

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE INFORMÁTICA

ELISÂNGELA SILVA DIAS

Alianças Defensivas em Grafos

Goiânia
2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE INFORMÁTICA

**AUTORIZAÇÃO PARA PUBLICAÇÃO DE DISSERTAÇÃO
EM FORMATO ELETRÔNICO**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, **AUTORIZO** o Instituto de Informática da Universidade Federal de Goiás – UFG a reproduzir, inclusive em outro formato ou mídia e através de armazenamento permanente ou temporário, bem como a publicar na rede mundial de computadores (*Internet*) e na biblioteca virtual da UFG, entendendo-se os termos “reproduzir” e “publicar” conforme definições dos incisos VI e I, respectivamente, do artigo 5º da Lei nº 9610/98 de 10/02/1998, a obra abaixo especificada, sem que me seja devido pagamento a título de direitos autorais, desde que a reprodução e/ou publicação tenham a finalidade exclusiva de uso por quem a consulta, e a título de divulgação da produção acadêmica gerada pela Universidade, a partir desta data.

Título: Alianças Defensivas em Grafos

Autor(a): Elisângela Silva Dias

Goiânia, 26 de Março de 2010.

Elisângela Silva Dias – Autor

Dr. Rommel Melgaço Barbosa – Orientador

ELISÂNGELA SILVA DIAS

Alianças Defensivas em Grafos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Informática da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação.

Área de concentração: Algoritmos e Grafos.

Orientador: Prof. Dr. Rommel Melgaço Barbosa

Goiânia
2010

ELISÂNGELA SILVA DIAS

Alianças Defensivas em Grafos

Dissertação defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Informática da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, aprovada em 26 de Março de 2010, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Rommel Melgaço Barbosa
Instituto de Informática – UFG
Presidente da Banca

Prof. Dr. Wellington Santos Martins
Instituto de Informática - UFG

Profa. Dra. Íris Fabiana de Barcelos Tronto
Universidade Federal de Viçosa

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Elisângela Silva Dias

Graduou-se em Sistemas de Informação na UEG - Universidade Estadual de Goiás. Durante sua graduação, trabalhou com atendimento a clientes, análise de sistemas e programação em Delphi e Visual Basic. Também foi monitora no programa do Governo Itinerante intitulado “Janelas Abertas”. Durante o mestrado, na UFG - Universidade Federal de Goiás, foi professora substituta do Estado no CEPSS - Centro de Educação Profissional Sebastião de Siqueira e da UFG. Atualmente, é professora substituta da UFG.

Aos meus pais, Sebastiana Silva Dias e Gercino Alves Dias (*in memoriam*), pelo incentivo, apoio, paciência, por tudo que sempre fizeram por mim e pelo exemplo de vida que me deram.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus,

Por ter permitido que eu começasse o mestrado e dado força e persistência para eu terminar. Também por tudo que Ele tem me concedido. Sem Ele na minha vida, nada seria possível.

Ao meu marido, Victor Ribeiro Silva,

Pelo apoio, compreensão, companheirismo e pelo amor que me dedicou durante todo esse tempo, me fazendo querer ser uma pessoa melhor e me ajudando nas horas mais difíceis com tanto carinho e paciência.

Aos meus familiares,

Pelo constante apoio, incentivo, pelo amor que sempre deu força para continuar e pela compreensão nas horas de desespero e nas horas de mau humor, quando algo não dava certo.

Ao meu orientador, professor Rommel Melgaço Barbosa,

Por ter acreditado em mim, quando ninguém mais acreditou e por me dar uma segunda oportunidade.

À professora Diane Castonguay,

Por acreditar que eu poderia ser melhor até mesmo do que eu imaginava, por fazer certo, quando eu pensava que estava fazendo errado, e por querer sempre mais de mim. E também pelas suas correções e por sua ajuda nas notações matemáticas.

Ao professor Humberto Longo,

Pela paciência em me ensinar as fórmulas, os algoritmos, como colocar boas figuras, tabelas, letras caligráficas, etc, e tirar todas as dúvidas referentes ao Latex.

Aos professores Wellington Santos Martins, Thierson Couto Rosa e Claudio Nogueira Meneses,

Por me ajudarem a estruturar a dissertação e por me darem força para continuar na luta. Especialmente ao professor Wellington, por participar da minha qualificação e dar boas sugestões em tudo. Vocês têm todo o meu apreço.

Aos meus colegas de Mestrado,

Por compartilhar os momentos difíceis, as provas, os trabalhos e todo sofrimento, mas também as alegrias. Especialmente à Luciana, Patrícia e Fabiana, que sempre me ajudaram e me deram força, pelo incentivo e pelas horas de desabafos e de risos. Também pela amizade, lealdade e companheirismo.

À professora Nilzete Olimpio Alvares,

Que me deu muitas oportunidades, compreendeu minhas dificuldades e sempre esteve ao meu lado. E também pela sua amizade.

Aos professores do Instituto de Informática,

Que sempre foram prestativos e estavam prontos para ajudar em todos os momentos. Vocês foram imprescindíveis!

Aos funcionários do Instituto de Informática,

Que sempre me trataram muito bem, foram amigos e sempre torceram pelo meu sucesso. Especialmente à Berenice, Enio, Edir e Bosco, que me acolheram como irmãos e me deram toda a ajuda que eu precisava.

“Há quem diga que todas as noites são de sonhos. Mas há também quem garanta que nem todas, só as de verão. No fundo, isso não tem muita importância. O que interessa mesmo não são as noites em si, mas os sonhos. Sonhos que o homem sonha sempre, em todos os lugares, em todas as épocas do ano, dormindo ou acordado.”

William Shakespeare,
Sonhos de uma Noite de Verão.

Resumo

Dias, Elisângela Silva. **Alianças Defensivas em Grafos**. Goiânia, 2010. 105p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Informática, Universidade Federal de Goiás.

Uma aliança defensiva no grafo $G = (V, E)$ é um conjunto de vértices $S \subseteq V$ satisfazendo a condição de que todo vértice $v \in S$ tem no máximo um vizinho a mais em $V - S$ que em S . Devido a este tipo de aliança, os vértices em S juntam para se defenderem dos vértices em $V - S$. Nesta dissertação, são introduzidos os conceitos básicos para o entendimento das alianças em grafos, junto com uma variedade de tipos de alianças e seus respectivos números, bem como são fornecidas algumas propriedades matemáticas para estas alianças, focando principalmente nas alianças defensivas em grafos. Apresentamos teoremas, corolários, lemas, proposições e observações com as devidas provas com relação ao grau mínimo de um grafo $\delta(G)$, ao grau máximo $\Delta(G)$, à conectividade algébrica μ , ao conjunto dominante total $\gamma_t(G)$, à excentricidade, à conectividade de arestas $\lambda(G)$, ao número cromático $\chi(G)$, ao número de independência (de vértices) $\beta_0(G)$, à conectividade de vértices $\kappa(G)$, à ordem da maior clique $\omega(G)$ e ao número de dominação $\gamma(G)$. Também é mostrada a generalização de alianças defensivas, chamada k -aliança defensiva, e a definição e propriedades de um conjunto seguro em G . Um *conjunto seguro* $S \subseteq V$ do grafo $G = (V, E)$ é um conjunto no qual todo subconjunto não-vazio pode ser defendido com sucesso de um ataque, sob as definições apropriadas de “ataque” e “defesa”.

Palavras-chave

Alianças em grafos, alianças defensivas, conjuntos seguros.

Abstract

Dias, Elisângela Silva. **Defensive Alliances in Graphs**. Goiânia, 2010. 105p. MSc. Dissertation. Instituto de Informática, Universidade Federal de Goiás.

A defensive alliance in graph $G = (V, E)$ is a set of vertices $S \subseteq V$ satisfying the condition that every vertex $v \in S$ has at most one more neighbor in $V - S$ than S . Due to this type of alliance, the vertices in S together defend themselves to the vertices in $V - S$. This dissertation introduces the basic concepts for the understanding of alliances in graphs, along with a variety of alliances and their numbers and provides some mathematical properties for these alliances, focusing mainly on defensive alliances in graphs. It shows theorems, corollaries, lemmas, propositions and observations with appropriate proofs with respect to the minimum degree of a graph $\delta(G)$, the maximum degree $\Delta(G)$, the algebraic connectivity μ , the total dominating set $\gamma_t(G)$, the eccentricity, the edge connectivity $\lambda(G)$, the chromatic number $\chi(G)$, the (vertex) independence number $\beta_0(G)$, the vertex connectivity $\kappa(G)$, the order of the largest clique $\omega(G)$ and the domination number $\gamma(G)$. It also shows a generalization of defensive alliances, called defensive k -alliance, and the definition and properties of a security set in G . A *secure set* $S \subseteq V$ of graph $G = (V, E)$ is a set whose every nonempty subset can be successfully defended of an attack, under appropriate definitions of “attack” and “defence”.

Keywords

Alliances in graphs, defensive alliances, secure sets.

Sumário

Lista de Figuras	12
Lista de Tabelas	14
Lista de Símbolos	15
1 Introdução	17
2 Conceitos Preliminares	20
2.1 Definições e Notações	20
2.2 Complexidade Computacional em Alianças	24
2.2.1 A Classe P	26
2.2.2 A Classe NP	26
2.2.3 A Classe NPC	27
3 Alianças em Grafos	28
3.1 Tipos de Alianças	28
3.2 Alguns Parâmetros para Alianças	33
3.3 Problemas Relacionados	38
3.4 Resultados por Classes de Grafos	40
3.4.1 Alianças em Caminhos e Ciclos	40
3.4.2 Alianças em Grafos Bipartidos	44
3.4.3 Alianças em Árvores	48
3.4.4 Alianças em Grafos Regulares	55
3.4.5 Alianças em Grafos Linhas	57
3.4.6 Alianças em Grafos Produtos Cartesianos	60
3.4.7 Alianças em Grafos Completos	63
3.4.8 Alianças em Grafos Infinitos	64
3.4.9 Alianças em Grafos Outerplanares	65
3.4.10 Alianças em Grafos Gerais	68
3.5 Problemas de Decisão Resolvidos	89
4 Conclusões	95
4.1 Problemas em Aberto	100
Referências Bibliográficas	102

Lista de Figuras

2.1	Exemplo de um grafo G , onde $\partial S \neq V - S$.	20
2.2	Exemplo de um grafo G em que os vértices sombreados formam um conjunto dominante total, com $\gamma_t(G) = 4$.	21
2.3	Exemplo de empacotamento.	22
2.4	Exemplo de um grafo G qualquer.	23
2.5	Matriz Laplaciana obtida a partir do grafo da Figura 2.4.	23
2.6	Exemplo de um grafo G e a excentricidade de cada vértice.	24
3.1	Exemplos de alianças defensivas.	28
3.2	Exemplo de aliança defensiva forte.	29
3.3	Exemplos de alianças defensivas globais.	30
3.4	Exemplos de grafos G em que os vértices sombreados de cada grafo formam um conjunto S , que é seguro.	31
3.5	Exemplo de um grafo G , onde $S = \{1, 3, 7\}$ é uma aliança defensiva, mas não é um conjunto seguro.	31
3.6	Exemplos de alianças ofensivas.	33
3.7	Exemplo de uma aliança defensiva global mínima, que não é uma aliança defensiva crítica.	34
3.8	Exemplo de um grafo $G = Q_3$.	35
3.9	Exemplo de um grafo G qualquer em que as k -alianças pertencem ao caso em que $a_{2l-1}(G) = a_{2l}(G)$. Por exemplo, $a_{-1}(G) = a_0(G) = 3$.	35
3.10	Exemplo de um grafo G qualquer em que as k -alianças pertencem ao caso em que $a_{2l}(G) = a_{2l+1}(G)$. Por exemplo, $a_0(G) = a_1(G) = 4$.	36
3.11	Exemplo de um grafo estrela, em que, para $k \geq 2$, k -alianças defensivas não existem.	36
3.12	Exemplo de um grafo em que $S = \{3\}$ é uma k -aliança defensiva para todo $k \leq -1$.	36
3.13	Exemplos de grafos ciclo e caminho, em que $a(P_4) = 1$ e $a(C_6) = \hat{a}(P_4) = \hat{a}(C_6) = 2$.	41
3.14	Exemplos de grafos roda, com $a(W_n) = 2$ e $\hat{a}(W_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$.	41
3.15	Exemplos de ciclos, em que $\gamma_a(C_n) = \gamma_{\hat{a}}(C_n) = \gamma_t(C_n)$.	42
3.16	Um grafo G , com $\gamma(G) = 7 = \{1, 8, 9, 12, 13, 16, 17\}$, $\gamma_a(G) = 9 = \{1, 2, 3, 14, 15, 18, 19, 20, 21\}$, $\gamma_{\hat{a}}(G) = \gamma_t(G) = 12 = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 16, 17\}$.	43
3.17	Exemplos de caminhos, em que $\gamma_{\hat{a}}(P_n) = \gamma_t(P_n)$.	43
3.18	Exemplo de grafo bipartido, com $r = 3$ e $s = 4$.	45
3.19	Exemplo de um grafo H_k com $\gamma_a(G) = \frac{2n}{\Delta+3}$.	47
3.20	Exemplo de um grafo M_k com $\gamma_{\hat{a}}(G) = \frac{2n}{\Delta+2}$.	47

3.21	Exemplo de uma árvore T e um caminho P_4 .	48
3.22	Exemplo de um grafo estrela $K_{1,s}$, com $\hat{a}(K_{1,s}) = 3$.	49
3.23	Exemplo de uma árvore T (à direita), obtida da árvore F (meio).	50
3.24	Exemplo de uma árvore T (à direita), obtida da árvore F (meio).	51
3.25	Exemplo de uma árvore $T \in \mathcal{T}_1$.	52
3.26	Exemplo de uma árvore $T \in \mathcal{T}_2$.	54
3.27	Exemplos de grafos 1,2,3,4,5-regular.	56
3.28	Exemplo de um grafo G qualquer e à direita seu grafo linha.	57
3.29	Exemplo de um grafo Produto Cartesiano $P_3 \times P_4$.	61
3.30	Exemplos de grafos grades.	62
3.31	Exemplos de grafos completos.	63
3.32	Exemplos de grafos infinitos.	65
3.33	Exemplo de uma árvore ternária infinita com $a(T_{3,\infty}) = \hat{a}(T_{3,\infty}) = \infty$.	66
3.34	Exemplo de um grafo G outerplanar.	66
3.35	Exemplo de grafos nos quais v é um vértice de corte.	67
3.36	Exemplos de grafos com $a(G) = \hat{a}(G) = 2$.	69
3.37	Exemplos de grafos com $a(G) = \hat{a}(G) = 3$.	70
3.38	Exemplo de grafo com $1 \leq a(G) \leq \hat{a}(G) \leq n$.	70
3.39	Exemplo de um grafo G qualquer em que $a(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ e $\hat{a}(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.	71
3.40	Grafo $G = \overline{K}_{2n} + K_n$, em que $\hat{a} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.	72
3.41	Exemplo de um grafo G qualquer, em que $a(G) = 2 \leq \hat{a}(G) = 3 \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = 4$.	75
3.42	Grafos com $\gamma_a(G) = 1, 2, 3$ e 3 , respectivamente (da esquerda para a direita).	77
3.43	Grafos com $\gamma_{\hat{a}}(G) = 1, 2$ e 3 , respectivamente (da esquerda para a direita).	78
3.44	Exemplo de um grafo G e ao lado um subgrafo D que domina G .	79
3.45	Construção de uma instância de GDA de uma instância de DS. Os vértices “componente” são representados por círculos vazios e as arestas “componente” são representadas por linhas pontilhadas.	91
3.46	Um grafo G' , uma aliança defensiva global S' em G' (vértices destacados por retângulos), e um vértice “não-componente” (destacado por um círculo) que só tem um vizinho em S' que é um vértice “componente”.	93

Lista de Tabelas

4.1	Visão geral sobre os números das alianças de algumas classes de grafos.	98
-----	---	----

Lista de Símbolos

Símbolo	Significado
$\langle S \rangle$	Subgrafo de G induzido pelo conjunto S
$g(v)$	Grau do vértice v
P_n	Grafo caminho
C_n	Grafo ciclo
W_n	Grafo roda, composto de um ciclo C_n e um vértice central
S_n	Grafo estrela
T	Árvore
T_i	Subárvore induzida por v_i e seus descendentes
t_i	Número de vértices em T_i
$K_{r,s}$	Grafo bipartido
$S_{r,s}$	Grafo estrela dupla
$\mathcal{L}(G)$	Grafo linha do grafo G
$G_1 \times G_2$	Produto Cartesiano entre os grafos G_1 e G_2
$G_{m,n}$	Grafo grade, resultante do Produto Cartesiano de dois caminhos P_m e P_n
K_n	Grafo completo
$\overline{K}_n$	Complemento do grafo completo K_n
$P_{1,\infty}$	Caminho infinito one-way
$P_{\infty,\infty}$	Caminho infinito two-way
$G_{\infty,\infty}$	Grade infinita
G_{∞}^d	Grade infinita d -dimensional
$T_{2,\infty}$	Árvore binária infinita com raiz
$T_{3,\infty}$	Árvore ternária infinita com raiz
$\Delta(G), \delta_1$	Grau máximo entre os vértices do grafo G
$\delta(G), \delta_n$	Grau mínimo entre os vértices do grafo G
$\gamma(G)$	Número de dominação do grafo G
$\gamma_t(G)$	Número de dominação total do grafo G
$\omega(G)$	Tamanho da maior clique no grafo G

$cintura(G)$	Menor ciclo sem cordas no grafo G
$lcc(G)$	Tamanho máximo de um ciclo sem cordas no grafo G
$\rho(G)$	Número de empacotamento do grafo G
$\mu(G)$	Conectividade algébrica de um grafo G
$\lambda(G)$	Conectividade de arestas de um grafo G
$d(v, w)$	Distância mínima entre os vértices v e w
$exc(v)$	Excentricidade do vértice v
$diam(G)$	Diâmetro do grafo G
$\chi(G)$	Número cromático do grafo G
$\beta_0(G)$	Número de independência do grafo G
$\kappa(G)$	Conectividade de vértices do grafo G
$a(G)$	Número da aliança defensiva
$\hat{a}(G)$	Número da aliança defensiva forte
$\gamma_a(G)$	Número da aliança defensiva global
$\gamma_{\hat{a}}(G)$	Número da aliança defensiva forte global
$s(G)$	Número de segurança
$a_k(G)$	Número da k -aliança defensiva
$a_o(G)$	Número da aliança ofensiva
$\gamma_o(G)$	Número da aliança ofensiva global
$a_p(G)$	Número da aliança poderosa
$\gamma_{a_p}(G)$	Número da aliança poderosa global
$\delta_S(v)$	Grau do vértice v no conjunto S
$\delta_{\bar{S}}(v)$	Grau do vértice v no complemento de S
$\delta(v)$	Grau do vértice v , em que $\delta(v) = \delta_S(v) + \delta_{\bar{S}}(v)$

Introdução

A linha de pesquisa Algoritmos e Grafos estuda objetos combinatórios conhecidos como grafos, fazendo o estudo teórico e aplicações de grafos, o desenvolvimento de algoritmos eficientes para a resolução de problemas e a análise teórica de algoritmos.

Muitos problemas da vida real podem ser modelados por grafos e podem ocorrer em diversas áreas da matemática, informática e em muitas aplicações industriais. Como grafos naturalmente são modelos para uma variedade de situações e problemas reais, eles têm um papel muito importante dentro da Ciência da Computação.

A Teoria dos Grafos, apesar de relativamente recente, tem crescido de forma acentuada devido a sua larga aplicação na modelagem de problemas de distribuição, tráfego e organização de processos, além de outros problemas essenciais.

Estudamos um conceito recente, o conceito de alianças em grafos, que foi apresentado em um congresso em 2003 e publicado em 2004 no artigo *Alliances in Graphs* [30]. Dele partiram outros artigos, como *A Note on Defensive Alliances in Graphs* [21], que foi publicado em 2003, antes do primeiro que foi escrito.

Esta pesquisa delimita-se em alianças defensivas em grafos, apresentando os teoremas e as contribuições mais importantes sobre o assunto, abrangendo também alianças defensivas globais, k -alianças defensivas e conjuntos seguros.

O objetivo é produzir uma dissertação com bom conteúdo, que sirva de embasamento teórico para posteriores estudos na área de alianças em grafos. Para isso, complementamos as provas mostradas nos artigos, mostramos alguns exemplos e fazemos algumas observações para facilitar o entendimento do leitor.

Uma das principais motivações deste estudo está na complexidade computacional dos parâmetros estudados; o problema de calcular o número da aliança defensiva pertence à classe de problemas NP-completo, como mostrado por Shafique [34] e Cami, Balakrishnan, Deo e Dutton [8]. Por outro lado, as alianças defensivas servem de modelo matemático para diversos problemas práticos e teóricos que vêm aparecendo na literatura em várias áreas do conhecimento, como é o caso de estrutura de dados [34], comunidades web [20] e [2], bioinformática (estudo do proteoma e genoma) [25], redes sociais e cadeias alimentares [39], entre outros. Um algoritmo de self-stabilizing distribuído para

encontrar alianças defensivas globais e ofensivas globais é exposto na tese de doutorado de Xu [41]. Estes algoritmos foram discutidos também por Xu e Srimani em [42] e também em [37].

Esse tema também foi escolhido devido à sua importância no estudo teórico de grafos e às suas aplicações em alianças formadas:

- Por pessoas que se unem por parentesco ou amizade. Um grupo de pessoas forma uma aliança defensiva quando seus membros têm maior quantidade de parentes ou amigos nesse grupo que em outro grupo.

De outra forma, seja S o conjunto formado pela família SILVA. S será uma aliança defensiva se, para cada membro da família, existem mais parentes na família SILVA do que fora dela.

- Por confederações entre estados soberanos. Em ciência política, uma confederação é uma associação de Estados soberanos, usualmente criada por meio de tratados, mas que pode eventualmente adotar uma constituição comum. Em termos políticos modernos, uma confederação é normalmente limitada a uma união permanente de Estados soberanos para o propósito de adotar uma ação comum frente a outros Estados. Esses Estados associados à confederação formam uma aliança defensiva, pois têm mais aliados junto aos Estados da confederação do que a outros Estados. De outra maneira, seja S o conjunto formado pelos membros da confederação CONF. Existe uma aliança defensiva se, para cada membro de CONF, ele tem mais tratados e mais aliados na confederação CONF que fora dela.

- Por membros de diferentes partidos políticos. Os membros de um partido formam uma aliança defensiva, porque têm mais aliados dentro do próprio partido do que em algum partido rival.

Em outras palavras, seja S o conjunto dos políticos filiados a um partido PART. S é uma aliança defensiva se os membros de S são, na sua maioria, do partido PART. Desse modo, podemos imaginar que existe uma aresta entre os membros do mesmo partido. Sendo assim, S é uma aliança defensiva.

- Nos negócios, por empresas com interesses econômicos comuns. As empresas que têm interesses econômicos comuns formam uma aliança defensiva, porque têm mais investidores/patrocinadores e apoio junto ao seu grupo do que junto a qualquer outro grupo que tenha outro interesse econômico.

Em outras palavras, seja S o conjunto de empresas de determinado ramo econômico. Esse conjunto é uma aliança defensiva se os investimentos/patrocínios de cada membro do grupo se concentra mais nesse grupo de empresas do que em outras empresas, que não fazem parte do grupo.

- Em tempos de guerra, por nações de apoio mútuo, geralmente de natureza defensiva, onde aliados são obrigados a unir forças se um ou mais deles são atacados.

De outra maneira, sejam X , Y e Z nações em guerra. Se X e Y fazem um acordo para que as tropas da nação X também proteja a nação Y e vice-versa, então $X \cup Y$ é uma aliança defensiva, pois os soldados de X e Y são aliados e buscam proteger-se mutuamente. Sendo assim, se a quantidade de soldados em $X \cup Y$ for maior que a quantidade em Z , Z não tem força suficiente para atacar $X \cup Y$. Dessa forma, $X \cup Y$ é uma aliança defensiva.

Alianças defensivas também são o modelo matemático de comunidades web, como citado anteriormente. Adotando a definição de comunidade web proposta por Flake, Lawrence e Giles [20], “uma comunidade na web é um conjunto de sites que tem mais links (em qualquer direção) para os membros da comunidade do que para os não-membros”.

Existem muitas aplicações de alianças defensivas e algumas foram listadas acima. Alianças defensivas globais têm aplicações similares, mas se aplicam aos casos em que todos os vértices do grafo estão envolvidos. No contexto de redes de computadores, um conjunto dominante S representa um conjunto de nós, em que cada um tem um recurso desejado, ou capacidade de serviço, tal como um grande banco de dados, e cada nó que não tem esse recurso ou deseja este serviço pode acessá-lo por meio do nó que tem distância no máximo um dele. Entretanto, se todos os nós de $V - S$ que são adjacentes a um nó particular $v \in S$ desejarem simultaneamente acessar um recurso através de v , então o nó v sozinho pode não estar apto a prover tal acesso. Mas se S é uma aliança defensiva global, então os vizinhos de v em S poderiam estar em número suficiente para satisfazer (dentro da distância dois) as demandas simultâneas dos vizinhos de v em $V - S$.

Nesta dissertação, estudamos as propriedades matemáticas das alianças defensivas, das k -alianças defensivas e dos conjuntos seguros e focamos principalmente nos números das alianças e em outros parâmetros conhecidos, como a ordem, o diâmetro, o número de independência, o número de dominação e a conectividade algébrica.

A dissertação está organizada em quatro capítulos. No Capítulo 2, apresentamos os conceitos preliminares necessários ao entendimento das alianças em grafos. No Capítulo 3, definimos alguns tipos de alianças existentes, bem como seus números, apresentamos os problemas relacionados à alianças em grafos e fazemos a revisão bibliográfica dos artigos mais relevantes, detalhando os resultados por classes de grafos. No Capítulo 4, apresentamos nossas conclusões e evidenciamos os problemas em aberto. Finalizamos com a apresentação das referências bibliográficas utilizadas.

Conceitos Preliminares

Neste capítulo, são introduzidos alguns conceitos fundamentais da Teoria dos Grafos, com a finalidade de estabelecer a terminologia e a notação necessárias ao entendimento do restante da dissertação, sendo o texto fundamentado nos livros de Haynes, Hedetniemi e Slater [26], Bondy e Murty [4], Diestel [10], Szwarcfiter [40] e na tese de doutorado de Sigarreta [36].

2.1 Definições e Notações

Seja $G = (V, E)$ um grafo tendo o conjunto de vértices V e o conjunto de arestas E . Se $|V| = n$ e $|E| = m$, dizemos que G é de *ordem* n e *tamanho* m . Para qualquer vértice $v \in V$, a *vizinhança aberta* de um vértice v é o conjunto $N(v) = \{u : uv \in E\}$, enquanto a *vizinhança fechada* de v é o conjunto $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. As vizinhanças aberta e fechada do conjunto de vértices $S \subseteq V$ são definidas como segue: $N(S) = \bigcup_{v \in S} N(v)$ e $N[S] = N(S) \cup S$. Similarmente, para um conjunto S , a *fronteira* de S é o conjunto $\partial S = N[S] - S$. Observe que não necessariamente a fronteira de S é igual a $V - S$, como podemos ver na Figura 2.1, em que $\partial S = \{2, 3, 6, 7\}$ e $V - S = \{2, 3, 6, 7, 8\}$.

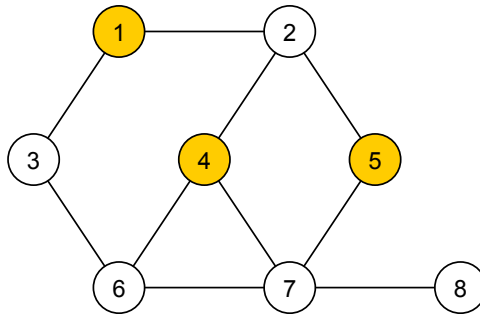


Figura 2.1: Exemplo de um grafo G , onde $\partial S \neq V - S$.

Um *subgrafo* de $G = (V, E)$ é um grafo $G' = (V', E')$ tal que $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$. G' é um *subgrafo próprio* se $G' \neq G$. Se G' for um subgrafo de G que, para todos os vértices

$v, w \in V'$, contém todas as arestas $(v, w) \in E$, então G' é um *subgrafo induzido* de G . Também podemos dizer que um subgrafo induzido é um grafo obtido através da remoção de um conjunto de vértices. Para um subconjunto não-vazio $S \subseteq V$, denotamos por $\langle S \rangle$ o subgrafo de G induzido por S . Se G' é um subgrafo de G , então G é um *supergrafo* de G' .

Dizemos que um conjunto $S \subseteq V$ é um *conjunto dominante* se $N[S] = V$, ou seja, $S \cup \partial S = V$. Um conjunto S é um *conjunto dominante total* ou *conjunto dominante aberto* se $N(S) = V$ ou, equivalentemente, se para todo $v \in V$, existe um $u \in S$, $u \neq v$, tal que u é adjacente a v . Em um conjunto dominante total, cada vértice é adjacente a outro vértice de S , incluindo os próprios vértices de S , isto é, nenhum vértice de S é um vértice isolado em $\langle S \rangle$. O *número de dominação*, denotado por $\gamma(G)$, é a cardinalidade mínima de um conjunto dominante (respectivamente, conjunto dominante total, denotado por $\gamma_t(G)$) de G , ou seja, é o tamanho do menor conjunto dominante (respectivamente, conjunto dominante total) minimal de um grafo.

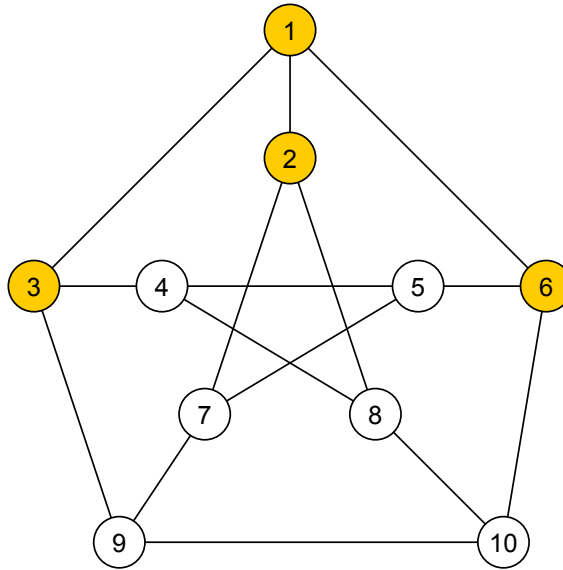


Figura 2.2: Exemplo de um grafo G em que os vértices sombreados formam um conjunto dominante total, com $\gamma_t(G) = 4$.

Nos referimos a um conjunto dominante (respectivamente, conjunto dominante total) mínimo de G como um conjunto- $\gamma(G)$ (respectivamente, conjunto- $\gamma_t(G)$). Na Figura 2.2, vemos que o conjunto formado pelos vértices $\{2, 3, 6\}$ é um conjunto dominante de cardinalidade mínima, ou seja, $\gamma(G) = 3$ e é um conjunto- $\gamma(G)$.

Um subgrafo completo G' é dito maximal se nenhum outro subconjunto próprio de G é maior que G' . Denomina-se *clique* o subgrafo maximal que é completo. O tamanho da maior clique em G é denotado por $\omega(G)$.

Designa-se como *grau de um vértice* v , denotado por $g(v)$, o número de arestas incidentes a v , isto é, $g(v) = |N(v)|$. O *grau máximo* dentre todos os vértices de um grafo

G é denotado por $\Delta(G)$ e o grau mínimo por $\delta(G)$. Um vértice que possui grau zero é denominado *isolado*.

Um *vértice final ou pendente*, de grau um, é aquele que é adjacente somente a um outro vértice. Um vértice final em uma árvore T é chamado de *folha*, enquanto que um *vértice suporte* de T é um vértice adjacente a uma folha.

A sequência de vértices $\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ para os quais $E = \{(v_i, v_{i+1}) | i = 1, \dots, k-1\} \cup \{(v_k, v_1)\}$ é denominada *ciclo*. Um grafo sem ciclos é denominado *acíclico*. O tamanho do menor ciclo no grafo G é chamado *cintura* de G e é denotado por $cintura(G)$. Um grafo sem ciclos tem uma cintura de comprimento infinito. Note que, por definição, um ciclo C_n de tamanho $cintura(G)$ não contém quaisquer *cordas*, isto é, arestas entre dois vértices não-consecutivos em C_n . Assim, por $lcc(G)$ entenda que é o tamanho máximo de um ciclo sem corda em um grafo G .

Um subconjunto $P \subset V$ é chamado um *empacotamento* em G se para todo vértice $v \in V$, $|N[v] \cap P| \leq 1$. O *número de empacotamento*, denotado por $\rho(G)$, é a cardinalidade máxima do empacotamento em G . Na Figura 2.3, vemos que $\rho(G) = 3$.

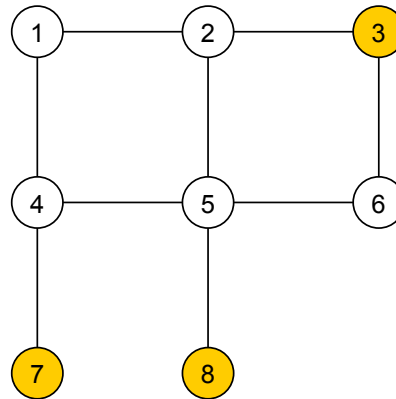


Figura 2.3: Exemplo de empacotamento.

Segundo Moretti, Bittencourt, André e Martha [32], a matriz Laplaciana $L(G)$ é uma matriz simétrica de ordem n , onde $n = |V|$. Os componentes l_{ij} de $L(G)$ são definidos como:

$$l_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{se } \{v_i, v_j\} \in E \\ g(v_i), & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } \{v_i, v_j\} \notin E \text{ e } i \neq j \end{cases}$$

Os autovalores de $L(G)$ podem ser ordenados da seguinte forma: $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq |V| = n$.

A *conectividade algébrica* de um grafo G , denotada por $\mu(G)$, é o segundo menor autovalor (λ_2) da matriz Laplaciana de G . Este autovalor é maior que 0 se e somente se G é um grafo conexo. A conectividade algébrica está relacionada com as conectividades dos vértices e arestas de um grafo.

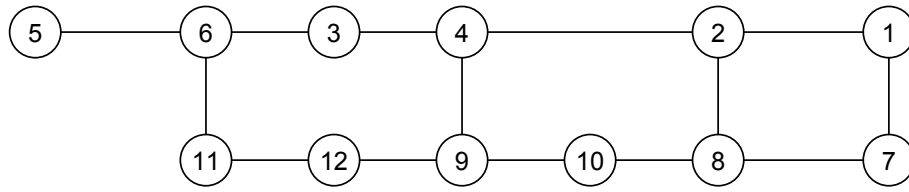


Figura 2.4: Exemplo de um grafo G qualquer.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Figura 2.5: Matriz Laplaciana obtida a partir do grafo da Figura 2.4.

A magnitude do valor da conectividade algébrica reflete quão bem conexo o grafo global é e tem sido utilizado na análise de sincronização e a vulnerabilidade de redes.

Sabe-se que este autovalor é provavelmente a informação mais importante. Ele está relacionado a diversas invariantes importantes e impõe limites razoavelmente bons sobre os valores de alguns parâmetros de grafos, que são muito difíceis de calcular.

Um *componente conexo* de um grafo G é um subgrafo maximal conexo em G .

Seja $\lambda(G)$ a *conectividade de arestas* de um grafo conexo G , que é igual ao número mínimo de arestas em um conjunto, que removido de G resulta em um grafo desconexo. Note que para um grafo conexo G qualquer, $\lambda(G) \leq \delta(G)$, isto é, um grafo conexo G pode sempre ser desconexo pela remoção de todas as arestas incidentes a um vértice de grau mínimo $\delta(G)$. Uma *aresta de corte*, também chamada de *ponte* ou *ístmio*, quando removida aumenta a quantidade de componentes conexos do grafo G .

A *conectividade de vértices* ou *número de conexidade do grafo* G , denotada por $\kappa(G)$, é o menor número de vértices cuja remoção torna G desconexo ou o reduz a um

único vértice. Um vértice cuja remoção aumenta a quantidade de componentes conexos de um grafo G é denominado *vértice de corte* ou *ponte de articulação*.

A *distância* $d(v, w)$ corresponde ao tamanho do menor caminho entre v e w no grafo G . Denomina-se *excentricidade de um vértice* v à maior distância de v a qualquer vértice do grafo G , ou seja, $exc(v) = \max\{d(v, w) : w \in V\}$. Podemos ver a excentricidade de cada vértice de um grafo G qualquer na Figura 2.6. Denomina-se *diâmetro de um grafo* G ao valor da excentricidade máxima de v no grafo G , ou seja, $diam(G) = \max\{exc(v) : v \in V\}$.

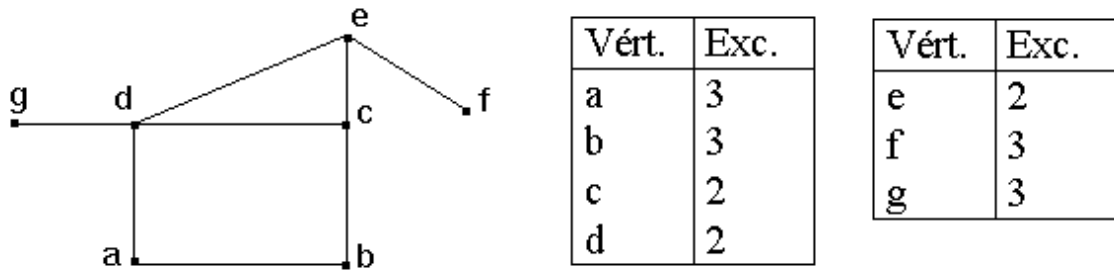


Figura 2.6: Exemplo de um grafo G e a excentricidade de cada vértice.

O mínimo k em que podemos particionar $V = \{S_1 \cup S_2 \cup S_3 \dots \cup S_k\}$, onde cada S_i é independente, é o *número cromático*, denotado por $\chi(G)$. Também podemos dizer que o número cromático de um grafo G é o mínimo de elementos em uma partição de $V(G)$ dentro de conjuntos independentes. Em coloração de grafos, o número cromático é o menor número de cores necessárias para colorir os vértices de um grafo, sem que vértices adjacentes tenham a mesma cor.

Um conjunto $S \subseteq V$ é um *conjunto independente* se nenhum par de vértices em S são adjacentes, ou seja, todos os vértices de S não são adjacentes entre si. O *número de independência*, denotado por $\beta_0(G)$, é a cardinalidade máxima de um conjunto independente em G . Um conjunto independente máximo é chamado conjunto- $\beta_0(G)$.

Para a correta interpretação das figuras desta dissertação, observe que os vértices contornados fortemente formam uma aliança forte e os vértices pontilhados devem ser adicionados aos vértices sombreados para que a aliança S seja forte.

2.2 Complexidade Computacional em Alianças

A **Teoria da Complexidade** tem como objetivo a classificação de problemas de acordo com o tempo necessário para encontrar sua solução. Em geral, uma questão muito importante é o modelo utilizado para medir o tempo. No entanto, em modelos

determinísticos, os requisitos de tempo não diferem muito e, desta forma, a escolha do modelo não é crucial, já que o sistema de classificação não é muito sensível a diferenças relativamente pequenas na complexidade.

De maneira específica, a Complexidade Computacional estabelece limites (inferior e superior) no número de passos necessários para resolver um problema computacional utilizando-se qualquer algoritmo, identifica problemas computacionais potencialmente difíceis, identifica traços comuns entre tais problemas e acumula evidências sobre a dificuldade de sua resolução.

Uma maneira de medirmos a eficiência de um algoritmo é através de sua complexidade. Segundo Szwarcfiter [40], “um algoritmo é eficiente precisamente quando a sua complexidade for um polinômio no tamanho de sua entrada”.

Segundo Cormen et al. [9] é natural questionar se todos os problemas podem ser resolvidos em tempo polinomial. A resposta é não. Por exemplo, existem problemas, como o famoso “Problema da parada (halting)” de Turing, que não podem ser resolvidos por qualquer computador, não importa quanto tempo seja fornecido. Também existem problemas que podem ser resolvidos, mas não no tempo $O(n^k)$ para qualquer constante k . Em geral, considera-se problemas que podem ser resolvidos por algoritmo de tempo polinomial como sendo *tratáveis*, e os problemas que exigem tempo superpolinomial como *intratáveis*, ou difíceis.

Problemas algorítmicos são aqueles formados por uma *instância*, que representa o conjunto de dados, e uma *questão*, que representa o objetivo a ser alcançado. A instância inclui todos os dados necessários para sua formulação e compreensão, enquanto a questão caracteriza o problema para o qual deve-se fornecer uma resposta.

Existem classes gerais nas quais os problemas algorítmicos podem estar inseridos. Falaremos sobre três delas: a classe dos problemas de decisão, localização e otimização.

Problemas de decisão são aqueles que exigem uma resposta afirmativa ou negativa para uma questão, ou seja, a resposta é simplesmente “sim” ou “não”.

Em um problema de localização, o objetivo é identificar uma estrutura que satisfaça um conjunto de propriedades fornecidas.

Por fim, um problema de otimização é aquele que possui como objetivo a satisfação de determinados critérios de otimização.

Em geral, existe um relacionamento entre as classes de problemas, sendo que um problema de decisão é menos difícil do que um problema de localização que, por sua vez, é menos difícil que um problema de otimização. Segundo Cormen et al [9], é simples reformular um problema de otimização como um problema de decisão não mais difícil que o primeiro.

Para um entendimento efetivo de algumas definições fornecidas na dissertação, definiremos as Classes P, NP e NPC (NP-Completo).

Antes de apresentarmos estas definições, é importante formalizar a noção de problemas que podem ser resolvidos em *Tempo Polinomial*. Em geral, esses problemas são considerados tratáveis de acordo com os três argumentos a seguir, apresentados em Cormen et al [9]:

- (i) Uma vez que um algoritmo de tempo polinomial para um problema é descoberto, algoritmos mais eficientes frequentemente o seguem. Isto significa que um problema resolvido por um algoritmo com complexidade $O(n^{100})$ deveria ser considerado intratável. No entanto, há uma quantidade ínfima de problemas práticos aos quais esta complexidade se aplica e, para estes problemas, é bastante provável que um algoritmo com menor tempo de execução logo seja descoberto.
- (ii) Um problema que pode ser resolvido em tempo polinomial em um modelo pode ser resolvido em tempo polinomial de forma similar em outro modelo.
- (iii) A classe de problemas que podem ser resolvidos em tempo polinomial têm propriedades de fechamento interessantes, pois os polinômios são fechados sob a adição, a multiplicação e a composição. Por exemplo, se a saída de um algoritmo de tempo polinomial é alimentada na entrada de outro, o algoritmo composto é polinomial.

Em geral, para classificar um problema como pertencente à classe P, NP ou NPC é analisado o problema de decisão associado a ele. Isto ocorre devido ao fato de que esta classe é a mais simples dentre as três citadas. Além disso, qualquer prova de que um problema de decisão seja intratável pode ser estendida aos demais casos.

2.2.1 A Classe P

“A classe P consiste nos problemas que podem ser resolvidos em tempo polinomial. Mais especificamente, são problemas que podem ser resolvidos no tempo $O(n^k)$ para alguma constante k , onde n é o tamanho da entrada para o problema” Cormen et al [9]. Dessa forma, dizemos que um problema pode ser resolvido em tempo polinomial se existe um algoritmo de tempo $O(n^k)$ que o solucione.

Portanto, podemos definir formalmente a classe P como o conjunto de problemas de decisão que podem ser resolvidos em tempo polinomial.

2.2.2 A Classe NP

Segundo Cormen et al [9], *“A classe NP consiste nos problemas que são verificáveis em tempo polinomial”*. Ou seja, se for fornecido um certificado de uma

solução, é possível verificar sua validade em tempo polinomial de acordo com o tamanho da entrada para o problema.

Podemos perceber, através desta definição, que qualquer problema na classe P pertence a NP, pois este pode ser resolvido em tempo polinomial e o certificado pode ser o próprio algoritmo.

De acordo com Szwarcfter [40], *“Define-se a classe NP como sendo aquela que compreende todos os problemas de decisão D, tais que existe uma justificativa à resposta SIM para D, cujo passo de reconhecimento pode ser realizado por um algoritmo polinomial no tamanho da entrada de D”*.

2.2.3 A Classe NPC

De acordo com Cormen et al [9], *“Um problema está na classe NPC - e vamos nos referir a ele como um problema NP-completo - se ele está em NP e é tão difícil quanto qualquer problema em NP”*.

Existem algumas técnicas para mostrar que um problema é NP-completo. Mostrando isso, estamos fazendo uma declaração sobre a dificuldade para resolver o problema evidenciando o quanto ele é difícil e não o quanto é fácil.

O método da redutibilidade consiste na realização da transformação, em tempo polinomial, da saída de um problema na entrada de outro. De forma geral, um problema está na classe NPC se ele está em NP e existe uma redução de um problema NPC conhecido a ele.

Devido à redutibilidade, se encontrarmos uma solução polinomial para qualquer problema em NP-completo, então todo problema NP-completo pode ser resolvido em tempo polinomial.

A maioria dos teóricos da ciência da computação acredita que os problemas nesta classe são intratáveis, visto que existe uma grande quantidade de problemas nesta faixa e até hoje não encontrou-se nenhum algoritmo polinomial para resolvê-los.

Alianças em Grafos

Alianças em grafos é um conceito recente, que foi formalizado em 2003. Neste capítulo, são abordados alguns dos principais aspectos relacionados a esse assunto, visando entender sua conceituação e alguns dos resultados teóricos. Para tanto, definimos os tipos de alianças na Seção 3.1, definimos os números de cada tipo de aliança na Seção 3.2, apresentamos alguns problemas relacionados à alianças em grafos na Seção 3.3 e finalizamos com alguns dos resultados conhecidos separados por classes de grafos na Seção 3.4.

De forma bem simples, uma *aliança* é um conjunto de vértices que tem alguma propriedade coletiva. Entretanto, como no mundo real, há diferentes tipos de alianças e definimos alguns deles a seguir.

3.1 Tipos de Alianças

Nesta seção, apresentamos algumas definições dos diversos tipos de alianças existentes.

Definição 3.1 Um conjunto não-vazio de vértices $S \subseteq V$ é chamado uma *aliança defensiva* se e somente se para todo $v \in S$, $|N[v] \cap S| \geq |N[v] - S|$, ou seja, para todo vértice $v \in S$, v tem no máximo um vizinho a mais em $V - S$ que em S , como vemos nos grafos da Figura 3.1.

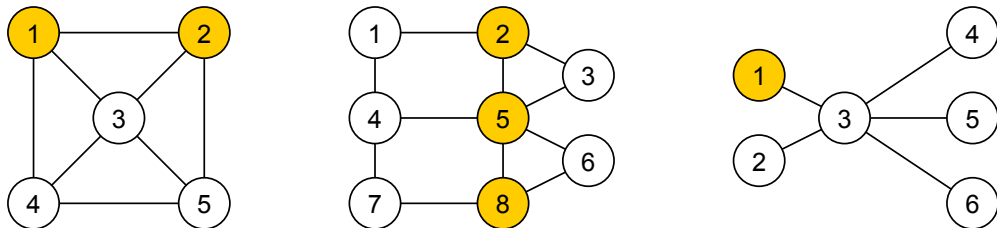


Figura 3.1: Exemplos de alianças defensivas.

Usando questões de segurança nacional para ilustrar este conceito, pode-se pensar que um vértice na aliança defensiva é um vértice capaz de se defender e defender seus vizinhos aliados.

Visto que cada vértice tem pelo menos o mesmo tanto de vizinhos em S (considerando a vizinhança fechada) que em $V - S$, os vértices em S se apoiam mutuamente e, devido a sua quantidade, dizemos que todo vértice em S pode ser *defendido* de um possível ataque por vértices em $V - S$. Quaisquer dois vértices u, v na aliança S são chamados *aliados* (com relação a S).

Podemos pensar sobre os vértices de $N[v] - S$ como *potenciais agressores* de v e daqueles em $N[v] \cap S$ como *potenciais defensores* de v . Assim, para um v qualquer em uma aliança defensiva, há pelo menos tantos defensores quanto agressores e qualquer ataque a um único vértice pode ser impedido.

Na Figura 3.1, vemos que os vértices sombreados são aliados e se apoiam mutuamente para se protegerem dos vértices brancos. Usando questões de segurança nacional, um combate entre S e $V - S$ resultaria em, no máximo, um empate entre os dois inimigos.

Definição 3.2 Uma aliança defensiva é chamada forte se para todo vértice $v \in S$, $|N[v] \cap S| > |N[v] - S|$, ou seja, a inequação é estrita. Neste caso, dizemos que todo vértice em S é fortemente defendido.

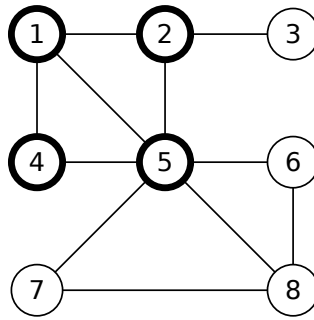


Figura 3.2: Exemplo de aliança defensiva forte.

Na Figura 3.2, podemos observar que os vértices fortemente contornados ($S = \{1, 2, 4, 5\}$) formam uma aliança defensiva forte, pois todo vértice em S tem mais vizinhos em S que em $V - S$.

Definição 3.3 Uma aliança defensiva (forte) S é chamada crítica se nenhum subconjunto próprio de S é também uma aliança defensiva (forte).

Definição 3.4 Uma aliança defensiva é chamada global se ela afeta todo vértice em $V - S$, isto é, todo vértice em $V - S$ é adjacente a pelo menos um membro da aliança S . Neste caso, S é um conjunto dominante.

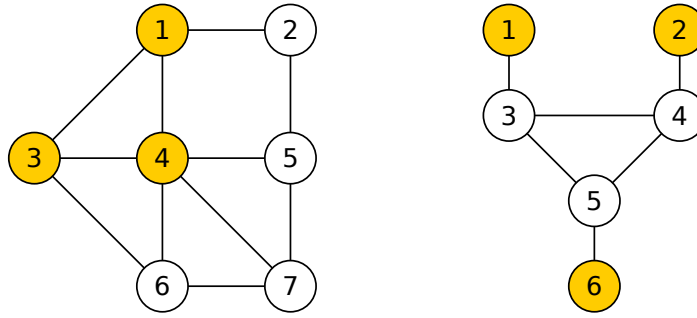


Figura 3.3: Exemplos de alianças defensivas globais.

Na Figura 3.3, percebemos que os vértices brancos são vizinhos de pelo menos um vértice sombreado, então os vértices sombreados formam uma aliança defensiva global.

Definição 3.5 Um conjunto seguro $S \subseteq V$ do grafo $G = (V, E)$ é um conjunto no qual todo subconjunto não-vazio pode ser defendido com sucesso de um ataque, sob as definições apropriadas de “ataque” e “defesa”. O conjunto S é seguro quando $|N[X] \cap S| \geq |N[X] - S|$, para todo $X \subseteq S$.

Um conjunto $S \subseteq V$ é seguro se qualquer subconjunto $X \subseteq S$ pode ser defendido de um ataque, diferentemente das alianças defensivas, em que cada vértice é verificado isoladamente.

Há várias maneiras de definir como um conjunto é atacado e defendido. Uma discutida por Brigham, Dutton e Hedetniemi [7] e considerada aqui, assume que um agressor u (um membro de $N[X] - S$) pode atacar somente um único vértice de X em um determinado momento, mesmo que u seja um vizinho de vários vértices de X . Além disso, um defensor v (um membro de $N[X] \cap S$) pode impedir, de cada vez, somente um agressor dos vértices de $N[X] \cap S$. Observe que um defensor v necessita somente estar em S e não necessariamente em X . A definição formal segue.

Definição 3.6 (Dutton [16])

- (i) Seja $G = (V, E)$ um grafo. Para qualquer $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\} \subseteq V$ um ataque em S são quaisquer k conjuntos $A = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ mutuamente disjuntos para os quais $A_i \subseteq N[s_i] - S$, $1 \leq i \leq k$. Uma defesa de S são quaisquer conjuntos $D = \{D_1, D_2, \dots, D_k\}$ mutuamente disjuntos para os quais $D_i \subseteq N[s_i] \cap S$, $1 \leq i \leq k$. Um ataque de A é defensável se existe uma defesa D tal que $|D_i| \geq |A_i|$ para $1 \leq i \leq k$.
- (ii) O conjunto S é seguro se e somente se todo ataque em S é defensável.

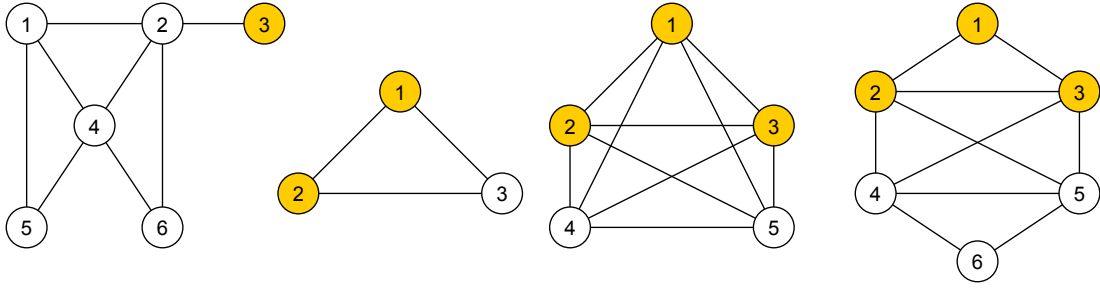


Figura 3.4: Exemplos de grafos G em que os vértices sombreados de cada grafo formam um conjunto S , que é seguro.

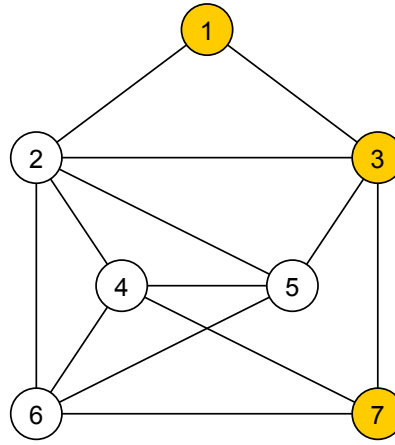


Figura 3.5: Exemplo de um grafo G , onde $S = \{1, 3, 7\}$ é uma aliança defensiva, mas não é um conjunto seguro.

Definição 3.7 Um conjunto seguro S é crítico se nenhum subconjunto próprio de S é seguro. Sendo assim, $s(G)$ é a cardinalidade de um conjunto seguro mínimo crítico de G .

Usaremos extensivamente o teorema seguinte, provado por Brigham, Dutton e Hedetniemi [7].

Teorema 3.8 (Brigham, Dutton e Hedetniemi [7])

O conjunto $S \subseteq V$ é um conjunto seguro se e somente se $\forall X \subseteq S, |N[X] \cap S| \geq |N[X] - S|$.

As propriedades matemáticas das alianças em grafos foram estudadas inicialmente por Kristiansen, Hedetniemi e Hedetniemi [30]. Eles propuseram diferentes tipos de alianças: defensivas, ofensivas e dual ou poderosas. Uma generalização destas alianças, chamada k -alianças, foi apresentada por Shafique [34].

Definição 3.9 Um conjunto não-vazio $S \subseteq V$ é uma k -aliança defensiva em $G = (V, E)$, $k \in \{-\delta_1, \dots, \delta_1\}$, se para todo $v \in S$,

$$\delta_S(v) \geq \delta_{\bar{S}}(v) + k. \quad (3-1)$$

Um vértice $v \in S$ é chamado k -satisfeito pelo conjunto S se a equação 3-1 é válida. Observe que a equação 3-1 é equivalente a:

$$\delta(v) \geq 2\delta_{\bar{S}}(v) + k. \quad (3-2)$$

Podemos ver que as equações 3-1 e 3-2 são equivalentes da seguinte forma:

$$\delta_S(v) \geq \delta_{\bar{S}}(v) + k \Leftrightarrow \delta(v) \geq 2\delta_{\bar{S}}(v) + k.$$

Adicionando $\delta_{\bar{S}}(v)$ dos dois lados da primeira equação, temos:

$$\delta_S(v) + \delta_{\bar{S}}(v) \geq \delta_{\bar{S}}(v) + k + \delta_{\bar{S}}(v)$$

Substituindo $\delta_S(v) + \delta_{\bar{S}}(v)$ por $\delta(v)$ temos que:

$$\delta(v) \geq 2\delta_{\bar{S}}(v) + k \Leftrightarrow \delta(v) \geq 2\delta_{\bar{S}}(v) + k$$

Uma (-1) -aliança defensiva é também chamada de *aliança defensiva* e uma 0-aliança defensiva é uma *aliança defensiva forte*. Uma 0-aliança defensiva é também conhecida como *conjunto coeso*.

Para ver a equivalência entre (-1) -aliança defensiva e aliança defensiva, vejamos abaixo:

$$\delta_S(v) \geq \delta_{\bar{S}}(v) + k \Leftrightarrow |N[v] \cap S| \geq |N[v] - S|$$

Como $k = -1$ e $|N[v] \cap S| = |N_S(v)|$, temos:

$$\delta_S(v) \geq \delta_{\bar{S}}(v) - 1 \Leftrightarrow |N_S(v)| \cup \{v\} \geq |N[v] - S|$$

Substituindo $|N[v] - S|$ por $|N_{\bar{S}}(v)|$, temos:

$$\Leftrightarrow |N_S(v)| + 1 \geq |N_{\bar{S}}(v)|$$

$$\Leftrightarrow |N_S(v)| \geq |N_{\bar{S}}(v)| - 1$$

$$\delta_S(v) \geq \delta_{\bar{S}}(v) - 1 \Leftrightarrow \delta_S(v) \geq \delta_{\bar{S}}(v) - 1$$

Portanto, concluímos que as duas equações são equivalentes.

Vemos a equivalência entre 0-aliança defensiva e aliança defensiva forte logo abaixo:

$$\delta_S(v) \geq \delta_{\bar{S}}(v) + k \Leftrightarrow |N[v] \cap S| > |N[v] - S|$$

Como $k = 0$ e $|N[v] \cap S| = |N_S(v)|$, temos:

$$\delta_S(v) \geq \delta_{\bar{S}}(v) + 0 \Leftrightarrow |N_S(v)| \cup \{v\} > |N[v] - S|$$

$$\delta_S(v) \geq \delta_{\bar{S}}(v) \Leftrightarrow |N_S(v)| \cup \{v\} > |N[v] - S|$$

Substituindo $|N[v] - S|$ por $|N_{\bar{S}}(v)|$, temos:

$$\Leftrightarrow |N_S(v)| + 1 > |N_{\bar{S}}(v)|$$

$$\Leftrightarrow |N_S(v)| > |N_{\bar{S}}(v)| - 1$$

Sem perda de generalidade, temos que:

$$\Leftrightarrow |N_S(v)| \geq |N_{\bar{S}}(v)|$$

$$\delta_S(v) \geq \delta_{\bar{S}}(v) \Leftrightarrow \delta_S(v) \geq \delta_{\bar{S}}(v)$$

Logo, concluímos que as duas equações são equivalentes.

Definição 3.10 Um conjunto não-vazio de vértices $S \subseteq V$ é chamado uma *aliança ofensiva* se e somente se para todo $v \in \partial S$, $|N[v] \cap S| \geq |N[v] - S|$, ou seja, para todo vértice $v \in V - S$, que é adjacente a um vértice em S , v tem mais vizinhos em S que em $V - S$.

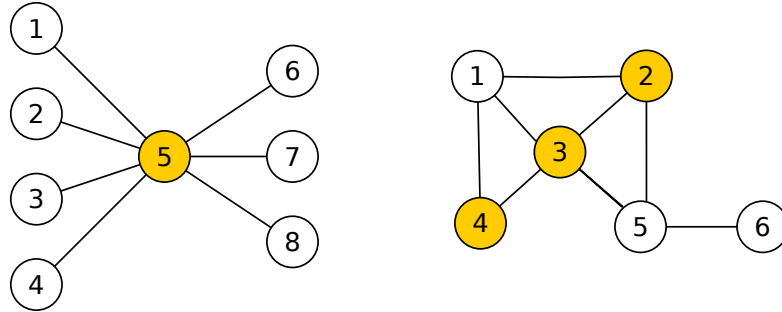


Figura 3.6: Exemplos de alianças ofensivas.

Na Figura 3.6, os vértices brancos têm mais vizinhos sombreados do que brancos. Visto que cada vértice em ∂S tem mais vizinhos em S que em $V - S$, dizemos que todo vértice em ∂S é *vulnerável* a um possível ataque pelos vértices em S . Quando um ataque por vértices em S nos vértices em $V - S$ resulta em pelo menos um empate para S , dizemos que S pode *efetivamente atacar* os vértices em ∂S .

Devemos observar que as alianças em grafos não se preocupam com a representação das consequências de um ataque dos vértices de S em $V - S$ e vice-versa.

Definição 3.11 Um conjunto não-vazio de vértices $S \subseteq V$ é chamado uma *aliança poderosa* se e somente se o conjunto S é uma aliança defensiva e ofensiva ao mesmo tempo, ou seja, para todo vértice $v \in N[S]$, $|N[v] \cap S| \geq |N[v] - S|$.

3.2 Alguns Parâmetros para Alianças

Na seção anterior, definimos alguns tipos de alianças. Nesta seção, definimos os respectivos números das alianças.

Definição 3.12 O número da aliança defensiva, denotado por $a(G)$, é a cardinalidade mínima de qualquer aliança defensiva crítica de G e o número da aliança defensiva forte, denotado por $\hat{a}(G)$, é a cardinalidade mínima de qualquer aliança defensiva crítica forte de G .

Definição 3.13 O número da aliança defensiva global, denotado por $\gamma_a(G)$, é igual à cardinalidade mínima de uma aliança defensiva global em G e $\gamma_{\hat{a}}(G)$ é a cardinalidade mínima de uma aliança defensiva forte global de G .

Observe que uma aliança defensiva global de cardinalidade mínima não necessariamente é uma aliança defensiva crítica e uma aliança defensiva crítica não necessariamente é um conjunto dominante, como vemos na Figura 3.7. Também podemos ver que $S = \{1\}$ é uma aliança defensiva crítica, mas não é um conjunto dominante.

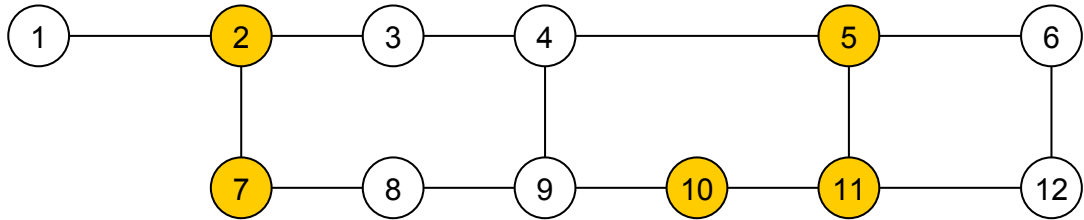


Figura 3.7: Exemplo de uma aliança defensiva global mínima, que não é uma aliança defensiva crítica.

É observado na Proposição 3.53 que qualquer aliança defensiva crítica (forte) S em um grafo G deve induzir um subgrafo conexo de G . Isto é óbvio, visto que qualquer componente do subgrafo induzido $\langle S \rangle$ é uma aliança defensiva (do mesmo tipo) estritamente menor. Entretanto, para uma aliança defensiva global isto não necessariamente é verdade. Por exemplo, os dois vértices finais de um caminho P_4 formam uma aliança defensiva global e seu subgrafo induzido $\langle S \rangle$ não é conexo.

Definição 3.14 A cardinalidade de um conjunto seguro mínimo em um grafo G é o número de segurança de G e é denotado por $s(G)$. Um conjunto seguro de cardinalidade $s(G)$ é chamado conjunto- $s(G)$ ou simplesmente conjunto- s .

Definição 3.15 O número da k -aliança defensiva, denotado por $a_k(G)$, é igual à cardinalidade mínima de uma k -aliança defensiva.

O número da (-1) -aliança defensiva de G é conhecido como o número da aliança defensiva de G e o número da 0 -aliança defensiva de G é conhecido como o número da aliança defensiva forte. Por exemplo, no caso do grafo 3-cubo, $G =$

Q_3 , todo conjunto composto por dois vértices adjacentes é uma aliança defensiva de cardinalidade mínima e todo conjunto composto por quatro vértices, cujo subgrafo induzido é isomorfo ao ciclo C_4 , é uma aliança defensiva forte de cardinalidade mínima. Deste modo, $a_{-1}(Q_3) = 2$ e $a_0(Q_3) = 4$, como vemos na Figura 3.8.

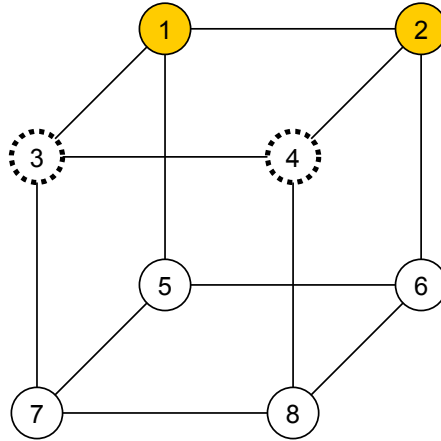


Figura 3.8: Exemplo de um grafo $G = Q_3$.

Observação 3.16 (Rodríguez-Velázquez, Yero e Sigarreta [33])

Se todo vértice de G tem grau par e k é ímpar, $k = 2l - 1$, logo toda $(2l - 1)$ -aliança em G é uma $(2l)$ -aliança defensiva. Consequentemente, em tal caso, $a_{2l-1}(G) = a_{2l}(G)$, como podemos ver na Figura 3.9. Analogamente, se todo vértice de G tem grau ímpar e k é par, $k = 2l$, então toda $(2l)$ -aliança em G é uma $(2l + 1)$ -aliança defensiva. Portanto, neste caso, $a_{2l}(G) = a_{2l+1}(G)$, como vemos na Figura 3.10.

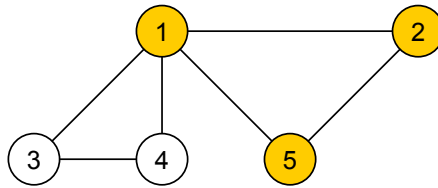


Figura 3.9: Exemplo de um grafo G qualquer em que as k -alianças pertencem ao caso em que $a_{2l-1}(G) = a_{2l}(G)$. Por exemplo, $a_{-1}(G) = a_0(G) = 3$.

Para alguns grafos, há alguns valores de $k \in \{-\delta_1, \dots, \delta_1\}$ tal que k -alianças defensivas não existem. Por exemplo, para $k \geq 2$ no caso do grafo estrela S_n , k -alianças defensivas não existem, como vemos na Figura 3.11.

Da equação 3-2 pode-se concluir que, em qualquer grafo, existem k -alianças defensivas para todo $k \in \{-\delta_1, \dots, \delta_n\}$, pois para $\forall v \in S$, $\delta_n \leq \delta(v) \leq \delta_1$. Se $S = V$, então

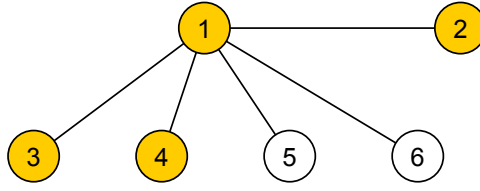


Figura 3.10: Exemplo de um grafo G qualquer em que as k -alianças pertencem ao caso em que $a_{2l}(G) = a_{2l+1}(G)$. Por exemplo, $a_0(G) = a_1(G) = 4$.

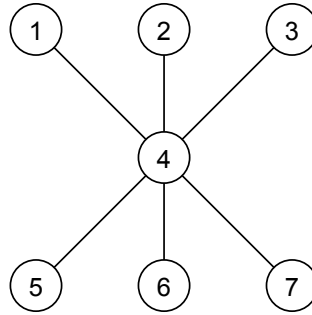


Figura 3.11: Exemplo de um grafo estrela, em que, para $k \geq 2$, k -alianças defensivas não existem.

é válida a seguinte inequação: $\delta(v) \geq \delta_n \geq 0 + \delta_n \geq \delta_{\bar{S}}(v) + k$, porque $\delta_n \geq k$ para todo $k \in \{-\delta_1, \dots, -\delta_n, \dots, 0, \dots, \delta_n\}$. Por exemplo, uma (δ_n) -aliança defensiva em $G = (V, E)$ é V , mas não necessariamente a_{δ_n} é V , como vemos na Figura 3.12, tomando $S = \{1, 2, 4, 6\}$. Além disso, se $v \in V$ é um vértice de grau mínimo, $\delta(v) = \delta_n$, então $S = \{v\}$ é uma k -aliança defensiva para todo $k \leq -\delta_n$.

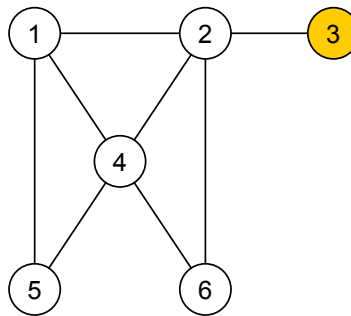


Figura 3.12: Exemplo de um grafo em que $S = \{3\}$ é uma k -aliança defensiva para todo $k \leq -1$.

Como $a_k(G) = 1$ para $k \leq -\delta_n$, daqui para frente consideramos apenas os casos em que $-\delta_n \leq k \leq \delta_1$. Além disso, os limites mostrados aqui em $a_k(G)$, para $\delta_n \leq k \leq \delta_1$, foram obtidos considerando a existência de k -alianças defensivas no grafo G .

Apresentamos agora algumas definições e notações dos números das alianças anteriormente definidas.

Definição 3.17 *O número da aliança ofensiva, denotado por $a_o(G)$, é igual à cardinalidade mínima de uma aliança ofensiva em G .*

Definição 3.18 *O número da aliança ofensiva global, denotado por $\gamma_o(G)$, é igual à cardinalidade mínima de uma aliança ofensiva global em G .*

Definição 3.19 *O número da aliança poderosa, denotado por $a_p(G)$, é igual à cardinalidade mínima de uma aliança poderosa em G .*

Definição 3.20 *O número da aliança poderosa global, denotado por $\gamma_{a_p}(G)$, é igual à cardinalidade mínima de uma aliança poderosa global em G .*

O conjunto de vértices V completo é uma aliança poderosa global (*gpa*) para um grafo G qualquer, então para todo grafo G existe $\gamma_{a_p}(G)$. Observe que uma *gpa* de cardinalidade mínima não é necessariamente uma aliança poderosa crítica e uma aliança poderosa crítica não é necessariamente uma *gpa*.

Visto que toda aliança poderosa global (*gpa*) de um grafo G é ao mesmo tempo um conjunto dominante e uma aliança poderosa, $\max\{\gamma(G), a_p(G)\} \leq \gamma_{a_p}(G)$, onde $\gamma(G)$ é o número de dominação de G .

Como o número das alianças defensiva, defensiva global, k -aliança defensiva, ofensiva ou poderosa é a cardinalidade mínima em qualquer de seus componentes, somente consideramos grafos G conexos.

Para o grafo G , iremos considerar as seguintes classes de alianças:

- $\mathcal{A}(G)$, a classe das alianças defensivas críticas em G ,
- $\hat{\mathcal{A}}(G)$, a classe das alianças defensivas críticas fortes em G ,
- $\mathcal{A}_o(G)$, a classe das alianças ofensivas críticas em G ,
- $\hat{\mathcal{A}}_o(G)$, a classe das alianças ofensivas críticas fortes em G .

Associadas a cada uma destas classes de alianças críticas, estão duas invariantes, como segue:

- $a(G) = \min\{|S| : S \in \mathcal{A}(G)\}$, o número da aliança defensiva de G ,
- $A(G) = \max\{|S| : S \in \mathcal{A}(G)\}$, o número superior da aliança defensiva de G ,
- $\hat{a}(G) = \min\{|S| : S \in \hat{\mathcal{A}}(G)\}$, o número da aliança defensiva forte de G ,
- $\hat{A}(G) = \max\{|S| : S \in \hat{\mathcal{A}}(G)\}$, o número superior da aliança defensiva forte de G ,
- $a_k(G)$ = o número da k -aliança defensiva de G ,
- $A_k(G)$ = o número superior da k -aliança defensiva de G ,

- $\hat{a}_k(G)$ = o número da k -aliança defensiva forte de G ,
- $\hat{A}_k(G)$ = o número superior da k -aliança defensiva forte de G ,
- $a_o(G) = \min\{|S| : S \in \mathcal{A}_o(G)\}$, o número da aliança ofensiva de G ,
- $A_o(G) = \max\{|S| : S \in \mathcal{A}_o(G)\}$, o número superior da aliança ofensiva de G ,
- $\hat{a}_o(G) = \min\{|S| : S \in \hat{\mathcal{A}}_o(G)\}$, o número da aliança ofensiva forte de G ,
- $\hat{A}_o(G) = \max\{|S| : S \in \hat{\mathcal{A}}_o(G)\}$, o número superior da aliança ofensiva forte de G ,
- $\gamma_a(G)$ = o número da aliança defensiva global de G ,
- $\gamma_{\hat{a}}(G)$ = o número da aliança defensiva forte global de G ,
- $a_p(G)$ = o número da aliança poderosa de G ,
- $\hat{a}_p(G)$ = o número da aliança poderosa forte de G ,
- $s(G)$ = o número de segurança de G .

Segundo Shafique [34], as seguintes inequações são consequências destas definições:

- (i) $a_{-1}(G) = a(G) \leq \hat{a}(G) = a_o(G) \leq \hat{A}(G) = A_o(G)$,
- (ii) $a(G) \leq A(G) = A_{-1}(G)$,
- (iii) $a(G) \leq \gamma_a(G)$,
- (iv) $\hat{a}(G) \leq \gamma_{\hat{a}}(G)$,
- (v) $a_o(G) \leq \hat{a}_o(G) \leq \hat{A}_o(G)$,
- (vi) $a_o(G) \leq A_o(G)$.

3.3 Problemas Relacionados

Embora o conceito de alianças em grafos seja recente, conceitos similares a alianças defensivas e ofensivas podem ser encontrados na literatura. Entre os mais recentes deles está o de uma *2-partição não-amigável* de um grafo $G = (V, E)$ no qual tem-se uma partição $\pi = \{V_0, V_1\}$, tendo a propriedade que todo vértice $v \in V_i$ é adjacente a pelo menos tantos vértices em V_{1-i} como é a vértices em V_i . Observando as alianças, 2-partições não-amigáveis quase correspondem a uma partição de V em duas alianças ofensivas. Se a definição de uma 2-partição não-amigável for mudada como segue, então ela corresponde a uma partição de V em duas alianças ofensivas globais. Uma 2-partição $\pi = \{V_0, V_1\}$ é chamada *muito não-amigável* se todo vértice $v \in V_i$ é adjacente a *mais* vértices em V_{1-i} que é a vértices em V_i . Um simples exemplo de uma partição muito não-amigável pode ser visto pela 2-coloração de vértices de um grafo conexo bipartido G , tendo grau mínimo pelo menos dois. As duas classes de cores em tal coloração, chamadas V_0 e V_1 , definem uma 2-partição muito não-amigável; cada um de V_0 e V_1 é uma aliança ofensiva forte global.

Borodin e Kostochka [5] provavelmente introduziram, em 1977, 2-partições não-amigáveis e elas também foram estudadas por Bernardi [3], Aharoni, Milner e Prikry [1] e Milner e Shelah [31]. O básico destas investigações é que todo grafo finito tem uma 2-partição não-amigável. De fato, qualquer 2-partição $\pi = \{V_0, V_1\}$ de V que maximize o número de arestas entre V_0 e V_1 é uma 2-partição não-amigável. Milner e Shelah [31] mostraram que nem todos grafos infinitos têm uma 2-partição não-amigável, mas todos os grafos têm uma 3-partição não-amigável.

Um conceito similar foi estudado por Gerber e Kobler [22], que definem que um vértice v em um conjunto $A \subset V$ está *satisfeito* se ele tem pelo menos tantos vizinhos em A que em $V - A$. Um conjunto A é chamado *coeso* se todo vértice em A é satisfeito com relação a A . É fácil ver que todo conjunto coeso é uma aliança defensiva forte. Um grafo é dito *satisfatível* se há uma partição de vértices em dois ou mais conjuntos não-vazios em que todo vértice é satisfeito com relação ao conjunto no qual ocorrem. Tal partição é chamada *partição satisfatória*. Partições satisfatórias correspondem, dessa forma, a partições de V em alianças defensivas fortes disjuntas. Pode ser observado que nem todos grafos tem partições satisfatórias, por exemplo, grafos completos. Shafique e Dutton [35] apresentam algumas condições necessárias e suficientes para grafos serem satisfeitos e mostram que nenhuma caracterização de subgrafo proibida existe para esta classe de grafos.

Dunbar, Goddard, Hedetniemi, Henning e McRae [12], Dunbar, Hedetniemi, Henning e McRae ([14], [11]), Favaron [18] e Hatting, Henning e Slater [23] têm estudado funções dominantes com sinal e negativa em grafos, que são definidas em seguida. Uma função $f : V \rightarrow \{-1, 1\}$ é chamada *função dominante com sinal* se para todo vértice $v \in V$, $f(N[v]) \geq 1$, ou seja, para todo $v \in V$, a vizinhança fechada de v contém mais vértices com o valor da função 1 que -1. O símbolo $f[v]$ denota a soma $\sum_{x \in N[v]} f(x)$. Em outras palavras, se $\pi = \{V_{-1}, V_1\}$ é a 2-partição definida por f^{-1} , então o conjunto V_1 é uma aliança defensiva forte global e também uma aliança ofensiva forte global. Similarmente, uma função $f : V \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ é chamada *função de dominação negativa* se para todo vértice $v \in V$, $f(N[v]) \geq 1$, ou seja, se a soma dos valores da sua função sobre a vizinhança fechada é pelo menos um. Em outras palavras, se $\pi = \{V_{-1}, V_0, V_1\}$ é a 3-partição definida por f^{-1} , então o conjunto V_1 é uma aliança defensiva forte global.

Outro conceito similar a alianças foi estudado por Dunbar, Hoffman, Laskar e Markus [15], que definem que um conjunto $S \subseteq V$ é um *conjunto α -dominante* para algum α , $0 < \alpha \leq 1$, se todo vértice $v \in V - S$ satisfaz a inequação: $|N(v) \cap S| \geq \alpha|N(v)|$. Dessa forma, se $\alpha > \frac{1}{2}$, todo vértice em $V - S$ tem mais vizinhos em S que em $V - S$. Isto significa que o conjunto S é uma aliança ofensiva global. Entretanto, se $\alpha \leq \frac{1}{2}$, todo vértice em $V - S$ tem pelo menos tantos vizinhos em $V - S$ que em S e, portanto, $V - S$ é uma aliança defensiva forte. Em 2002, Stewart, Langley, Merz e Ward [38] estudaram α -dominação

em torneios e em dígrafos.

Ainda outro conceito similar a alianças foi estudado por Dunbar, Harris, Hedetniemi, Hedetniemi, Laskar e McRae [13], que definem que um conjunto $S \subseteq V$ é *quase perfeito* se para todo $v \in V - S$, $|N(v) \cap S| \leq 1$. É fácil perceber que se S é um conjunto quase perfeito então o complemento de $V - S$ é uma aliança defensiva.

Um *conjunto dominante perfeito* é um conjunto dominante tendo a propriedade de que para todo $v \in V - S$, $|N(v) \cap S| = 1$. Um conjunto $S \subseteq V$ é um *2-empacotamento* se para todo $v \in V$, $|N[v] \cap S| \leq 1$. Em outras palavras, um conjunto S de vértices em um grafo G é um 2-empacotamento se a distância entre cada par distinto de vértices em S é maior que 2. Segue destas definições que o complemento de todo conjunto dominante perfeito e o complemento de todo 2-empacotamento é uma aliança defensiva.

Um tipo final de conjunto conduz a alianças. Um conjunto $S \subseteq V$ é uma *cobertura de vértices* se para toda aresta $uv \in E$, $S \cap \{u, v\} \neq \emptyset$. Observe que o complemento de $V - S$ de qualquer cobertura de vértices é um conjunto independente. Portanto, toda cobertura de vértices de um grafo conexo é uma aliança ofensiva global.

3.4 Resultados por Classes de Grafos

Nesta seção, dividimos os resultados anteriormente estabelecidos por classes de grafos, para o melhor entendimento do leitor e para permitir uma melhor comparação entre os mesmos.

3.4.1 Alianças em Caminhos e Ciclos

Nesta seção, apresentamos quatro resultados para grafos caminhos e ciclos, um com relação ao número da aliança e os outros relacionando conjunto dominante total à aliança defensiva (forte) global.

Antes, mostramos mais uma definição. A *roda* W_n é o grafo que consiste de um ciclo C_n de tamanho n e um vértice central que é adjacente a todo vértice do ciclo.

Proposição 3.21 (*Kristiansen, Hedetniemi e Hedetniemi [30]*)

Para um ciclo C_n , roda W_n e caminho P_n qualquer,

- (i) $a(C_n) = \hat{a}(P_n) = \hat{a}(C_n) = a(W_n) = 2$.
- (ii) $\hat{a}(W_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$.

Prova. [30]

- (i) Quaisquer dois vértices adjacentes em C_n ou no ciclo da roda W_n constituem uma aliança defensiva de C_n e W_n , respectivamente. Isso porque todo vértice em C_n tem

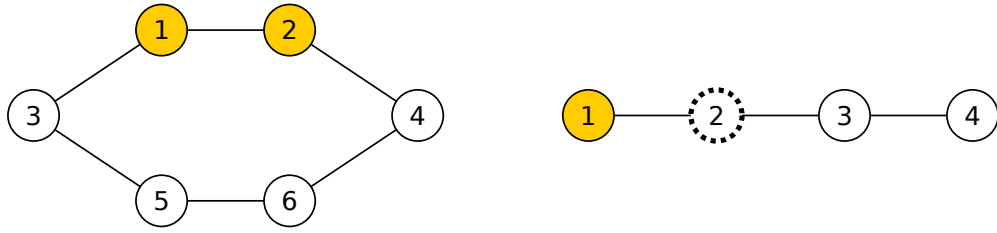


Figura 3.13: Exemplos de grafos ciclo e caminho, em que $a(P_4) = 1$ e $a(C_6) = \hat{a}(P_4) = \hat{a}(C_6) = 2$.

grau dois e no ciclo da roda W_n tem grau três. Como o próprio vértice se defende e tem um aliado (seu vértice adjacente), tem-se uma aliança defensiva.

- (ii) Se S é um conjunto- $\hat{a}$ da roda W_n , então nenhum vértice do subgrafo $\langle S \rangle$ induzido por S pode ter grau um, visto que todo vértice em W_n tem grau pelo menos três. Um conjunto- $\hat{a}$ é um conjunto S cuja cardinalidade é igual ao número da aliança defensiva forte e S é uma aliança defensiva forte. Dessa forma, o grau mínimo de um vértice em $\langle S \rangle$ é pelo menos dois. Os subgrafos induzidos de W_n que têm grau mínimo pelo menos dois são somente o ciclo C_n ou subgrafos contendo o vértice central (de grau n). Portanto, os conjuntos- $\hat{a}$ de W_n contêm o vértice central e pelo menos metade de seus vizinhos em C_n .

□

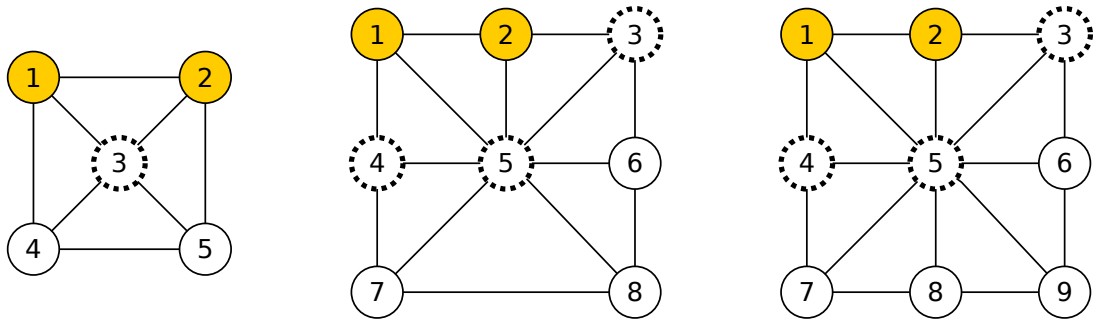


Figura 3.14: Exemplos de grafos roda, com $a(W_n) = 2$ e $\hat{a}(W_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$.

Como um caso especial do Lema 3.69, se G é um grafo cúbico, então $\gamma_t(G) = \gamma_a(G)$. Visto que todo conjunto dominante total de um ciclo é também uma aliança defensiva forte global, tem-se o seguinte corolário, que é uma consequência imediata do Lema 3.69.

Proposição 3.22 (Haynes, Hedetniemi e Henning [24])

Para ciclos C_n , $n \geq 3$, $\gamma_a(C_n) = \gamma_{\hat{a}}(C_n) = \gamma_t(C_n)$.

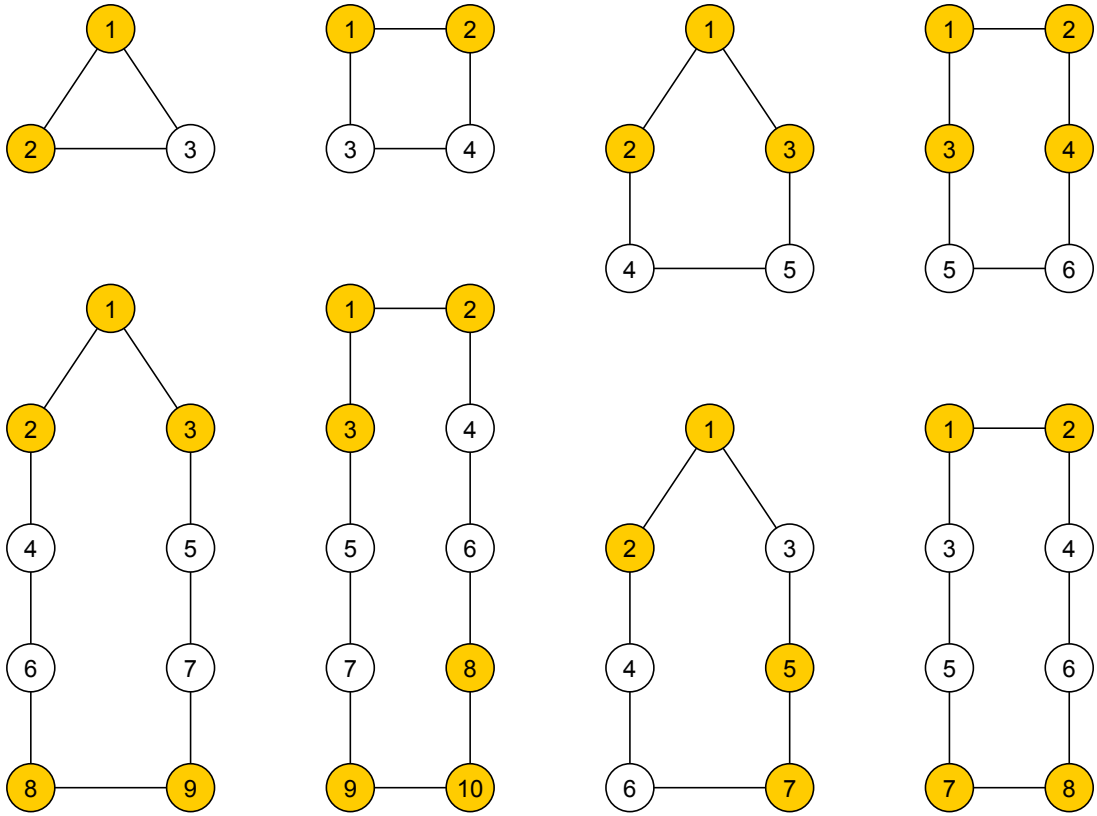


Figura 3.15: Exemplos de ciclos, em que $\gamma_a(C_n) = \gamma_{\hat{a}}(C_n) = \gamma_t(C_n)$.

A condição de grau mínimo é necessária para o Lema 3.69 ser válido. De fato, existem grafos conexos G para os quais a diferença $\gamma_t(G) - \gamma_a(G)$ pode ser arbitrariamente grande.

Para $2 \leq s \leq k-1$ e $k \geq 3$, considere o grafo G obtido pela anexação (com uma aresta) de s cópias disjuntas de P_3 a cada vértice de um grafo completo K_k . Para $k = 3$ e $s = 2$, o grafo G é mostrado na Figura 3.16. Visto que um vértice suporte deve estar em todo conjunto- $\gamma_t(G)$, segue que pelo menos dois vértices de cada cópia de P_3 anexa devem estar em todo conjunto- $\gamma_t(G)$. Além disso, o conjunto de vértices suporte de G junto com seus vizinhos de grau dois dominam G totalmente. Portanto $\gamma_t(G) = 2sk$. Mas visto que $s \leq k-1$, o conjunto de vértices finais junto com os vértices de K_k formam uma aliança defensiva global em G de cardinalidade mínima e assim $\gamma_a(G) = (s+1)k$.

O número de dominação total de caminhos P_n e ciclos C_n são bem conhecidos: para $n \geq 3$, $\gamma_t(P_n) = \gamma_t(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{4} \rceil - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$, como podemos ver nas Figuras 3.17 e 3.15. Para caminhos, apresentamos que o número da aliança defensiva forte global equivale

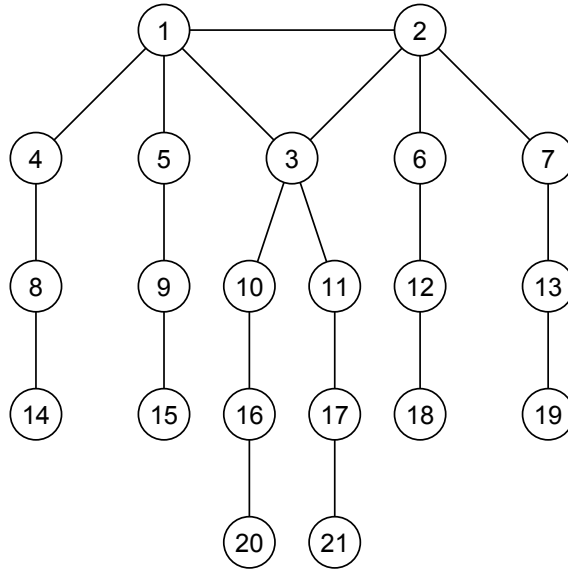


Figura 3.16: Um grafo G , com $\gamma(G) = 7 = \{1, 8, 9, 12, 13, 16, 17\}$,
 $\gamma_a(G) = 9 = \{1, 2, 3, 14, 15, 18, 19, 20, 21\}$, $\gamma_{\hat{a}}(G) =$
 $\gamma_t(G) = 12 = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 16, 17\}$.

ao número de dominação total. Contudo, o número da aliança defensiva global de um caminho não necessariamente é igual ao seu número de dominação total.

Proposição 3.23 (Haynes, Hedetniemi e Henning [24])

Para $n \geq 3$, $\gamma_{\hat{a}}(P_n) = \gamma_t(P_n)$.

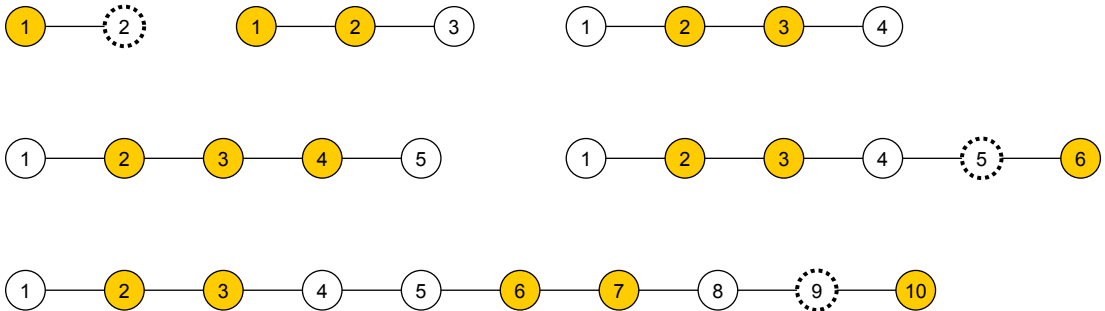


Figura 3.17: Exemplos de caminhos, em que $\gamma_{\hat{a}}(P_n) = \gamma_t(P_n)$.

Prova. [24]

Pelo Lema 3.70, $\gamma_t(P_n) \leq \gamma_{\hat{a}}(P_n)$. Para um conjunto- $\gamma_t(P_n)$ S qualquer e um vértice $u \in S$, $|N[u] \cap S| \geq 2 > |N(u) \cap (V - S)|$. Portanto, S é uma aliança defensiva global e assim $\gamma_{\hat{a}}(P_n) \leq \gamma_t(P_n)$. $\square$

Proposição 3.24 (Haynes, Hedetniemi e Henning [24])

Para $n \geq 2$, $\gamma_a(P_n) = \gamma_t(P_n)$ a não ser que $n \equiv 2 \pmod{4}$ em que, neste caso, $\gamma_a(P_n) = \gamma_t(P_n) - 1$.

Prova. [24]

Seja $G = P_n$. Visto que $\Delta(G) \leq 2$, todo conjunto dominante total de G é também uma aliança defensiva global de G e, então, $\gamma_a(G) \leq \gamma_t(G)$. Suponha que $n \equiv 2 \pmod{4}$. Se v denota um vértice final de G , então ou $n = 2$, neste caso $\gamma_a(G) = 1 = \gamma_t(G) - 1$, ou $n \geq 6$, neste caso $\gamma_a(G) \leq |\{v\} + \gamma_t(G - N[v])| = 1 + \gamma_t(P_{n-2}) = \frac{n}{2} = \gamma_t(G) - 1$.

Por outro lado, seja S um conjunto- $\gamma_a(G)$. Dessa forma, S é um conjunto dominante em G . Se o subgrafo $\langle S \rangle$ induzido por S contém um vértice isolado, então este vértice deve ser um vértice final de G . Portanto, $\langle S \rangle$ contém no máximo dois vértices isolados. Se $\langle S \rangle$ não contém vértices isolados, então S é um conjunto dominante total e assim $\gamma_t(G) \leq |S|$. Se $\langle S \rangle$ contém um vértice isolado v , então $S - \{v\}$ é um conjunto dominante total de $G - N[v] = P_{n-2}$ e segue que $\gamma_t(P_{n-2}) \leq |S| - 1$. Se n não é equivalente a $2 \pmod{4}$, então $\gamma_t(G) = \gamma_t(P_{n-2}) + 1 \leq |S|$, enquanto que se $n \equiv 2 \pmod{4}$, então $\gamma_t(G) = \gamma_t(P_{n-2}) + 2 \leq |S| + 1$. Se $\langle S \rangle$ contém dois vértices isolados u e v , então $G = P_4$, neste caso $\gamma_t(G) = 2 = |S|$, ou $|S| \geq 4$, neste caso $S - \{u, v\}$ é um conjunto dominante total de $G - N[u] - N[v] = P_{n-4}$. Além disso, $\gamma_t(P_{n-4}) \leq |S| - 2$ e então $\gamma_t(G) = \gamma_t(P_{n-4}) + 2 \leq |S|$. Visto que $|S| = \gamma_a(G)$, sabe-se que $\gamma_a(G) \geq \gamma_t(G)$ a não ser que $n \equiv 2 \pmod{4}$ em que, neste caso, $\gamma_a(G) \geq \gamma_t(G) - 1$. O resultado desejado segue. $\square$

3.4.2 Alianças em Grafos Bipartidos

Um grafo G é dito k -partido se o conjunto de vértices V pode ser particionado em k subconjuntos $V_1, \dots, V_k$ disjuntos, de modo que toda aresta $(v, w) \in E$ possui suas extremidades em conjuntos V_i e V_j distintos chamados de partições. Para $k = 2$, temos o grafo denominado *bipartido*.

Nesta seção, apresentamos alguns limites para grafos completos bipartidos.

Proposição 3.25 (Kristiansen, Hedetniemi e Hedetniemi [30])

Para o grafo completo bipartido $K_{r,s}$, $2 \leq r \leq s$,

- (i) $a(K_{r,s}) = \lfloor \frac{r}{2} \rfloor + \lfloor \frac{s}{2} \rfloor$.
- (ii) $\hat{a}(K_{r,s}) = \lceil \frac{r}{2} \rceil + \lceil \frac{s}{2} \rceil$.

Na Figura 3.18, vemos um exemplo de grafo completo bipartido, em que $r = 3$ e $s = 4$ e temos que $a(K_{3,4}) = \lfloor \frac{3}{2} \rfloor + \lfloor \frac{4}{2} \rfloor = 3$ e $\hat{a}(K_{3,4}) = \lceil \frac{3}{2} \rceil + \lceil \frac{4}{2} \rceil = 4$. Dessa forma, os

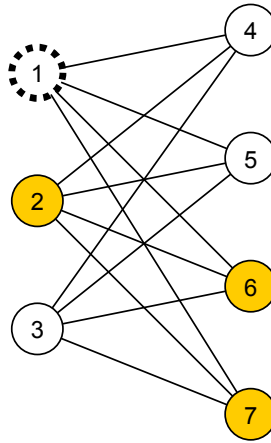


Figura 3.18: Exemplo de grafo bipartido, com $r = 3$ e $s = 4$.

vértices sombreados formam uma aliança defensiva e os vértices sombreados juntamente com o vértice pontilhado formam uma aliança defensiva forte.

Proposição 3.26 (Haynes, Hedetniemi e Henning [24])

Para o grafo completo bipartido $K_{r,s}$,

- (i) $\gamma_a(K_{1,s}) = \lfloor \frac{s}{2} \rfloor + 1$, e
- (ii) $\gamma_a(K_{r,s}) = \lfloor \frac{r}{2} \rfloor + \lfloor \frac{s}{2} \rfloor$, se $r, s \geq 2$, e
- (iii) $\gamma_{\hat{a}}(K_{r,s}) = \lceil \frac{r}{2} \rceil + \lceil \frac{s}{2} \rceil$.

Prova. [24]

- (i) O resultado é imediato quando $s = 1$. Suponha que $s \geq 2$ e S é um conjunto- $\gamma_a(K_{1,s})$. Visto que S é um conjunto dominante, o vértice central, chamado v , pertence a S e dessa forma S contém pelo menos $\lfloor \frac{g(v)}{2} \rfloor = \lfloor \frac{s}{2} \rfloor$ vizinhos de v . Portanto, $\gamma_a(K_{1,s}) \geq \lfloor \frac{s}{2} \rfloor + 1$. O conjunto consistindo de v e $\lfloor \frac{s}{2} \rfloor$ de seus vizinhos é uma aliança defensiva global e então $\gamma_a(K_{1,s}) \leq \lfloor \frac{s}{2} \rfloor + 1$.
- (ii) É dado na Proposição 3.25 que $a(K_{r,s}) = \lfloor \frac{r}{2} \rfloor + \lfloor \frac{s}{2} \rfloor$ e $\hat{a}(K_{r,s}) = \lceil \frac{r}{2} \rceil + \lceil \frac{s}{2} \rceil$. Assim, pela Observação 3.68, tem-se que $\gamma_a(K_{r,s}) \geq \lfloor \frac{r}{2} \rfloor + \lfloor \frac{s}{2} \rfloor$ e $\gamma_{\hat{a}}(K_{r,s}) \geq \lceil \frac{r}{2} \rceil + \lceil \frac{s}{2} \rceil$. O conjunto consistindo de $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor$ vértices em um conjunto bipartido e $\lfloor \frac{s}{2} \rfloor$ vértices em outro conjunto bipartido é uma aliança defensiva global e assim $\gamma_a(K_{r,s}) \leq \lfloor \frac{r}{2} \rfloor + \lfloor \frac{s}{2} \rfloor$.
- (iii) Similarmente a (ii), o conjunto consistindo de $\lceil \frac{r}{2} \rceil$ vértices em um conjunto bipartido e $\lceil \frac{s}{2} \rceil$ vértices em outro é uma aliança defensiva forte global.

□

Os próximos dois teoremas são para grafos de ordem n e grau máximo Δ .

Teorema 3.27 (Haynes, Hedetniemi e Henning [24])

Se G é um grafo bipartido de ordem n e grau máximo Δ , então $\gamma_a(G) \geq \frac{2n}{\Delta+3}$, e este limite é exato.

Prova. [24]

Seja $\gamma_a(G) = k$. Seja S um conjunto- $\gamma_a(G)$. Visto que G é um grafo bipartido, então também é bipartido o subgrafo induzido $\langle S \rangle$. Sejam $\mathcal{L}$ e $\mathcal{R}$ a denotação para os conjuntos bipartidos de $\langle S \rangle$. Seja Δ_L o grau máximo em G de um vértice em $\mathcal{L}$ e seja Δ_R o grau máximo em G de um vértice em $\mathcal{R}$. Assume-se (renomeando se necessário) que $\Delta_L \geq \Delta_R$.

Seja $u \in \mathcal{L}$ e $v \in \mathcal{R}$. Visto que S é uma aliança defensiva global, S contém pelo menos $\left\lfloor \frac{g(u)}{2} \right\rfloor$ vizinhos de u e pelo menos $\left\lfloor \frac{g(v)}{2} \right\rfloor$ vizinhos de v . Dessa forma, $V - S$ contém no máximo $\left\lceil \frac{g(u)}{2} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{\Delta_L}{2} \right\rceil \leq \frac{\Delta_L+1}{2}$ vizinhos de u e no máximo $\left\lceil \frac{g(v)}{2} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{\Delta_R}{2} \right\rceil \leq \frac{\Delta_R+1}{2}$ vizinhos de v . Portanto, cada vértice em $\mathcal{L}$ tem no máximo $\frac{\Delta_L+1}{2}$ vizinhos em $V - S$, enquanto que cada vértice em $\mathcal{R}$ tem no máximo $\frac{\Delta_R+1}{2}$ vizinhos em $V - S$. Assim, visto que $n - k = |V - S|$ e $k = |\mathcal{L}| + |\mathcal{R}|$,

$$n - k \leq |\mathcal{L}| \cdot \left(\frac{\Delta_L+1}{2} \right) + |\mathcal{R}| \cdot \left(\frac{\Delta_R+1}{2} \right)$$

$$n - k \leq \left(\frac{\Delta_L+1}{2} \right) (|\mathcal{L}| + |\mathcal{R}|)$$

$$n - k \leq \left(\frac{\Delta+1}{2} \right) k$$

$$k \geq (n - k) \left(\frac{2}{\Delta+1} \right)$$

$$k \geq \frac{2n-2k}{\Delta+1}.$$

Como $k \geq 1$, tem-se que $k \geq \frac{2n}{\Delta+3}$.

Pode-se ver que este limite é exato como segue. Para $k \geq 1$, seja H_k o grafo bipartido obtido pela união de $2k$ estrelas $K_{1,k+1}$ disjuntas com centros $\{x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_k\}$ pela adição de todas as arestas do tipo $x_i y_j$, $1 \leq i \leq j \leq k$. Então, $G = H_k$ para algum $k \geq 1$ tem grau máximo $\Delta = 2k + 1$ e ordem $n = 2k(k + 2)$. Os $2k$ vértices centrais das estrelas formam uma aliança defensiva global e assim $\gamma_a(G) \leq 2k = \frac{n}{k+2}$. Como $\Delta = 2k + 1$, tem-se que $k = \frac{\Delta-1}{2}$. Assim, $\frac{n}{k+2} = \frac{n}{\frac{\Delta-1}{2}+2} = \frac{n}{\frac{\Delta+3}{2}} = \frac{2n}{\Delta+3}$ e $\gamma_a(G) \leq 2k = \frac{n}{k+2} = \frac{2n}{\Delta+3}$. Consequentemente, $\gamma_a(G) = \frac{2n}{\Delta+3}$. $\square$

Teorema 3.28 (Haynes, Hedetniemi e Henning [24])

Se G é um grafo bipartido de ordem n e grau máximo Δ , então $\gamma_a(G) \geq \frac{2n}{\Delta+2}$, e este limite é exato.

Prova. [24]

Seja $\gamma_a(G) = k$. Seja S um conjunto- $\gamma_a(G)$. Usando a notação do Teorema 3.27, seja $u \in \mathcal{L}$

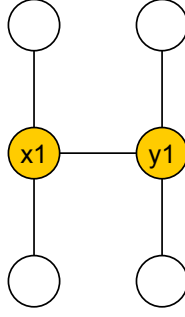


Figura 3.19: Exemplo de um grafo H_k com $\gamma_a(G) = \frac{2n}{\Delta+3}$.

e $v \in \mathcal{R}$. Visto que S é uma aliança defensiva forte global, S contém pelo menos $\left\lceil \frac{g(u)}{2} \right\rceil$ vizinhos de u e pelo menos $\left\lceil \frac{g(v)}{2} \right\rceil$ vizinhos de v . Dessa forma, $V - S$ contém no máximo $\left\lfloor \frac{g(u)}{2} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{\Delta_L}{2} \right\rfloor \leq \frac{\Delta_L}{2}$ vizinhos de u e no máximo $\left\lfloor \frac{g(v)}{2} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{\Delta_R}{2} \right\rfloor \leq \frac{\Delta_R}{2}$ vizinhos de v . Portanto, cada vértice em $\mathcal{L}$ tem no máximo $\frac{\Delta_L}{2}$ vizinhos em $V - S$, enquanto que cada vértice em $\mathcal{R}$ tem no máximo $\frac{\Delta_R}{2}$ vizinhos em $V - S$. Assim, visto que $n - k = |V - S|$ e $k = |\mathcal{L}| + |\mathcal{R}|$,

$$n - k \leq |\mathcal{L}| \cdot \left(\frac{\Delta_L}{2} \right) + |\mathcal{R}| \cdot \left(\frac{\Delta_R}{2} \right)$$

$$n - k \leq \left(\frac{\Delta_L}{2} \right) (|\mathcal{L}| + |\mathcal{R}|)$$

$$n - k \leq \left(\frac{\Delta}{2} \right) k$$

$$k \geq (n - k) \left(\frac{2}{\Delta} \right)$$

$$k \geq \frac{2n - 2k}{\Delta}.$$

Como $k \geq 1$, tem-se que $k \geq \frac{2n}{\Delta+2}$.

Pode-se ver que este limite é exato como segue. Para $k \geq 1$, seja M_k o grafo bipartido obtido pela união de $2k$ estrelas $K_{1,k}$ disjuntas com centros $\{x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_k\}$ pela adição de todas as arestas do tipo $x_i y_j$, $1 \leq i \leq j \leq k$. Então, $G = M_k$ para algum $k \geq 1$ tem grau máximo $\Delta = 2k$ e ordem $n = 2k(k + 1)$. Os $2k$ vértices centrais das estrelas formam uma aliança defensiva forte global e assim $\gamma_a(G) \leq 2k = \frac{n}{k+1}$. Como $\Delta = 2k$, tem-se que $k = \frac{\Delta}{2}$. Assim, $\frac{n}{k+1} = \frac{n}{\frac{\Delta}{2}+1} = \frac{n}{\frac{\Delta+2}{2}} = \frac{2n}{\Delta+2}$ e $\gamma_a(G) \leq 2k = \frac{n}{k+1} = \frac{2n}{\Delta+2}$. Consequentemente, $\gamma_a(G) = \frac{2n}{\Delta+2}$. $\square$

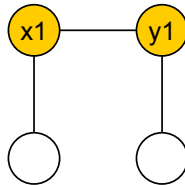


Figura 3.20: Exemplo de um grafo M_k com $\gamma_a(G) = \frac{2n}{\Delta+2}$.

3.4.3 Alianças em Árvores

Uma *árvore* é um grafo T acíclico e 1-conexo. Chama-se *subárvore* qualquer sugrafo de T que também é uma árvore. A árvore é denominada com raiz quando um de seus vértices for designado como raiz da árvore, permitindo assim uma organização hierárquica.

Para uma árvore T com raiz e um vértice $v_i \in V(T)$, entenda T_i como a denotação para a subárvore induzida por v_i e seus descendentes e entenda t_i como o número de vértices em T_i .

Nesta seção, apresentamos algumas caracterizações para árvores com relação ao número da aliança, ao conjunto dominante e à excentricidade de um grafo.

O próximo corolário segue da Proposição 3.54.

Corolário 3.29 (Kristiansen, Hedetniemi e Hedetniemi [30])

Para uma árvore T qualquer e um caminho P_n , $a(T) = a(P_n) = 1$.

Observe que se existe um vértice $v \in V$ tal que $g(v) = 1$ tem-se uma aliança defensiva, pois tomando este vértice como o conjunto S ele é capaz de se defender de um possível ataque por parte do único vértice que é seu vizinho.

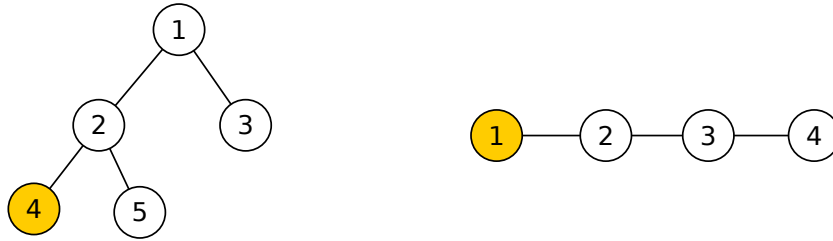


Figura 3.21: Exemplo de uma árvore T e um caminho P_4 .

De fato, enquanto $a(T) = 1$ para todas as árvores T , o valor de $\hat{a}(T)$ pode ser arbitrariamente grande. Considere somente a estrela $K_{1,s}$, onde $\hat{a}(K_{1,s}) = 1 + \lceil \frac{s}{2} \rceil$. Observe, nesse caso, que um vértice final não define uma aliança defensiva forte. Dessa forma, um subgrafo conexo qualquer que define um conjunto- $\hat{a}$ de $K_{1,s}$ deve conter o vértice de grau s . Mas visto que este vértice deve ser fortemente defendido, pelo menos metade de seus vizinhos deve estar em uma aliança defensiva forte qualquer, como mostra a Figura 3.22, onde $\hat{a}(K_{1,4}) = 1 + \lceil \frac{4}{2} \rceil = 3$.

Uma estrela dupla é uma árvore que contém exatamente dois vértices que não são vértices finais. Se um desses vértices é adjacente a r folhas e o outro a s folhas, então denota-se essa estrela dupla por $S_{r,s}$.

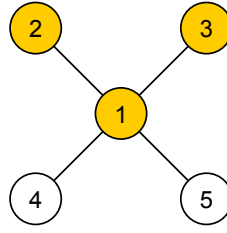


Figura 3.22: Exemplo de um grafo estrela $K_{1,4}$, com $\hat{a}(K_{1,s}) = 3$.

Proposição 3.30 (Haynes, Hedetniemi e Henning [24])

Para $r, s \geq 1$, $\gamma_a(S_{r,s}) = \lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor + 2$.

Prova. [24]

Sejam u e v os dois vértices centrais de $S_{r,s}$, onde u é adjacente a r folhas. Seja S um conjunto- $\gamma_a(S_{r,s})$. Visto que S é um conjunto dominante, se u (respectivamente, v) não está em S , então todas as folhas adjacentes a u (respectivamente, v) estão em S . Dessa forma, pode-se assumir que $\{u, v\} \subseteq S$. Então, S contém pelo menos $\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor$ folhas adjacentes a u e $\lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor$ adjacentes a v . Portanto, $\gamma_a(S_{r,s}) \geq \lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor + 2$. O conjunto consistindo de u, v , $\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor$ folhas adjacentes a u e $\lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor$ folhas adjacentes a v é uma aliança defensiva global e assim $\gamma_a(S_{r,s}) \leq \lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor + 2$. O resultado desejado segue. $\square$

Usando uma prova similar a que foi usada na Proposição 3.30, foi obtido o número da aliança defensiva global de uma estrela dupla.

Visto que não foi apresentada a prova, para facilitar o entendimento do leitor, mostramos a nossa prova para a próxima proposição.

Proposição 3.31 (Haynes, Hedetniemi e Henning [24])

Para $r, s \geq 1$, $\gamma_{\hat{a}}(S_{r,s}) = \lfloor \frac{r}{2} \rfloor + \lfloor \frac{s}{2} \rfloor + 2$.

Prova.

Sejam u e v os dois vértices centrais de $S_{r,s}$, em que u é adjacente a r folhas. Seja S um conjunto- $\gamma_{\hat{a}}(S_{r,s})$. Como S é um conjunto dominante, se u e v não estão em S , então todas as folhas adjacentes aos dois vértices estão em S . Dessa forma, pode-se assumir que $\{u, v\} \subseteq S$. Então, S contém pelo menos $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor$ folhas adjacentes a u e $\lfloor \frac{s}{2} \rfloor$ adjacentes a v . Portanto, $\gamma_{\hat{a}}(S_{r,s}) \geq \lfloor \frac{r}{2} \rfloor + \lfloor \frac{s}{2} \rfloor + 2$. O conjunto consistindo de u, v , $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor$ folhas adjacentes a u e $\lfloor \frac{s}{2} \rfloor$ folhas adjacentes a v é uma aliança defensiva forte global e assim $\gamma_{\hat{a}}(S_{r,s}) \leq \lfloor \frac{r}{2} \rfloor + \lfloor \frac{s}{2} \rfloor + 2$. O resultado desejado segue. $\square$

Teorema 3.32 (Haynes, Hedetniemi e Henning [24])

Se T é uma árvore de ordem n , então $\gamma_a(T) \geq \frac{n+2}{4}$, e este limite é exato.

Prova. [24]

Sejam $\gamma_a(T) = k$, S um conjunto- $\gamma_a(T)$ e $F = \langle S \rangle$. Visto que F é uma floresta, $\sum_{v \in S} g_F(v) = 2|E(F)| \leq 2(|V(F)| - 1) = 2(k - 1)$. Para cada $v \in S$, $V - S$ contém no máximo $g_F(v) + 1$ vizinhos de v . Dessa forma, $n - k = |V - S| \leq \sum_{v \in S} (g_F(v) + 1) \leq 2(k - 1) + k = 3k - 2$,

$$n - k \leq 3k - 2$$

$$3k + k \geq n + 2$$

$$4k \geq n + 2$$

$$\text{e assim } k \geq \frac{n+2}{4}.$$

Pode-se ver que este limite é exato como segue. Seja T a árvore obtida de uma árvore F de ordem k pela adição de $g_F(v) + 1$ novos vértices para cada $v \in F$ e juntando-o a v . Então, T tem ordem $n = |V(F)| + \sum_{v \in V(F)} g_F(v) = 2k + 2(k - 1) = 4k - 2$. Visto que $V(F)$ é uma aliança defensiva global de T , $\gamma_a(T) \leq k = \frac{n+2}{4}$. Consequentemente, $\gamma_a(T) = \frac{n+2}{4}$. $\square$

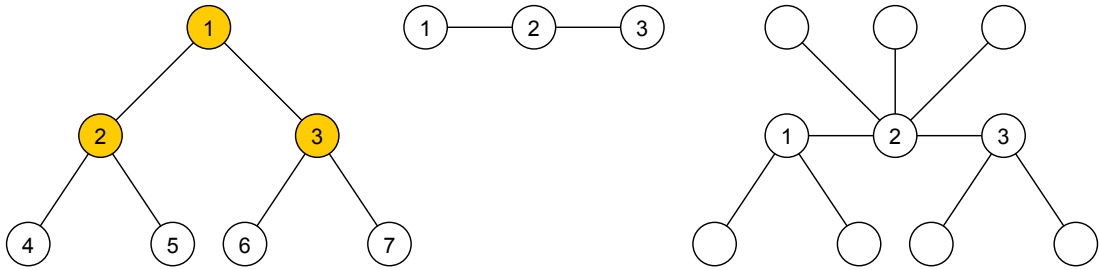


Figura 3.23: Exemplo de uma árvore T (à direita), obtida da árvore F (meio).

Teorema 3.33 (Haynes, Hedetniemi e Henning [24])

Se T é uma árvore de ordem n , então $\gamma_a(T) \geq \frac{n+2}{3}$, e este limite é exato.

Prova. [24]

Sejam $\gamma_a(T) = k$, S um conjunto- $\gamma_a(T)$ e $F = \langle S \rangle$. Então, $\sum_{v \in S} g_F(v) \leq 2(k - 1)$. Para cada $v \in S$, $V - S$ contém no máximo $g_F(v)$ vizinhos de v . Dessa forma, $n - k = |V - S| \leq \sum_{v \in S} g_F(v) \leq 2(k - 1) = 2k - 2$,

$$n - k \leq 2k - 2$$

$$2k + k \geq n + 2$$

$$3k \geq n + 2$$

$$\text{e assim } k \geq \frac{n+2}{3}.$$

Pode-se ver que este limite é exato como segue. Seja T a árvore obtida de uma árvore F de ordem k pela adição de $g_F(v)$ novos vértices para cada $v \in F$ e juntando-o a v . Dessa forma, T tem ordem $n = |V(F)| + \sum_{v \in V(F)} g_F(v) = k + 2(k-1) = 3k - 2$. Visto que $V(F)$ é uma aliança defensiva forte global de T , $\gamma_{\hat{a}}(T) \leq k = \frac{n+2}{3}$. Consequentemente, $\gamma_{\hat{a}}(T) = \frac{n+2}{3}$. $\square$

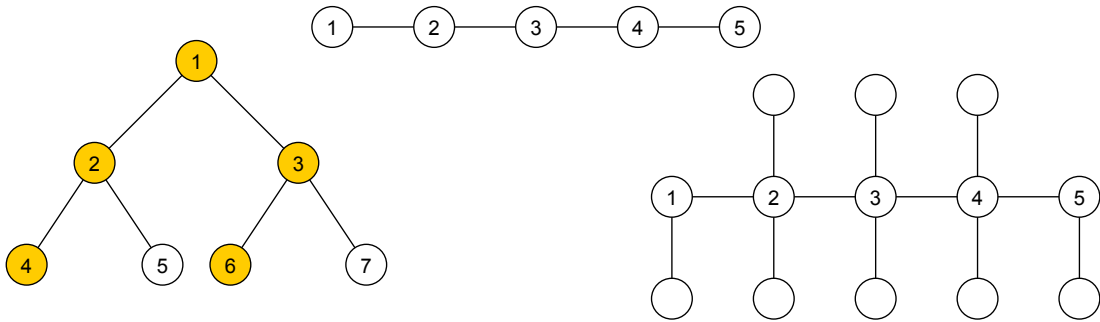


Figura 3.24: Exemplo de uma árvore T (à direita), obtida da árvore F (meio).

Visando estabelecer um limite superior exato para o número da aliança defensiva global de uma árvore e caracterizar as árvores alcançando este limite, introduz-se mais alguma notação. Para um vértice v em uma árvore T com raiz, denote $C(v)$ e $D(v)$ o conjunto de filhos e descendentes, respectivamente, de v e defina $D[v] = D(v) \cup \{v\}$. Também introduz-se uma família $\mathcal{T}_1$ de árvores como segue: seja $T = P_5$ ou $T = K_{1,4}$ ou T é a árvore obtida de $tK_{1,4}$ (união de t cópias disjuntas de $K_{1,4}$) pela adição de $t - 1$ arestas entre as folhas destas cópias de $K_{1,4}$ de tal modo que o centro de cada $K_{1,4}$ é adjacente a exatamente três folhas em T . Seja $\mathcal{T}_1$ a família de tais árvores T .

Teorema 3.34 (Haynes, Hedetniemi e Henning [24])

Se T é uma árvore de ordem $n \geq 4$, então $\gamma_a(T) \leq \frac{3n}{5}$, com igualdade se e somente se $T \in \mathcal{T}_1$.

Prova. [24]

Procede-se pela indução em $n \geq 4$. Se $n = 4$, então $T = P_4$ ou $T = K_{1,3}$ e assim $\gamma_a(T) = 2 < \frac{3n}{5}$. Então, suponha que, para todas árvores T' de ordem n' , onde $4 \leq n' < n$,

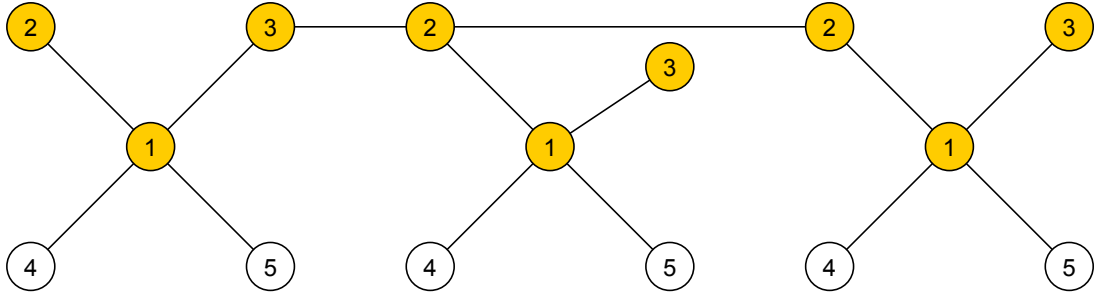


Figura 3.25: Exemplo de uma árvore $T \in \mathcal{T}_1$.

$\gamma_a(T') \leq \frac{3n'}{5}$. Seja T uma árvore de ordem n . Se T é uma estrela, então, pela Proposição 3.26, $\gamma_a(K_{1,n-1}) = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1 \leq \frac{3n}{5}$ com igualdade se e somente se $n = 5$, isto é, se e somente se $T = K_{1,4} \in \mathcal{T}_1$. Se T é uma estrela dupla, então segue da Proposição 3.30 que $\gamma_a(S_{r,s}) = \lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor + 2 < \frac{3n}{5}$. Se $T = P_5$, então, pela Proposição 3.24, $\gamma_a(T) = \gamma_t(P_n) = 3 = \frac{3n}{5}$. Portanto, pode-se assumir que $\text{diam}(T) \geq 4$ e que $T \neq P_5$.

Entre todos os vértices suporte de T de excentricidade $\text{diam}(T) - 1$, seja v um vértice de grau mínimo. Seja r um vértice à distância $\text{diam}(T) - 1$ de v e da raiz T à r . Denote u como o pai de v e x o pai de u .

Seja T' a árvore obtida de T pela remoção de v e seus filhos, isto é, $T' = T - D[v]$. T' tem ordem n' . Visto que $\text{diam}(T) \geq 4$ e $T \neq P_5$, segue da escolha de v que $n' \geq 4$. Aplicando a hipótese de indução a T' , tem-se que $\gamma_a(T') \leq \frac{3n'}{5}$. Seja S' o conjunto- $\gamma_a(T')$ e $|C(v)| = l$, então $n = n' + l + 1$.

Se $u \in S'$, então adicione v e $\lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor$ filhos de v a S' , produzindo uma aliança defensiva global de T e assim $\gamma_a(T) \leq |S'| \leq \frac{l+1}{2} \leq \frac{3(n-l-1)}{5} + \frac{l+1}{2} < \frac{3n}{5}$. Dessa forma, pode-se assumir que $u \notin S'$ (caso contrário, $\gamma_a(T) < \frac{3n}{5}$).

Se $g(v) = 2$, então adicione o filho de v a S' , produzindo uma aliança defensiva global de T e assim $\gamma_a(T) \leq |S'| + 1 \leq \frac{3(n-2)}{5} + 1 < \frac{3n}{5}$. Dessa forma, pode-se assumir que $|C(v)| \geq 2$ (caso contrário, $\gamma_a(T) < \frac{3n}{5}$).

Suponha que $g(u) \geq 3$. Se u tem um filho v' , diferente de v , que é um vértice suporte, então, pela escolha de v , $|C(v')| \geq 2$. Mas, então, sempre pode-se escolher S' contendo u e v' , contradizendo a suposição que $u \notin S'$. Dessa forma, todo filho de u , diferente de v , deve ser uma folha. Se u é adjacente a mais que uma folha, então pode-se escolher $u \in S'$, uma contradição. Portanto, $g(u) = 3$ e o filho v' de u , diferente de v , é uma folha. Assim, $v' \in S'$. Removendo v' de S' e adicionando u , v e $\lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor$ filhos de v a S' produz-se uma aliança defensiva global de T e então $\gamma_a(T) \leq |S'| + \frac{l+1}{2} < \frac{3n}{5}$. Dessa forma, assumimos que $g(u) = 2$ (caso contrário, $\gamma_a(T) < \frac{3n}{5}$).

Se $\text{diam}(T) = 4$, então x é um vértice suporte (de grau pelo menos $g(v) \geq 3$) e assim $T - D[u]$ é uma estrela $K_{1,k}$ com x como seu centro, onde $k \geq l \geq 2$. O conjunto

consistindo de $\{x, u, v\}$ junto com $\lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor$ folhas adjacentes a v e $\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor$ folhas adjacentes a x é uma aliança defensiva global de T e assim $\gamma_a(T) \leq \frac{k+l+4}{2} \leq \frac{n+1}{2}$. Visto que $n \geq 7$, $\gamma_a(T) < \frac{3n}{5}$. Dessa forma, pode-se assumir que $\text{diam}(T) \geq 5$.

Seja $T^* = T - N[v]$, isto é, $T^* = T - D[u]$. T^* tem ordem n^* . Visto que $\text{diam}(T) \geq 5$, segue da escolha de v que $n^* \geq 4$. Aplicando a hipótese de indução a T^* , tem-se que $\gamma_a(T^*) \leq \frac{3n^*}{5}$, com igualdade se e somente se $T^* \in \mathcal{T}_1$.

Seja S^* um conjunto- $\gamma_a(T^*)$. Adicionando u, v e $\lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor$ filhos de v a S^* produzimos uma aliança defensiva global de T . Dessa forma, se $l = 2$, então $\gamma_a(T) \leq |S^*| + 2 = \frac{3(n-4)}{5} + 2 < \frac{3n}{5}$, enquanto que se $l \geq 3$, então $\gamma_a(T) \leq |S^*| + \frac{l+3}{2} \leq \frac{3(n-l-2)}{5} + \frac{l+3}{2} \leq \frac{3n}{5}$. Além disso, suponha que $\gamma_a(T) = \frac{3n}{5}$. Então, $l = 3$ e $\gamma_a(T^*) = |S^*| = \frac{3n^*}{5}$. Pela hipótese de indução, $T^* \in \mathcal{T}_1$. Se $T^* = P_5$, então T é uma árvore de ordem $n = 10$ obtida de $K_{1,4}$ pela subdivisão de uma aresta cinco vezes. Mas então $\gamma_a(T) = 5 < \frac{3n}{5}$. Portanto, $T^* \neq P_5$. Se $T^* = K_{1,4}$, então $T \in \mathcal{T}_1$. Assim, pode-se assumir que $T^* \neq K_{1,4}$. Então, T^* é obtida de $t \geq 2$ cópias de $K_{1,4}$ com $t - 1$ arestas adicionadas como na descrição de $\mathcal{T}_1$.

Suponha que x é um vértice central de uma das cópias de $K_{1,4}$ em T^* . Agora, S^* contém pelo menos um filho de x que é uma folha em T^* . Removendo este filho de x de S^* e adicionando u, v e um filho de v , produz uma aliança defensiva global de T de cardinalidade $|S^*| + 2 = \frac{3(n-5)}{5} + 2 < \frac{3n}{5}$, uma contradição. Portanto, x deve ser uma folha de uma das cópias de $K_{1,4}$ em T^* .

Seja z o centro do $K_{1,4}$ em T^* que contém x . Seja $N(z) = \{z_1, z_2, z_3, x\}$.

Suponha antes que x é uma folha em T^* . Então, em T , z é adjacente a exatamente duas folhas, chamadas z_1 e z_2 . Agora, seja D^* um conjunto- $\gamma_a(T^*)$ que contém todos os vértices centrais dos $K_{1,4}$ s em T^* , exatamente uma folha adjacente a cada vértice central e todas as folhas de $K_{1,4}$ que são incidentes às arestas adicionadas na construção de T^* . Em particular, $z, z_3 \in D^*$. Pode-se assumir que $x \in D^*$. Seja $D = (D^* - \{x, z, z_3\}) \cup \{z_1, z_2, u, v, w\}$, onde w é um filho qualquer de v . Então, D é uma aliança defensiva global de T de cardinalidade $\gamma_a(T^*) + 2 < \frac{3n}{5}$, uma contradição. Dessa forma, x não pode ser uma folha em T^* .

Suponha agora que x não é uma folha em T^* . Então, x é adjacente a um vértice (uma folha) em uma cópia de $K_{1,4}$ em T^* . Dessa forma, z_1, z_2 e z_3 são folhas em T^* e segue que $T \in \mathcal{T}_1$. $\square$

Em seguida, demonstra-se um limite superior exato para o número da aliança defensiva forte global de uma árvore e caracterizamos as árvores alcançando este limite. Para este propósito, introduz-se uma família de árvores $\mathcal{T}_2$ como segue: seja T a árvore obtida da união de $tK_{1,3}$ de $t \geq 1$ cópias disjuntas de $K_{1,3}$ pela adição de $t - 1$ arestas entre as folhas destas cópias de $K_{1,3}$ de tal modo que o centro de cada $K_{1,3}$ é adjacente a pelo menos uma folhas em T . Seja $\mathcal{T}_2$ a família de todas tais árvores T .

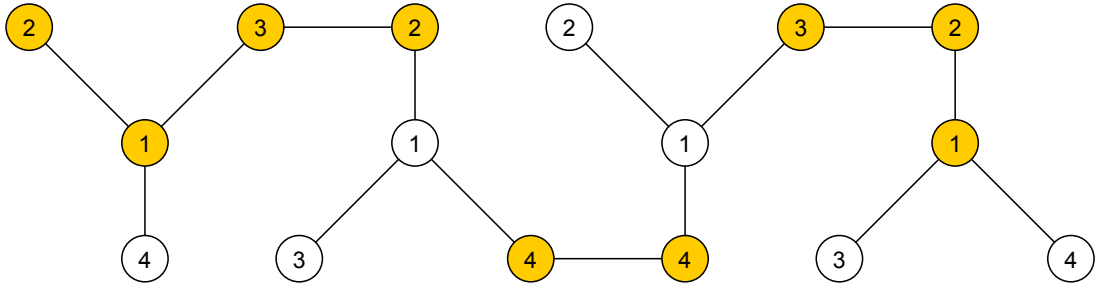


Figura 3.26: Exemplo de uma árvore $T \in \mathcal{T}_2$.

Teorema 3.35 (Haynes, Hedetniemi e Henning [24])

Se T é uma árvore de ordem $n \geq 3$, então $\gamma_a(T) \leq \frac{3n}{4}$, com igualdade se e somente se $T \in \mathcal{T}_2$.

Prova. [24]

Procede-se pela indução em $n \geq 3$. Se $n = 3$, então $T = P_3$ e assim $\gamma_a(T) = 2 < \frac{3n}{4}$. Então, suponha que, para todas árvores T' de ordem n' , onde $3 \leq n' < n$, $\gamma_a(T') \leq \frac{3n'}{4}$. Seja T uma árvore de ordem n .

Se T é uma estrela, então, pela Proposição 3.26, $\gamma_a(K_{1,n-1}) = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 1$. Se $n = 3$, então $\gamma_a(K_{1,n-1}) = 2 < \frac{3n}{4}$. Se $n \geq 4$, então $\gamma_a(K_{1,n-1}) \leq \frac{n+2}{2} \leq \frac{3n}{4}$ com igualdade se e somente se $n = 4$, isto é, se e somente se $T = K_{1,3} \in \mathcal{T}_2$. Se T é uma estrela dupla, então segue da Proposição 3.31 que $\gamma_a(T) < \frac{3n}{4}$. Portanto, pode-se assumir que $\text{diam}(T) \geq 4$.

Entre todos os vértices suporte de T de excentricidade $\text{diam}(T) - 1$, seja v um vértice de grau mínimo e r um vértice à distância $\text{diam}(T) - 1$ de v . Seja T uma árvore com raiz em r e u o pai de v e x o pai de u .

Seja T' a árvore obtida de T pela remoção de v e seus filhos, isto é, $T' = T - D[v]$. T' tem ordem n' . Visto que $\text{diam}(T) \geq 4$, segue da escolha de v que $n' \geq 3$. Aplicando a hipótese de indução a T' , tem-se que $\gamma_a(T') \leq \frac{3n'}{4}$. Seja S' o conjunto- $\gamma_a(T')$ e $|C(v)| = l$, então $n = n' + l + 1$.

Suponha que $g(u) \geq 3$. Então, em T' , u é um vértice suporte ou é adjacente a um vértice suporte. Visto que S' é uma aliança defensiva forte global, todo vértice suporte em S' e pelo menos um vizinho de todos vértices suporte estão em S' . Em particular, pode-se escolher S' contendo u . Dessa forma, adicionando v e $\lfloor \frac{l}{2} \rfloor$ filhos de v a S' produz uma aliança defensiva global de T . Logo, se $l = 1$, então $\gamma_a(T) \leq |S'| + 1 \leq \frac{3(n-2)}{4} + 1 < \frac{3n}{4}$, enquanto que se $l \geq 2$, então $\gamma_a(T) \leq |S'| + \frac{l+2}{2} \leq \frac{3(n-l-1)}{4} + \frac{l+2}{2} < \frac{3n}{4}$. Portanto, pode-se assumir que $g(u) = 2$ (caso contrário, $\gamma_a(T) < \frac{3n}{4}$).

Seja $T^* = T - N[v]$, isto é, $T^* = T - D[u]$. T^* tem ordem n^* . Se $T = P_5$, então, pela Proposição 3.23, $\gamma_a(T) = 3 < \frac{3n}{4}$. Dessa forma, pode-se assumir que $T \neq P_5$. Logo,

segue da escolha de v que $n^* \geq 3$. Aplicando a hipótese de indução a T^* , tem-se que $\gamma_{\hat{a}}(T^*) \leq \frac{3n^*}{4}$, com igualdade se e somente se $T^* \in \mathcal{T}_2$.

Seja S^* um conjunto- $\gamma_{\hat{a}}(T^*)$. Se $l = 1$ então, adicionando u e v a S^* , produzimos uma aliança defensiva forte global de T e então $\gamma_{\hat{a}}(T) \leq |S^*| + 2 = \frac{3(n-3)}{4} + 2 < \frac{3n}{4}$. Dessa forma, pode-se assumir que $l \geq 2$. Adicionando u, v e $\lfloor \frac{l}{2} \rfloor$ filhos de v a S^* , produzimos uma aliança defensiva forte global de T e então $\gamma_{\hat{a}}(T) \leq |S^*| + 2 + \frac{l}{2} \leq \frac{3(n-l-2)}{4} + \frac{l+4}{2} \leq \frac{3n}{4}$. Além disso, suponha que $\gamma_{\hat{a}}(T) = \frac{3n}{4}$. Então, $l = 2$ e $\gamma_{\hat{a}}(T^*) = |S^*| = \frac{3n^*}{4}$. Pela hipótese de indução, $T^* \in \mathcal{T}_2$. Mostramos que $T \in \mathcal{T}_2$.

Suponha que x é um vértice central de uma das cópias de $K_{1,3}$ em T^* . Segue que x é adjacente a pelo menos uma folha em T^* e dessa, forma, $x \in S^*$. Agora, S^* contém pelo menos um filho de x , chamado x' . Observe que x' ou é uma folha ou todos seus vizinhos em T^* são dominados por vértices suporte em S^* . Adicionando u, v e um filho de v a $S^* - \{x'\}$, produz uma aliança defensiva forte global de T de cardinalidade $|S^*| + 2 = \frac{3(n-4)}{4} + 2 < \frac{3n}{4}$, uma contradição. Portanto, x deve ser uma folha de uma das cópias de $K_{1,3}$ em T^* .

Seja z o centro do $K_{1,4}$ em T^* que contém x . Seja $N(z) = \{x, z_1, z_2\}$. Visto que $T^* \in \mathcal{T}_2$, cada vértice central dos dos $K_{1,3}$ s em T^* são vértices suporte em T^* e, portanto, pertencem a S^* . Assim, S^* contém todos os vértices centrais dos $K_{1,3}$ s em T^* e dois (dos três) vizinhos de cada um destes vértices centrais. Pode-se assumir, sem perda de generalidade, que S^* contém os vizinhos que não são folhas destes vértices centrais. Suponha que nem z_1 nem z_2 são folhas em T^* . Então, $\{z_1, z_2\} \subseteq S^*$. Além disso, $S^* - \{z, z_1, z_2\}$ domina $\{z_1, z_2\}$. Mas então $(S^* - \{z, z_1, z_2\}) \cup \{x, u, v, w\}$, onde w é um filho qualquer de v , é uma aliança defensiva forte global de T de cardinalidade $\gamma_{\hat{a}}(T^*) + 1 < \frac{3n}{4}$, uma contradição. Portanto, ou z_1 ou z_2 deve ser uma folha. Então, z é um vértice suporte em T . Segue que $T \in \mathcal{T}_2$. $\square$

3.4.4 Alianças em Grafos Regulares

Um grafo é dito k -regular se $\Delta(G) = \delta(G) = k$.

Nesta seção, apresentamos algumas caracterizações para $a(G)$, $\hat{a}(G)$ e $\gamma_a(G)$ em grafos regulares, pois para alguns valores de k é possível determinar completamente o valor de ambos $a(G)$ e $\hat{a}(G)$ para a classe de grafos k -regulares, isto é, grafos nos quais todo vértice tem grau k .

Teorema 3.36 (Kristiansen, Hedetniemi e Hedetniemi [30])

Para um grafo $G = (V, E)$ qualquer,

- (i) Se G é 1-regular, então $a(G) = 1$ e $\hat{a}(G) = 2$.

- (ii) Se G é 2-regular, então $a(G) = \hat{a}(G) = 2$.
- (iii) Se G é 3-regular, então $a(G) = 2$ e $\hat{a}(G) = \text{cintura}(G)$.
- (iv) Se G é 4-regular, então $a(G) = \hat{a}(G) = \text{cintura}(G)$.
- (v) Se G é 5-regular, então $a(G) = \text{cintura}(G)$.

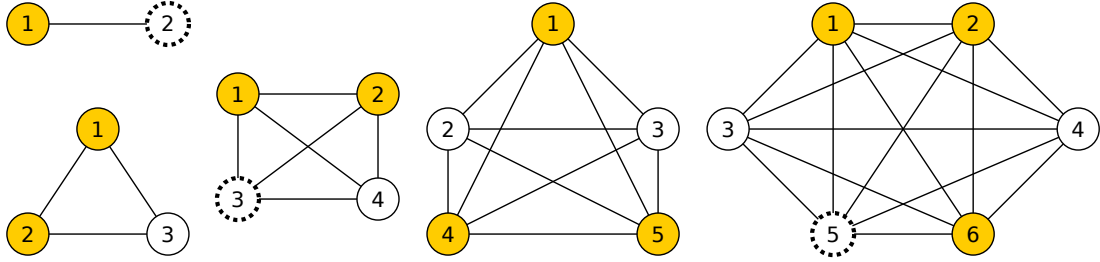


Figura 3.27: Exemplos de grafos 1,2,3,4,5-regular.

Prova. [30]

- (i) Isto segue da Proposição 3.54 (i) e 3.55 (ii). Como $\forall v, v \in V, g(v) = 1$, então $a(G) = 1$. $\hat{a}(G) = 2$, pois $\delta(G) = 1$ e G tem dois vértices adjacentes de grau no máximo dois.
- (ii) Isto segue da Proposição 3.55. $a(G) = 2$, pois $\delta(G) = 2$ e G tem dois vértices adjacentes de grau no máximo três. Como $\delta(G) = 2$, tem-se que $\hat{a}(G) = 2$, pois G tem dois vértices adjacentes de grau dois.
- (iii) Em um grafo 3-regular, quaisquer dois vértices adjacentes formam uma aliança defensiva. Dessa forma, $a(G) = 2$. A fim de mostrar que $\hat{a}(G) = \text{cintura}(G)$, seja S um conjunto- $\hat{a}$ de um grafo G 3-regular. Considere o subgrafo induzido $\langle S \rangle$. Este grafo pode ter nenhum vértice de grau um, visto que ele não seria fortemente defendido. Portanto, $\langle S \rangle$ tem grau mínimo dois e deve conter pelo menos um ciclo. Seja C o menor ciclo em $\langle S \rangle$. É fácil perceber que C é uma aliança forte em G . Portanto, $\langle S \rangle = C$. Segue que um menor ciclo qualquer é uma aliança em G e por isso $\hat{a}(G) = \text{cintura}(G)$.
- (iv) O mesmo argumento usado na prova de (iii) acima pode ser usado para mostrar que $a(G) = \text{cintura}(G)$ e $\hat{a}(G) = \text{cintura}(G)$, se G é um grafo 4-regular, visto que um menor ciclo qualquer em G é ambas uma aliança defensiva crítica e uma aliança defensiva crítica forte.
- (v) Novamente o mesmo argumento usado na prova de (iii) acima pode ser usado para mostrar que $a(G) = \text{cintura}(G)$, se G é um grafo 5-regular, visto que um menor ciclo qualquer em G é uma aliança defensiva crítica (mas não uma aliança crítica defensiva forte) em G .

□

Usando um argumento similar ao que foi usado na prova do Teorema 3.71, o seguinte corolário pode ser apresentado.

Corolário 3.37 (Haynes, Hedetniemi e Henning [24])

Se G é um grafo cúbico ou um grafo 4-regular, então $\gamma_a(G) \geq \frac{n}{3}$.

3.4.5 Alianças em Grafos Linhas

O grafo linha $\mathcal{L}(G)$ de um grafo não-direcionado G é um grafo que representa as adjacências entre as arestas de G , onde:

- cada vértice de $\mathcal{L}(G)$ representa uma aresta de G , e
- dois vértices de $\mathcal{L}(G)$ são adjacentes se e somente se suas arestas correspondentes compartilham uma extremidade comum (“são adjacentes”) em G .

Ou seja, ele é o grafo de interseção das arestas de G , representando cada aresta pelo conjunto de suas extremidades, como podemos ver na Figura 3.28.

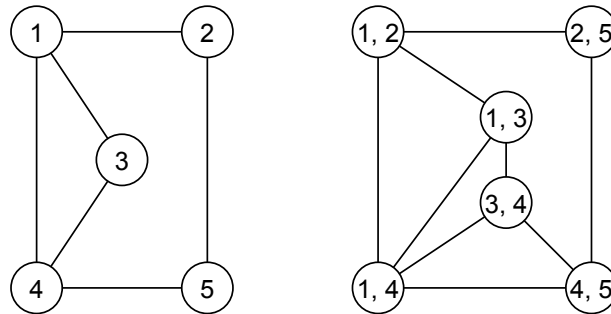


Figura 3.28: Exemplo de um grafo G qualquer e à direita seu grafo linha.

Denota-se por $\mathcal{L}(G) = (V_l, E_l)$ o grafo linha de um grafo simples G . Para o grafo bipartido semirregular, damos o valor exato do número da k -aliança defensiva de $\mathcal{L}(G)$ e para o caso geral, obtêm-se limites exatos. O grau de um vértice $e = \{u, v\} \in V_l$ é $\delta(e) = \delta(u) + \delta(v) - 2$. Se a sequência gráfica (sequência de graus) de G é $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_n$, então o grau máximo de $\mathcal{L}(G)$, denotado por Δ_l , é limitado por

$$\Delta_l \leq \delta_1 + \delta_2 - 2. \quad (3-3)$$

e o grau mínimo de $\mathcal{L}(G)$, denotado por δ_l , é limitado por

$$\delta_l \geq \delta_n + \delta_{n-1} - 2. \quad (3-4)$$

Nessa seção, apresentamos alguns resultados obtidos em $a_k(\mathcal{L}(G))$ em termos da sequência gráfica de G .

O grafo Kneser $K_{n,k}$ é o grafo no qual os vértices correspondem aos subconjuntos de k elementos de um conjunto de n elementos e onde dois vértices estão conectados se e somente se os dois conjuntos correspondentes são disjuntos. O grafo completo de n vértices é o grafo Kneser $K_{n,1}$.

Em [17], o número de segurança do grafo Kneser $K_{n,2}$ é mostrado como sendo $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$. Como se sabe, $K_{n,2}$ é o complemento do grafo linha $\mathcal{L}(K_n)$. O fato que $s(K_{n,2}) \geq \lceil \frac{|V(K_{n,2})|}{2} \rceil = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ era de interesse, com a desigualdade estrita em alguns casos. Isto levou à questão do número de segurança de $\mathcal{L}(K_n)$, com o pensamento de que o seu número de segurança também seria grande. Este não é o caso.

Nomeando os vértices de $V(K_n)$ por $1, 2, \dots, n$ e seja $G = \mathcal{L}(K_n)$, então $V(G) = V = E(K_n)$ e $n = |V| = \frac{n(n-1)}{2}$. Vértices de G serão nomeados por dois vértices finais das arestas correspondentes em K_n . Seja $S \subseteq V$ o conjunto de vértices $\{ij : 1 \leq i < j \leq k\}$, onde $k = \lceil \frac{2n+1}{3} \rceil$.

Lema 3.38 (Dutton [16])

Com a notação do parágrafo anterior, S é um conjunto seguro de G .

Prova. [16]

Seja X um subconjunto arbitrário de S . Os vértices de X correspondem a $|X|$ arestas no subgrafo K_k de K_n induzido pelas arestas correspondentes aos vértices de S . Em K_n essas arestas são incidentes em $t \leq k$ vértices de K_k . Conta-se o número de arestas em K_n para as quais eles são adjacentes. Tais arestas incluem as $\frac{t(t-1)}{2}$ arestas juntadas a dois dos t vértices. Adicionalmente, eles são adjacentes a $k - t$ arestas adicionais do K_k incidente a cada um dos t vértices, para um total de mais de $t(k - t)$. Segue que $|N[X] \cap S| = \frac{t(t-1)}{2} + t(k - t)$. As arestas correspondentes aos vértices de S também são adjacentes, para cada um dos t vértices, para $n - k$ arestas que não estão em K_k para um total de $t(n - k)$. Segue que $|N[X] - S| = t(n - k)$.

Suponha que $|N[X] \cap S| < |N[X] - S|$. Então, deve-se ter $\frac{t(t-1)}{2} + t(k - t) < t(n - k)$ ou $4k < 2n + t + 1 \leq 2n + k + 1$, visto que $t \leq k$. Segue que $3k < 2n + 1$, contradizendo a seleção de $k = \lceil \frac{2n+1}{3} \rceil$. $\square$

Observando a notação anterior, o teorema seguinte é imediato.

Teorema 3.39 (Dutton [16])

Para um inteiro positivo n qualquer, $s(\mathcal{L}(K_n)) \leq \frac{k(k-1)}{2}$, onde $k = \lceil \frac{2n+1}{3} \rceil$.

O limite no Teorema 3.39 é exato quando n é igual a 1, 2 e 4. Ele não é exato para $n = 3$. A exatidão para valores maiores de n é uma questão em aberto. Pode-se facilmente ver que o limite do Teorema 3.39 é inferior a $\frac{n}{2}$ se $n = 1 \bmod(3)$ e $n \geq 7$. Um cálculo bruto mostra que este é o caso para todos $n \geq 21$. Para ver isto, observe que o número de vértices no conjunto seguro S é $\frac{\lfloor \frac{2n+3}{3} \rfloor (\lfloor \frac{2n+3}{3} \rfloor - 1)}{2} \leq \frac{(2n+3)2n}{18}$. Isto é menor que $\frac{m}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ se $n \geq 21$.

Teorema 3.40 (Rodríguez-Velázquez, Yero e Sigarreta [33])

Para um grafo simples G qualquer de grau máximo δ_1 e para todo $k \in \{2(1 - \delta_1), \dots, 0\}$,
 $a_k(\mathcal{L}(G)) \leq \delta_1 + \lceil \frac{k}{2} \rceil$.

Prova. [33]

Suponha que k é par. Seja $v \in V$ um vértice de grau máximo em G e $S_v = \{e \in E : v \in e\}$. Seja $Y_k \subset S_v$ tal que $|Y_k| = -\frac{k}{2}$ e $X_k = S_v - Y_k$. Dessa forma, $\langle S_v \rangle \cong K_{\delta_1}$ e, como consequência

$$\delta_{X_k}(e) = \delta_1 - 1 + \frac{k}{2} \geq \delta_2 - 1 + \frac{k}{2} \geq \delta_{\bar{X}_k}(e) + k, \quad \forall e \in X_k.$$

Portanto, $X_k \subset V_l$ é uma k -aliança defensiva em $\mathcal{L}(G)$. Então, para k par tem-se $a_k(\mathcal{L}(G)) \leq \delta_1 + \lceil \frac{k}{2} \rceil$. Além disso, se k é ímpar, então $a_k(\mathcal{L}(G)) \leq a_{k+1}(\mathcal{L}(G)) \leq \delta_1 + \lceil \frac{k+1}{2} \rceil = \delta_1 + \lceil \frac{k}{2} \rceil$. $\square$

Uma vantagem de aplicar o limite superior é que isto requer apenas poucas informações a respeito do grafo G ; somente o grau máximo. O limite superior é exato, como vemos a seguir, para qualquer grafo δ -regular, e $k \in \{2(1 - \delta), \dots, 0\}$, $a_k(\mathcal{L}(G)) = \delta + \lceil \frac{k}{2} \rceil$. Mesmo assim, pode-se melhorar este limite para o caso de grafos não-regulares. A desvantagem de tal melhoria é que precisamos conhecer mais a respeito do grafo G .

Teorema 3.41 (Rodríguez-Velázquez, Yero e Sigarreta [33])

Seja G um grafo simples, cuja sequência gráfica é $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_n$. Seja $v \in V$ tal que $\delta(v) = \delta_1$ e também $\delta_v = \max_{u: u \sim v} \{\delta(u)\}$ e seja $\delta_* = \min_{v: \delta(v) = \delta_1} \{\delta_v\}$. Para todo $k \in \{2 - \delta_* - \delta_1, \dots, \delta_1 - \delta_*\}$,

$$a_k(\mathcal{L}(G)) \leq \left\lceil \frac{\delta_1 + \delta_* + k}{2} \right\rceil.$$

Além disso, para todo $k \in \{2 - \delta_1 - \delta_2, \dots, \delta_1 + \delta_2 - 2\}$,

$$\left\lceil \frac{\delta_n + \delta_{n-1} + k}{2} \right\rceil \leq a_k(\mathcal{L}(G)).$$

Prova. [33]

Seja $v \in V$ um vértice de grau máximo $\delta(v) = \delta_1$ tal que v é adjacente a um vértice de grau

δ_* . Seja $S_v = \{e \in E : v \in e\}$. Suponha que $\delta_1 + \delta_* + k$ é par. Portanto, tomando $S \subset S_v$ tal que $|S| = \frac{\delta_1 + \delta_* + k}{2}$, obtêm-se $\langle S \rangle \cong K_{\frac{\delta_1 + \delta_* + k}{2}}$. Então, $\forall e \in S$,

$$\delta_S(e) - k = \frac{\delta_1 + \delta_* + k}{2} - 1 - k \geq \delta_1 + \delta_* - 1 - \frac{\delta_1 + \delta_* + k}{2}.$$

Por outro lado, como $\delta(e) = \delta_S(e) + \delta_{\bar{S}}(e)$, tem-se

$$\delta_1 + \delta_* - 2 \geq \frac{\delta_1 + \delta_* + k}{2} - 1 + \delta_{\bar{S}}(e) \Leftrightarrow \delta_1 + \delta_* - 1 - \frac{\delta_1 + \delta_* + k}{2} \geq \delta_{\bar{S}}(e).$$

Então, $\delta_S(e) - k \geq \delta_{\bar{S}}(e)$ e S é uma k -aliança defensiva em $\mathcal{L}(G)$ e, como consequência, $a_k(\mathcal{L}(G)) \leq \left\lceil \frac{\delta_1 + \delta_* + k}{2} \right\rceil$. Se $\delta_1 + \delta_* + k$ é ímpar, então $\delta_1 - \delta_* > k$. Portanto, $a_k(\mathcal{L}(G)) \leq a_{k+1}(\mathcal{L}(G)) \leq \left\lceil \frac{\delta_1 + \delta_* + k + 1}{2} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{\delta_1 + \delta_* + k}{2} \right\rceil$. $\square$

O limite inferior segue do Teorema 3.91 e da equação 3-4.

Corolário 3.42 (Rodríguez-Velázquez, Yero e Sigarreta [33])

Para um grafo δ -regular qualquer, $\delta > 0$, e para todo $k \in \{2(1 - \delta), \dots, 0\}$,

$$a_k(\mathcal{L}(G)) = \delta + \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil.$$

Relembre que um grafo $G = (V, E)$ é um grafo bipartido (δ_1, δ_2) -semirregular se todo conjunto V pode ser particionado em dois subconjuntos disjuntos V_1, V_2 tal que se $u \sim v$ então $u \in V_1$ e $v \in V_2$ e também $\delta(v) = \delta_1$ para todo $v \in V_1$ e $\delta(v) = \delta_2$ para todo $v \in V_2$.

Corolário 3.43 (Rodríguez-Velázquez, Yero e Sigarreta [33])

Para um grafo bipartido (δ_1, δ_2) -semirregular G qualquer, $\delta_1 > \delta_2$, e para todo $k \in \{2 - \delta_1 - \delta_2, \dots, \delta_1 - \delta_2\}$,

$$a_k(\mathcal{L}(G)) = \left\lceil \frac{\delta_1 + \delta_2 + k}{2} \right\rceil.$$

3.4.6 Alianças em Grafos Produtos Cartesianos

O Produto Cartesiano dos grafos G_1 e G_2 , denotado por $G_1 \times G_2$, é formado pelo conjunto de vértices $V(G_1) \times V(G_2)$, sendo que os vértices $v_i v_j$ ¹ e $v_k v_l$ serão adjacentes se e somente se:

- (i) $v_i = v_k$ e $(v_j, v_l) \in E(G_2)$; ou
- (ii) $v_j = v_l$ e $(v_i, v_k) \in E(G_1)$

Um outro limite superior que pode ser dado para o número da aliança defensiva e número da aliança defensiva forte envolve Produtos Cartesianos.

¹O rótulo $v_i v_j$ representa o par ordenado (v_i, v_j) , dado por $V(G_1) \times V(G_2)$.

Proposição 3.44 (Kristiansen, Hedetniemi e Hedetniemi [30])

Para um grafo Produto Cartesiano $G = G_1 \times G_2$ qualquer,

- (i) $a(G_1 \times G_2) \leq \min\{a(G_1)\hat{a}(G_2), \hat{a}(G_1)a(G_2)\}$.
- (ii) $\hat{a}(G_1 \times G_2) \leq \hat{a}(G_1)\hat{a}(G_2)$.

Prova. [30]

- (i) Sejam S_a e $S_{\hat{a}}$ um conjunto- a e um conjunto- $\hat{a}$ de G_1 , respectivamente, e sejam T_a e $T_{\hat{a}}$ um conjunto- a e um conjunto- $\hat{a}$ de G_2 , respectivamente. É imediato ver que o Produto Cartesiano dos conjuntos $S_a \times T_a$ e $S_{\hat{a}} \times T_{\hat{a}}$ são ambos alianças defensivas em $G = G_1 \times G_2$, então a menor cardinalidade $S_a \times T_{\hat{a}}$ ou $S_{\hat{a}} \times T_a$ formam uma aliança defensiva $a(G_1 \times G_2)$.
- (ii) Como na prova de (i), é fácil ver que $S_{\hat{a}} \times T_{\hat{a}}$ é uma aliança defensiva forte em $G_1 \times G_2$.

□

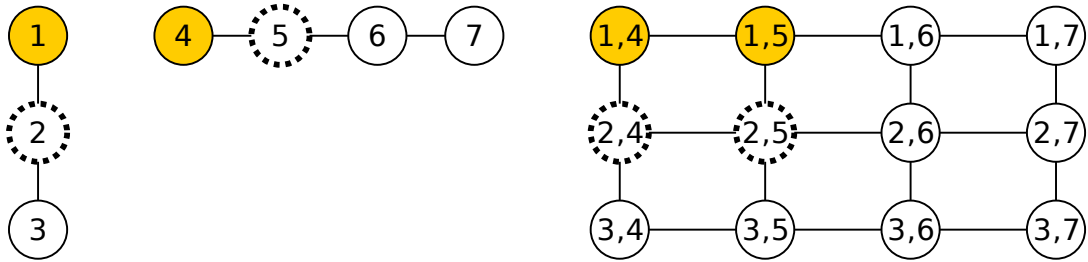


Figura 3.29: Exemplo de um grafo Produto Cartesiano $P_3 \times P_4$.

O grafo grade $m \times n$ é o Produto Cartesiano de dois caminhos, ou seja, $G_{m,n} = P_m \times P_n$. A seguir, apresentamos um teorema sobre grafos grades $G_{m,n}$.

Teorema 3.45 (Kristiansen, Hedetniemi e Hedetniemi [30])

Para um grafo grade $G_{m,n}$ qualquer,

- (i) $a(G_{m,n}) = 1$ se e somente se $\min\{m,n\} = 1$.
- (ii) $a(G_{m,n}) = 2$ se e somente se $\min\{m,n\} \geq 2$.
- (iii) $\hat{a}(G_{m,n}) = 2$ se e somente se $\min\{m,n\} < 3$.
- (iv) $\hat{a}(G_{m,n}) = 3$ se e somente se $\min\{m,n\} = 3$.
- (v) $\hat{a}(G_{m,n}) = 4$ se e somente se $\min\{m,n\} \geq 4$.

Prova. [30]

- (i) É evidente devido a Proposição 3.53, visto que qualquer vértice final forma uma aliança defensiva de cardinalidade um.
- (ii) Isto segue da Proposição 3.54 (i), visto que quaisquer dois vértices adjacentes formam uma aliança defensiva.
- (iii) Isto segue da Proposição 3.55 (ii), visto que qualquer de tais grafos grade têm dois vértices adjacentes de grau dois.
- (iv) Isto segue da Proposição 3.56 (ii)(a), visto que a primeira coluna de $G_{3,n}$ é um conjunto-â de cardinalidade três.
- (v) Isto segue do fato que um grafo grade $G_{m,n}$, onde $\min\{m,n\} \geq 4$, não tem um subgrafo induzido como definido na Proposição 3.56 (ii)(a) ou (ii)(b).

□

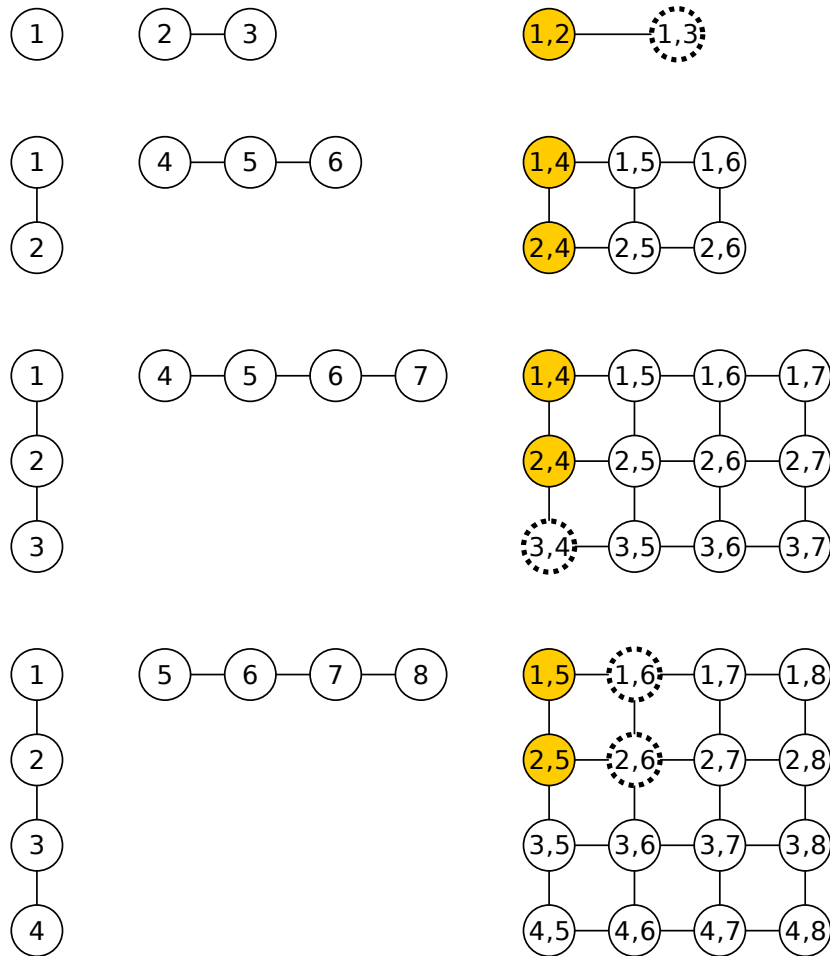


Figura 3.30: Exemplos de grafos grades.

3.4.7 Alianças em Grafos Completos

Se os vértices de um grafo G são dois a dois adjacentes, então G é denominado *grafo completo* de ordem n e é denotado por K_n .

Nesta seção, apresentamos alguns valores para $a(K_n)$, $\hat{a}(K_n)$ e $a_k(K_n)$.

Proposição 3.46 (Kristiansen, Hedetniemi e Hedetniemi [30])

Para o grafo completo K_n ,

- (i) $a(K_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.
- (ii) $\hat{a}(K_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.

Esta proposição sugeriu duas conjecturas que foram provadas por Fricke, Lawson, Haynes, Hedetniemi e Hedetniemi [21]. A prova é apresentada na seção 3.4.10, Teorema 3.59 e Teorema 3.61.

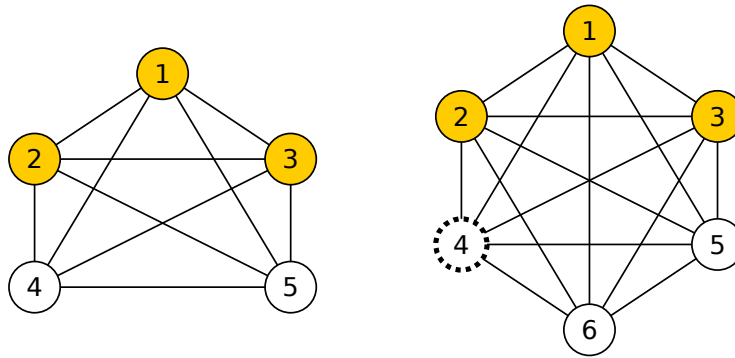


Figura 3.31: Exemplos de grafos completos.

Proposição 3.47 (Haynes, Hedetniemi e Henning [24])

Para o grafo completo K_n ,

- (i) $\gamma_a(K_n) = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$, e
- (ii) $\gamma_{\hat{a}}(K_n) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$.

Prova. [24]

- (i) Seja S um conjunto- $\gamma_a(K_n)$ e $v \in S$. Então, S contém pelo menos $\lfloor \frac{g(v)}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ vizinhos de v e, dessa forma, $\gamma_a(K_n) \geq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$. O conjunto consistindo de v e $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ de seus vizinhos é uma aliança defensiva global e então $\gamma_a(K_n) \leq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$.
- (ii) Seja D um conjunto- $\gamma_{\hat{a}}(K_n)$ e $v \in D$. Então, D contém pelo menos $\lceil \frac{g(v)}{2} \rceil = \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ vizinhos de v e, dessa forma, $\gamma_{\hat{a}}(K_n) \geq \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$. O conjunto consistindo de v e $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ de seus vizinhos é uma aliança defensiva forte global e assim $\gamma_{\hat{a}}(K_n) \leq \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$.

□

Corolário 3.48 (Rodríguez-Velázquez, Yero e Sigarreta [33])

Para todo $k \in \{1 - n, \dots, n - 1\}$, $a_k(K_n) = \lceil \frac{n+k+1}{2} \rceil$.

3.4.8 Alianças em Grafos Infinitos

Um *grafo infinito* é aquele em que os conjuntos de arestas e vértices têm cardinalidade infinita. Em um caminho infinito one-way $P_{1,\infty}$, se conhece apenas uma das extremidades e no caminho infinito two-way $P_{\infty,\infty}$, não se conhece nenhuma das extremidades.

Nesta seção, consideramos brevemente os valores de $a(G)$ e $\hat{a}(G)$ em algumas classes de grafos infinitos.

Proposição 3.49 (Kristiansen, Hedetniemi e Hedetniemi [30])

- (i) Para o caminho infinito one-way $P_{1,\infty}$, $a(P_{1,\infty}) = 1$, enquanto $\hat{a}(P_{1,\infty}) = 2$.
- (ii) Para o caminho infinito two-way $P_{\infty,\infty}$, $a(P_{\infty,\infty}) = \hat{a}(P_{\infty,\infty}) = 2$.
- (iii) Para a grade infinita $G_{\infty,\infty}$, $a(G_{\infty,\infty}) = \hat{a}(G_{\infty,\infty}) = 4$.
- (iv) Para a grade infinita d -dimensional $G_{\infty}^d = P_{\infty,\infty} \times \dots \times P_{\infty,\infty}$ (d vezes), $a(G_{\infty}^d) = \hat{a}(G_{\infty}^d) = 2^d$.
- (v) Para a árvore binária infinita com raiz $T_{2,\infty}$, $a(T_{2,\infty}) = 2$, enquanto $\hat{a}(T_{2,\infty}) = \infty$.

Prova. [30]

- (i) Claramente um vértice final no caminho infinito one-way $P_{1,\infty}$ forma uma aliança defensiva, enquanto que quaisquer dois vértices adjacentes em $P_{1,\infty}$ formam uma aliança defensiva forte.
- (ii) Quaisquer dois vértices adjacentes no caminho infinito two-way $P_{\infty,\infty}$ formam tanto uma aliança defensiva quanto uma aliança defensiva forte.
- (iii) Quaisquer quatro vértices formando um 4-ciclo na grade infinita $G_{\infty,\infty}$ formam tanto uma aliança defensiva quanto uma aliança defensiva forte.
- (iv) Quaisquer 2^d vértices formando um P_2^2 na grade infinita d -dimensional G_{∞}^d formam tanto uma aliança defensiva quanto uma aliança defensiva forte.
- (v) Na árvore binária infinita com raiz $T_{2,\infty}$, quaisquer dois vértices adjacentes formam uma aliança defensiva, mas não uma aliança defensiva forte. Em $T_{2,\infty}$ cada vértice tem um pai e dois filhos, isto é, todos vértices têm grau dois. Segue, portanto, que nenhum conjunto conexo de vértices S em $T_{2,\infty}$ pode ser uma aliança defensiva forte, visto que em tal conjunto S o subgrafo induzido $\langle S \rangle$ deveria necessariamente

ter um vértice final, pois não há ciclos em $T_{2,\infty}$, e este vértice não seria fortemente defendido. Dessa forma, $\hat{a}(T_{2,\infty})$ não é finito. Portanto, qualquer caminho infinito two-way em $T_{2,\infty}$ é uma aliança defensiva forte.

□

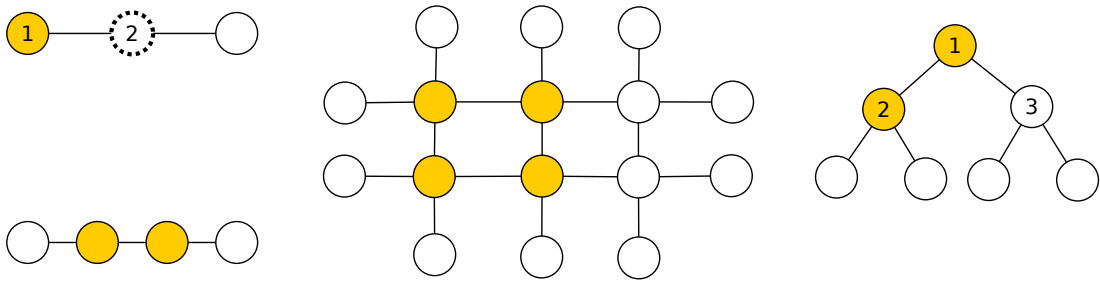


Figura 3.32: Exemplos de grafos infinitos.

Proposição 3.50 (Kristiansen, Hedetniemi e Hedetniemi [30])

Para a árvore ternária infinita com raiz $T_{3,\infty}$, $a(T_{3,\infty}) = \hat{a}(T_{3,\infty}) = \infty$.

Prova. [30]

Na árvore ternária infinita com raiz $T_{3,\infty}$, todo vértice tem um pai e três filhos, isto é, todo vértice tem grau quatro, exceto a raiz, que tem grau três. Segue, portanto, que nenhum conjunto conexo finito S de vértices em $T_{3,\infty}$ pode ser uma aliança defensiva, visto que em tal conjunto S o subgrafo induzido $\langle S \rangle$ deveria necessariamente ter um vértice final, visto que não há ciclos em $T_{3,\infty}$ e este vértice não seria fortemente defendido. Dessa forma, $\hat{a}(T_{3,\infty})$ não é finito. Portanto, qualquer caminho infinito two-way em $T_{3,\infty}$ é uma aliança defensiva e, de fato, é uma aliança defensiva forte. □

3.4.9 Alianças em Grafos Outerplanares

Um grafo é chamado *outerplanar* se ele tem um desenho plano tal que os vértices estão sobre o círculo fixo exterior e as arestas estão dentro do círculo. Todo grafo outerplanar é planar, mas o inverso não é verdade.

Em seguida, consideramos grafos G outerplanares. Podemos supor que G é conexo, caso contrário $s(G)$ é o mínimo dos números de segurança dos componentes. Do acima exposto, é evidente que um subgrafo completo W é um conjunto seguro se e somente se $|N[W]| \leq 2|W|$. Daqui resulta que $s(G) = 1$ se e somente se $\delta(G) \leq 1$

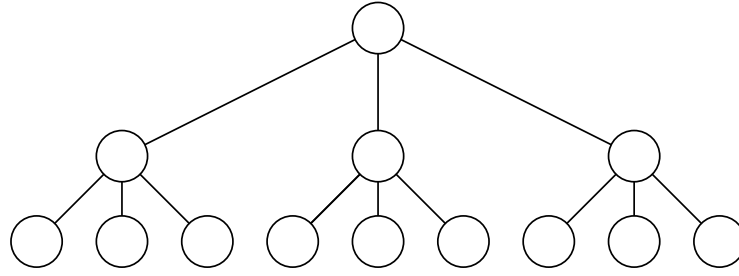


Figura 3.33: Exemplo de uma árvore ternária infinita com $a(T_{3,\infty}) = \hat{a}(T_{3,\infty}) = \infty$.

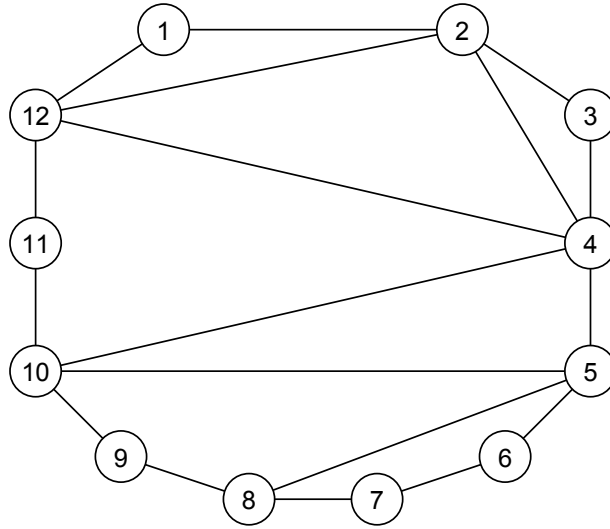


Figura 3.34: Exemplo de um grafo G outerplanar.

e $s(G) = 2$, se e somente se $\delta(G) > 1$ e há dois vértices adjacentes x e y para os quais $|N[x] \cup N[y]| \leq 4$. Isto e o seguinte caracterizam o número de segurança de grafos outerplanares.

Lema 3.51 (Dutton [16])

Seja $G = (V, E)$ um grafo. Se qualquer uma das seguintes configurações ocorrer em G , $s(G) \leq 3$.

- (i) Configuração 1: vértices a, b, c e d formam um caminho. Vértices a e d podem estar associados a quaisquer vértices de $V - \{b, c\}$, inclusive um ao outro.
- (ii) Configuração 2: vértices a, b, c e d formam um caminho e existe uma aresta ac . Vértices a e d podem ser associados a quaisquer vértices de $V - \{b, c\}$, inclusive um ao outro.
- (iii) Configuração 3: vértices a, b, c e d e e formam um caminho e arestas ac e ce existem. Vértices a e e podem ser associados a qualquer vértices de $V - \{b, c, d\}$,

inclusive um ao outro.

Prova. [16]

Grafos com as Configurações 1 e 2 têm $\{b, c\}$ como um conjunto seguro, enquanto que $\{b, c, d\}$ é um conjunto seguro de grafos contendo a Configuração 3. $\square$

Um vértice de corte de um grafo conexo G é um vértice ou conjunto de vértices cuja remoção (juntamente com as respectivas arestas) resulta em um grafo G desconexo, como podemos ver na Figura 3.35.

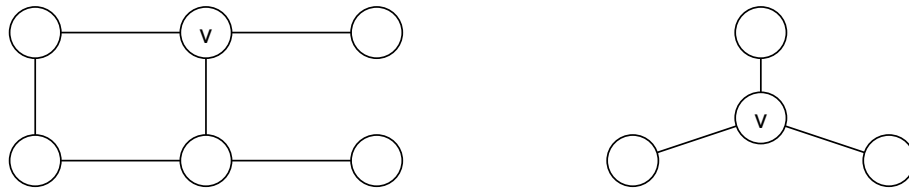


Figura 3.35: Exemplo de grafos nos quais v é um vértice de corte.

Teorema 3.52 (Dutton [16])

Se G é um grafo outerplanar conexo, então

- (i) $s(G) = 1$ se e somente se $\delta \leq 1$,
- (ii) $s(G) = 2$ se e somente se $\delta > 1$ e existem vértices adjacentes x e y tal que $|N[\{x, y\}]| \leq 4$, e
- (iii) $s(G) = 3$, caso contrário.

Prova. [16]

As declarações (i) e (ii) são válidas para todos os grafos, como indicado nas observações que precedem o Lema 3.51. Se nem (i) nem (ii) é válido para G , então $s(G) \geq 3$. Primeiro, considere o caso quando a conectividade do vértice é $\kappa = 1$. Seja B um bloco que é uma folha do bloco da árvore de G e seja v o vértice de corte. Há três casos:

1. B é uma aresta (B tem 2 vértices, inclusive v). Então, G tem um vértice de grau 1 e $s(G) = 1$.
2. B tem 3 vértices, inclusive v , então ele é um triângulo com dois vértices adjacentes a e b de grau 2 que formam um conjunto seguro.
3. B tem pelo menos 4 vértices, inclusive v . Há uma aresta ij formando um ciclo de tamanho pelo menos 4 com pelo menos dois outros vértices, nenhum sendo v . Entre todos os tais ciclos, sejam i e j escolhidos (i ou j pode ser v), então este ciclo é tão

pequeno quanto possível. Assim, os vértices remanescentes no ciclo não podem estar no ciclo de tamanho maior que 3. Dessa forma, o bloco deve incluir uma configuração equivalente a uma das apresentadas no Lema 3.51.

O resultado segue.

Visto que $\kappa \leq 2$ para todos os grafos outerplanares, o caso final ocorre quando $\kappa = 2$ e $n \geq 4$. Quando $n \leq 3$, o caso (i) ou (ii) é válido. Então, um argumento similar a (3) mostra que $s(G) = 3$ e estabelece (iii). $\square$

3.4.10 Alianças em Grafos Gerais

Nesta seção, vemos o número da aliança defensiva e o número da aliança defensiva forte com relação ao subgrafo induzido $\langle S \rangle$, com respeito ao grau mínimo $\delta(G)$, ao grau máximo $\Delta(G)$ e ao tamanho do grafo G . Também são apresentados alguns limites superiores e inferiores já estabelecidos para o número da aliança defensiva global e o número da aliança defensiva forte global.

Esta seção também apresenta diversos limites para o número de segurança de um grafo.

Proposição 3.53 (Kristiansen, Hedetniemi e Hedetniemi [30])

Para qualquer aliança defensiva crítica S no grafo G , o subgrafo $\langle S \rangle$ induzido por S é conexo.

É evidente que há somente dois tipos de alianças defensivas de cardinalidade um: um vértice isolado (um vértice de grau zero) e um vértice final (um vértice de grau um).

Proposição 3.54 (Kristiansen, Hedetniemi e Hedetniemi [30])

Para um grafo G qualquer,

- (i) $a(G) = 1$ se e somente se existe um vértice $v \in V$ tal que $g(v) \leq 1$.
- (ii) $\hat{a}(G) = 1$ se e somente se G tem um vértice isolado.

As caracterizações de grafos para os quais $\hat{a}(G) = 2$ são consequências imediatas da Proposição 3.53 e dependem do grau mínimo de um vértice em G , denotado por $\delta(G)$.

Proposição 3.55 (Kristiansen, Hedetniemi e Hedetniemi [30])

Para um grafo G qualquer,

- (i) $a(G) = 2$ se e somente se $\delta(G) \geq 2$ e G tem dois vértices adjacentes de grau no máximo três.

- (ii) $\hat{a}(G) = 2$ se e somente se $\delta(G) \geq 1$ e G tem dois vértices adjacentes de grau no máximo dois.

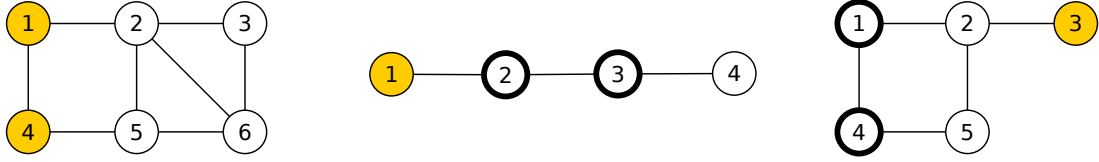


Figura 3.36: Exemplos de grafos com $a(G) = \hat{a}(G) = 2$.

Proposição 3.56 (Kristiansen, Hedetniemi e Hedetniemi [30])

Para um grafo G qualquer,

- (i) $a(G) = 3$ se e somente se $a(G) \neq 1$, $a(G) \neq 2$ e G tem um subgrafo induzido isomorfo quer a
- (a) P_3 , com vértices, em ordem, u, v e w , onde $g(u)$ e $g(w)$ são no máximo três e $g(v)$ é no máximo cinco, ou
 - (b) K_3 , cada vértice que tem grau no máximo cinco.
- (ii) $\hat{a}(G) = 3$ se e somente se $\hat{a}(G) \neq 1$, $\hat{a}(G) \neq 2$ e G tem um subgrafo induzido isomorfo quer a
- (a) P_3 , com vértices, em ordem, u, v e w , onde $g(u)$ e $g(w)$ são no máximo dois e $g(v)$ é no máximo quatro, ou
 - (b) K_3 , cada vértice que tem grau no máximo quatro.

O Corolário 3.21 (ii) mostra que, para a classe das rodas W_n , o valor de $\hat{a}$ pode ser arbitrariamente grande. As próximas duas observações fornecem mais duas classes de grafos para os quais $a(G)$ e $\hat{a}(G)$ podem ser arbitrariamente grande.

Proposição 3.57 (Kristiansen, Hedetniemi e Hedetniemi [30])

Para um grafo G qualquer de ordem n , $1 \leq a(G) \leq \hat{a}(G) \leq n$.

Embora o limite inferior seja exato para grafos com vértices isolados ou com vértices finais, o limite superior pode ser melhorado ligeiramente.

Proposição 3.58 (Kristiansen, Hedetniemi e Hedetniemi [30])

Para um grafo conexo G qualquer de ordem n , tendo grau mínimo $\delta(G)$,

- (i) $a(G) \leq n - \left\lceil \frac{\delta(G)}{2} \right\rceil$,

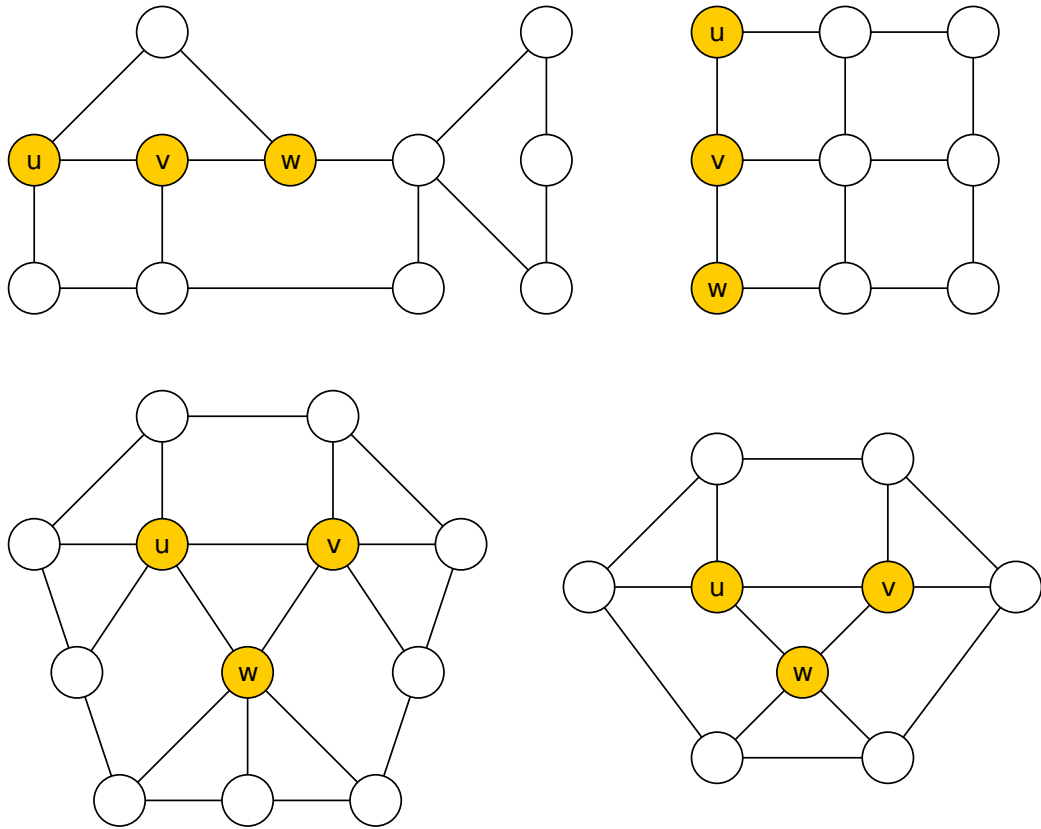


Figura 3.37: Exemplos de grafos com $a(G) = \hat{a}(G) = 3$.

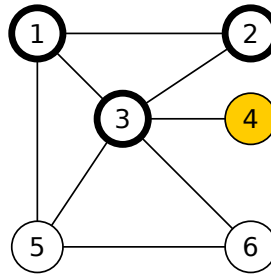


Figura 3.38: Exemplo de grafo com $1 \leq a(G) \leq \hat{a}(G) \leq n$.

$$(ii) \quad \hat{a}(G) \leq n - \left\lfloor \frac{\delta(G)}{2} \right\rfloor,$$

e esses limites são exatos.

Prova. [30]

- (i) Seja $S \subseteq V$ um conjunto qualquer de cardinalidade $n - \left\lfloor \frac{\delta(G)}{2} \right\rfloor$. Observe que todo vértice em S é defendido e então que S é uma aliança defensiva.
- (ii) Seja $S \subseteq V$ um conjunto qualquer de cardinalidade $n - \left\lfloor \frac{\delta(G)}{2} \right\rfloor$. Perceba que todo vértice em S é fortemente defendido e então que S é uma aliança defensiva forte.

Devemos observar que estes limites são exatos para grafos completos. $\square$

A Proposição 3.53 (i) mostra que $a(K_n)$ pode ser pelo menos tão grande quanto $\lceil \frac{n}{2} \rceil$, para um grafo de ordem n . Isto levou os autores Fricke, Lawson, Haynes, Hedetniemi e Hedetniemi [21] a provar que este é o valor máximo que $a(G)$ pode ter para um grafo G qualquer.

Teorema 3.59 (Fricke, Lawson, Haynes, Hedetniemi e Hedetniemi [21])

Se G é um grafo conexo, então $a(G) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ e seu limite é exato.

Prova. [21]

Seja $\pi = (A, B)$ uma bipartição balanceada de V , isto é, $|A| = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ e $|B| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, tal que o número de arestas- AB é mínimo entre todas tais partições. Se $\langle A \rangle$ ou $\langle B \rangle$ é uma aliança defensiva, então $a(G) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Portanto, assuma que nem A nem B é uma aliança. Dessa forma, existem vértices indefesos $a \in A$ e $b \in B$, tais que $|N[a] \cap A| < |N(a) \cap B|$ e $|N[b] \cap B| < |N(b) \cap A|$. Mas então $\pi' = (A', B')$, onde $A' = (A - \{a\}) \cup \{b\}$ e $B' = (B - \{b\}) \cup \{a\}$ é uma bipartição balanceada com menos arestas- $A'B'$ que o número de arestas- AB de π , contradizendo a escolha de π . A Proposição 3.53 mostra que este limite é exato para grafos completos, como vemos na Figura 3.39. $\square$

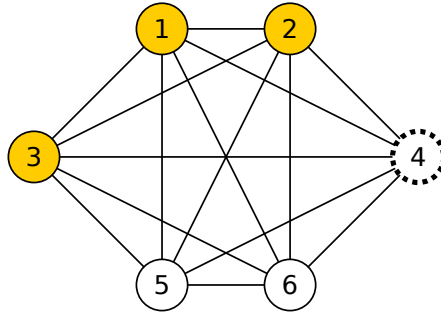


Figura 3.39: Exemplo de um grafo G qualquer em que $a(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ e $\hat{a}(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.

Um algoritmo polinomial para construir uma aliança defensiva de cardinalidade no máximo $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ segue diretamente da prova do Teorema 3.59.

Corolário 3.60 (Fricke, Lawson, Haynes, Hedetniemi e Hedetniemi [21])

Para um grafo conexo G qualquer, existe um algoritmo $O(mn)$ para encontrar uma aliança defensiva de cardinalidade no máximo $\lceil \frac{n}{2} \rceil$. Observe que para grafos simples: $m = \binom{n-1}{2} n$.

Prova. [21]

Seja $\pi = (A, B)$ uma bipartição balanceada qualquer de V .

enquanto nem A nem B é uma aliança defensiva faça

descubra se $a \in A$ satisfaz $|N[a] \cap A| < |N(a) \cap B|$;

descubra se $b \in B$ satisfaz $|N[b] \cap B| < |N(b) \cap A|$;

faça $A = (A - \{a\}) \cup \{b\}$;

faça $B = (B - \{b\}) \cup \{a\}$;

fim-enquanto.

Toda iteração do loop enquanto decrementa o número de arestas entre A e B . Dessa forma, pode haver no máximo $O(m)$ iterações. Cada uma destas iterações envolverá a identificação de vértices $a \in A$ e $b \in B$ indefesos, olhando para todo vértice em $N[a]$ e todo vértice em $N[b]$. Dessa forma, cada iteração gasta no máximo tempo $O(n)$. Isso dá um algoritmo $O(mn)$. $\square$

O grafo $G = \overline{K}_{2n} + K_n$ é um exemplo onde $\hat{a}(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$, para $n = 4$ e isto é evidenciado também na Proposição 3.53. Este exemplo levou os autores Fricke, Lawson, Haynes, Hedetniemi e Hedetniemi [21] a provar que este valor é o máximo que $\hat{a}(G)$ pode alcançar.

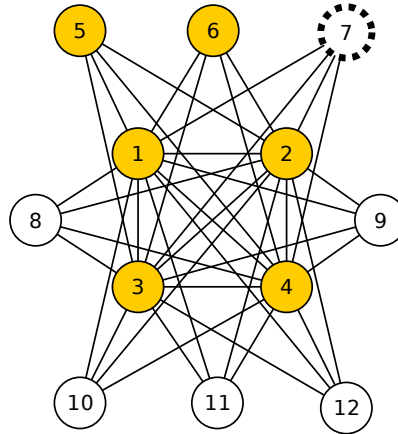


Figura 3.40: Grafo $G = \overline{K}_{2n} + K_n$, em que $\hat{a} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.

Teorema 3.61 (Fricke, Lawson, Haynes, Hedetniemi e Hedetniemi [21])

Se G é um grafo conexo, então $\hat{a}(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ e seu limite é exato.

Prova. [21]

Seja $\pi = (A, B)$ uma bipartição 2-balanceada de V , isto é, $|A| \geq |B|$ e $|A| - |B| \leq 2$

e seja o número de arestas- AB o mínimo entre todas as bipartições 2-balanceadas. Se A é uma aliança defensiva forte, então $\hat{a}(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$. Portanto, assuma que A não é uma aliança defensiva forte. Isto significa que existe um vértice indefeso $a \in A$, tal que $|N[a] \cap A| \leq |N(a) \cap B|$, isto é, a tem estritamente mais vizinhos em B que em A . Mas isto significa que $\pi' = (A', B')$, onde $A' = A - \{a\}$ e $B' = B \cup \{a\}$ é uma bipartição 2-balanceada tendo menos arestas- $A'B'$ que o número de arestas- AB de π , contradizendo a escolha de π . Dessa forma, A é uma aliança defensiva forte e $\hat{a}(G) \leq |A| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$. Novamente, a Proposição 3.53 ilustra que este limite é exato para grafos completos, como vemos na Figura 3.39. $\square$

Observe que se $\pi = (A, B)$ é uma bipartição 2-balanceada de G com o número mínimo de arestas- AB e $|A| = |B|$, então ambos A e B são alianças defensivas fortes. Também se $|A| = |B| + 1$, então $A, A - \{v\}, B$ e $B \cup \{v\}$ são alianças defensivas fortes. Portanto, tem-se os corolários seguintes.

Corolário 3.62 (Fricke, Lawson, Haynes, Hedetniemi e Hedetniemi [21])

Se G tem uma bipartição $\pi = (A, B)$, onde $|A| = |B|$ e π tem o número mínimo de arestas- AB entre todas as bipartições 2-balanceadas, então $|V|$ pode ser particionado em duas alianças defensivas fortes disjuntas, chamadas A e B .

Corolário 3.63 (Fricke, Lawson, Haynes, Hedetniemi e Hedetniemi [21])

Se G tem uma bipartição $\pi = (A, B)$, onde $|A| = |B| + 1$ e π tem o número mínimo de arestas- AB entre todas as bipartições 2-balanceadas e existe um vértice $v \in A$ tal que $N(v) \cap A = N(v) \cap B$, então $\hat{a}(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Vejamos outro corolário para o Teorema 3.61.

Corolário 3.64 (Fricke, Lawson, Haynes, Hedetniemi e Hedetniemi [21])

Para um grafo conexo G qualquer, existe um algoritmo $O(mn)$ para encontrar uma aliança defensiva forte de cardinalidade no máximo $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.

Prova. [21]

Comece com uma bipartição 2-balanceada qualquer $\pi = (A, B)$, onde $|A| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$. Se A é uma aliança defensiva forte, finalizamos; de outro modo, encontre um vértice indefeso $a \in A$, como na prova do Teorema 3.59, e mova-o para B . Fazendo isso, o número de arestas entre A e B diminuirão em pelo menos um (e talvez mais).

Agora, se B é uma aliança defensiva forte, finalizamos. Se não, encontre um vértice $b \in B$ indefeso e mova-o para A . Fazendo isso, o número de arestas entre A e B diminuirão novamente em pelo menos um.

Continue neste trabalho, alternando entre mover um vértice de A para B e então de B para A . Este processo deve terminar, porque o número de arestas entre A e B diminui com cada movimentação.

Por último, um dos conjuntos A ou B será uma aliança defensiva forte de cardinalidade no máximo $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.

Visto que, inicialmente, pode haver no máximo $O(mn)$ arestas entre A e B e visto que é gasto no máximo tempo $O(n)$ para encontrar um vértice indefeso, para $a \in A$ ou $b \in B$, cada uma das, no máximo, $O(m)$ iterações pode levar no máximo tempo $O(n)$. Dessa forma, uma aliança defensiva forte de cardinalidade no máximo $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ pode ser encontrada no tempo máximo $O(mn)$. $\square$

Para a classe de grafos seguinte, o limite no Teorema 3.59 pode ser melhorado ligeiramente.

Seja $\pi = \{V_1, V_2\}$ uma bipartição de vértices de um grafo conexo G , tal que existem $\lambda(G)$ arestas entre vértices em V_1 e vértices em V_2 . Se $|V_1| = 1$ ou $|V_2| = 1$, então dizemos que π é uma λ -partição singular (simples), enquanto que se ambas V_1 e V_2 têm pelo menos dois vértices, então dizemos que π é uma λ -partição não singular.

Proposição 3.65 (Kristiansen, Hedetniemi e Hedetniemi [30])

Para um grafo conexo G qualquer de ordem n , para o qual $\lambda(G) < \delta(G)$, $a(G) \leq \hat{a}(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Prova. [30]

Seja $\pi = \{V_1, V_2\}$ uma λ -bipartição de G e assumamos que $|V_1| \leq |V_2|$. Visto que $\lambda(G) < \delta(G)$, sabemos que π é uma λ -partição. Como $|V_1| \leq |V_2|$ e V_1 é uma bipartição de G em dois conjuntos de vértices, $|V_1| \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Assumimos que o conjunto V_1 é uma aliança defensiva forte e, portanto, $\hat{a}(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Isto segue da observação que se V_1 contém um vértice u que não é fortemente defendido, então a partição modificada $\pi' = \{V_1 - \{u\}, V_2 \cup \{u\}\}$ é uma partição que tem menos arestas entre os dois conjuntos que π , contradizendo a afirmação que π é uma λ -partição. $\square$

Corolário 3.66 (Kristiansen, Hedetniemi e Hedetniemi [30])

Para um grafo G qualquer de ordem n , tendo uma λ -partição não singular, $a(G) \leq \hat{a}(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Proposição 3.67 (Brigham, Dutton, Haynes e Hedetniemi [6])

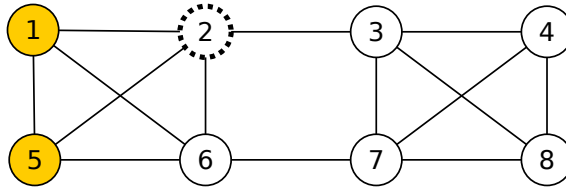


Figura 3.41: Exemplo de um grafo G qualquer, em que $a(G) = 2 \leq \hat{a}(G) = 3 \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = 4$.

Sejam S_1 e S_2 alianças defensivas distintas em um grafo G . Um vértice em $S_1 \cap S_2$ tem no máximo um vizinho a mais em $\partial(S_1 \cup S_2)$ que em $S_1 \cap S_2$.

Prova. [30]

Seja $x \in S_1 \cap S_2$, e a_i o número de vizinhos de x em $S_i - (S_1 \cap S_2)$, $i = 1, 2$, a_{12} o número de vizinhos em $S_1 \cap S_2$ e b o número de vizinhos em $\partial(S_1 \cup S_2)$. Dessa forma, $a_1 + a_{12} + 1 \geq a_2 + b$ e $a_2 + a_{12} + 1 \geq a_1 + b$. Adicionando a inequação aparece $b \leq a_{12} + 1$. $\square$

Visto que uma aliança defensiva forte global é uma aliança defensiva global e que toda aliança defensiva global é também um conjunto dominante, a próxima observação é imediata.

Observação 3.68 (Haynes, Hedetniemi e Henning [24])

Para um grafo G qualquer,

- (i) $1 \leq \gamma(G) \leq \gamma_a(G) \leq \gamma_{\hat{a}}(G) \leq n$,
- (ii) $1 \leq a(G) \leq \gamma_a(G) \leq n$,
- (iii) $1 \leq a(G) \leq \hat{a}(G) \leq \gamma_{\hat{a}}(G) \leq n$.

A seguir, foi mostrado que o número da aliança defensiva global e o número da dominação total são iguais para grafos com grau mínimo pelo menos dois e grau máximo até três.

Lema 3.69 (Haynes, Hedetniemi e Henning [24])

Para um grafo G qualquer com $\delta(G) \geq 2$, $\gamma_t(G) \leq \gamma_a(G)$. Além disso, se $\Delta(G) \leq 3$, então $\gamma_t(G) = \gamma_a(G)$.

Prova. [24]

Para um conjunto- $\gamma_a(G)$ S qualquer e um vértice $v \in S$, S contém pelo menos $\left\lfloor \frac{g(v)}{2} \right\rfloor \geq 1$

vizinhos de v e então S é um conjunto dominante total. Dessa forma, $\gamma_t(G) \leq \gamma_a(G)$. Além disso, se $\Delta(G) \leq 3$, então para um conjunto- $\gamma_t(G)$ D qualquer e um vértice $u \in D$, $|N[u] \cap D| \geq 2 \geq |N(u) \cap (V - D)|$. Portanto, D é uma aliança defensiva global e assim $\gamma_a(G) \leq \gamma_t(G)$. $\square$

Em seguida, foi mostrado que para um grafo qualquer sem vértices isolados, o número de dominação total é limitado superiormente pelo número da aliança defensiva forte global.

Lema 3.70 (Haynes, Hedetniemi e Henning [24])

Para um grafo G qualquer sem vértices isolados, $\gamma_t(G) \leq \gamma_a(G)$.

Prova. [24]

Para um conjunto- $\gamma_a(G)$ S qualquer e um vértice $v \in S$, S contém pelo menos $\left\lceil \frac{g(v)}{2} \right\rceil \geq 1$ vizinhos de v e então S é um conjunto dominante total. Portanto, $\gamma_t(G) \leq \gamma_a(G)$. $\square$

Teorema 3.71 (Haynes, Hedetniemi e Henning [24])

Se G é um grafo de ordem n , então $\gamma_a(G) \geq \frac{\sqrt{4n+1}-1}{2}$, e este limite é exato.

Prova. [24]

Seja $\gamma_a(G) = k$. Para um conjunto- $\gamma_a(G)$ S qualquer e um vértice $v \in S$, S contém pelo menos $\left\lceil \frac{g(v)}{2} \right\rceil$ vizinhos de v . Dessa forma, $k = |S| \geq |\{v\}| + \left\lceil \frac{g(v)}{2} \right\rceil \geq \frac{g(v)+1}{2}$. Então, $V - S$ contém no máximo $\left\lceil \frac{g(v)}{2} \right\rceil \leq \frac{g(v)+1}{2} \leq k$ vizinhos de v . Portanto, cada vértice em S tem no máximo k vizinhos em $V - S$ e então $n - k = |V - S| \leq k^2$ ou, equivalentemente, $k^2 + k - n \geq 0$. Sabemos que $k \geq \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, ou seja, $k \geq \frac{-1 + \sqrt{1^2 - 4*1*-n}}{2*1}$. Sendo assim, $k \geq \frac{\sqrt{4n+1}-1}{2}$.

Pode-se ver que este limite é exato como segue. Seja $F_1 = K_2$ e, para $k \geq 2$, seja F_k o grafo obtido da união de k estrelas $K_{1,k}$ disjuntas pela adição de todas as arestas entre os vértices centrais das k estrelas. Então, $G = F_k$ para algum $k \geq 1$ tem ordem $n = k(k+1)$ e, dessa forma, $k = \frac{\sqrt{4n+1}-1}{2}$. Se $k = 1$, então $\gamma_a(G) = 1 = \frac{\sqrt{4n+1}-1}{2}$. Se $k \geq 2$, então os k vértices centrais das estrelas formam uma aliança defensiva global e assim $\gamma_a(G) \leq \frac{\sqrt{4n+1}-1}{2}$. Consequentemente, $\gamma_a(G) = \frac{\sqrt{4n+1}-1}{2}$. $\square$

Usando argumento similar ao que foi usado na prova do Teorema 3.71, pode-se obter o seguinte resultado.

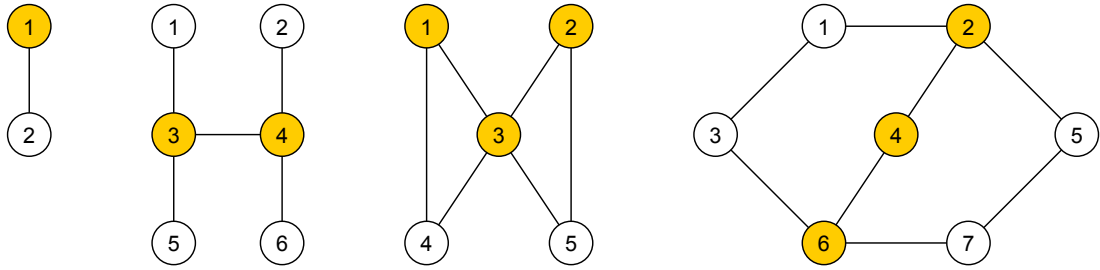


Figura 3.42: Grafos com $\gamma_a(G) = 1, 2, 3$ e 3 , respectivamente (da esquerda para a direita).

Proposição 3.72 (Haynes, Hedetniemi e Henning [24])

Se G é um grafo de ordem n , então $\gamma_a(G) \geq \frac{n}{\lceil \frac{r}{2} \rceil + 1}$.

Teorema 3.73 (Haynes, Hedetniemi e Henning [24])

Se G é um grafo de ordem n , então $\gamma_a(G) \geq \sqrt{n}$, e este limite é exato.

Prova. [24]

Seja $\gamma_a(G) = k$. Para um conjunto S qualquer e um vértice $v \in S$, S contém pelo menos $\left\lceil \frac{g(v)}{2} \right\rceil$ vizinhos de v . Dessa forma, $k = |S| \geq |\{v\}| + \left\lceil \frac{g(v)}{2} \right\rceil \geq \frac{g(v)+2}{2}$. Então, $V - S$ contém no máximo $\left\lfloor \frac{g(v)}{2} \right\rfloor \leq \frac{g(v)}{2} \leq k - 1$ vizinhos de v . Portanto, cada vértice em S tem no máximo $k - 1$ vizinhos em $V - S$ e então $n - k = |V - S| \leq k(k - 1)$ ou, equivalentemente, $n - k \geq k(k - 1) = n - k \geq k^2 - k = n \geq k^2$. Sendo assim, $k \geq \sqrt{n}$.

Pode-se ver que este limite é exato como segue. Seja $G_1 = K_1$, $G_2 = P_4$ e, para $k \geq 3$, seja G_k o grafo obtido da união de k estrelas $K_{1,k-1}$ disjuntas pela adição de todas as arestas entre os vértices centrais das k estrelas. Então, $G = G_k$ para algum $k \geq 1$ tem ordem $n = k^2$ e, dessa forma, $k = \sqrt{n}$. Se $k = 1$, então $\gamma_a(G) = 1 = \sqrt{n}$, enquanto se $k = 2$, então $\gamma_a(G) = 2 = \sqrt{n}$. Se $k \geq 3$, então os k vértices centrais das estrelas formam uma aliança defensiva forte global e assim $\gamma_a(G) \leq \sqrt{n}$. Consequentemente, $\gamma_a(G) = \sqrt{n}$. $\square$

Proposição 3.74 (Haynes, Hedetniemi e Henning [24])

Para um grafo G qualquer sem vértices isolados e grau mínimo δ ,

- (i) $\gamma_a(G) \leq n - \left\lceil \frac{\delta}{2} \right\rceil$, e
- (ii) $\gamma_a(G) \leq n - \left\lfloor \frac{\delta}{2} \right\rfloor$,

e estes limites são exatos.

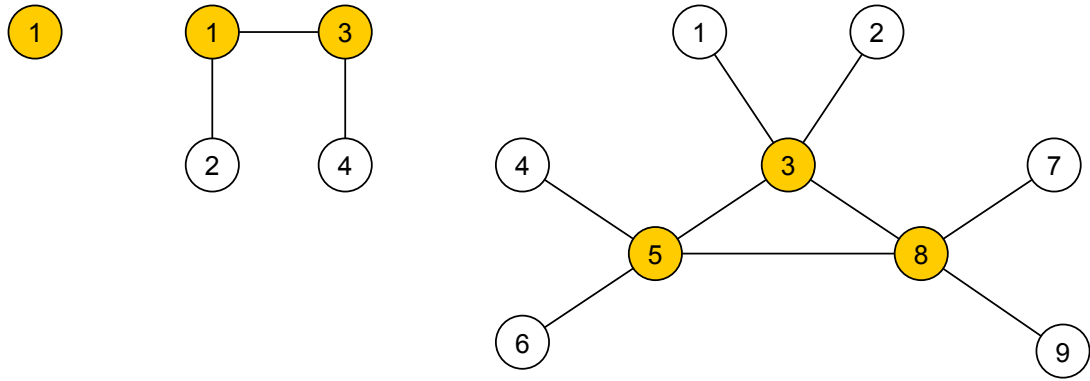


Figura 3.43: Grafos com $\gamma_a(G) = 1, 2$ e 3 , respectivamente (da esquerda para a direita).

Prova. [24]

- (i) Seja v um vértice de grau mínimo e S o conjunto de vértices formado pela remoção de $\left\lfloor \frac{\delta}{2} \right\rfloor$ vizinhos de v de V . Então, S domina G . Para cada $u \in S$, $|N(u) \cap (V - S)| \leq \left\lfloor \frac{\delta}{2} \right\rfloor \leq \left\lceil \frac{g(u)}{2} \right\rceil$ e assim $|N[u] \cap S| \geq \left\lfloor \frac{g(u)}{2} \right\rfloor + 1 \geq |N(u) \cap (V - S)|$. Dessa forma, S é uma aliança defensiva global e assim $\gamma_a(G) \leq |S|$. Que este limite é exato segue da Proposição 3.47 (tome $G = K_n$ com n ímpar).
- (ii) Seja D o conjunto de vértice formado pela remoção de $\left\lfloor \frac{\delta}{2} \right\rfloor$ vizinhos de v de V . Então, D domina G . Para cada $u \in D$, $|N(u) \cap (V - D)| \leq \left\lfloor \frac{\delta}{2} \right\rfloor \leq \left\lceil \frac{g(u)}{2} \right\rceil$ e assim $|N[u] \cap D| \geq \left\lceil \frac{g(u)}{2} \right\rceil + 1 \geq |N(u) \cap (V - D)|$. Dessa forma, D é uma aliança defensiva forte global e assim $\gamma_a(G) \leq |D|$. Que este limite é exato segue da Proposição 3.47 (tome $G = K_n$).

□

Corolário 3.75 (Haynes, Hedetniemi e Henning [24])

Para um grafo G qualquer, $\gamma_a(G) = n$ se e somente se $G = \overline{K}_n$.

Teorema 3.76 (Dutton [16])

Para um grafo G qualquer de ordem n :

- (i) Se $s(G) < \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, então $\kappa \leq s(G) \leq n - \delta - 1$.
- (ii) $s(G) \geq \min \left\{ \kappa, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \right\}$.
- (iii) Se $s(G) < \kappa$, então $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq s(G) \leq n - \gamma$.
- (iv) Ou

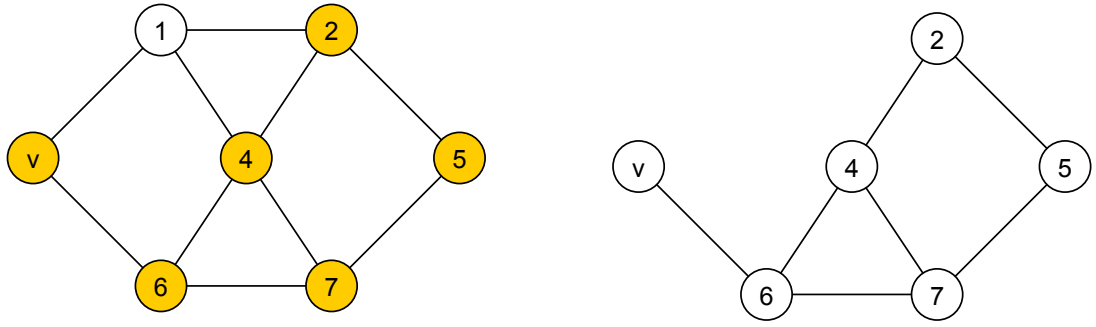


Figura 3.44: Exemplo de um grafo G e ao lado um subgrafo D que domina G .

$$(a) \max \left\{ \kappa, \left\lceil \frac{\delta+1}{2} \right\rceil \right\} \leq s(G) \leq n - \delta - 1, \text{ ou}$$

$$(b) \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq s(G) \leq n - \left\lceil \frac{\delta}{2} \right\rceil.$$

$$(v) \text{ Se } \delta \geq \min \left\{ n - \kappa, \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor \right\}, \text{ então } \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq s(G) \leq n - \left\lceil \frac{\delta}{2} \right\rceil.$$

Prova. [16]

Do Teorema 3.8, quando $S \subseteq V$ é um conjunto seguro qualquer, $|S| \geq |N[S] - S|$. Portanto, se $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil > s(G) = |S|$, então S não pode ser um conjunto dominante e $N[S] - S$ é um conjunto desconexo.

- (i) A partir das observações anteriores e um conjunto seguro mínimo S qualquer, $\kappa \leq |N[S] - S| \leq |S| = s(G)$. Visto que S não é um conjunto dominante, existe um vértice $v \notin N[S]$ para o qual $\delta \leq g(v) \leq n - |S| - 1$. Como $s(G) = |S|$, tem-se que $\delta \leq g(v) \leq n - s(G) - 1$, $\delta \leq n - s(G) - 1$, e assim $s(G) \leq n - \delta - 1$. Visto que $\kappa \leq |N[S] - S| \leq |S| = s(G)$, tem-se que $\kappa \leq s(G)$ e então $\kappa \leq s(G) \leq n - \delta - 1$.
- (ii) O resultado segue diretamente do item (i), onde $s(G) < \kappa$ implica em $s(G) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.
- (iii) Se $s(G) < \kappa$, então nem S nem $N[S] - S$ são conjuntos desconexos, portanto ambos são conjuntos dominantes. Como $s(G) < \kappa$, pelo item (i) tem-se que $s(G) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Sabemos que $n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, então $s(G) \geq n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ e assim $s(G) \geq n - s(G)$. Visto que $\gamma \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, tem-se que $\gamma \leq n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Como $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq s(G)$, então $n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ e assim $s(G) \leq s(G)$ e tem-se que $\gamma \leq s(G)$. Portanto, $\gamma \leq n - s(G) \leq s(G)$.
- (iv) O Teorema 3.90 mostra que $\left\lceil \frac{\delta+1}{2} \right\rceil \leq s(G) \leq n - \frac{\delta}{2}$. Então, se $s(G)$ não satisfaz o item (iv)(b), $s(G) < \frac{n}{2}$. Dessa forma, pelo item (i), $\kappa \leq s(G) \leq n - \delta - 1$. Isto, com o limite inferior do Teorema 3.90, estabelecem o item (iv).
- (v) Se $\delta \geq n - \kappa$, então as conclusões em (i) e Teorema 3.90 são válidas. Quando $\delta \geq \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor$, o intervalo em (iv)(a) é vazio. Por esse motivo, (iv)(b) e, portanto, (v) devem ser válidos.

□

Árvores, ciclos e grafos completos mostram que o limite do Teorema 3.76 (ii) não pode ser melhorado. Grafos completos também mostram que os limites previstos em 3.76 (iv) e 3.76 (v) são exatos.

Uma consequência interessante do Teorema 3.76 (iv) ocorre para grafos G com $\lceil \frac{n}{2} \rceil \leq \delta \leq \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$. Para tais grafos $s(G) \leq n - \delta - 1$ ou $\lceil \frac{n}{2} \rceil \leq s(G)$. Portanto, valores no intervalo $\{n - \delta, \dots, \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1\}$ não podem ser números de segurança, enquanto que valores válidos podem existir em cada lado do intervalo. A evidência adicional desta “lacuna” é fornecida posteriormente na prova do Teorema 3.88, onde um grafo G é construído, para $\delta \in \{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \dots, \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor - 1\}$ qualquer, com a propriedade que $s(G) = n - \delta - 1 < \lceil \frac{n}{2} \rceil$ e $s(G + E') = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ para qualquer conjunto de arestas E' não vazio. Uma explicação para essa diferença não está claramente definida.

Com os resultados anteriores, os valores exatos para $s(G)$ podem ser obtidos em alguns casos.

Teorema 3.77 (Dutton [16])

Para um grafo G qualquer de ordem n , se $\omega \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ e $\delta \geq \min\{n - k, \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor\}$, então $s(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Prova. [16]

Primeiro, observe que qualquer conjunto de $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ vértices de um subgrafo completo é seguro, dessa forma, $s(G) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ sempre que $\omega \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Por outro lado, do Teorema 3.76 (i) e (v), $s(G) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ quando ou $\delta \geq \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$ ou $\delta \geq n - k$. □

A seguir, considere a sequência gráfica $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ do grafo $G = (V, E)$, onde $V = \{1, 2, \dots, n\}$ e o vértice i tem grau d_i para $1 \leq i \leq n$. Dutton, Lee e Brigham [17] mostraram que $s(G) \geq \left\lceil \frac{d_{s(G)} + 1}{2} \right\rceil$. A próxima série de resultados conduz a um limite superior com base na sequência gráfica. Defina uma função f por $f(i) = \left\lceil \frac{d_i + 1}{2} \right\rceil$ para $1 \leq i \leq n$ e seja $C = \{i_1, i_2, \dots, i_q\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, onde $i \in C$ se e somente se $i = f(i)$. Assuma, para $1 \leq j \leq q$, que $i_j < i_{j+1}$. Visto que f é não decrescente, a seguinte observação é imediata.

Observação 3.78 (Dutton [16])

Para $1 \leq i \leq n$, $i < f(i)$ implica em $i + 1 \leq f(i + 1)$ com igualdade se e somente se $i + 1 \in C$.

Lema 3.79 (Dutton [16])

Para cada j tal que $1 \leq j < q$, há um único vértice m_j para o qual $i_j \leq f(m_j) \leq m_j < f(m_j + 1) \leq i_{j+1}$.

Prova. [16]

Para cada i tal que $i_j \leq i \leq i_{j+1}$, tem-se que $f(i_j) \leq i < i + 1 \leq i_{j+1} = f(i_{j+1})$. Seja m_j o menor i no intervalo para o qual $i + 1 \leq f(i + 1)$. Isto é sempre possível visto que $i = i_{j+1} - 1$ tem esta propriedade. Como $m_j + 1 \leq i_{j+1}$, então $f(m_j + 1) \leq f(i_{j+1}) = i_{j+1}$. Dessa forma, as inequações necessárias são válidas. Ou $m_j + 1 = i_{j+1}$ ou $m_j + 1 < f(m_j + 1)$ e, da Observação 3.78, para $m_j < i < i_{j+1}$, deve-se ter $f(i) > i$. Em ambos os casos, m_j é único. $\square$

A seguir, seja $m_q = n$.

Lema 3.80 (Dutton [16])

Para $1 \leq i \leq n$, $f(i) \leq i$ se e somente se existe j , $1 \leq j \leq q$, para o qual $i_j \leq i \leq m_j$.

Prova. [16]

Se $1 \leq i \leq i_1$, $1 < f(1)$ e, pela Observação 3.78, $i < f(i)$. Para $1 \leq j \leq q$, o Lema 3.79 implica em $f(i) \leq i$ para $i_j \leq i \leq m_j$ e, quando $j < q$, $f(i) > i$ para $m_j < i < i_{j+1}$. $\square$

Teorema 3.81 (Dutton [16])

Para um conjunto seguro mínimo S arbitrário de um grafo G , seja $s = s(G) = |S|$. Então, há um inteiro j , $1 \leq j \leq q$, para o qual $i_j \leq s \leq m_j$ e $S \subseteq \{1, 2, \dots, m_j\}$.

Prova. [16]

O conjunto S deve conter um vértice i , onde i é tão grande quanto possível, $s \leq i$ e i deve ter pelo menos $\left\lceil \frac{d_i - 1}{2} \right\rceil$ vizinhos em S . Então, $f(s) \leq f(i) = \left\lceil \frac{d_i + 1}{2} \right\rceil$ e $\left\lceil \frac{d_i + 1}{2} \right\rceil \leq s \leq i$. Portanto, $f(s) \leq f(i) \leq s \leq i$. Segue do Lema 3.80 que existe um único j , $1 \leq j \leq q$, para o qual $i_j \leq s \leq i \leq m_j$.

Em geral, $m_q = n$ não é um bom limite superior para $s(G)$ quando este é desconhecido, ou mesmo quando ele é conhecido por ser maior do que i_q . Para melhorá-lo, faça $k = \left\lceil \frac{d_{i_q} + 1}{2} \right\rceil$. $\square$

Observação 3.82 (Dutton [16])

$i_q - 1 \leq k \leq i_q$.

Teorema 3.83 (Dutton [16])

Para um grafo G qualquer, $s(G) \leq n - k$.

Prova. [16]

Um conjunto $X \subseteq S = \{k+1, k+2, \dots, n\}$ tem no máximo $|V - S| = k$ vizinhos em $V - S$. Então, $|N[X] - S| \leq k$. Para um $i \in X$ qualquer, $|N[X] \cap S| \geq 1 + d_i - k \geq 1 + d_k - k = \left\lceil \frac{d_k+1}{2} \right\rceil \geq k$. Portanto, S é seguro e $s(G) \leq n - k$. $\square$

Os próximos resultados envolvem limites dependentes do número de independência do vértice e número cromático do grafo G . Um vértice qualquer de um conjunto independente máximo de S tem pelo menos $\delta(S)$ vizinhos em S , fato que leva à seguinte observação.

Observação 3.84 (Dutton [16])

Seja G um grafo com um conjunto seguro mínimo S . Então, $s(G) = |S| \geq \beta_0(S) + \delta(S)$.

Teorema 3.85 (Dutton [16])

Seja G um grafo com um conjunto seguro mínimo S . Então, $s(G) \geq \frac{\chi(S)\delta(S)}{\chi(S)-1} \geq \frac{\chi(G)\left\lceil \frac{\delta(G)-1}{2} \right\rceil}{\chi(G)-1}$.

Prova. [16]

Observe que $\beta_0(S) \geq \frac{|S|}{\chi(S)} = \frac{s(G)}{\chi(S)}$. Combinando isto com a Observação 3.84, obtêm-se que $s(G) = |S| \geq \beta_0(S) + \delta(S) \geq \frac{s(G)}{\chi(S)} + \delta(S)$. Então, $\frac{(\chi(S)-1)s(G)}{\chi(S)} \geq \delta(S)$ e a inequação esquerda é válida. A inequação direita segue do fato que $\chi(G) \geq \chi(S)$, $\delta(S) \geq \left\lceil \frac{\delta(G)-1}{2} \right\rceil$ e $f(x) = \frac{x}{x-1}$ é uma função decrescente de x . $\square$

Outro limite inferior pode ser obtido para $s(G)$ baseado no número de vizinhos comuns de quaisquer dois vértices em S .

Teorema 3.86 (Dutton [16])

Seja G um grafo com um conjunto- s S . Então, $s(G) \geq 2 \left\lceil \frac{\delta(G)+1}{2} \right\rceil - k$, onde $k = \min\{|N[x] \cap N[y] \cap S|\}$ assume todos os pares de vértices x e y em S .

Prova. [16]

Se $|S| = 1$, assume-se que $x = y$ e, assim, $k = 1$. Neste caso, $\delta(S) = 0$ e o resultado é válido. Então, pode-se assumir que $|S| \geq 2$ e $x \neq y$. Lembre-se que para um vértice $z \in S$ qualquer, e visto que S é seguro, $g_S(z) \geq \left\lceil \frac{g_G(z)-1}{2} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{\delta(G)-1}{2} \right\rceil$. Independente da adjacência de x e

$y, s(G) = |S| \geq g_S(x) + g_S(y) - k + 2$. Então, $s(G) \geq 2 \left\lceil \frac{\delta(G)-1}{2} \right\rceil - k + 2 = 2 \left\lceil \frac{\delta(G)+1}{2} \right\rceil - k$.
 $\square$

O seguinte é imediato, visto que $k \leq 2$ em grafos livres de triângulo.

Corolário 3.87 (Dutton [16])

Se G é um grafo livre de triângulo, então $s(G) \geq 2 \left\lceil \frac{\delta(G)-1}{2} \right\rceil$.

Os próximos dois resultados mostram que o valor da $s(G)$ pode mudar significativamente quando uma única aresta é adicionada a G . Defini-se um *supergrafo* de um grafo $G = (V, E)$ sendo um grafo $H = (V, E_H)$, onde $E \subset E_H$.

Teorema 3.88 (Dutton [16])

Para todo inteiro positivo n e para todo inteiro k tal que $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \leq k < \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, existe um grafo $G = (V, E)$ de ordem n tal que $s(G) = k$ e $s(H) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ para todo supergrafo H de G .

Prova. [16]

Para um dado k formado de G pela partição vértices de um K_n em três conjuntos A , B e C de k , k , e $n - 2k$ vértices, respectivamente, e pela remoção de todas as arestas com ambos vértices finais em A e C .

Começa-se por mostrar que A é um conjunto seguro. Seja X um subconjunto arbitrário de A . Como $A \cup B$ é completo, $|N[X] \cap A| = |A| = k$ e $|N[X] - A| = |B| = k$. Então, A é seguro e segue que $s(G) \leq k < \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

Suponha $s(G) < k$ e S é um conjunto seguro mínimo. Uma vez que todos os vértices de B têm grau $n - 1$, todo conjunto seguro contendo um vértice de B deve ter pelo menos $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ vértices. Segue que $S \cap B$ é vazio. Além disso, visto que conjuntos seguros mínimos devem induzir subgrafos conexos, nenhum subconjunto seguro mínimo pode conter vértice de ambos A e C . Assim, ou $S \subset A$ ou $S \subseteq C$. Faça Y representante de A ou C e suponha que $S \subseteq Y$. Então, $|N[S] \cap S| = |S| < k = |B| \leq |N[S] - S|$, implicando na contradição de que S não é seguro. Segue que $s(G) = k$.

Seja H um supergrafo qualquer de G . Nenhum subconjunto próprio de A ou C pode ser seguro, porque o número de vértices em sua vizinhança fechada deveria exceder o dobro do número de vértices do conjunto. Além disso, nem A nem C pode ser seguro visto que a vizinhança fechada agora inclui pelo menos mais um vértice em C ou A , respectivamente, do que ocorre em G . Assim, um conjunto seguro mínimo qualquer deve conter vértices em B ou dois vértices adjacentes, um em A e um em C . Em ambos os casos, S tem um subconjunto que domina H . Assim, $s(H) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Visto que H contém um subgrafo completo $A \cup B$ com pelo menos $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ vértices, $s(H) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, conforme explicado

na prova do Teorema 3.77 e a igualdade segue. $\square$

Teorema 3.89 (Dutton [16])

Para todo inteiro positivo n e para todo inteiro k tal que $1 \leq k < \lceil \frac{n}{3} \rceil$, existe um grafo $G = (V, E)$ de ordem n tal que $s(G) = k$ e $k < \lceil \frac{n-k}{2} \rceil \leq s(H) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ para todo supergrafo H de G .

Prova. [16]

Seja G o grafo definido na prova do Teorema 3.88. Como $k < \lceil \frac{n}{3} \rceil$, segue que $k < \lceil \frac{n-k}{2} \rceil$. Visto que um supergrafo H qualquer contém o grafo completo $B \cup C$, tendo mais que $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ vértices, $s(H) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Como na prova do Teorema 3.88, nenhum subgrafo de A pode ser um conjunto seguro em H . Além disso, qualquer conjunto contendo vértices de B ou um vértice de cada um de A e C deve conter pelo menos $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ vértices. Visto que $|B \cup C| = n - k$, todo conjunto seguro de H em $B \cup C$ deve ter pelo menos $\lceil \frac{n-k}{2} \rceil$ vértices e a prova está completa. $\square$

Teorema 3.90 (Brigham, Dutton e Hedetniemi [7])

Para um grafo G qualquer com n vértices e grau mínimo δ

- (i) $s(G) \geq \lceil \frac{\delta+1}{2} \rceil$, e
- (ii) $s(G) \leq n - \lceil \frac{\delta}{2} \rceil$.

Foi mostrado no Teorema 3.58 que para qualquer grafo G de ordem n e grau mínimo δ_n ,

$$a_{-1}(G) \leq n - \lceil \frac{\delta_n}{2} \rceil \text{ e } a_0(G) \leq n - \lfloor \frac{\delta_n}{2} \rfloor. \quad (3-5)$$

Podemos ver a equivalência entre $a_{-1}(G) \leq n - \lceil \frac{\delta_n}{2} \rceil$ e $a(G) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ da seguinte forma:

$$a_{-1}(G) \leq n - \lceil \frac{\delta_n}{2} \rceil \Leftrightarrow a(G) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$$

Sem perda de generalidade, temos que:

$$a_{-1}(G) \leq n - \lceil \frac{\delta_n}{2} \rceil \Leftrightarrow a(G) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$$

Sabemos que $n = \lceil \frac{n}{2} \rceil + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Dessa forma, $\lceil \frac{n}{2} \rceil = n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Substituindo na equação, temos:

$$a_{-1}(G) \leq n - \lceil \frac{\delta_n}{2} \rceil \Leftrightarrow a(G) \leq n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$$

Como $\delta_n < n$, temos que $\frac{\delta_n}{2} < \frac{n}{2}$ e também que $\lfloor \frac{\delta_n}{2} \rfloor \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Sem perda de generalidade, temos:

$$a_{-1}(G) \leq n - \left\lfloor \frac{\delta_n}{2} \right\rfloor \Leftrightarrow a(G) \leq n - \left\lfloor \frac{\delta_n}{2} \right\rfloor.$$

Assim, concluímos que as duas equações são equivalentes.

Também podemos ver a equivalência entre $a_0(G) \leq n - \left\lfloor \frac{\delta_n}{2} \right\rfloor$ e $\hat{a}(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$.

$$a_0(G) \leq n - \left\lfloor \frac{\delta_n}{2} \right\rfloor \Leftrightarrow \hat{a}(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$$

Sabemos que $n = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Então, $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Substituindo na equação, temos:

$$a_0(G) \leq n - \left\lfloor \frac{\delta_n}{2} \right\rfloor \Leftrightarrow \hat{a}(G) \leq n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$$

Como $\delta_n < n$, temos que $\frac{\delta_n}{2} < \frac{n}{2}$ e também que $\left\lceil \frac{\delta_n}{2} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Então, $\left\lceil \frac{\delta_n}{2} \right\rceil < \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$ e $\left\lfloor \frac{\delta_n}{2} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor < \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$. Assim, sem perda de generalidade, temos:

$$a_0(G) \leq n - \left\lfloor \frac{\delta_n}{2} \right\rfloor \Leftrightarrow \hat{a}(G) \leq n - \left\lfloor \frac{\delta_n}{2} \right\rfloor + 1.$$

Portanto, concluímos que as duas equações são equivalentes.

Generalizando os resultados anteriores para k -alianças defensivas e obtêm-se os limites inferiores.

Teorema 3.91 (Rodríguez-Velázquez, Yero e Sigarreta [33])

$$\text{Para todo } k \in \{-\delta_n, \dots, \delta_1\}, \left\lceil \frac{\delta_n + k + 2}{2} \right\rceil \leq a_k(G) \leq n - \left\lfloor \frac{\delta_n - k}{2} \right\rfloor.$$

Prova. [33]

Seja $X \subseteq V$ uma k -aliança defensiva em G . Neste caso, para todo $v \in X$ tem-se:

$$\delta(v) = \delta_X(v) + \delta_{\bar{X}}(v)$$

Sabe-se que $\delta(v) \geq 2\delta_{\bar{S}}(v) + k$, ou seja, $\delta_{\bar{S}}(v) \leq \frac{\delta(v) - k}{2}$. Então, $\delta_{\bar{X}}(v) \leq \frac{\delta(v) - k}{2}$.

Devido à primeira equação, tem-se que:

$$\delta(v) \leq \delta_X(v) + \frac{\delta(v) - k}{2}$$

Da equação anterior, obtêm-se $\delta(v) \leq \frac{2\delta_X(v) + \delta(v) - k}{2}$. Dessa forma, $2\delta(v) \leq 2\delta_X(v) + \delta(v) - k$. $2\delta(v) - \delta(v) + k \leq 2\delta_X(v)$, ou seja, $\delta(v) + k \leq 2\delta_X(v)$. Então, $\frac{\delta(v) + k}{2} \leq \delta_X(v)$ e segue que:

$$\frac{\delta(v) + k}{2} \leq \delta_X(v) \leq |X| - 1$$

Alterando a equação anterior, pode-se ver que $\frac{\delta(v) + k}{2} + 1 \leq |X|$, isto é, $\frac{\delta(v) + k + 2}{2} \leq |X|$. Sem perda de generalidade, tem-se que:

$$\frac{\delta_n + k + 2}{2} \leq |X|.$$

Portanto, tem-se o limite inferior abaixo.

Por outro lado, se $X \subseteq V$ é uma k -aliança defensiva em G para $\delta_n \leq k \leq \delta_1$, então $a_k(G) \leq |X| \leq n \leq n - \left\lfloor \frac{\delta_n - k}{2} \right\rfloor$. Suponha que $-\delta_n \leq k \leq \delta_n$. Seja $S \subseteq V$ um conjunto de cardinalidade $n - \left\lfloor \frac{\delta_n - k}{2} \right\rfloor$. Para todo vértice $v \in S$ tem-se $\frac{\delta(v) - k}{2} \geq \left\lfloor \frac{\delta_n - k}{2} \right\rfloor \geq \delta_{\bar{S}}(v)$.

Portanto, S é uma k -aliança defensiva e $a_k(G) \leq |S| = n - \left\lfloor \frac{\delta_n - k}{2} \right\rfloor$. $\square$

Teorema 3.92 (Rodríguez-Velázquez, Yero e Sigarreta [33])

Para todo $k, r \in \mathbb{Z}$ tal que $-\delta_n \leq k \leq \delta_1$ e $0 \leq r \leq \frac{k+\delta_n}{2}$, $a_{k-2r}(G) + r \leq a_k(G)$.

Prova. [33]

Seja $S \subset V$ uma k -aliança defensiva de cardinalidade mínima em G . Pelo Teorema 3.91, $\frac{\delta_n + k + 2}{2} \leq |S|$; então pode-se ter $X \subset S$ tal que $|X| = r$. Portanto, para todo $v \in Y = S - X$,

$$\delta_Y(v) = \delta_S(v) - \delta_X(v)$$

Sabendo que $\delta_S(v) \geq \delta_{\bar{S}}(v) + k$, tem-se:

$$\delta_Y(v) \geq \delta_{\bar{S}}(v) + k - \delta_X(v)$$

Sabendo que $\bar{S} = V - S$, $S = Y + X$: $\bar{S} = V - Y - X$. Como $\bar{Y} = V - Y$, tem-se que $\delta_{\bar{S}}(v) = \delta_{\bar{Y}}(v) - \delta_X(v)$. Substituindo $\delta_{\bar{S}}(v)$, tem-se $\delta_{\bar{Y}}(v) - \delta_X(v) + k - \delta_X(v)$. Dessa forma,

$$\delta_Y(v) = \delta_{\bar{Y}}(v) + k - 2\delta_X(v)$$

Como $|X| = r$, $\delta_X(v) \leq |X| - 1$, ou seja, $\delta_X(v) \leq r - 1$. Sem perda de generalidade, tem-se que $\delta_X(v) \leq r$, logo $2\delta_X(v) \leq 2r$ e tem-se que:

$$\delta_Y(v) \geq \delta_{\bar{Y}}(v) + k - 2r$$

Portanto, Y é uma $(k - 2r)$ -aliança defensiva em G e, como consequência, $a_{k-2r}(G) \leq a_k(G) - r$. $\square$

Observe que de acordo como resultado no Corolário 3.48, o limite para $a_k(G)$ no Teorema 3.92 é alcançado para o grafo completo K_n para todo n, k, r com suas respectivas restrições. Do Teorema 3.92, deriva-se algumas consequências interessantes.

Corolário 3.93 (Rodríguez-Velázquez, Yero e Sigarreta [33])

Seja $t \in \mathbb{Z}$.

- Se $\frac{1-\delta_n}{2} \leq t \leq \frac{\delta_1-1}{2}$, então $a_{2t-1}(G) + 1 \leq a_{2t+1}(G)$.
- Se $\frac{2-\delta_n}{2} \leq t \leq \frac{\delta_1}{2}$, então $a_{2(t-1)}(G) + 1 \leq a_{2t}(G)$.

Corolário 3.94 (Rodríguez-Velázquez, Yero e Sigarreta [33])

Para todo $k \in \{0, \dots, \delta_n\}$,

- Se k é par, então $a_{-k}(G) + \frac{k}{2} \leq a_0(G) \leq a_k(G) - \frac{k}{2}$,
- Se k é ímpar, então $a_{-k}(G) + \frac{k-1}{2} \leq a_{-1}(G) \leq a_k(G) - \frac{k+1}{2}$.

Foi mostrado por Fricke, Lawson, Haynes, Hedetniemi e Hedetniemi [21] que para um grafo G qualquer de ordem n ,

$$a_{-1}(G) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \text{ e } a_0(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \quad (3-6)$$

Pelo Corolário 3.94 e a equação 3-6 obtêm-se o seguinte resultado.

Teorema 3.95 (*Rodríguez-Velázquez, Yero e Sigarreta [33]*)

Para todo $k \in \{-\delta_n, \dots, 0\}$, $a_k(G) \leq \left\lceil \frac{n+k+1}{2} \right\rceil$.

Pelo Teorema 3.59, tem-se que $a(G) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Visto que $a(G) = a_{-1}(G)$, $a_k(G) \leq \left\lceil \frac{n+k+1}{2} \right\rceil$ e $a_{-1}(G) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ devem ser equivalentes. Para verificar esta equivalência, temos:

$$a_k(G) \leq \left\lceil \frac{n+k+1}{2} \right\rceil \Leftrightarrow a_{-1}(G) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

$$a_k(G) \leq \left\lceil \frac{n}{2} + \frac{k+1}{2} \right\rceil \Leftrightarrow$$

$$a_{-1}(G) \leq \left\lceil \frac{n}{2} + \frac{-1+1}{2} \right\rceil \Leftrightarrow$$

$$a_{-1}(G) \leq \left\lceil \frac{n}{2} + \frac{0}{2} \right\rceil \Leftrightarrow$$

$$a_{-1}(G) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \Leftrightarrow a_{-1}(G) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

Assim, concluímos que as duas equações são equivalentes.

Pelo Teorema 3.61, temos que $\hat{a}(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$. Visto que $\hat{a}(G) = a_0(G)$, $a_k(G) \leq \left\lceil \frac{n+k+1}{2} \right\rceil$ e $a_0(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$ devem ser equivalentes. Para verificar esta equivalência, temos:

$$a_k(G) \leq \left\lceil \frac{n+k+1}{2} \right\rceil \Leftrightarrow a_0(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1.$$

$$a_k(G) \leq \left\lceil \frac{n}{2} + \frac{k+1}{2} \right\rceil \Leftrightarrow$$

$$a_0(G) \leq \left\lceil \frac{n}{2} + \frac{0+1}{2} \right\rceil \Leftrightarrow$$

$$a_0(G) \leq \left\lceil \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \right\rceil \Leftrightarrow$$

$$a_0(G) \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \Leftrightarrow$$

$$a_0(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \Leftrightarrow a_0(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1.$$

Dessa forma, concluímos que as duas equações são equivalentes.

Observe que o limite superior é alcançado, por exemplo, para o grafo completo $G = K_n$, como exposto no Corolário 3.48.

A conectividade algébrica de G , μ , satisfaz a seguinte igualdade mostrada por Fiedler em grafos ponderados:

$$\mu = 2n \min \left\{ \frac{\sum_{v_i \sim v_j} (w_i - w_j)^2}{\sum_{v_i \in V} \sum_{v_j \in V} (w_i - w_j)^2} : w \neq \alpha \mathbf{j} \text{ para } \alpha \in \mathbb{R} \right\}, \quad (3-7)$$

onde $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $\mathbf{j} = (1, 1, \dots, 1)$ e $w \in \mathbb{R}^n$.

O teorema a seguir mostra o relacionamento entre a conectividade algébrica de um grafo e o seu número da k -aliança defensiva.

Teorema 3.96 (Rodríguez-Velázquez, Yero e Sigarreta [33])

Para um grafo conexo G qualquer e para todo $k \in \{-\delta_n, \dots, \delta_1\}$,

$$a_k(G) \geq \left\lceil \frac{n(\mu+k+1)}{n+\mu} \right\rceil.$$

Prova. [33]

Se S denota uma k -aliança defensiva em G , $\delta_S \leq \delta_{\bar{S}}(v) + k$ e $\delta_S \leq |S| - 1$. Então

$$\delta_{\bar{S}}(v) + k \leq |S| - 1, \quad \forall v \in S. \quad (3-8)$$

Pela equação 3-7, tome $w \in \mathbb{R}^n$ definido como

$$w_i = \begin{cases} 1 & \text{se } v \in S; \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

tem-se

$$\mu \leq \frac{n \sum_{v_i \in S} \delta_{\bar{S}}(v)}{|S|(n - |S|)} \quad (3-9)$$

Dessa forma, as equações 3-8 e 3-7 levam a

$$\mu \leq \frac{n(|S| - k - 1)}{n - |S|} \quad (3-10)$$

Portanto, resolvendo a equação 3-10 para $|S|$ e considerando que ele é um inteiro, obtêm-se o limite em $a_k(G)$. $\square$

O limite acima é exato como pode-se ver no exemplo a seguir. Sabendo que a conectividade algébrica de um grafo completo $G = K_n$ é $\mu = n$, o teorema acima dá o valor exato de $a_k(K_n) = \left\lceil \frac{n+k+1}{2} \right\rceil$.

Além disso, se G é um icosaedro, $a_{-1}(G) = 3$. Neste caso, $n = 12$ e $\mu = 5 - \sqrt{5}$, pelo Teorema 3.96 conduz a $a_{-1}(G) \geq 3$. Um icosaedro é um poliedro convexo de 20 faces, também podendo ser chamado tetraedro snub.

Teorema 3.97 (Rodríguez-Velázquez, Yero e Sigarreta [33])

Para um grafo conexo G qualquer e para todo $k \in \{-\delta_n, \dots, \delta_1\}$,

$$a_k(G) \geq \left\lceil \frac{n(\mu - \lfloor \frac{\delta_1 - k}{2} \rfloor)}{\mu} \right\rceil.$$

Prova. [33]

Se S denota uma k -aliança defensiva em G , então $\delta_1 \geq \delta(v) \geq 2\delta_{\bar{S}} + k$, $\forall k \in S$. Então, $\delta_1 \geq 2\delta_{\bar{S}} + k = \delta_1 - k \geq 2\delta_{\bar{S}} = \frac{\delta_1 - k}{2} \geq \delta_{\bar{S}} = \lfloor \frac{\delta_1 - k}{2} \rfloor \geq \delta_{\bar{S}}$. Portanto,

$$\left\lfloor \frac{\delta_1 - k}{2} \right\rfloor \geq \delta_{\bar{S}}, \forall v \in S. \quad (3-11)$$

Dessa forma, pelas equações 3-9 e 3-11 o resultado é obtido. $\square$

O limite é alcançado para todo k no caso do grafo completo $G = K_n$.

3.5 Problemas de Decisão Resolvidos

Há muitas questões de complexidade computacional de problemas de otimização em alianças cujas versões decisão foram provadas pertencer à classe NP-completo.

Favaron, Fricke, Goddard, Hedetniemi, Hedetniemi, Kristiansen, Laskar e Skaggs [19] mostraram que o problema de encontrar uma *Aliança Defensiva (Crítica)* de tamanho máximo k é NP-completo.

Shafique [34] mostrou que encontrar uma *Aliança Poderosa* e uma *Aliança Poderosa Global* é NP-completo, mesmo quando a última aliança é restrita à metade dos vértices.

Cami, Balakrishnan, Deo e Dutton [8] provaram que *Aliança Defensiva Global*, *Aliança Ofensiva Global* e *Aliança Poderosa Global* são problemas da classe NP-completo.

Jamieson, Hedetniemi, e McRae [29] provaram que encontrar uma *Aliança Poderosa (Dual)* de tamanho máximo k também é um problema NP-completo, mesmo quando as alianças são restritas a grafos bipartidos.

Jamieson [27] mostrou que os problemas de encontrar uma *Aliança Defensiva*, uma *Aliança Defensiva Global* e uma *Aliança Poderosa Global* de tamanho máximo k são pertencentes à classe NP-completo, mesmo quando as alianças são restritas a grafos bipartidos ou cordais.

Jamieson e Dean [28] provaram que uma *Aliança Poderosa (Global) Ponderada* e *Aliança Defensiva (Global) Ponderada* são problemas pertencentes à classe NP-completo, mesmo quando restritos a estrelas, e também que *Aliança Ofensiva (Global) Ponderada* é um problemas pertencente à classe NP-completo, mesmo quando restrito a árvores.

Quanto à complexidade de conjuntos seguros, o valor de $s(G)$ foi encontrado para alguma famílias de grafos, mas bons limites gerais não foram determinados. Pode ser difícil fazê-lo, visto que a complexidade de determinação de $s(G)$ aparece como sendo difícil, como mencionado por Brigham, Dutton e Hedetniemi [7]. De fato, não se conhece algum algoritmo de complexidade polinomial para determinar se um dado conjunto $S \subseteq V$ é um conjunto seguro.

Em todas as provas subsequentes deve-se empregar as transformações do problema de Conjunto Dominante definido como:

Conjunto Dominante (CD)

Instância: Um grafo $G = (V, E)$ e um inteiro positivo $k \leq |V|$.

Questão: Existe um conjunto dominante em G de tamanho menor ou igual a k ?

Teorema 3.98 (Cami, Blakrishnan, Deo e Dutton [8])

GDA é NP-Completo.

Prova. [8]

Seja $I = [G = (V, E), k]$ uma instância qualquer de DS. Devemos construir uma instância $I' = [G' = (V', E'), k']$ de GDA tal que G tem um conjunto dominante de tamanho menor ou igual a k se e somente se G' tem uma aliança global de defensiva de tamanho menor ou igual a k' .

Primeiro, é descrito um procedimento para construir o grafo G' . Inicialmente, seja $G' = G$. Então, para cada vértice não-isolado $v_i \in V$ adicione $g_G(v_i) - 1$ componentes $C_{i,1}, \dots, C_{i,g_G(v_i)-1}$ ao grafo G' . Dizemos que os componentes $C_{i,j}$, $1 \leq j \leq g_G(v_i) - 1$, tem como raiz o vértice v_i . Cada componente $C_{i,j}$ consiste dois vértices e duas arestas, como segue:

$$C_{i,j} = (\{a_{i,j}, b_{i,j}\}, \{(v_{i,j}, a_{i,j}), (a_{i,j}, b_{i,j})\}). \quad (3-12)$$

Em outras palavras, o vértice $a_{i,j}$ do componente $C_{i,j}$ está ligado à “raiz” v_i bem como ao outro vértice $b_{i,j}$ deste componente. Assim,

$$A_{v_i} = \{a_{i,j} \mid 1 \leq j \leq g(v_i) - 1\}, \quad B_{v_i} = \{b_{i,j} \mid 1 \leq j \leq g(v_i) - 1\}, \quad (3-13)$$

$$A_s = \bigcup_{v_i \in S} A_{v_i}, \quad B_s = \bigcup_{v_i \in S} B_{v_i}, \quad (3-14)$$

$$A = A_V, \quad B = B_V, \quad (3-15)$$

O grafo G' é completamente especificado por:

$$V' = V \cup A \cup B, \quad (3-16)$$

$$E' = E \cup A \cup \left(\bigcup_{v_i \in S} \{(v_i, a_{i,j}), (a_{i,j}, b_{i,j}) \mid a_{i,j} \in A_{v_i}, b_{i,j} \in B_{v_i}\} \right). \quad (3-17)$$

No restante da dissertação, nos referimos a vértices (arestas) de componentes $C_{i,j}$ como vértices (arestas) “componente” para distingui-los dos vértices (arestas) de G .

Seja Q o número total de componentes $C_{i,j}$. Para completar a construção da instância I' , deixamos $K' = K + Q$. A Figura 3.45 mostra um exemplo do grafo obtido por este processo de construção.

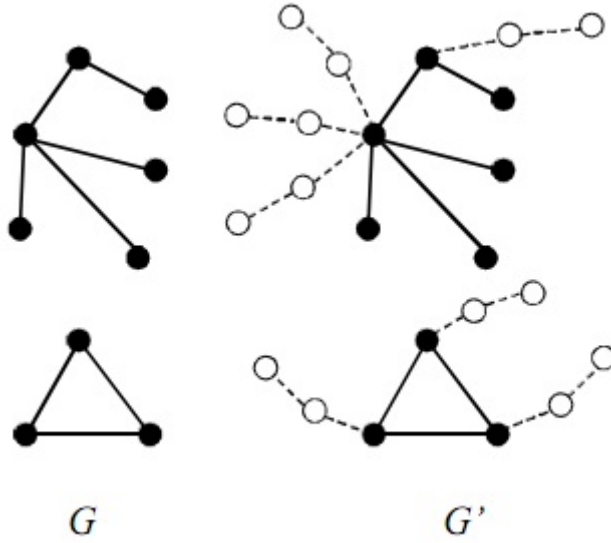


Figura 3.45: Construção de uma instância de GDA de uma instância de DS. Os vértices “componente” são representados por círculos vazios e as arestas “componente” são representadas por linhas pontilhadas.

Observe que $Q = \sum_{v_i \in V} (g_G(v_i) - 1) = 2|E| - |V|$. Portanto, a construção de G' pode ser realizada em tempo linear.

Resta mostrar que G tem um conjunto dominante de tamanho menor ou igual k se e somente se G' tem uma aliança global defensiva de tamanho menor ou igual a k' . Primeiro, suponha que $S \subseteq V$ é um conjunto dominante em G com $|S| \leq k$. Seja

$$S' = S \cup A_S \cup B_{V-S}. \quad (3-18)$$

Observe que S é um subconjunto de S' . Além disso, para cada vértice $v_i \in S$, S' contém todos os vértices $a_{i,1}, \dots, a_{i,g_G(v_i)-1}$. Finalmente, para cada vértice $v_j \notin S$, S' contém todos os vértices $b_{j,1}, \dots, b_{j,g_G(v_j)-1}$. Estas observações, juntamente com o Lema 3.99 implica que I' é SIM uma instância de GDA. $\square$

Lema 3.99 (Cami, Blakrishnan, Deo e Dutton [8])

S' é uma aliança defensiva global em G' com tamanho menor ou igual a k' .

Prova. [8]

S' contém todos os vértices de S , bem como um vértice em cada componente $C_{i,j}$. Portanto,

$$|S'| = |S| + Q \leq k + Q = k'. \quad (3-19)$$

Além disso, S' domina V (porque S domina V e $S \subseteq S'$), e também domina todos os componentes $C_{i,j}$ (porque S' contém exatamente um vértice de cada componente desse tipo). Deste modo, S' é um conjunto dominante em G' .

Finalmente, S' é uma aliança defensiva em G' . Para ver isso, observe primeiro que todos os vértices $v_i \in S' \cap V$, têm exatamente $g_G(v_i) - 1$ vizinhos $a_{i,g_G(v_i)-1}$ no conjunto S' . Visto que v_i pode ter no máximo $g_G(v_i)$ vizinhos fora de S' (o que acontece apenas se todos os vizinhos de v_i em V estão fora S'), a propriedade da aliança defensiva é satisfeita para v_i . Além disso, cada vértice $a_{i,j} \in S'$, tem exatamente um vizinho dentro de S' (a “raiz” do vértice v_i) e exatamente um vizinho fora (o vértice $b_{i,j}$) e, portanto, satisfaz a propriedade da aliança defensiva. Finalmente, cada vértice $b_{i,j} \in S'$ tem grau um em G' , pois satisfaz a propriedade da aliança defensiva.

Por outro lado, suponha que S' é uma aliança defensiva global em G' com k' vértices ou menos. Precisamos encontrar um conjunto $S \subseteq V$ de tamanho menor ou igual a k que forme um conjunto dominante em G . Começaremos com a seguinte observação simples: $\square$

Observação 3.100 (Cami, Blakrishnan, Deo e Dutton [8])

S' contém pelo menos Q vértices “componente”.

Prova. [8]

S' é um conjunto dominante em G' , portanto contém pelo menos um vértice de cada componente $C_{i,j}$. $\square$

Como um corolário imediato de Observação 3.100 obtêm-se:

$$|S' \cap V| \leq k' - Q = k. \quad (3-20)$$

Visto que o conjunto $S' \cap V$ tem tamanho no máximo k , este conjunto pode ser considerado como um primeiro candidato a conjunto dominante em G . No entanto, não

é difícil ver que $S' \cap V$ não necessariamente forma um conjunto dominante em G . O problema é que poderia existir um vértice $v_i \in (V' - S') \cap V$ que não tem nenhum vizinho $S' \cap V$. A Figura 3.46 mostra um exemplo de tal vértice.

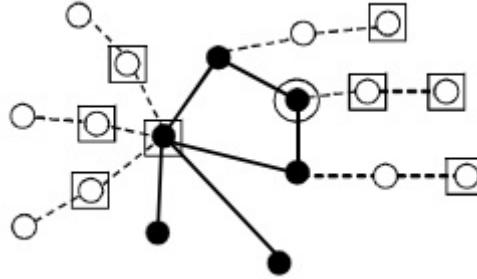


Figura 3.46: Um grafo G' , uma aliança defensiva global S' em G' (vértices destacados por retângulos), e um vértice “não-componente” (destacado por um círculo) que só tem um vizinho em S' que é um vértice “componente”.

Tal vértice v_i não seria dominado por $S' \cap V$. Nesse caso, dizemos que v_i é um vértice “componente dominado”. Agora, seja D' o conjunto de todos os vértices “componente dominado”, isto é:

$$D' = \{v_i \in (V' - S') \cap V \mid v_i \text{ não tem nenhum vizinho em } V \cap S'\}. \quad (3-21)$$

Observe que os vértices de D' são os únicos entre os vértices de V que não serão dominados por $S' \cap V$. Portanto, o conjunto $(S' \cup D') \cap V$ devem formar um conjunto dominante em G . O Lema 3.101, que é uma versão reforçada da Observação 3.100, implica que $|S'| \leq k$.

Lema 3.101 (Cami, Blakrishnan, Deo e Dutton [8])

S' contém pelo menos $Q + |D'|$ vértices “componente”.

Prova. [8]

Considere um vértice arbitrário $v_i \in D'$. Deve haver um vértice $a_{i,j}$, tal que $a_{i,j} \in S'$ (porque S' é um conjunto dominante e v_i não tem nenhum vizinho em $S' \cap V$). Agora, o vértice $b_{i,j}$ deve também estar em S' , porque senão a propriedade da aliança defensiva seria violada por $a_{i,j}$. Daí, segue-se que para cada vértice $v_i \in D'$ existe pelo menos um componente $C_{i,j}$ com ambos os vértices em S' . Assim, no total, existem $|D'|$ componentes com os dois vértices contidos em S' . Os restantes $Q - |D'|$ componentes, cada um deve ter pelo menos um vértice em S' porque S' é um conjunto dominante. Portanto, o número

de vértices “componente” em S' é pelo menos $2|D'| + Q - |D'|$, ou seja, $Q + |D'|$. $\square$

Agora, seja

$$S = (S' \cup D') \cap V. \quad (3-22)$$

Do Lema 3.101 segue que $|S| \leq k$. Como argumentado anteriormente, S é também um conjunto dominante em G . Por isso, I é SIM é uma instância de DS. Isso conclui a prova do Teorema 3.98.

Conclusões

Nesta dissertação, realizamos um estudo sobre alianças em grafos, com ênfase em uma variação denominada aliança defensiva em grafos, k -alianças defensivas e conjuntos seguros. Para estes conceitos, foram apresentadas variações sobre a definição original, aplicações práticas no mundo real e resultados teóricos já estabelecidos que se referem às propriedades de alianças em grafos, limites para algumas classes de grafos, bem como resultados algorítmicos e de complexidade.

Além disso, abordamos os números das alianças, para os quais foram apresentados limites superiores, inferiores e exatos com relação:

- (i) À quantidade de vértices;
- (ii) Ao número de dominação;
- (iii) Ao número de dominação total;
- (iv) Ao grau máximo e mínimo de um grafo G ;
- (v) Ao número de empacotamento de um grafo G ;
- (vi) À conectividade algébrica;
- (vii) Ao número cromático; e
- (viii) Ao número de independência.

Observamos que várias propriedades matemáticas das alianças em grafos foram estudadas desde o surgimento deste conceito, em 2003, até hoje. Portanto, apresentamos apenas uma pequena parte dos resultados obtidos, fazendo algumas complementações nas provas já estabelecidas e algumas observações para facilitar a compreensão do leitor.

Devemos deixar bem claro que para os resultados mostrados nesta dissertação acerca de $a(G)$, $\hat{a}(G)$, $\gamma_a(G)$, $\gamma_{\hat{a}}(G)$, $a_k(G)$, podem ser estabelecidos novos resultados para outras classes de grafos.

Cabe ressaltar, ainda, que $\gamma_a(G)$ e $\gamma_{\hat{a}}(G)$ para grafos 5-regulares, rodas e para grades foram estudados no decorrer do mestrado, no entanto não foram obtidos resultados conclusivos. Sendo assim, espera-se que a presente dissertação forneça subsídios teóricos para estudos futuros voltados à alianças defensivas em grafos, bem como à resolução das questões em aberto e outros possíveis problemas que não foram citados.

Existem muitos pesquisadores interessados em alianças em grafos, mas a pesquisa nesta área ainda está muito incipiente e existem vários tipos de alianças e propriedades a serem estudadas. Além do estudo destes parâmetros, pode-se propor a aplicação dos conceitos em áreas práticas da ciência da computação ou em outras áreas como química, biologia, entre outras.

Foi realizada uma revisão bibliográfica a respeito de alianças defensivas em grafos, k -alianças defensivas e conjuntos seguros e a Tabela 4.1 provê uma visão geral dos resultados anteriormente estabelecidos para $a(G)$, $\hat{a}(G)$, $\gamma_a(G)$, $\gamma_{\hat{a}}(G)$ e $s(G)$.

Tabela 4.1: Visão geral sobre os números das alianças de algumas classes de grafos.

Classe	$a(G)$	$\hat{a}(G)$	$\gamma_a(G)$	$\gamma_{\hat{a}}(G)$	$s(G)$
P_n	1	$2, n \geq 3$	$\gamma(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{4} \rfloor - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor, n \geq 2$	$\gamma(P_n), n \geq 3$	?
C_n	2	$2, n \geq 3$	$\gamma(C_n), n \geq 3$, exceto se $n \equiv 2(mod 4)$	$\gamma(C_n), n \geq 3$	2
W_n	2	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$	?	?	?
$K_{r,s}$	$\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + \lfloor \frac{s}{2} \rfloor, 2 \leq r \leq s$	$\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + \lfloor \frac{s}{2} \rfloor, 2 \leq r \leq s$	$\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + \lfloor \frac{s}{2} \rfloor$, se $r, s \geq 2$	$\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + \lfloor \frac{s}{2} \rfloor$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
$S_{r,s}$	1	?	$\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor + 2$, se $r, s \geq 1$	$\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + \lfloor \frac{s}{2} \rfloor + 2$	?
T	1	$\hat{a}(T) \leq V(T) $	$\frac{n+2}{4} \leq \gamma_a(T) \leq \frac{3n}{5} (n \geq 4)$	$\frac{n+2}{4} \leq \gamma_{\hat{a}}(T) \leq \frac{3n}{4}$	?
$T_{3,\infty}$	∞	∞	∞	∞	?
$l-reg.$	1	2	1	2	1
3-reg.	2	$cintura(G)$	$\gamma_a(G) \geq \frac{n}{3}$	?	2, se G contém K_4 ; 3, se G contém $K_{2,3}$; $cintura(G)$, caso c.
4-reg.	$cintura(G)$	$cintura(G)$	$\gamma_a(G) \geq \frac{n}{3}$	?	?
5-reg.	$cintura(G)$	?	?	?	?
$\mathcal{L}(G)$	$\frac{\delta_n + \delta_{n-1} - 1}{2} \leq a(\mathcal{L}(G)) \leq \delta_1$	$\frac{\delta_n + \delta_{n-1}}{2} \leq \hat{a}(\mathcal{L}(G)) \leq \delta_1$	$\frac{2m}{\delta_1 + \delta_2 + 1} \leq \gamma_a(\mathcal{L}(G))$	?	$s(G) \leq \frac{k(k-1)}{2}$
$G_{m,n}$	1, se $\min\{m, n\} = 1$; 2, se $\min\{m, n\} \geq 2$;	2, se $\min\{m, n\} < 3$; 3, se $\min\{m, n\} = 3$; 4, se $\min\{m, n\} \geq 4$;	?	?	$\min\{m, n, 3\}$
K_n	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$	$\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$	$\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
G	$n - \frac{\delta}{2} = a(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	$n - \frac{\delta}{2} = \hat{a}(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$	$\frac{\sqrt{4n+1}-1}{2} \leq \gamma_a(G) \leq n - \frac{\delta}{2}$	$\sqrt{n} \leq \gamma_{\hat{a}} \leq n - \frac{\delta}{2}$	$\frac{\delta+1}{2} \leq s \leq n - \frac{\delta}{2}$

Como vemos na Tabela 4.1, o número da alianças defensiva em caminhos, grafos estrelas, árvores, grafos 1-regular é 1, pois um vértice final nestes grafos forma uma aliança defensiva.

O fato que $A(P_n) = \hat{A}(P_n) = 2$, para $n \geq 4$, segue da observação que em um caminho, quaisquer dois vértices adjacentes, em que nenhum deles é um vértice final, formam uma aliança defensiva crítica, e uma aliança defensiva crítica forte. Visto que qualquer aliança crítica (forte) S deve induzir um subgrafo conexo, as únicas alianças defensivas críticas (fortes) possíveis em um caminho são elas próprias caminhos. Mas visto que elas deveriam conter dois vértices adjacentes, S não poderia ser crítica se conter mais que dois vértices.

O mesmo raciocínio aplica-se para a observação que $A(C_n) = \hat{A}(C_n) = 2$, para $n \geq 3$, e para grafos 3-regulares, onde novamente a maior aliança defensiva crítica (forte) consiste de dois vértices adjacentes. Em um grafo 3-regular, quaisquer dois vértices adjacentes formam uma aliança. Dessa forma, nenhuma aliança crítica maior é possível e $A(G) = 2$.

Na roda W_n , temos que $a(W_n) = 2$, pois dois vértices adjacentes no ciclo da roda formam uma aliança defensiva.

O fato que $A(G)$ pode ser arbitrariamente grande, especialmente para árvores, talvez é melhor ilustrado com uma *estrela subdividida*, $S(K_{1,s})$. Esta é a árvore que é obtida da estrela $K_{1,s}$ pela subdivisão de todas as arestas, isto é, removendo cada aresta uv e trocando-a por duas arestas novas ux e xv . É fácil ver que o conjunto S obtido da estrela subdividida pela inclusão de um vértice de grau s e $\lfloor \frac{s}{2} \rfloor$ de seus vizinhos é uma aliança defensiva crítica de ordem máxima. Visto que $\hat{a}(K_{1,s}) = \lfloor \frac{s}{2} \rfloor + 1$ e visto que $\hat{a}(G) \leq \hat{A}(G)$, segue que $\hat{A}(G)$ pode ser arbitrariamente grande, principalmente para árvores.

Observamos que um ciclo sem corda qualquer em um grafo 3-regular ou no grafo 4-regular forma uma aliança defensiva crítica forte, ou seja, o número da aliança defensiva é $cintura(G)$. Dessa forma, segue que em um grafo G 3-regular, $\hat{A}(G) \geq lcc(G)$. Mas $\hat{A}(G) \leq lcc(G)$, visto que uma aliança crítica forte S qualquer em um grafo 3-regular G , que tem cardinalidade maior que $lcc(G)$, deve necessariamente conter um ciclo em $\langle S \rangle$. Visto que o menor ciclo em $\langle S \rangle$ é uma aliança defensiva crítica forte, segue que $\langle S \rangle$ próprio deve induzir um ciclo sem corda. Um ciclo sem corda também é uma aliança defensiva forte em um grafo 3-regular e também em um grafo 4-regular.

Para um grafo completo, temos que $a(K_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, pois precisamos de pelo menos metade dos vértices do grafos para ter uma aliança defensiva, visto que cada vértice tem $n - 1$ vizinhos no grafo. E temos que $\hat{a}(K_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$, pois precisamos de um vértice a mais em S que em ∂S .

No grafo grade $G_{m,n}$, o número da aliança defensiva é 1 se o mínimo entre m e n é 1, ou seja, existe um vértice final e este vértice será uma aliança defensiva. Caso o

mínimo seja 2, o número da aliança defensiva é 2, pois dois vértices adjacentes na grade formam uma aliança defensiva.

Para finalizar esta dissertação, apresentamos alguns problemas que ainda podem ser explorados.

4.1 Problemas em Aberto

As questões seguintes são interessantes:

- (i) Estudar o problema se existe um algoritmo $O(n^2)$ para encontrar uma aliança defensiva de cardinalidade no máximo $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ ou uma aliança defensiva forte de cardinalidade no máximo $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.
- (ii) Definir, dado um grafo G e um vértice $v \in V$, o *número da aliança de v* , $a(v)$ igual à menor aliança defensiva contendo o vértice v . Qual a dificuldade de determinar $a(v)$?
- (iii) Encontrar, dado um grafo G e dois vértices $u, v \in V$, qual é $a(u, v)$, isto é, a menor cardinalidade de uma aliança defensiva contendo ambos u e v ?
- (iv) Definir, dado um grafo G , o *número da aliança empacotamento* $P_a(G)$ igual ao número máximo de alianças defensivas mutuamente disjuntas contidas em G . Similarmente, definir o *número da partição da aliança*, $\Psi_a(G)$, igual a ordem máxima de uma partição $\pi = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ de V de tal forma que cada bloco da partição V_i é uma aliança defensiva. Qual é o número da aliança empacotamento ou o número da partição da aliança de um grafo grade $G_{m,n}$?
- (v) Definir o que significa dizer que a aliança defensiva é *fraca*. Por exemplo, poderia dizer que uma aliança defensiva S é *fraca* (ou 1-crítica) se para todo vértice $v \in S$, $S - \{v\}$ não é mais uma aliança.
- (vi) Caracterizar os grafos G que têm dois conjuntos- $\gamma_{a_p}(G)$ disjuntos.
- (vii) Determinar se alianças defensivas, ofensivas e poderosas globais são mais fáceis de resolver na classe de grafos aleatórios dinâmicos, que modela redes como a web.
- (viii) Determinar o relacionamento entre os números das alianças (defensiva, ofensiva, poderosa, etc) e outros parâmetros de dominação.
- (ix) Caracterizar os grafos (ou algumas famílias de grafos) em que $\gamma(G) = \gamma_a(G)$.
- (x) Caracterizar os grafos (ou algumas famílias de grafos) em que $\gamma_t(G) = \gamma_{\hat{a}}(G)$.

Quanto a conjuntos seguros, temos as seguintes questões:

- (i) Determinar limites gerais para o número de segurança de um grafo permanece como uma interessante área de pesquisa. Em particular, não se conhece limite superior exato, em função do número n de vértices, para todos os grafos.

- (ii) $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ é um limite superior para um grafo G qualquer tendo n vértices?
- (iii) Definir a menor cardinalidade de um conjunto seguro dominante como sendo $\gamma_{se}(G)$. Quando $\gamma_{se}(G) = s(G)$?
- (iv) Determinar, dado um conjunto não-seguro S , ele contém um subconjunto seguro?

Referências Bibliográficas

- [1] AHARONI, R.; MILNER, E. C.; PRIKRY, K. **Unfriendly partitions of a graph.** *J. Combin. Theory, Ser. B*, 50:1–10, 1990.
- [2] BALAKRISHNAN, H.; DEO, N. **Discovering communities in complex networks.** In: *ACM-SE 44: Proceedings of the 44th annual Southeast regional conference*, p. 280–285, New York, NY, USA, 2006. ACM.
- [3] BERNARDI, C. **On a theorem about vertex coloring of graphs.** *Discrete Mathematics*, 64:95–96, 1987.
- [4] BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. **Graph Theory with Applications**, volume 1. Elsevier, 5 edition, 1982.
- [5] BORODIN, O. V.; KOSTOCHKA, A. V. **On a upper bound of a graph's chromatic number, depending on the graph's degree and density.** *J. Combin. Theory, Ser. B*, 23:247–250, 1977.
- [6] BRIGHAM, R. C.; DUTTON, R. D.; HAYNES, T. W.; HEDETNIEMI, S. T. **Powerful alliances in graphs.** *Discrete Mathematics*, 309:2140–2147, 2009.
- [7] BRIGHAM, R. C.; DUTTON, R. D.; HEDETNIEMI, S. T. **Security in graphs.** *Discrete Applied Mathematics*, 155:1708–1714, 2007.
- [8] CAMI, A.; BALAKRISHNAN, H.; DEO, N.; DUTTON, R. D. **On the complexity of finding optimal global alliances.** *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 58:23–31, 2006.
- [9] CORMEN, T. H.; LEISERSON, C. E.; STEIN, C.; RIVEST, R. L. **Algoritmos - Teoria e Prática.** Campus, 2 edition, 2002.
- [10] DIESTEL, R. **Graph Theory**, volume 173. Springer-Verlag, 3 edition, 2005.
- [11] DUNBAR, J. E.; .; HEDETNIEMI, S. T.; HENNING, M. A.; MCRAE, A. A. **Minus domination in graphs.** *Discrete Mathematics*, 199:35–47, 1999.

- [12] DUNBAR, J. E.; GODDARD, W.; HEDETNIEMI, S. T.; HENNING, M. A.; MCRAE, A. A. **The algorithmic complexity of minus domination in graphs.** *Discrete Applied Mathematics*, 68:73–84, 1996.
- [13] DUNBAR, J. E.; HARRIS, F.; HEDETNIEMI, S. M.; HEDETNIEMI, S. T.; LASKAR, R. C.; MCRAE, A. A. **Nearly perfect sets in graphs.** *Discrete Mathematics*, 138:229–246, 1995.
- [14] DUNBAR, J. E.; HEDETNIEMI, S. T.; HENNING, M. A.; MCRAE, A. A. **Minus domination in regular graphs.** *Discrete Mathematics*, 149:311–312, 1996.
- [15] DUNBAR, J. E.; HOFFMAN, D. G.; LASKAR, R. C.; MARKUS, L. R. **α -domination in graphs.** *Discrete Mathematics*, 211:11–26, 2000.
- [16] DUTTON, R. D. **On a graph's security number.** *Discrete Mathematics*, 309:4443–4447, 2009.
- [17] DUTTON, R. D.; LEE, R.; BRIGHAM, R. C. **Bounds on a graph's security number.** *Discrete Applied Mathematics*, 156:695–704, 2008.
- [18] FAVARON, O. **Signed domination in regular graphs.** *Discrete Mathematics*, 158:287–293, 1996.
- [19] FAVARON, O.; FRICKE, G.; GODDARD, W.; HEDETNIEMI, S. M.; HEDETNIEMI, S. T.; KRISTIANSEN, P.; LASKAR, R. C.; SKAGGS, D. **Offensive alliances in graphs.** *Discussiones Mathematicae – Graph Theory*, 24:263–275, 2002.
- [20] FLAKE, G. W.; LAWRENCE, S.; GILES, C. L. **Efficient identification of web communities.** In: *Proceedings of the sixth ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining (KDD-2000)*, 2000.
- [21] FRICKE, G. H.; LAWSON, L. M.; HAYNES, T. W.; HEDETNIEMI, S. M.; HEDETNIEMI, S. T. **A note on defensive alliances in graphs.** *Bulletin of the ICA.*, 38:37–41, 2003.
- [22] GERBER, M. U.; KOBLER, D. **Algorithmic approach to the satisfactory graph partitioning problem.** *European Journal of Operations Research*, 125:283–291, 2000.
- [23] HATTINGH, J. H.; HENNING, M. A.; SLATER, P. J. **On the algorithmic complexity of signed domination in graphs.** *Australasian Journal of Combinatorics*, 12:101–112, 1995.
- [24] HAYNES, T. W.; HEDETNIEMI, S. T.; HENNING, M. A. **Global defensive alliances in graphs.** *Eletron. J. Combin.*, 10:139–146, 2003.

- [25] HAYNES, T. W.; KNISLEY, D.; SEIER, E.; ZOU, Y. **A quantitative analysis of secondary rna structure using domination based parameters on trees.** *BMC Bioinformatics* 7, 108:11 páginas, 2006.
- [26] HAYNES, T. W.; HEDETNIEMI, S. T.; SLATER, P. J. **Fundamentals of Domination in Graphs**, volume 1. Marcel Dekker Inc., 1 edition, 1998.
- [27] JAMIESON, L. H. **Algorithms and Complexity for Alliances and Weighted Alliances of Various Types.** PhD thesis, Department of Computer Science, Clemson University, 2007.
- [28] JAMIESON, L. H.; DEAN, B. C. **Weighted alliances in graphs.** (English) *Congressus Numerantium*, 187:76–82, 2007.
- [29] JAMIESON, L. H.; HEDETNIEMI, S. T.; MCRAE, A. A. **The algorithmic complexity of alliances in graphs.** (English) *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 68:137–150, 2009.
- [30] KRISTIANSEN, P.; HEDETNIEMI, S.; HEDETNIEMI, S. T. **Alliances in graphs.** *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 48:157–177, 2004.
- [31] MILNER, E. C.; S., S. **Graphs with no unfriendly partitions.** In: *A tribute to Paul Erdős*, p. 373–384. Cambridge University Press, 1990.
- [32] MORETTI, C. O.; BITTENCOURT, T. N.; ANDRÉ, J. C.; MARTHA, L. F. **Algoritmos automáticos de partição de domínio.** *Boletim Técnico EPUSP-PEF, BT/PEF/9803*, 0:0, São Paulo, Brasil, 1998.
- [33] RODRÍGUEZ-VELÁZQUEZ, J. A.; YERO, I. G.; M., S. J. **Defensive k -alliances in graphs.** *Applied Mathematic Letters*, 22:96–100, 2009.
- [34] SHAFIQUE, K. H. **Partitioning a Graph in Alliances and its Application to Data Clustering.** PhD thesis, School of Computer Science, University of Central Florida, Orlando, 2004.
- [35] SHAFIQUE, K. H.; DUTTON, R. D. **On satisfactory partitioning of graphs.** *Congressus Numerantium*, 154:183–194, 2002.
- [36] SIGARRETA, J. M. **Alianzas en Grafos.** PhD thesis, Departamento de Matemáticas, Universidad Carlos III de Madrid, 2007.
- [37] SRIMANI, P. K.; XU, Z. **Distributed protocols for defensive and offensive alliances in network graphs using self-stabilization.** In: *Proceedings of the International Conference on Computing: Theory and Applications (ICCTA'07)*, 2007.

- [38] STEWART, D.; LANGLEY, L.; MERZ, S.; WARD, C. **α -domination in tournaments and digraphs.** *Congressus Numerantium*, 157:213–218, 2002.
- [39] SZABŐ, G.; CZÁRÁN, Z. **Defensive alliances in spatial models of cyclical population interactions.** *Phys. Rev.*, 64:11 páginas, 2001.
- [40] SZWARCFITER, J. L. **Grafos e Algoritmos Computacionais.** Campus, 2 edition, 1988.
- [41] XU, Z. **Self-stabilizing Protocols for Distributed Systems.** PhD thesis, Department of Computer Science, Clemson University, 2006.
- [42] XU, Z.; SRIMANI, P. K. **Self-stabilizing distributed algorithms for graph alliances.** In: *Proceedings of 20th Int. Parallel and Distr. Processing Symposium*, 2006.