^2 = -1
\end{aligned}$$

Ou seja, $L_{12}^3 = 1$, $L_{23}^1 = -1$, $L_{31}^2 = 1$,$L_{21}^3 = -1$, $L_{13}^2 = 1$, $L_{32}^1 = -1$. As demais constantes L_{ij}^k são todas nulas.

Substituindo os valores encontrados de L_{ij}^k na equação:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \overline{z}} + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{3} L_{jk}^i \overline{\psi_j}\psi_k = 0$$

obtemos

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial \psi_1}{\partial \overline{z}} + \dfrac{1}{2}(\overline{\psi_2}\psi_3 + \overline{\psi_3}\psi_2) = 0\\
\dfrac{\partial \psi_2}{\partial \overline{z}} - \dfrac{1}{2}(\overline{\psi_1}\psi_3 + \overline{\psi_3}\psi_1) = 0\\
\dfrac{\partial \psi_3}{\partial \overline{z}} - \dfrac{1}{2}(\overline{\psi_2}\psi_1 - \overline{\psi_1}\psi_2) = 0
\end{cases}$$

Assim concluímos que:

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial \psi_1}{\partial \overline{z}} + Re(\psi_2\overline{\psi_3}) = 0\\
\dfrac{\partial \psi_2}{\partial \overline{z}} - Re(\psi_1\overline{\psi_3}) = 0\\
\dfrac{\partial \psi_3}{\partial \overline{z}} - iIm(\psi_1\overline{\psi_2}) = 0
\end{cases} \tag{3.3}$$

□

Podemos reescrever o Teorema 3.1 em função das aplicações complexas g e f, definidas em 2.12.

Teorema 3.2. $(\mathbb{H}_3, \widetilde{g})$ *o grupo de Heisenberg tridimensional com métrica* $\widetilde{g}$ *e* $\{x_1, x_2, x_3\}$ *coordenadas locais,* g *e* f *funções não identicamente nulas definidas em um domínio* *aberto simplismente conexo* $\Omega \subset \mathbb{C}$, $F_j : \Omega \to \mathbb{R}$ *e* $\psi_j : \Omega \to \mathbb{C}$, $j = 1, 2, 3$. *Se* f *e* g *são soluções do sistema de equações:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial z} = \dfrac{(1-g^2)f}{2} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial z} = i\dfrac{(1+g^2)f}{2} \\ \dfrac{\partial F_3}{\partial z} = fg - \dfrac{F_2}{4}(1-g^2)f + i\dfrac{F_1}{4}(1+g^2)f \\ i\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = -\dfrac{|f|^2}{2}(|g|^2-1)\overline{g} \\ 2f\dfrac{\partial g}{\partial \overline{z}} + g\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \dfrac{|f|^2}{2}i(|g|^2-1) \end{cases} \tag{3.4}$$

Então, $\overrightarrow{F} = (F_1, F_2, F_3)$ *define uma imersão mínima conforme em* $\mathbb{H}_3$.

Demonstração. Considere $\psi_1 = \frac{1}{2}(1-g^2)f$, $\psi_2 = \frac{i}{2}(1+g^2)f$ e $\psi_3 = fg$ (como na equação (2.13)). Desta forma, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_1}{\partial \overline{z}} &= \frac{\partial[\frac{1}{2}(1-g^2)f]}{\partial \overline{z}} \\ &= \frac{1}{2}(1-g^2)\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} - fg\frac{\partial g}{\partial \overline{z}} \end{aligned}$$

Usando (3.3), obtemos

$$\begin{aligned} \psi_2\overline{\psi_3} &= \frac{i}{2}(1+g^2)f\overline{g}\overline{f} \\ &= \frac{|f|^2}{2}\overline{g}i + \frac{|g|^2|f|^2}{2}gi \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} -Re(\psi_2\overline{\psi_3}) &= -\frac{|f|^2}{2}Re(\overline{g}i) - \frac{|g|^2|f|^2}{2}Re(gi) \\ &= -\frac{|f|^2}{2}Im(g) + \frac{|g|^2|f|^2}{2}Im(g) \\ &= \frac{|f|^2}{2}(g^2-1)Im(g) \end{aligned}$$

Portanto a primeira equação de (3.3) pode ser escrita como

$$\frac{1}{2}(1-g^2)\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} - fg\frac{\partial g}{\partial \overline{z}} = \frac{|f|^2}{2}(g^2-1)Im(g)$$

As demais equações do sistema (3.3) podem ser obtidas de forma análoga. Escrevendo as equações do sistema (3.3) em função de g e f, definidas em (2.12), temos

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(1-g^2)\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} - fg\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \frac{|f|^2}{2}(|g|^2-1)Im(g), \\ \frac{i}{2}(1+g^2)\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + fgi\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = -\frac{|f|^2}{2}(|g|^2-1)Re(g), \\ f\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} + g\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{i}{4}|f|^2(|g|^4-1). \end{cases} \tag{3.5}$$

Podemos notar também que a terceira equação do novo sistema é uma combinação linear das duas primeiras. Multiplicando a primeira equação de (3.5) por i e adicionando a segunda, obtemos

$$\begin{aligned} i\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{|f|^2}{2}(|g|^2-1)(-Re(g)+iIm(g)) \\ &= -\frac{|f|^2}{2}(|g|^2-1)\bar{g} \end{aligned}$$

que é a quarta equação de (3.4).

Analogamente, multiplicando por i a primeira equação de (3.5) e subtraindo a segunda, obtemos a quinta equação de (3.4).

$$2f\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} + g\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{|f|^2}{2}i(|g|^2-1)$$

A terceira equação de (3.5) pode ser obtida multiplicando a quarta equação de (3.4) por $-ig$ e somando com a quinta equação de (3.4). Logo a quarta e quinta equações de (3.4) são equivalentes ao sistema (3.5). □

Exemplo 3.1. *(Superfície tipo sela) A imersão $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{H}_3$ dada por*

$$\overrightarrow{F}(u,v) = (-4au, 4Q(v), -8auQ(v)),$$

onde $Q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, define uma superfície mínima em H_3. Neste caso, F é o gráfico da função $x_3 = \frac{1}{2}x_1x_2$, que é uma superfície tipo sela. De fato, sejam g e f duas funções reais dependendo somente de uma variável, istó é $g(u,v) = l(v)$, e $f(u,v) = -2h(v)$, onde l e h são duas funções diferenciáveis definidas em um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$. Desta forma de acordo com o exemplo anterior podemos *assumir que* $|g| \neq 1$. *Multiplicando a quarta equação de* (3.4) *por* $-i$ *e a quinta equação* (3.4) *por* $\overline{g}$, *temos*

$$(1-|g|^2)\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 2f\overline{g}\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}$$

Escrevendo a equação acima em termos de l *e* h *e lembrando que* $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\right)$, *obtemos*

$$(1-|g|^2)\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = (1-l^2)(-ih') = -i(1-l^2)h'$$

e

$$2f\overline{g}\frac{\partial g}{\partial \overline{z}} = 2(-2h)l\frac{1}{2}(il') = -2ihll'$$

logo

$$(1-l^2)h' = 2hll'. \tag{3.6}$$

Existe uma função $q(v)$ *tal que* $h(v) = q+a$ *e* $l(v) = \sqrt{\dfrac{q-a}{q+a}} = \dfrac{\sqrt{q^2-a^2}}{q+a}$ *e alguma constante* $a \in \mathbb{R}$ *de forma que* l *e* h *sejam soluções de* (3.6). *De fato,*

$$(1-l^2)h' = \left(1 - \frac{q-a}{q+a}\right)q' = \frac{2aq'}{q+a}$$

analogamente,

$$\begin{aligned}
2hll' &= 2(q+a)\frac{\sqrt{q^2-a^2}}{q+a}\left(\frac{\frac{qq'}{\sqrt{q^2-a^2}}(q+a) - q'\sqrt{q^2-a^2}}{(q+a)^2}\right) \\
&= 2\sqrt{q^2-a^2}\left(\frac{qq'(q+a) - q'(q^2-a^2)}{(q+a)^2\sqrt{q^2-a^2}}\right) \\
&= 2\left(\frac{qq'(q+a) - q'(q-a)(q+a)}{(q+a)^2}\right) \\
&= 2\Big(\frac{qq' - q'(q-a)}{q+a}\Big) \\
&= 2\Big(\frac{qq' - qq' + aq'}{q+a}\Big) = \frac{2aq'}{q+a}.
\end{aligned}$$

Portanto h e l assim definidas satisfazem (3.6). *Para determinar q' usaremos a quarta equação de* (3.4). *Substituindo os valores acima, temos*

$$iq' = -2(q+a)^2\left(\frac{-2a}{q+a}\right)\frac{\sqrt{q^2-a^2}}{q+a}$$

ou

$$q' = 4a\sqrt{q^2-a^2} \tag{3.7}$$

Reescrevendo a imersão $\overrightarrow{F}$ do Teorema 3.2 em função de q, obtemos

$$\phi_1 = \frac{(1-G^2)H}{2} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{q-a}{q+a}\right)[-2(q+a)] = \left(\frac{a}{q+a}\right)[-2(q+a)] = -2a$$

de maneira análoga;

$$\phi_2 = \frac{i(1+G^2)H}{2} = \frac{i}{2}\left(1+\frac{q-a}{q+a}\right)[-2(q+a)] = \left(\frac{iq}{q+a}\right)[-2(q+a)] = -2iq$$

Logo

$$\begin{cases} F_1 = -4au \\ F_2 = 4Q(v) \end{cases}$$

onde $Q(v)$ é a função primitiva de $q(v)$. Para calcular F_3 primeiramente note que

$$\phi_3 = fg - \frac{F_2}{24}(1-g^2)f + i\frac{F_1}{4}(1+g^2)f = -2\sqrt{q^2-a^2} + 4aQ + i4auq \tag{3.8}$$

Integrando a equação (3.7), *nós encontramos $\sqrt{q^2-a^2} = 4aQ$. Substituindo esta expressão em* (3.8), *obtemos*

$$\phi_3 = -4aQ + i4auq.$$

Então a correspondente imersão $\overrightarrow{F} : \mathbb{C} \to \mathbb{H}_3$ é dado por

$$\begin{cases} F_1 = -4au \\ F_2 = 4Q(v) \\ F_3 = -8auQ(v) \end{cases}$$

Segue que a imagem da imersão é o gráfico da função $x_3 = \frac{1}{2}x_1x_2$, isto é, uma superfície tipo sela que possue a aplicação de Gasss de grau 1. De fato, $g = l(v)$ depende somente de um parâmetro.

Exemplo 3.2. *A imersão* $\overrightarrow{F}:\mathbb{C}\to\mathbb{H}_3$ *dada por*

$$\overrightarrow{F}(u,v)=\big(\rho(u)\cos(v),\rho(u)sen(v),cv+b\big))$$

onde b,c são constantes reais e $\rho\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *é uma função* C^∞*, é uma superfície mínima em* $\mathbb{H}_3$*. Neste caso, se* $c=0$*, a imersão é o plano horizontal* $x_3=b$ *e se* $c\neq 0$ *a imersão é uma Helicóide. De fato, escrevendo g e f como produto de uma função dependendo de uma variável por outra dependendo de uma variável diferente, isto é,* $g(u,v)=ie^{iv}l(u)$ *e* $f(u,v)=e^{-iv}h(u)$*. Onde l e h são duas funções diferenciáveis definidas em um aberto de* $\mathbb{R}$*. A equação* $(1-|g|^2)\dfrac{\partial f}{\partial\overline{z}}=2f\overline{g}\dfrac{\partial g}{\partial\overline{z}}$ *é equivalente:*

$$\begin{aligned}(1-|g|^2)\frac{\partial f}{\partial\overline{z}} &= (1-l^2)\frac{1}{2}\big(e^{-iv}h'+e^{-iv}h\big)\\ &= \frac{1}{2}(1-l^2)(h+h')e^{-iv}\end{aligned}$$

analogamente,

$$2f\overline{g}\frac{\partial g}{\partial\overline{z}}=2[e^{-iv}h(u)][-ie^{-iv}l(u)]\frac{1}{2}[ie^{iv}l'-ie^{iv}l]=lh(l'-l)e^{iv}$$

desta forma

$$\frac{1}{2}(1-l^2)(h+h')e^{-iv}=lh(l'-l)e^{iv}$$

portanto

$$\frac{1}{2}(1-l^2)(h+h')=lh(l'-l)\tag{3.9}$$

Então existe uma função $\rho(u)$ *tal que* $l=\dfrac{\sqrt{\rho'+\rho}}{\sqrt{\rho'-\rho}}$ *e* $h=\dfrac{\rho'-\rho}{2}$ *são soluções de* (3.9)*. De fato,*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(1-l^2)(h+h') &= \frac{1}{2}\Big(\frac{-2\rho}{\rho'-\rho}\Big)\Big(\frac{\rho'-\rho}{2}+\frac{\rho''-\rho'}{2}\Big)\\ &= \frac{-\rho}{\rho'-\rho}\Big(\frac{\rho''-\rho}{2}\Big)\\ &= \frac{\rho^2-\rho\rho''}{2}\end{aligned}$$

por outro lado,

$$
\begin{aligned}
lh(l'-l) &= \Big(\frac{\sqrt{(\rho')^2-(\rho)^2}}{\rho'-\rho}\Big)\Big(\frac{\rho'-\rho}{2}\Big)\Bigg(\frac{\frac{2\rho'\rho''-2\rho\rho'}{2\sqrt{(\rho')^2-(\rho)^2}}(\rho'-\rho)-(\rho''-\rho')\sqrt{(\rho')^2-(\rho)^2}}{(\rho'-\rho)^2}\\
&\quad -\frac{\sqrt{(\rho')^2-(\rho)^2}}{(\rho'-\rho)}\Bigg)\\
&= \frac{\sqrt{(\rho')^2-(\rho)^2}}{2}\Bigg(\frac{\rho'(\rho''-\rho)(\rho'-\rho)-(\rho''-\rho')((\rho')^2-(\rho)^2)}{(\rho'-\rho)^2\sqrt{(\rho')^2-(\rho)^2}}-\frac{\sqrt{(\rho')^2-(\rho)^2}}{(\rho'-\rho)}\Bigg)\\
&= \frac{1}{2}\Bigg(\frac{\rho'(\rho''-\rho)-(\rho''-\rho')(\rho'+\rho)}{(\rho'-\rho)}-(\rho'+\rho)\Bigg)\\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{\rho'\rho''-\rho'\rho-\rho''\rho'+(\rho')^2-\rho''\rho+\rho'\rho-(\rho')^2+\rho^2}{(\rho'-\rho)}\Big)\\
&= \frac{\rho^2-\rho''\rho}{2}
\end{aligned}
$$

Usando a quarta equação de (3.4),

$$i\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = -\frac{|f|^2}{2}(|g|^2-1)\overline{g}$$

no primeiro membro

$$i\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{i}{2}\big(e^{-iv}h'+e^{-iv}h\big) = \frac{ie^{-iv}}{2}(h+h')$$

e no segundo membro

$$-\frac{|f|^2}{2}(|g|^2-1)\overline{g} = -\frac{h^2}{2}(l^2-1)(-ie^{-iv}l) = \frac{ie^{-iv}}{2}lh^2(l^2-1)$$

portanto

$$h+h' = lh^2(l^2-1)$$

Escrevendo a equação acima em termos de ρ,

$$h+h' = \frac{\rho''-\rho}{2}$$

além disso

$$
\begin{aligned}
lh^2(l^2-1) &= \Big(\frac{\sqrt{(\rho')^2-\rho^2}}{\rho'-\rho}\Big)\frac{(\rho'-\rho)^2}{4}\Big(\frac{2\rho}{\rho'-\rho}\Big)\\
&= \frac{\rho\sqrt{(\rho')^2-\rho^2}}{2}
\end{aligned}
$$

Concluímos então que:

$$\frac{\rho'' - \rho}{2} = \frac{\rho\sqrt{(\rho')^2 - \rho^2}}{2}$$

portanto

$$\rho'' - \rho = \rho\sqrt{(\rho')^2 - \rho^2}$$

Em outras palavras ρ *é solução da equação diferencial acima. Mas podemos escrever uma equação equivalente. Para isso, basta notar que* $(\sqrt{(\rho')^2 - \rho^2})' = \frac{\rho'\rho'' - \rho\rho'}{\sqrt{(\rho')^2 - \rho^2}} = \rho'\frac{\rho'' - \rho}{\sqrt{(\rho')^2 - \rho^2}}$. *Portanto multiplicando* $\rho'' - \rho = \rho\sqrt{(\rho')^2 - \rho^2}$ *por* $\frac{\rho'}{\sqrt{(\rho')^2 - \rho^2}}$, *temos*

$$\rho'\frac{\rho'' - \rho}{\sqrt{(\rho')^2 - \rho^2}} = \rho\rho'$$

E assim por integração chegamos a seguinte equação equivalnete:

$$\sqrt{(\rho')^2 - \rho^2} = \frac{1}{2}\rho^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Desta forma podemos reescrever a imersão f,

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \frac{(1 - g^2)f}{2} = \frac{1}{2}(1 + e^{2iv}\frac{\rho' + \rho}{\rho' - \rho})(e^{-iv}\frac{\rho' - \rho}{2}) \\
&= \frac{e^{iv}}{4}(\rho' + \rho) + \frac{e^{-iv}}{4}(\rho' - \rho) \\
&= \frac{1}{2}\rho'(\frac{e^{iv} + e^{-iv}}{2}) + \frac{i}{2}\rho(\frac{e^{iv} - e^{-iv}}{2i}) \\
&= \frac{1}{2}\rho'\cos(v) + \frac{i}{2}\rho sen(v)
\end{aligned}$$

da mesma forma

$$\begin{aligned}
\phi_2 &= \frac{i(1 + g^2)f}{2} = \frac{i}{2}(1 - e^{2iv}\frac{\rho' + \rho}{\rho' - \rho})(e^{-iv}\frac{\rho' - \rho}{2}) \\
&= -\frac{e^{iv}}{4}i(\rho' + \rho) + \frac{e^{-iv}}{4}i(\rho' - \rho) \\
&= \frac{1}{2}\rho'(\frac{e^{iv} - e^{-iv}}{2i}) - \frac{i}{2}\rho(\frac{e^{iv} + e^{-iv}}{2}) \\
&= \frac{1}{2}\rho' sen(v) - \frac{i}{2}\rho\cos(v)
\end{aligned}$$

por integração obtemos:

$$\begin{cases} F_1 = \rho(u)\cos(v) \\ F_2 = \rho(u) sen(v) \end{cases}$$

Substituindo F_1, F_2 *e a equação diferencial* $\rho'' - \rho = \rho\sqrt{(\rho')^2 - \rho^2}$ *em* $\phi_3 = fg - \frac{F_2}{24}(1-g^2)f + i\frac{F_1}{4}(1+g^2)f$, *por integração teremos:*

$$\begin{cases} F_1(u,v) = \rho(u)\cos(v) \\ F_2(u,v) = \rho(u) sen(v) \\ F_3(u,v) = cv + b \end{cases} \tag{3.10}$$

onde $b \in \mathbb{R}$

De posse da imersão, podemos fazer uma análise de alguns casos. Se $c \neq 0$, *o sistema* (3.10) *é uma parametrização mínima de um helicóide, por outro lado se* $c = 0$, (3.5) *é uma parametrização mínima de um plano horizontal de equação* $x_3 = b$.

Capítulo 4

Superfícies Mínimas em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

O plano hiperbólico $\mathbb{H}^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$ é um grupo de Lie que possui a seguinte métrica invariante a esquerda $g_{\mathbb{H}} = \dfrac{(dx_1^2 + dx_2^2)}{x_2^2}$. Podemos considerar $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ como um grupo com relação a operação $*$ dada por

$$x * y = (x_1, x_2, x_3) * (y_1, y_2, y_3) = (y_1 x_2 + x_1, x_2 y_2, x_3 + y_3)$$

O grupo $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ com a operação $*$ tem os respectivos elementos neutro e inverso

$$e = (0, 1, 0) \quad \text{e} \quad x^{-1} = (-\frac{x_1}{x_2}, \frac{1}{x_2}, -x_3)$$

A aplicação translação à esquerda é dada por:

$$L_x(y) = x * y = (y_1 x_2 + x_1, x_2 y_2, x_3 + y_3)$$

Assim $x^{-1} * y = (\dfrac{y_1}{x_2} - \dfrac{x_1}{x_2}, \dfrac{y_2}{x_2}, -x_3 + y_3)$. Portanto a diferencial de $L_{x^{-1}}$ é dada por

$$d(L_{x^{-1}})_y = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial(\frac{y_1}{x_2} - \frac{x_1}{x_2})}{\partial y_1} & \dfrac{\partial(\frac{y_1}{x_2} - \frac{x_1}{x_2})}{\partial y_2} & \dfrac{\partial(\frac{y_1}{x_2} - \frac{x_1}{x_2})}{\partial y_3} \\ \dfrac{\partial(\frac{y_2}{x_2})}{\partial y_1} & \dfrac{\partial(\frac{y_2}{x_2})}{\partial y_2} & \dfrac{\partial(\frac{y_2}{x_2})}{\partial y_3} \\ \dfrac{\partial(-x_3 + y_3)}{\partial y_1} & \dfrac{\partial(-x_3 + y_3)}{\partial y_2} & \dfrac{\partial(-x_3 + y_3)}{\partial y_3} \end{pmatrix}$$

$$d(L_{x^{-1}})x = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{x_2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{x_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Através dos vetores $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$, temos

$$d(L_{x^{-1}})_x(e_1) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{x_2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{x_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{x_2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d(L_{x^{-1}})_x(e_2) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{x_2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{x_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{x_2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d(L_{x^{-1}})_x(e_3) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{x_2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{x_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Consideramos em $T_e\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, onde $e = (0,1,0)$ é o elemento neutro de $\mathbb{H}_3$, a métrica canônica, com base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$, dados por: $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ e $e_3 = (0,0,1)$. Estentendo para a métrica invariante à esquerda conforme a seção 1.4, temos

$$\langle e_i, e_j \rangle_x = \langle d(L_{x^{-1}})_x(e_i), d(L_{x^{-1}})_x(e_j) \rangle_e.$$

portanto,

$$\begin{aligned} g_{11}(x) = \langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_1} \rangle_x &= \langle d(L_{x^{-1}})_x(e_1), d(L_{x^{-1}})_x(e_1) \rangle_e \\ &= \langle (\frac{1}{x_2}, 0, 0), (\frac{1}{x_2}, 0, 0) \rangle \\ &= \frac{1}{x_2^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{21}(x) = g_{12}(x) = \langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \rangle_x &= \langle d(L_{x^{-1}})_x(e_1), d(L_{x^{-1}})_x(e_2) \rangle_e \\
&= \langle (\frac{1}{x_2}, 0, 0), (0, \frac{1}{x_2}, 0) \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{31}(x) = g_{13}(x) = \langle \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_3} \rangle_x &= \langle d(L_{x^{-1}})_x(e_1), d(L_{x^{-1}})_x(e_3) \rangle_e \\
&= \langle (\frac{1}{x_2}, 0, 0), (0, 0, 1) \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{22}(x) = \langle \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_2} \rangle_x &= \langle d(L_{x^{-1}})_x(e_2), d(L_{x^{-1}})_x(e_2) \rangle_e \\
&= \langle (0, \frac{1}{x_2}, 0), (0, \frac{1}{x_2}, 0) \rangle \\
&= \frac{1}{x_2^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{33}(x) = \langle \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_3} \rangle_x &= \langle d(L_{x^{-1}})_x(e_2), d(L_{x^{-1}})_x(e_2) \rangle_e \\
&= \langle (0, 0, 1), (0, 0, 1) \rangle \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{23}(x) = g_{32}(x) = \langle \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_2} \rangle_x &= \langle d(L_{x^{-1}})_x(e_3), d(L_{x^{-1}})_x(e_2) \rangle_e \\
&= \langle (0, 0, 1), (0, \frac{1}{x_2}, 0) \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

Desta forma podemos escrever a métrica invariante à esquerda como:

$$\overline{g} = \frac{dx_1^2 + dx_2^2}{x_2^2} + dx_3^2$$

Para encontrarmos uma base de campos de vetores invariantes à esquerda, consideramos a base e_1, e_2, e_3 de $T_e\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e $d(L_x)_e$, daí

$$d(L_x)_e(e_1) = \begin{pmatrix} x_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d(L_x)_e(e_2) = \begin{pmatrix} x_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d(L_x)_e(e_3) = \begin{pmatrix} x_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Com os cálculos acima concluímos que a base de campos de vetores E_1, E_2, E_3 de $T_x\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ dada por

$$\begin{cases} E_1 = \dfrac{x_2}{2}\dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ E_2 = \dfrac{x_2}{2}\dfrac{\partial}{\partial x_2} \\ E_3 = \dfrac{\partial}{\partial x_3} \end{cases}$$

é uma base invariante à esquerda, e segue da definição de campos de vetores invariante a esquerda que esta base é ortonormal.

Seja $\overrightarrow{F}\colon \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{H}_3$ uma imersão e seja $\phi = \dfrac{\partial F}{\partial z} = \sum_{i=1}^{3} \phi_i \dfrac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{3} \psi_i E_i$. Desta maneira nós podemos escrever $\phi_i = \sum_{j=1}^{3} A_{ij}\psi_j$, onde $A = (A_{ij})$ é a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} x_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Desta maneira o Teorema 2.2 assume a seguinte forma

Teorema 4.1. *Sejam $(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}, \overline{g})$ o grupo produto do Plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$ e a reta real, com métrica $\overline{g}$ e $\{x_1, x_2, x_3\}$ coordenadas locais. Sejam $F_i\colon \Omega \subset C \to \mathbb{R}$ e*

$\phi_i, \psi_i \colon \Omega \to \mathbb{C}$, $i = 1, 2, 3$ soluções do sistema de equações:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial z} = F_2 \psi_1 \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial z} = F_2 \psi_2 \\ \dfrac{\partial F_3}{\partial z} = \psi_3 \\ \sum_{i=1}^{3} \psi_i \overline{\psi_i} \neq 0 \\ \sum_{i=1}^{3} {\psi_i}^2 = 0 \\ \dfrac{\partial \psi_1}{\partial \overline{z}} - \overline{\psi_1} \psi_2 = 0 \\ \dfrac{\partial \psi_2}{\partial \overline{z}} + |\psi_1|^2 = 0 \\ \dfrac{\partial \psi_3}{\partial \overline{z}} = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

Então, $\overrightarrow{F} = (F_1, F_2, F_3)$ define uma imersão mínima conforme em $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$.

Demonstração. A prova desse Teorema segue da demonstração do Teorema 2.2. Restando verificar a equivalência entre a equação:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \overline{z}} + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{3} L^i_{jk} \overline{\psi_j} \psi_k = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

e o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi_1}{\partial \overline{z}} + \frac{1}{2}(L^1_{12} \overline{\psi_1} \psi_2) = 0 \\ \dfrac{\partial \psi_2}{\partial \overline{z}} + \frac{1}{2}(L^2_{11} \overline{\psi_1} \psi_1) = 0 \\ \dfrac{\partial \psi_3}{\partial \overline{z}} = 0 \end{cases}$$

Primeiramente precisamos encontrar as constantes da álgebra de Lie C^k_{ij}, que são obtidas através da expressão: $[E_i, E_j] = \sum_{k=1}^{3} C^k_{ij} E_k$, assim

$$\begin{aligned} [E_1, E_2] &= [x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}, x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}] \\ &= x_2^2 [\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}] + x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}(x_2) \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}(x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} \\ &= -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} = -E_1 \end{aligned}$$

portanto, $[E_1, E_2] = -1E_1$, logo $C_{12}^3 = C_{12}^2 = 0$ e $C_{12}^1 = -1$.

$$\begin{aligned}
[E_1, E_3] &= [x_2\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_3}] \\
&= x_2[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_3}] + x_2\frac{\partial}{\partial x_1}(1)\frac{\partial}{\partial x_3} - 1\frac{\partial}{\partial x_3}(x_2)\frac{\partial}{\partial x_1} = 0
\end{aligned}$$

como $[E_1, E_3] = 0$, temos $C_{13}^1 = C_{13}^2 = C_{13}^3 = 0$.

$$\begin{aligned}
[E_2, E_3] &= [x_2\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}] \\
&= x_2[\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}] + x_2\frac{\partial}{\partial x_2}(1)\frac{\partial}{\partial x_3} - 1\frac{\partial}{\partial x_3}(x_2)\frac{\partial}{\partial x_2} = 0
\end{aligned}$$

logo $[E_2, E_3] = 0$, e $C_{23}^1 = C_{23}^2 = C_{23}^3 = 0$.

Os demais colchetes do tipo $[E_i, E_i]$ são nulos já que por definição $[E_i, E_i] = E_iE_i - E_iE_i = 0$, e como $[X, Y] = -[Y, X]$, concluímos que $C_{ij}^k = -C_{ji}^k$. Portanto $C_{12}^3 = -1$ e $C_{21}^3 = 1$, e todas as demais constantes da álgebra de Lie são nulas. As constantes L_{ij}^k, são dadas por $L_{ij}^k = C_{ij}^k - C_{jk}^i + C_{ki}^j$.

Os termos não nulos são

$$\begin{aligned}
L_{12}^1 &= C_{12}^1 - C_{21}^1 + C_{11}^2 = -2 \\
L_{11}^2 &= C_{11}^2 - C_{12}^1 + C_{21}^1 = 2
\end{aligned}$$

logo $L_{12}^1 = -2$ e $L_{11}^2 = 2$.
Usando os valores de L_{12}^1 e L_{11}^2, obtemos a equação (4.1). □

Exemplo 4.1. *Se ψ_2 for uma função holomorfa da equação* (4.1)*, temos que ψ_3 é holomorfa e ψ_1 deve ser identicamente nula. Assim a imersão correspondente é uma parametrização mínima do plano vertical $x_1 =$ constante.*

Outros exemplos podem ser encontrados em [9], ou em [10].

Considerações Finais

O estudo de superfícies mínimas em $\mathbb{H}_3$ e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ é um assunto que vem sendo pesquisado a poucos anos, por isso esse trabalho se limitou ao estudo de superfícies mínimas nos espaços $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}_3$ e buscou dar um caminho para estudos em outros grupos de Lie. A construção de superfícies mínimas em grupos de Lie apresentados durante o texto é uma generalização da representação de Weierstrass de superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$.

Existem hoje várias pesquisas sendo realizadas, buscando caracterizar superfícies mínimas em outros espaços tridimensionais. Por exemplo em [12] foi feito um estudo de superfícies mínimas em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

Referências Bibliográficas

[1] Barbosa, J. L .M., Colares, A. G., *Minimal surfaces in* $\mathbb{R}^3$, Lecture Notes in Mathematics, 1195, Springer-Verlag, Berlin (1986).

[2] Carmo, M. P. do, *Geometria Diferencial*, Pearson Makron Books, São Paulo (2001).

[3] Carmo, M. P. do, *Geometria Riemanniana*, Impa, Rio de Janeiro (2005).

[4] Churchill, R. V., *Variáveis complexas e suas aplicações*, McGraw-Hill, São Paulo (1975), 19-120.

[5] Figueroa, C. B., Mercuri, F., Pedrosa, R. H. L., *Invariant surfaces of tehe Heisenberg group*, Ann. Mat. Pura Appl., 177(4), (1999), 173-194.

[6] Lima, Elon Lages, *Álgebra Linear*, Impa, Rio de Janeiro (2006).

[7] Lima, Elon Lages,*Curso de Análise vol.2*, Impa, Rio de Janeiro (2006).

[8] Martin. S., Barrera, L.A., *Algebras de Lie*, Ed.Unicamp, São Paulo (1999), 15-35.

[9] Mercuri, F., Piu, P., Montaldo, S., *A Weierstrass Representation formula for Minimal Sufaces in* $\mathbb{H}_3$ *and* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, Acta Mathematica Sinica, 22 n°6, Springer-Velag,(2006), 1603-1612.

[10] Nelli, B., Rosenberg, H., *Minimal surfaces in* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, Bull. Braz. Math. Soc.(N.S), 33, (2002), 263-292.

[11] Neto, A. L., *Funções de uma variável complexa*, Impa, Rio de Janeiro (2005), 38-120.

[12] Rosenberg, H., *Minimal surfaces in* $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$, Illinois J. Math., 46, (2002), 1177-1195.

[13] Varadarajan, V. S., *Lie groups, Lie algebras and their representations*, Springer, New York (1984).

[14] Zill, Dennis G., Cullen, Michael R., *Equações Diferenciais Vol.1*, Pearson Makron Books, São Paulo (2001).