



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

ELISMAR DIAS BATISTA

Sobre Estruturas Gradiente Einstein-Type Produto Torcido

Goiânia
2022



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

Dissertação Tese

2. Nome completo do autor

Elismar Dias Batista

3. Título do trabalho

Sobre Estruturas Gradiente Einstein-Type Produto Torcido

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

- a) consulta ao(a) autor(a) e ao(a) orientador(a);
 - b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.
- O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.



Documento assinado eletronicamente por **Levi Rosa Adriano, Professor do Magistério Superior**, em 13/04/2022, às 15:32, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **ELISMAR DIAS BATISTA, Discente**, em 13/04/2022, às 16:31, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2833463** e o código CRC **BFE58031**.

Referência: Processo nº 23070.012483/2022-81

SEI nº 2833463

ELISMAR DIAS BATISTA

Sobre Estruturas Gradiente Einstein-Type Produto Torcido

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Geometria

Orientador: Prof. Dr. Levi Rosa Adriano

Goiânia
2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Batista, Elismar Dias
Sobre Estruturas Gradiente Einstein-type Produto Torcido
[manuscrito] / Elismar Dias Batista. - 2022.
xcv, 95 f.: il.

Orientador: Prof. Levi Rosa Adriano.
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em Matemática, Goiânia, 2022.
Bibliografia.

1. Produto torcido. I. Adriano, Levi Rosa, orient. II. Título.

CDU 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE TESE

Ata nº 03 da sessão de Defesa de Tese de **Elismar Dias Batista**, que confere o título de Doutor em Matemática, **na área de concentração de Geometria**.

Ao décimo terceiro dia do mês de abril do ano de dois mil e vinte e dois, a partir das dez horas, de forma híbrida, realizou-se a sessão pública de Defesa de Tese intitulada "**Sobre Estruturas Gradiente Einstein-Type Produto Torcido**." Os trabalhos foram instalados pelo Orientador e presidente da banca, Professor Doutor **Levi Rosa Adriano - IME/UFG** com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor **Armando Mauro Vasquez Corro - IME/UFG** membro titular interno, Professor Doutor **João Paulo dos Santos - DMAT/UNB** membro titular externo, Professor Doutor **José Nazareno Vieira Gomes - DMAT/UFSCAR** membro titular externo e o Professor Doutor **Ernani de Sousa Ribeiro Júnior - DMAT/UFC**, membro titular externo. Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Tese, tendo sido o candidato **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor **Levi Rosa Adriano - IME/UFG**, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, Ao décimo terceiro dia do mês de abril do ano de dois mil e vinte e dois.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

Sobre Estruturas Gradiente Einstein-Type Produto Torcido



Documento assinado eletronicamente por **João Paulo dos Santos, Usuário Externo**, em 13/04/2022, às 14:32, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Jose Nazareno Vieira Gomes, Usuário Externo**, em 13/04/2022, às 14:47, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Levi Rosa Adriano, Professor do Magistério Superior**, em 13/04/2022, às 15:31, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Armando Mauro Vasquez Corro, Professor do Magistério Superior**, em 13/04/2022, às 16:24, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ernani de Sousa Ribeiro Junior, Usuário Externo**, em 13/04/2022, às 17:15, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2750157** e o código CRC **6E05D562**.

Referência: Processo nº 23070.012483/2022-81

SEI nº 2750157

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Elismar Dias Batista

Ao meu Pai, João Batista Gonçalves (*in memória*).

Agradecimentos

À Deus, por me capacitar e me instruir para que eu tivesse êxito.

Aos meus pais, Maria José e João Batista (*in memória*), que me acompanharam e me incentivaram em todos os momentos de minha trajetória acadêmica, desde as series primarias e até hoje. Obrigado por fazerem de mim quem eu sou, tenho orgulho em ser seu filho. Gostaria de agradecer também a minha irmã Elizângela Divina pelo auxílio e prestação nessa em momentos difíceis.

À minha esposa, companheira, conselheira e amiga Johana Jimenez e a mulher mais inteligente que conheço, pela ajuda, apoio e compreensão tanto nas atividades do doutorado como em problemas cotidiano (olha que não foram poucos!). Sem sua ajuda meu amor jamais conseguiria! Obrigado por estar ao meu lado e participar dos momentos importantes da minha vida! tu é extremamente importante na minha vida te amo!

Aos meus amigos da universidade, que me ajudaram bastante, e que fizeram desses anos, momentos maravilhosos, em especial Willian Tokura, o qual sua amizade me proporcionou grande aprendizado.

Aos meus familiares em geral, pela torcida, e por estarem sempre comemorando as minhas vitórias comigo. Gostaria de citar a tia Maria, a minha prima e madrinha Egiane, a tia Abadia e o tio Evani, a todos os meus primos e ao meu tio Meneu (*in memoria*).

A todos meu professores desde o fundamental até o doutorado, em especial ao Prof. Hudson Humbelino um dos profissionais que mais admiro pelo seu trabalho e pela pessoa que é.

Aos professores do IME, que me ensinaram muito ao longo desses anos, em especial Prof. Maurício, Prof. Marcelo, Prof. Armando e Prof. Edcarlos.

Ao meu orientador Prof. Levi. Não tenho palavras para agradecer tudo o que fez por mim: os ensinamentos, o apoio, a amizade. Muito obrigado por acreditar em mim.

Ao IFTO pelo suporte financeiro e intelectual, o que possibilitou-me lograr com exito o doutorado.

Ao IME, pelo ótimo curso oferecido, bem como a todos os funcionários.

“Um bom professor é aquele que se faz progressivamente desnecessário.”

Thomas Carruthers.

Resumo

Batista, Elismar. **Sobre Estruturas Gradiente Einstein-Type Produto Torcido**. Goiânia, 2022. 95p. Tese de Doutorado Programa de Pós-Graduação em Matemática, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Neste trabalho, estudamos estruturas gradiente Einstein-type imersas em um espaço produto torcido de um intervalo I e uma variedade Riemanniana M , com função potencial h dada pela função altura. Primeiramente, obtivemos condições para que uma estrutura gradiente Einstein-type imersa no referido produto torcido seja mínima, totalmente umbílica ou totalmente geodésica. Além disso, fornecemos resultados de trivialidade para a função potencial h e obtemos condições para que uma estrutura gradiente Einstein-type seja quasi-Einstein. Em seguida, caracterizamos as hipersuperfícies rotacionais possuindo uma estrutura gradiente Einstein-type em espaços produto com base real e fibra dada por um espaço forma. Estudamos também casos particulares de estruturas gradiente Einstein-type em espaços produto torcido, a saber, gradiente Ricci-harmônico solitons (GRHS). Neste caso, provamos resultados de trivialidade para as funções potencial e torção quando estas atingem um máximo ou mínimo. Finalmente, fornecemos uma família não-enumerável de exemplos geodesicamente completos não triviais de GRHS considerando a base e a fibra de um produto torcido conforme a um espaço semi-Euclidiano invariante sob a ação de um grupo de translação de codimensão um.

Palavras-chave

Estruturas gradiente Einstein-type; Produto torcido; Trivialidade; Rigidez; Gradiente Ricci-harmônico soliton.

Abstract

Batista, Elismar. **On structures Gradient Einstein-type Warped Product**. Goiânia, 2022. 95p. PhD. Thesis Programa de Pós-Graduação em Matemática, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

In this work, we study gradient Einstein-type structures immersed in a warped product space of an interval I and a Riemannian manifold M , with a potential function h given by the height function. First, we obtained the necessary conditions for an Einstein-type gradient structure immersed in a warped product to be minimal, totally umbilic or totally geodesic. In addition, we provide triviality results for the potential function h . Next, we characterize the rotational hypersurfaces having a gradient Einstein-type structure in warped product, where the fiber is a space form. We also study particular cases of gradient Einstein-type structures in warped product spaces, namely, gradient Ricci-harmonic solitons (GRHS). In this case, we prove triviality results for the potential and warped functions when they reach a maximum or minimum. Finally, we provide a family non-enumerable of non-trivial geodesically complete examples of GRHS considering the base and fiber of a warped product conformal to a semi-Euclidean space invariant under the action of a translation group of codimension one.

Keywords

Gradient Einstein-type; Warped Product; Triviality; Rigidity; Gradient Ricci-harmonic soliton.

Sumário

Introdução	15
1 Preliminares	20
Preliminares	20
1.1 Métricas Semi-Riemannianas	20
1.2 Métricas Conformes	23
1.3 Ação de Grupos	24
1.4 Imersão Isométrica	26
1.5 Fluxo do Calor de Mapas Harmônicos	27
1.5.1 Interpretação Geométrica do Campo de Tensão	27
1.6 Princípio do Máximo	28
1.7 Produto torcido semi-Riemanniano	29
1.8 Imersão isométrica em uma classe Produto Torcidos	33
1.9 Estruturas gradiente Einstein-type	33
2 Estruturas Gradiente Einsten-Type Imersas em Produto Torcido	38
2.1 Resultado Auxiliar	38
2.2 Principais Resultados	39
2.3 Hipersuperfícies rotacionais com estrutura gradiente Einstein-type	50
2.3.1 Estruturas gradiente Einstein-type rotacionais imersas em $\mathbb{R} \times_f \mathbb{R}^n$	50
2.3.2 Estruturas gradiente Einstein-type rotacionais imersas em $\mathbb{R} \times_f \mathbb{S}^n$	58
2.3.3 Estruturas gradiente Einstein-type rotacionais imersas em $\mathbb{R} \times_f \mathbb{H}^n$	62
2.4 Exemplos de estruturas gradiente Einstein-type	67
3 Gradiente Ricci-Harmônico Soliton	71
3.1 GRHS Produto Torcido	71
3.2 Demonstração dos principais resultados	76
3.3 Exemplos de GRHS produto torcido	83
Considerações Finais	89
Bibliografia	91

Introdução

A investigação de fenômenos rígidos e topológicos tem sido um tópico central e amplo no estudo da geometria Riemanniana. Neste sentido, a busca por uma métrica com características especiais em uma variedade qualquer, tornou-se um problema clássico de geometria no último século, em especial métricas com curvatura seccional constante. Neste contexto, um problema clássico bastante estudado nos últimos anos foi a geometrização de Thurston, sendo esta, conjecturada por William Thurston em meados dos anos 80.

A conjectura de Thurston propôs uma caracterização completa das estruturas geométricas em variedades tridimensionais, ela pode ser considerada como um análogo do teorema de uniformização para superfícies. Tal caracterização indica que todas as variedades tridimensionais admitem um certo tipo de decomposição geométrica envolvendo oito geometrias especiais, agora chamadas de *Thurston model geometries*. A conjectura da geometrização de Thurston implica outras conjecturas bem conhecidas, em especial a conjectura de Poincaré, formulada por Henri Poincaré em 1904.

Quase um século se passou entre a formulação destas conjecturas e sua solução dada pelo matemático russo Grigori Perelman, anunciada em *preprints* postados no ArXiv.org em 2002 e 2003. Perelman em sua solução fez uso da teoria do fluxo de Ricci bastante estudada por Richard Hamilton em 1982 [43].

O fluxo de Ricci é a equação de evolução geométrica o qual se inicia com uma métrica Riemanniana g_0 sob uma variedade suave M^n cuja a métrica evolui segundo a equação

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} g = -2Ric_g; \\ g(0) = g_0, \end{cases}$$

onde Ric_g é o tensor de Ricci na métrica g . A fim de compreender o comportamento do fluxo de Ricci é interessante estudar algumas soluções especiais, a saber, os Ricci solitons, os quais são soluções auto-similares do fluxo de Ricci. Os Ricci solitons desempenharam um papel extremamente importante no estudo do fluxo de Ricci e na conjectura de Poincaré, ver [40]. Para obter mais detalhes sobre os Ricci solitons, consulte [18, 23, 45].

A principal dificuldade para entender o comportamento do fluxo de Ricci em uma variedade Riemanniana são as singularidades causadas pela evolução do fluxo. Nesta direção, R. Müller em [55] introduziu o fluxo de Ricci-harmônico com intuito de diminuir tais dificuldades. Ainda que o fluxo de Ricci-harmônico aparente ser um sistema mais “complexo” do que o fluxo de Ricci, ele realmente se comporta melhor no sentido de que é menos singular. Além disso, muitos conceitos e resultados que valem para o fluxo de Ricci também valem para o fluxo de Ricci-harmônico podendo ser consultados em [22, 42, 52, 63, 65] e suas referências.

Sejam $(M^n, g(t))$ uma variedade n -dimensional equipada com uma família de métricas semi-Riemanniana $g(t)$, e (N^k, g_N) uma variedade k -dimensional com uma métrica semi-Riemanniana fixa e $u : M \rightarrow N$ uma aplicação suave. O fluxo de Ricci-harmônico é a combinação do fluxo de calor do mapa harmônico definido por Eells e Sampson [33] e o fluxo de Ricci estudado por Hamilton. Desta forma, Müller introduziu o fluxo de Ricci-harmônico como:

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial t} = -2Ric_{g(t)} + 2\alpha(t)\nabla u(t) \otimes \nabla u(t); \\ \frac{\partial u}{\partial t} = \tau_{g(t)}u(t), \end{cases} \quad (0-1)$$

onde $\alpha(t) \geq 0$ só depende do tempo, $\nabla u(t) \otimes \nabla u(t) = u(t)^*g_N$ é o *pull-back* da métrica g_N via $u(t)$ e $\tau_{g(t)}u(t)$ é o campo de tensão de $u(t)$ com respeito à métrica $g(t)$.

De forma análoga ao fluxo de Ricci, as soluções auto-similares do fluxo de Ricci-harmônico são importantes para compreender o comportamento do fluxo. Uma solução especial são os gradiente Ricci-harmônico solitons (GRHS).

Em resumo, uma variedade semi-Riemanniana (M^n, g) é um gradiente Ricci-harmônico soliton, se esta satisfizer o sistema abaixo

$$\begin{cases} Ric_g + Hessh - \alpha\nabla u \otimes \nabla u = \lambda g; \\ \tau_g u - g(\nabla u, \nabla h) = 0, \end{cases} \quad (0-2)$$

para alguma função diferenciável h e constantes λ, α , onde $\tau_g u = tr(\nabla du)$ denota o campo de tensão de u , sendo que u neste caso é uma aplicação de (M^n, g) em uma variedade arbitrária (N^k, g_N) .

O estudo das propriedades geométricas e analíticas desses solitons e suas generalizações são importantes para a compreensão do comportamento do fluxo de Ricci e do fluxo de Ricci-harmônico.

Em [60] Homare Tadano obteve resultados de trivialidade para a função potencial no caso compacto, isto é, provou condições necessárias e suficientes para

que um GRHS compacto seja Einstein harmônico. Neste sentido, consideramos GRHS produto torcido com a base compacta e encontramos condições necessárias para que este seja trivial, isto é, com função potencial constante. Vale observar que produto torcido com a base compacta não necessariamente é compacto. Ainda no contexto de trivialização, surge um questionamento interessante, em que condições a aplicação u é constante? Observando (0-2) teríamos que uma resposta imediata a esta pergunta seria considerar M compacta e u uma função real. Neste caso, a segunda equação de (0-2) define o *drift* laplaciano de u , logo, o princípio do máximo garante que u é constante. Quando M não for necessariamente compacta, Meng Zhu em [66] provou que GRHS *shrinking* ou *steady* são gradiente Ricci solitons sempre que a variedade (N^k, g_N) possuir curvatura seccional limitada superiormente por α/n . Por outro lado, consideramos GRHS produto torcido com base compacta e obtivemos um resultado de trivialidade para a aplicação u . Além disso, encontramos condições necessárias para que um GRHS produto torcido seja um produto Riemanniano padrão, isto é, com função torção constante.

Uma das principais dificuldades no estudo de soluções solitons de fluxos geométricos é encontrar exemplos explícitos de tais estruturas. Reto Müller em [54] além de definir os GRHS também forneceu dois exemplos de GRHS considerando a esfera Euclidiana bidimensional, e uma superfície de gênero ≥ 2 com curvatura de Gauss $K = -1$. Em ambos exemplos u é dada pela identidade. Assim sendo, neste trabalho conseguimos construir uma família não-enumerável de exemplos geodesicamente completos de GRHS não triviais com u diferente da identidade, não presentes na literatura até então. Para tal, utilizamos espaços produto torcido e métricas conformes invariantes sob a ação de um grupo de translação.

Alguns solitons perdem propriedades triviais quando estendemos o espaço de soluções, por exemplo, todo Ricci soliton compacto é gradiente veja [40]. Enquanto que para que um almost Ricci soliton seja gradiente, alguma condição adicional deve ser considerada, como mostra Barros *et al.* em [9, 10]. O mesmo acontece quando comparamos gradiente Ricci solitons compactos com gradiente almost Ricci solitons compactos. Enquanto que o primeiro possui curvatura escalar constante quando $\lambda \leq 0$, o segundo não possui a mesma consequência de forma imediata veja [34] e [8]. De forma análoga aos Ricci solitons, uma extensão no espaço de soluções dos GRHS pode proporcionar uma geometria mais “rica”, isto é, considerar λ como uma função não necessariamente constante, bem como outras generalizações de GRHS podem fornecer uma visão ampla e completa de tais estruturas. Nesta direção, estudar estruturas que generalizam ambos os solitons apresentados acima pode contribuir para o entendimento da maioria dos fluxos geométricos estudados recentemente. Com este intuito, Anelli *et al.* em [5] definiram as estruturas gradiente Einstein-type.

Sua importância se dá pelo fato de generalizar muitas outras estruturas bastante conhecidas, além de poderem ser obtidas através de uma deformação conforme de uma variedade Einstein harmônica, a qual será definida no decorrer do trabalho.

Dizemos que uma métrica g em uma variedade Riemanniana Σ possui uma estrutura gradiente Einstein-type se existem funções diferenciáveis h, μ, λ e $u : \Sigma^n \rightarrow N^k$, satisfazendo o sistema

$$\begin{cases} Ric_g^u + Hessh - \mu dh \otimes dh = \lambda g \\ \tau_g u = du(\nabla h), \end{cases} \quad (0-3)$$

onde

$$Ric_g^u := Ric_g - \alpha u^* \langle \cdot, \cdot \rangle_N.$$

No que diz respeito à geometria de uma estrutura gradiente Einstein-type, é possível estudá-la de dois pontos de vista diferentes, a saber, a geometria intrínseca e a geometria das subvariedades. Do ponto de vista intrínseco, Anelli *et al.* em [5] obtiveram vários resultados para as estruturas gradiente Einstein-type introduzindo o conceito de u -curvaturas. Nesse sentido, realizando uma deformação conforme de uma métrica Einstein harmônica, os autores obtiveram uma solução de (0-3), para $n \geq 3$ e $\mu = -1/(n-2)$. Além disso, eles forneceram fórmulas básicas para estruturas gradiente Einstein-type compactas, a fim de derivar resultados de “gap” e rigidez.

Do ponto de vista da geometria das subvariedades, existem alguns trabalhos interessantes e importantes desenvolvidos nas últimas décadas sobre os Ricci solitons e almost Ricci solitons. Por exemplo, Chen, Bang-Yen e Deshmukh obtiveram uma classificação de Ricci solitons com campo vetorial potencial concorrente. Em seguida, eles forneceram uma condição necessária e suficiente para uma imersão isométrica ser um Ricci soliton em uma variedade equipada com um campo vetorial concorrente [21]. Barros *et al.* em [11] estudaram as condições e obstruções para uma imersão isométrica de um almost Ricci soliton em uma forma espacial ser mínima, totalmente umbílica ou totalmente geodésica. Além disso, eles obtiveram alguns resultados de rigidez quando a imersão é compacta. Abdênago Barros *et al.* provaram em [10] que um almost Ricci soliton compacto com tensor de Ricci Codazzi, é isométrico à esfera Euclidiana, tendo a função altura como função potencial. Aquino *et al.* em [6] estudaram gradiente almost Ricci solitons imersos em espaços de curvatura constante $M^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$, onde a função potencial é dada pela função altura do soliton associada a uma direção fixa em \mathbb{R}^{n+2} . Portanto, um questionamento interessante e natural seria o que aconteceria caso imergíssemos uma estrutura mais geral que almost Ricci solitons em espaços forma? E se ao invés de espaços formas, utilizássemos uma classe

mais ampla de espaços? Os trabalhos acima citados nos fornecem uma excelente motivação para estudarmos estruturas Einstein-type onde a função potencial é dada pela função altura. Além disso, para estender os trabalhos anteriores a uma classe maior de espaços ambientes, seria conveniente considerar as imersões em uma família de variedades suficientemente grande, incluindo espaços de curvatura seccional constante. Uma métrica natural, que inclui tais espaços são as chamadas métricas produto torcido definidas pelo O’Neill [15]. As métricas produto torcido já provaram ser um ambiente excelente para obter uma ampla gama de propriedades geométricas distintas para imersões (veja [3, 17, 24, 25, 28]).

A tese está organizada como segue: no capítulo 1 apresentamos as definições, notações e ferramentas necessárias para o restante do trabalho. No capítulo 2, estudamos estruturas gradiente Einstein-type imersas em um espaço produto torcido do tipo $\overline{M}^{n+1} = I \times_f M^n$, com função potencial dada pela função altura $h = \pi_I \circ \phi$, sendo que ϕ é uma imersão isométrica $\phi : \Sigma^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$, $I \subset \mathbb{R}$, M^n uma variedade Riemanniana e $f : I \rightarrow (0, \infty)$ uma função suave estritamente positiva. Primeiramente, investigamos as condições para que uma estrutura gradiente Einstein-type imersa em um produto torcido seja mínima, totalmente umbílica ou totalmente geodésica. Em seguida, fornecemos resultados de trivialidade para a função potencial h e a aplicação u . Finalmente, caracterizamos as hipersuperfícies rotacionais possuindo uma estrutura gradiente Einstein-type em $\mathbb{R} \times_f \mathbb{Q}(c)^n$, onde $\mathbb{Q}(c)$ é um espaço forma de curvatura seccional $c \in \{-1, 0, 1\}$.

Finalmente, no capítulo 3, estudamos gradiente Ricci-harmônico solitons em espaços produto torcido. Primeiramente, provamos resultados de trivialidade para as funções potencial e torção quando estas atingem um máximo ou mínimo. Além disso, fornecemos exemplos não triviais de GRHS considerando a base e a fibra de um produto torcido conforme a um espaço semi-Euclidiano invariante sob a ação de um grupo de translação de codimensão um. Essa abordagem nos permite produzir infinitos exemplos de gradiente Ricci-harmônico solitons semi-Riemanniano geodesicamente completo não presentes na literatura.

Preliminares

Neste capítulo, faremos uma breve abordagem de algumas noções básicas de geometria semi-Riemanniana, além de elencar resultados fundamentais para o bom entendimento do trabalho. Por motivo de comodidade, alguns resultados terão sua prova omitida, no entanto, serão referenciados no decorrer do trabalho. Mais detalhes podem ser conferidos em [14, 30, 37, 57]

1.1 Métricas Semi-Riemannianas

Seja b uma forma bilinear simétrica em um espaço vetorial V e W um subespaço de V , então

Definição 1.1. *O índice ι de uma forma bilinear simétrica b em V é o maior inteiro que é a dimensão de um subespaço $W \subset V$ no qual $b|_W$ é negativa definida.*

Definição 1.2. *Um tensor métrico g em uma variedade diferenciável M é um $(0,2)$ -tensor simétrico não degenerado em M de índice constante.*

Em outras palavras, um tensor métrico g sobre M é uma aplicação que associa a cada ponto $p \in M$ uma forma bilinear simétrica não degenerada em T_pM com índice constante ι , $\forall p \in M$.

Definição 1.3. *Uma variedade semi-Riemanniana é um par (M, g) , em que M é uma variedade diferenciável e g é uma métrica sobre M .*

Note que se $\iota = 0$, então M é uma variedade Riemanniana, ou seja, cada g é um produto interno (definido positivo) em T_pM para cada p em M . Se $\iota = 1$ e $n \geq 2$, então M é uma variedade Lorentziana.

Em um sistema de coordenadas locais (U, x) em torno de $p \in M$, as componentes do tensor métrico g são

$$g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j).$$

Como g é não degenerada, segue que a matriz $(g_{ij}(p))$ é invertível em todo $p \in M$ e sua inversa será denotada por $(g^{ij}(p))$. Em um sistema de coordenadas locais, temos que

$$g = \sum_{ij} g_{ij} dx_i \otimes dx_j$$

Em um sistema de coordenadas, a conexão de Levi-Civita ∇ é definida por

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k,$$

onde as funções Γ_{ij}^k são os símbolos de Christoffel da conexão, dados por

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_l g^{lk} \left\{ \partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij} \right\}.$$

Definição 1.4. Uma variedade semi-Riemanniana na qual cada geodésica é definida em toda a reta real é considerada geodesicamente completa, ou apenas completa.

Definição 1.5. Seja M uma variedade semi-Riemanniana com conexão Levi-Civita ∇ . A aplicação $R : \mathfrak{X}(M)^3 \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z,$$

é um $(1,3)$ -tensor em M chamado de tensor curvatura de Riemann de M .

A partir do tensor de Riemann podemos definir o tensor de Ricci e a curvatura escalar

Definição 1.6. Seja R o operador curvatura de Riemann de (M, g) . O tensor de Ricci é definido como

$$Ric(X, Y) = \text{traço} \left\{ Z \rightarrow R(X, Z)Y \right\},$$

onde $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Definição 1.7. A curvatura escalar de uma variedade semi-Riemanniana (M, g) , denotada por $scal_g$ é definida como a contração do Tensor de Ricci, ou seja,

$$scal_g = \sum_{k,l} g^{kl} Ric_g(E_k, E_l),$$

onde $\{E_i\}_{i=1}^n$ é uma base ortonormal de $T_p M$.

Em uma variedade semi-Riemanniana M , existem generalizações naturais dos conhecidos operadores diferenciais do cálculo vetorial em \mathbb{R}^3 : gradiente, divergente e Laplaciano.

O campo gradiente de uma função $f \in C^\infty(M)$ é dado pela identidade

$$\langle \nabla f, X \rangle = df(X), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

Em termos de um sistema de coordenadas locais, o campo gradiente toma a forma

$$\nabla f = \sum_{ij} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \partial_j.$$

Considere um sistema de coordenadas locais (U, x) em torno de $p \in M$, e $\{E_i\}_{i=1}^n$ uma base ortonormal de T_pM , então os operadores divergente e laplaciano podem ser definidos por

$$Div(X) = \sum_i g(\nabla_{E_i} X, E_i)$$

e

$$\Delta f = Div(\nabla f).$$

Em um sistema de coordenadas locais se $X \in T_pM$, então existe a_i tal que $X = \sum_i a_i \partial_i$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, então

$$Div(X) = \sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \sum_{ij} a_j \Gamma_{ij}^i,$$

e

$$\Delta f = \sum_{ij} g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k} \right).$$

A aplicação linear $h_f : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, definida por $h_f(X) = \nabla_X \nabla f$, é chamada o tensor Hessiano de f em M , e sua forma bilinear simétrica associada é o $(0,2)$ -tensor $Hessf$, dado por $Hessf(X, Y) = g(h_f(X), Y)$. Note que

$$Hessf(X, Y) = X(Y(f)) - (\nabla_X Y)(f).$$

Em coordenadas locais,

$$Hessf(\partial_i, \partial_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k}.$$

Quando (M, g) é o espaço semi-Euclidiano, $g_{ij} = \varepsilon_i \delta_{ij}$, com $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, temos que as expressões em coordenadas locais do gradiente, da Hessiana e do Laplaciano tornam-se

$$\begin{cases} \nabla f = \sum_i \varepsilon_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \partial_i \\ Hess f(\partial_i, \partial_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \\ \Delta f = \sum_i \varepsilon_i \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \right). \end{cases} \quad (1-1)$$

1.2 Métricas Conformes

Definição 1.8. Duas métricas semi-Riemannianas g e \bar{g} em uma variedade M são ditas conformes se existe uma função $\varphi \in C^\infty(M)$ tal que

$$\bar{g}_p = \varphi^{-2} g_p,$$

para cada ponto p em M .

Logo

Proposição 1.9. Sejam (M, g) uma variedade semi-Riemanniana e $\varphi \in C^\infty(M)$ uma função positiva. Com respeito à métrica $\bar{g} = \varphi^{-2}g$, temos que:

$$(i) \quad (\nabla f)_{\bar{g}} = \varphi^2 (\nabla f)_g;$$

$$(ii) \quad (Hess f)_{\bar{g}}(X, Y) = (Hess f)_g(X, Y) + \frac{X(\varphi)}{\varphi} Y(f) + \frac{Y(\varphi)}{\varphi} X(f) \\ - g \left((\nabla f)_g, \frac{(\nabla \varphi)_g}{\varphi} \right) g(X, Y);$$

$$(iii) \quad (\Delta f)_{\bar{g}} = \varphi^2 [(\Delta f)_g - (n-2)g((\nabla f)_g, (\nabla \log \varphi)_g)];$$

$$(iv) \quad Ric_{\bar{g}} = \frac{1}{\varphi^2} \left\{ (n-2)\varphi Hess_g(\varphi) + [\varphi \Delta_g \varphi - (n-1)|\nabla_g \varphi|^2]g \right\};$$

$$(v) \quad (\nabla f)_{\bar{g}} \otimes (\nabla f)_{\bar{g}}(X, Y) = (\nabla f)_g \otimes (\nabla f)_g(X, Y).$$

Prova. Os itens (i), (ii) e (iii) podem ser conferidos em [7], enquanto que o item (iv) está provado em [14], restando somente o item (v). Considere $\bar{g} = \varphi^{-2}g$, então

$$\begin{aligned} (\nabla f)_{\bar{g}} \otimes (\nabla f)_{\bar{g}}(X, Y) &= \bar{g}((\nabla f)_{\bar{g}}, X) \bar{g}((\nabla f)_{\bar{g}}, Y) \\ &= \varphi^{-2}g((\nabla f)_{\bar{g}}, X) \varphi^{-2}g((\nabla f)_{\bar{g}}, Y) \\ &= \varphi^{-2}g(\varphi^2(\nabla f)_g, X) \varphi^{-2}g(\varphi^2(\nabla f)_g, Y) \\ &= g((\nabla f)_g, X)g((\nabla f)_g, Y). \end{aligned}$$

□

1.3 Ação de Grupos

Definição 1.10. *Seja G um grupo de Lie e M uma variedade diferenciável. Um mapa diferenciável $\mu : G \times M \rightarrow M$ é uma ação à esquerda de G em M , ou uma G -ação, se*

- (i) $\mu(1_G, x) = x$, para todo $x \in M$;
- (ii) $\mu(g_1, \mu(g_2, x)) = \mu(g_1 g_2, x)$ para todo $g_1, g_2 \in G$ e $x \in M$.

De maneira similar, podemos definir uma ação à direita como o mapa $\mu : M \times G \rightarrow M$ satisfazendo a propriedades análogas a (i) e (ii) definidas acima. Um exemplo clássico de ação de grupos de Lie é dado pela aplicação de matrizes não singulares $G = GL(n, \mathbb{R})$ em vetores do \mathbb{R}^n dado por $\mu(A, x) = Ax$, onde $A \in G$.

Definição 1.11. *Seja $\mu : G \times M \rightarrow M$ uma ação à esquerda de M e $x \in M$. O subgrupo*

$$G_x := \{g \in G : \mu(g, x) = x\} \subset G$$

é chamado grupo de isotropia ou estabilizador de x em M , e

$$G(x) := \{\mu(g, x) : g \in G\} \subset M$$

é chamado órbita de $x \in M$. Quando $G(x) = x$ dizemos que x é um ponto fixo da ação.

Definição 1.12. *Dizemos que uma ação é própria sempre que o mapa*

$$G \times M \ni (g, x) \rightarrow (\mu(g, x), x) \subset M \times M$$

for próprio, isto é, se a pré-imagem de qualquer compacto também é compacta.

Definição 1.13. *Seja $\mu : G \times M \rightarrow M$ uma ação própria. Então $G(x)$ é um órbita principal se existe uma vizinhança V de x em M tal que para cada $y \in V$, $G_x \subset G_{\mu(g, y)}$ para algum $g \in G$.*

O subgrupo $\bigcap_{x \in M} G_x$ é chamado o *kernel* da ação, se o *kernel* for trivial, isto é $\bigcap_{x \in M} G_x = \{1_G\}$ então dizemos que a ação é efetiva. Se ademais $G_x = \{1_G\}$ para todo $x \in M$ dizemos que a ação é livre.

A ideia fundamental de uma ação de grupos é que cada $g \in G$ determina uma transformação de M , a saber $\mu^g : M \rightarrow M$. Sempre que assumirmos que a ação é diferenciável, as aplicações μ^g são difeomorfismos, e portanto $\mu^G := \{\mu^g : g \in G\}$ pode ser identificado com um subgrupo do grupo de difeomorfismo de M . Quando M é uma variedade equipada com uma métrica Riemanniana h , uma ação em (M, h)

é dita isométrica se μ^g é uma isometria de (M, h) para todo $g \in G$. Neste caso, a métrica h é dita ser G -invariante e μ^G pode ser identificada com um subgrupo de $Iso(M, h)$. Se duas órbitas $G(x)$ e $G(y)$ possuem interseções não triviais então elas são iguais. Isto nos garante que órbitas de uma G -ação em M formam uma partição de M . Desta forma, podemos considerar o quociente

$$M/G := \{G(x) : x \in M\},$$

chamado de espaço quociente da ação de G em M .

A depender das características da ação as órbitas podem definir subvariedades em M .

Definição 1.14. *Seja M uma variedade de dimensão $(n + k)$. Uma folheação n -dimensional de M é uma partição \mathcal{F} de M em subvariedades imersas conexas de dimensão n , chamadas folhas, tal que, para todo $p \in M$ e $v \in T_p L_p$, onde $L_p \in \mathcal{F}$ é a folha que contém p , existe um campo vetorial suave X em M com $X(p) = v$ e $X(q) \in T_q L_q$, para todo $q \in M$.*

A proposição a seguir relaciona órbitas da G -ação isométrica e folheações.

Proposição 1.15. ([2]) *Seja $\mu : G \times M \rightarrow M$ uma ação própria isométrica sobre uma variedade Riemanniana M . Então, as órbitas $G(x)$ da G -ação induzem uma folheação de M . Além disso, é possível reconstruir esta folheação tomando todas as subvariedades paralelas a uma órbita principal.*

No capítulo 3 deste trabalho, consideramos um produto torcido com base conforme a um espaço semi-Euclidiano $(\mathbb{R}^n, \epsilon_i \delta_{ij})$ invariante sob uma ação de grupos isométrica, a qual induz uma folheação de $(\mathbb{R}^n, \epsilon_i \delta_{ij})$ em subvariedades de dimensão $n - 1$, todas elas ortogonais a uma direção dada.

Seja (M^n, g) uma variedade semi-Riemanniana. Considere funções suaves $\xi : M \rightarrow \mathbb{R}$ e $\phi : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ de tal forma que a função composta $\phi \circ \xi$ esteja bem definida. Seja a métrica

$$\bar{g}_x = \phi(\xi(x))^{-2} g_x$$

conforme à métrica g para todo x em M , em seguida, defina o seguinte conjunto

$$G := \{f \in Iso(M, g) : \xi \circ f = \xi\}.$$

Note que G é um subgrupo de $Iso(M, g)$, além disso, G age de forma isométrica em M , induzida pela ação de $Iso(M, g)$, veja [7]. Consequentemente, esta ação induz uma folheação de (M^n, \bar{g}) .

1.4 Imersão Isométrica

Definição 1.16. *Sejam M^n e N^k variedades suaves. Uma imersão $f : M^n \rightarrow N^k$ é um mapeamento suave tal que df_p é injetiva para todo p em M^n .*

Se $f : M^n \rightarrow N^k$ for uma imersão, então $k \geq n$ e a diferença $k - n$ é chamada a codimensão da imersão f .

Definição 1.17. *Sejam (M^n, g) e (N^k, g_N) variedades Riemannianas. Uma imersão $f : M^n \rightarrow N^k$ é isométrica se $f^*g_N = g$.*

Seja $f : M^n \rightarrow N^k$ uma imersão isométrica, com o intuito de simplificar a notação, podemos identificar cada ponto $p \in M^n$ com sua imagem $f(p) \in N^k$, assim como cada vetor $v \in T_pM$ com sua imagem $df_p(v) \in T_{f(p)}N$. Desta forma, considere ${}^M\nabla, {}^N\nabla$ as conexões de M^n e N^k respectivamente, então, para X, Y campos vetoriais locais em M^n , e \bar{X}, \bar{Y} suas respectivas extensões a N^k

$$B(X, Y) = {}^N\nabla_X Y - {}^M\nabla_X Y$$

é um campo vetorial local em N^k normal a M^k (também conhecida como fórmula de Gauss). É possível provar que B é bilinear e simétrica, veja [30]. Agora estamos em posição de definir a segunda forma fundamental, bem como as equações de Gauss e Weingarten. Seja $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$. O mapeamento $II : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$II(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle \quad x, y \in T_pM,$$

é chamado segunda forma fundamental de f .

Proposição 1.18. *Sejam M^n, N^k variedades Riemannianas e $f : M^n \rightarrow N^k$ uma imersão isométrica. Para cada $p \in M^n$, sejam $X, Y, Z, W \in T_pM$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$. Então as seguintes equações são válidas*

$$(i) \langle A_\eta X, Y \rangle_M = \langle \eta, B(X, Y) \rangle_N = \langle -{}^N\nabla_X \eta, Y \rangle_N = \langle -({}^N\nabla_X \eta)^\top, Y \rangle_M$$

(Equação de Weingarten),

$$(ii) \langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle (\bar{R}(X, Y)Z)^\top, W \rangle + \langle AX, Z \rangle \langle AY, W \rangle - \langle AY, Z \rangle \langle AX, W \rangle$$

(Equação de Gauss),

onde $A : TM^n \rightarrow TM^n$ denota o operador de forma de M^n com respeito a aplicação de Gauss, e R, \bar{R} são os tensores curvatura de Riemann de M e N respectivamente.

Prova. Veja [50]. □

1.5 Fluxo do Calor de Mapas Harmônicos

Sejam (M^n, g) e (N^k, g_N) duas variedades Riemannianas suaves. Mapas harmônicos $u : M \rightarrow N$ são mapas extremos (ou seja, pontos críticos no sentido de cálculo de variações) para o funcional de energia

$$E(u) = \int_M |\nabla u|^2 dV.$$

Aqui, $|\nabla u|^2 = g^{ij} \nabla_i u^l \nabla_j u^l$ denota a densidade de energia local. Os mapas harmônicos generalizam o conceito de funções harmônicas e, em particular, incluem geodésicas e superfícies mínimas.

Um problema básico de existência para mapas harmônicos é o problema da homotopia: existe uma aplicação harmônica u homotópica a uma dada aplicação $u_0 : M \rightarrow N$? Infelizmente, a resposta pode ser negativa, como ilustram os seguintes contra-exemplos. Lemaire em [51] provou que se $u : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ é harmônica e $u|_{\partial B_1(0)} \equiv \text{const.}$, então u tem que ser constante. Eells e Wood [32] mostraram que se $u : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ é harmônica, então não pode ter grau ± 1 . Esses exemplos indicam que os métodos variacionais diretos podem falhar, desta forma Eells e Sampson [33] propuseram uma maneira diferente de atacar o problema da homotopia em 1964. Eles introduziram o fluxo de calor do mapa harmônico, ou seja, o fluxo L^2 - gradiente do funcional de energia acima. Sob este fluxo, um dado mapa $u_0 : M \rightarrow N$ é deformado de acordo com a equação de evolução

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u = \tau_g(u) \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

onde $\tau_g(u)$ é o campo de tensão de u . Usando sua abordagem de fluxo, eles obtiveram uma resposta afirmativa para o problema da homotopia se a variedade N tiver curvatura seccional não positiva. Os estudos de Eells e Sampson motivaram Hamilton a estudar o fluxo de Ricci.

1.5.1 Interpretação Geométrica do Campo de Tensão

Considere o mapa suave $u \in C^\infty((M, g), (N, g_N))$. Um mapa suave $F : M \times I \rightarrow N$ é chamado uma variação suave de u se

$$F(x, 0) = u(x),$$

para todo $x \in M$. Consequentemente,

$$u_t(x) = F(x, t), \quad \forall x \in M, t \in I,$$

onde $u_0 = u$. Quando consideramos a variação F de u em cada $x \in M$ fixado, então $u_t(x) = F(x, t) : I \rightarrow N$ define uma curva suave em N , passando por $u(x)$ em $t = 0$. Consequentemente, o conjunto de vetores tangentes a essas curvas em $t = 0$, denotado por

$$V(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} u_t = \frac{\partial F}{\partial t}(x, 0).$$

Em outras palavras, $V(x)$ define um campo de vetores suave ao longo de u . Desta forma, se considerarmos o funcional de energia de uma variação suave, obtemos a fórmula da primeira variação para o funcional de energia, dada por

$$dE(u_t)(V) = \left. \frac{d}{dt} E(u_t) \right|_{t=0} = - \int_M g_N(V, \tau_g u) dv_g.$$

Note que $C^\infty((M, g), (N, g_N))$ é um espaço de Hilbert com a métrica L_2 , então $\tau_g u = -\nabla E$.

Em um sistema de coordenadas locais o campo de tensão pode ser visto como:

$$(\tau_g u)_k = (\Delta u_k) + \sum_{i,j,\alpha,\beta} g^{ijN} \Gamma_{\alpha\beta}^k \frac{\partial u^\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial u^\beta}{\partial x_j}.$$

Desta forma, cada ponto crítico do funcional de energia é chamado de **mapa harmônico**, isto é, são mapas u , tais que $\tau_g u = 0$. Se $(M, g) = \mathbb{R}$, segue que os pontos críticos de E serão as geodésicas. Quando $(N, g_N) = \mathbb{R}^m$, então $(\tau_g u)_k = (\Delta u_k)$, logo, cada ponto crítico do funcional E é um mapa u tal que $(\Delta u_k) = 0$. Se u for uma imersão de M em N , então $\tau_g u = tr(II)$, onde II é a segunda forma associada a u . Sendo assim, pontos críticos de E equivalem a imersões mínimas. Finalmente, poderíamos interpretar fisicamente $\tau_g u$ como o campo que mede a variação da energia despreendida pelo mapa u ao deformar os pontos de M em N .

1.6 Princípio do Máximo

O princípio do máximo é uma ferramenta poderosa no estudo de funções superharmônicas (subharmônicas) e consiste em tentar entender o comportamento geométrico destas funções baseado na seguinte situação: se uma função

$u : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ for duas vezes diferenciável e satisfizer

$$Lu = u''(x) + d(x)u'(x) \geq 0,$$

no aberto (a, b) , onde d é uma função limitada, então u irá atingir seu máximo no bordo de (a, b) , a menos que u seja constante. Essas ideias acima podem ser levadas a dimensões mais altas, bem como operadores mais complexos que o anterior.

Teorema 1.19. ([19, 35, 39, 58]) *Seja L um operador uniformemente elíptico definido em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ da forma*

$$Lu = \sum_{i,j} a(x)_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u, \quad a_{ij} = a_{ji},$$

com λ_1 sendo o menor autovalor de a_{ij} , e $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Se $c \leq 0$, $\frac{c}{\lambda_1}$ for limitado e $Lu \geq 0$ ($Lu \leq 0$) em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Então u não pode atingir uma máximo (mínimo) no interior de Ω , caso isso aconteça, u será constante.

1.7 Produto torcido semi-Riemanniano

Em trabalhos recentes sobre solitons, a noção de produto torcido introduzida em ([15]) tornou-se uma importante ferramenta na construção de variedades com certas propriedades geométricas, veja [20, 31, 47].

Definição 1.20. *Seja $(B^n, g_B), (F^m, g_F)$ duas variedades semi-Riemannianas e $f > 0$ uma função suave em B . A variedade produto $M = B \times_f F$ equipada com o tensor métrico*

$$g = \pi^* g_B + (f \circ \pi)^2 \sigma^* g_F, \quad (1-2)$$

é chamada **produto torcido**. Nós denotamos como $B^n \times_f F^m$, onde $*$ é o pull-back das projeções canônicas $\pi : B^n \times F^m \rightarrow B$, $\sigma : B^n \times F^m \rightarrow F$ as quais são projeções na primeira e segunda variedade, respectivamente. A função f é chamada função torção, B é chamada base e F fibra.

Explicitamente, se v é tangente a $B \times_f F$ em $(p, q) = x$, com $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in T_p B$, $v_2 \in T_q F$, então

$$\begin{aligned} \langle v, v \rangle_x &= \langle d\pi_{(p,q)}(v), d\pi_{(p,q)}(v) \rangle_p + f^2(p) \langle d\sigma_{(p,q)}(v), d\sigma_{(p,q)}(v) \rangle_q \\ &= \langle v_1, v_1 \rangle_p^B + (f \circ \pi)^2(p, q) \langle v_2, v_2 \rangle_q^F. \end{aligned}$$

Proposição 1.21. ([57]) *Para cada $(p, q) \in M = B^n \times_f F^m$, temos que as **fibras** $\{p\} \times F = \pi^{-1}(p)$ (também chamadas de **slices**) e as **folhas** $B \times \{q\} = \sigma^{-1}(q)$,*

com a métrica induzida de g_M , são subvariedades semi-Riemannianas de M , e a métrica torcida em M implica nas seguintes condições geométricas:

- (i) Para cada $q \in F$, a aplicação ${}_q\pi := \pi|_{B \times q}$ é uma isometria sobre B ;
- (ii) Para cada $p \in B$, a aplicação ${}_p\sigma := \sigma|_{p \times F}$ é uma homotetia positiva sobre F , com fator escalar $1/f(p)$;
- (iii) Para cada $(p, q) \in M$, a folha $\sigma^{-1}(q)$ e a fibra $\pi^{-1}(p)$ são ortogonais em (p, q) ;
- (iv) Se $V \in T_{(p,q)}(B \times F)$, então V pode ser decomposto nas componentes normal $\text{nor}(V) \in T_{(p,q)}(p \times F)$ e tangente $\text{tan}(V) \in T_{(p,q)}(B \times q)$, pois $T_{(p,q)}(B \times F)$ pode ser decomposto na soma direta $T_{(p,q)}(B \times q) \oplus T_{(p,q)}(p \times F)$.

Seja $\mathcal{L}(B)$, $\mathcal{L}(F)$ o espaço dos levantamentos de campos de vetores em B e F para $B \times F$, respectivamente. Considere $h = h_B \circ \pi$ e $\phi_F \circ \sigma$ tal que $h_B \in C^\infty(B)$ e $\phi_F \in C^\infty(F)$, então, obtemos as expressões a seguir

Proposição 1.22. *Seja $M = B^n \times_f F^m$ um produto torcido, então*

- (i) $d\pi(\nabla_{g_M} h) = \nabla_{g_B} h_B$;
- (ii) $d\sigma(\nabla_{g_M} \phi) = \frac{\nabla_{g_F} \phi_F}{f^2}$;
- (iii) $\text{Hess}_{g_M} h = \text{Hess}_{g_B} h \circ \pi$;
- (iv) $\Delta_{g_M} h = \left[\Delta_{g_B} h + \frac{g_B(\nabla_{g_B} h, \nabla_{g_B} f)}{f} m \right] \circ \pi$;
- (v) $\Delta_{g_M} \phi = \Delta_{g_F} \phi_F \circ \sigma$.

Prova. Para o primeiro item, tome $V \in \mathcal{L}(F)$, como $d\pi(V) = 0$, temos que

$$g_M(\nabla_{g_M} h, V) = V(h) = d\pi(V)h = 0.$$

Assim, $\nabla_{g_M} h$ tangencia B . Logo, se $X \in \mathcal{L}(B)$, obtemos

$$g_B(d\pi(\nabla_{g_M} h), d\pi(X)) = g_M(\nabla_{g_M} h, X) = X(h) = d\pi(X)h = g_B(\nabla_{g_B} h, d\pi(X)).$$

Desta forma, $\nabla_{g_B} h = d\pi(\nabla_{g_M} h)$. Em relação ao item (ii),

Primeiramente mostraremos que $\nabla_{g_M} \phi \in \mathcal{L}(F)$. De fato, em cada $(p, q) \in M$, considere um vetor $u \in T_{(p,q)}B$, então

$$g_M(\nabla_{g_M} \phi, u) = u(\phi) = u(\phi_F \circ \sigma) = (d\sigma(u))(\phi_F) = 0.$$

Da métrica produto torcido segue

$$\begin{aligned} 0 = g_M(\nabla_{g_M\phi}, u)_{(p,q)} &= g_B(d\pi(\nabla_{g_M}\phi), d\pi(u))_p + (f \circ \pi)^2 g_F(d\sigma(\nabla_{g_M}\phi), d\sigma(u))_q \\ &= g_B(d\pi(\nabla_{g_M}\phi), d\pi(u))_p, \end{aligned}$$

pois $d\sigma(u) = 0$. Como vale para todo $0 \neq u \in T_{(p,q)}B$, segue que, $d\pi(\nabla_{g_M}\phi) = 0$. Portanto $\nabla_{g_M}\phi \in \mathcal{L}(F)$. Agora, dado um vetor $v \in T_{(p,q)}F$, então

$$\begin{aligned} g_M(\nabla_{g_M}\phi, v)_{(p,q)} &= g_B(d\pi(\nabla_{g_M}\phi), d\pi(v))_p + (f \circ \pi)^2 g_F(d\sigma(\nabla_{g_M}\phi), d\sigma(v))_q \\ &= (f \circ \pi)^2 g_F(d\sigma(\nabla_{g_M}\phi), d\sigma(v))_q \\ &= v(\phi) = v(\phi_F \circ \sigma) = (d\sigma(v)(\phi_F)) \circ \sigma \\ &= g_F(\nabla_{g_F}\phi_F, d\sigma(v))_q \circ \sigma, \end{aligned}$$

pois $d\pi(v) = 0$. Como $d(\pi)_q : T_{(p,q)}F \rightarrow T_qF$ é isomorfismo $\forall (p, q) \in M$, então $d\sigma(\nabla_{g_M}\phi) = \frac{\nabla_{g_F}\phi}{(f \circ \pi)^2}$ para todo $(p, q) \in M$.

Para o item (iii), considere $X, Y \in \mathcal{L}(B)$. Então,

$$\begin{aligned} Hess_{g_M}h(X, Y) &= g_M(\nabla_X \nabla_{g_M}h, Y) \\ &= X g_M(\nabla_{g_M}h, Y) - g_M(\nabla_{g_M}h, \nabla_X Y), \\ &= d\pi(X) g_B(d\pi(\nabla_{g_B}h), d\pi(Y)) \circ \pi - g_B(d\pi(\nabla_{g_B}h), d\pi(\nabla_X Y)) \circ \pi, \\ &= (Hess_{g_B}h)(d\pi(X), d\pi(Y)) \circ \pi. \end{aligned}$$

Para o item (iv), considere os referenciais ortonormais $\{X_i\}_{i=1}^{n=\dim(B)}$ e $\{V_i\}_{i=1}^{m=\dim(F)}$ em $\mathcal{L}(B)$ e $\mathcal{L}(F)$, respectivamente. Dessa forma,

$$\begin{aligned} \Delta_{g_M}h &= \sum_{i=1}^n g_M(\nabla_{X_i} \nabla_{g_M}h, X_i) + \sum_{j=n+1}^{n+m} g_M(\nabla_{V_j} \nabla_{g_M}h, V_j), \\ &= \sum_{i=1}^n g_B(\nabla_{d\pi(X_i)} \nabla_{g_B}h_B, d\pi(X_i)) \circ \pi + \sum_{j=n+1}^{n+m} \nabla_{g_M}h(\log(f \circ \pi)) g_M(V_j, V_j), \\ &= (\Delta_{g_B}h_B) \circ \pi + m \frac{\nabla_{g_B}h_B(f)}{f} \circ \pi, \end{aligned}$$

sendo que na passagem da primeira para segunda linha utilizamos a expressão da conexão descrita na proposição seguinte. Finalmente, o item (v) segue de forma análoga ao item anterior. \square

Daqui em diante, sempre que não houver dúvidas iremos identificar campos e funções na base B ou na fibra F com os seus respectivos levantamento em $B^n \times F^m$,

isto é, se $h = h_B \circ \pi$ ou $X = d\pi(X)$, então iremos identificar h com h_B e X com $d\pi(X)$.

Agora estudaremos a conexão no produto torcido. Considere ∇ , ${}^B\nabla$ e ${}^F\nabla$ as conexões de M , B e F respectivamente. A proposição a seguir relaciona a conexão de M com as conexões de B e F .

Proposição 1.23. ([57]) *Seja $M = B^n \times_f F^m$ uma variedade produto torcido, se $X, Y \in \mathcal{L}(B)$ e $V, W \in \mathcal{L}(F)$, então*

$$(i) \quad \nabla_X Y \text{ é o levantamento de } {}^B\nabla_X Y,$$

$$(ii) \quad \nabla_X V = \nabla_V X = \left(\frac{X(f)}{f} \right) V,$$

$$(iii) \quad \text{nor}(\nabla_V W) = -g_M(V, W) \nabla_{g_M}(\log(f \circ \pi)),$$

$$(iv) \quad \text{tan}(\nabla_V W) \in \mathcal{L}(F) \text{ é o levantamento de } {}^F\nabla_V W.$$

Onde *nor* e *tan* são a parte normal a F e a parte tangente a F do campo $\nabla_V W$ respectivamente.

Segue abaixo uma fórmula bem conhecida para o tensor de Ricci em produtos torcidos

Proposição 1.24. ([57]) *Seja $(B^n \times_f F^m, g)$ uma variedade produto torcido. Se $X, Y \in \mathcal{L}(B)$ e $V, W \in \mathcal{L}(F)$, então*

$$\begin{aligned} Ric(X, Y) &= Ric_{g_B}(X, Y) - \frac{m}{f} Hess_{g_B} f(X, Y) \\ Ric(X, V) &= 0 \\ Ric(V, W) &= Ric_{g_F}(V, W) - (f \Delta_B f + (m-1)g_B(\nabla f, \nabla f)) g_F(V, W), \end{aligned} \tag{1-3}$$

para todo $X, Y \in \mathcal{L}(B)$ e $V, W \in \mathcal{L}(F)$.

Ainda no contexto dos produtos torcidos, considere γ uma curva em $B \times_f F$, então podemos escrever $\gamma(s) = (\gamma_B(s), \gamma_F(s))$, onde $\gamma_B = \pi \circ \gamma$ e $\gamma_F = \sigma \circ \gamma$. A proposição a seguir garante uma condição para que γ seja uma geodésica.

Proposição 1.25. ([57]) *Uma curva $\gamma = (\gamma_B, \gamma_F)$ em $B \times_f F$ é geodésica se, e somente se,*

$$(i) \quad \gamma_B'' = g_F(\gamma_F', \gamma_F') f \circ \gamma_B \nabla f \quad \text{em } B,$$

$$(ii) \quad \gamma_F'' = \frac{-2}{f \circ \gamma_B} \frac{d(f \circ \gamma_B)}{ds} \gamma_F' \quad \text{em } F.$$

1.8 Imersão isométrica em uma classe Produto Torcidos

Seja $\overline{M}^{n+1} = I \times M^n$ um produto Riemanniano onde $I \subset \mathbb{R}$ e M^n é uma variedade n -dimensional conexa e orientada. Considere em \overline{M}^{n+1} a métrica

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \pi_I^*(dt^2) + (f \circ \pi_I)^2 \pi_M^*(g_M).$$

Seja $\overline{\nabla}$ and ∇ a conexão de Levi-Civita em $I \times_f M^n$ e Σ^n , respectivamente. Então, a fórmula de Gauss-Weingarten para a imersão isométrica $\phi : \Sigma^n \rightarrow \overline{M}^{n+1} = I \times_f M^n$ é dada por

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \langle AX, Y \rangle N, \quad AX = -\overline{\nabla}_X N, \quad (1-4)$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Onde N é campo normal a Σ^n .

Se considerarmos a função altura $h := \pi_I \circ \phi$ e a função ângulo $\theta = \langle N, \partial_t \rangle$ onde ∂_t é o campo de vetores unitário padrão tangente a I , então, por um cálculo simples, obtemos que

$$\overline{\nabla} \pi_I = \langle \overline{\nabla} \pi_I, \partial_t \rangle \partial_t = \partial_t,$$

logo, o gradiente de h em Σ^n é

$$\nabla h = (\overline{\nabla} \pi_I)^\top = \partial_t^\top = \partial_t - \theta N, \quad (1-5)$$

onde $(\cdot)^\top$ denota a componente tangencial de um campo vetorial em $\mathfrak{X}(\overline{M})$ ao longo de Σ^n . A partir de (1-5), obtemos

$$|\nabla h|^2 = 1 - \theta^2, \quad (1-6)$$

onde $|\cdot|$ denota a norma de um campo em Σ^n .

Proposição 1.26. ([4]) *Seja $\phi : \Sigma^n \rightarrow \overline{M}^{n+1} = I \times_f M^n$ uma imersão isométrica. Considere $h = \pi \circ \phi$, então*

$$(Hessh)(X, Y) = \frac{f'(h)}{f(h)} [g_\Sigma(X, Y) - dh \otimes dh(X, Y)] + \theta g_\Sigma(AX, Y),$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$.

1.9 Estruturas gradiente Einstein-type

As estruturas gradiente Einstein-type introduzidas por Anseli *et al.* em [5] serão o objeto principal desta tese. Desta forma, apresentamos uma definição formal

para tal estrutura, bem como os resultados fundamentais para o bom entendimento do trabalho.

Definição 1.27. *Seja (N^k, g_N) uma variedade Riemanniana de dimensão k , e (Σ^n, g) uma variedade Riemanniana conexa, completa, possivelmente compacta. Dizemos que a variedade (Σ^n, g) possui uma estrutura gradiente Einstein-type se existe um número real $\alpha > 0$, um mapa suave $u : (\Sigma^n, g) \rightarrow (N^k, g_N)$ com campo de tensão $\tau_g(u) = \text{trace} \nabla(du)$ e funções suaves $h, \mu, \lambda \in C^\infty(\Sigma)$, que satisfazem*

$$\begin{cases} Ric_g^u + Hessh - \mu dh \otimes dh = \lambda g \\ \tau_g u = du(\nabla h), \end{cases} \quad (1-7)$$

onde

$$Ric_g^u := Ric_g - \alpha u^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{g_N}.$$

Na definição anterior nós chamamos h de função potencial e λ de função soliton. Além disso, para simplificar, utilizaremos a notação $(\Sigma^n, g, h, u, \mu, \lambda)$ para a estrutura definida acima. Tal estrutura é classificada em três tipos, a depender do sinal de λ : expanding se $\lambda < 0$, steady se $\lambda = 0$ e shrinking se $\lambda > 0$.

A variedade definida em (1-7) generaliza muitas outras variedades bastante estudadas nos últimos anos. A saber, se h é uma função constante, (1-7) caracteriza uma variedade Einstein harmônica, neste caso, também dizemos que a variedade é trivial. Note que, no caso particular em que h, u são funções constantes (1-7) torna-se uma variedade de Einstein. No caso em que $\mu = 0, \lambda \in \mathbb{R}$ e u é uma função constante, obtemos um gradiente Ricci soliton. Se u for um mapa constante, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\mu = 1/m$, então (1-7) descreve uma variedade quasi-Einstein para qualquer $m > 0$. No mesmo contexto anterior, tomando μ e λ não constantes, obtemos uma variedade μ -quasi-Einstein generalizada. Finalmente, para $\mu = 0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ a métrica (1-7) define um gradiente Ricci-harmônico soliton (GRHS).

Como mencionado acima, GRHS são exemplos de estrutura gradiente Einstein-type e será um dos objetos de estudo deste trabalho.

Definição 1.28. *Sejam Σ^n, N^k variedades semi-Riemannianas. Uma métrica g em Σ^n é um gradiente Ricci-harmônico soliton, se para algum mapa diferenciável $u : (\Sigma^n, g) \rightarrow (N^k, g_N)$, alguma função suave $h : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ e alguma constante λ , g satisfaz o seguinte sistema acoplado*

$$\begin{cases} Ric_g + Hessh - \alpha \nabla u \otimes \nabla u = \lambda g; \\ \tau_g u - g(\nabla u, \nabla h) = 0, \end{cases} \quad (1-8)$$

onde $\tau_g u = \text{trace} \nabla du$ denota o campo de tensão de u , e α só depende do tempo. Nós classificamos um gradiente Ricci-harmônico soliton como *shrinking*, *steady* ou *expanding*, se $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ or $\lambda < 0$, respectivamente.

Seja um mapa suave $u : \Sigma^n \rightarrow N^k$ e um referencial ortonormal $\{E_i\}_{i=1}^n$ de $\mathfrak{X}(\Sigma)$. Então, a proposição abaixo fornece-nos uma equação de Gauss acoplada ao mapa suave u .

Proposição 1.29. *Dada uma imersão $\phi : \Sigma^n \rightarrow \overline{M}^{n+1} = I \times_f M^n$. Para quaisquer $X, Y, Z, W \in T_p \Sigma$ e mapa suave $u : \Sigma^n \rightarrow N^k$, as seguintes equações acontecem:*

$$(i) \quad Ric^u(X, Y) = \sum_{i=1}^n \langle \overline{R}(X, E_i)Y, E_i \rangle + nH \langle AX, Y \rangle - \langle AX, AY \rangle - \alpha u^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{g_N}(X, Y),$$

$$(ii) \quad scal^u = \sum_{i,j=1}^n \langle \overline{R}(E_i, E_j)E_i, E_j \rangle + n^2 H^2 - |A|^2 - \alpha |\nabla u|^2,$$

onde $Ric^u = Ric - \alpha u^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{g_N}$ e $scal^u = scal - \alpha |\nabla u|^2$ chamamos de u -curvatura escalar de Σ^n .

Prova. Segue diretamente da Proposição 1.18. □

Note que quando \overline{M}^{n+1} é um espaço forma de curvatura seccional constante c , temos a identidade

$$scal^u = n(n-1)c + n^2 H^2 - |A|^2 - \alpha |\nabla u|^2. \quad (1-9)$$

Com o intuito de obter uma expressão da u -curvatura escalar de Σ imersa em \overline{M}^{n+1} em função de f e h , segue da Proposição 7.42 em [57] que o operador curvatura de Riemann de \overline{M}^{n+1} tem a seguinte forma

$$\begin{aligned} \overline{R}(X, Y)Z &= R^M(X^*, Y^*)Z^* - [(\log f)'(h)]^2 [\langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X] \\ &\quad + (\log f)''(h) \langle Z, \partial_t \rangle [\langle Y, \partial_t \rangle X - \langle X, \partial_t \rangle Y] \\ &\quad - (\log f)''(h) [\langle Y, \partial_t \rangle \langle X, Z \rangle - \langle X, \partial_t \rangle \langle Y, Z \rangle] \partial_t, \end{aligned}$$

onde R^M é o tensor curvatura de Riemann da fibra M^n e $X^* = X - \langle X, \partial_t \rangle \partial_t$, $E_i^* = E_i - \langle E_i, \partial_t \rangle \partial_t$ são, respectivamente, as projeções dos campos X e E_i em M^n .

Portanto, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(X, E_i)X, E_i \rangle &= f(h)^{-2} \sum_{i=1}^n K^M(X^*, E_i^*) \left[|X|^2 - \langle X, \nabla h \rangle^2 - |X|^2 \langle \nabla h, E_i \rangle^2 \right. \\
&\quad \left. - \langle X, E_i \rangle^2 + 2 \langle X, \nabla h \rangle \langle X, E_i \rangle \langle \nabla h, E_i \rangle \right] \\
&\quad + [(\log f)'(h)]^2 \left(|\nabla h|^2 - (n-1) \right) |X|^2 \\
&\quad - (n-2)(\log f)''(h) \langle X, \nabla h \rangle^2 - \frac{f''}{f} |\nabla h|^2 |X|^2,
\end{aligned} \tag{1-10}$$

onde K^M é a curvatura seccional de M^n . Sendo assim, a partir da Proposição 1.29, a u -curvatura escalar de Σ^n em $I \times_f M^n$ toma a seguinte forma

$$\begin{aligned}
scal^u &= f(h)^{-2} \sum_{i,j=1}^n K^M(E_j^*, E_i^*) \left[1 - \langle E_j, \nabla h \rangle^2 - \langle \nabla h, E_i \rangle^2 - \langle E_j, E_i \rangle^2 \right. \\
&\quad \left. + 2 \langle E_j, \nabla h \rangle \langle E_j, E_i \rangle \langle \nabla h, E_i \rangle \right] + n [(\log f)'(h)]^2 \left(|\nabla h|^2 - (n-1) \right) \\
&\quad - (n-2)(\log f)''(h) |\nabla h|^2 - n \frac{f''}{f} |\nabla h|^2 + n^2 H^2 - |A|^2 - \alpha |\nabla u|^2.
\end{aligned} \tag{1-11}$$

De [57], sabemos que \bar{M}^{n+1} possui curvatura seccional constante c se, e somente se, M^n tiver curvatura seccional constante k e a função torção f satisfizer a seguinte EDO:

$$\frac{(f')^2 - k}{f^2} = -c = \frac{f''}{f}. \tag{1-12}$$

Observamos que uma variedade Riemanniana de curvatura seccional constante $c \in \{-1, 0, 1\}$ pode ser expressa como uma variedade produto torcido $I \times_f M^n$, a saber

$$\left\{ \begin{array}{ll}
\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} = (0, +\infty) \times_f \mathbb{S}^n, & \text{com } f(t) = t, \\
\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times_f \mathbb{R}^n, & \text{com } f(t) = 1, \\
\mathbb{S}^{n+1} \setminus \{\pm p\} = (0, \pi) \times_f \mathbb{S}^n, & \text{com } f(t) = \sin(t), \\
\mathbb{H}^{n+1} = \mathbb{R} \times_f \mathbb{R}^n, & \text{com } f(t) = e^t, \\
\mathbb{H}^{n+1} \setminus \{p\} = (0, +\infty) \times_f \mathbb{S}^n, & \text{com } f(t) = \sinh(t).
\end{array} \right.$$

Após um cálculo direto, é possível verificar que os modelos de produto torcido

anteriores verificam (1-12).

A proposição a seguir pode ser encontrada em [46] ou [16], ela é uma generalização do Teorema de Hopf em uma variedade Riemanniana não compacta orientada, e será usada para provar um de nossos principais resultados.

Proposição 1.30. *Seja X um campo de vetores suave em uma variedade n -dimensional, completa, não compacta e orientada Σ^n , tal que o divergente de X ($\operatorname{div}X$) não muda de sinal em Σ^n . Se $|X| \in L^1(\Sigma)$, então $\operatorname{div}X = 0$ em Σ^n .*

A seguir, apresentamos a fórmula descrita em [5], que é uma adaptação da fórmula de Bochner para as estruturas gradiente Einstein-type, que será útil em nossos resultados.

Proposição 1.31. ([5]) *Seja Σ^n uma variedade Riemanniana n -dimensional possuindo uma estrutura gradiente Einstein-type com $\mu \in \mathbb{R}$. Então*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta_h|\nabla h|^2 &= |\operatorname{Hess}h|^2 + \alpha|\tau_g u|^2 + (2\mu\lambda n - \lambda - 2\mu R^u)|\nabla h|^2 \\ &\quad + \mu(2\mu - 1)|\nabla h|^4 - (n - 2)\langle \nabla\lambda, \nabla h \rangle, \end{aligned} \tag{1-13}$$

onde $\Delta_h|\nabla h|^2 = \Delta h - \langle \nabla h, \nabla|\nabla h|^2 \rangle$.

Estruturas Gradiente Einstein-Type Imersas em Produto Torcido

Neste capítulo, estudaremos estruturas gradiente Einstein-type imersa em $I \times_f M^n$ com função potencial dada pela função altura. Investigaremos condições para que uma hipersuperfície Σ^n imersa em $I \times_f M^n$ possuindo uma estrutura gradiente Einstein-type seja totalmente umbílica, mínima ou totalmente geodésica. Obtemos também resultados de trivialidade para as funções potencial e aplicação u , fazendo uso do princípio do máximo. Quando a imersão for compacta, obteremos resultados de rigidez com a esfera Euclidiana. Por fim, estudaremos hipersuperfície rotacionais em $I \times_f \mathbb{Q}(c)^n$ possuindo estrutura gradiente Einstein-type, com o qual produziremos alguns exemplos. Este capítulo foi construído com base em [12].

2.1 Resultado Auxiliar

Aqui, apresentamos uma equação de estrutura que será base para a maioria dos resultados obtidos neste capítulo. A Proposição abaixo apresenta uma condição necessária e suficiente para a existência de estruturas gradiente Einstein-type imersas em $I \times_f M^n$ com função potencial dada pela função altura.

Proposição 2.1. *Seja $\phi : \Sigma^n \rightarrow \overline{M}^{n+1} = I \times_f M^n$ uma imersão isométrica. Então (Σ^n, g) possui uma estrutura gradiente Einstein-type com função potencial $h = \pi_I \circ \phi$ se, e somente se,*

$$\begin{aligned} Ric^u(X, Y) &= \left(\lambda - \frac{f'(h)}{f(h)} \right) g(X, Y) + \left(\mu + \frac{f'(h)}{f(h)} \right) dh \otimes dh(X, Y) - \theta g(A(X), Y), \\ \tau_g u &= du(\nabla h), \end{aligned}$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$.

Prova. Note que a função potencial $h = \pi_I \circ \phi$ é dada pela função altura, desta forma, da Proposição 1.26 juntamente com (1-7) nós concluímos a prova. \square

2.2 Principais Resultados

No caso particular de Yamabe solitons, os autores em [62] obtiveram resultados de trivialidade para a curvatura escalar e conseqüentemente para a função potencial. Em [5] os autores provaram alguns resultados de trivialidade para as estruturas gradiente Einstein-type, isto é, provaram que qualquer variedade compacta possuindo uma estrutura gradiente Einstein-type com tensor de Ricci limitado satisfazendo algumas desigualdades envolvendo as funções μ e λ , é Einstein harmônica. Nesta direção, iniciamos esta seção fornecendo uma condição para que a imersão de uma estrutura gradiente Einstein-type compacta em um produto torcido seja trivial, isto é, Einstein harmônica.

Teorema 2.2. *Seja $(\Sigma^n, g, h, u, \mu, \lambda)$ uma estrutura gradiente Einstein-type compacta imersa em $I \times_f M^n$ com $h = \pi_I \circ \phi$. Se a curvatura média de Σ^n satisfaz $0 \leq H \leq (\log f)'(h)$, então Σ^n é Einstein harmônica.*

Prova. A partir da Proposição 1.26, deduzimos que

$$\Delta h = \frac{f'(h)}{f(h)} (n - |\nabla h|^2) + n\theta H.$$

Sendo assim,

$$\Delta h + \langle \nabla(\log f(h)), \nabla h \rangle = n \frac{f'(h)}{f(h)} + n\theta H = n \left(\frac{f'(h)}{f(h)} + \theta H \right) \geq 0. \quad (2-1)$$

Portanto, segue do Teorema 1.19, que h é constante, logo Σ^n é um *slice*. Finalmente, levando em consideração a equação (1-7), obtemos que a aplicação u é harmônico, conseqüentemente, Σ^n é uma variedade Einstein harmônica. \square

Observação 2.3. *Note que uma consequência direta do Teorema 2.2 é que quando Σ^n é compacta, então M^n também será compacta.*

No caso particular em que o espaço ambiente é um espaço forma, obtemos a seguinte classificação

Corolário 2.4. *Seja $(\Sigma^n, g, h, u, \mu, \lambda)$ uma estrutura gradiente Einstein-type compacta imersa no espaço Euclidiano $(0, +\infty) \times_t \mathbb{S}^n$ com $h = \pi_I \circ \phi$. Se a curvatura média de Σ^n satisfaz $0 \leq H \leq h^{-1}$, então Σ^n é isométrico a uma esfera padrão.*

Prova. Segue do Teorema 2.2, que $\Sigma^n = \{t_0\} \times \mathbb{S}^n$, com $h(x) = t_0 \in (0, +\infty)$. Considerando a métrica induzida pela imersão de Σ^n segue que $g = t_0^2 g_{\mathbb{S}^n}$, isto é, (Σ^n, g) é isométrico a uma esfera Euclidiana $(\mathbb{S}^n, t_0^2 g_{\mathbb{S}^n})$. \square

Corolário 2.5. *Seja $(\Sigma^n, g, h, u, \mu, \lambda)$ uma estrutura gradiente Einstein-type compacta imersa na esfera Euclidiana $(0, \pi) \times_t \mathbb{S}^n$, com $h = \pi_I \circ \phi$. Se a curvatura média de Σ^n satisfaz $0 \leq H \leq \cot h$, então Σ^n é isométrica a uma esfera padrão.*

Corolário 2.6. *Seja $(\Sigma^n, g, h, u, \mu, \lambda)$ uma estrutura gradiente Einstein-type compacta imersa no Espaço hiperbólico $(0, +\infty) \times_{\sinh t} \mathbb{S}^n$, com $h = \pi_I \circ \phi$. Se a curvatura média de Σ^n satisfaz $0 \leq H \leq \coth h$, então Σ^n é isométrica a uma esfera padrão.*

Em [11] os autores consideraram a imersão isométrica de um almost Ricci soliton (M^n, g, X, λ) em espaços forma $\overline{M}(c)^{n+p}$ de curvatura seccional c . Eles provaram que se $|X| \in L^1(M)$ e $\lambda \geq (n-1)(c+H^2)$, então M^n é uma subvariedade totalmente umbílica em $\overline{M}(c)^{n+p}$. Nosso próximo resultado fornece condições para que uma hipersuperfície com uma estrutura gradiente Einstein-type imersa em $I \times_f M^n$ seja totalmente geodésica ou totalmente umbílica. Além disso, derivamos condições para a não existência de imersão mínima de uma estrutura gradiente Einstein-type em um produto torcido.

Teorema 2.7. *Seja $\phi : \Sigma^n \rightarrow I \times_f M^n$ uma imersão isométrica de uma estrutura gradiente Einstein-type não compacta $(\Sigma^n, g, h, u, \mu, \lambda)$ onde a fibra M^n possui curvatura seccional $k_M \leq \inf_I (f'^2 - f f'')$ com $\mu \in \mathbb{R}, \mu \geq 1/2$ e Σ^n não sendo um slice, então as seguintes afirmações acontecem*

(a) *Se $|e^{-h} \nabla |\nabla h|^2| \in L^1(\Sigma)$, $\langle \nabla \lambda, \nabla h \rangle \leq 0$ e a função soliton satisfazendo*

$$\lambda \geq \frac{-2\mu}{2\mu n - 1} \left(n(n-1) \frac{f''(h)}{f(h)} - n^2 H^2 \right),$$

então, Σ^n é uma hipersuperfície totalmente geodésica de $I \times_f M^n$.

(b) *Se $|e^{-h} \nabla |\nabla h|^2| \in L^1(\Sigma)$, $\langle \nabla \lambda, \nabla h \rangle \leq 0$ e a função soliton satisfazendo*

$$\lambda \geq \frac{-2\mu}{2\mu n - 1} \left(n(n-1) \left(\frac{f''(h)}{f(h)} - H^2 \right) \right),$$

então, Σ^n é uma hipersuperfície totalmente umbílica de $I \times_f M^n$.

Prova. Pela Proposição 1.31 temos que

$$\begin{aligned} e^h \operatorname{Div}(e^{-h} \nabla |\nabla h|^2) &= \frac{1}{2} \Delta_h |\nabla h|^2 \geq (2\mu\lambda n - \lambda - \mu 2\operatorname{scal}^u) |\nabla h|^2 + \mu(2\mu - 1) |\nabla h|^4 \\ &\quad - (n - 2) \langle \nabla \lambda, \nabla h \rangle. \end{aligned} \quad (2-2)$$

Utilizando as hipóteses para estimar a u -curvatura escalar de Σ em (1-11), obtemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{scal}^u &\leq \frac{\inf_I (f'^2 - f f'')}{f^2} (n - 1) (n - 2 |\nabla h|^2) + n [(\log f)'(h)]^2 (|\nabla h|^2 - (n - 1)) \\ &\quad - (n - 2) (\log f)''(h) |\nabla h|^2 - n \frac{f''}{f} |\nabla h|^2 + n^2 H^2 - |A|^2 - \alpha |\nabla u|^2 \\ &\leq - (n - 1) (\log f)''(h) (n - 2 |\nabla h|^2) + n [(\log f)'(h)]^2 (|\nabla h|^2 - (n - 1)) \\ &\quad - (n - 2) (\log f)''(h) |\nabla h|^2 - n \frac{f''}{f} |\nabla h|^2 + n^2 H^2 - |A|^2 - \alpha |\nabla u|^2 \\ &\leq -n(n - 1) \frac{f''(h)}{f(h)} + n^2 H^2 - |A|^2 - \alpha |\nabla u|^2. \end{aligned} \quad (2-3)$$

Substituindo (2-3) em (2-2) chegamos em

$$\begin{aligned} e^h \operatorname{Div}(e^{-h} \nabla |\nabla h|^2) &\geq (2\mu\lambda n - \lambda - \mu 2\operatorname{scal}^u) |\nabla h|^2 + \mu(2\mu - 1) |\nabla h|^4 \\ &\quad - (n - 2) \langle \nabla \lambda, \nabla h \rangle \\ &\geq \left(2\mu\lambda n - \lambda + 2\mu n(n - 1) \frac{f''(h)}{f(h)} - 2\mu n^2 H^2 \right) |\nabla h|^2 \\ &\quad + 2\mu\alpha |\nabla u|^2 |\nabla h|^2 + 2\mu |A|^2 |\nabla h|^2 + \mu(2\mu - 1) |\nabla h|^4 \\ &\quad - (n - 2) \langle \nabla \lambda, \nabla h \rangle \geq 0. \end{aligned} \quad (2-4)$$

A partir das hipóteses segue que

$$\operatorname{Div}(e^{-h} \nabla |\nabla h|^2) \geq 0. \quad (2-5)$$

Utilizando a Proposição 1.30 concluímos que $|A|^2$ é identicamente nulo, e isto prova o item a). Agora, considere Φ a parte sem traço da segunda forma fundamental de Σ^n , a saber, $\Phi = A - HI$, a qual satisfaz a seguinte identidade

$|\Phi|^2 = \text{tr}(\Phi^2) = |A|^2 - nH^2 \geq 0$. Sendo assim, (2-4) torna-se

$$\begin{aligned} e^h \text{Div}(e^{-h} \nabla |\nabla h|^2) &\geq \left(2\mu\lambda n - \lambda + 2\mu n(n-1) \frac{f''(h)}{f(h)} - 2\mu n(n-1)H^2 \right) |\nabla h|^2 \\ &\quad + 2\mu\alpha |\nabla u|^2 |\nabla h|^2 + 2\mu |\Phi|^2 |\nabla h|^2 + \mu(2\mu-1) |\nabla h|^4 \\ &\quad - (n-2) \langle \nabla \lambda, \nabla h \rangle \geq 0. \end{aligned}$$

Utilizando novamente a Proposição 1.30 nós concluímos a prova. \square

Teorema 2.8. *Seja $\phi : (\Sigma^n, g) \rightarrow I \times_f M^n$ uma imersão isométrica de uma estrutura gradiente Einstein-type com função potencial $h = \pi_I \circ \phi$, $0 < \mu \in \mathbb{R}$ e f uma função convexa. Se $k_M \leq \inf_I(f'^2)$, então ϕ não pode ser mínima.*

Prova. As seguintes desigualdades acontecem no sentido de formas quadráticas

$$0 \leq u^* g_N \leq |du|^2 g.$$

Logo, da equação (1-7) temos que

$$\text{Ric}_g + \text{Hess}h - \mu dh \otimes dh \geq \lambda g.$$

Como $\sup |\nabla h| < \infty$ (ver (1-6)), então a partir do Teorema 1.1 de [64] concluímos que (Σ^n, g) é uma estrutura gradiente Einstein-type compacta com grupo fundamental finito. Por outro lado, assumamos que Σ^n é mínima, logo, usando as propriedades da métrica produto torcido nós obtemos que a curvatura seccional de $\overline{M}^{n+1} = I \times_f M^n$ é dada por

$$K_{\partial_t V} = -\frac{f''}{f} \leq 0, \quad K_{VW} = \frac{K_M - f'^2}{f^2} \leq 0,$$

onde $V, W \in \mathfrak{X}(M)$. Portanto, de [36] concluímos que (Σ^n, g) é uma estrutura gradiente Einstein-type compacta com grupo fundamental infinito, o que é um absurdo. E isto completa a prova do teorema. \square

Na sequência, fornecemos uma condição para que uma estrutura gradiente Einstein-type compacta imersa em um produto torcido Riemanniano seja uma hipersuperfície totalmente umbílica.

Teorema 2.9. *Seja $(\Sigma^n, g, h, u, \mu, \lambda)$ uma estrutura gradiente Einstein-type compacta imersa em um produto torcido Riemanniano $I \times_f M^n$. Se scal^u for constante, $\mu = -f'(h)/f(h)$ e θ não mudar de sinal, então Σ^n é uma hipersuperfície totalmente umbílica de $I \times_f M$.*

Observação 2.10. *Note que no Teorema 2.9 diferentemente do Teorema 2.7 não estamos considerando hipóteses sobre a função soliton λ e curvatura seccional de M^n .*

Prova do Teorema 2.9: A partir da equação fundamental (2.1) e do Teorema 5.21 em [5] chegamos em

$$\nu g(X, Y) - \left(\lambda - \frac{f'(h)}{f(h)} \right) g(X, Y) = -\theta g(X, Y),$$

para alguma função $\nu \in C^\infty(\Sigma)$. Seja $p \in \Sigma$ e $\{E_i\}_{i=1}^n$ uma base de $T_p\Sigma^n$ de autovetores para o operador de Weingarten, isto é, $A(E_i) = \lambda_i E_i$, onde $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ são as curvaturas principais de Σ^n em p , então

$$\left(\nu - \left(\lambda - \frac{f'(h)}{f(h)} \right) \right) \delta_{ij} = -\theta \lambda_i \delta_{ij},$$

o que implica em

$$\lambda_i = -\frac{1}{\theta} \left(\nu - \left(\lambda - \frac{f'(h)}{f(h)} \right) \right), \quad 1 \leq i \leq n, \quad \text{e } p \in \Sigma.$$

Sendo assim, Σ^n é uma hipersuperfície totalmente umbílica de $I \times_f M$ e curvatura média dada por $H = -\frac{1}{\theta} \left(\nu - \left(\lambda - \frac{f'(h)}{f(h)} \right) \right)$. \square

Observamos que uma questão interessante é saber em quais condições uma estrutura gradiente Einstein-type possui u constante. Nesse caso, a estrutura gradiente Einstein-type resulta em um quasi-Einstein generalizado. Para saber mais sobre esta estrutura consulte, por exemplo, [1, 44, 59]. A seguir, por meio de uma desigualdade envolvendo a função soliton, fornecemos uma condição para que uma estrutura gradiente Einstein-type tenha u constante.

Teorema 2.11. *Seja $(\Sigma^n, g, h, u, \mu, \lambda)$ uma estrutura gradiente Einstein-type imersa em $I \times_f M^n$, onde a fibra M^n possui curvatura seccional satisfazendo a seguinte desigualdade $k_M \leq \inf_I(f'^2 - f f'')$. Se*

$$\lambda \geq \frac{f'(h)}{f(h)} - (n-1) \frac{f''(h)}{f(h)} + \left| \mu + \frac{f'(h)}{f(h)} \right| + H(nH + \theta),$$

então u é constante.

Prova. Tomando o traço na equação fundamental da Proposição 2.1 temos que

$$\text{scal}^u = n \left(\lambda - \frac{f'(h)}{f(h)} \right) + \left(\mu + \frac{f'(h)}{f(h)} \right) |\nabla h|^2 - n\theta H. \quad (2-6)$$

Comparando (2-3) e (2-6) nós obtemos

$$n \left(\lambda - \frac{f'(h)}{f(h)} \right) + \left(\mu + \frac{f'(h)}{f(h)} \right) |\nabla h|^2 - n\theta H \leq -n(n-1) \frac{f''(h)}{f(h)} + n^2 H^2 - |A|^2 - \alpha |\nabla u|^2.$$

Portanto, como $|\nabla h|^2 \leq 1$, segue que

$$\begin{aligned} \alpha |\nabla u|^2 &\leq -n(n-1) \frac{f''(h)}{f(h)} + n^2 H^2 - nH^2 - |\phi|^2 - n \left(\lambda - \frac{f'(h)}{f(h)} \right) \\ &\quad - \left(\mu + \frac{f'(h)}{f(h)} \right) |\nabla h|^2 + n\theta H \\ &\leq n \left(-(n-1) \frac{f''(h)}{f(h)} - \lambda + \frac{f'(h)}{f(h)} + \left| \mu + \frac{f'(h)}{f(h)} \right| + H(nH + \theta) \right) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Logo, u é constante. □

Em seguida, obtemos uma caracterização para as imersões mínimas de estruturas gradiente Einstein-type em espaços forma. A prova é uma consequência imediata do Teorema 2.11.

Corolário 2.12. *Qualquer estrutura gradiente Einstein-type mínima $(\Sigma^n, g, h, u, \mu, \lambda)$ imersa no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ com $\lambda \geq |\mu|$, é uma variedade μ -quasi Einstein, isto é, u é constante.*

Corolário 2.13. *Qualquer estrutura gradiente Einstein-type mínima $(\Sigma^n, g, h, u, \mu, \lambda)$ imersa no espaço hiperbólico $\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n$ com $\lambda \geq |\mu + 1| - (n - 2)$, é uma variedade μ -quasi Einstein, isto é, u é constante.*

Corolário 2.14. *Qualquer estrutura gradiente Einstein-type mínima $(\Sigma^n, g, h, u, \mu, \lambda)$ imersa na esfera Euclidiana $(0, \pi) \times_{\sin t} \mathbb{S}^n$ com*

$$\lambda \geq \cot(h) + (n - 1)|\mu + \cot(h)|,$$

é uma variedade μ -quasi Einstein, isto é, u é constante.

Da mesma forma que o teorema anterior, seria de grande interesse saber quais as condições para que uma estrutura gradiente Einstein-type seja uma variedade de Einstein.

Teorema 2.15. *Seja $(\Sigma^n, g, h, u, \lambda)$ uma estrutura gradiente Einstein-type completa com $n \geq 3$ e $\mu = -\frac{1}{n-2}$ imersa em $I \times_f M^n$ onde a fibra M^n possui curvatura*

seccional satisfazendo $k_M \leq \inf_I(f'^2 - ff'')$. Se

$$\frac{n}{2(n-1)} \left(-(n-1) \frac{f''(h)}{f(h)} + (n-1)H^2 + \frac{(n-1)}{n(n-2)} |\nabla h|^2 \right) \leq \lambda \leq -\frac{\Delta_h h}{n-2},$$

onde $\Delta_h h$ é o drift-laplaciano de h . Então u é constante. Além disso, se a função potencial h atingir um mínimo e $f'' \leq 0$, então Σ^n é uma variedade de Einstein.

Prova. Derivamos da Observação 7.49 em [5], que

$$\text{scal}^u = \frac{\Lambda e^{2\mu h}}{\mu} + (\mu - 1)|\nabla h|^2 - \left(\frac{1}{\mu} - n \right) \lambda,$$

para alguma constante Λ , tal que $\Lambda = (\lambda - (\Delta_h h)\mu)e^{-2\mu h}$. Agora, da hipótese na curvatura seccional de M juntamente com a equação (1-11) segue que

$$\frac{\Lambda e^{2\mu h}}{\mu} + (\mu - 1)|\nabla h|^2 - \left(\frac{1}{\mu} - n \right) \lambda \leq -n(n-1) \frac{f''(h)}{f(h)} + n^2 H^2 - |A|^2 - \alpha |\nabla u|^2.$$

Logo,

$$\alpha |\nabla u|^2 \leq -n(n-1) \frac{f''(h)}{f(h)} + n^2 H^2 - nH^2 - |\Phi|^2 - \frac{\Lambda e^{2\mu h}}{\mu} - (\mu - 1)|\nabla h|^2 + \left(\frac{1}{\mu} - n \right) \lambda.$$

Sendo assim, como $\mu = -\frac{1}{n-2}$ e $n \geq 3$, segue que

$$\begin{aligned} \alpha |\nabla u|^2 &\leq n \left(-(n-1) \frac{f''(h)}{f(h)} + (n-1)H^2 \right) + (n-2)\Lambda e^{2\mu h} \\ &\quad + \frac{(n-1)}{(n-2)} |\nabla h|^2 + 2(1-n)\lambda. \end{aligned}$$

Note que $\lambda \leq (\Delta_h h)\mu$ e isto implica que $\Lambda \leq 0$. Portanto, deduzimos que

$$\alpha |\nabla u|^2 \leq n \left(-(n-1) \frac{f''(h)}{f(h)} + (n-1)H^2 + \frac{(n-1)}{n(n-2)} |\nabla h|^2 - \frac{2(n-1)}{n} \lambda \right) \leq 0,$$

o que implica que u é constante. Além disso,

$$\frac{n}{2(n-1)} \left(-(n-1) \frac{f''(h)}{f(h)} + (n-1)H^2 + \frac{(n-1)}{n(n-2)} |\nabla h|^2 \right) \leq (\Delta_h h)\mu,$$

ou equivalentemente,

$$\begin{aligned} \Delta_h h &\leq \frac{-n(n-2)}{2(n-1)} \left(-(n-1) \frac{f''(h)}{f(h)} + (n-1)H^2 + \frac{(n-1)}{n(n-2)} |\nabla h|^2 \right) \\ &\leq \frac{n(n-2)}{2} \frac{f''(h)}{f(h)} \leq 0. \end{aligned}$$

A conclusão segue diretamente do princípio do máximo. \square

Teorema 2.16. *Seja $(\Sigma^n, g, h, u, \mu, \lambda)$ uma estrutura gradiente Einstein-type imersa em $I \times_f M^n$, com função potencial dada pela altura, onde a fibra M^n possui curvatura seccional $k_M \leq \inf_I(f'^2 - ff'')$. Se ∇h for um autovetor do operador de forma A , e a função soliton satisfizer*

$$\lambda \geq -\nu^2 + (nH + \theta)\nu - (n-1)\frac{f''}{f} - \mu + \theta^2 \left(\mu + \frac{f'(h)}{f(h)} \right),$$

onde, ν é autovalor de A associado a ∇h . Então, u é uma função harmônica, isto é, $\tau_g u = 0$.

Prova. Assuma que $k_M \leq \inf_I(f'^2 - ff'')$, da Proposição 1.29 e equação (1-10) segue que

$$\begin{aligned} Ric(\nabla h, \nabla h) &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(\nabla h, E_i)\nabla h, E_i \rangle + nH \langle A(\nabla h), \nabla h \rangle - \langle A(\nabla h), A(\nabla h) \rangle \\ &\leq -\log f''(h) \sum_{i=1}^n \left[|\nabla h|^2 - |\nabla h|^4 - |\nabla h|^2 \langle \nabla h, E_i \rangle^2 - \langle \nabla h, E_i \rangle^2 \right. \\ &\quad \left. + 2|\nabla h|^2 \langle \nabla h, E_i \rangle^2 \right] + [(\log f)'(h)]^2 \left(|\nabla h|^2 - (n-1) \right) |\nabla h|^2 \\ &\quad - (n-2)(\log f)''(h) |\nabla h|^4 - \frac{f''(h)}{f(h)} |\nabla h|^4 \\ &\quad + nH \langle A(\nabla h), \nabla h \rangle - \langle A(\nabla h), A(\nabla h) \rangle \\ &\leq -\frac{f''(h)}{f(h)} (n-1) |\nabla h|^2 + nH \langle A(\nabla h), \nabla h \rangle - \langle A(\nabla h), A(\nabla h) \rangle. \end{aligned}$$

A partir da Proposição 2.1, nós chegamos em

$$Ric^u(\nabla h, \nabla h) = \left(\lambda - \frac{f'(h)}{f(h)} \right) |\nabla h|^2 + \left(\mu + \frac{f'(h)}{f(h)} \right) |\nabla h|^4 - \theta \langle A(\nabla h), \nabla h \rangle.$$

Sabemos que $Ric(\nabla h, \nabla h) = Ric^u(\nabla h, \nabla h) + |\tau_g u|^2$. Portanto,

$$\begin{aligned} |\tau_g u|^2 &\leq -\frac{f''(h)}{f(h)} (n-1) |\nabla h|^2 + nH \langle A(\nabla h), \nabla h \rangle - \langle A(\nabla h), A(\nabla h) \rangle \\ &\quad - \left(\lambda - \frac{f'(h)}{f(h)} \right) |\nabla h|^2 - \left(\mu + \frac{f'(h)}{f(h)} \right) |\nabla h|^4 + \theta \langle A(\nabla h), \nabla h \rangle, \end{aligned}$$

como ∇h é um autovetor de A , existe ν autovalor associado a ∇h tal que

$A(\nabla h) = \nu \nabla h$ e $|\nabla h|^2 = 1 - \theta^2$, então

$$|\tau_g u|^2 \leq \left(-\frac{f''}{f}(n-1) - \lambda - \mu + \theta^2 \left(\mu + \frac{f'(h)}{f(h)} \right) + (nH + \theta)\nu - \nu^2 \right) |\nabla h|^2 \leq 0.$$

Portanto, $\tau_g u = 0$. □

O próximo corolário segue diretamente do teorema acima pois se θ é constante, então ∇h é autovetor de A .

Corolário 2.17. *Seja $(\Sigma^n, g, h, u, \mu, \lambda)$ uma estrutura gradiente Einstein-type imersa em $I \times_f Q(c)^n$ onde $Q(c)^n$ é um espaço forma de curvatura seccional c . Se Σ^n possuir função ângulo constante e a curvatura média de Σ^n satisfaz*

$$H \leq \frac{(n-1)f''(h)}{n\nu f(h)} + \frac{1}{n\nu} \left[\lambda + \mu - \left(\mu + 2\frac{f'(h)}{f(h)} \right) \theta^2 \right],$$

então u é harmônica.

Note que no Teorema 2.2 assumimos a compacidade de Σ^n e obtemos uma trivialização da função potencial h . Agora, assumindo Σ^n não compacta, nós deduzimos um resultado similar.

Teorema 2.18. *Seja $(\Sigma^n, g, h, u, \mu, \lambda)$ uma estrutura gradiente Einstein-type não compacta com $\mu > -\frac{f'}{f}$ imersa em $I \times_f M^n$ e potencial dada pela altura, onde a fibra M^n possui curvatura seccional satisfazendo $k_M(q) \leq \inf_I(f'^2 - ff'')$, para todo $q \in M$. Se $A(\nabla h) = \nu \nabla h$ para alguma função suave ν , então as seguintes afirmações são válidas*

- (a) Se $\Delta := (nH + \theta)^2 + 4 \left[\frac{f'}{f} - (n-1)\frac{f''}{f} - \lambda \right] \leq 0$, então (Σ^n, g) é Einstein harmônica.
- (b) Se $\Delta := (nH + \theta)^2 + 4 \left[\frac{f'}{f} - (n-1)\frac{f''}{f} - \lambda \right] > 0$ e

$$\nu \leq \frac{nH + \theta - \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \text{ou} \quad \frac{nH + \theta + \sqrt{\Delta}}{2} \leq \nu,$$

então (Σ^n, g) é Einstein harmônica.

Prova. Assumindo $k_M \leq \inf_I(f'^2 - ff'')$ juntamente com a Proposição 1.29 e equação

(1-10) chegamos em

$$\begin{aligned}
Ric(\nabla h, \nabla h) &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(\nabla h, E_i) \nabla h, E_i \rangle + nH \langle A(\nabla h), \nabla h \rangle - \langle A(\nabla h), A(\nabla h) \rangle \\
&\leq -\log f''(h) \sum_{i=1}^n \left[|\nabla h|^2 - |\nabla h|^4 - |\nabla h|^2 \langle \nabla h, E_i \rangle^2 - \langle \nabla h, E_i \rangle^2 \right. \\
&\quad \left. + 2|\nabla h|^2 \langle \nabla h, E_i \rangle^2 \right] + [(\log f)'(h)]^2 \left(|\nabla h|^2 - (n-1) \right) |\nabla h|^2 \\
&\quad - (n-2)(\log f)''(h) |\nabla h|^4 - \frac{f''(h)}{f(h)} |\nabla h|^4 + nH \langle A(\nabla h), \nabla h \rangle \\
&\quad - \langle A(\nabla h), A(\nabla h) \rangle \\
&\leq -\frac{f''(h)}{f(h)} (n-1) |\nabla h|^2 + nH \langle A(\nabla h), \nabla h \rangle - \langle A(\nabla h), A(\nabla h) \rangle.
\end{aligned}$$

Da Proposição 2.1, obtemos que

$$Ric^u(\nabla h, \nabla h) = \left(\lambda - \frac{f'(h)}{f(h)} \right) |\nabla h|^2 + \left(\mu + \frac{f'(h)}{f(h)} \right) |\nabla h|^4 - \theta \langle A(\nabla h), \nabla h \rangle,$$

e levando em consideração que $Ric(\nabla h, \nabla h) = Ric_{\Sigma}^u(\nabla h, \nabla h) + \alpha |\tau_g u|^2$ deduzimos que

$$0 \leq \alpha |\tau_g u|^2 + \left(\mu + \frac{f'}{f} \right) |\nabla h|^4 \leq \left(\frac{f'}{f} - \frac{f''}{f} (n-1) - \lambda + (nH + \theta) \nu - \nu^2 \right) |\nabla h|^2.$$

O resultado segue da análise das raízes de

$$-\nu^2 + (nH + \theta) \nu + \frac{f'}{f} - (n-1) \frac{f''}{f} - \lambda = 0.$$

□

Na mesma configuração do teorema acima, se a função ângulo θ for constante, então ∇h é um autovetor de A com $A(\nabla h) = -\theta \frac{f'}{f} \nabla h$, veja [38]. Assim, segue do Teorema 2.18 a seguinte caracterização.

Corolário 2.19. *Seja $(\Sigma^n, g, h, u, \mu, \lambda)$ uma estrutura gradiente Einstein-type com $\mu > -\frac{f'}{f}$ imersa em $I \times_f M^n$ com $k_M \leq \inf_I (f'^2 - ff'')$. Se Σ^n possuir função ângulo constante e vale algum dos itens a) ou b) do Teorema 2.18, então, Σ^n é Einstein harmônica.*

Corolário 2.20. *Seja $(\Sigma^n, g, h, u, \mu, \lambda)$ uma estrutura gradiente Einstein-type com $\mu > -\cot(t)$ imersa na esfera Euclidiana $(0, \pi) \times_{\sin t} \mathbb{S}^n$. Se Σ^n possuir função ângulo*

constante e a função soliton satisfizer

$$\lambda \geq \cot(t) + n - 1,$$

então Σ^n é Einstein harmônica.

Corolário 2.21. *Seja $(\Sigma^n, g, h, u, \mu, \lambda)$ uma estrutura gradiente Einstein-type com $\mu > -1$ imersa no espaço hiperbólico $\mathbb{R} \times_{e^t} \mathbb{R}^n$. Se Σ^n possuir função ângulo constante e a função soliton satisfizer*

$$\lambda + n - 2 \geq 0,$$

então Σ^n é Einstein harmônica.

Corolário 2.22. *Seja $(\Sigma^n, g, h, u, \mu, \lambda)$ uma estrutura gradiente Einstein-type com $\mu > 0$ imersa no espaço Euclidiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Se Σ^n possuir função ângulo constante e a função soliton satisfizer $\lambda \geq 0$ então Σ^n é Einstein harmônica.*

Nos resultados anteriores, consideramos imersões isométricas de estruturas gradiente Einstein-type onde a aplicação $u : \Sigma^n \rightarrow N^k$ não estava fixado. Considerando $u = \phi$, obtemos os seguintes resultados.

Teorema 2.23. *Seja $\phi : \Sigma^n \rightarrow I \times_f M^n$ uma imersão isométrica de uma estrutura gradiente Einstein-type $(\Sigma^n, g, h, u, \mu, \lambda)$ onde a fibra M^n possui curvatura seccional $k_M(q) \leq \inf_I(f'^2 - ff'')$, para todo $q \in M$, e $u = \phi$, então, são válidas as seguintes afirmações*

- (a) *Não existe imersão isométrica de estruturas gradiente Einstein-type em $I \times_f M^n$ tal que $\lambda \geq -(n-1)\frac{f''(h)}{f(h)}$.*
- (b) *Se $\lambda \geq -(n-1)\frac{f''(h)}{f(h)} - \frac{\alpha}{n}|\nabla u|^2$, então Σ^n é uma variedade Einstein harmônica totalmente geodésica em $I \times_f M^n$. Além disso, a aplicação u pode ser obtido por $|\nabla u|^2 = \frac{n}{\alpha} \left(-(n-1)\frac{f''(h)}{f(h)} - \lambda \right)$.*

Prova. Primeiramente, se u é uma imersão isométrica, então $\tau_g u = nH$ (veja [4]). Note que $du(\nabla h)$ é tangente a Σ , enquanto que nH é normal a Σ , portanto, da equação (1-7) segue que Σ^n é Einstein harmônica minimamente imersa em $I \times_f M^n$. Além disso, a partir de [5] obtemos que λ é constante. Substituindo $scal^u = n\lambda$ na Proposição 1.29, chegamos em

$$\alpha|\nabla u|^2 \leq -n(n-1)\frac{f''(h)}{f(h)} - n\lambda - |A|^2 \leq 0,$$

logo, u é uma aplicação constante, o que é um absurdo, pois u é uma imersão isométrica. Agora, da hipóteses na curvatura seccional de M^n , temos que

$$|A|^2 \leq n \left(-(n-1) \frac{f''(h)}{f(h)} - \lambda - \frac{\alpha}{n} |\nabla u|^2 \right) \leq 0,$$

desta forma, Σ^n é totalmente geodésica com $|\nabla u|^2 = \frac{n}{\alpha} \left(-(n-1) \frac{f''(h)}{f(h)} - \lambda \right)$. \square

Corolário 2.24. *Não existe imersão isométrica ϕ de estruturas gradiente Einstein-type shrinking em \mathbb{S}^{n+1} com $u = \phi$.*

Corolário 2.25. *Seja $(\Sigma^n, g, h, u, \mu, \lambda)$ uma estrutura gradiente Einstein-type compacta imersa por ϕ num espaço forma $\overline{M}(c)^{n+1}$ de curvatura seccional c . Se considerarmos $\lambda \geq (n-1)c - \frac{\alpha}{n} |\nabla u|^2$ e $u = \phi$, então Σ^n é isométrica a \mathbb{S}^n .*

Prova. Do Teorema 2.23 segue que Σ^n é totalmente geodésica, como Σ^n também é compacta, logo $\overline{M}(c)^{n+1}$ tem que ser $\mathbb{S}(c)^{n+1}$. Consequentemente, Σ^n será isométrica a uma esfera \mathbb{S}^n de $\mathbb{S}(c)^{n+1}$. \square

2.3 Hipersuperfícies rotacionais com estrutura gradiente Einstein-type

Com o objetivo de estudar hipersuperfícies rotacionais possuindo estruturas gradiente Einstein-type imersas em $\mathbb{R} \times_f \mathbb{Q}^n(c)$, onde $\mathbb{Q}(c)$ é um espaço forma de curvatura $c \in \{-1, 0, 1\}$, denotaremos por \mathbb{E}^{n+2} o espaço Euclidiano de dimensão $n+2$ e por \mathbb{L}^{n+2} o espaço Lorentziano de dimensão $n+2$, equipado com a métrica $ds^2 = -dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_{n+2}^2$. Além disso, assuma que $\mathbb{R} \times_f \mathbb{Q}^n(c) \subset \mathbb{E}^{n+2}$ ou $\mathbb{R} \times_f \mathbb{Q}^n(c) \subset \mathbb{L}^{n+2}$, a depender do valor de c .

2.3.1 Estruturas gradiente Einstein-type rotacionais imersas em

$$\mathbb{R} \times_f \mathbb{R}^n$$

Nesta seção, apresentaremos uma caracterização de hipersuperfícies rotacionais possuindo estrutura gradiente Einstein-type imersas em $\mathbb{R} \times_f \mathbb{R}^n$ com função potencial $h := \pi_I \circ \phi$ e função ângulo $|\theta| < 1$. Seguindo os passos de Dajczer e do Carmo [29], usaremos como definição de hipersuperfícies rotacionais em $\mathbb{R} \times_f \mathbb{R}^n$ uma hipersuperfície invariante pelo grupo ortogonal $O(n)$, no qual é visto como um subgrupo do grupo de isometrias de $\mathbb{R} \times_f \mathbb{R}^n$.

Inicialmente, considere as coordenadas (t, x_1, \dots, x_n) , bem como a base ortonormal padrão $\{\eta_1, \dots, \eta_{n+1}\}$ de $\mathbb{R} \times_f \mathbb{R}^n$. Então, a menos de isometria, podemos assumir que o eixo de rotação é η_1 . Considere uma curva parametrizada por comprimento de arco no plano tx_n dada por

$$\begin{aligned} \gamma: (t_0, t_1) &\longrightarrow \mathbb{R} \times_f \mathbb{R}^n \\ s &\longmapsto (\alpha(s), 0, \dots, 0, \beta(s)). \end{aligned}$$

Rotacionando esta curva em torno do eixo t obtemos uma hipersuperfície de rotação em $\mathbb{R} \times_f \mathbb{R}^n$. Agora, com o intuito de obter uma parametrização para tal hipersuperfície, considere a esfera unitária padrão dada por $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n = \text{span}\{\eta_2, \dots, \eta_{n+1}\}$ com parametrização ortogonal

$$\begin{aligned} X_1 &= \cos v_1, & X_2 &= \sin v_1 \cos v_2, & X_3 &= \sin v_1 \sin v_2 \cos v_3, & \dots \\ X_{n-1} &= \sin v_1 \sin v_2 \dots \sin v_{n-2} \cos v_{n-1}, & X_n &= \sin v_1 \sin v_2 \dots \sin v_{n-2} \sin v_{n-1}. \end{aligned}$$

Portanto, uma parametrização de uma hipersuperfície rotacional Σ^n com eixo radial η_1 em $\mathbb{R} \times_f \mathbb{R}^n$ é dada por

$$\begin{aligned} \phi: (t_0, t_1) \times (0, 2\pi)^{n-1} &\rightarrow \mathbb{R} \times_f \mathbb{R}^n \\ (s, v_1, \dots, v_{n-1}) &\mapsto \zeta(s)\eta_1 + \beta(s)X(v_1, \dots, v_{n-1}), \end{aligned} \tag{2-7}$$

onde

$$X(v_1, \dots, v_{n-1}) = (0, X_1(v_1, \dots, v_{n-1}), \dots, X_n(v_1, \dots, v_{n-1})).$$

Nesta cenário, nós providenciamos o seguinte.

Teorema 2.26. *Seja $\phi: \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R} \times_f \mathbb{R}^n = \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície de rotação com função ângulo $|\theta| < 1$. Então, $(\Sigma^n, g, h, u, \mu, \lambda)$ possui uma estrutura gradiente Einstein-type, se, e somente se, o sistema de equações abaixo for satisfeito*

$$\begin{aligned} \lambda &= -(n-1)(1-\theta^2)\frac{f''(h)}{f(h)} - (n-1)\theta\frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\sigma}(\log f)'(h) \\ &+ \left[(n-1) \left(\theta[(\log f)'(h)] - \frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\sigma} \right) - \theta \right] \frac{\theta'}{\sqrt{1-\theta^2}} - \alpha \frac{|\tau_g u|^2}{1-\theta^2} - \mu(1-\theta^2), \end{aligned} \tag{2-8}$$

$$\begin{aligned}
\lambda - \frac{f'(h)}{f(h)} - \theta \left(\frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\sigma} - \frac{f'(h)}{f(h)}\theta \right) &= (n-2) \left(\frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\sigma} - \frac{f'(h)}{f(h)}\theta \right)^2 \\
-(1-\theta^2)(\log f)'' + (\theta^2 - (n-1))((\log f)')^2 - \frac{f'(h)}{f(h)}\theta \frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\sigma} - \frac{\theta'}{\sigma} & \quad (2-9) \\
+ \frac{\theta'}{\sqrt{1-\theta^2}} \frac{f'(h)}{f(h)}\theta - \frac{\alpha}{\sigma^2} u^* \langle, \rangle_{g_N}(\phi_{v_i}, \phi_{v_i}), &
\end{aligned}$$

$$u^* \langle, \rangle_{g_N}(\phi_s, \phi_{v_i}) = 0, \quad (2-10)$$

$$u^* \langle, \rangle_{g_N}(\phi_{v_i}, \phi_{v_j}) = 0, \quad \forall i \neq j, \quad (2-11)$$

$$\tau_g u = \sqrt{1-\theta^2} du(\phi_s). \quad (2-12)$$

Prova. Temos que $\phi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R} \times_f \mathbb{R}^n$ é uma hipersuperfície rotacional, deduzimos da equação (2-7) que

$$\begin{aligned}
\phi_s &= \zeta'(s)\eta_1 + \beta'(s)X, \\
\phi_{v_i} &= \beta(s)X_{v_i}, \quad 1 \leq i \leq n-1,
\end{aligned} \quad (2-13)$$

e então, a primeira forma fundamental de Σ^n assume a forma

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(\zeta(s))^2 \beta(s)^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f(\zeta(s))^2 \beta(s)^2 \end{bmatrix}. \quad (2-14)$$

A partir da equação (2-14) notamos que a métrica induzida em Σ^n pode ser expressa pela métrica produto torcido $g = ds^2 + \sigma(s)^2 dv^2$ onde $\sigma(s) = f(\zeta(s))\beta(s)$. Neste

caso, segue-se da conexão de Levi-Civita na métrica produto torcido que:

$$\begin{aligned}\nabla_{\phi_s}\phi_s &= 0, \\ \nabla_{\phi_s}\phi_{v_i} &= \nabla_{\phi_{v_i}}\phi_s = \frac{\sigma_s}{\sigma}\phi_{v_i}, \\ \nabla_{\phi_{v_i}}\phi_{v_j} &= \phi_{v_i v_j} - \sigma\sigma_s\delta_{ij}\phi_s.\end{aligned}\tag{2-15}$$

Da componente tangente de (2-13), derivamos o seguinte vetor normal unitário para Σ^n

$$N = f(\zeta(s))\beta'(s)\eta_1 - \frac{\zeta'(s)}{f(\zeta(s))}X(v_1, \dots, v_{n-1}).$$

Logo,

$$\theta(s) = \langle \partial_t, N \rangle = f(\zeta(s))\beta'(s).\tag{2-16}$$

Como $\gamma(s) = (\zeta(s), 0, \dots, 0, \beta(s))$ é uma curva parametrizada por comprimento de arco, isto é,

$$\zeta'(s)^2 + f(\zeta(s))^2\beta'(s)^2 = 1.$$

Segue da equação (2-16), que $\zeta'(s) = \sqrt{1 - \theta(s)^2}$, onde as soluções gerais são dadas por

$$\zeta(s) = \int \sqrt{1 - \theta^2} ds.\tag{2-17}$$

Então, substituindo a equação (2-17) em (2-16) e resolvendo em s , derivamos a seguinte expressão

$$\beta(s) = \int^s \frac{\theta(w)}{f(\zeta(w))} dw.\tag{2-18}$$

Portanto, a hipersuperfície rotacional toma a forma

$$\phi = \left(\int^s \sqrt{1 - \theta^2} ds \right) \eta_1 + \left(\int^s \frac{\theta}{f(\zeta(w))} dw \right) X(v_1, \dots, v_{n-1}).\tag{2-19}$$

Agora, afim de computar o operador de Weingarten A_N , consideramos a seguinte decomposição

$$\partial_t = \sqrt{1 - \theta^2}\phi_s + \theta N.\tag{2-20}$$

Tomando a derivada covariante de (2-20) com respeito a ϕ_{v_i} , e usando a Proposição 1.23, chegamos em

$$\nabla_{\phi_{v_i}}\phi_s = \frac{\theta}{\sqrt{1 - \theta^2}}A_N\phi_{v_i} + \frac{1}{\sqrt{1 - \theta^2}}\frac{f'(\zeta(s))}{f(\zeta(s))}\phi_{v_i}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\},\tag{2-21}$$

aqui estamos usando o fato de que $\bar{\nabla}_X \partial_t = \frac{f'}{f} (X - \langle X, \partial_t \rangle \partial_t)$ para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, o qual é uma consequência direta da Proposição 1.23 item (ii). Combinando as equações (2-15), (2-21), temos que

$$\sqrt{1 - \theta^2} \frac{\sigma_s}{\sigma} \phi_{v_i} = \theta A_N \phi_{v_i} + \frac{f'(\zeta(s))}{f(\zeta(s))} \phi_{v_i}. \quad (2-22)$$

Segue da expressão de σ que ϕ_{v_i} é um autovetor de A_N e satisfaz

$$A_N \phi_{v_i} = \left(\frac{\sqrt{1 - \theta^2}}{\sigma} - \frac{f'(\zeta(s))}{f(\zeta(s))} \theta \right) \phi_{v_i}. \quad (2-23)$$

Por outro lado, tomando a derivada covariante de (2-20) com respeito a $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ e usando a formula de Gauss-Weingarten (1-4), deduzimos o seguinte

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X \partial_t &= X(\sqrt{1 - \theta^2}) \phi_s + \sqrt{1 - \theta^2} \bar{\nabla}_X \phi_s + X(\theta)N + \theta \bar{\nabla}_X N \\ &= X(\sqrt{1 - \theta^2}) \phi_s + \sqrt{1 - \theta^2} \nabla_X \phi_s + \sqrt{1 - \theta^2} g(A_N \phi_s, X)N \\ &\quad + X(\theta)N - \theta A_N X. \end{aligned}$$

Usando novamente a Proposição 1.23, segue que

$$\begin{aligned} \frac{f'(\zeta(s))}{f(\zeta(s))} \left(X - \sqrt{1 - \theta^2} g(X, \phi_s) \partial_t \right) &= X(\sqrt{1 - \theta^2}) \phi_s + \sqrt{1 - \theta^2} \nabla_X \phi_s \\ &\quad + \sqrt{1 - \theta^2} g(A_N \phi_s, X)N + X(\theta)N - \theta A_N X. \end{aligned} \quad (2-24)$$

Comparando a parte tangente e a parte normal de (2-24), obtemos que ϕ_u é uma autovetor de A_N satisfazendo

$$A_N \phi_s = \left(-\frac{f'(\zeta(s))}{f(\zeta(s))} \theta - \frac{\theta'}{\sqrt{1 - \theta^2}} \right) \phi_s. \quad (2-25)$$

Logo, das equações (2-25), (2-23) concluímos que $\{\phi_s, \phi_{v_1}, \dots, \phi_{v_{n-1}}\}$ forma uma base ortogonal de A_N e esta por sua vez, tem a forma

$$A_N = \begin{bmatrix} -\frac{f'(\zeta(s))}{f(\zeta(s))} \theta - \frac{\theta'}{\sqrt{1 - \theta^2}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{1 - \theta^2}}{\sigma} - \frac{f'(\zeta(s))}{f(\zeta(s))} \theta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\sqrt{1 - \theta^2}}{\sigma} - \frac{f'(\zeta(s))}{f(\zeta(s))} \theta \end{bmatrix}. \quad (2-26)$$

Agora, suponha que $(\Sigma^n, g, h, u, \mu, \lambda)$ possui uma estrutura gradiente Einstein-type. Obtemos da Proposição 2.1 que

$$Ric^u(X, Y) = \left(\lambda - \frac{f'(h)}{f(h)} \right) g(X, Y) + \left(\mu + \frac{f'(h)}{f(h)} \right) dh \otimes dh(X, Y) - \theta g(A(X), Y). \quad (2-27)$$

Note que, no caso particular em que $X = \phi_s, Y = \phi_{v_i}$ e $X = \phi_{v_i}, Y = \phi_{v_j}$, $i \neq j$, a ortogonalidade de X, Y e a expressão da função potencial

$$h(s, v_1, \dots, v_n) = (\pi_{\mathbb{R}} \circ \phi)(s, v_1, \dots, v_n) = \int^s \sqrt{1 - \theta^2} ds, \quad (2-28)$$

implica que a equação (2-27) torna-se

$$Ric^u(\phi_s, \phi_{v_i}) = 0, \quad (2-29)$$

e

$$Ric^u(\phi_{v_i}, \phi_{v_j}) = 0, \quad (2-30)$$

para todo $i \neq j$. Logo, é necessário verificar a equação (2-27) para os pares $X = Y = \phi_s$ e $X = Y = \phi_{v_i}$.

Para $X = Y = \phi_s$, obtemos que

$$\begin{aligned} Ric^u(\phi_s, \phi_s) &= \left(\lambda - \frac{f'(h)}{f(h)} \right) g(\phi_s, \phi_s) + \left(\mu + \frac{f'(h)}{f(h)} \right) dh \otimes dh(\phi_s, \phi_s) \\ &\quad - \theta g(A(\phi_s), \phi_s) \\ &= \lambda - \frac{f'(h)}{f(h)} + \left(\mu + \frac{f'(h)}{f(h)} \right) (1 - \theta^2) \\ &\quad - \theta g \left(-\frac{f'(\zeta(s))}{f(\zeta(s))} \theta - \frac{\theta'}{\sqrt{1 - \theta^2}} \phi_s, \phi_s \right) \\ &= \lambda + \mu(1 - \theta^2) + \frac{\theta\theta'}{\sqrt{1 - \theta^2}}. \end{aligned} \quad (2-31)$$

Enquanto que para $X = Y = \phi_{v_i}$, com $1 \leq i \leq n - 1$, segue que

$$\begin{aligned} Ric^u(\phi_{v_i}, \phi_{v_i}) &= \left(\lambda - \frac{f'(h)}{f(h)} \right) g(\phi_{v_i}, \phi_{v_i}) + \left(\mu + \frac{f'(h)}{f(h)} \right) dh \otimes dh(\phi_{v_i}, \phi_{v_i}) \\ &\quad - \theta g(A(\phi_{v_i}), \phi_{v_i}) \\ &= \sigma^2 \left(\lambda - \frac{f'(h)}{f(h)} - \theta \left(\frac{\sqrt{1 - \theta^2}}{\sigma} - \frac{f'(h)}{f(h)} \theta \right) \right). \end{aligned} \quad (2-32)$$

Por outro lado, da Proposição 1.29 e equação (1-10) chegamos em

$$\begin{aligned}
Ric^u(\phi_s, \phi_{v_i}) &= [(\log f)'(h)]^2 \left(|\nabla h|^2 - (n-1) \right) \langle \phi_s, \phi_{v_i} \rangle \\
&\quad - (n-2)(\log f)''(h) \langle \phi_s, \nabla h \rangle \langle \phi_{v_i}, \nabla h \rangle - \frac{f''}{f} |\nabla h|^2 \langle \phi_s, \phi_{v_i} \rangle \\
&\quad + nH \langle A_N(\phi_s), \phi_{v_i} \rangle - \langle A_N(\phi_s), A_N \phi_{v_i} \rangle - \alpha u^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{g_N}(\phi_s, \phi_{v_i}) \\
&= -\alpha u^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{g_N}(\phi_s, \phi_{v_i}), \quad \forall \quad 1 \leq i \leq n-1.
\end{aligned} \tag{2-33}$$

Similarmente, temos que

$$Ric^u(\phi_{v_i}, \phi_{v_j}) = -\alpha u^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{g_N}(\phi_{v_j}, \phi_{v_i}), \tag{2-34}$$

para todo $i \neq j$. Usando a Proposição 1.29 e equação (1-10) novamente, segue que

$$\begin{aligned}
Ric^u(\phi_s, \phi_s) &= [(\log f)'(h)]^2 \left(|\nabla h|^2 - (n-1) \right) \langle \phi_s, \phi_s \rangle \\
&\quad - (n-2)(\log f)''(h) \langle \phi_s, \nabla h \rangle \langle \phi_s, \nabla h \rangle - \frac{f''}{f} (h) |\nabla h|^2 \langle \phi_s, \phi_s \rangle \\
&\quad + nH \langle A_N(\phi_s), \phi_s \rangle - \langle A_N(\phi_s), A_N \phi_s \rangle - \alpha du \otimes du(\phi_s, \phi_s) \\
&= -(n-1)(1-\theta^2)(\log f)''(h) - (n-1)(1-\theta^2) [(\log f)'(h)]^2 \\
&\quad - (n-1)\theta \frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\sigma} [(\log f)'(h)] \\
&\quad + (n-1) \left(\theta [(\log f)'(h)] - \frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\sigma} \right) \frac{\theta'}{\sqrt{1-\theta^2}} - \alpha \frac{|\tau_g u|^2}{1-\theta^2},
\end{aligned} \tag{2-35}$$

e

$$\begin{aligned}
\sigma^{-2} Ric^u(\phi_{v_i}, \phi_{v_i}) &= (n-2) \left(\frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\sigma} - \frac{f'(h)}{f(h)} \theta \right)^2 - (1-\theta^2)(\log f)'' \\
&\quad + (\theta^2 - (n-1)) ((\log f)')^2 - \frac{f'(h)}{f(h)} \theta \frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\sigma} - \frac{\theta'}{\sigma} \\
&\quad + \frac{\theta'}{\sqrt{1-\theta^2}} \frac{f'(h)}{f(h)} \theta - \frac{\alpha}{\sigma^2} u^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{g_N}(\phi_{v_i}, \phi_{v_i}).
\end{aligned} \tag{2-36}$$

Combinando as equações (2-29) e (2-33), chegamos em (2-10).

A partir das equações (2-30), (2-34) obtemos (2-11). Da equações (2-31) e (2-35) derivamos a equação (2-8). Finalmente, combinando as equações (2-32), (2-36) obtemos a equação (2-9). Note que a equação (2-12) pode ser obtida substituindo ∇h na segunda equação da Proposição (2.1), e isto conclui a prova do teorema. \square

Os autores em [13] provaram que a aplicação u de um gradiente Ricci-harmônico soliton em um produto torcido $B^n \times_f F^m$ pode ser expressa como $u = u_B \circ \pi_B$ ou $u = u_F \circ \pi_F$ quando $h = h_B \circ \pi_B$ e u é uma função real, onde $u_B \in C^\infty(B)$, $u_F \in C^\infty(F)$ e $h_B \in C^\infty(B)$. Neste sentido, caracterizamos estruturas gradiente Einstein-type simétrico rotacional imerso em $I \times_f \mathbb{R}^n$ com função ângulo $|\theta| < 1$ e função potencial $h = \pi_I \circ \phi$.

Teorema 2.27. *Seja $\phi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R} \times_f \mathbb{R}^n$ uma hipersuperfície rotacional com função ângulo $|\theta| < 1$. Então, $(\Sigma^n, g, h, u, \mu, \lambda)$ possui uma estrutura gradiente Einstein-type se, e somente se, as funções f, h, λ, μ, u verificam:*

(i) *Se $u = u_I \circ \pi_I$, então*

$$\begin{aligned} \lambda = & -(1 - \theta^2)(\log f)''(h) - (1 - \theta^2)(n - 1)(\log(f)'(h))^2 \\ & + \left(1 - \theta^2 - (2n + 3)\theta \frac{\sqrt{1 - \theta^2}}{\sigma} + \frac{\theta\theta'}{\sqrt{1 - \theta^2}}\right) \log(f)'(h) + \frac{\theta\sqrt{1 - \theta^2} - \theta'}{\sigma} \\ & + (n - 2) \frac{(1 - \theta^2)}{\sigma^2}, \end{aligned} \quad (2-37)$$

$$\begin{aligned} \mu = & - \left(1 - (n + 4) \frac{\theta}{\sigma\sqrt{1 - \theta^2}} - (n - 2)\theta\theta'(1 - \theta^2)^{3/2}\right) (\log(f))'(h) \\ & - \frac{(\theta\sqrt{1 - \theta^2} - (n - 2)\theta')}{\sigma(1 - \theta^2)} + \theta\theta'(1 - \theta^2)^{3/2} - \alpha \frac{(u')^2}{1 - \theta^2} \\ & - \frac{n - 2}{\sigma^2} - (n - 2)(\log(f))''(h), \end{aligned} \quad (2-38)$$

$$\begin{aligned} h &= \int^s \sqrt{1 - \theta^2} dw + c_1, \\ u &= \int^s c_2 e^{\int^s \sqrt{1 - \theta^2} dw} dw + c_3. \end{aligned} \quad (2-39)$$

(ii) *Se $u = u_{\mathbb{R}^n} \circ \pi_{\mathbb{R}^n}$, então*

$$\begin{aligned} \lambda = & -(1 - \theta^2)(\log f)''(h) - (1 - \theta^2)(n - 1)(\log(f)'(h))^2 \\ & + \left(1 - \theta^2 - (2n + 3)\theta \frac{\sqrt{1 - \theta^2}}{\sigma} + \frac{\theta\theta'}{\sqrt{1 - \theta^2}}\right) \log(f)'(h) \\ & + \frac{\theta\sqrt{1 - \theta^2} - \theta'}{\sigma} + (n - 2) \frac{(1 - \theta^2)}{\sigma^2} - \frac{\alpha(u')^2}{\sigma^2}, \end{aligned} \quad (2-40)$$

$$\begin{aligned}
\mu &= -(n-2)(\log(f))''(h) - \frac{(\theta\sqrt{1-\theta^2} - (n-2)\theta')}{\sigma(1-\theta^2)} + \theta\theta'(1-\theta^2)^{3/2} \\
&\quad - \left(1 - (n+4)\frac{\theta}{\sigma\sqrt{1-\theta^2}} - (n-2)\theta\theta'(1-\theta^2)^{3/2}\right) (\log(f))'(h) \\
&\quad - \frac{n-2}{\sigma^2} + \alpha \frac{(u')^2}{(1-\theta^2)\sigma^2},
\end{aligned} \tag{2-41}$$

$$\begin{aligned}
h &= \int^s \sqrt{1-\theta^2} dw + c_1, \\
u(v_k) &= c_4 v_k + c_5,
\end{aligned} \tag{2-42}$$

onde c_1, c_2, c_3, c_4 e $c_5 \in \mathbb{R}$.

Prova. Inicialmente, considere $u = u_I \circ \pi_I$. Logo, a equação (2-12) do Teorema 2.26 torna-se

$$\frac{u''}{u'} = \sqrt{1-\theta^2}. \tag{2-43}$$

Integrando (2-43) em relação a s , chegamos em (2-39). Sabemos que $du(\phi_{v_i}) = 0$, desta forma, o item (i) pode ser obtido substituindo (2-39) na equação (2-8). Agora, considere $u = u_{\mathbb{R}^n} \circ \pi_{\mathbb{R}^n}$, da equação (2-11) deduzimos que u depende de um único v_k para algum $k = \{1, \dots, n-1\}$, em outras palavras u é uma função de \mathbb{R} em \mathbb{R} . Portanto, da equação (2-12) segue que $u(v_k) = c_3 v_k + c_4$, onde $c_3, c_4 \in \mathbb{R}$. A conclusão segue diretamente do Teorema 2.26. \square

2.3.2 Estruturas gradiente Einstein-type rotacionais imersas em

$$\mathbb{R} \times_f \mathbb{S}^n$$

Nesta seção, apresentamos um resultado de classificação de hipersuperfícies rotacionais imersas em $\mathbb{R} \times_f \mathbb{S}^n$, quando estas possuem uma estrutura gradiente Einstein-type. Para isto, consideramos uma curva $\gamma \in \mathbb{R} \times_f \mathbb{S}^n$ parametrizada por comprimento de arco, e $\mathbb{R} \times_f \mathbb{S}^n \subset \mathbb{E}^{n+2}$.

Teorema 2.28. *Seja $\phi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R} \times_f \mathbb{S}^n = \overline{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície rotacional com função ângulo $|\theta| < 1$. Então, $(\Sigma^n, g, h, u, \mu, \lambda)$ possui estrutura gradiente Einstein-*

type, se, e somente se, o sistema de equações abaixo for satisfeito

$$\begin{aligned} \lambda = & -(n-1)(1-\theta^2)(\log f)''(h) - (n-1)(1-\theta^2)[(\log f)'(h)]^2 \\ & + (n-1)\theta \frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\sigma} \sin(\beta)(\log f)'(h) \\ & + \left[(n-1) \left(\theta[(\log f)'(h)] + \frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\sigma} \sin(\beta) \right) - \theta \right] \frac{\theta'}{\sqrt{1-\theta^2}} \\ & - \alpha \frac{|\tau_g u|^2}{1-\theta^2} - \mu(1-\theta^2), \end{aligned} \quad (2-44)$$

$$\begin{aligned} \lambda - \frac{f'(h)}{f(h)} + \theta \left(\frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\sigma} \sin(\beta) + \frac{f'(h)}{f(h)} \theta \right) = & (n-2) \left(\frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\sigma} \sin(\beta) - \frac{f'(h)}{f(h)} \theta \right)^2 \\ & - [f(h)^{-2} + (\log f)''] (1-\theta^2) + (\theta^2 - (n-1))((\log f)')^2 + \frac{(n-1)}{f(h)^2} \\ & + \frac{f'(h)}{f(h)} \theta \frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\sigma} \sin(\beta) + \frac{\theta'}{\sigma} \sin(\beta) + \frac{\theta'}{\sqrt{1-\theta^2}} \frac{f'(h)}{f(h)} \theta - \frac{\alpha}{\sigma^2} u^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{g_N}(\phi_{v_i}, \phi_{v_i}), \end{aligned} \quad (2-45)$$

$$u^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{g_N}(\phi_s, \phi_{v_i}) = 0, \quad (2-46)$$

$$u^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{g_N}(\phi_{v_i}, \phi_{v_j}) = 0, \quad \forall i \neq j, \quad (2-47)$$

$$\tau_g u = \sqrt{1-\theta^2} du(\phi_s). \quad (2-48)$$

Onde $\sigma = f(\alpha(s)) \cos(\beta(s))$.

Prova. A parametrização de um hipersuperfície de rotação Σ^n imersa em $\mathbb{R} \times_f \mathbb{S}^n$ associada a curva geratriz

$$\gamma(s) = (\alpha(s), \cos(\beta(s)), 0, \dots, 0, \sin(\beta(s))),$$

é dado por ([27], ver também [53])

$$\phi(s, v_1, \dots, v_{n-1}) = \alpha(s)\eta_1 + \cos(\beta(s))X(v_1, \dots, v_{n-1}) + \sin(\beta(s))\eta_{m+2},$$

onde

$$X(v_1, \dots, v_{n-1}) = (0, X_1(v_1, \dots, v_{n-1}), \dots, X_n(v_1, \dots, v_{n-1}), 0).$$

é a parametrização ortogonal da esfera descrita na seção anterior. Como γ está

parametrizada por comprimento de arco, isto é,

$$\alpha'(u)^2 + f(\alpha(u))^2 \beta'(u)^2 = 1, \quad u \in (t_0, t_1). \quad (2-49)$$

Tomando a derivada covariante de ϕ , obtemos que

$$\begin{aligned} \phi_s &= \alpha'(s)\eta_1 - \sin(\beta(s))\beta'(s)X(v_1, \dots, v_{n-1}) + \cos(\beta(s))\beta'(s)\eta_{n+2}, \\ \phi_{v_i} &= \cos(\beta(s))X_{v_i} \end{aligned}$$

então, a primeira forma fundamental é dada por

$$I = ds^2 + f(\alpha(s))^2 \cos(\beta(s))^2 dS^2,$$

onde dS^2 é a métrica padrão de \mathbb{S}^{n-1} . O vetor unitário normal a Σ^n a função ângulo são

$$N = f(\alpha(s))\beta'(s)\eta_1 + \frac{\sin(\beta(s))\alpha'(s)}{f(\alpha(s))}X - \frac{\cos(\beta(s))\alpha'(s)}{f(\alpha(s))}\eta_{n+2},$$

e

$$\theta = \langle N, \partial_t \rangle = f(\alpha(s))\beta'(s). \quad (2-50)$$

De forma similar ao que foi feito em $\mathbb{R} \times_f \mathbb{R}^n$ nós computamos os autovetores do operador de forma A_N de Σ^n em $\mathbb{R} \times_f \mathbb{S}^n$. Logo,

$$\langle A_N \phi_s, \phi_s \rangle = \left(-\frac{f'}{f}\theta - \frac{\theta'}{\sqrt{1-\theta^2}} \right) g(\phi_s, \phi_s),$$

e

$$\begin{aligned} \langle A_N \phi_{v_i}, \phi_{v_i} \rangle &= - \left(\frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\sigma} \sin(\beta(s)) + \frac{f'(\alpha(s))}{f(\alpha(s))}\theta \right) g(\phi_{v_i}, \phi_{v_i}) \\ \sigma &= f(\alpha(s))\cos(\beta(s)). \end{aligned} \quad (2-51)$$

Note que, no caso particular em que $X = \phi_s, Y = \phi_{v_i}$ e $X = \phi_{v_i}, Y = \phi_{v_j}$, $i \neq j$, a ortogonalidade de X, Y , a expressão da função altura e a equação de Gauss, implicam que $u^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{g_N}(\phi_{v_s}, \phi_{v_i}) = 0$ e $u^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{g_N}(\phi_{v_i}, \phi_{v_j}) = 0$. Portanto, basta aplicar a Proposição (2.1) para o par de campos $X = Y = \phi_s$ e $X = Y = \phi_{v_i}$.

Para $X = Y = \phi_s$, obtemos que

$$\begin{aligned}
Ric^u(\phi_s, \phi_s) &= \left(\lambda - \frac{f'(h)}{f(h)} \right) g(\phi_s, \phi_s) + \left(\mu + \frac{f'(h)}{f(h)} \right) dh \otimes dh(\phi_s, \phi_s) \\
&\quad - \theta g(A(\phi_s), \phi_s) \\
&= \lambda - \frac{f'(h)}{f(h)} + \left(\mu + \frac{f'(h)}{f(h)} \right) (1 - \theta^2) \\
&\quad - \theta g \left(-\frac{f'(\zeta(s))}{f(\zeta(s))} \theta - \frac{\theta'}{\sqrt{1 - \theta^2}} \phi_s, \phi_s \right) \\
&= \lambda + \mu(1 - \theta^2) + \frac{\theta\theta'}{\sqrt{1 - \theta^2}}.
\end{aligned} \tag{2-52}$$

Agora, para $X = Y = \phi_{v_i}$, com $1 \leq i \leq n - 1$, segue que

$$\begin{aligned}
Ric^u(\phi_{v_i}, \phi_{v_i}) &= \left(\lambda - \frac{f'(h)}{f(h)} \right) g(\phi_{v_i}, \phi_{v_i}) + \left(\mu + \frac{f'(h)}{f(h)} \right) dh \otimes dh(\phi_{v_i}, \phi_{v_i}) \\
&\quad - \theta g(A(\phi_{v_i}), \phi_{v_i}) \\
&= \left(\lambda - \frac{f'(h)}{f(h)} + \theta \left(\frac{\sqrt{1 - \theta^2}}{\sigma} \sin(\beta) + \frac{f'(h)}{f(h)} \theta \right) \right) g(\phi_{v_i}, \phi_{v_i}).
\end{aligned} \tag{2-53}$$

Por outro lado, para um referencial ortornormal local $\{E_i\}_{i=1}^n$ de $\mathfrak{X}(\Sigma)$ segue da equação de Gauss que

$$\begin{aligned}
Ric^u(\phi_s, \phi_s) &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(\phi_s, E_i)\phi_s, E_i \rangle + nH \langle A\phi_s, \phi_s \rangle - \langle A\phi_s, A\phi_s \rangle - \alpha du \otimes du(\phi_s, \phi_s) \\
&= -(n-1)(1-\theta^2)(\log f)''(h) - (n-1)(1-\theta^2)[(\log f)'(h)]^2 \\
&\quad + (n-1)\theta \frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\sigma} \sin(\beta)(\log f)'(h) \\
&\quad + \left[(n-1) \left(\theta[(\log f)'(h)] + \frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\sigma} \sin(\beta) \right) \right] \frac{\theta'}{\sqrt{1-\theta^2}} - \alpha \frac{|\tau_g u|^2}{1-\theta^2},
\end{aligned} \tag{2-54}$$

e

$$\begin{aligned}
Ric^u(\phi_{v_i}, \phi_{v_i}) &= (n-2) \left(\frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\sigma} \sin(\beta) - \frac{f'(h)}{f(h)} \theta \right)^2 \\
&\quad - [f(h)^{-2} + (\log f)''(h)] (1-\theta^2) + (\theta^2 - (n-1))((\log f)'(h))^2 \\
&\quad + \frac{f'(h)}{f(h)} \theta \frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\sigma} \sin(\beta) + \frac{\theta'}{\sigma} \sin(\beta) \\
&\quad + \frac{\theta'}{\sqrt{1-\theta^2}} \frac{f'(h)}{f(h)} \theta - \frac{\alpha}{\sigma^2} u^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{g_N}(\phi_{v_i}, \phi_{v_i}).
\end{aligned} \tag{2-55}$$

Combinando as equações (2-52), (2-54) e (2-53), (2-55) nós concluímos o teorema. \square

2.3.3 Estruturas gradiente Einstein-type rotacionais imersas em $\mathbb{R} \times_f \mathbb{H}^n$

Com o objetivo de classificar estruturas gradiente Einstein-type rotacionais imersas em $\mathbb{R} \times_f \mathbb{H}^n$ definimos P^2 como o plano contendo a curva geratriz. Logo, de forma análoga aos casos anteriores, chegamos no seguinte resultado de classificação.

Teorema 2.29. *Seja $\phi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R} \times_f \mathbb{H}^n$ uma hipersuperfície rotacional com função ângulo $|\theta| < 1$. Então, $(\Sigma^n, g, h, u, \mu, \lambda)$ possui uma estrutura gradiente Einstein-type, se, e somente se, o sistema de equações abaixo for satisfeito.*

$$\begin{aligned} \lambda = & -(n-1)(1-\theta^2)(\log f)''(h) - (n-1)(1-\theta^2)[(\log f)'(h)]^2 \\ & - (n-1)\theta \frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\sigma} \xi(\beta)(\log f)'(h) \\ & + \left[(n-1) \left(\theta[(\log f)'(h)] - \frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\sigma} \xi(\beta) \right) - \theta \right] \frac{\theta'}{\sqrt{1-\theta^2}} \\ & - \alpha \frac{|\tau_g u|^2}{1-\theta^2} - \mu(1-\theta^2), \end{aligned} \quad (2-56)$$

$$\begin{aligned} \lambda - \theta \left(\frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\sigma} \xi(\beta) - \frac{f'(h)}{f(h)} \theta \right) = & (n-2) \left(\frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\sigma} \xi(\beta) - \frac{f'(h)}{f(h)} \theta \right)^2 \\ & + (1-\theta^2) [f(h)^{-2} - (\log f)''] + \frac{f'(h)}{f(h)} + (\theta^2 - (n-1))((\log f)')^2 \\ & - \frac{f'(h)}{f(h)} \theta \frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\sigma} \xi(\beta) - \frac{\theta'}{\sigma} \xi(\beta) + \frac{\theta'}{\sqrt{1-\theta^2}} \frac{f'(h)}{f(h)} \theta - \frac{\alpha}{\sigma^2} u^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{g_N}(\phi_{v_i}, \phi_{v_i}), \end{aligned} \quad (2-57)$$

$$u^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{g_N}(\phi_s, \phi_{v_i}) = 0, \quad (2-58)$$

$$u^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{g_N}(\phi_{v_i}, \phi_{v_j}) = 0, \quad \forall i \neq j, \quad (2-59)$$

$$\tau_g u = \sqrt{1-\theta^2} du(\phi_s). \quad (2-60)$$

Onde $\xi(\beta) = \sinh(\beta(s))$, $\sigma = f(\alpha(s)) \cosh(\beta(s))$ se P^2 é Riemanniano, $\xi(\beta) = \cosh(\beta(s))$, $\sigma = f(\alpha(s)) \sinh(\beta(s))$ se P^2 é Lorentziano e $\xi(\beta) = -\beta(s)$, $\sigma = f(\alpha(s))\beta(s)$ se P^2 é degenerado.

Prova. Primeiramente, considere o caso em que P^2 é Riemanniano. Desta forma a parametrização de uma hipersuperfície de rotação Σ^n imersa em $\mathbb{R} \times_f \mathbb{H}^n$ associada a curva

$$\gamma(s) = (\alpha(s), \cosh(\beta(s)), 0 \dots, 0, \sinh(\beta(s))),$$

é dada por ([27], veja [53])

$$\phi(s, v_1, \dots, v_{n-1}) = \alpha(s)\eta_1 + \cosh(\beta(s))\zeta(v_1, \dots, v_{n-1}) + \sinh(\beta(s))\eta_{n+2},$$

onde

$$\zeta(v_1, \dots, v_{n-1}) = (0, \zeta_1(v_1, \dots, v_{n-1}), \dots, \zeta_n(v_1, \dots, v_{n-1}), 0),$$

é uma parametrização ortogonal do espaço hiperbólico \mathbb{H}^{n-1} . Assuma que γ é parametrizada por comprimento de arco, isto é,

$$\alpha'(s)^2 + f(\alpha(s))^2\beta'(s)^2 = 1, \quad s \in (t_0, t_1). \quad (2-61)$$

Tomando a derivada covariante de ϕ , obtemos

$$\phi_s = \alpha'(s)\eta_1 + \sinh(\beta(s))\beta'(s)\zeta(v_1, \dots, v_{n-1}) + \cosh(\beta(s))\beta'(s)\eta_{n+2},$$

$$\phi_{v_i} = \cosh(\beta(s))\zeta_{v_i},$$

logo, a partir de um calculo simples obtemos a expressão da primeira forma fundamenta de Σ^n ,

$$I = ds^2 + f(\alpha(s))^2 \cosh(\beta(s))^2 dH^2,$$

onde dH^2 é a métrica padrão de \mathbb{H}^{n-1} . O vetor unitário normal a Σ e a função ângulo são dados por

$$N = f(\alpha(s))\beta'(s)\eta_1 + \frac{\sinh(\beta(s))\alpha'(s)}{f(\alpha(s))}\zeta + \frac{\cosh(\beta(s))\alpha'(s)}{f(\alpha(s))}\eta_{n+2},$$

e

$$\theta = \langle N, \partial_s \rangle = f(\alpha(s))\beta'(s). \quad (2-62)$$

Analogamente aos casos anteriores, é possível calcular os autovetores de A_N em $\phi : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R} \times_f \mathbb{H}^n$, dados por

$$\begin{aligned}\langle A_N \phi_s, \phi_s \rangle &= \langle -\bar{\nabla}_{\phi_s} N, \phi_s \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\phi_s} \phi_s, N \rangle = -\frac{f'}{f} \theta - \frac{\theta'}{\sqrt{1-\theta^2}}, \\ \langle A_N \phi_{v_i}, \phi_{v_i} \rangle &= \left(\frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\sigma} \sinh(\beta(s)) - \frac{f'(\alpha(s))}{f(\alpha(s))} \theta \right).\end{aligned}\quad (2-63)$$

Agora, suponha que Σ^n é uma estrutura gradiente Einstein-Type. Segue da Proposição 2.1 para $\theta \in (0, 1)$ e $X = Y = \phi_s$ que

$$\begin{aligned}Ric^u(\phi_s, \phi_s) &= \left(\lambda - \frac{f'(h)}{f(h)} \right) g(\phi_s, \phi_s) + \left(\mu + \frac{f'(h)}{f(h)} \right) dh \otimes dh(\phi_s, \phi_s) \\ &\quad - \theta g(A(\phi_s), \phi_s) \\ &= \lambda - \frac{f'(h)}{f(h)} + \left(\mu + \frac{f'(h)}{f(h)} \right) (1 - \theta^2) \\ &\quad - \theta g \left(-\frac{f'(\zeta(s))}{f(\zeta(s))} \theta - \frac{\theta'}{\sqrt{1-\theta^2}} \phi_s, \phi_s \right) \\ &= \lambda + \mu(1 - \theta^2) + \frac{\theta\theta'}{\sqrt{1-\theta^2}}.\end{aligned}\quad (2-64)$$

Para $X = Y = \phi_{v_i}$, com $1 \leq i \leq n-1$, temos que

$$\begin{aligned}Ric^u(\phi_{v_i}, \phi_{v_i}) &= \left(\lambda - \frac{f'(h)}{f(h)} \right) g(\phi_{v_i}, \phi_{v_i}) + \left(\mu + \frac{f'(h)}{f(h)} \right) dh \otimes dh(\phi_{v_i}, \phi_{v_i}) \\ &\quad - \theta g(A(\phi_{v_i}), \phi_{v_i}) \\ &= \lambda - \frac{f'(h)}{f(h)} - \theta \left(\frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\sigma} \sinh(\beta) - \frac{f'(h)}{f(h)} \theta \right).\end{aligned}\quad (2-65)$$

Por outro lado, da equação de Gauss temos que

$$\begin{aligned}Ric^u(\phi_s, \phi_s) &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(\phi_s, E_i) \phi_s, E_i \rangle + nH \langle A\phi_s, \phi_s \rangle - \langle A\phi_s, A\phi_s \rangle - \alpha du \otimes du(\phi_s, \phi_s) \\ &= -(n-1)(1-\theta^2)(\log f)''(h) - (n-1)(1-\theta^2) [(\log f)'(h)]^2 \\ &\quad - (n-1)\theta \frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\sigma} \sinh(\beta) (\log f)'(h) \\ &\quad + \left[(n-1) \left(\theta [(\log f)'(h)] - \frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\sigma} \sinh(\beta) \right) \right] \frac{\theta'}{\sqrt{1-\theta^2}} \\ &\quad - \alpha \frac{|\tau_g u|^2}{1-\theta^2},\end{aligned}\quad (2-66)$$

e

$$\begin{aligned}
Ric^u(\phi_{v_i}, \phi_{v_i}) &= (n-2) \left(\frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\sigma} \xi(\beta) - \frac{f'(h)}{f(h)} \theta \right)^2 \\
&\quad + (1-\theta^2) [f(h)^{-2} - (\log f)''] + (\theta^2 - (n-1)) ((\log f)')^2 \\
&\quad - \frac{f'(h)}{f(h)} \theta \frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\sigma} \sinh(\beta) - \frac{\theta'}{\sigma} \sinh(\beta) \\
&\quad + \frac{\theta'}{\sqrt{1-\theta^2}} \frac{f'(h)}{f(h)} \theta - \frac{\alpha}{\sigma^2} u^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{g_N}(\phi_{v_i}, \phi_{v_i}).
\end{aligned} \tag{2-67}$$

O caso Riemanniano segue da combinação das equações (2-64), (2-66), e (2-65), (2-67).

Em seguida, assumamos que P^2 is Lorentziano, sendo assim, a parametrização de uma hipersuperfície de rotação Σ^n imersa em $\mathbb{R} \times_f \mathbb{H}^n$ com curva geratriz parametrizada por comprimento de arco

$$\gamma(s) = (\alpha(s), \cosh(\beta(s)), 0, \dots, 0, \sinh(\beta(s))),$$

é dada por

$$\phi(s, v_1, \dots, v_{n-1}) = \alpha(s)\eta_1 + \sinh(\beta(s))\zeta(v_1, \dots, v_{n-1}) + \cosh(\beta(s))\eta_{n+2}.$$

A métrica induzida em Σ^n tem a forma

$$I = ds^2 + f(\alpha(s))^2 \sinh(\beta(s))^2 dS^2,$$

onde dS^2 é a métrica padrão de \mathbb{S}^{n-1} .

O vetor unitário normal a Σ^n e a função ângulo são dados por

$$N = f(\alpha(u))\beta'(u)\eta_1 + \frac{\cosh(\beta(u))\alpha'(u)}{f(\alpha(u))}\zeta + \frac{\sinh(\beta(u))\alpha'(u)}{f(\alpha(u))}\eta_{n+2},$$

e

$$\theta = \langle N, \partial_u \rangle = f(\alpha(u))\beta'(u). \tag{2-68}$$

Calculando os autovetores de A_N em Σ^n chegamos em

$$\langle A_N \phi_s, \phi_s \rangle = \langle -\bar{\nabla}_{\phi_s} N, \phi_s \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\phi_s} \phi_s, N \rangle = -\frac{f'}{f} \theta,$$

e

$$A_N \phi_{v_i} = \left(\frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\sigma} \cosh(\beta(s)) - \frac{f'(\alpha(s))}{f(\alpha(s))} \theta \right) \phi_{v_i}. \tag{2-69}$$

Agora, suponha que Σ^n possua uma estrutura gradiente Einstein-type. Então, da Proposição 2.1 e da equação de Gauss obtemos que

$$\begin{aligned} \lambda &= -(n-1)(1-\theta^2)(\log f)''(h) - (n-1)(1-\theta^2)[(\log f)'(h)]^2 \\ &\quad - (n-1)\theta \frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\sigma} \cosh(\beta)(\log f)'(h) \\ &\quad + \left[(n-1) \left(\theta[(\log f)'(h)] - \frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\sigma} \cosh(\beta) \right) - \theta \right] \frac{\theta'}{\sqrt{1-\theta^2}} \\ &\quad - \alpha \frac{|\tau_g u|^2}{1-\theta^2} - \mu(1-\theta^2), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lambda - \theta \left(\frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\sigma} \cosh(\beta) - \frac{f'(h)}{f(h)} \theta \right) &= (n-2) \left(\frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\sigma} \cosh(\beta) - \frac{f'(h)}{f(h)} \theta \right)^2 \\ &\quad + (1-\theta^2) [f(h)^{-2} - (\log f)''] + \frac{f'(h)}{f(h)} + (\theta^2 - (n-1))((\log f)')^2 \\ &\quad - \frac{f'(h)}{f(h)} \theta \frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\sigma} \cosh(\beta) - \frac{\theta'}{\sigma} \cosh(\beta) + \frac{\theta'}{\sqrt{1-\theta^2}} \frac{f'(h)}{f(h)} \theta - \frac{\alpha}{\sigma^2} u^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{g_N}(\phi_{v_i}, \phi_{v_i}). \end{aligned}$$

Finalmente, considere que P^2 é degenerado, logo, a parametrização de Σ^n imersa em $\mathbb{R} \times_f \mathbb{H}^n$ com curva geratriz parametrizada por comprimento de arco

$$\gamma(s) = (\alpha(s), \beta(s), 0, \dots, 0, -\frac{1}{2\beta(s)}),$$

com $\beta(s) > 0$ e

$$\alpha'(s)^2 + f(\alpha(s))^2 (\ln(\beta(s)))'^2 = 1,$$

é dada por

$$\phi(s, v_3, \dots, v_{n+1}) = \alpha(s)\eta_1 + \beta(s)\eta_2 + \beta(s)v - \left(\frac{1}{2\beta(s)} - \frac{\beta(s)}{2} \sum_{i=3}^{n+1} v_i^2 \right) \eta_{n+2},$$

onde $v = (v_3, \dots, v_{n+1})$. A métrica induzida em Σ^n tem a forma

$$I = ds^2 + f(\alpha(s))^2 \beta(s)^2 dR^2,$$

aqui dR^2 é a métrica padrão de \mathbb{R}^{n-1} .

O vetor unitário normal a Σ^n é dado por

$$N = \frac{-\beta'(s)(f\alpha(s))}{\beta(s)}\eta_1 + \frac{\beta(s)\alpha'(s)}{f(\alpha(s))}\eta_2 + \frac{\beta(s)\alpha'(s)}{f(\alpha(s))}v + \frac{1}{f(\alpha(s))} \left(\frac{\alpha'(s)}{2\beta(s)} - \frac{\beta(s)\alpha'(s)}{2} \sum_{i=3}^{n+1} v_i^2 \right),$$

e função angulo

$$\theta = \langle N, \partial_s \rangle = \frac{-\beta'(s)(f\alpha(s))}{\beta(s)}. \quad (2-70)$$

Neste caso, o operador de forma A_N de Σ^n pode ser calculado de maneira similar aos casos anteriores, chegando em

$$A_N \phi_s = \left(-\frac{f'(\alpha(s))}{f(\alpha(s))} \theta - \frac{\theta'}{\sqrt{1-\theta^2}} \right) \phi_s, \quad (2-71)$$

e

$$A_N \phi_{v_i} = - \left(\frac{\sqrt{1-\theta^2}}{\sigma} \beta(s) + \frac{f'(\alpha(s))}{f(\alpha(s))} \theta \right) \phi_{v_i}, \quad \sigma = f(\alpha(s))\beta(s). \quad (2-72)$$

Assumindo que Σ^n possui uma estrutura gradiente Einstein-type juntamente com a Proposição 2.1 e a equação de Gauss concluímos a prova do teorema. \square

2.4 Exemplos de estruturas gradiente Einstein-type

Proseguindo, apresentamos exemplos de hipersuperfície com estrutura gradiente Einstein-type imersa em $I \times_f M^n$. Alguns dos exemplos apresentados nesta seção foram construídos como aplicação direta do Teorema 2.27.

Exemplo 2.30. *Seja (\mathbb{S}^n, g) uma esfera usual imersa no espaço Euclidiano $((0, +\infty) \times \mathbb{S}^n, g_0)$, onde $g_0 = dt^2 + t^2 g_1$, g_1 é a métrica usual da n -esfera. Considere $u = Id : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$. Se tomarmos a função altura da esfera como sendo a função potencial, então (\mathbb{S}^n, g) possui uma estrutura gradiente Einstein-type com função soliton dada por $\lambda = n + 1 - \alpha$.*

Exemplo 2.31. *Considere $\Sigma^n = (0, +\infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$ imerso em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ equipado com o tensor métrico*

$$g = ds^2 + \left(2 \arctan \left(\tanh \left(\frac{s}{2} \right) \right) \right)^2 dv^2,$$

e função ângulo $\theta(s) = \sqrt{1 - \tanh(s)^2}$. Portanto, se tomarmos um número real $\alpha > 0$ e funções h, u, μ, λ dadas por

$$\begin{aligned}
h(s, v_1, \dots, v_{n-1}) &= \log(\cosh(s)), & u(s, v_1, \dots, v_{n-1}) &= \sinh(s), \\
\mu(s, v_1, \dots, v_{n-1}) &= \left[2 \arctan \left(\tanh \left(\frac{s}{2} \right) \right) \operatorname{csch}(s) - 1 \right] \times \\
&\quad \times \frac{\left[n - 2 + 2 \arctan \left(\tanh \left(\frac{s}{2} \right) \right) \operatorname{csch}(s) \right]}{4 \arctan \left[\tanh \left(\frac{s}{2} \right) \right]^2} \\
&\quad - \alpha \cosh(s)^2 \coth(s)^2 \\
\lambda(s, v_1, \dots, v_{n-1}) &= \frac{\operatorname{sech}(s) \left[4 \arctan \left(\tanh \left(\frac{s}{2} \right) \right) + (n - 2) \sinh(s) \right] \tanh(s)}{4 \arctan \left(\tanh \left(\frac{s}{2} \right) \right)^2},
\end{aligned}$$

deduzimos que Σ^n possui uma estrutura gradiente Einstein-type com a função altura como função potencial (veja a Figura 2.1).

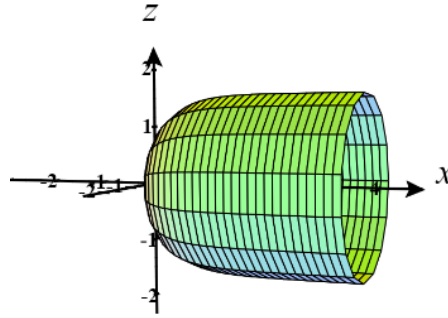


Figura: 2.1: Estrutura gradiente Einstein-type rotacional imersa no espaço Euclidiano.

Exemplo 2.32. Considere Σ^n uma hipersuperfície rotacionalmente simétrica em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ com função ângulo constante. A partir de [29], Σ^n pode ser expressa pelo produto Riemanniano $(0, +\infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$ equipado com o tensor métrico $g = ds^2 + \sigma(s)^2 dv^2$, onde $\sigma(s) = \theta s + c_1$. Portanto, se escolhermos funções h, u, μ e λ da seguinte forma

$$\begin{aligned}
h(s, v_1, \dots, v_{n-1}) &= \sqrt{1 - \theta^2} s + c_3, & u(s, v_1, \dots, v_{n-1}) &= \frac{c_1 e^{\sqrt{1 - \theta^2} s}}{\sqrt{1 - \theta^2}} + c_2, \\
\lambda(s, v_1, \dots, v_{n-1}) &= \frac{(\theta s + c_4) \theta \sqrt{1 - \theta^2} + (n - 2)(1 - \theta^2)}{(\theta s + c_4)^2}, \\
\mu(s, v_1, \dots, v_{n-1}) &= \frac{-(n - 2)}{(\theta s + c_4)^2} - \frac{\theta \sqrt{1 - \theta^2}}{(1 - \theta^2)(\theta s + c_4)} - \alpha \frac{c_1^2 e^{2\sqrt{1 - \theta^2} s}}{1 - \theta^2},
\end{aligned}$$

onde $\alpha > 0$ e $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$. Nós deduzimos que Σ^n possui uma estrutura gradiente Einstein-type com função potencial dada pela função altura.

Exemplo 2.33. Considere $\Sigma^n = (0, \pi) \times \mathbb{S}^{n-1}$ imersa em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ equipada com tensor métrico $g = ds^2 + (s/2 + \sin(2s)/4)^2 dv^2$, e função ângulo $\theta(s) = \cos(s)^2$. Portanto, escolhendo um número real $\alpha > 0$ e funções h, u, μ, λ dadas por

$$h(s, v_1, \dots, v_{n-1}) = -\frac{\sqrt{1 - \cos^4(s)} \left(\left(\sqrt{\cos(2s) + 3} \right) \cot(s) \right)}{2\sqrt{\cos(2s) + 3}} - \frac{\sqrt{1 - \cos^4(s)} \sqrt{2} \csc(s) \log \left(\sqrt{2} \cos(s) + \sqrt{\cos(2s) + 3} \right)}{2\sqrt{\cos(2s) + 3}},$$

$$\mu(s, v_1, \dots, v_{n-1}) = -\frac{1}{(1 - \cos(s)^4)} \left(\frac{2 \cos(s)^2 \sqrt{1 - \cos(s)^4}}{s + \cos(s) \sin(s)} - 2 \cos(s) \sin(s) \left(\frac{\cos(s)^2}{\sqrt{1 - \cos(s)^4}} + \frac{2(n-1)}{s + \cos(s) \sin(s)} \right) + \frac{16(n-2 - \alpha c_1^2 - (n-2) \cos(s)^4) + 8(s + \cos(s) \sin(s)) \sin(2s)}{(2s + \sin(2s))^2} \right),$$

$$\lambda(s, v_1, \dots, v_{n-1}) = \frac{16(n-2 - \alpha c_1^2 - (n-2) \cos(s)^4) + 8(s + \cos(s) \sin(s)) \sin(2s)}{(2s + \sin(2s))^2} + \frac{2 \cos(s)^2 \sqrt{1 - \cos(s)^4}}{(s + \cos(s) \sin(s))},$$

$$u(s, v_1, \dots, v_{n-1}) = c_1 v_k + c_2,$$

para algum $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Deduzimos que Σ^n possui uma estrutura gradiente Einstein-type com função potencial dada pela função altura (Veja Figura 2.2).

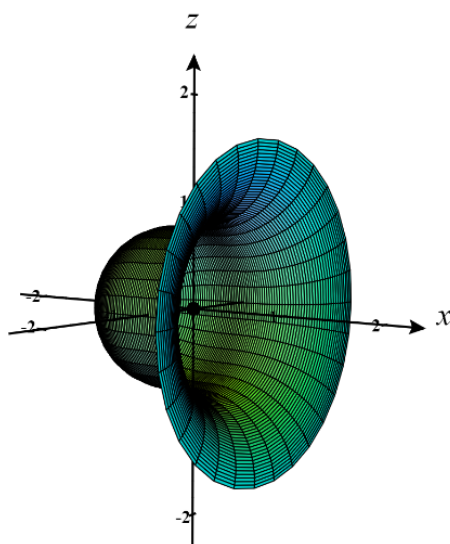


Figura: 2.2: Estrutura gradiente Einstein-type rotacional imersa no espaço Euclidiano.

Gradiente Ricci-Harmônico Soliton

Neste capítulo, focaremos nos gradiente Ricci-harmônico solitons, os quais correspondem a soluções autosimilares para o sistema (0-1). Após a introdução de GRHS, muitos esforços foram dedicados ao entendimento de sua geometria. Por exemplo, em [66], os autores provaram que qualquer GRHS shrinking ou steady é um gradiente Ricci soliton se a curvatura seccional de N (variedade de chegada da aplicação u) for limitada superiormente por uma constante. Por outro lado, em [41], os autores forneceram resultados de trivialidade para a função potencial e a aplicação harmônica u usando a compacidade de M . Os resultados deste capítulo poderão ser conferidos em [13].

3.1 GRHS Produto Torcido

Os autores em [26] estudaram gradiente Ricci soliton produto torcido e provaram que a função torção ou é constante ou a função potencial satisfaz

$$h = h_B \circ \pi, \quad h_B \in C^\infty(B). \quad (3-1)$$

Daqui em diante, iremos considerar a aplicação u como sendo uma função suave $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ e mostraremos que a decomposição (3-1) aplicada a um GRHS produto torcido é equivalente a uma decomposição de u . Mais precisamente, obtemos o seguinte

Proposição 3.1. *Seja $(B^n \times_f F^m, g, h, u, \lambda)$ um GRHS com u não constante, então em uma vizinhança \mathcal{V} de um ponto $(p, q) \in B^n \times F^m$ a aplicação u pode ser representado como $u = u_B \circ \pi$ ou $u = u_F \circ \sigma$ se, e somente se, $h = h_B \circ \pi$.*

Motivados pela proposição acima, consideramos o estudo da aplicação u em dois casos, a saber $u = u_B \circ \pi$ ou $u = u_F \circ \sigma$. Nesse sentido, obtemos uma condição necessária e suficiente para a existência de GRHS no produto torcido.

Teorema 3.2. *Seja $(B^n \times_f F^m, g)$ uma variedade produto torcido. Então, temos as seguintes condições:*

(a) *Se $u = u_B \circ \pi$, então $(B^n \times_f F^m, g, h, u, \lambda)$ é um GRHS se, e somente se,*

$$\left\{ \begin{array}{l} Ric_{g_B} - \frac{m}{f} Hess_{g_B} f + Hess_{g_B} h_B - \alpha \nabla_{g_B} u_B \otimes \nabla_{g_B} u_B = \lambda g_B, \\ \Delta_\omega u_B = 0 \text{ in } B, \end{array} \right. \quad (3-2)$$

F é Einstein com $Ric_{g_F} = \varrho g_F$,

$$f \Delta_{g_B} f + (m-1) |\nabla_{g_B} f|^2 + \lambda f^2 - f \nabla_{g_B} f(h_B) = \varrho. \quad (3-3)$$

(b) *Se $u = u_F \circ \sigma$, então $(B^n \times_f F^m, g, h, u, \lambda)$ é um GRHS se, e somente se,*

$$Ric_{g_B} - \frac{m}{f} Hess_{g_B} f + Hess_{g_B} h_B = \lambda g_B, \quad (3-4)$$

$$F \text{ é Einstein harmônico com } \left\{ \begin{array}{l} Ric_{g_F} - \alpha \nabla_{g_F} u_F \otimes \nabla_{g_F} u_F = \varrho g_F, \\ \Delta_{g_F} u_F = 0, \end{array} \right.$$

$$f \Delta_{g_B} f + (m-1) |\nabla_{g_B} f|^2 + \lambda f^2 - f \nabla_{g_B} f(h_B) = \varrho, \quad (3-5)$$

onde Ric_{g_B} é o tensor de Ricci de B , Ric_{g_F} é o tensor de Ricci de F e $\Delta_\omega = \Delta - \langle \nabla, \nabla \omega \rangle$ com $\omega = h - m \nabla \log(f)$.

Observação 3.3. *O Teorema 3.2 é uma generalização do Corolário 3 obtido em [48].*

Prosseguindo, obtemos alguns resultados de trivialidade para a função torção, função potencial e aplicação u por meio do princípio do máximo.

Teorema 3.4. *Seja $(B^n \times_f F^m, g, h, u, \lambda)$ um GRHS com base Riemanniana.*

(a) *Se $u_B \in C^\infty(B)$ atinge um máximo em B^n , então $u = u_B \circ \pi$ é uma função constante, i.e., $(B^n \times_f F^m, g, h, u, \lambda)$ é um gradiente Ricci soliton.*

(b) *Se $\lambda \geq 0$, h_B atinge um máximo em B^n e $\frac{m \Delta_{g_B} f}{f} \geq \text{scal}_{g_B}$, então $h = h_B \circ \pi$ é uma função constante, i.e., $(B^n \times_f F^m, g, h, u, \lambda)$ é uma variedade Einstein harmônica.*

- (c) Se f_B atinge um máximo em B^n e $\lambda \leq \frac{\rho}{f^2}$, então $f = f_B \circ \pi$ é uma função constante, i.e., $(B^n \times_f F^m, g, h, u, \lambda)$ é uma variedade produto Riemanniano. (O mesmo ocorre se f_B atinge um mínimo e $\lambda \geq \frac{\rho}{f^2}$),

onde scal_{g_B} é a curvatura escalar de B .

Corolário 3.5. *Seja $(B^n \times_f F^m, g, h, u, \lambda)$ um GRHS com base Riemannian compacta.*

- (a) *Se $u_B \in C^\infty(B)$, então $(B^n \times_f F^m, g, h, u, \lambda)$ é um gradiente Ricci soliton.*
- (b) *Se $\lambda \geq 0$, e $\frac{m\Delta_{g_B} f}{f} \geq \text{scal}_{g_B}$, então $(B^n \times_f F^m, g, h, u, \lambda)$ é uma variedade Einstein harmônica.*
- (c) *Se $\lambda \leq \frac{\rho}{f^2}$ em B , então $(B^n \times_f F^m, g, h, u, \lambda)$ é uma variedade produto.*

O produto torcido provou sua eficiência na construção de novos exemplos de variedades com certas características geométricas. Por exemplo, no escopo de soluções invariantes, Tokura *et al.* [61] forneceu exemplos explícitos de gradiente Yamabe sólitons geodesicamente completos. Por outro lado, no mesmo contexto de solução invariante, Sousa *et al.* [26] apresentou exemplos de gradiente Ricci solitons steady não conformemente planos.

A seguir, focamos nossa atenção no produto torcido $(B \times_f F, g)$ onde a base ou a fibra é conformemente plana. No caso em que $u = u_B \circ \pi$, consideramos o produto torcido GRHS com a base conforme a um espaço semi-Euclidiano n -dimensional. E uma métricas invariantes sob a ação de um grupo de translação $(n-1)$ -dimensional. Mais precisamente, considere a métrica semi-Euclidiana $(g_0)_{ij} = \epsilon_i \delta_{ij}$ em coordenadas locais, $x_B = (x_1, \dots, x_n)$ de \mathbb{R}^n , onde $\epsilon_i = \pm 1$. Para uma escolha arbitrária de um vetor não nulo $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ definimos a função $\xi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\xi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n v_i x_i,$$

e procuraremos por funções suaves $h, f, \varphi : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f, \varphi > 0$ tais que as funções compostas $h = h \circ \xi$, $f = f \circ \xi$, $\varphi = \varphi \circ \xi : \xi^{-1}(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, satisfazem (1-8) com $M = \xi^{-1}(a, b) \times F^m$ e tensor métrico

$$g = \frac{1}{\varphi^2} g_0 + f^2 g_F. \quad (3-6)$$

O próximo resultado nos dá uma condição necessária e suficiente para a existência de produto torcido GRHS com base conforme a um espaço semi-Euclidiano invariante pela ação de um $(n-1)$ -dimensional grupo de translação quando $u = u_B \circ \pi$.

Teorema 3.6. $(\mathbb{R}^n \times_f F^m, g, h, u = u_B \circ \pi, \lambda)$ equipado com o tensor métrico (3-6) é um GRHS com aplicação u não constante, e constante de Einstein da fibra ρ se, e somente se, as funções $f = f \circ \xi$, $h = h \circ \xi$, $\varphi = \varphi \circ \xi$, $u = u \circ \xi$ verificam o sistema abaixo:

$$(n-2)\frac{\varphi''}{\varphi} - m\frac{f''}{f} - 2m\frac{\varphi' f'}{\varphi f} + h'' + 2\frac{\varphi'}{\varphi}h' - \alpha(u')^2 = 0, \quad (3-7)$$

$$\left[\frac{\varphi''}{\varphi} - (n-1)\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 + m\frac{\varphi' f'}{\varphi f} - \frac{\varphi'}{\varphi}h' \right] \|v\|^2 = \frac{\lambda}{\varphi^2}, \quad (3-8)$$

$$\left[\frac{f''}{f} - (n-2)\frac{\varphi' f'}{\varphi f} + (m-1)\left(\frac{f'}{f}\right)^2 - \frac{f'}{f}h' \right] \|v\|^2 = \frac{\rho}{f^2\varphi^2} - \frac{\lambda}{\varphi^2}, \quad (3-9)$$

$$\left[u'' - (n-2)\frac{\varphi'}{\varphi}u' + m\frac{f'}{f}u' - u'h' \right] \|v\|^2 = 0. \quad (3-10)$$

Corolário 3.7. Sob as hipóteses do Teorema 3.6, se $\|v\|^2 = 0$, então, a quintupla $(\mathbb{R}^n \times_f F^m, g, h, u, \lambda)$ é um GRHS steady e F^m é Ricci plana, isto é, $\lambda = 0$ e $\rho = 0$.

Quando u é uma função constante, o sistema de EDOs do Teorema 3.6 reduz ao sistema estudado em [49].

No caso em que $u = u_F \circ \sigma$, consideramos o GRHS produto torcido $(\mathbb{R}^n, \varphi^{-2}g_0) \times_f (\mathbb{R}^m, \tau^{-2}g_0)$ com a base e a fibra conformes aos espaços semi-Euclidiano n -dimensional e m -dimensional respectivamente, e métricas invariantes sob a ação de um grupo de translação $(n-1)$ -dimensional e $(m-1)$ -dimensional respectivamente. Desta maneira, de forma similar ao que fizemos com a função ξ , definimos $\zeta : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\zeta(x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = \sum_{i=n+1}^{n+m} \beta_i x_i,$$

onde $\beta = (\beta_{n+1}, \dots, \beta_{n+m})$ é um vetor não nulo e $x_F = (x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) \in \mathbb{R}^m$.

Em seguida, obtemos condições para que as funções $h \circ \xi$, $f \circ \xi$, $u \circ \zeta$, $\varphi \circ \xi$, $\tau \circ \zeta$ satisfaça (1-8) com $M = \xi^{-1}(a, b) \times \zeta^{-1}(c, d)$ e tensor métrico

$$g = \frac{1}{\varphi^2}g_0 + f^2\frac{1}{\tau^2}g_0. \quad (3-11)$$

Teorema 3.8. $(\mathbb{R}^n \times_f \mathbb{R}^m, g, h, u = u_F \circ \sigma, \lambda)$ equipado com o tensor métrico (3-11) é um GRHS com u não constante e constante de Einstein harmônica da fibra ρ se, e somente se, as funções $f = f \circ \xi$, $h = h \circ \xi$, $\varphi \circ \xi$, $u = u \circ \zeta$, $\tau \circ \zeta$ verificam o

sistema abaixo:

$$(n-2)\frac{\varphi''}{\varphi} - m\frac{f''}{f} - 2m\frac{\varphi'f'}{\varphi f} + h'' + 2\frac{\varphi'}{\varphi}h' = 0, \quad (3-12)$$

$$\left[\frac{\varphi''}{\varphi} - (n-1)\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 + m\frac{\varphi'f'}{\varphi f} - \frac{\varphi'}{\varphi}h' \right] \|v\|^2 = \frac{\lambda}{\varphi^2}, \quad (3-13)$$

$$\begin{aligned} [f''\varphi^2f - (n-2)\varphi'\varphi f f' + (m-1)(f')^2\varphi^2 - f'f\varphi^2h'] \|v\|^2 + \lambda f^2 \\ = [\tau''\tau - (m-1)(\tau')^2] \|\beta\|^2 = \varrho, \end{aligned} \quad (3-14)$$

$$(m-2)\frac{\tau''}{\tau} - \alpha(u')^2 = 0, \quad (3-15)$$

$$[\tau^2u'' - (m-2)\tau\tau'u'] \|\beta\|^2 = 0. \quad (3-16)$$

Corolário 3.9. *Sob as hipóteses do Teorema 3.8, se considerarmos $\|v\|^2 = 0$, então $(\mathbb{R}^n \times_f \mathbb{R}^m, g, h, u = u_F \circ \sigma, \lambda)$ é um GRHS steady, isto é, $\lambda = 0, \varrho = 0$.*

No que segue, descrevemos todas as soluções do sistema dado pelo Teorema 3.8 quando $\lambda = 0$ e $\varrho = 0$.

Teorema 3.10. *Considere $\lambda = 0, \varrho = 0$ e $m \geq 0$ no Teorema 3.8, então $(\mathbb{R}^n \times_f \mathbb{R}^m, g)$ é um GRHS steady se, e somente se, as funções $\varphi(\xi), f(\xi), h(\xi), \tau(\zeta), u(\zeta)$ verificam*

(a) *Para $\|v\|^2 = 0, \|\beta\|^2 = 0$*

$$h(\xi) = \int \left(\varphi^{-2} \left[\int (m\frac{f''}{f}\varphi^2 + 2m\varphi\varphi'\frac{f'}{f} - (n-2)\varphi\varphi'')d\xi + c_1 \right] \right) d\xi + c_2, \quad (3-17)$$

$$u(\zeta) = \int \pm \sqrt{\frac{(m-2)\tau''}{\alpha\tau}}(\zeta) d\zeta + c_3, \quad (3-18)$$

onde $c_1, c_2 > 0, c_3 \in \mathbb{R}$.

(b) *Para $\|v\|^2 = 0, \|\beta\|^2 = 1$, a função potencial $h(\xi)$ é definida por (3-17), e*

$$\tau(\zeta) = c_2(c_1 + (m-2)\zeta)^{\frac{1}{2-m}}, \quad (3-19)$$

$$u(\zeta) = c_2 \pm \frac{\sqrt{2-3m+m^2}((-2+m)\zeta + c_1) \log((-2+m)\zeta + c_1)}{(-2+m)\sqrt{\alpha((-2+m)\zeta + c_1)^2}}. \quad (3-20)$$

Estas soluções estão definidas no semi-espaço $\zeta > -\frac{c_1}{(m-2)}$.

(c) Para $\|v\|^2 = 1, \|\beta\|^2 = 0$, ou

$$\begin{cases} \varphi_{\pm}(\xi) = \frac{c_4}{(N_{\pm}\xi + b)^{\frac{k}{N_{\pm}}}}, \\ f_{\pm}(\xi) = \frac{c_5}{(N_{\pm}\xi + b)^{\frac{1}{N_{\pm}}}}, \\ h_{\pm}(\xi) = -\frac{m - (n-2)k + N_{\pm} \ln(N_{\pm}\xi + b)}{N_{\pm}}, \\ u(\zeta) = \int \pm \sqrt{\frac{(m-2)\tau''}{\alpha} \frac{\tau''}{\tau}}(\zeta) d\zeta + c_3, \end{cases} \quad (3-21)$$

onde $c_4, c_5 > 0, k > 0, b$ e N_{\pm} são constantes com $N_{\pm} = -k \pm \sqrt{m + k^2(n-1)}$, ou

$$\begin{cases} \frac{\varphi'}{\varphi}(\xi) = k \frac{f'}{f}(\xi), \\ \frac{f'}{f}(\xi) = \psi(\xi), \\ h'(\xi) = [z(\xi) + m - k(n-2)]\psi(\xi) \\ u(\zeta) = \int \pm \sqrt{\frac{(m-2)\tau''}{\alpha} \frac{\tau''}{\tau}}(\zeta) d\zeta + c_3, \end{cases} \quad (3-22)$$

onde $\psi(\xi)$ e $z(\xi)$ são soluções de

$$\begin{cases} \psi(\xi) = c_6(z(\xi) + k - \sqrt{m + k^2(n-1)})^{\frac{a-1}{2}} (z(\xi) + k + \sqrt{m + k^2(n-1)})^{-\frac{a+1}{2}}, \\ z'(\xi) = -c_6(z(\xi) + k - \sqrt{m + k^2(n-1)})^{\frac{a+1}{2}} (z(\xi) + k + \sqrt{m + k^2(n-1)})^{-\frac{a-1}{2}}, \end{cases} \quad (3-23)$$

com função $z(\xi)$ não constante e constantes reais $k, c_6 \geq 0$ e $a = \frac{k}{\sqrt{m+k^2(n-1)}}$.

(d) Para $\|v\|^2 = 1, \|\beta\|^2 = 1$, as funções $\varphi(\xi), f(\xi), h(\xi)$ são definidas pelo sistema (3-21) ou (3-22), enquanto que as funções $u(\zeta)$ e $\tau(\zeta)$ são determinadas pelas equações (3-19) e (3-20).

3.2 Demonstração dos principais resultados

Prova da Proposição 3.1: Suponha que u pode ser representada como $u = u_B \circ \pi$ ou $u = u_F \circ \sigma$, então a partir da Proposição 1.24 a equação (1-8) torna-se

$$\text{Hess}h(X, V) = X(V(h)) - \nabla_X V(h) = \alpha \nabla u(X) \nabla u(V) = 0,$$

para todo $X \in \mathcal{L}(B)$ e $V \in \mathcal{L}(F)$.

Segue então do Teorema 1.1 em [26] que $h = h_B \circ \pi$.

Agora, assumamos a validade da equação (3-1), então a equação (1-8) aplicada em X, V é equivalente a

$$0 = \lambda g(X, V) = \alpha \nabla u(X) \nabla u(V). \quad (3-24)$$

Note que o tensor métrico (1-2) aplicado a X, V é nulo.

Como u é não constante, existe um campo $L = X + V \in \mathcal{L}(B^n \times F^m)$, $(p, q) \in B^n \times F^m$ e uma vizinhança \mathcal{V} tal que $\nabla u(X + V) \nabla u(X + V) \neq 0$ em \mathcal{V} , então

$$\nabla u(X)^2 + 2\nabla u(X) \nabla u(V) + \nabla u(V)^2 \neq 0, \quad (3-25)$$

e a partir de (3-24) derivamos

$$\nabla u(X)^2 + \nabla u(V)^2 \neq 0. \quad (3-26)$$

Portanto, ou $\nabla u(X) \neq 0$ ou $\nabla u(V) \neq 0$ em \mathcal{V} . \square

Prova do Teorema 3.2: Primeiramente, considere $u = u_B \circ \pi$. Combinando a primeira equação em (1-8) com (1-3), chegamos em

$$Ric_{g_B} - \frac{m}{f} Hess_{g_B} f(X, Y) + Hess_{g_B} h(X, Y) - \alpha \nabla_{g_B} u \otimes \nabla_{g_B} u(X, Y) = \lambda g_B(X, Y),$$

para todo $X, Y \in \mathcal{L}(B)$. Agora, combinando a Proposição 35 de [57] e a segunda equação de (1-8), temos que

$$\Delta u = \left[\Delta_{g_B} u_B + \frac{m}{f} g_B(\nabla_{g_B} u_B, \nabla_{g_B} f) \right] \circ \pi = g_B(\nabla u_B, \nabla h_B) \circ \pi. \quad (3-27)$$

Denotando $\Delta_\omega := \Delta - g(\nabla \omega, \nabla \cdot)$ a equação (3-27) torna-se

$$\Delta_\omega u_B = 0,$$

o qual prova (3-2).

Seja $V, W \in \mathcal{L}(F)$, então a partir de (1-8) e (1-3) temos que

$$\begin{aligned} \lambda f^2 g_F(V, W) &= Ric_{g_F}(V, W) + Hess h(V, W) \\ &- (f \Delta_B f + (m-1) g_B(\nabla f, \nabla f)) g_F(V, W), \end{aligned} \quad (3-28)$$

segue da expressão da conexão de métricas produto torcido que

$$\begin{aligned}
Hessh(V, W) &= V(W(h)) - (\nabla_V W)(h) \\
&= -({}^F\nabla_V W - fg_F(V, W)\nabla_{g_B}f)(h) \\
&= fg_F(V, W)\nabla_{g_B}f(h).
\end{aligned} \tag{3-29}$$

Substituindo (3-29) em (3-28) obtemos que $Ric_{g_F} = \varrho g_F$ onde

$$\varrho = f\Delta_{g_B}f + (m-1)|\nabla_{g_B}f|^2 + \lambda f^2 - f\nabla_{g_B}f(h). \tag{3-30}$$

Portanto, F é uma variedade de Einstein.

No caso em que $u = u_F \circ \sigma$ basta combinar (1-8) e a Proposição 1.24 que obtemos

$$\begin{aligned}
Ric_g(X, Y) &= Ric_{g_B} - \frac{m}{f}Hess_{g_B}f(X, Y) \\
&= \lambda g(X, Y) - Hessh(X, Y) + \alpha\nabla u \otimes \nabla u(X, Y)
\end{aligned}$$

para todo $X, Y \in \mathcal{L}(B)$. Usando a métrica produto torcido a equação anterior é equivalente a

$$Ric_{g_B}(X, Y) - \frac{m}{f}Hess_{g_B}f(X, Y) + Hess_{g_B}h(X, Y) = \lambda g_B(X, Y).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
Ric_g(V, W) &= \lambda g(V, W) - Hessh(V, W) + \alpha\nabla u \otimes \nabla u(V, W) \\
&= Ric_{g_F}(V, W) - (f\Delta_B f + (m-1)g_B(\nabla f, \nabla f))g_F(V, W),
\end{aligned}$$

para todo $V, W \in \mathcal{L}(F)$. A partir da métrica produto torcido segue que

$$\begin{aligned}
Ric_{g_F}(V, W) - \alpha\nabla_{g_F}u \otimes \nabla_{g_F}u(V, W) &= \lambda f^2 g_F(V, W) - fg_F(V, W)\nabla_{g_B}f(h) \\
&\quad + (f\Delta_B f + (m-1)g_B(\nabla f, \nabla f))g_F(V, W) \\
&= (f\Delta_{g_B}f + (m-1)|\nabla_{g_B}f|^2 + \lambda f^2 \\
&\quad - f\nabla_{g_B}f(h))g_F.
\end{aligned}$$

Considere a segunda equação de (1-8) com $u = u_F \circ \sigma$. A partir da Proposição 35 de [57] derivamos

$$\Delta u = \Delta_{g_F}u_F \circ \sigma = g(\nabla u, \nabla h) = 0.$$

Note que $\varrho = f\Delta_{g_B}f + (m-1)|\nabla_{g_B}f|^2 + \lambda f^2 - f\nabla_{g_B}f(h)$ é constante em relação a fibra, logo (F^m, g_F) é uma variedade Einstein harmônica e isto completa a prova. \square

Prova do Teorema 3.4: (a) Suponha que $u = u_B \circ \pi$. Procedendo de maneira análoga a prova do Teorema 3.2 chegamos em

$$\Delta u = \left[\Delta_{g_B}u_B + \frac{m}{f}g_B(\nabla_{g_B}u_B, \nabla_{g_B}f) \right] \circ \pi = g_B(\nabla u_B, \nabla h_B) \circ \pi, \quad (3-31)$$

e

$$\Delta_\omega u_B = 0,$$

onde $\omega = h_B - m \log(f)$. Portanto, segue do Teorema 1.19 que u_B é constante, o que implica que $u = u_B \circ \pi$ é constante. Sendo assim, $(B^n \times_f F^m, g, h, u, \lambda)$ é um gradiente Ricci soliton.

(b) Combinando (1-3) e (1-8), temos que

$$\begin{aligned} \lambda g_B(X, Y) - Hess_{g_B}h(X, Y) + \alpha \nabla_{g_B}u(X)\nabla_{g_B}u(Y) &= Ric_{g_B}(X, Y) \\ &\quad - \frac{m}{f}Hess_{g_B}f(X, Y), \end{aligned} \quad (3-32)$$

para todo $X, Y \in \mathcal{L}(B)$. Agora, tomando o traço de ambos os lados da equação (3-32), obtemos que

$$\Delta_{g_B}h_B = n\lambda + \alpha \|d\pi(\nabla u)\|^2 - scal_{g_B} + \frac{m\Delta_{g_B}f}{f}.$$

A partir da hipótese, deduzimos que $\Delta_{g_B}h_B \geq 0$. Logo, aplicando novamente o Teorema 1.19, segue que h_B é constante, i.e., a função potencial $h = h_B \circ \pi$ é constante.

(c) Considere o operador elíptico de segunda ordem dado por

$$\Xi(\cdot) = \Delta(\cdot) - \nabla h(\cdot) + \frac{(m-1)}{f}\nabla f(\cdot).$$

Segue de (3-3) que

$$\Xi(f) = \frac{\varrho - \lambda f^2}{f} \geq 0.$$

Então, como consequência direta de o princípio do máximo (Teorema 1.19), tem-se que f é uma função constante e isso conclui a prova. \square

Prova do Teorema 3.6: Como o Teorema 3.2 fornece uma condição necessária e suficiente para que o produto torcido $(B^n \times_f F^m, g)$ seja um GRHS, vamos utilizar

sua condição de equivalência em conjunto com a abordagem de soluções invariantes para produzir as equações (3-7), (3-8), (3-9) e (3-10).

Primeiramente, para uma escolha arbitrária de um vetor diferente de zero $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, definimos $\xi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como $\xi(x_1, \dots, x_n) = v_1 x_1 + \dots + v_n x_n$. Note que estamos assumindo $\varphi = \varphi(\xi)$, $h = h(\xi)$, $u = u(\xi)$ e $f = f(\xi)$, sendo assim, temos que

$$\begin{aligned} \varphi_{,x_i} &= \varphi' v_i, & f_{,x_i} &= f' v_i, & h_{,x_i} &= h' v_i, & u_{,x_i} &= u' v_i \\ \varphi_{,x_i x_j} &= \varphi'' v_i v_j, & f_{,x_i x_j} &= f'' v_i v_j, & h_{,x_i x_j} &= h'' v_i v_j, & u_{,x_i x_j} &= u'' v_i v_j. \end{aligned}$$

Agora, seja (B, g_B) o espaço semi-Euclidiano dotado com a métrica conforme $g_B = \varphi^{-2} g_0$. Logo, a partir da Proposição 1.9 segue que

$$Ric_{g_B} = \frac{1}{\varphi^2} \left\{ (n-2) \varphi Hess_{g_0}(\varphi) + [\varphi \Delta_{g_0} \varphi - (n-1) |\nabla_{g_0} \varphi|^2] g_0 \right\}.$$

Usando a notação tensorial $Hess_{g_0}(\varphi)(\partial_i, \partial_j) = (Hess_{g_0}(\varphi))_{i,j}$, onde $\{\partial_i\}_{i=1}^n$ é uma base ortonormal semi-Euclidiana, produzimos

$$\begin{aligned} (Hess_{g_0}(\varphi))_{i,j} &= \varphi'' v_i v_j, \\ \Delta_{g_0} \varphi &= \sum_k \varepsilon_k (Hess_{g_0}(\varphi))_{kk} = \varphi'' \|v\|^2, \\ |\nabla_{g_0} \varphi|^2 &= \sum_k \varepsilon_k \varphi_{,x_k}^2 = \varphi' \|v\|^2. \end{aligned}$$

Portanto, o tensor de Ricci toma a seguinte forma

$$(Ric_{g_B})_{i,j} = \frac{1}{\varphi} \{ (n-2) \varphi'' v_i v_j \}, \quad i \neq j, \quad (3-33)$$

$$(Ric_{g_B})_{i,i} = \frac{1}{\varphi^2} \{ (n-2) \varphi \varphi'' (v_i)^2 + [\varphi \varphi'' \|v\|^2 - (n-1) (\varphi')^2 \|v\|^2] \varepsilon_i \}, \quad (3-34)$$

para $i = 1, 2, \dots, n$. Fazendo uso da Proposição 1.9 para calcular a $Hess(h)$ em relação a métrica g_B , temos

$$(Hess_{g_B}(h))_{ij} = h_{,x_i x_j} - \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k h_{,x_k},$$

aqui os símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k para distintos i, j, k são dados por

$$\Gamma_{ij}^k = 0, \quad \Gamma_{ij}^i = -\frac{\varphi_{,x_j}}{\varphi}, \quad \Gamma_{ii}^k = \varepsilon_i \varepsilon_k \frac{\varphi_{,x_k}}{\varphi} \quad \text{e} \quad \Gamma_{ii}^i = -\frac{\varphi_{,x_i}}{\varphi}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} (Hess_{g_B}(h))_{ij} &= h_{,x_i x_j} + \varphi^{-1}(\varphi_{,x_i} h_{,x_j} + \varphi_{,x_j} h_{,x_i}) - \delta_{ij} \varepsilon_i \sum_k \varepsilon_k \varphi^{-1} \varphi_{,x_k} h_{,x_k} \\ &= v_i v_j h'' + (2v_i v_j - \delta_{ij} \varepsilon_i \|\nu\|^2) \varphi^{-1} \varphi' h, \end{aligned} \quad (3-35)$$

e

$$\Delta_{g_B} f = \sum_k \varphi^2 \varepsilon_k (Hess_{g_B}(f))_{kk} = \|\nu\|^2 \varphi^2 (f'' - (n-2) \varphi^{-1} \varphi' f'). \quad (3-36)$$

Por outro lado, conseguimos obter a expressão de $\nabla f(h)$, $|\nabla f|^2$ e $(\nabla u \otimes \nabla u)_{ij}$ na métrica conforme g_B através da Proposição 1.9

$$\begin{aligned} \nabla_{g_B} f(h) &= \langle \nabla_{g_B} f, \nabla_{g_B} h \rangle = \varphi^2 \sum_k \varepsilon_k f_{,x_k} h_{,x_k} = \|\nu\|^2 \varphi^2 f' h', \\ |\nabla_{g_B} f|^2 &= \varphi^2 \sum_k \varepsilon_k f_{,x_k}^2 = \|\nu\|^2 \varphi^2 (f')^2, \\ (\nabla_{g_B} u \otimes \nabla_{g_B} u)_{ij} &= u_{,x_i} u_{,x_j} = v_i v_j (u')^2. \end{aligned} \quad (3-37)$$

Substituindo (3-34), (3-35) e (3-37), para $i = j$, em (3-2) obtemos (3-8).

Agora, a partir de (3-33) e (3-35), para $i \neq j$, chegamos em

$$v_i v_j \left((n-2) \frac{\varphi''}{\varphi} - m \frac{f''}{f} - 2m \frac{\varphi' f'}{\varphi f} + h'' + 2 \frac{\varphi'}{\varphi} h' - \alpha(u')^2 \right) = 0.$$

Se existir i, j , $i \neq j$ tal que $v_i v_j \neq 0$, então obtemos

$$(n-2) \frac{\varphi''}{\varphi} - m \frac{f''}{f} - 2m \frac{\varphi' f'}{\varphi f} + h'' + 2 \frac{\varphi'}{\varphi} h' - \alpha(u')^2 = 0$$

o qual é a equação (3-7).

Agora, necessitamos considerar o caso $v_i v_j = 0$, $\forall i \neq j$. Para isto, considere k_0 fixado e $v_{k_0} = 1$, $v_k = 0$ para $k \neq k_0$. Neste caso, substituindo (3-34), (3-35) e (3-37) em (3-2) obtemos a equação (3-8) para $i \neq k_0$, isto é, $v_i = 0$, e quando $i = k_0$, obtemos (3-7), isto é, $v_{k_0} = 1$.

Substituindo (3-36), (3-37) em (3-3) obtemos a equação (3-9). Finalmente, inserindo (3-36), (3-37) em (3-31) derivamos a equação (3-10) e isto completa a prova. \square

Prova do Teorema 3.8: De forma semelhante à prova do Teorema 3.6, basta substituir as equações (3-33), (3-37) em (3-4) com $i \neq j$, que derivamos a equação (3-12), no entanto para produzir a equação (3-13) é suficiente usar (3-34), (3-37) em (3-4) com $i = j$.

A partir do Teorema 3.2 sabemos que F é uma variedade Einstein harmônica, isto é

$$\text{Ric}_{g_F} - \alpha \nabla_{g_F} u_{g_F} \otimes \nabla_{g_F} u_{g_F} = \varrho g_F, \quad (3-38)$$

onde $\alpha > 0$ e

$$\Delta_{g_B} f + (m-1)|\nabla_{g_B} f|^2 + \lambda f^2 - f \nabla_{g_B} f(h) = \varrho. \quad (3-39)$$

Para uma escolha arbitrária de um vetor não nulo $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)$, considere $\tau : \mathbb{R}^m \rightarrow (0, \infty)$ e $\zeta : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ o fator conforme da fibra e a função invariante por translação, respectivamente. Como estamos assumindo $u = u(\zeta)$, segue que

$$(\nabla_{g_F} u_{g_F} \otimes \nabla_{g_F} u_{g_F})_{ij} = u_{,x_{n+i}} u_{,x_{n+j}} = (u')^2 \beta_i \beta_j \quad i, j = 1, \dots, m. \quad (3-40)$$

Substituindo (3-37) em (3-39), temos que

$$[f'' \varphi^2 f - (n-2)\varphi' \varphi f f' + (m-1)(f')^2 \varphi^2 - f' f \varphi^2 h'] \|v\|^2 + \lambda f^2 = \varrho. \quad (3-41)$$

Inserindo as equações (3-33), (3-34), (3-40) e (3-41) em (3-38) chegamos em

$$\begin{aligned} [f'' \varphi^2 f - (n-2)\varphi' \varphi f f' + (m-1)(f')^2 \varphi^2 - f' f \varphi^2 h'] \|v\|^2 + \lambda f^2 \\ = [\tau'' \tau - (m-1)(\tau')^2] \|\beta\|^2 = \varrho, \end{aligned} \quad (3-42)$$

para $i = j$, e

$$(m-2) \frac{\tau''}{\tau} - \alpha (u')^2 = 0, \quad (3-43)$$

para $i \neq j$. Note que (3-42) e (3-43) são precisamente (3-14) e (3-15), respectivamente. Finalmente, a partir do Teorema 3.2 (b) u é uma função harmônica, então

$$\Delta_{g_F} u_F = \sum_k \tau^2 \varepsilon_k (\text{Hess}_{g_F}(u))_{kk} = \|\beta\|^2 \tau^2 (u'' - (m-2)\tau^{-1} \tau' u') = 0,$$

o qual corresponde a equação (3-16) e isso conclui a prova. \square

Prova do Teorema 3.10: (a) Tomando os parâmetros $\lambda = 0$ e $\|v\|^2 = \|\beta\|^2 = 0$ no Teorema 3.8 temos que

$$(n-2) \frac{\varphi''}{\varphi} - m \frac{f''}{f} - 2m \frac{\varphi' f'}{\varphi f} + h'' + 2 \frac{\varphi'}{\varphi} h' = 0, \quad (3-44)$$

$$(m-2) \frac{\tau''}{\tau} - \alpha (u')^2 = 0. \quad (3-45)$$

As equações (3-17) e (3-18) diretamente da integração de (3-44) e (3-45).

(b) Combinando os parâmetros $\|\beta\|^2 = 1$, $\|v\|^2 = 0$, $\lambda = 0$ com o Teorema 3.8, temos que

$$\frac{\tau''}{\tau} - (m-1) \left(\frac{\tau'}{\tau} \right)^2 = 0, \quad (3-46)$$

$$(m-2) \frac{\tau''}{\tau} - \alpha(u')^2 = 0, \quad (3-47)$$

$$\tau^2 u'' - (m-2) \tau \tau' u' = 0. \quad (3-48)$$

Integrando (3-46) e substituindo em (3-47) derivamos (3-19), ao passo que integrando (3-46) e substituindo em (3-48) obtemos (3-20).

(c) Considere $\|v\|^2 = 1$, $\|\beta\|^2 = 0$ e $\lambda = 0$. Então a partir das equações (3-12), (3-13), (3-14) e (3-15) do Teorema 3.8, deduzimos

$$\begin{cases} (n-2) \frac{\varphi''}{\varphi} - m \frac{f''}{f} - 2m \frac{\varphi' f'}{\varphi f} + h'' + 2 \frac{\varphi'}{\varphi} h' = 0, \\ \frac{\varphi''}{\varphi} - (n-1) \left(\frac{\varphi'}{\varphi} \right)^2 + m \frac{\varphi' f'}{\varphi f} - \frac{\varphi'}{\varphi} h' = 0, \\ f'' \varphi^2 f - (n-2) \varphi' \varphi f f' + (m-1) (f')^2 \varphi^2 - f' f \varphi^2 h' = 0, \\ (m-2) \frac{\tau''}{\tau} - \alpha(u')^2 = 0. \end{cases} \quad (3-49)$$

As três primeiras equações do sistema acima envolvendo φ , f e h foram resolvidas em [26]. Por outro lado, integrando a última equação do sistema (3-49) obtemos a equação (3-21).

(d) Decorre imediatamente dos casos anteriores. \square

3.3 Exemplos de GRHS produto torcido

Os próximos exemplos providenciam soluções explícitas para os Teoremas 3.6 e 3.8.

Exemplo 3.11. No Teorema 3.6, considere $\|v\|^2 = 0$, o espaço Lorentziano (\mathbb{R}^n, \bar{g}) com coordenadas (x_1, \dots, x_n) , assinatura $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_i = 1$, $\forall i \geq 2$, e fibra (\mathbb{R}^m, δ) , onde δ é a métrica Euclidiana. Seja $\xi = x_1 + x_2$ e escolha $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Então

$$f(\xi) = e^{k\xi}, \quad \varphi(\xi) = e^{k\xi}, \quad u(\xi) = k\xi,$$

$$h(\xi) = \frac{k}{2} (2 - n + 3m + \alpha) \xi - \frac{e^{-2k\xi} k_1}{2k} + k_2$$

define uma família de GRHS steady geodesicamente completos em $(\mathbb{R}^n, \varphi^{-2}\bar{g}) \times_f (\mathbb{R}^m, \delta)$ com função potencial h , aplicação u e função torção f (veja seção 3.2).

Exemplo 3.12. No Teorema 3.6, considere $\|v\|^2 = 1$, $m, n = 1$ e escolha $k \in \mathbb{R}$ com $k^2 > 1$, então as funções

$$h(\xi) = (m - k(n - 2)) \ln(f(\xi)), \quad \varphi(\xi) = f(\xi)^k, \quad u(\xi) = k\xi,$$

$$f(\xi) = e^{\sqrt{\frac{\alpha k^2}{(-k^2(n-2)-m)}} \xi},$$

onde

$$\xi(x) = \sum_{i=1}^n v_i x_i, \quad \text{com } v_i v_j \neq 0,$$

definem um GRHS steady em $(\mathbb{R}^n, \varphi^{-2}\delta) \times_f (\mathbb{R}^m, \delta)$ para todo $\xi \in \mathbb{R}$, onde δ é a métrica Euclidiana padrão.

Exemplo 3.13. No Teorema 3.10 item (a) considere o espaço Lorentziano (\mathbb{R}^n, g_1) e (\mathbb{R}^m, g_2) , com coordenadas (x_1, \dots, x_n) e $(x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$ onde $g_1 = -dx_1^2 + \sum_{i=2}^n dx_i^2$ and $g_2 = -dx_{n+1}^2 + \sum_{j=n+2}^{n+m} dx_j^2$. Let $\xi = x_1 + x_2$ e $\zeta = x_{n+1} + x_{n+2}$. Então

$$f(\xi) = ke^{A\xi}, \quad \varphi(\xi) = ke^{A\xi}, \quad \tau(\zeta) = \zeta^2 + 1, \quad A \neq 0, \quad k > 0$$

$$h(\xi) = (2 - n + 3m + \alpha) \frac{A}{2} \xi - \frac{e^{-2A\xi} c_7}{2Ak^2} + c_8, \quad c_7, c_8 \in \mathbb{R},$$

$$u(\zeta) = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{-2+m}\sqrt{1+\zeta^2} \sinh^{-1}(\zeta)}{\sqrt{(1+\zeta^2)\alpha}} + c_9, \quad c_9 \in \mathbb{R},$$

define uma família de GRHS steady geodesicamente completos em $(\mathbb{R}^n, \varphi^{-2}g_1) \times_f (\mathbb{R}^m, \tau^{-2}g_2)$ com função potencial h , aplicação u e função torção f (veja seção 3.2).

Exemplo 3.14. No Teorema 3.10 item (c) considere $k = 1$, uma constante não zero $z(\xi)$, a base sendo (\mathbb{R}^2, g_0) e (\mathbb{R}^3, g) a fibra Lorentziana com coordenadas (y_1, y_2, y_3) e $\zeta = y_1 + y_2$. Então, obtemos que

$$\begin{cases} \varphi(\xi) = \frac{c_5}{\xi + b}, \\ f(\xi) = \frac{c_4}{\xi + b}, \\ h(\xi) = -4 \ln(\xi + b), \end{cases} \quad \begin{cases} \tau(\zeta) = e^{c_4 \zeta}, \\ u(\zeta) = \frac{c_4}{\sqrt{\alpha}} \zeta, \end{cases}$$

descreve uma família de GRHS steady definido no semi-espaço $\xi > -b$.

A fim de provar a completude dos Exemplos 3.11 e 3.13 utilizaremos como conceito de completude o dado na Definição 1.4.

Prova da Completude do Exemplo 3.11: Dada uma curva γ in $M \times_f F$, podemos escrever $\gamma(s) = (\gamma_B(s), \gamma_F(s))$, onde $\gamma_B = \pi \circ \gamma$ e $\gamma_F = \sigma \circ \gamma$. Fazendo uso da Proposição 1.25, obtemos uma condição necessária e suficiente para que a curva γ seja geodésica. Desta forma, procedendo de maneira similiar ao que foi feito em [61] e [56], vamos agora provar que o GRHS definido no Exemplo 3.11 é completo mostrando que qualquer geodésica $\gamma(s) = (\gamma_B(s), \gamma_F(s))$ está definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

Considere (\mathbb{R}^n, \bar{g}) sendo o espaço Lorentziano com coordenadas (x_1, \dots, x_n) e assinatura $\varepsilon_1 = -1, \varepsilon_i = 1, \forall i \geq 2$. Seja $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e funções dadas por

$$\begin{aligned} f(\xi) &= e^{k\xi}, \quad \varphi(\xi) = e^{k\xi}, \quad u(\xi) = k\xi, \\ h(\xi) &= \frac{k}{2}(2 - n + 3m + \alpha)\xi - \frac{e^{-2k\xi}k_1}{2k} + k_2. \end{aligned}$$

Defina $g_B := \varphi^{-2}\bar{g} = e^{-2k\xi}\bar{g}$, então o gradiente $\nabla_{g_B} f$ torna-se

$$\nabla_{g_B} f = \left(-ke^{3k\xi}, ke^{3k\xi}, 0, \dots, 0 \right).$$

Seja $\gamma(s) = (\gamma_B(s), \gamma_F(s))$ uma geodésica tal que $\gamma_B(s) = (y_1(s), \dots, y_n(s))$ e $\gamma_F(s) = (y_{n+1}(s), \dots, y_{n+m}(s))$. Segue da Proposição 1.25 que a curva $\gamma(s)$ é uma curva geodésica de $(\mathbb{R}^n, g_B) \times_f (\mathbb{R}^m, \delta)$ se, e somente se, o sistema de equações abaixo for satisfeito

$$\begin{cases} y_1''(s) = -k\delta(\gamma_F', \gamma_F')e^{4k(y_1(s)+y_2(s))}, & \text{(I)} \\ y_2''(s) = k\delta(\gamma_F', \gamma_F')e^{4k(y_1(s)+y_2(s))}, & \text{(II)} \\ y_r''(s) = 0, \quad \text{para } r \in \{3, \dots, n\}, & \text{(III)} \\ y_{n+l}''(s) = -2k[y_1'(s) + y_2'(s)]y_{n+l}'(s), \quad \text{para } l \in \{1, \dots, m\}. & \text{(IV)} \end{cases}$$

Integrando a soma das equações diferenciais (I) e (II) e substituindo em (IV), obtemos a equação diferencial ordinária linear de segunda ordem abaixo

$$y_{n+l}''(s) + 2kc_1 y_{n+l}'(s) = 0 \quad \text{para cada } l \in \{1, \dots, m\}, \quad c_1 \in \mathbb{R}, \quad (3-50)$$

cujas soluções gerais $y_{n+l}(s)$ estão definidas em toda a reta real \mathbb{R} . Integrando (III) chegamos em $y_r(s) = c_{5,r} + c_{6,r}s$, para $c_{5,r}, c_{6,r} \in \mathbb{R}$, cujo domínio também é toda

a linha real, então só é necessário provar que as soluções de (I) e (II) também são definidas em todo \mathbb{R} .

Resolvendo a equação diferencial (3-50) e substituindo em (I) obtemos que $y_1''(s)$ é constante, portanto, $y_1(s)$ está definido em todo \mathbb{R} . Exceto por questões de sinal, o mesmo acontece com $y_2(s)$. Portanto, todas as geodésicas $\gamma(s)$ estão definidas em toda reta real. \square

Prova do Completude do Exemplo 3.13: Seja (\mathbb{R}^n, g_1) e (\mathbb{R}^m, g_2) sendo o espaços semi-euclidianos padrão como no Exemplo 3.13. Tome $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $k > 0$ e considere as funções

$$\varphi(\xi) = ke^{A\xi}, \quad f(\xi) = ke^{A\xi}, \quad h(\xi) = (2 - n + 3m + \alpha) \frac{A}{2} \xi - \frac{e^{-2A\xi} c_7}{2Ak^2} + c_8, \quad c_7, c_8 \in \mathbb{R},$$

e

$$\tau(\zeta) = \zeta^2 + 1, \quad u(\zeta) = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{-2+m}\sqrt{1+\zeta^2} \sinh^{-1}(\zeta)}{\sqrt{(1+\zeta^2)^\alpha}} + c_9, \quad c_9 \in \mathbb{R},$$

onde f, φ, h estão definidas em (\mathbb{R}^n, g_1) e τ, u são definidas em (\mathbb{R}^m, g_2) .

Na métrica conforme $g_B := \varphi^{-2}g_1 = k^{-2}e^{-2A\xi}g_1$, o gradiente $\nabla_{g_B} f$ é dado por

$$\nabla_{g_B} f = \sum_{r,s=1}^n g_B^{rs} f_{,x_s} \partial_r = \sum_{r,s=1}^n \varphi^2 \varepsilon_r \delta_{rs} f' v_s \partial_s = \sum_{s=1}^n k^3 A \varepsilon_s v_s e^{3A\xi} \partial_s.$$

Como $v_1 = v_2 = 1$, $v_i = 0$, para $i \geq 3$, e $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_i = 1$, para $i \geq 2$, obtemos

$$\nabla_{g_B} f = (-k^3 A e^{3A\xi}, k^3 A e^{3A\xi}, 0, \dots, 0).$$

Então, considerando $\gamma_B(s) = (y_1(s), \dots, y_n(s))$ e $\gamma_F(s) = (y_{n+1}(s), \dots, y_{n+m}(s))$ na Proposição 1.25, temos que

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1''(s) = -k^4 A g_F(\gamma'_F, \gamma'_F) e^{4A(y_1(s)+y_2(s))}, \quad \text{(I)} \\ y_2''(s) = k^4 A g_F(\gamma'_F, \gamma'_F) e^{4A(y_1(s)+y_2(s))}, \quad \text{(II)} \\ y_r''(s) = 0, \quad \text{para } r \in \{3, \dots, n\}, \quad \text{(III)} \\ y_{n+l}''(s) = -2A[y_1'(s) + y_2'(s)]y'_{n+l}(s), \quad \text{para } l \in \{1, \dots, m\}. \quad \text{(IV)} \end{array} \right.$$

Somando as equações diferenciais (I) e (II) chegamos em $y_1''(s) + y_2''(s) = 0$, então por integração chegamos em

$$y_1'(s) + y_2'(s) = c_1, \quad y_1(s) + y_2(s) = c_1 s + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (3-51)$$

Substituindo (3-51) em (IV), obtemos a equação diferencial ordinária linear de segunda ordem

$$y''_{n+l}(s) + 2Ac_1 y'_{n+l}(s) = 0 \quad \text{para cada } l \in \{1, \dots, m\},$$

cujas soluções gerais são

$$y_{n+l}(s) = \begin{cases} c_{3,l} + c_{4,l}s, & \text{se } c_1 = 0, \\ c_{3,l} + c_{4,l}e^{-2Ac_1s}, & \text{se } c_1 \neq 0. \end{cases} \quad (3-52)$$

onde $c_{3,l}, c_{4,l} \in \mathbb{R}$. Portanto, para cada $l \in \{1, \dots, m\}$, as funções $y_{n+l}(s)$ são definidas em toda a reta real \mathbb{R} . Observe que as soluções de (III) são dadas por $y_r(s) = c_{5,r} + c_{6,r}s$, onde $c_{5,r}, c_{6,r} \in \mathbb{R}$, cujo domínio também é a reta real. Finalmente, para concluir basta provar que as soluções de (I) e (II) estão definidas em todo \mathbb{R} , e para isso vamos expressar $g_F(\gamma'_F, \gamma'_F)$ em função dos parâmetros s . Como $g_F = \tau^{-2}g_2$, $\beta_{n+1} = \beta_{n+2} = 1$, $\beta_{n+j} = 0$, para $j \geq 3$, e $\varepsilon_{n+1} = -1$, $\varepsilon_{n+j} = 1$, para $j \geq 2$, obtemos

$$\begin{aligned} g_F(\gamma'_F, \gamma'_F) &= \tau(\zeta \circ \gamma_F)^{-2} g_2(\gamma'_F, \gamma'_F) \\ &= \tau(\zeta \circ \gamma_F)^{-2} [-y'_{n+1}(s)^2 + y'_{n+2}(s)^2 + \dots + y'_{n+m}(s)^2] \\ &= \frac{1}{((y_{n+1}(s) + y_{n+2}(s))^2 + 1)^2} [-y'_{n+1}(s)^2 + y'_{n+2}(s)^2 + \dots + y'_{n+m}(s)^2], \end{aligned}$$

substituindo (3-52) em (I), temos que

$$\begin{aligned} y''_1(s) &= -k^4 A [(c_{7,1} + c_{7,2}e^{-2Ac_1s})^2 + 1]^{-2} \times \\ &[-c_{8,1}^2 + c_{8,2}^2 + \dots + c_{8,r}^2] e^{-4Ac_1s} e^{4A(y_1(s)+y_2(s))}, \end{aligned}$$

onde $c_{7,1}, c_{7,2}, c_{8,1}, c_{8,2}, \dots, c_{8,r} \in \mathbb{R}$.

Agora, a partir de (3-51) chegamos em

$$\begin{aligned} y''_1(s) &= c_{9,1} [(c_{7,1} + c_{7,2}e^{-2Ac_1s})^2 + 1]^{-2} e^{-4Ac_1s} e^{4A(c_1s+c_2)} \\ &= c_{9,1} [(c_{7,1} + c_{7,2}e^{-2Ac_1s})^2 + 1]^{-2} e^{4Ac_2} \\ &= c_{10,1} [(c_{7,1} + c_{7,2}e^{-2Ac_1s})^2 + 1]^{-2} \quad c_{9,1}, c_{10,1} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Note que $y'_1(s)$ é suave em todos os pontos e tem uma derivada limitada. De fato,

$$|y''_1(s)| = \left| c_{10,1} [(c_{7,1} + c_{7,2}e^{-2Ac_1s})^2 + 1]^{-2} \right| < |c_{10,1}|.$$

Portanto, o sistema definido por

$$\begin{cases} y_1'(s) = z_1(s), \\ z_1'(s) = [(c_{7,1} + c_{7,2}e^{-2Ac_1s})^2 + 1]^{-2}, \end{cases}$$

possui soluções cujo domínio é \mathbb{R} . Exceto para o sinal, o mesmo ocorre para $y_2(s)$. Assim, todas as geodésicas $\gamma = (\gamma_B, \gamma_F)$ estão definidas em toda a reta real, o que significa que

$$(\mathbb{R}^n, \varphi^{-2}g_1) \times_f (\mathbb{R}^m, \tau^{-2}g_2)$$

é geodesicamente completo. □

Considerações Finais

Neste trabalho estudamos estruturas gradiente Einstein-type do ponto de vista de subvariedades em produto torcido, onde conseguimos condições necessárias para existência (ou não existência) de imersões mínimas, umbílicas ou totalmente geodésicas, além de resultados de rigidez com a esfera Euclidiana. Quando escolhemos a função potencial como sendo a função altura da imersão, obtemos resultados de trivialidade para a função potencial e o mapa u , reduzindo assim a estrutura gradiente Einstein-type em estruturas mais simples extensamente estudadas. Além disso, classificamos estruturas gradiente Einstein-type rotacionais em produto torcido com a fibra sendo um espaço forma e função potencial dada pela altura. Tal classificação nos permitiu construir exemplos de estruturas gradiente Einstein-type rotacionalmente simétricas em \mathbb{R}^3 . Finalmente, consideramos um caso particular de estruturas gradiente Einstein-type que são os GRHS e construímos infinitos exemplos *steady* geodesicamente completos utilizando como ferramenta os espaços produto torcido e técnicas de soluções invariantes. Aqui, vale ressaltar que diferentemente dos gradiente Ricci solitons, nem todas as equações de estrutura ficam definidas somente na variedade base, no nosso caso o mapa u pode estar definida na variedade fibra. Ainda em relação aos exemplos de GRHS *steady* com mapa u não constante construídos neste trabalho, é importante mencionar que estes estão fora da classificação dada por Meng Zhu em [66], pois o autor considera GRHS Riemanniano, enquanto que consideramos o caso semi-Riemanniano na construção dos exemplos.

Acreditamos que ainda há muito o que estudar, pois existe alguns questionamentos em aberto em relação ao que fizemos e que gostaríamos de tentar responde-los em trabalhos futuros. Algumas destas seriam:

- Quando estudamos estruturas gradiente Einstein-type imersas em um produto torcido com base unidimensional, fixamos a função potencial como sendo a função altura. Caso a função potencial não seja fixada, conseguiríamos obter alguma rigidez nesta função?
- No caso em que ∇h for um campo qualquer, em que condições um Ricci-harmônico soliton compacto seria gradiente?

-
- No capítulo 3, utilizamos uma redução pela ação de um grupo de translação com o intuito de obter soluções explícitas para a Equação (1-8) invariantes por translação. Sendo assim, se considerarmos uma ação de um grupo pseudo-ortogonal ainda assim obteríamos soluções explícitas?

Em relação a propostas de trabalhos futuros e/ou em andamento, temos as seguintes

- Estudar o comportamento geométrico de bolas geodésicas de estruturas gradiente Einstein-type imersas em um produto torcido.
- Estudar relações envolvendo a curvatura média e a curvatura gaussiana de estruturas bidimensionais gradiente Einstein-type imersas em $I \times_f \mathbb{Q}(c)$. Por exemplo ($K + H = cte$).
- Validade da desigualdade de Hitchin-Thorpe para estruturas Einstein-type compactas, ou produto torcido com base compacta (Em andamento).

Bibliografia

- [1] Ahmad Mirshafezadeh, M.; Bidabad, B. **On the Rigidity of Generalized Quasi-Einstein Manifolds**. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, 43(2):2029–2042, 2020.
- [2] Alexandrino, M. M.; Bettiol, R. G. **Lie groups and geometric aspects of isometric actions**. Springer, Cham, 2015.
- [3] Alías, L. J.; Dajczer, M. **Constant mean curvature hypersurfaces in warped product spaces**. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 50(3):511–526, 2007.
- [4] Alías, L. J.; Mastrolia, P.; Rigoli, M. **Maximum principles and geometric applications**. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Cham, 2016.
- [5] Anseli, A.; Colombo, G.; Rigoli, M. **On the geometry of Einstein-type structures**. *Nonlinear Anal.*, 204:Paper No. 112198, 84, 2021.
- [6] Aquino, C. P.; de Lima, H. F.; Gomes, J. N. V. **Characterizations of immersed gradient almost Ricci solitons**. *Pacific J. Math.*, 288(2):289–305, 2017.
- [7] Barbosa, M. B. **Fluidos perfeitos estáticos com simetrias**. PhD thesis, Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, Goiânia, 2019.
- [8] Barros, A.; Batista, R.; Ribeiro, Jr., E. **Rigidity of gradient almost Ricci solitons**. *Illinois J. Math.*, 56(4):1267–1279, 2012.
- [9] Barros, A.; Batista, R.; Ribeiro, Jr., E. **Compact almost Ricci solitons with constant scalar curvature are gradient**. *Monatsh. Math.*, 174(1):29–39, 2014.
- [10] Barros, A.; Gomes, J. N.; Ribeiro, E. **A note on rigidity of the almost Ricci soliton**. *Archiv der Mathematik*, 100(5):481–490, 2013.
- [11] Barros, A.; Gomes, J. N.; Ribeiro, Jr., E. **Immersion of almost Ricci solitons into a Riemannian manifold**. *Mat. Contemp.*, 40:91–102, 2011.

- [12] Batista, E.; Adriano, L.; Tokura, W. **Gradient einstein-type structures immersed into a riemannian warped product**. *Journal of Geometry and Physics*, p. 104510, 2022.
- [13] Batista, E.; Adriano, L.; Tokura, W. **On warped product gradient Ricci-harmonic soliton**. *Annales Mathématiques Blaise Pascal*, to appear, 2022.
- [14] Besse, A. L. **Einstein manifolds**. Springer Science & Business Media, 2007.
- [15] Bishop, R. L.; O'Neill, B. **Manifolds of negative curvature**. *Transactions of the American Mathematical Society*, 145:1–49, 1969.
- [16] Caminha, A.; Souza, P.; Camargo, F. **Complete foliations of space forms by hypersurfaces**. *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, 41(3):339–353, 2010.
- [17] Caminha, A.; de Lima, H. F.; others. **Complete vertical graphs with constant mean curvature in semi-riemannian warped products**. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin*, 16(1):91–105, 2009.
- [18] Cao, H.-D. **Geometry of Ricci solitons**. *Chinese Ann. Math. Ser. B*, 27(2):121–142, 2006.
- [19] Chavel, I. **Eigenvalues in Riemannian geometry**, volume 115 de **Pure and Applied Mathematics**. Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1984. Including a chapter by Burton Randol, With an appendix by Jozef Dodziuk.
- [20] Chen, B.-Y. **Differential geometry of warped product manifolds and submanifolds**. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2017. With a foreword by Leopold Verstraelen.
- [21] Chen, B.-Y.; Deshmukh, S. **Ricci solitons and concurrent vector fields**. *Balkan J. Geom. Appl.*, 20(1):14–25, 2015.
- [22] Cheng, L.; Zhu, A. **On the extension of the harmonic Ricci flow**. *Geom. Dedicata*, 164:179–185, 2013.
- [23] Chu, S.-C. **Basic properties of gradient Ricci solitons**. In: *Geometric evolution equations*, volume 367 de **Contemp. Math.**, p. 79–102. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [24] Colares, A. G.; De Lima, H. F. **Some rigidity theorems in semi-riemannian warped products**. *Kodai Mathematical Journal*, 35(2):268–282, 2012.

- [25] de Lima, E. L.; de Lima, H. F. **Characterizations of minimal hypersurfaces immersed in certain warped products.** *Extracta mathematicae*, 34(1):123–134, 2019.
- [26] de Sousa, M. L.; Pina, R. **Gradient Ricci solitons with structure of warped product.** *Results in Mathematics*, 71(3-4):825–840, 2017.
- [27] Dillen, F.; Fastenakels, J.; Van der Veken, J. **Rotation hypersurfaces in $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$.** *Note di Matematica*, 29(1):41–54, 2009.
- [28] Dillen, F.; Munteanu, M. I.; Van der Veken, J.; Vrancken, L. **Classification of constant angle surfaces in a warped product.** *Balkan J. Geom. Appl.*, 16(2):35–47, 2011.
- [29] do Carmo, M.; Dajczer, M. **Rotation hypersurfaces in spaces of constant curvature.** In: *Manfredo P. do Carmo—Selected Papers*, p. 195–219. Springer, 2012.
- [30] do Carmo, M. **Riemannian Geometry.** Mathematics (Boston, Mass.). Birkhäuser, 1992.
- [31] Dobarro, F.; Lami Dozo, E. **Scalar curvature and warped products of riemann manifolds.** *Transactions of the American Mathematical Society*, 303(1):161–168, 1987.
- [32] Eells, J.; Wood, J. C. **Restrictions on harmonic maps of surfaces.** *Topology*, 15(3):263–266, 1976.
- [33] Eells, Jr., J.; Sampson, J. H. **Harmonic mappings of Riemannian manifolds.** *Amer. J. Math.*, 86:109–160, 1964.
- [34] Eminent, M.; La Nave, G.; Mantegazza, C. **Ricci solitons: the equation point of view.** *Manuscripta Math.*, 127(3):345–367, 2008.
- [35] Evans, L. C. **Partial differential equations**, volume 19 de **Graduate Studies in Mathematics.** American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [36] Frankel, T. **On the fundamental group of a compact minimal submanifold.** *Ann. of Math. (2)*, 83:68–73, 1966.
- [37] Gallot, S.; Hulin, D.; Lafontaine, J. **Riemannian Geometry.** Universitext. Springer Berlin Heidelberg, 2004.

- [38] Garnica, E.; Palmas, O.; Ruiz-Hernández, G. **Classification of constant angle hypersurfaces in warped products via eikonal functions.** *Bol. Soc. Mat. Mexicana (3)*, 18(1):29–41, 2012.
- [39] Gilbarg, D.; Trudinger, N. S. **Elliptic partial differential equations of second order.** Springer, 2015.
- [40] Grisha, P. **The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications.** *arXiv:math/0211159*, 2002.
- [41] Guo, H. X.; Philipowski, R.; Thalmaier, A. **On gradient solitons of the Ricci-harmonic flow.** *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, 31(11):1798–1804, 2015.
- [42] Guo, H.; He, T. **Harnack estimates for geometric flows, applications to Ricci flow coupled with harmonic map flow.** *Geom. Dedicata*, 169:411–418, 2014.
- [43] Hamilton, R. S. **Three-manifolds with positive Ricci curvature.** *J. Differential Geometry*, 17(2):255–306, 1982.
- [44] Hu, Z.; Li, D.; Xu, J. **On generalized m -quasi-Einstein manifolds with constant scalar curvature.** *J. Math. Anal. Appl.*, 432(2):733–743, 2015.
- [45] Ivey, T. **Ricci solitons on compact three-manifolds.** *Differential Geom. Appl.*, 3(4):301–307, 1993.
- [46] Karp, L. **On Stokes' theorem for noncompact manifolds.** *Proc. Amer. Math. Soc.*, 82(3):487–490, 1981.
- [47] Kim, B. H.; Lee, S. D.; Choi, J. H.; Lee, Y. O. **On warped product spaces with a certain Ricci condition.** *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 50(5):1683–1691, 2013.
- [48] Kim, D.-S.; Kim, Y. H. **Compact einstein warped product spaces with nonpositive scalar curvature.** *Proceedings of the American Mathematical Society*, 131(8):2573–2576, 2003.
- [49] Leandro, B.; Pina, R.; Bezerra, T. P. F. **Invariant solutions for gradient Ricci almost solitons.** *São Paulo J. Math. Sci.*, 14(1):123–138, 2020.
- [50] Lee, J. M. **Riemannian manifolds: an introduction to curvature**, volume 176. Springer Science & Business Media, 2006.
- [51] Lemaire, L. **Applications harmoniques de surfaces riemanniennes.** *J. Differential Geometry*, 13(1):51–78, 1978.

- [52] Li, Y. **Eigenvalues and entropies under the harmonic-Ricci flow.** *Pacific J. Math.*, 267(1):141–184, 2014.
- [53] Manfio, F.; Tojeiro, R. **Hypersurfaces with constant sectional curvature of $S^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$.** *Illinois Journal of Mathematics*, 55(1):397–415, 2011.
- [54] Müller, R. **Monotone volume formulas for geometric flows.** *J. Reine Angew. Math.*, 643:39–57, 2010.
- [55] Müller, R. **Ricci flow coupled with harmonic map flow.** *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 45(1):101–142, 2012.
- [56] Neto, B. L.; Tenenblat, K. **On gradient Yamabe solitons conformal to a pseudo-Euclidian space.** *J. Geom. Phys.*, 123:284–291, 2018.
- [57] O’neill, B. **Semi-Riemannian geometry with applications to relativity**, volume 103. Academic press, 1983.
- [58] Petersen, P. **Riemannian geometry**, volume 171 de **Graduate Texts in Mathematics**. Springer, Cham, third edition, 2016.
- [59] Prakasha, D. G.; Venkatesha, H. **Some results on generalized quasi-Einstein manifolds.** *Chin. J. Math. (N.Y.)*, p. Art. ID 563803, 5, 2014.
- [60] Tadano, H. **Gap theorems for Ricci-harmonic solitons.** *Ann. Global Anal. Geom.*, 49(2):165–175, 2016.
- [61] Tokura, W.; Adriano, L.; Pina, R.; Barboza, M. **On warped product gradient Yamabe solitons.** *J. Math. Anal. Appl.*, 473(1):201–214, 2019.
- [62] Tokura, W. I.; Dias Batista, E. **Triviality results for compact k -Yamabe solitons.** *J. Math. Anal. Appl.*, 502(2):Paper No. 125274, 6, 2021.
- [63] Williams, M. B. **Results on coupled Ricci and harmonic map flows.** *Adv. Geom.*, 15(1):7–26, 2015.
- [64] Wylie, W. **Complete shrinking Ricci solitons have finite fundamental group.** *Proc. Amer. Math. Soc.*, 136(5):1803–1806, 2008.
- [65] Yang, F.; Shen, J. **Volume growth for gradient shrinking solitons of Ricci-harmonic flow.** *Sci. China Math.*, 55(6):1221–1228, 2012.
- [66] Zhu, M. **On the relation between Ricci-Harmonic solitons and Ricci solitons.** *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 447(2):882 – 889, 2017.