

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
ESCOLA DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOTECNIA
ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL

**APLICABILIDADE DO POLINÔMIO DE
CAOS PARA A ANÁLISE DAS OSCILAÇÕES
NÃO LINEARES DE UM SISTEMA SUJEITO
A FLAMBAGEM**

MICHAEL DOWGLAS DE GOIS SILVA

D0134E16
GOIÂNIA
2016



TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Dissertação** **Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Nome completo do autor: Michael Dowglas de Gois Silva

Título do trabalho: Aplicabilidade do polinômio de caos para a análise das oscilações não lineares de um sistema sujeito a flambagem.

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Michael Dowglas de Gois Silva

Assinatura do (a) autor (a)

Data: 12 /04 /2017

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

MICHAEL DOWGLAS DE GOIS SILVA

**APLICABILIDADE DO POLINÔMIO DE
CAOS PARA A ANÁLISE DAS OSCILAÇÕES
NÃO LINEARES DE UM SISTEMA SUJEITO
A FLAMBAGEM**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geotecnia, Estruturas e Construção Civil da Universidade Federal de Goiás para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Área de concentração: Mecânica das Estruturas

Orientador: Dr. Frederico Martins Alves da Silva

D0134E16

GOIÂNIA

2016

**Ficha catalográfica elaborada automaticamente com os dados
fornecidos pelo(a) autor, sob orientação do Sibi/UFG**

Silva, Michael Dowglas de Gois.

Aplicabilidade do polinômio de caos para a análise das oscilações não lineares de um sistema sujeito a flambagem [manuscrito] / Michael Dowglas de Gois Silva. - 2016.

126 f. : il., figs, tabs.

Orientador: Prof^o. Frederico Martins Alves da Silva, Dr.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Escola de Engenharia Civil e Ambiental, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – Geotecnia, Estruturas e Construção civil, Goiânia, 2016.

Bibliografia.

Inclui figuras, símbolos, gráficos, tabelas, lista de figuras, abreviaturas, siglas e tabelas.

1. Flambagem 2. Bifurcação 3. Polinômio de Caos
4. Fator de Integridade I. Título.



PPG
GECON

Programa de Pós-Graduação em
Geotecnia, Estruturas e Construção Civil



Ata de Nº 0134 da sessão de julgamento da
Dissertação do aluno Michael Dowglas de Gois
Silva da área de concentração Mecânica das
Estruturas do PPG em Geotecnia, Estruturas e
Construção Civil.

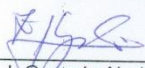
Aos 25 dias do mês de julho de 2016, às 14h30min, na sala Caryocar, Bloco A, 2º andar, Escola de Engenharia Elétrica, Mecânica e de Computação da Universidade Federal de Goiás, reuniu-se a banca examinadora designada na forma regimental pela Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Geotecnia, Estruturas e Construção Civil para julgar a Dissertação intitulada "**Aplicabilidade do Polinômio de Caos para a Análise das Oscilações Não Lineares de um Sistema Sujeito a Flambagem**", apresentada pelo aluno **Michael Dowglas de Gois Silva**, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de MESTRE, área de concentração Mecânica das Estruturas. A Banca Examinadora foi Presidida pelo Prof. Dr. Frederico Martins Alves da Silva (GECON/UFG), tendo como membros o Prof. Dr. Zenón J. Guzmán N. del Prado (GECON/UFG) e o Prof. Dr. Eulher Chaves Carvalho (IFG-Campus Jataí). Aberta a sessão pública, o candidato teve a oportunidade de expor o trabalho. Após a exposição, o aluno foi arguido oralmente pelos membros da Banca, os quais concluíram pelos seguintes resultados:

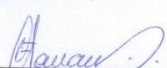
Membro	Instituição	Função	Resultado
Frederico Martins Alves da Silva	GECON/UFG	Presidente	<u>Aprovado</u>
Zenón José Guzmán N. del Prado	GECON/UFG	Examinador Interno	<u>Aprovado</u>
Eulher Chaves Carvalho	(IFG-Campus Jataí)	Examinador Externo	<u>Aprovado</u>

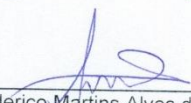
() Tendo demonstrado suficiência de conhecimento e capacidade de sistematização no tema de sua Dissertação, a Banca Examinadora concluiu pela **aprovação** do candidato **sem restrições**.

() Não tendo demonstrado suficiência de conhecimento e capacidade de sistematização no tema de sua Dissertação, a Banca Examinadora concluiu pela **reprovação** do candidato, conforme as seguintes justificativas:

Nos termos do Regulamento Geral dos Cursos de Pós-Graduação desta Universidade, foi lavrada a presente ata que, lida e julgada conforme, segue assinada pelos membros da **Banca Examinadora** e pelo **candidato**.


Zenón J. Guzmán N. del Prado
PPG-GECON/UFG


Eulher Chaves Carvalho
(IFG-Campus Jataí)


Frederico Martins Alves da Silva
PPG-GECON/UFG

Candidato: Michael Dowglas de Gois Silva Michael Dowglas de Gois Silva

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer à Deus, por ter me proporcionado oportunidades em que pude realizar esse trabalho.

Aos meus pais Francisca e Carlos, por todo apoio, amor, dedicação e carinho que me motivaram e ajudaram a seguir meu caminho independente dos obstáculos. A todos meus familiares que sempre me apoiaram e contribuíram para esta conquista, em especial a minha irmã Agna.

Ao meu orientador, Professor Frederico, que me acompanhou e muito ensinou nessa caminhada. Muito obrigada por sua dedicação e paciência ao longo desses dois anos, sem o seu apoio não teria conseguido.

À todos os meus professores pela dedicação e pelo aprendizado que me proporcionaram, que me fez chegar até aqui.

Aos meus amigos que fizeram parte desta jornada e que sempre tiveram comigo, tanto nos bons quanto nos maus momentos.

À CAPES pelo apoio financeiro, de grande importância para a realização deste trabalho.

RESUMO

No presente trabalho são estudadas diversas configurações de equilíbrio estático e dinâmico nas oscilações não lineares por meio de um sistema estrutural simples, dado por um modelo barra rígida-mola com um grau de liberdade, que dependendo de seus parâmetros, pode representar de maneira simplificada vários elementos estruturais tais como pórtico, coluna, arco, cascas e placas, dentre outros. Para isso fez-se um levantamento bibliográfico sobre a instabilidade no que diz respeito ao equilíbrio estático e dinâmico, à análise de bifurcações, ao plano fase e a bacia de atração de modelos discretos. A finalidade desse estudo é situar o problema, para poder avaliar nesta dissertação, a influência das incertezas dos parâmetros geométricos nas vibrações não lineares e na estabilidade de sistemas mecânicos sujeitos a flambagem comparando respostas determinísticas e não determinísticas. Para obter as respostas estocásticas do modelo estudado utiliza-se o polinômio de Legendre-Caos. As equações do sistema são deduzidas a partir de seus funcionais de energia usando o princípio da energia potencial estacionária permitindo a partir dos parâmetros escolhidos a análise de diferentes mecanismos de bifurcação. São estudadas duas particularidades, os sistemas que apresentam bifurcação simétrica do tipo *Butterfly* e os sistemas que apresentam bifurcação assimétrica *Swallowtail*, em ambos os casos as bifurcações apresentam um caminho pós-crítico inicial instável. Para o estudo sistemático das equações não lineares de equilíbrio foi utilizado o *software* de álgebra simbólica, MAPLE, e códigos computacionais escritos na linguagem C, permitindo a obtenção dos caminhos pós-críticos e a integração das equações de equilíbrio para a análise das respostas no tempo, dos planos fase, das bacias de atração e dos fatores de integridade.

Palavras-chave: Flambagem. Bifurcação. Polinômio de caos. Fator de integridade.

ABSTRACT

In the present paper several configurations of static and dynamic equilibrium in the non-linear oscillations are studied through a simple structural system, given by a rigid bar-spring model with a degree of freedom, that depending on its parameters, can represent in a simplified way several structural elements such as portico, column, arch, shells and plaques, among others. Therefore, a bibliographical research about the instability regarding the static and dynamic equilibrium, the analysis of bifurcations, the phase plane and the basin of attraction of discrete models was made. The purpose of this study is to situate the problem, in order to evaluate in this dissertation, the influence of the uncertainties of the geometric parameters on the nonlinear vibrations and the stability of mechanical systems susceptible to buckling by comparing deterministic and nondeterministic responses. Legendre-Chaos polynomial is used to obtain the stochastic responses of the model studied. The equations of the system are deduced from their energy functionalities using the principle of stationary potential energy allowing the analysis of different bifurcation mechanisms from the chosen parameters. Two particularities are studied, the systems that present symmetrical bifurcation of the Butterfly type and the systems that present asymmetric Swallowtail bifurcation, in both cases the bifurcations present an initial unstable post critical path. For the systematic study of the nonlinear equilibrium equations, we used the symbolic algebra software, MAPLE, and computational codes written in the C language, allowing us to obtain the post-critical paths and the integration of the equilibrium equations for the analysis of the time responses, phase planes, attraction basins, and integrity factors.

Keywords: Buckling. Bifurcation. Polynomial Chaos. Integrity factor

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Bifurcação simétrica estável. Fonte: Millon (1991).....	32
Figura 2.2 – Bifurcação simétrica instável. Fonte: Millon (1991)	32
Figura 2.3 – Bifurcação assimétrica. Fonte: Millon (1991)	33
Figura 2.4 – Bacia de atração. Fonte: Millon (1991)	34
Figura 3.1 – Sistema massa-mola-barra rígida com um grau de liberdade. Fonte: Millon (1991).....	38
Figura 4.1 – Caminho pós-crítico para a bifurcação do tipo <i>Butterfly</i>	53
Figura 4.2 – Caminho pós-crítico para a bifurcação do tipo <i>Swallowtail</i>	54
Figura 4.3 – Relação ω_0^2 versus \bar{P}_0 para bifurcação do tipo <i>Butterfly</i>	56
Figura 4.4 – Relação ω_0^2 versus \bar{P}_0 para bifurcação do tipo <i>Swallowtail</i>	57
Figura 4.5 – Caminho pós crítico para a bifurcação do tipo <i>Butterfly</i> considerando a incerteza em seus parâmetros.	58
Figura 4.6 – Caminho pós crítico para a bifurcação do tipo <i>Swallowtail</i> considerando a incerteza em seus parâmetros.	58
Figura 4.7 – Caminho pós-crítico para a bifurcação do tipo <i>Butterfly</i> para vários níveis de carregamento.....	60
Figura 4.8 – Bacias de atração para a bifurcação do tipo <i>Butterfly</i> , incerteza no parâmetro β . ($\lambda = 4$ e $\xi = 0,1$).....	61
Figura 4.9 – Bacias de atração para a bifurcação do tipo <i>Butterfly</i> , incerteza no parâmetro δ . ($\lambda = 4$ e $\xi = 0,1$).....	62
Figura 4.10 – Fator de integridade local para a bifurcação do tipo <i>Butterfly</i> : Atrator (a) Central (b) Esquerdo.....	63
Figura 4.11 – Fator de integridade global para a bifurcação do tipo <i>Butterfly</i> : Atrator (a) Central (b) Esquerdo.....	64

Figura 4.12 – Caminho pós-crítico para a bifurcação do tipo *Swallowtail* para vários níveis de carregamento... 65

Figura 4.13 – Bacias de atração para a bifurcação do tipo *Swallowtail*, incerteza no parâmetro α ($\lambda = 4$ e $\xi = 0.1$)... 66

Figura 4.14 – Fator de integridade local para a bifurcação do tipo *Swallowtail*: Atrator (a) Central (b) Direito... 67

Figura 4.15 – Fator de integridade global para a bifurcação do tipo *Swallowtail*: Atrator (a) Central (b) Direito... 67

Figura 4.16 – Diagrama de bifurcação do tipo *Butterfly* variado os valores de Ω . ($\beta = -6$, $\delta = 4$, $\lambda = 4$ e $\xi = 0.1$)... 69

Figura 4.17 – Diagrama de bifurcação do tipo *Swallowtail* variado os valores de Ω . ($\alpha = 3$, $\lambda = 4$ e $\xi = 0.1$)... 70

Figura 4.18 – Diagrama de bifurcação do tipo *Butterfly* considerando as incertezas no parâmetro β . ($\Omega = 1.1$, $\delta = 4$, $\lambda = 4$ e $\xi = 0.1$)... 71

Figura 4.19 – Diagrama de bifurcação para o parâmetro β em relação a $Q_2(\tau)$ para determinados valores de Γ_1 . ($\Omega = 1.1$, $\delta = 4$, $\lambda = 4$ e $\xi = 0.1$)... 72

Figura 4.20 – Diagrama de bifurcação do tipo *Butterfly* considerando as incertezas no parâmetro δ . ($\Omega = 1.1$, $\beta = -6$, $\lambda = 4$ e $\xi = 0.1$)... 74

Figura 4.21 – Diagrama de bifurcação do parâmetro δ em relação a $Q_2(\tau)$ para determinados valores de Γ_1 . ($\Omega = 1.1$, $\beta = -6$, $\lambda = 4$ e $\xi = 0.1$)... 75

Figura 4.22 – Diagrama de bifurcação do tipo *Swallowtail* considerando as incertezas no parâmetro α . ($\Omega = 1.1$, $\lambda = 4$ e $\xi = 0.1$)... 76

Figura 4.23 – Diagrama de bifurcação do parâmetro α em relação a $Q_2(\tau)$ para determinados valores de Γ_1 . ($\Omega = 1.1$, $\lambda = 4$ e $\xi = 0.1$)... 77

Figura 4.24 – Diagramas de bifurcação determinístico e não determinístico do tipo *Butterfly*, com incerteza em β . ($\Omega = 1.1$, $\delta = 4$, $\lambda = 4$ e $\xi = 0.1$)... 79

Figura 4.25 – Resposta no tempo não determinística para a bifurcação do tipo *Butterfly*, com incerteza em β : $\Gamma_1 = 0.05$ (a) $V_1(t)$ (média) e (a) $V_2(t)$ (variância); $\Gamma_1 = 0.33$ (c) $V_1(t)$ (média) e (d) $V_2(t)$ (variância). ($\Omega = 1.1$)... 80

Figura 4.26 – Diagramas de bifurcação determinístico e não determinístico do tipo *Butterfly*, com incerteza em δ . ($\Omega = 1.1$, $\lambda = 4$, $\beta = -6$, e $\xi = 0.1$)... 81

Figura 4.27 – Resposta no tempo não determinística para a bifurcação do tipo *Butterfly*, com incerteza em δ : $\Gamma_1 = 0.05$ (a) $V_1(t)$ (média) e (a) $V_2(t)$ (variância); $\Gamma_1 = 0.8$ (c) $V_1(t)$ (média) e (d) $V_2(t)$ (variância). ($\Omega = 1.1$)... 82

Figura 4.28 – Diagramas de bifurcação determinístico e não determinístico do tipo *Swallowtail*, com incerteza em α . ($\Omega = 1.1$, $\lambda = 4$, e $\xi = 0.1$)... 83

Figura 4.29 – Resposta no tempo não determinística para a bifurcação do tipo *Swallowtail*, com incerteza em α : $\Gamma_1 = 0.04$ (a) $V_1(t)$ (média) e (a) $V_2(t)$ (variância); $\Gamma_1 = 0.65$ (c) $V_1(t)$ (média) e (d) $V_2(t)$ (variância). ($\Omega = 1.1$)... 85

Figura 4.30 – Planos fases e seções de Poincarè para vibrações forçadas amortecidas do tipo *Butterfly*, para os casos determinísticos e não determinísticos com incerteza em β . ($\Omega = 1.1$, $\delta = 4$, $\lambda = 4$ e $\xi = 0.1$) 86

Figura 4.31 – Planos fases e seções de Poincarè para vibrações forçadas amortecidas do tipo *Butterfly* para os casos determinísticos e não determinísticos com incerteza em δ . ($\Omega = 1.1$, $\beta = -6$, $\lambda = 4$ e $\xi = 0.1$)..... 89

Figura 4.32 – Planos fases e seções de Poincarè para vibrações forçadas amortecidas do tipo *Swallowtail*, para os casos determinísticos e não determinísticos com incerteza em α . ($\Omega = 1.1$, $\lambda = 4$ e $\xi = 0.1$)..... 90

Figura 4.33 – Plano fase e seção de Poincarè para vibrações forçadas amortecidas do tipo *Swallowtail*, para o caso não determinísticos com α como parâmetro de controle, para $\Gamma_1 = 0.16$. ($\Omega = 1.1$, $\lambda = 4$ e $\xi = 0.1$)..... 91

Figura 4.34 – Diagrama de bifurcação do tipo *Butterfly*, dividindo em Grupos, considerando as incertezas no parâmetro β . ($\Omega = 1.1$, $\delta = 4$, $\lambda = 4$ e $\xi = 0.1$)..... 92

Figura 4.35 – Bacias de atração dinâmicas para a bifurcação do tipo *Butterfly*, com incerteza no parâmetro β , para diferente valores de Γ_1 . ($\Omega = 1.1$, $\delta = 4$, $\lambda = 4$ e $\xi = 0.1$)..... 93

Figura 4.36 – Fator de integridade para a bifurcação do tipo <i>Butterfly</i> , com incerteza em β referente ao Grupo I: Fator de integridade (a) Local (b) Global	97
Figura 4.37 – Fator de integridade para a bifurcação do tipo <i>Butterfly</i> , com incerteza em β referente ao Grupo II: Fator de integridade (a) Local (b) Global	99
Figura 4.38 – Fator de integridade para a bifurcação do tipo <i>Butterfly</i> , com incerteza em β referente ao Grupo III: Fator de integridade (a) Local (b) Global.....	100
Figura 4.39 – Fator de integridade para a bifurcação do tipo <i>Butterfly</i> , com incerteza em β referente ao Grupo IV: Fator de integridade (a) Local (b) Global	101
Figura 4.40 – Fatores de integridade para a bifurcação do tipo <i>Butterfly</i> , para o parâmetro nominal $\beta = -6$ referente aos Grupos da Figura 4.34: Fator de integridade (a) Local (b) Global.....	102
Figura 4.41 – Diagrama de bifurcação do tipo <i>Butterfly</i> , dividindo em Grupos, considerando as incertezas no parâmetro δ . ($\Omega = 1.1$, $\beta = -6$, $\lambda = 4$ e $\xi = 0.1$)	103
Figura 4.42 – Bacias de atração dinâmicas para a bifurcação do tipo <i>Butterfly</i> , com incerteza no parâmetro δ , para diferentes valores de Γ_1 . ($\Omega = 1.1$, $\beta = -6$, $\lambda = 4$ e $\xi = 0.1$)	104
Figura 4.43 – Fator de integridade para a bifurcação do tipo <i>Butterfly</i> , com incerteza em δ referente ao Grupo I: Fator de integridade (a) Local (b) Global	107
Figura 4.44 – Fator de integridade para a bifurcação do tipo <i>Butterfly</i> , com incerteza em δ referente ao Grupo II: Fator de integridade (a) Local (b) Global	108
Figura 4.45 – Fator de integridade para a bifurcação do tipo <i>Butterfly</i> , com incerteza em δ referente ao Grupo III: Fator de integridade (a) Local (b) Global.....	109
Figura 4.46 – Fator de integridade para a bifurcação do tipo <i>Butterfly</i> , com incerteza em δ referente ao Grupo IV: Fator de integridade (a) Local (b) Global	110
Figura 4.47 – Fatores de integridade para a bifurcação do tipo <i>Butterfly</i> , para o parâmetro nominal $\delta = 4$ referente aos Grupos da Figura 4.41: Fator de integridade (a) Local (b) Global.....	111
Figura 4.48 – Diagrama de bifurcação do tipo <i>Swallowtail</i> , dividindo em grupos, considerando as incertezas no parâmetro α . ($\Omega = 1.1$, $\lambda = 4$ e $\xi = 0.1$).....	112

Figura 4.49 – Bacias de atração dinâmicas para a bifurcação do tipo *Swallowtail*, com incerteza no parâmetro α , para diferentes valores de Γ_1 . ($\Omega = 1.1$, $\lambda = 4$ e $\xi = 0.1$)..... 113

Figura 4.50 – Fator de integridade para a bifurcação do tipo *Swallowtail*, com incerteza no parâmetro α referente ao Grupo I: Fator de integridade (a) Local (b) Global 116

Figura 4.51 – Fator de integridade para a bifurcação do tipo *Swallowtail*, com incerteza no parâmetro α referente ao Grupo III: Fator de integridade (a) Local (b) Global 116

Figura 4.52 – Fator de integridade para a bifurcação do tipo *Swallowtail*, com incerteza no parâmetro α referente ao Grupo II: Fator de integridade (a) Local (b) Global..... 117

Figura 4.53 – Fatores de integridade para a bifurcação do tipo *Swallowtail*, para o parâmetro nominal $\alpha = -3$ referente aos Grupos da Figura 4.48: Fator de integridade (a) Local (b) Global..... 118

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Correspondência de polinômios ortogonais e funções densidade de probabilidade de diferentes variáveis aleatórias ($N \geq 0$ inteiro finito). Fonte: Xiu e Karniadakis (2002).	47
Tabela 4.1 – Variação dos fatores de integridade local e global para a bifurcação do tipo <i>Butterfly</i>	63
Tabela 4.2 – Variação dos fatores de integridade local e global para a bifurcação do tipo <i>Swallowtail</i>	65
Tabela 4.3 – Variação dos fatores de integridade local e global para a bifurcação do tipo <i>Butterfly</i> , incerteza em β referente ao Grupo I da Figura 4.34.	97
Tabela 4.4 – Variação dos fatores de integridade local e global para a bifurcação do tipo <i>Butterfly</i> , incerteza em β referente ao Grupo II da Figura 4.34.	98
Tabela 4.5 – Variação dos fatores de integridade local e global para a bifurcação do tipo <i>Butterfly</i> , incerteza em β referente ao Grupo III da Figura 4.34.	99
Tabela 4.6 – Variação dos fatores de integridade local e global para a bifurcação do tipo <i>Butterfly</i> , incerteza em β referente ao Grupo IV da Figura 4.34.	101
Tabela 4.7 – Variação dos fatores de integridade local e global para a bifurcação do tipo <i>Butterfly</i> , incerteza em δ referente ao Grupo I da Figura 4.41.	106
Tabela 4.8 – Variação dos fatores de integridade local e global para a bifurcação do tipo <i>Butterfly</i> , incerteza em δ referente ao Grupo II da Figura 4.41.	107
Tabela 4.9 – Variação dos fatores de integridade local e global para a bifurcação do tipo <i>Butterfly</i> , incerteza em δ referente ao Grupo III da Figura 4.41.	109
Tabela 4.10 – Variação dos fatores de integridade local e global para a bifurcação do tipo <i>Butterfly</i> , incerteza em δ referente ao Grupo IV da Figura 4.41.	110
Tabela 4.11 – Variação dos fatores de integridade local e global para a bifurcação do tipo <i>Swallowtail</i> , incerteza em α referente ao Grupo I da Figura 4.48.	115

Tabela 4.12 – Variação dos fatores de integridade local e global para a bifurcação do tipo *Swallowtail*, incerteza em α referente ao Grupo III da Figura 4.48..... 116

Tabela 4.13 – Variação dos fatores de integridade local e global para a bifurcação do tipo *Swallowtail*, incerteza em α referente ao Grupo II da Figura 4.48.... 117

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AC	Atrator Central
AD	Atrator Direito
AE	Atrator Esquerdo
FIG	Fator de Integridade Global
FIL	Fator de Integridade Local
FNV	Frequência Natural de Vibração
EDOE	Equação Diferencial Ordinária Estocásticas

LISTA DE SÍMBOLOS

SÍMBOLOS ROMANOS

c	Razão entre a rigidez e a massa
$F(t)$	Carga dinâmica
\bar{k}_2	Rigidez não linear de mola 2
k_2	Rigidez da mola 2
k_1	Rigidez de mola 1
L	Comprimento da barra rígida
M	Massa
P_0	Carga estática de compressão
Q	Deslocamento generalizado
$Q_1(t)$	Deslocamento vertical adimensional - parcela dinâmica
Q_{10}	Deslocamento vertical adimensional - parcela estática
$Q_2(t)$	Seno do ângulo entre a mola 1 e a barra rígida – parcela dinâmica
Q_{20}	Seno do ângulo entre a mola 1 e a barra rígida – parcela estática
T	Energia Cinética
t	Tempo
U_0	Energia Potencial
$V_1(t)$	Média
$V_2(t)$	Variância
We_0	Trabalho das forças externas
x	Espaço amostral
X	Campo estocástico

SÍMBOLOS GREGOS

Δh_0	Deslocamento horizontal
ΔL	Função de Lagrange
Δv_0	Deslocamento Vertical
Ω	Frequência Excitadora
$w(\xi)$	Função de densidade e probabilidade
ξ	Coefficiente de amortecimento viscoso linear
ω_0	Frequência Natural
Δ	Variação
Γ_1	Amplitude da carga de excitação
Π_0	Energia potencial total
α	Coefficiente do termo Q_{20} da equação não linear da mola \bar{k}_2
β	Coefficiente do termo Q_{20}^2 da equação não linear da mola \bar{k}_2
δ	Coefficiente do termo Q_{20}^4 da equação não linear da mola \bar{k}_2
δ	Raio da esfera que determina o valor máximo da perturbação
ϕ	Evento randômico
γ	Coefficiente do termo Q_{20}^3 da equação não linear da mola \bar{k}_2
η	Coefficiente que torna \bar{k}_2 linear ou não
λ	k_1 / k_2
μ	Viscosidade linear

SÍMBOLOS MATEMÁTICOS

$\frac{d()}{d()}$ Derivada Ordinária

$\frac{\partial()}{\partial()}$ Derivada Parcial

($\dot{\quad}$) $\frac{d()}{dt}$ - Primeira derivada (velocidade)

($\ddot{\quad}$) $\frac{d^2()}{dt^2}$ - Segunda derivada (aceleração)

\int Integral

Σ Somatório

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO	22
1.1. OBJETIVOS.....	24
1.2. ORGANIZAÇÃO DO TEXTO.....	24
CAPÍTULO 2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	26
CAPÍTULO 3 – FORMULAÇÃO MATEMÁTICA.....	38
3.1. MODELO DISCRETO.....	38
3.2. ANÁLISE DA ESTABILIDADE ESTÁTICA	39
3.3. ANÁLISE DA ESTABILIDADE DINÂMICA.....	41
3.3.1. Lagrangeano	42
3.3.2. Equação de Movimento.....	43
3.3.3. Aplicação do polinômio de caos.....	45
CAPÍTULO 4 – RESULTADOS NUMÉRICOS	51
4.1. ANÁLISE ESTÁTICA	51
4.1.1. Caminho pós-crítico de equilíbrio	51
4.1.2. Frequência natural ao longo do caminho pós-crítico de equilíbrio	54
4.1.3. Incertezas nos parâmetros que definem as bifurcações do tipo <i>Butterfly</i> e <i>Swallowtail</i>	57
4.1.4. Bacias de atração estáticas das bifurcações do tipo <i>Butterfly</i> e <i>Swallowtail</i>	59
4.2. ANÁLISE NÃO DINÂMICA.....	68
4.2.1. Diagramas de bifurcação	68
4.2.2. Incertezas nos parâmetros que definem as bifurcações do tipo <i>Butterfly</i> e <i>Swallowtail</i>	70
4.2.3. Resposta no tempo e plano fase.....	85
4.2.4. Bacias de atração dinâmicas das bifurcações do tipo <i>Butterfly</i> e <i>Swallowtail</i>	91
CAPÍTULO 5 – CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....	120

REFERÊNCIAS 124

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, engenheiros e pesquisadores têm sido solicitados, cada vez com mais frequência, a estudar e projetar estruturas com grau de complexidade cada vez maior. Com isso os efeitos não lineares se tornam cada vez maiores e difíceis de serem controlados. Fenômenos não lineares são, entretanto, usualmente indesejáveis. Evitam-se estes tipos de problemas projetando-se estruturas de tal modo que elas trabalhem em regime linear, isso porque tanto a análise estática quanto a dinâmica de sistemas não lineares apresentam nas áreas de matemática e mecânica aplicada uma variedade de problemas de difícil solução. Para resolvê-las é necessário o desenvolvimento de técnicas de análise sofisticadas e com um conhecimento cada vez mais profundo de como a não linearidade afeta o comportamento estrutural. Visando isto, houve um grande estímulo para o aprimoramento de várias áreas do conhecimento, em especial, nas áreas de dinâmica e instabilidade, tendo essa última área início com Leonard Euler em 1744 quando apresentou o estudo do problema de instabilidade de barras por flexão. Grande parte das descobertas recentes a respeito dessas áreas se deve ao desenvolvimento de técnicas numéricas para a análise de sistemas de equações não lineares e ao grande avanço computacional. Somente através do uso de computadores podem-se resolver, com eficiência, sistemas estruturais altamente não lineares.

Sistemas que apresentam não linearidade dão origem a uma série de particularidades que não são encontrados em sistemas lineares. Segundo Millon (1991), em um sistema simples com um grau de liberdade, estas particularidades incluem a existência de múltiplas configurações de equilíbrio, ciclos-limite, saltos dinâmicos, variações da frequência natural com a amplitude, oscilações sub-harmônicas e super-harmônicas, bifurcações em cascata e movimentos caóticos. Já em um sistema que possui vários graus de liberdade podem exibir ressonância combinadas e interação modal como no caso de cascas cilíndricas submetidas à cargas dinâmicas (GONÇALVES, DEL PRADO, 2004; RODRIGUES *et al.*, 2013). Existe uma interação entre estes diversos fenômenos, tornando necessário um estudo detalhado destas interações no desempenho de um dado sistema estrutural.

Um sistema dinâmico pode ser representado por sistemas simplificados com um ou mais graus de liberdade. Quando a excitação, nesses casos, for periódica espera-se que a resposta permanente também o seja. Embora, estudos mostrarem que em virtude da não linearidade, podem exibir movimentos complexos e até inesperados (MOON², 1987 *apud* MILLON, 1991). Dentre estes efeitos, destacam-se as oscilações caóticas, que é uma classe de oscilações não lineares que são complexas e possui caráter aleatório.

Um sistema é caracterizado como determinístico quando seus parâmetros, equações de movimentos e condições iniciais são conhecidos e não são estocásticos ou randômicos. Entretanto para certa classe de parâmetro este sistema pode apresentar respostas com aspectos randômicos, apresentando uma falta de ordem, sendo denominada assim caótica.

Este fenômeno pode ser observado em muitos sistemas físicos. Eles vêm sendo estudados com frequência, por apresentarem comportamento caótico, sendo assim encontrados na literatura científica. Millon (1991) cita em seu estudo alguns sistemas mecânicos que são conhecidos por exibirem vibrações caóticas, são eles:

- Sistemas sujeitos a impactos;
- Viga com as condições de contorno não lineares;
- Vibrações tridimensionais em estruturas como vigas e cascas;
- Estruturas sujeitas a força hidrodinâmicas e eletromagnéticas;
- Vibração em estruturas elásticas flambadas;
- Problemas aeroelásticos;
- Sistemas mecânicos com molas bilineares, folgas nas ligações de apoio criando uma não linearidade localizada e outras mudanças bruscas de parâmetros.

Para se entender a teoria do caos precisa-se, entretanto, conhecer a teoria básica relativa a oscilações não lineares e bifurcações. Existem algumas literaturas clássicas na área de oscilações não lineares, podendo citar os trabalhos de Moon (1987, *apud* MILLON, 1991) que apresenta um enfoque mais aplicado à engenharia. Em seu trabalho a análise qualitativa dos sistemas dinâmicos é feita através de técnicas geométricas, desenvolvida inicialmente por

² MOON, F. C. , “**Chaotic Vibrations**”, Jhon Wiley & Sons, USA, 1987.

Henri Poincaré no final do século XIX, a partir do estudo de um sistema determinístico (problema de três corpos).

1.1 OBJETIVOS

Esta dissertação tem como objetivo estudar as diferentes bifurcações e oscilações não lineares por meio da análise paramétrica de um sistema estrutural simples, isto é, um modelo barra rígida-mola com um grau de liberdade, que dependendo dos parâmetros, pode representar de maneira simplificada vários elementos estruturais tais como pórtico, coluna, arco, cascas e placas, dentre outros. Este modelo quando submetido às cargas compressivas, estão sujeitos a flambagem, quer através de bifurcações, quer através da existência de pontos limites ao longo de caminho de equilíbrio não linear. Estas estruturas na presença de perturbações ou carga dinâmicas, podem apresentar um comportamento dinâmico bastante complexo, tais como oscilações periódicas e caóticas. Visando isso, se objetiva a avaliação da influência das incertezas dos parâmetros físicos e geométricos nas vibrações não-lineares e na estabilidade desse sistema mecânico sujeito a flambagem, bem como a aplicabilidade do polinômio de caos generalizado para o estudo das aleatoriedade deste sistema, utilizando os resultados estocásticos para estudar e definir os conceitos de instabilidade e dinâmica não lineares de sistemas mecânicos sujeito a flambagem.

1.2 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

Esta dissertação está organizada em mais quatro capítulos, além deste que traz uma introdução sobre o assunto a ser analisado.

No Capítulo 2 aborda-se uma revisão bibliográfica sobre a instabilidade no que diz respeito ao equilíbrio estático e dinâmico, à análise de bifurcações, ao plano fase, à bacia de atração de modelos discretos e os fatores de integridade. Aborda-se também a utilização do polinômio de caos para obtenção de respostas estocásticas de sistemas mecânicos.

No Capítulo 3 apresenta-se a formulação matemática utilizada para estudar o problema proposto nesta dissertação, sendo esse estudo inspirado no trabalho de Millon (1991) que estudou o mesmo modelo utilizado neste trabalho, acrescentando-se as considerações sobre a variabilidade dos parâmetros que definem o problema. Aborda-se também neste capítulo a

formulação do polinômio de caos, que foi baseada no trabalho de Xiu e Karniadakis (2002), que fornece respostas estatísticas, como média e variância, sem gerar um processo de amostragem.

Em seguida, no Capítulo 4, apresentam-se os resultados obtidos a partir das formulações matemáticas apresentadas no Capítulo 3, sendo apresentados em duas seções: uma considerando os parâmetros, que definem o modelo discreto, determinísticos e outra seção considerando-os como não determinístico.

Por fim, no Capítulo 5 são apresentadas as principais conclusões obtidas nesta dissertação e algumas sugestões para trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Apresenta-se, neste capítulo, uma revisão bibliográfica para uma contextualização inicial sobre a instabilidade estática e dinâmica estrutural, bem como a teoria básica sobre oscilações não lineares, onde serão abordados os tipos de bifurcações, os planos fases e as bacia de atração. Posteriormente é feito um apanhado de trabalhos que apresentam a teoria geral dos polinômios de caos e o fator de integridade estrutural.

O estudo da estabilidade ou, por oposição, instabilidade de estruturas tem seus primeiros relatos de meados do século XVIII, quando o matemático Leonard Euler (1707-1783) analisou barras de material linear, esbeltas e carregadas axialmente (ARAUJO, 1993). Leonard Euler concluiu em sua análise a existência de um limite de força aplicada na barra que marcava a separação na posição inicial de uma configuração estável para uma instável.

Um sistema está em equilíbrio estável se, dadas perturbações pequenas e arbitrárias, modificando um pouco a posição deste e impondo pequenas velocidades iniciais, os movimentos resultantes permanecem pouco afastados da configuração de equilíbrio e tão mais próximos dela quanto menores forem às perturbações dadas. Se a ordem dessa perturbação não for pequena, o que é considerado estável pode se torna instável, pois, com isso os movimentos resultantes tendem a se afastar progressivamente da configuração de equilíbrio.

Portanto, deve-se enfatizar o tipo de perturbação e a definição de estabilidade que se está considerando, quando se estuda a estabilidade de um sistema. É perguntado como um sistema de configuração de equilíbrio não perturbada se comporta quando este sofre uma perturbação.

Millon (1991) afirma que no estudo de problemas de instabilidade se destacam quatro elementos:

- A configuração inicial de equilíbrio cuja estabilidade se deseja investigar;
- A classe e a magnitude das perturbações;
- Os parâmetros que medem a propagação dessas perturbações;

- O período de tempo em relação ao qual se estará interessado em comparar o comportamento do sistema perturbado com o não perturbado.

Bueno (2009) analisa que para a determinação da carga crítica é conveniente adotar a teoria simplificada, levando à linearização das equações de equilíbrio, embora assim fiquem indeterminadas os deslocamentos na configuração fletida. Este procedimento torna-se incompatível para caracterizar o tipo de equilíbrio para uma carga igual à carga crítica e para descrever o comportamento da estrutura para uma carga maior que a carga crítica.

Os três parâmetros que são usados normalmente para a determinação da estabilidade estática de um sistema elástico conservativo são: o estático, o dinâmico e o energético.

O critério estático de estabilidade admite forças estáticas, que resultam em pequenos deslocamentos em torno do estado original de equilíbrio. Neste parâmetro a tendência é restaurar o sistema a seu estado original de equilíbrio que representa a condição de equilíbrio estável. Já no critério dinâmico os estados de equilíbrio são definidos da seguinte maneira: (a) se as Frequências Naturais de Vibração (FNV) da estrutura sob um dado carregamento estático são reais, tem-se um estado estável; (b) se pelo menos uma FNV for imaginária, então se tem um estado instável; e, (c) se uma das FNV for próxima ou igual à zero, tem-se um estado crítico. (GOMES, 2013).

Em termos de energia verifica-se que o comportamento do sistema estático depende apenas da energia potencial total. Lagrange demonstrou que uma condição suficiente para a estabilidade de um sistema conservativo é que a sua energia potencial tenha um mínimo estrito neste ponto. O teorema de Lagrange é a base do chamado critério de energia, onde uma configuração é estável se o incremento na energia potencial total devido a um campo qualquer de deslocamentos adicional suficientemente pequeno e cinematicamente admissível é positivo definido. O equilíbrio é estável se o incremento é negativo para pelo menos uma configuração adjacente à configuração fundamental de equilíbrio. (MILLON, 1991).

A análise da dinâmica clássica baseada na teoria linear foi durante muito tempo considerada suficiente para a compreensão das características oscilatórias de praticamente todas as estruturas projetadas. Entretanto, com a modernização das estruturas e utilização de materiais inovadores com maior grau de flexibilidade, as não linearidades tornam-se mais ativas,

provocando o surgimento de vibrações com características não lineares. Nestes casos, a análise dinâmica linear deve ser considerada apenas como uma fase inicial de projeto.

A dinâmica não linear passou a ser frequentemente utilizada na modelagem de sistemas mecânicos. Apesar da maior dificuldade de solução das equações envolvidas na abordagem não linear, seus modelos permitem considerar os efeitos de um maior número de parâmetros relevantes ao projeto, reduzindo o número de hipóteses simplificadoras. Em adição à presença de não linearidades, as estruturas quando em operação podem sofrer a ação de excitações de naturezas diferentes. As excitações podem ser classificadas segundo a maneira que aparecem nas equações de movimento. Dessa forma, podem ser externas ao sistema ou paramétricas. (RODRIGUES, 2013).

A variação com o tempo das forças que atuam sobre um sistema deformável, faz com que, não sendo o desenvolvimento das forças elásticas suficientemente rápidas para manter o equilíbrio, o sistema modifique a sua situação cinemática para buscar o equilíbrio com a ajuda das “forças de massa” ou “forças de inércia”. Em linguagem mais objetiva, o sistema tem sua quantidade de movimento alterada, e a segunda lei de Newton assegura a satisfação das condições de equilíbrio. Basicamente, a grande modificação é a necessidade de incorporação da variável tempo, nas equações de equilíbrio.

O movimento do sistema transforma-se numa oscilação, pela sucessiva troca de energia potencial em cinética, e vice-versa, e é dito que a estrutura “vibra”. Além do caráter repetitivo, da resposta, as amplitudes dos deslocamentos chegam a ultrapassar, em diversas vezes, os valores correspondentes à aplicação estática da ação, o que empresta ao estudo de dinâmica estrutural uma importância indiscutível (KROETZ, 2015).

Paz (1985) analisa que as ações dinâmicas que ocorrem em um sistema estrutural podem ser avaliadas de duas maneiras:

- Determinística: na qual as características do sistema e da excitação são *a priori* estabelecidas;
- Não Determinística, randômica ou estocástica: na qual pelo menos um desses elementos é estabelecido a partir de um conjunto amostral com certa definição probabilística.

Paz (1985) define que a vibração é um termo que descreve a oscilação num sistema mecânico, e na prática não possui muitas vezes um padrão regular, podendo ser uma combinação de

vários harmônicos de resposta simples. Se ela repete-se a certos intervalos de tempo é dita periódica, do contrário é não periódica, ou complexa.

As vibrações podem também ser classificadas em livres, quando provocadas exclusivamente pela energia potencial e cinética existentes no sistema, ou forçadas, que incorporam ainda as ações externas sobre o sistema, variáveis com o tempo. A vibração é amortecida quando o sistema dissipa energia durante a oscilação, sendo não amortecida no caso oposto. É importante salientar que todo sistema não amortecido é uma idealização para auxiliar o entendimento de situações limites do caso amortecido (TEDESCO, 1998).

Os sistemas dinâmicos podem ser classificados como conservativos ou dissipativos. Analisando um fluxo no espaço de fases pelo teorema de Liouville, pode-se verificar se o sistema é conservativo, ou não, observando a evolução temporal de um hiper-volume n -dimensional, definido pelo conjunto de condições iniciais, sendo n a dimensão do espaço de fases. Se o fluxo preservar o volume no espaço de fases, o sistema é dito conservativo. Se o volume no espaço de fases diminui com o tempo, o sistema é dissipativo. As trajetórias dos sistemas dissipativos, quando o sistema não diverge, convergem para o atrator, que é um subespaço do espaço fase para qual convergem todos os movimentos relativos a um determinado conjunto de condições iniciais após o desaparecimento da influência da resposta transiente (HOFF, 2014). Em sistemas autônomos contínuos com quatro dimensões, podem-se ter os seguintes tipos de atratores:

- Ponto de equilíbrio estável: é um ponto no espaço de fases cujo comportamento do sistema converge e independe do tempo;
- Atrator periódico ou ciclo limite: é um conjunto de valores para o qual o comportamento do sistema converge, exibindo um comportamento periódico (movimento regular);
- Atrator quase periódico: exhibe um comportamento quase periódico com duas frequências fundamentais independentes. O comportamento quase periódico sugere uma situação dinâmica na qual as órbitas nunca se fecham sobre si mesmas, entretanto, sem apresentar dependência sensível às condições iniciais;
- Atrator caótico: é um atrator que apresenta um comportamento aperiódico, e dependência sensível às condições iniciais, ou seja, a distância entre duas trajetórias cresce exponencialmente, mas o atrator ocupa um volume finito no espaço de fases.

Na engenharia, os modelos matemáticos constituem-se em ferramentas utilizadas para descrever e prever o comportamento de fenômenos físicos regidos pelas leis da natureza. Devido às complexidades envolvidas, na maioria dos casos, não é possível a obtenção de soluções exatas sendo necessário o uso de técnicas de aproximação. Os métodos numéricos são atualmente bastante utilizados para a solução de problemas cada vez mais complexos, devido, em parte, à maior disponibilidade de *softwares* específicos, e de outra, à grande disponibilidade de equipamentos computacionais cada vez mais poderosos e de baixo custo de aquisição e manutenção.

Existe uma variedade de métodos disponível na literatura científica para o cálculo de soluções aproximadas. Os métodos dos Elementos Finitos e os métodos dos Elementos de Contorno estão atualmente em um estágio de desenvolvimento bastante avançado, podendo ser considerados métodos tradicionais para solução de problemas de valor de contorno. O Método dos elementos discretos encontra-se em um estágio de desenvolvimento um pouco anterior. A sua formulação está ainda em franco desenvolvimento.

Pode-se considerar que o trabalho de Hrennikoff¹ (1941, *apud* RIOS, 2002) no qual ele propõe a representação do contínuo mediante os arranjos de bielas de rigidez equivalente, o primeiro passo para o desenvolvimento do método dos elementos discretos. Mais recentemente Absi² (1971, *apud* RIOS, 2002) apresentou a mesma ideia só que realizando aplicações aos estudos de fundações de base elástica e na representação de muros em prédios altos através de arranjos de barras com rigidez equivalente. É necessário mencionar a contribuição significativa que o trabalho de Cundall³ (1977, *apud* RIOS, 2002) trouxe para o desenvolvimento do método, onde o mesmo aplicou seu método para estudos mecânicos geotécnicos com materiais granulares. Esse método baseia-se em realizar a integração explícita das equações de movimento de uma estrutura formada por partículas rígidas com, mas conectadas entre si, mediante molas e amortecedores.

Rios (2002) esclarece que este método pode ser aplicado facilmente na simulação não só de materiais contínuos, como também para representar estruturas descontínuas.

¹ HRENNIKOFF, A. “**Solution problems of elasticity by the framework method**”. Journal of Applied Mechanics, p. 169-175, 1941.

² ABSI, E. “**Théorie des equivalences détermination de quelques éléments types**”. Annales de L’Institut Technique Du Balument et des Travanu Public. No. 281, p. 83-86, 1971.

³ CUNDALL, P. A & STRACK, D. L. “**A discrete numerical model for granular assemblies**”. Geotechnique 29, No.1, p. 47-65, 1977.

A teoria de bifurcação estuda e classifica fenômenos caracterizados por mudanças repentinas no comportamento decorrente de pequenas variações nas condições impostas, analisando como a natureza qualitativa das soluções das equações depende dos parâmetros do sistema. Em um sistema de equações dependente de parâmetros, a estrutura qualitativa do fluxo pode mudar ao variar seus parâmetros. Em particular, pontos de equilíbrio podem ser criados ou destruídos, ou alterar sua estabilidade. Estas mudanças qualitativas na dinâmica são chamadas bifurcações e os valores dos parâmetros no qual elas ocorrem são chamados pontos de bifurcações. Em outras palavras, bifurcação é uma mudança do tipo topológico do sistema quando seus parâmetros passam por um valor crítico. Bifurcações são importantes cientificamente, pois fornecem modelos de transições e instabilidades quando alguns parâmetros são variados ((NAYFEH, BALACHANDRAN 1995; CEDOLIN, BAZANT 2003; HOFF, 2014).

Millon (1991) analisa os três pontos de bifurcações mais comuns, como ilustram as Figuras 2.1, 2.2 e 2.3. Os gráficos representam a variação da carga P , com um deslocamento característico Q , sempre com relação ao caminho fundamental. Os caminhos instáveis são representados pela linha tracejada e os estáveis pelas linhas contínuas. Também é mostrado nas figuras a variação da energia potencial total com relação a Q para diferente valores de P .

Observa-se que o caminho primário, também chamado de fundamental ou pré-crítico, perde sua instabilidade ao interceptar o caminho secundário. (THOMPSON; HUNT, 1984 *apud* MILLON, 1991)⁴.

A seguir são relacionados alguns tipos de modelos que possuem bifurcação simétrica estável destacados por Millon (1991) e ilustrado na Figura 2.1:

- Barra com seção duplamente simétrica comprimida com extremidades fixas (Coluna de Euler);
- Flambagem lateral de elementos curvos;
- Pórticos simétricos e esfera com carga concentrada;
- Anel submetido à pressão radial, hidrostática ou com direção constantes;
- Placa retangular e circular comprimida;

⁴ THOMPSON, J. M. T. e HUNT. G. W. "Elastic Instability Phenomena", John Wiley e Sons, England, 1984.

Figura 2.1- Bifurcação simétrica estável. Fonte: Millon (1991).

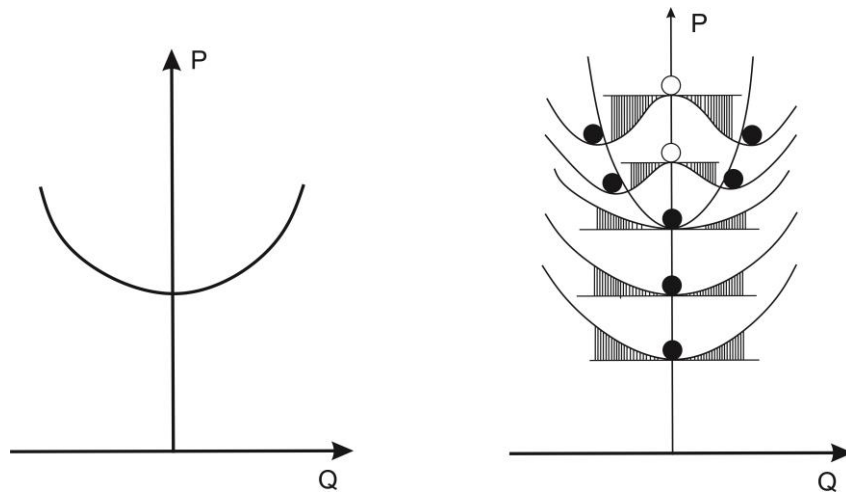
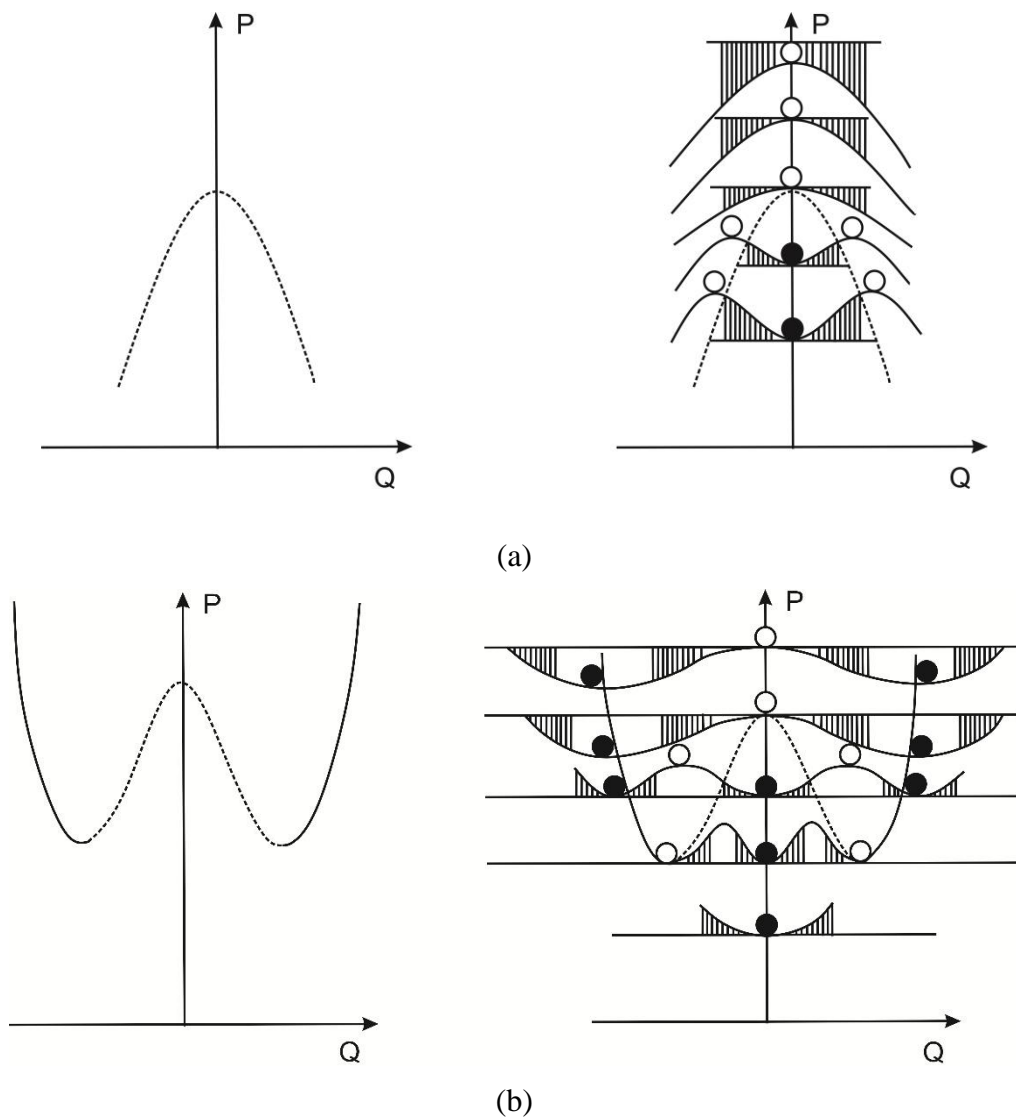


Figura 2.2- Bifurcação (a) Simétrica instável e (b) Butterfly. Fonte: Millon (1991).

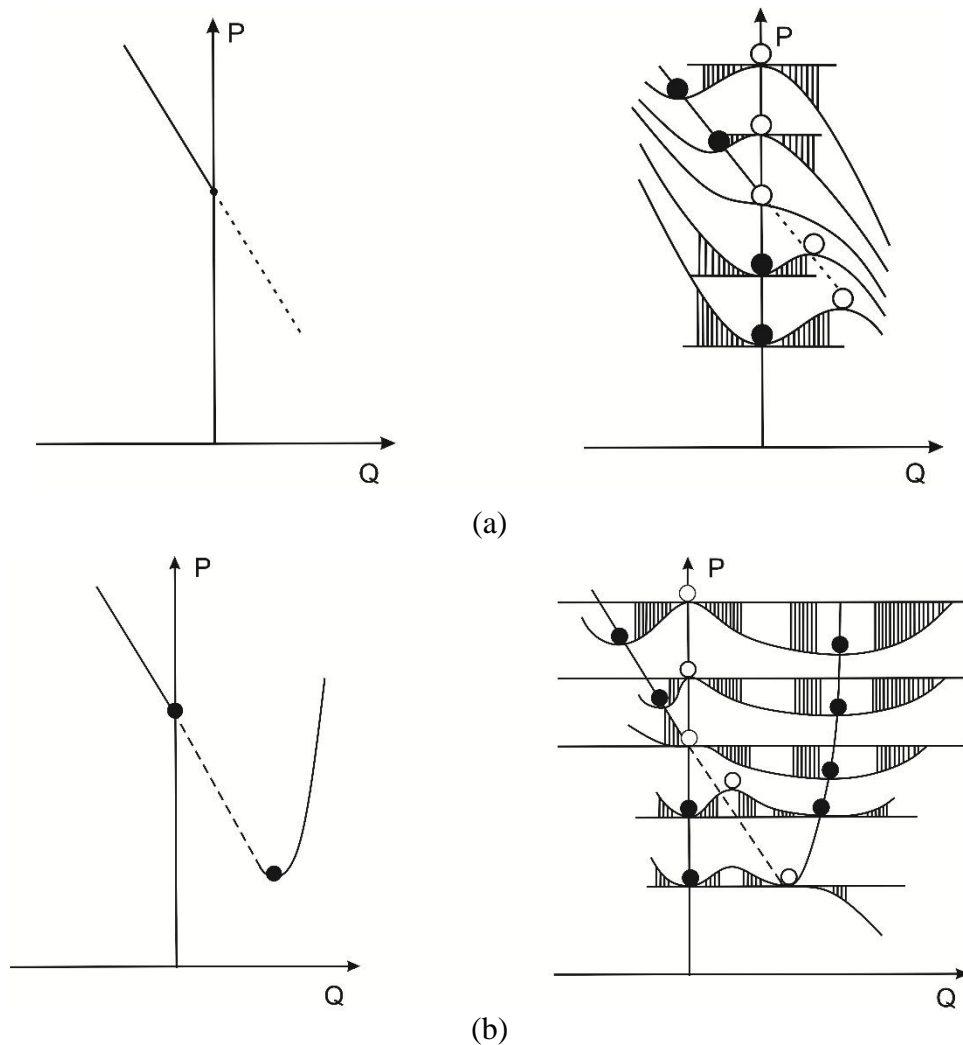


Já os modelos mais comuns que possuem bifurcação simétrica instável, representados na Figura 2.2, segundo Millon (1991), são:

- Barras com extremidades elasticamente fixas;
- Barra e anel em uma superfície elástica;
- Flambagem de um cilindro axialmente carregado;
- Flambagem axial simétrica de uma esfera sob pressão uniforme.

Normalmente, para estruturas reais que apresentam comportamento pós-crítico inicialmente estável, observa-se após uma perda inicial de rigidez, um ganho real de rigidez em virtude da influência benéfica dos termos não lineares de ordem mais alta. Assim a Figura 2.2 (b) melhor representa o caso de bifurcação simétrica instável que a Figura 2.2 (a). (MILLON, 1991).

Figura 2.3- Bifurcação (a) Assimétrica e (b) *Swallowtail*. Fonte: Millon (1991).



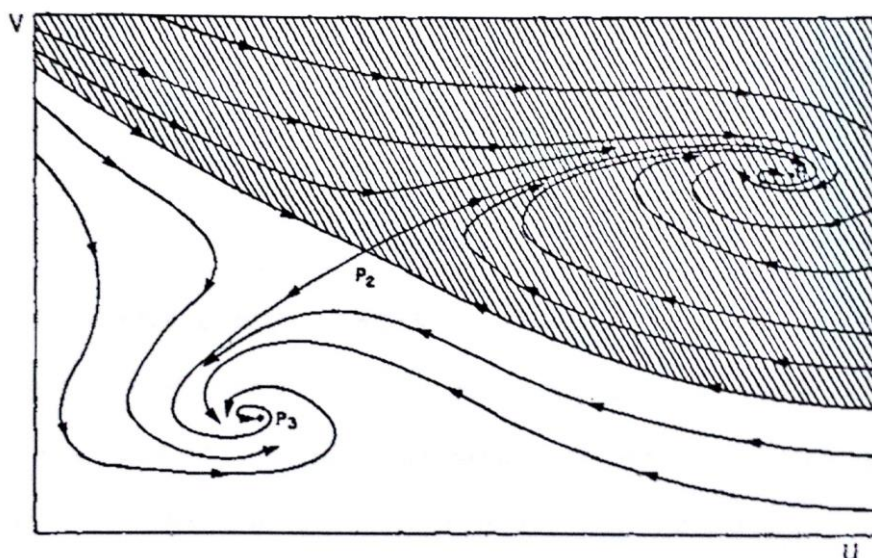
Assim como na bifurcação instável, na bifurcação assimétrica em geral, observa-se também um ganho de rigidez após uma perda inicial, como mostra a Figura 2.3. A seguir são relacionados alguns modelos que possuem essa configuração:

- Barra comprimida com seção assimétrica e extremidades fixas;
- Arco tri-rotulado;
- Pórtico assimétrico;
- Treliça;
- Estruturas espaciais reticuladas;
- Calota esférica.

O comportamento dinâmico usualmente é analisado através da equação de movimento linearizada, o que permite conhecer o comportamento da estrutura apenas na vizinhança da origem.

O comportamento do sistema pode também ser avaliado em função das condições iniciais das variáveis envolvidas. Uma outra característica dos sistemas não lineares é a coexistência de atratores, ou seja, para um mesmo parâmetro do sistema, mas para duas condições iniciais diferentes o sistema pode desenvolver dois comportamentos dinâmicos distintos. O conjunto de condições iniciais que geram um determinado comportamento dinâmico, ou atrator do sistema, é chamado de bacia de atração. (MILLON, 1991).

Figura 2.4 – Bacia de atração. Fonte: Millon (1991).



Para questão de entendimento observa-se a Figura 2.4 onde P1 e P3 são focos estáveis e P2 é um ponto de sela. As condições iniciais dentro da região hachurada, se dirigem para o foco estável P1 e as pertencentes a região não hachurada, se dirigem para o foco estável P3. Assim, toda a região hachurada corresponde a bacia de atração do foco P1 e a não hachurada, a do foco P3 (MILLON, 1991).

Para pequenas perturbações pode se determinar com relativa facilidade a questão da estabilidade no caso linear. Mas no âmbito geral, se determinar a estabilidade e determinar os efeitos nas mudanças das condições iniciais, tem que se usar o plano fase como descrito acima ou formular formas de integrais de movimento, níveis de energia ou funções de Lyapunov. O plano fase é mais usando para modelos governados por duas equações diferenciais de primeira ordem (MILLON, 1991).

Entretanto para sistemas com vários graus de liberdade a projeção do espaço fase em um dado plano, ou o estudo do comportamento de pontos característicos do sistema se apresenta como ferramentas confiáveis na análise das bacias de atração. (DOWELL⁵, 1982 *apud* MILLON, 1991).

No desenvolvimento desta dissertação será utilizado o método de polinômio de caos que é aplicado aos problemas não-determinísticos, ou seja, em que pelo menos algum dos parâmetros do problema possui alguma incerteza. Por existir aleatoriedade nos parâmetros do problema, sua solução também será aleatória, tornando-se necessário adaptar as técnicas numéricas padrão, que resolvem os problemas determinísticos, para resolver agora os problemas estocásticos. O método do polinômio de caos oferece essa adaptação das técnicas numéricas de modo a propagar as incertezas nos parâmetros do problema, e quantificar as mesmas, na solução do sistema. A escolha desse método se deve ao fato de as características estatísticas da resposta aleatória, como média e variância, serem determinadas sem a necessidade de se realizar um conjunto de amostragem. O método consiste em transformar uma equação estocástica em um sistema de equações determinísticas. (XIU; KARNIADAKIS, 2002; SILVA JÚNIOR, 2004; SILVA JR.; BECK, 2011).

Primeiramente, o polinômio de caos surgiu com Wiener (1938), que define o ‘caos homogêneo’ como sendo um espaço de funções polinomiais de Hermite para variáveis

⁵ DOWEEL, E. H; “Flutter of Buckled Plate as Example of Chaotic Motion of Deterministic Autonomous System”, Journal of Applied Mechanics, 53(1), p. 5-9, 1986.

aleatórias com distribuição de probabilidade Gaussiana. Quando se tratava de outras funções de distribuição de probabilidade da variável aleatória, a convergência da solução era substancialmente menor. Observou-se então que a função peso dos polinômios de Hermite é igual à função de densidade de probabilidade das variáveis Gaussianas aleatórias e, por isso, se obtinha excelente convergência.

Ao observarem isso, Xiu e Karniadakis (2002) propuseram, então, um novo método para resolver as equações diferenciais estocásticas baseadas nas projeções de Galerkin, estendendo os conceitos do polinômio de caos de Wiener. Os autores representam os processos estocásticos com uma base experimental ideal da família de polinômios ortogonais de Askey que reduz a dimensão do sistema e lida com a convergência exponencial do erro. Esse novo método é chamado de polinômio de caos de Wiener-Askey ou expansão do polinômio de caos generalizado. Através de vários exemplos os autores mostram que diversos processos contínuos e discretos são resolvidos com maior rapidez quando comparado com as simulações de Monte Carlo para problemas estocásticos de baixa dimensão.

Recentemente, é possível encontrar diversas pesquisas que versam sobre o método do polinômio de caos generalizado, sendo esse método uma técnica de não amostragem que representa as incertezas como uma expansão que inclui a decomposição de coeficientes determinísticos em bases ortogonais aleatórias. Além disso, a expansão do polinômio de caos generalizado utiliza mais polinômios ortogonais como expansões da base em vários espaços aleatórios que não são, necessariamente, Gaussianos, como ocorrem no método do polinômio de caos clássico.

Em artigo recente Silva e Gonçalves (2011) investigam a influência das incertezas dos sistemas reais e ruído com carga dinâmica da integridade e estabilidade das suas soluções em um ambiente dinâmico. Para ilustrar a sensibilidade do sistema, um modelo arquetípico de sistemas susceptíveis a flambagem instável é usado. É dada especial atenção à influência de incertezas e ruído aleatório sobre as bacias de atração do sistema e, conseqüentemente, as medidas de integridade do sistema forçada e não forçada. O critério dos polinômios de caos é discutido como possível ferramenta para obter limites inferiores de confiança para o projeto

Seguindo a mesma linha de pesquisa Silva, Brazão e Gonçalves (2015) investigam a influência de incertezas nos parâmetros físicos e geométricos para a determinação da carga de instabilidade paramétrica da casca cilíndrica, utilizando o método de Galerkin Estocástico

juntamente com o polinômio de Hermite-Caos. A incerteza é considerada inicialmente em apenas um de seus parâmetros: no módulo de elasticidade, na espessura e na amplitude da imperfeição geométrica inicial. Em seguida é analisado a influência de aleatoriedades em dois parâmetros simultaneamente, sendo eles: a espessura e o módulo de elasticidade. A partir da análise dinâmica não linear estocástica obtêm-se resultados como resposta no tempo, diagramas de bifurcação e fronteiras de instabilidade que são comparados com análises determinísticas, indicando que o polinômio de Hermite-Caos é uma boa ferramenta numérica para prever a carga de instabilidade paramétrica sem a necessidade de se realizar um processo de amostragens.

CAPÍTULO 3

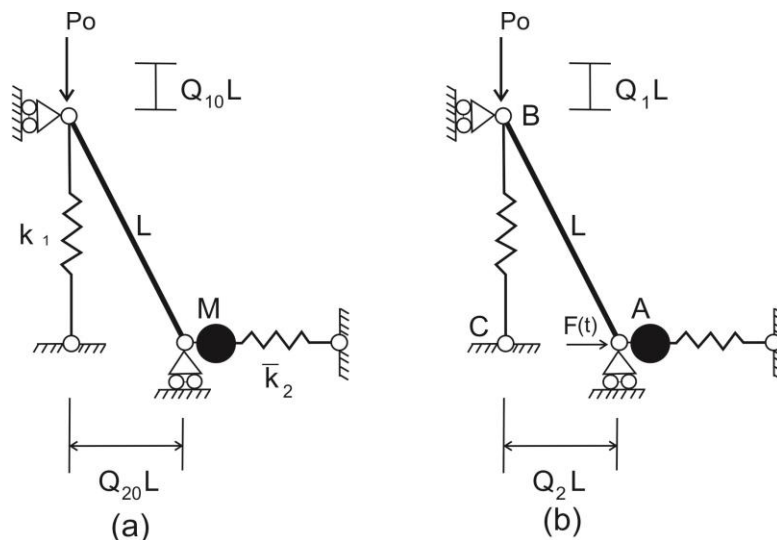
FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Este capítulo apresenta a formulação matemática do problema estudado nesta dissertação. Esse estudo é inspirado no trabalho de Millon (1991) que estudou um modelo de um grau de liberdade, que será o mesmo modelo usado neste trabalho, e é uma adaptação de um modelo barra rígida-mola já utilizado anteriormente no estudo da estabilidade elástica de sistemas estáticos. Acrescenta-se, a este sistema de um grau de liberdade, as considerações sobre a variabilidade dos parâmetros que definem o problema que serão consideradas sob uma abordagem não-determinística das equações diferencial de equilíbrio do problema.

3.1 MODELO DISCRETO

O modelo representado na Figura 3.1 consiste numa barra rígida de peso desprezível, comprimento L , presa por duas molas: uma mola vertical de rigidez linear k_1 e uma mola de rigidez \bar{k}_2 , que pode ser linear se η for igual a zero e não linear caso η seja igual a um conforme a equação (3.1), e uma massa concentrada M fixa no ponto A. Modelos semelhantes a esse têm sido frequentemente usados para representar e estudar de maneira simplificada o comportamento de elementos estruturais tais como colunas, arcos, cascas e placas.

Figura 3.1 – Sistema massa-mola-barra rígida com um grau de liberdade. Fonte: Millon (1991).



A rigidez \bar{k}_2 da mola não linear é representada pela seguinte equação:

$$\bar{k}_2 = k_2 \left[1 + \eta \left(\alpha Q_{20} + \beta Q_{20}^2 + \gamma Q_{20}^3 + \delta Q_{20}^4 \right) \right] \quad (3.1)$$

onde Q_{20} é o deslocamento associado à mola não linear \bar{k}_2 e α , β , γ e δ são parâmetros que inserem não linearidades geométricas no sistema criando diferentes mecanismos de bifurcação dependendo da potência dos deslocamentos Q_{20} . Esta equação será utilizada para exemplificar os vários tipos de comportamento pós-crítico que podem ocorrer em vários sistemas estruturais sujeitos a flambagem.

3.2 ANÁLISE DA ESTABILIDADE ESTÁTICA

Inicialmente será considerado que o sistema esteja submetido a uma carga estática de compressão P_0 dado pela Figura 3.1 (a). O deslocamento vertical do sistema é denominado LQ_{10} e o seno do ângulo formado entre a barra rígida e a mola k_1 é Q_{20} . A geometria do modelo pode ser totalmente descrita em termos de um único parâmetro a partir das relações:

$$Q_{20} = \sqrt{2Q_{10} - Q_{10}^2} \quad (3.2)$$

$$Q_{10} = 1 - \sqrt{1 - Q_{20}^2} \quad (3.3)$$

Será usado, para simplificação de cálculo, o parâmetro adimensional Q_{20} . Assim sendo, os deslocamentos relativos a cada mola são:

- Mola 1

$$\Delta v_0 = Q_{10} L = L \left(1 - \sqrt{1 - Q_{20}^2} \right) \quad (3.4)$$

- Mola 2

$$\Delta h_0 = Q_{20} L \quad (3.5)$$

A equação da energia interna de deformação deste modelo é dada por:

$$U_0 = L^2 \int_0^{Q_{20}} \bar{k}_2 Q_{20} dQ_{20} + \frac{1}{2} k_1 Q_{10}^2 L^2 \quad (3.6)$$

Resolvendo a integral da equação (3.6), a partir da substituição da equação (3.1) na equação (3.6), tem-se que:

$$U_0 = \frac{k_2}{2} \left[1 + \eta \left(\frac{2}{3} \alpha Q_{20} + \frac{2}{4} \beta Q_{20}^2 + \frac{2}{5} \gamma Q_{20}^3 + \frac{2}{6} \delta Q_{20}^4 \right) \right] Q_{20}^2 L^2 + \frac{k_1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - Q_{20}^2} \right)^2 L^2 \quad (3.7)$$

Já o trabalho das forças externas é calculado a partir da equação:

$$We_0 = P_0 \cdot \Delta v_0 = P_0 L \left(1 - \sqrt{1 - Q_{20}^2} \right) \quad (3.8)$$

Portanto, a energia potencial total do sistema é dada por:

$$\Pi_0 = U_0 - We_0 = \frac{1}{2} k_1 \left(1 - \sqrt{1 - Q_{20}^2} \right)^2 L^2 - P_0 L \left(1 - \sqrt{1 - Q_{20}^2} \right) + \frac{1}{2} k_2 \left[1 + \eta \left(\frac{2}{3} \alpha Q_{20} + \frac{2}{4} \beta Q_{20}^2 + \frac{2}{5} \gamma Q_{20}^3 + \frac{2}{6} \delta Q_{20}^4 \right) \right] Q_{20}^2 L^2 \quad (3.9)$$

Dividindo-se todos os termos da equação (3.9) por $L^2 k_2$ e empregando o princípio da energia potencial estacionária, obtém-se:

$$\frac{d\Pi_0}{dQ_{20}} = Q_{20} \left(\lambda \left(\frac{1}{\sqrt{1 - Q_{20}^2}} - 1 \right) + \left[1 + \eta \left(\alpha Q_{20} + \beta Q_{20}^2 + \gamma Q_{20}^3 + \delta Q_{20}^4 \right) \right] - \frac{\bar{P}_0}{\sqrt{1 - Q_{20}^2}} \right) = 0 \quad (3.10)$$

onde $\bar{P}_0 = \frac{P_0}{L k_2}$ e $\lambda = \frac{k_1}{k_2}$ são os parâmetros adimensionais do carregamento vertical e da rigidez entre as molas, respectivamente.

A equação (3.10) possui duas soluções diferentes, a saber: para Q_{20} igual à zero tem-se o caminho fundamental de equilíbrio e para Q_{20} diferente de zero tem-se que:

$$\bar{P}_0 = \sqrt{1 - Q_{20}^2} \left(\lambda \left(\frac{1}{\sqrt{1 - Q_{20}^2}} - 1 \right) + \left[1 + \eta \left(\alpha Q_{20} + \beta Q_{20}^2 + \gamma Q_{20}^3 + \delta Q_{20}^4 \right) \right] \right) \quad (3.11)$$

A expressão (3.11) rege o caminho pós-crítico do modelo discreto apresentado. Para se estudar como se comporta o sistema quanto a sua estabilidade estática é necessário obter a segunda variação da energia potencial total:

$$\frac{d^2 \Pi_0}{d Q_{20}^2} = \left[1 + \eta \left(2\alpha Q_{20} + 3\beta Q_{20}^2 + 4\gamma Q_{20}^3 + 5\delta Q_{20}^4 \right) \right] - \frac{\bar{P}_0}{\sqrt{(1-Q_{20}^2)^3}} + \lambda \left(\frac{1}{\sqrt{(1-Q_{20}^2)^3}} - 1 \right) \quad (3.12)$$

Para a configuração fundamental de equilíbrio, ou seja, Q_{20} igual à zero, tem-se que:

$$\frac{d^2 \Pi_0}{d Q_{20}^2} = 1 - \bar{P}_0 \quad (3.13)$$

Para a configuração pós-crítica, ou seja, Q_{20} diferente de zero, tem-se, após a substituição da equação (3.11) na equação (3.12), que:

$$\frac{d^2 \Pi_0}{d Q_{20}^2} = \frac{(\lambda - 1) Q_{20}^2}{(1 - Q_{20}^2)} + \eta \frac{Q_{20}}{(1 - Q_{20}^2)} \left(\alpha + 2\beta Q_{20} + (3\gamma - 2\alpha) Q_{20}^2 + (4\delta - 3\beta) Q_{20}^3 - 4\gamma Q_{20}^4 - 5\delta Q_{20}^5 \right) \quad (3.14)$$

3.3 ANÁLISE DA ESTABILIDADE DINÂMICA

A análise agora será feita para o caso dinâmico considerando o efeito conjunto da carga P_0 e de uma carga dinâmica $F(t)$ aplicada no ponto A da Figura 3.1 (b). A soma das parcelas de deslocamentos estático e dinâmico está diretamente relacionada com o valor do seno do ângulo formado entre a barra rígida e a mola k_I , sendo assim, as equações (3.2) e (3.3) podem ser reescritas como:

$$Q_{1r} = Q_{10} + Q_1(t) \quad (3.15)$$

$$Q_{2r} = Q_{20} + Q_2(t) \quad (3.16)$$

Sendo Q_{10} e $Q_1(t)$ o deslocamento devido carga estática e a excitação, ou perturbação dinâmica, respectivamente. Para efeito de facilidade toma-se $Q_1(t) = Q_1$ e $Q_2(t) = Q_2$.

Neste caso os deslocamentos referentes as molas 1 e 2 são, respectivamente, dados por:

$$\Delta v_t = L \left(1 - \sqrt{1 - Q_{2t}^2} \right) \quad (3.17)$$

$$\Delta h_t = Q_{2t} L \quad (3.18)$$

3.3.1 Lagrangeano

A variação da energia interna de deformação deste modelo é dada pelas seguintes expressões:

- Mola 1

$$\Delta U_a = U_a(Q_{2t}) - U_a(Q_{20}) = \frac{1}{2} k_1 \left[\left(1 - \sqrt{1 - Q_{2t}^2} \right)^2 - \left(1 - \sqrt{1 - Q_{20}^2} \right)^2 \right] L^2 \quad (3.19)$$

- Mola 2

$$\begin{aligned} \Delta U_b = U_b(Q_{2t}) - U_b(Q_{20}) = & \frac{1}{2} k_2 L^2 \left[1 + \eta \left(\frac{2}{3} \alpha Q_{2t} + \frac{2}{4} \beta Q_{2t}^2 + \frac{2}{5} \gamma Q_{2t}^3 \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2}{6} \delta Q_{2t}^4 \right) \right] Q_{2t}^2 - \frac{1}{2} k_2 L^2 \left[1 + \eta \left(\frac{2}{3} \alpha Q_{20} + \frac{2}{4} \beta Q_{20}^2 + \frac{2}{5} \gamma Q_{20}^3 + \frac{2}{6} \delta Q_{20}^4 \right) \right] Q_{20}^2 \end{aligned} \quad (3.20)$$

A expressão da variação do trabalho das forças externas pode ser escrita como:

$$\Delta W_e = P_0 L \left(1 - \sqrt{1 - Q_{2t}^2} \right) - P_0 L \left(1 - \sqrt{1 - Q_{20}^2} \right) + F(t) Q_2 L \quad (3.21)$$

Sendo assim, pode-se obter a expressão da variação da energia potencial total como sendo:

$$\begin{aligned} \Delta \Pi = \Delta U - \Delta W_e = & \frac{1}{2} k_1 L^2 \left[\left(1 - \sqrt{1 - Q_{2t}^2} \right)^2 - \left(1 - \sqrt{1 - Q_{20}^2} \right)^2 \right] \\ & + \frac{1}{2} k_2 L^2 \left[1 + \eta \left(\frac{2}{3} \alpha Q_{2t} + \frac{2}{4} \beta Q_{2t}^2 + \frac{2}{5} \gamma Q_{2t}^3 + \frac{2}{6} \delta Q_{2t}^4 \right) \right] Q_{2t}^2 \\ & - \frac{1}{2} k_2 L^2 \left[1 + \eta \left(\frac{2}{3} \alpha Q_{20} + \frac{2}{4} \beta Q_{20}^2 + \frac{2}{5} \gamma Q_{20}^3 + \frac{2}{6} \delta Q_{20}^4 \right) \right] Q_{20}^2 \\ & - P_0 L \left(1 - \sqrt{1 - Q_{2t}^2} \right) + P_0 L \left(1 - \sqrt{1 - Q_{20}^2} \right) - F(t) Q_2 L \end{aligned} \quad (3.22)$$

A variação da energia cinética é obtida por:

$$\Delta T = \frac{1}{2} M v^2 L \quad (3.23)$$

onde:

$$v = \frac{d\Delta h_t}{dQ_{2t}} \frac{dQ_{2t}}{dt} \quad (3.24)$$

Substituindo-se a equação (3.18) na equação (3.24), considerando que $(\dot{}) = d/dt$ e realizando as derivações e tem-se que:

$$\Delta T = \frac{1}{2} M \left(\dot{Q}_2 L \right)^2 \quad (3.25)$$

A partir das equações (3.22) e (3.25) obtêm-se a função de Lagrange, ΔL , que é dada por:

$$\begin{aligned} \Delta L = \Delta T - \Delta \Pi = & \frac{1}{2} M \left(\dot{Q}_2 L \right)^2 - \frac{1}{2} k_1 L^2 \left[\left(1 - \sqrt{1 - Q_{2t}^2} \right)^2 - \left(1 - \sqrt{1 - Q_{20}^2} \right)^2 \right] \\ & - \frac{1}{2} k_2 L^2 \left[1 + \eta \left(\frac{2}{3} \alpha Q_{2t} + \frac{2}{4} \beta Q_{2t}^2 + \frac{2}{5} \gamma Q_{2t}^3 + \frac{2}{6} \delta Q_{2t}^4 \right) \right] Q_{2t}^2 \\ & + \frac{1}{2} k_2 L^2 \left[1 + \eta \left(\frac{2}{3} \alpha Q_{20} + \frac{2}{4} \beta Q_{20}^2 + \frac{2}{5} \gamma Q_{20}^3 + \frac{2}{6} \delta Q_{20}^4 \right) \right] Q_{20}^2 \\ & + P_0 L \left(1 - \sqrt{1 - Q_{2t}^2} \right) - P_0 L \left(1 - \sqrt{1 - Q_{20}^2} \right) + F(t) Q_2 L \end{aligned} \quad (3.26)$$

3.3.2 Equação de Movimento

Ao acrescentar um incremento infinitesimal δQ_2 em Q_2 , o trabalho da força de amortecimento, considerando-se um amortecimento viscoso e linear, é dada por $-c\dot{Q}_2 L \delta Q_2$. Assim sendo, a equação de Lagrange, para um sistema não conservativo é dada por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Delta L}{\partial \dot{Q}_2} \right) - \frac{\partial \Delta L}{\partial Q_2} = -c \dot{Q}_2 L \quad (3.27)$$

Resolvendo os termos da equação (3.27), substituindo para isto a equação (3.26), chega-se a:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Delta L}{\partial \dot{Q}_2} \right) = M \ddot{Q}_2 L^2 \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial \Delta L}{\partial Q_2} = k_1 L^2 \left(Q_{2t} - \frac{Q_{2t}}{\sqrt{1-Q_{2t}^2}} \right) + \frac{P_0 L Q_{2t}}{\sqrt{1-Q_{2t}^2}} + F(t) L + k_2 L^2 \left[-Q_{2t} - \eta(\alpha Q_{2t}^2 + \beta Q_{2t}^3 + \gamma Q_{2t}^4 + \delta Q_{2t}^5) \right] \quad (3.29)$$

Reescrevendo a equação (3.27), utilizando as equações (3.28) e (3.29), obtém-se:

$$M \ddot{Q}_2 L^2 - k_1 L^2 \left(Q_{2t} - \frac{Q_{2t}}{\sqrt{1-Q_{2t}^2}} \right) - \frac{P_0 L Q_{2t}}{\sqrt{1-Q_{2t}^2}} - F(t) L - k_2 L^2 \left(-Q_{2t} - \eta(\alpha Q_{2t}^2 + \beta Q_{2t}^3 + \gamma Q_{2t}^4 + \delta Q_{2t}^5) \right) = -c \dot{Q}_2 L \quad (3.30)$$

Atribuindo as seguintes variáveis auxiliares e adimensionais:

$$\Omega_n^2 = \frac{k_2}{M}; \quad \lambda \Omega_n^2 = \frac{k_1}{k_2}; \quad 2\xi \Omega_n = \frac{c}{LM}; \quad \overline{P_0} \Omega_n^2 = \frac{P_0}{LM}; \quad f(t) \Omega_n^2 = \frac{F(t)}{LM} + \frac{F_0}{LM} \quad (3.31)$$

dividindo-se todos os termos da expressão (3.30) por $M L^2$ e substituindo-se os parâmetros adimensionais da equação (3.31) obtém-se a seguinte equação:

$$\ddot{Q}_2 + 2\xi \Omega_n \dot{Q}_2 + \Omega_n^2 \left[\lambda - \overline{P_0} \right] \left(\frac{Q_{2t}}{\sqrt{1-Q_{2t}^2}} \right) + \Omega_n^2 [1 - \lambda] Q_{2t} + \eta \Omega_n^2 (\alpha Q_{2t}^2 + \beta Q_{2t}^3 + \gamma Q_{2t}^4 + \delta Q_{2t}^5) = f(t) \Omega_n^2 \quad (3.32)$$

Escrevendo a equação anterior em termos de um tempo τ adimensional, sendo $t = \frac{\tau}{\Omega_n}$, tem-se

que:

$$\frac{d^2 Q_2}{d\tau^2} + 2\xi \frac{dQ_2}{d\tau} + \left[\lambda - \overline{P_0} \right] \left(\frac{Q_{2t}}{\sqrt{1-Q_{2t}^2}} \right) + [1 - \lambda] Q_{2t} + \eta (\alpha Q_{2t}^2 + \beta Q_{2t}^3 + \gamma Q_{2t}^4 + \delta Q_{2t}^5) = f(\tau) \quad (3.33)$$

lembrando a relação onde $Q_{2t} = Q_{20} + Q_2$, equação (3.16), e que Q_{20} é obtido através da equação (3.11).

Considerando que o sistema ocupa inicialmente a configuração de equilíbrio, tem-se que Q_{20} é igual à zero, sendo assim a equação (3.33) é reescrita da seguinte maneira:

$$\frac{d^2 Q_2}{d\tau^2} + 2\xi \frac{dQ_2}{d\tau} + [\lambda - \bar{P}_0] \left(\frac{Q_2}{\sqrt{1-Q_2^2}} \right) + [1-\lambda]Q_2 + \eta(\alpha Q_2^2 + \beta Q_2^3 + \gamma Q_2^4 + \delta Q_2^5) = f(\tau) \quad (3.34)$$

3.3.3 Aplicação do polinômio de caos

A não linearidade presente em diversos sistemas mecânicos permite o surgimento de um complexo cenário de vibrações periódicas, quase-periódicas e caóticas. Segundo Millon (1991), a não linearidade aparecem em virtude de elementos elásticos ou molas não lineares, amortecimento não linear como o atrito, “anteparos” que impeçam a execução do movimento completo, molas bilineares, forças relacionadas a fluídos e condições de contorno não lineares.

Neste trabalho, a não linearidade ocorre devido a presença da mola não linear \bar{k}_2 , equação (3.1), permitindo a avaliação da influência das incertezas dos parâmetros geométricos, representados na equação (3.1) por: α , β , δ e γ , nas vibrações não lineares e na estabilidade do modelo apresentado na Figura 3.1.

Para representar essa aleatoriedade nos parâmetros da mola \bar{k}_2 deve-se simular diversas amostras a partir de uma análise determinística. Para cada amostra simulada, seriam necessárias diversas análises no domínio do tempo para que no final seja possível determinar as características estatísticas a partir das respostas obtidas, como a média e variância. Essa abordagem numérica demanda muito tempo, tornando-se inviável computacionalmente, pois a qualidade das medidas estatísticas dependem da quantidade de amostras analisadas. Sendo assim, torna-se necessário o emprego de métodos que não trabalhem com a geração de amostras como, por exemplo, o método do polinômio de caos que é capaz de fornecer as informações estatísticas, como média e variância, sem gerar um processo de amostragem reduzindo assim o tempo de processamento numérico do problema.

Nesse trabalho as incertezas serão consideradas com uma função de distribuição de probabilidade uniforme, dessa forma, o polinômio de Legendre-Caos é indicado na solução dos problemas estocásticos via polinômio de caos (XIU, KARNIADAKIS, 2002).

Os polinômios de caos generalizados, segundo Xiu e Karniadakis (2002) aproximam um processo estocástico através de polinômios ortogonais de variáveis aleatórias, sendo representados por processos estocásticos de segunda ordem $X(t, x; \phi)$:

$$\begin{aligned}
 X(t, x; \phi) = & a_0(x, t) \mathcal{G}_0 + \sum_{i_1=1}^{\infty} a_{i_1}(x, t) \mathcal{G}_1(\xi_{i_1}(\phi)) + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} a_{i_1 i_2}(x, t) \mathcal{G}_2(\xi_{i_1}(\phi), \xi_{i_2}(\phi)) \\
 & + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} a_{i_1 i_2 i_3}(x, t) \mathcal{G}_3(\xi_{i_1}(\phi), \xi_{i_2}(\phi), \xi_{i_3}(\phi)) + \dots,
 \end{aligned}
 \tag{3.35}$$

onde ϕ é um evento randômico, t é o tempo, x é o espaço e $\mathcal{G}_n(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_n})$ denota o polinômio de caos generalizado de grau n nas variáveis $(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_n})$. Tais polinômios são ortogonais em termos da variável aleatória multidimensional $\xi = (\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_n})$, com $\mathcal{G}_0 = 1$. Por conveniência, reescreve-se a equação (3.35) da seguinte forma:

$$X(t, x; \phi) = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{a}_i(x, t) \Phi_i(\xi)
 \tag{3.36}$$

onde existe uma correspondência 1:1 entre as funções $\mathcal{G}_n(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_n})$ e $\Phi_i(\xi)$ bem como entre seus respectivos coeficientes $a_{i_1 i_2 i_3}$ e \hat{a}_i . Os polinômios ortogonais satisfazem a seguinte relação de ortogonalidade:

$$\langle \Phi_i \Phi_j \rangle = \langle \Phi_i^2 \rangle \delta_{ij}
 \tag{3.37}$$

onde δ_{ij} é a função delta de Kronecker e $\langle \Phi_i^2 \rangle$ é o produto interno entre as funções. Por definição, o produto interno entre polinômios ortogonais, para um caso contínuo, é dado por:

$$\langle f(\xi), g(\xi) \rangle = \int f(\xi) g(\xi) w(\xi) d(\xi)
 \tag{3.38}$$

onde $w(\xi)$ denota a função densidade de probabilidade e o intervalo de integração é o domínio onde a variável aleatória é definida.

O polinômio ortogonal é escolhido de acordo com a função densidade de probabilidade da variável aleatória em análise. Junto a isso, também é escolhida a função de ponderação, que é empregada na relação de ortogonalidade. A equivalência entre polinômios e variáveis aleatórias é obtida na Tabela 3.1

Tabela 3.1 – Correspondência de polinômios ortogonais e funções densidade de probabilidade de diferentes variáveis aleatórias ($N \geq 0$ inteiro finito). Fonte: Xiu e Karniadakis (2002).

Tipo de Processo	Variáveis Aleatórias	Função densidade $w(\xi)$	Polinômio de Ortogonais	Limites
Contínuo	Gaussiana	$\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$	Hermite	$(-\infty, \infty)$
	Gamma	$\frac{e^{-x}x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$	Laguerre	$(0, \infty)$
	Beta	$\frac{(1-x)^\alpha(1+x)^\beta}{2^{\alpha+\beta+1}\beta(\alpha+1, \beta+1)}$	Jacobi	$[-1, 1]$
	Uniforme	$\frac{1}{2}$	Legendre	$[-1, 1]$
Discreto	Poisson	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$	Charlier	$\{0, 1, 2, \dots\}$
	Binomial	$\binom{N}{x}p^x(1-p)^{N-x}$	Krawtchouk	$\{0, 1, \dots, N\}$
	Binomial Negativa	$\frac{(\beta)_x c^x(1-c)^\beta}{x!}$	Meixner	$\{0, 1, 2, \dots\}$
	Hipergeométrica	$\frac{\binom{\alpha}{x}\binom{\beta}{N-x}}{\binom{\alpha+\beta}{N}}$	Hahn	$\{0, 1, \dots, N\}$

Em termos práticos, a equação (3.36) divide o campo estocástico $X(t, x; \phi)$ em uma parte determinística, que é a parcela $\hat{a}_i(x, t)$ e uma parte estocástica dado pelo polinômio caos $\Phi_i(\xi)$. As equações (3.35) e (3.36) são truncadas em um número finito de termos, P , onde a variável aleatória ξ é um vetor aleatório n – dimensional.

$$X(t, x; \phi) = \sum_{i=0}^P \hat{a}_i(x, t) \Phi_i(\xi) \tag{3.39}$$

O número total de termos de uma expansão de polinômios caos é $P+1$, obtido pela dimensionalidade da variável aleatória ξ (n) e pela ordem da expansão polinomial desejada.

Neste trabalho será usado o polinômio de Legendre-Caos, para o caso contínuo, com as variáveis aleatórias do tipo uniforme, num intervalo $a \leq x \leq b$ específico, que será definido através da variável onde se deseja avaliar a incerteza. Os polinômios de Legendre-Caos, denotados por $\{Le_n(x)\}, n = 0, 1, 2, \dots$, para um domínio $[a, b]$ possuem a função densidade de probabilidade igual a:

$$w(\xi) = \frac{1}{b-a} \quad (3.40)$$

A seguir, estão representados os setes primeiros polinômios de Legendre-Caos definido no intervalo de $[a, b] = [-1, 1]$:

$$\begin{aligned} Le_0 &= 1 \\ Le_1 &= x \\ Le_2 &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ Le_3 &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\ Le_4 &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\ Le_5 &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \\ Le_6 &= \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5) \end{aligned} \quad (3.41)$$

Para se adequar a distribuição da variável aleatória ϕ de função densidade de probabilidade uniforme para um intervalo $[a, b]$ qualquer diferente de $[-1, 1]$, é preciso adotar a seguinte mudança de variável nos polinômios de Legendre-Caos, a saber:

$$x = \frac{2\phi - (a+b)}{b-a} \quad (3.42)$$

onde ϕ é a variável aleatória; a e b são respectivamente o valor mínimo e máximo do domínio da variável aleatória.

Adotando na equação (3.34) que:

$$f(\tau) = \Gamma_1 \cos(\Omega \cdot \tau) \quad (3.43)$$

onde Γ_1 é a amplitude da carga de excitação e Ω o parâmetro de frequência de excitação.

Sendo assim, substituindo-se a equação (3.43) na equação (3.34) tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Q_2}{d\tau^2} + 2\xi \frac{dQ_2}{d\tau} + [\lambda - \bar{P}_0] \left(\frac{Q_2}{\sqrt{1-Q_2^2}} \right) + [1-\lambda]Q_2 \\ + \eta (\alpha Q_2^2 + \beta Q_2^3 + \gamma Q_2^4 + \delta Q_2^5) - \Gamma_1 \cdot \cos(\Omega \cdot \tau) = 0 \end{aligned} \quad (3.44)$$

As equações diferenciais ordinárias estocásticas (EDOE) são obtidas substituindo-se a incerteza ϕ no parâmetro desejado da equação (3.44). Neste trabalho serão avaliados os parâmetros β, δ, γ e α . Após a obtenção da EDOE, aplica-se o método do polinômio de caos para obter-se as equações determinísticas equivalentes que consideram as incertezas do parâmetro no problema, a partir da equação (3.38), permitindo a obtenção de informações estatísticas do problema como média e variância. Na equação (3.38) $f(\xi)$ é a EDOE dada pela equação (3.44), $g(\xi)$ são as funções peso, dados pelos polinômio de Legendre-Caos da equação (3.41) e $w(\xi)$ a função de distribuição de probabilidade uniforme, equação (3.40). A quantidade de equações obtidas será igual ao número de polinômios de Legendre-Caos usados para a formulação. Segundo Xiu e Karniadakis (2002), o valor que acompanha o polinômio de primeira ordem corresponde à média, e os valores que acompanha os demais polinômios correspondentes à variância. A partir das definições dos momentos estatísticos, obtidas no trabalho de Xiu e Karniadakis (2002), sendo que o momento de primeira que corresponde à média e o momento estatístico de segunda ordem que corresponde à variância, observam-se as seguintes relações:

$$\begin{aligned} E [X(t, x; \phi)] &= \int_{\Omega} w f(\Phi) d\Phi \\ &= \int_{\Omega} \left(\sum_{i=0}^P \hat{a}_i(x, t) \Phi_i \right) f(\Phi) d\Phi \\ &= B_0(t) \int_{\Omega} \Phi_0 f(\Phi) d\Phi + \sum_{i=1}^P B_i(t) \int_{\Omega} \Phi_i f(\Phi) d\Phi \\ &= B_0(t) \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} Var [X(t, x; \phi)] &= E [X(t, x; \phi)^2] - (E [X(t, x; \phi)])^2 \\ &= \sum_{i=1}^P B_i^2 \int_{\Omega} f(\Phi) d\Phi - B_0^2 \\ &= \sum_{i=1}^P B_i^2 \langle \Phi_i^2 \rangle \end{aligned} \quad (3.46)$$

Nas duas últimas equações, (3.45) e (3.46), reside a relevante mudança de um problema estocástico resolvido a partir de um polinômio de caos, que é o tipo de resultado obtido a partir da integração ao longo do tempo. Em problemas determinístico a integração no tempo significa fisicamente, a variação da amplitude do campo de deslocamentos. Já para problemas não determinístico se obtém a variação da média e da variância ao longo do tempo, perdendo-se, qualquer informação sobre a variação da amplitude modal de uma determinada amostra. Por outro lado obtêm-se informações de variação média e da variância ao longo do tempo de todas as amostras sem a necessidade de realizar uma amostragem do espaço amostral. (BRAZÃO, 2014; XIU, KARNIADAKIS, 2002).

CAPÍTULO 4

RESULTADOS NUMÉRICOS

Este capítulo apresenta os resultados obtidos a partir das formulações matemáticas apresentadas no capítulo anterior, sendo apresentados em duas seções: uma considerando os parâmetros, que definem o modelo discreto, determinísticos e outra seção considerando-os como não determinístico.

4.1 ANÁLISE ESTÁTICA

Nesta seção apresentam-se os resultados determinísticos do modelo mecânico discreto estudado para dois tipos de bifurcações: *Butterfly* e *Swallowtail*, que são obtidas dependendo da não linearidade presente na mola não linear do sistema. O comportamento das duas classes de bifurcações, considerando uma incerteza nos valores nominais de seus parâmetros, quanto os seus caminhos pós-críticos, frequência natural, bacias de atração e os fatores de integridade são apresentados a seguir. Cabe destacar que a incerteza nesta seção será considerada como um parâmetro determinístico à equação de equilíbrio do sistema discreto.

4.1.1 Caminho pós-crítico de equilíbrio

Fazendo a análise do comportamento estático do caminho fundamental de equilíbrio dado pela equação (3.13), conclui-se, independentemente do tipo de bifurcação analisado, que:

$$(i) \text{ Para } 1 - \bar{P}_0 > 0 \rightarrow \bar{P}_0 < 1 \rightarrow \frac{d^2 \Pi_0}{d Q_{20}^2} > 0 \text{ ESTÁVEL}$$

$$(ii) \text{ Para } 1 - \bar{P}_0 = 0 \rightarrow \bar{P}_0 = 1 \rightarrow \frac{d^2 \Pi_0}{d Q_{20}^2} = 0 \text{ PONTO CRÍTICO}$$

$$(iii) \text{ Para } 1 - \bar{P}_0 < 0 \rightarrow \bar{P}_0 > 1 \rightarrow \frac{d^2 \Pi_0}{d Q_{20}^2} < 0 \text{ INSTÁVEL}$$

Quando Q_{20} é diferente de zero, o caminho pós-crítico, dado pela equação (3.11), para o caso das duas molas serem lineares, ou seja, $\eta = 0$, a variação da energia potencial total depende da relação da rigidez das molas, λ . Se essa relação for maior que um ($\lambda > 1$), o caminho pós-crítico é caracterizado por uma bifurcação simétrica estável, e se essa relação for menor que um ($\lambda < 1$), tem-se uma bifurcação simétrica instável. Por fim, se $\lambda = 1$ tem-se um caminho pós-crítico neutro. Com o auxílio da equação (3.14), pode-se sumarizar o tipo de bifurcação estático como:

- (iv) Para $\lambda - 1 < 0 \rightarrow k_1 < k_2 \rightarrow \frac{d^2 \Pi_0}{d Q_{20}^2} < 0$ *INSTÁVEL*
- (v) Para $\lambda - 1 > 0 \rightarrow k_1 > k_2 \rightarrow \frac{d^2 \Pi_0}{d Q_{20}^2} < 0$ *ESTÁVEL*
- (vi) Para $\lambda - 1 = 0 \rightarrow k_1 = k_2 \rightarrow \frac{d^2 \Pi_0}{d Q_{20}^2} = 0$ *NEUTRO*

Para $\eta = 1$ na equação (3.1) tem-se uma mola não linear (\bar{k}_2), onde a variação da energia potencial total será dependente da não linearidade e da relação entre a rigidez das molas. Para esta situação, faz-se uma análise mais detalhada analisando duas classes de bifurcação de ordem superior: a *Swallowtail* e a *Butterfly*.

Para se estudar a classe de bifurcação *Butterfly*, simplifica-se a equação (3.11) adotando os seguintes parâmetros: $\lambda = 4$, $\beta = -6$, $\delta = 4$, $\alpha = 0$ e $\gamma = 0$, sendo reescrita da seguinte maneira:

$$\bar{P}_0 = \sqrt{1 - Q_{20}^2} \left(4 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - Q_{20}^2}} - 1 \right) + (1 - 6Q_{20}^2 + 4Q_{20}^4) \right) \tag{4.1}$$

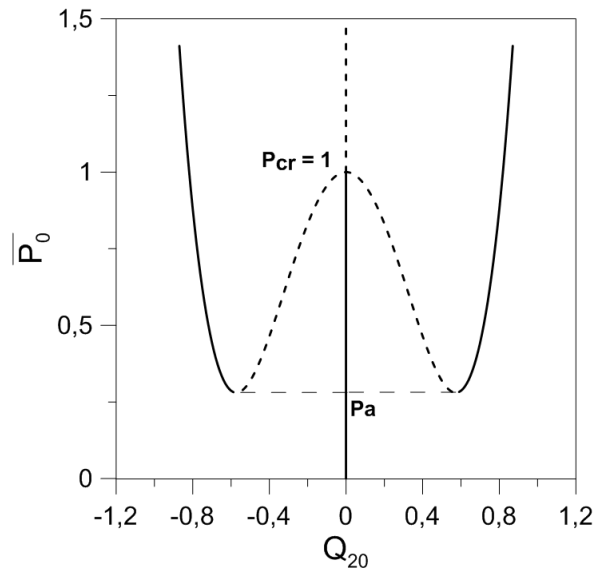
e a segunda derivada da energia potencial total em relação ao grau de liberdade Q_{20} , equação (3.14), é reescrita da seguinte forma:

$$\frac{d^2 \Pi_0}{d Q_{20}^2} = \frac{Q_{20}}{(1 - Q_{20}^2)} (-9Q_{20} + 34Q_{20}^3 - 20Q_{20}^5) \tag{4.2}$$

Na Figura 4.1 é apresentado o caminho pós-crítico, dado pela equação (4.1), para a classe de bifurcação *Butterfly*, onde as curvas contínuas representam as posições de equilíbrio estáveis,

já as curvas tracejadas as posições de equilíbrio instáveis. Para carregamentos inferiores ao carregamento mínimo pós-crítico ($\bar{P}_0 < Pa$) o sistema apresenta uma única posição de equilíbrio, o caminho fundamental, sendo Pa o “fundo do vale” do caminho pós-crítico. Para $Pa < \bar{P}_0 < Pcr$, têm-se cinco posições de equilíbrio, três estáveis e duas instáveis, sendo que uma das posições de equilíbrio estável é a solução fundamental. Para $\bar{P}_0 > Pcr$, têm-se duas posições de equilíbrio estável e uma posição instável dada pelo caminho fundamental.

Figura 4.1 –Caminho pós-crítico para a bifurcação do tipo *Butterfly*.



Para o estudo da classe de bifurcação *Swallowtail* é necessário tornar o termo α diferente de zero. Simplifica-se a equação (3.11) adotando os seguintes parâmetros: $\lambda = 4$, $\beta = 0$, $\delta = 0$, $\alpha = -3$ e $\gamma = 0$, sendo reescrita da seguinte maneira:

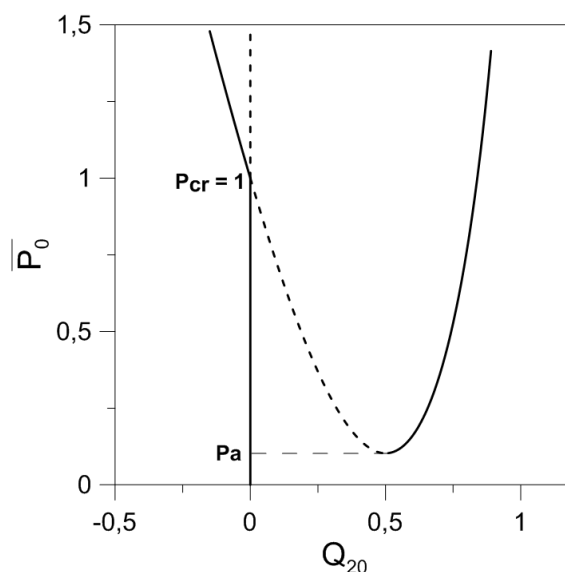
$$\bar{P}_0 = \sqrt{1 - Q_{20}^2} \left(4 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - Q_{20}^2}} - 1 \right) + (1 - 3Q_{20}^2) \right) \quad (4.3)$$

sendo sua respectiva segunda derivada da energia potencial total em relação ao grau de liberdade Q_{20} , equação (3.14), reescrita da seguinte forma:

$$\frac{d^2 \Pi_0}{d Q_{20}^2} = \frac{Q_{20}}{(1 - Q_{20}^2)} \left(-3 + 3Q_{20} + 6Q_{20}^2 \right) \quad (4.4)$$

Na Figura 4.2 é apresentado o caminho pós-crítico para a bifurcação do tipo *Swallowtail*. As curvas contínuas representam as posições de equilíbrio estáveis e as curvas tracejadas as soluções de equilíbrio instáveis. Para carregamentos inferiores ao carregamento mínimo pós-crítico ($\bar{P}_0 < Pa$) o sistema apresenta uma única posição de equilíbrio estável, dada pelo caminho fundamental de equilíbrio. Para $Pa < \bar{P}_0 < P_{cr}$, têm-se três posições de equilíbrio, duas estáveis, sendo uma delas o caminho fundamental, e uma instável. Para $\bar{P}_0 > P_{cr}$, têm-se duas posições de equilíbrio estável e uma posição instável, dada pelo caminho fundamental.

Figura 4.2 – Caminho pós-crítico para a bifurcação do tipo *Swallowtail*.



Observa-se nas Figuras 4.1 e 4.2 que em ambas as classes de bifurcação o caminho pós-crítico inicial pode conter um trecho inicial instável, podendo ser simétrico no caso da bifurcação *Butterfly* ou assimétrico no caso da bifurcação *Swallowtail*.

4.1.2 Frequência natural ao longo do caminho pós-crítico de equilíbrio

Para o caso da mola \bar{k}_2 ser não linear ($\eta = 1$) é feita a expansão da equação de equilíbrio não lineares, dada em (3.34), em série de Taylor, em torno da posição de equilíbrio estático, que e linearizando em seguida, chegando-se a:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 Q_2}{d\tau^2} + 2\xi \frac{dQ_2}{d\tau} + [\lambda - \bar{P}_0] \left(\frac{(Q_2 + Q_{20})}{\sqrt{1 - Q_{20}^2}} + \frac{Q_{20}^2 Q_2}{\sqrt{(1 - Q_{20}^2)^3}} \right) + \\ & [1 - \lambda](Q_2 + Q_{20}) + Q_2 (2\alpha Q_{20} + 3\beta Q_{20}^2 + 4\gamma Q_{20}^3 + 5\delta Q_{20}^4) \\ & + (\alpha Q_{20}^2 + \beta Q_{20}^3 + \gamma Q_{20}^4 + \delta Q_{20}^5) = f(\tau) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Substituindo-se $\eta = 1$ na equação (3.10) tem-se que:

$$Q_{20} \left(\lambda \left(\frac{1}{\sqrt{1 - Q_{20}^2}} - 1 \right) + [1 + \alpha Q_{20} + \beta Q_{20}^2 + \gamma Q_{20}^3 + \delta Q_{20}^4] - \frac{\bar{P}_0}{\sqrt{1 - Q_{20}^2}} \right) = 0 \quad (4.6)$$

e substituindo-se a equação (4.6) na equação (4.5), pode-se reescrever a equação (4.5) como:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 Q_2}{d\tau^2} + 2\xi \frac{dQ_2}{d\tau} + Q_2 \left\{ [\lambda - \bar{P}_0] \left(\frac{1}{\sqrt{(1 - Q_{20}^2)^3}} \right) + [1 - \lambda] \right. \\ & \left. + (2\alpha Q_{20} + 3\beta Q_{20}^2 + 4\gamma Q_{20}^3 + 5\delta Q_{20}^4) \right\} = f(\tau) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Para $Q_{20} \neq 0$ obtêm-se a seguinte equação para frequência natural ao longo do caminho de equilíbrio. Resolvendo a equação diferencial ordinária linear (4.7), desconsiderando qualquer excitação da força dinâmica e amortecimento, chega-se a:

$$\varpi_0 = \left\{ [\lambda - \bar{P}_0] \left(\frac{1}{\sqrt{(1 - Q_{20}^2)^3}} \right) + [1 - \lambda] + (2\alpha Q_{20} + 3\beta Q_{20}^2 + 4\gamma Q_{20}^3 + 5\delta Q_{20}^4) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.8)$$

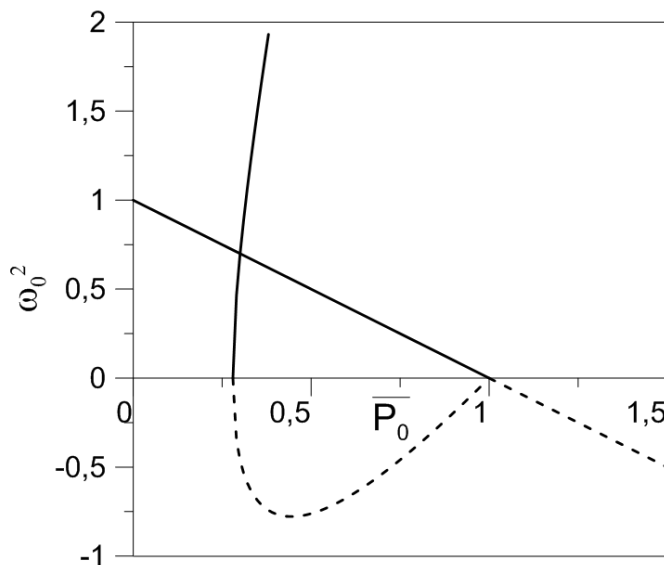
Para o caminho fundamental de equilíbrio, $Q_{20} = 0$, a equação (4.8) se reduz a:

$$\varpi_0 = \sqrt{1 - \bar{P}_0} \quad (4.9)$$

Para a bifurcação do tipo *Butterfly* a equação (4.8) assume a seguinte forma:

$$\varpi_0 = \left(\frac{[4 - \bar{P}_0]}{\sqrt{(1 - Q_{20}^2)^3}} - 3 - 18Q_{20}^2 + 20Q_{20}^4 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.10)$$

Figura 4.3 – Relação ω_0^2 versus \bar{P}_0 para bifurcação do tipo *Butterfly*.



A Figura 4.3 apresenta a variação do quadrado da frequência natural *versus* o carregamento estático aplicado para a bifurcação do tipo *Butterfly* obtida a partir da equação (4.10). Nesta figura, observa-se que o trecho linear, correspondente ao caminho fundamental de equilíbrio, que apresenta frequências naturais imaginárias a partir da carga crítica de flambagem, indicando que a partir desse valor de carregamento o caminho fundamental de equilíbrio é instável. Já o trecho curvo desta figura representa a variação da frequência ao longo do caminho pós-crítico de equilíbrio, sendo que as frequências imaginárias estão associadas ao trecho inicial do caminho pós-crítico, passando a serem reais após atingirem o carregamento mínimo pós-crítico.

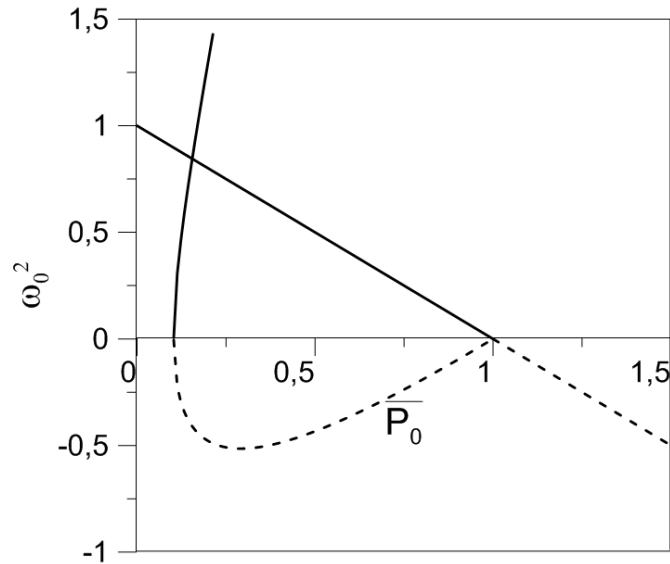
Simplificando-se, também, a equação (4.8) para o caso da bifurcação do tipo *Swallowtail*, obtém-se a seguinte equação para frequência natural ao longo da trajetória de equilíbrio pós-crítico:

$$\omega_0 = \left(\frac{[4 - \bar{P}_0]}{\sqrt{(1 - Q_{20}^2)^3}} - 3 - 6Q_{20} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.11}$$

A Figura 4.4 apresenta a variação do quadrado da frequência *versus* o carregamento estático para a bifurcação do tipo *Swallowtail*, obtida a partir da equação (4.11). Nota-se na Figura 4.4, assim como na Figura 4.3, que os trechos do caminho pós-críticos que apresentam frequência

natural imaginária, indicam os trechos instáveis da solução não linear do problema enquanto as linhas contínuas representam uma resposta estável da solução de equilíbrio.

Figura 4.4 – Relação ω_0^2 versus \bar{P}_0 para bifurcação do tipo *Swallowtail*.



4.1.3 Incertezas nos parâmetros que definem as bifurcações do tipo *Butterfly* e *Swallowtail*

Nesta dissertação, os parâmetros que definem a mola não linear serão considerados com uma incertezas na ordem de 10% para os dois casos de bifurcação apresentados na seção anterior. Destaca-se que, neste momento, as incertezas serão calculadas como se os parâmetros fossem determinísticos, ou seja, os resultados serão obtidos repetindo-se as análises para cada um dos limites de variação dos parâmetros. Mais adiante, serão feitas análises considerando uma abordagem não determinística do problema.

No caso da bifurcação do tipo *Butterfly* serão obtidos os resultados para as seguintes incertezas nos parâmetros da mola não linear: $\beta = -5.4$, $\beta = -6.6$, $\delta = 3.6$ e $\delta = 4.4$. Já para o caso da bifurcação do tipo *Swallowtail* serão considerados as seguintes incertezas nos parâmetros da mola não linear: $\alpha = -2.7$ e $\alpha = -3.3$.

Nas Figuras 4.5 e 4.6 são apresentados, respectivamente, os caminhos pós críticos para a bifurcação do tipo *Butterfly* e *Swallowtail*, considerando a variabilidade dos parâmetros

numéricos de cada caso. Os caminhos contínuos representam as posições de equilíbrio estáveis enquanto os caminhos tracejados as soluções de equilíbrio instáveis.

Figura 4.5 – Caminho pós crítico para a bifurcação do tipo *Butterfly* considerando a incerteza em seus parâmetros.

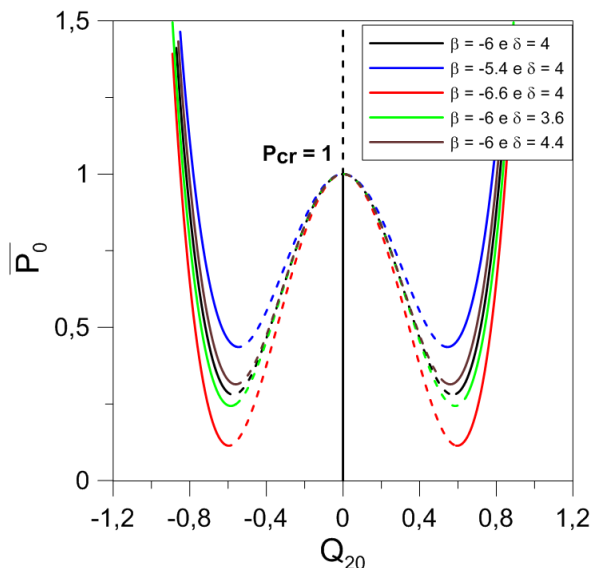
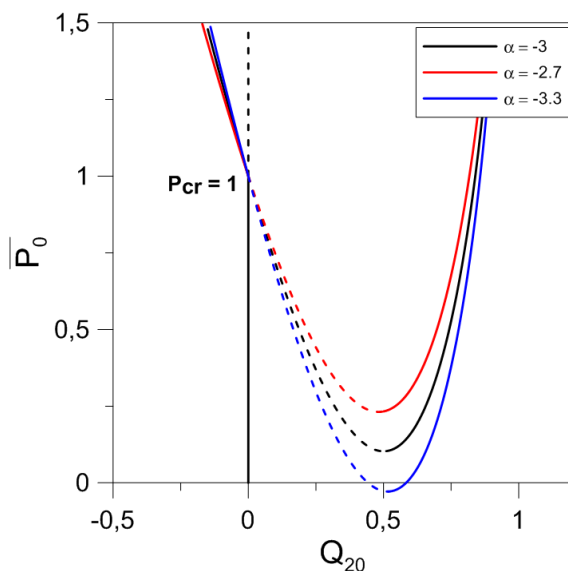


Figura 4.6 – Caminho pós crítico para a bifurcação do tipo *Swallowtail* considerando a incerteza em seus parâmetros.



Observa-se nas Figuras 4.5 e 4.6 que a incerteza proposta nos parâmetros de rigidez da mola não linear não modifica o tipo de bifurcação, o comportamento pós-crítico dos sistemas discretos e o valor da carga crítica. Apenas o valor da carga mínima pós-crítica dos diagramas

de bifurcação é alterado com a incerteza, levando a mudanças na coexistência entre soluções pós-críticas com a solução fundamental, principalmente, no caso da bifurcação *Swallowtail*

4.1.4 Bacias de atração estáticas das bifurcações do tipo *Butterfly* e *Swallowtail*

Nesta seção foram obtidas as bacias de atração estáticas, considerando a equação (3.34), adotando $f(t) = 0$, para os dois casos de bifurcação avaliados neste trabalho, e as incertezas na ordem de 10% nos parâmetros determinísticos.

Para o traçado das bacias foi utilizado o método de Runge-Kutta de quarta ordem, que apresenta boa estabilidade numérica para integrar o problema de valor inicial ao longo do tempo. O atrator de cada condição inicial, pertencente do plano que varia tanto os deslocamentos quanto a velocidade do sistema discreto dentro do intervalo de $[-1,1]$, é mapeado e agrupado em cores diferentes. Este método consiste em discretizar o plano desejado para calcular a bacia de atração em um conjunto de células, avaliando a convergência dessas condições iniciais para um determinado atrator. Os eixos horizontais simbolizam a variação da condição inicial de deslocamento $Q_2(\tau)$ e enquanto os eixos verticais varia-se a condição inicial de velocidade, $dQ_2(\tau)/d\tau$.

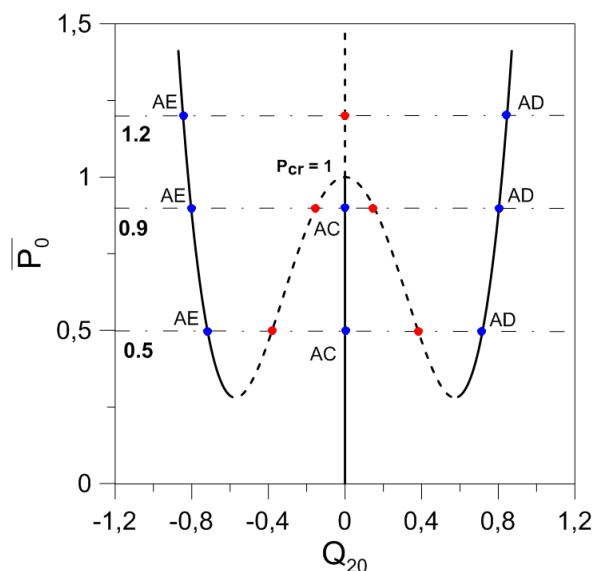
Para o tipo de bifurcação *Butterfly* o nível de carregamento estático igual 0.5 e 0.9 apresentam três soluções estáveis (ponto azul), sendo uma delas trivial (atrator central AC), e duas soluções instáveis (ponto vermelho) conforme ilustra a Figura 4.7. Já para o carregamento estático igual 1.2, a solução trivial passa a ser instável (ponto vermelho) e o sistema passa apresentar apenas duas soluções estáveis (ponto azul), sendo um atrator esquerdo (AE) e outra o atrator direito (AD).

Nas Figuras 4.8 e 4.9 estão ilustradas, respectivamente, as bacias de atrações considerando-se as incertezas no parâmetro β e δ para a bifurcação do tipo *Butterfly*, avaliando vários níveis de carregamento estático.

Nota-se, a partir das Figuras 4.8 e 4.9, que à medida se que aumenta o carregamento, independentemente do valor da incerteza, maior é a tendência das condições iniciais da bacia

de atração se estabilizar no foco esquerdo (região de cor preta) ou no foco direito (região de cor amarela), minimizando a região do foco central (região de cor azul), como esperado.

Figura 4.7 –Caminho pós-crítico para a bifurcação do tipo *Butterfly* para vários níveis de carregamento.



Juntamente com as bacias de atração foram analisados os fatores de integridades locais e globais do sistema com bifurcação *Butterfly*. O fator de integridade local (FIL) é a maior circunferência centrada no atrator da bacia de atração que pode ser obtida de tal forma a garantir o maior conjunto de condições iniciais que convertem para o referido atrator. Já o fator de integridade global (FIG) é a maior circunferência centrada em uma determinada condição inicial da bacia de atração que pode ser obtida de tal forma a garantir o maior conjunto de condições iniciais que convertem para o mesmo atrator da condição inicial que está no centro da circunferência (SILVA; GONÇALVES, 2011; REGA; LENCI, 2005.).

Os fatores de integridades estão apresentados pelas regiões delimitada pelos círculos nas bacias de atração das Figuras 4.8 e 4.9. O fator de integridade local está representado pela circunferência de cor branca para o foco esquerdo, pela circunferência de cor verde para o foco central e, por fim, pela circunferência de cor vermelha para o foco direito. Já o fator de integridade global está representado pelas circunferências de cores cinza, marrom e roxa para os focos esquerdo, central e direito, respectivamente.

O valor dos fatores de integridade, local e global, com os parâmetros analisados para a bifurcação do tipo *Butterfly* estão relacionados na Tabela 4.1, sendo AC (atrator central) e AE

(atrator esquerdo). Não foram apresentados os fatores de integridade local e global AD (atrator direito) já que a solução pós-crítica é simétrica para a bifurcação do tipo *Butterfly*.

Figura 4.8 – Bacias de atração para a bifurcação do tipo *Butterfly*, incerteza no parâmetro β . ($\lambda = 4$ e $\xi = 0,1$).

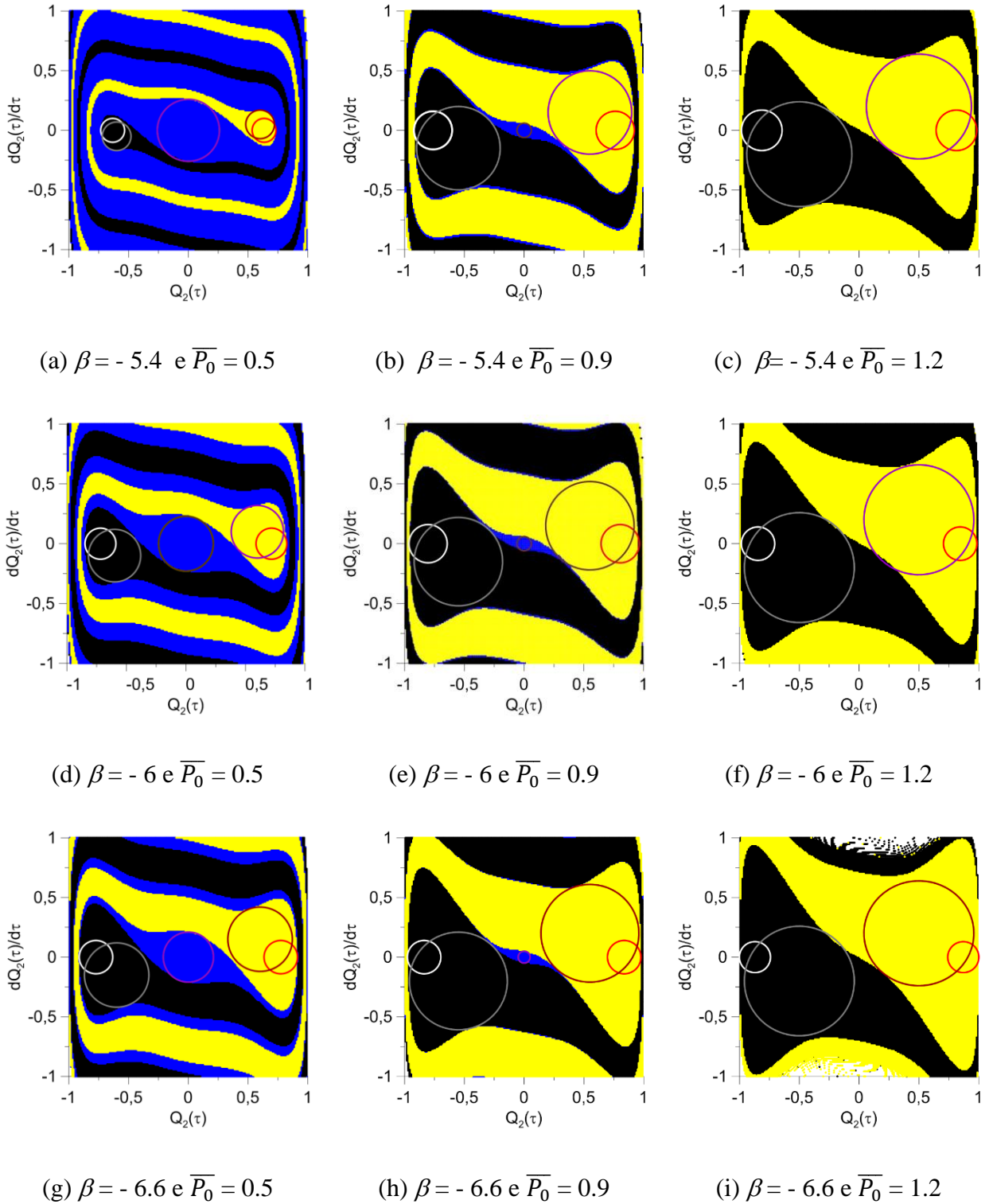
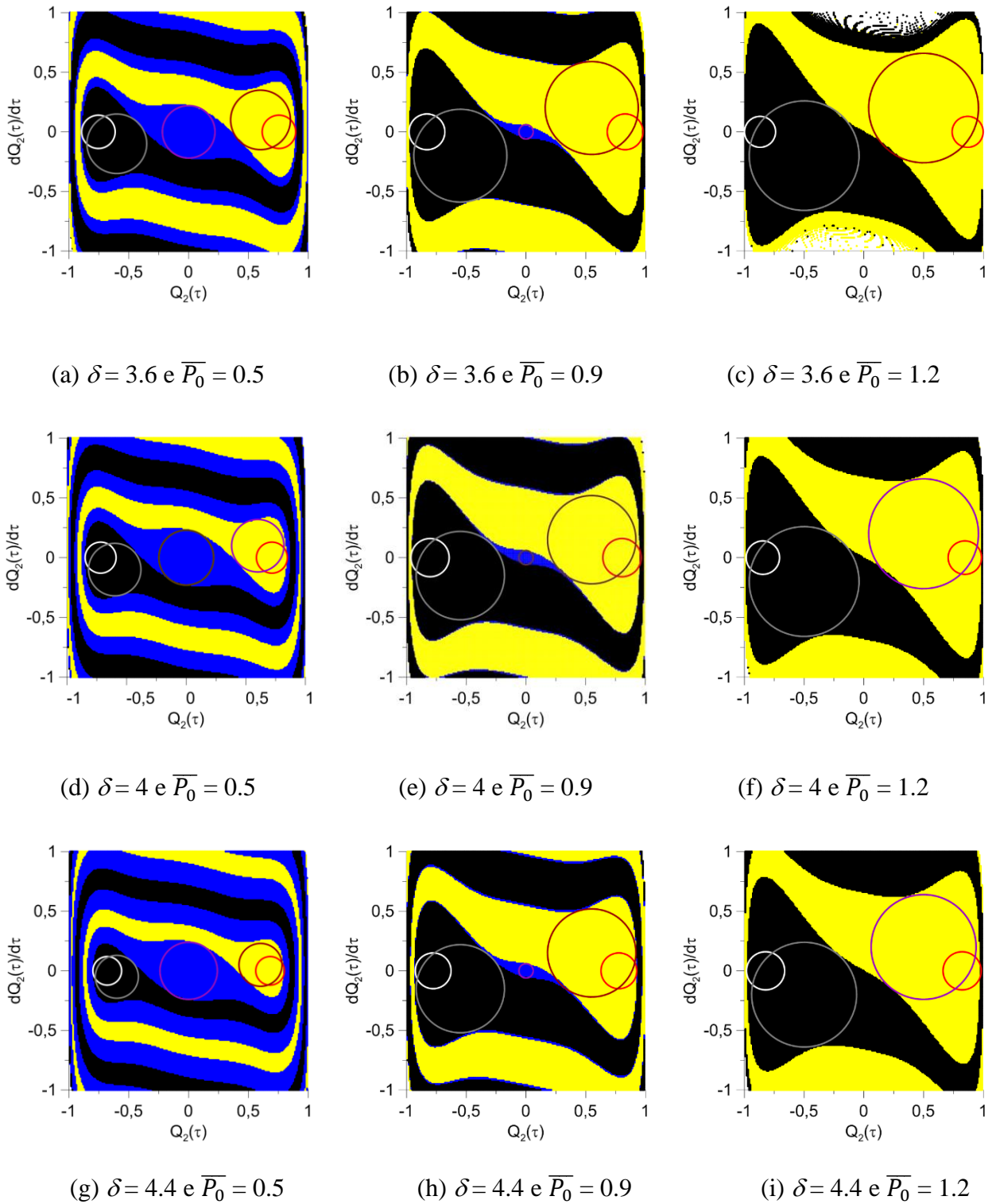


Figura 4.9 – Bacias de atração para a bifurcação do tipo *Butterfly*, incerteza no parâmetro δ . ($\lambda = 4$ e $\xi = 0.1$).



Observa-se a partir da Tabela 4.1 que o fator de integridade, local e global, do atrator central (solução trivial), para um mesmo do valor β e δ , diminui com o incremento da carga estática \bar{P}_0 , tornando-se nula para qualquer valor de carregamento superior ao valor da carga crítica, como ilustrado nas Figuras 4.10 (a) e 4.11 (a). Já para o atrator esquerdo à solução pós-crítica ocorre o aumento do fator de integridade, local e global, com o incremento de \bar{P}_0 , para um mesmo do valor β e δ , como apresentado nas Figuras 4.10b e 4.11b.

Tabela 4.1 – Variação dos fatores de integridade local e global para a bifurcação do tipo *Butterfly*.

Parâmetros		\bar{P}_0											
β	δ	0.5				0.9				1.2			
		Local		Global		Local		Global		Local		Global	
		AC	AE	AC	AE	AC	AE	AC	AE	AC	AE	AC	AE
-5.4	4	0,26	0,10	0,26	0,12	0,05	0,14	0,05	0,41	0,0	0,17	0,0	0,44
-6	4	0,23	0,13	0,23	0,22	0,06	0,16	0,06	0,37	0,0	0,14	0,0	0,46
-6.6	4	0,21	0,14	0,21	0,27	0,05	0,14	0,05	0,41	0,0	0,13	0,0	0,46
-6	3.6	0,22	0,14	0,22	0,25	0,06	0,15	0,06	0,39	0,0	0,13	0,0	0,46
-6	4.4	0,24	0,12	0,24	0,18	0,06	0,15	0,06	0,37	0,0	0,16	0,0	0,44

Figura 4.10 – Fator de integridade local para a bifurcação do tipo *Butterfly*: Atrator (a) Central (b) Esquerdo

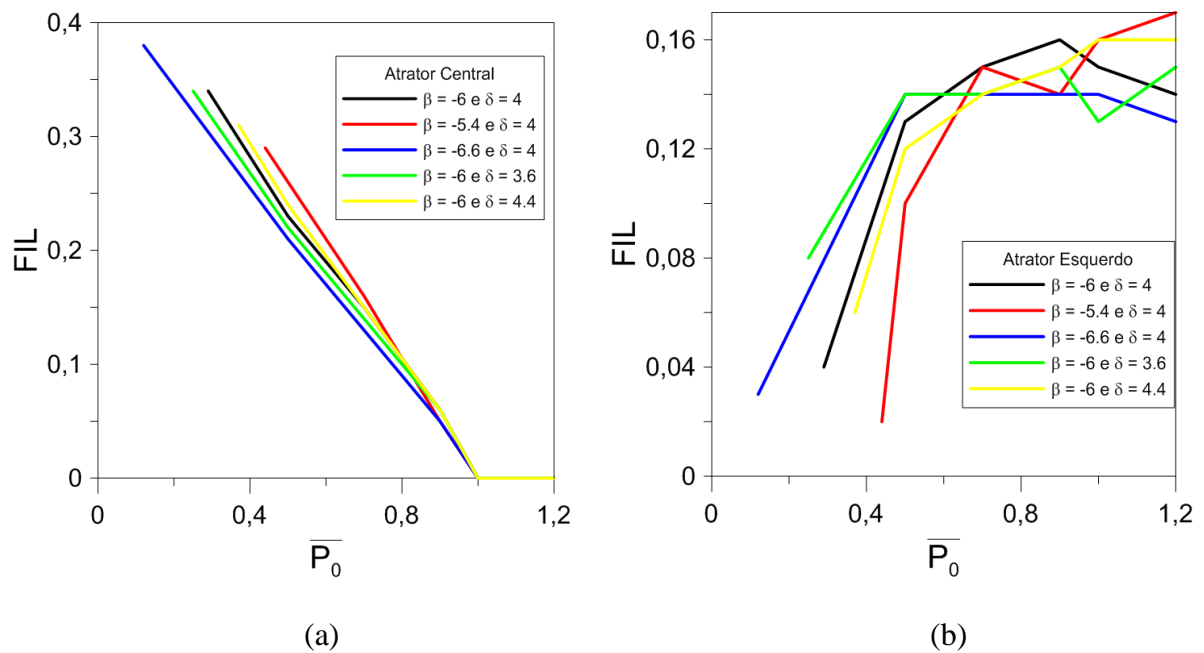
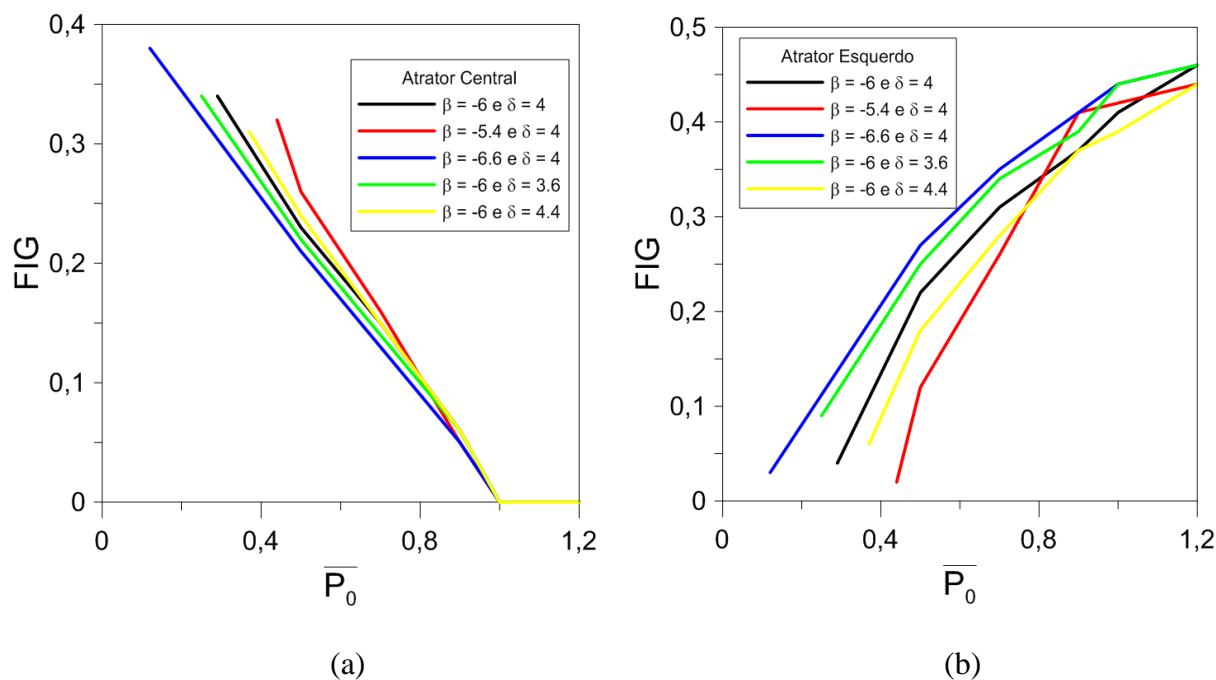


Figura 4.11 - Fator de integridade global para a bifurcação do tipo *Butterfly*: Atrator (a) Central (b) Esquerdo

Ainda a partir da Tabela 4.1 e das Figuras 4.10 e 4.11, observa-se que o fator de integridade, local e global, para uma carga estática, \bar{P}_0 , próxima do valor mínimo pós-crítico, sofre uma significativa variação quando se considera uma incerteza nos parâmetro β e δ , sendo essa variação menos significativa para valores elevados de carga estática.

Na Figura 4.13 estão ilustradas as bacias de atrações estática sem a consideração da incerteza ($\alpha = -3$) e com as incertezas no parâmetro α , com o $\alpha = -2.7$ e -3.3 , para a bifurcação do tipo *Swallowtail*, considerando vários níveis de carregamento. Nesta figura pode-se observar o atrator que cada condição inicial irá convergir na janela considerada na bacia de atração. Foram obtidas as bacias de atração para três níveis de carregamento, como apresentado na Figura 4.12, notou-se que à medida que se incrementa o carregamento estático, maior é a tendência das condições iniciais de se estabilizarem no foco à direita. A região em preto da bacia de atração representam as condições iniciais que se estabilizam no atrator central (AC – Figura 4.12) que é quando o carregamento é abaixo da carga crítica ($P_{cr} = 1$), ou no atrator esquerdo (AE – Figura 4.12) quando o carregamento é acima da carga crítica. Já a região em azul da bacia de atração representam as condições iniciais que se estabilizam no foco direito (AD – Figura 4.12), independentemente do nível de carregamento estático aplicado. As soluções de equilíbrio

instáveis para os níveis de carregamento analisados estão representadas pelos pontos vermelhos na Figura 4.12.

O fator de integridade local das bacias de atração estática da Figura 4.13 está representado pela circunferência de cor branca para o foco direito e pela circunferência de cor vermelha para o foco central, quando $\bar{P}_0 \leq P_{cr}$ ou foco esquerdo, para $\bar{P}_0 > P_{cr}$. Já o fator de integridade global está representada pela circunferência de cor cinza para o foco central, quando $\bar{P}_0 \leq P_{cr}$, e esquerdo, para $\bar{P}_0 > P_{cr}$, e pela circunferência de cor roxa para o foco direito. A variação dos fatores de integridade, local e global, com os parâmetros analisados para a bifurcação do tipo *Swallowtail* estão relacionados na Tabela 4.2, sendo AC (atrator central) AD (atrator direito) e AE (atrator esquerdo).

Figura 4.12 –Caminho pós-crítico para a bifurcação do tipo *Swallowtail* para vários níveis de carregamento.

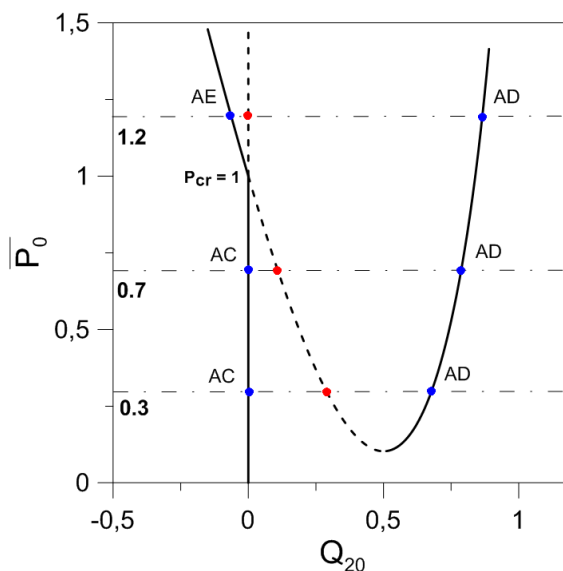
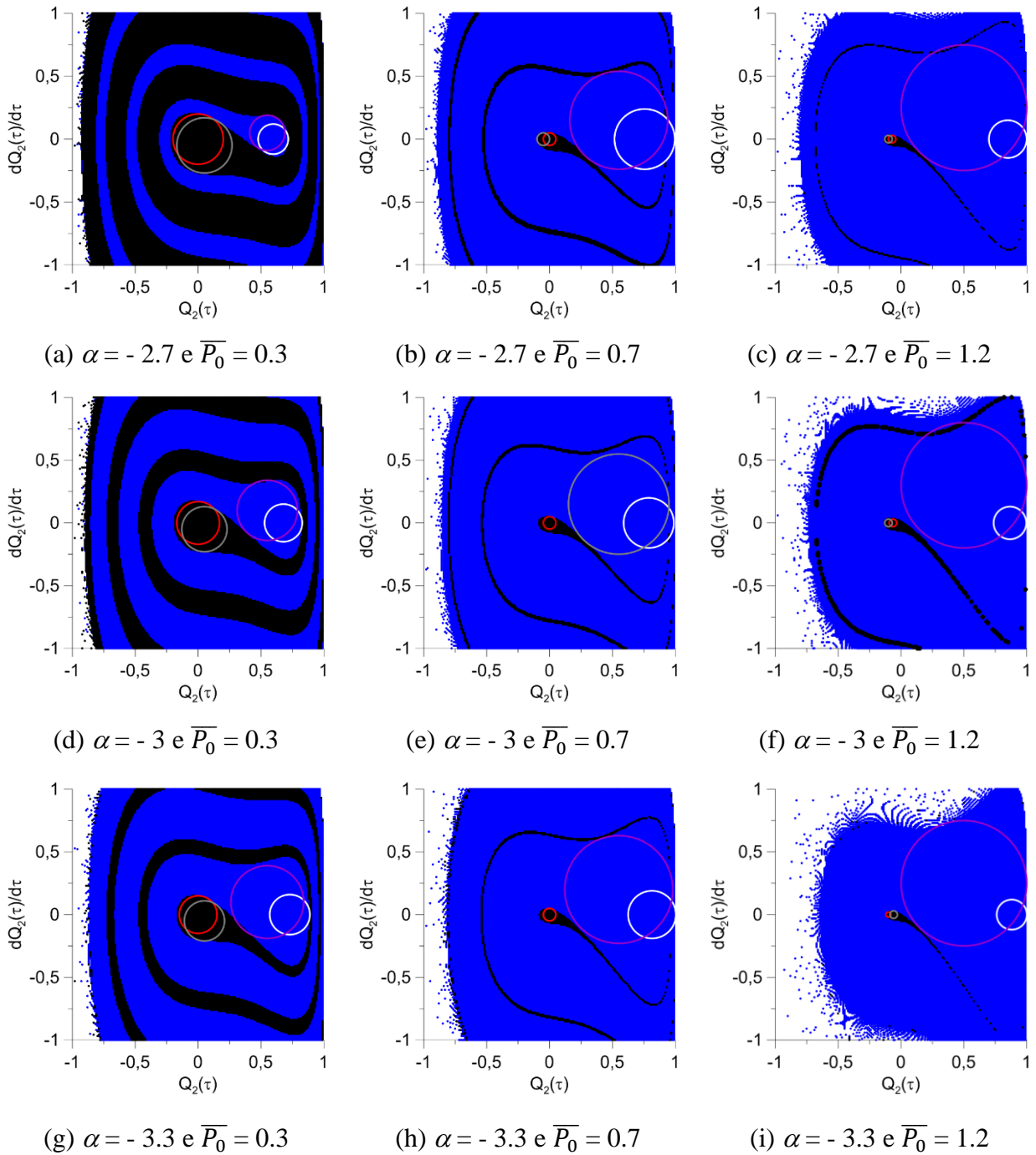


Tabela 4.2 – Variação dos fatores de integridade local e global para a bifurcação do tipo *Swallowtail*.

Parâmetro	\bar{P}_0											
	0.3				0.7				1.2			
	Local		Global		Local		Global		Local		Global	
α	AC	AD	AC	AD	AC	AD	AC	AD	AE	AD	AE	AD
-2.7	0,20	0,12	0,22	0,14	0,05	0,24	0,05	0,39	0,03	0,15	0,03	0,50
-3	0,17	0,15	0,18	0,24	0,05	0,20	0,05	0,40	0,03	0,13	0,03	0,50
-3.3	0,15	0,16	0,16	0,29	0,05	0,19	0,05	0,43	0,03	0,12	0,02	0,50

Figura 4.13 – Bacias de atração para a bifurcação do tipo *Swallowtail*, incerteza no parâmetro α ($\lambda = 4$ e $\xi = 0.1$).



A partir da Tabela 4.2 observa-se que, para um mesmo valor de α , os fatores de integridade, local e global, do atrator central (solução trivial) diminui com o incremento da carga estática, como ilustram as Figuras 4.14 (a) e 4.15 (a), enquanto os fatores de integridade, local e global, do atrator à direita aumenta, Figuras 4.14 (b) e 4.15 (b). Após a carga crítica, o atrator central

(solução trivial) torna-se instável e as soluções passam a convergir para as soluções pós-críticas localizadas a esquerda ou à direita da solução trivial. Quando se considera uma incerteza no parâmetro α , os fatores de integridade, local e global, são severamente modificados, principalmente para valores de carregamento inferiores ao valor da carga crítica, como apresentado na Tabela 4.2 e nas Figuras 4.14 e 4.15. Isso é esperado, pois a dispersão dos resultados para $\bar{P}_0 \leq P_{cr}$ é maior, como ilustrado na Figura 4.2.

Figura 4.14 - Fator de integridade local para a bifurcação do tipo *Swallowtail*: Atrator (a) Central (b) Direito

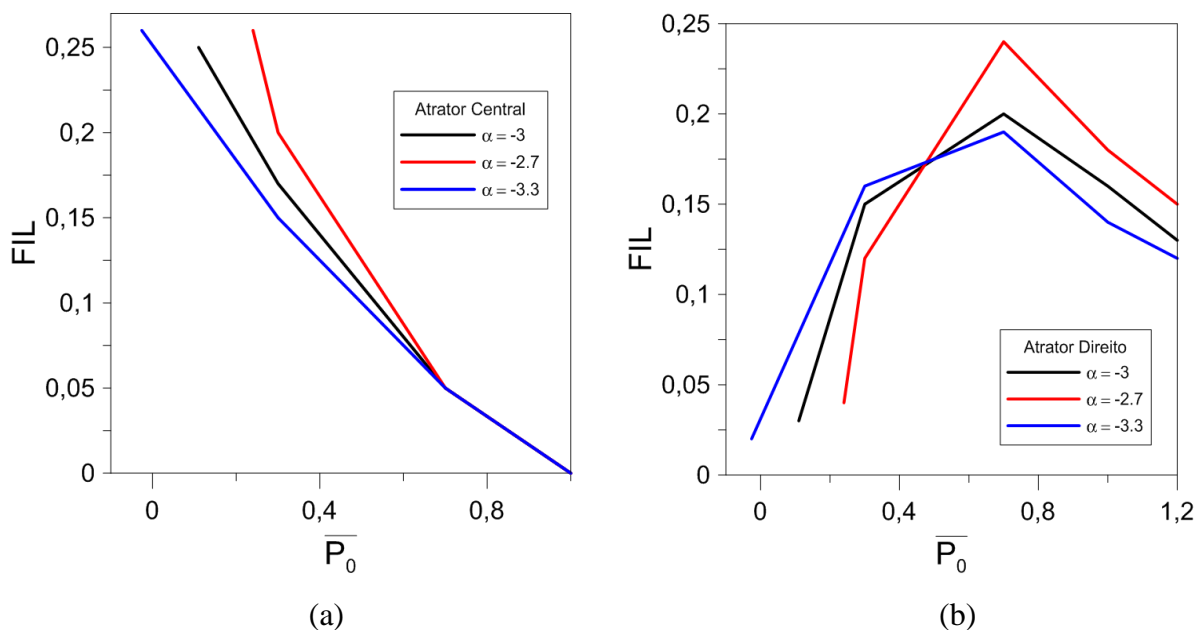
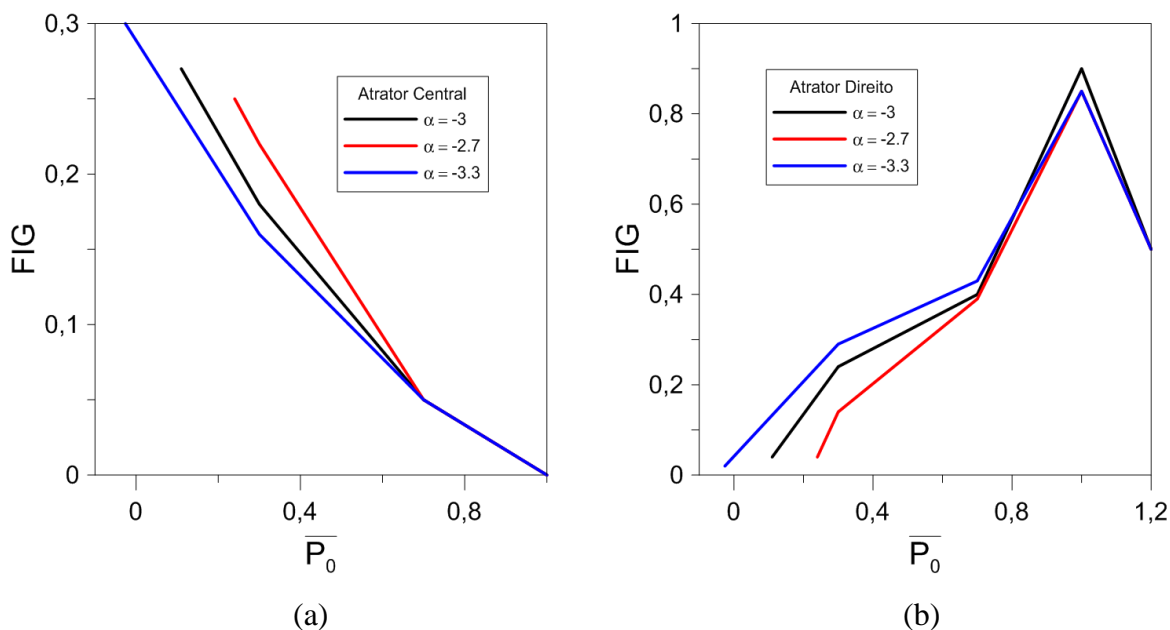


Figura 4.15 - Fator de integridade global para a bifurcação do tipo *Swallowtail*: Atrator (a) Central (b) Direito



As incertezas inseridas de forma determinística nos parâmetros que definem a mola não linear do sistema discreto das duas classes de bifurcações *Butterfly* e *Swallowtail*, serão os limites usados na análise não determinística do modelo estudado. Cabe ressaltar que os resultados apresentados nesta seção, foram para análise estática ($f(t) = 0$), e não modificaram qualitativamente os resultados, sejam eles os caminhos pós-críticos, as bacias de atração ou os fatores de integridade.

4.2 ANÁLISE DINÂMICA

Nesta seção apresentam-se os resultados não determinísticos do modelo estudado para os dois tipos de bifurcações: *Butterfly* e *Swallowtail*, mostrando os comportamento das duas particularidades de bifurcações quanto a influência da força excitadora $f(t)$, na resposta no tempo com os planos fases, nas bacias de atração e nos fatores de integridade, trabalhando os limites das incertezas nos parâmetros determinísticos abordado na seção anterior. Apresenta-se também a aplicabilidade do polinômio de caos para o modelo para a obtenção dos resultados não determinísticos.

4.2.1 Diagramas de bifurcação

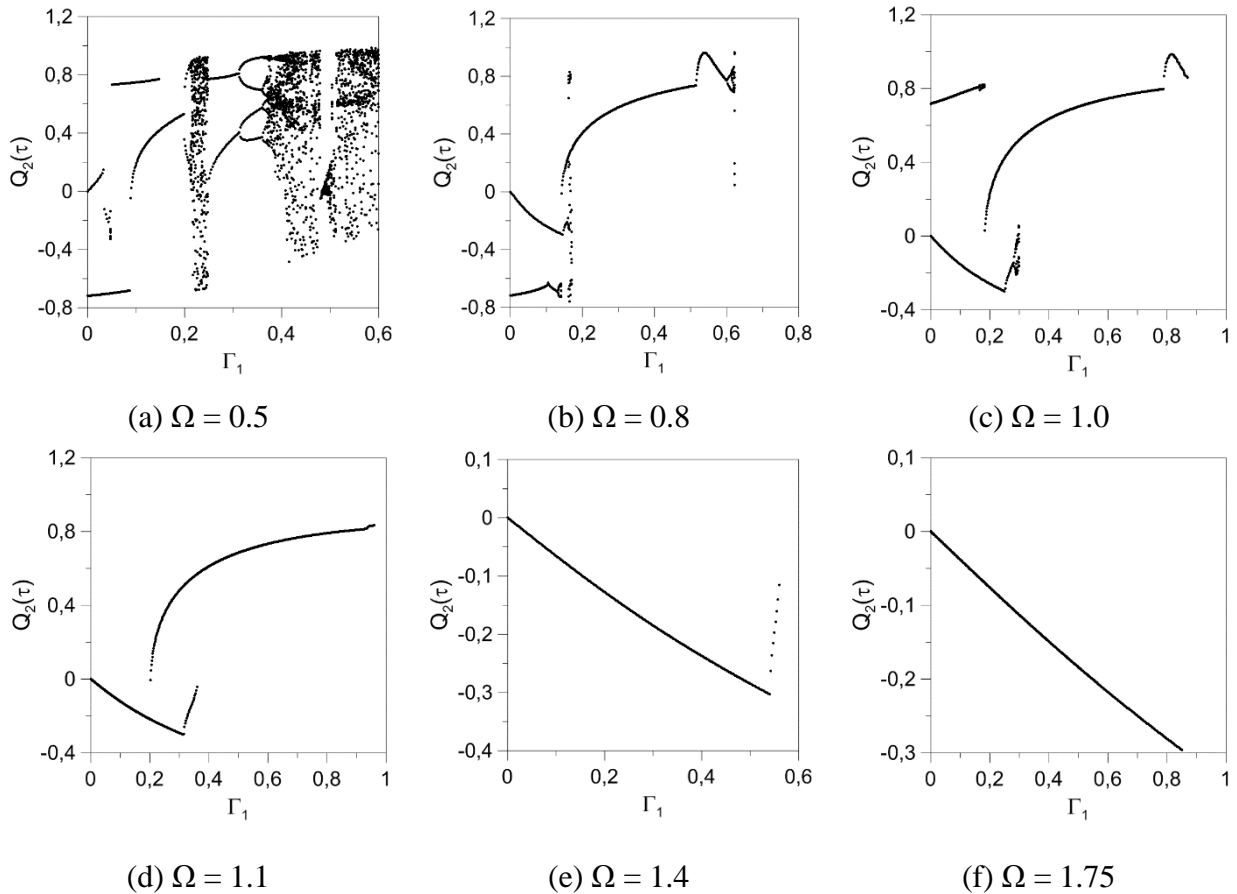
Para o traçado dos diagramas de bifurcação foi utilizado o método da força bruta, integrando-se a equação de equilíbrio (3.44), ao longo do tempo, a partir do método de Runge-Kutta de quarta ordem, e mapeando as seções de Poincarè obtidas no estado permanente da resposta no tempo. Para cada valor da amplitude de excitação da carga dinâmica (Γ_1) e para vários valores da frequência de excitação (Ω) foram obtidas as seções de Poincarè e construídos os diagramas de bifurcação, destacando que apenas as soluções de equilíbrio estáveis são obtidas com essa técnica. Os diagramas foram obtidos para pré-carregamento estático $\overline{P_0} = 0.5$ para as duas classes de bifurcação: *Butterfly* e *Swallowtail*.

Na Figura 4.16 estão ilustrados os diagramas de bifurcação do tipo *Butterfly* para os parâmetros nominais ($\beta = -6$ e $\delta = 4$) e vários valores da frequência de excitação Ω .

Analisando a Figura 4.16 (a), pode-se notar que para $\Omega = 0.5$, em certos valores de Γ_1 existem soluções caóticas dadas pela densa distribuição de seções de Poincarè. A medida que se incrementam os valores de Ω , o diagrama de bifurcação apresenta soluções estáveis periódicas

bem definidas, obtendo assim em algumas regiões mais de uma solução estável para o mesmo valor de Γ_1 , como apresentado nas Figuras 4.16 (b), (c), (d). Para valores de Ω superiores a 1.4, Figuras 4.16(e) e (f), o diagrama de bifurcação apresenta uma única solução estável periódica.

Figura 4.16 – Diagrama de bifurcação do tipo *Butterfly* variado os valores de Ω . ($\beta = -6$, $\delta = 4$, $\lambda = 4$ e $\xi = 0.1$)

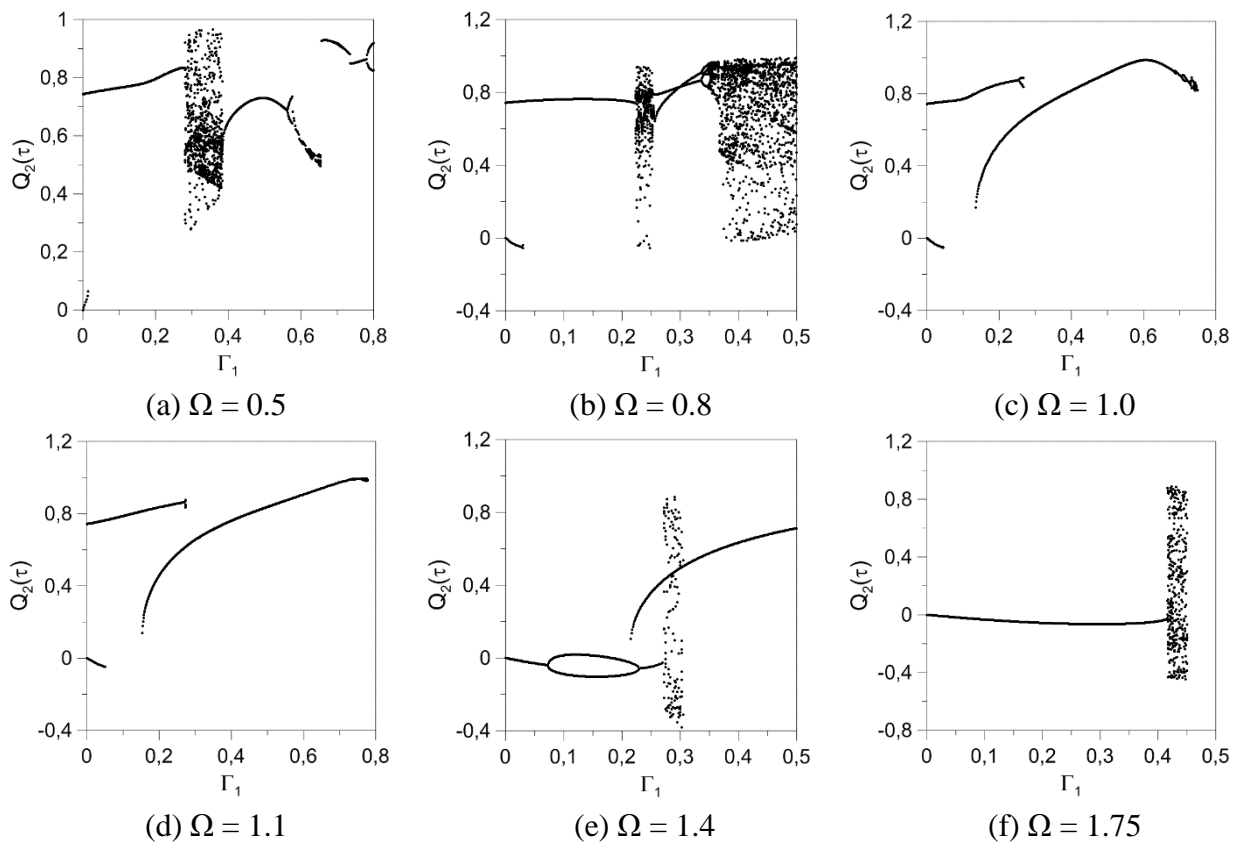


Já na Figura 4.17 estão ilustrados os diagramas de bifurcação para o caso *Swallowtail* com parâmetro nominal ($\alpha = -3$) e o mesmos valores de Ω adotados para a bifurcação *Butterfly*.

A partir da Figura 4.17 pode-se notar que para valores de Ω abaixo de 0.8, Figuras 4.17 (a) e (b), existem trechos com soluções periódicas, mas também há presenças de regiões com soluções caóticas. A medida que se incrementa os valores de Ω , entre 1.0 e 1.4, o diagrama de bifurcação apresenta apenas soluções periódicas, apresentando em alguns trechos duas soluções estáveis para o mesmo valor de Γ_1 , Figuras. 4.17 (c) e (d). Mas para incrementos de Ω maiores que 1.4, além de apresentar na sua maioria trechos com soluções periódicas, apresenta uma região com solução caótica, Figuras 4.17 (e) e (f).

Assim como na bifurcação do tipo *Butterfly*, a *Swallowtail* também apresenta soluções estáveis bem definidas a medida que se incrementa os parâmetros de frequência. Para as demais análises, que serão apresentadas nas próximas seções, foi escolhido tanto para a bifurcação do tipo *Butterfly*, quanto para a *Swallowtail* o parâmetro de frequência $\Omega = 1.1$, Figuras 4.16 (d) e 4.17 (d), por possuírem apenas soluções periódicas e por apresentar em alguns trechos duas soluções periódicas concorrendo para o mesmo valor de Γ_1 .

Figura 4.17 – Diagrama de bifurcação do tipo *Swallowtail* variado os valores de Ω . ($\alpha = 3$, $\lambda = 4$ e $\xi = 0.1$)



4.2.2 Incertezas nos parâmetros que definem as bifurcações do tipo *Butterfly* e *Swallowtail*

A bifurcação do tipo *Butterfly* apresenta dois parâmetros determinísticos, β e δ , que serão analisados separadamente, para se poder avaliar a influência da incerteza em cada parâmetro.

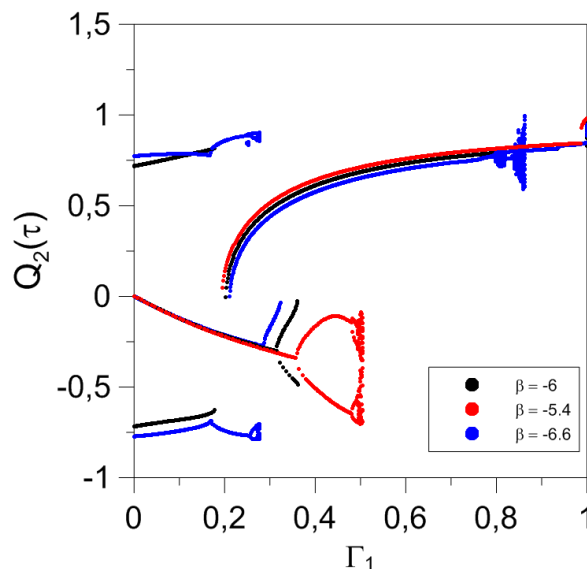
Para a análise do comportamento da incerteza no parâmetro β no diagrama de bifurcação além da bifurcação para o parâmetro nominal, Figura 4.16 (d), foram obtidas também as bifurcações para as incertezas apresentadas na seção 4.1.3 no parâmetro e no caso analisado. Para permitir

a comparação do comportamento entre as bifurcações com incerteza no parâmetro β foi construída a Figura 4.18 com os valores limites da incerteza considerada em β .

O diagrama de bifurcação para o parâmetro nominal ($\beta = -6$), representada pela cor preta na Figura 4.18, além do comportamento apresentado na Figura 4.16 (d), ele apresenta outras soluções periódicas. Esse complemento das soluções estáveis no diagrama, se fez necessário, após gerar a bacia de atração para alguns valores de Γ_1 e observar que ela apresentava três soluções estáveis e não uma solução, como mostrava inicialmente a bifurcação da Figura 4.16 (d).

O diagrama de bifurcação da Figura 4.18 para $\beta = -6$, possui o comportamento diferente, à medida que se incrementa o valor de Γ_1 . Para valores menores que 0.18, para um mesmo valor de Γ_1 , a bifurcação apresenta três soluções periódicas estáveis. Com valores de Γ_1 entre 0.18 e 0.36 existem duas soluções periódicas estáveis. Já para valores maiores que 0.36 o diagrama de bifurcação apresenta apenas uma solução periódica estável.

Figura 4.18 – Diagrama de bifurcação do tipo *Butterfly* considerando as incertezas no parâmetro β . ($\Omega = 1.1$, $\delta = 4$, $\lambda = 4$ e $\xi = 0.1$)

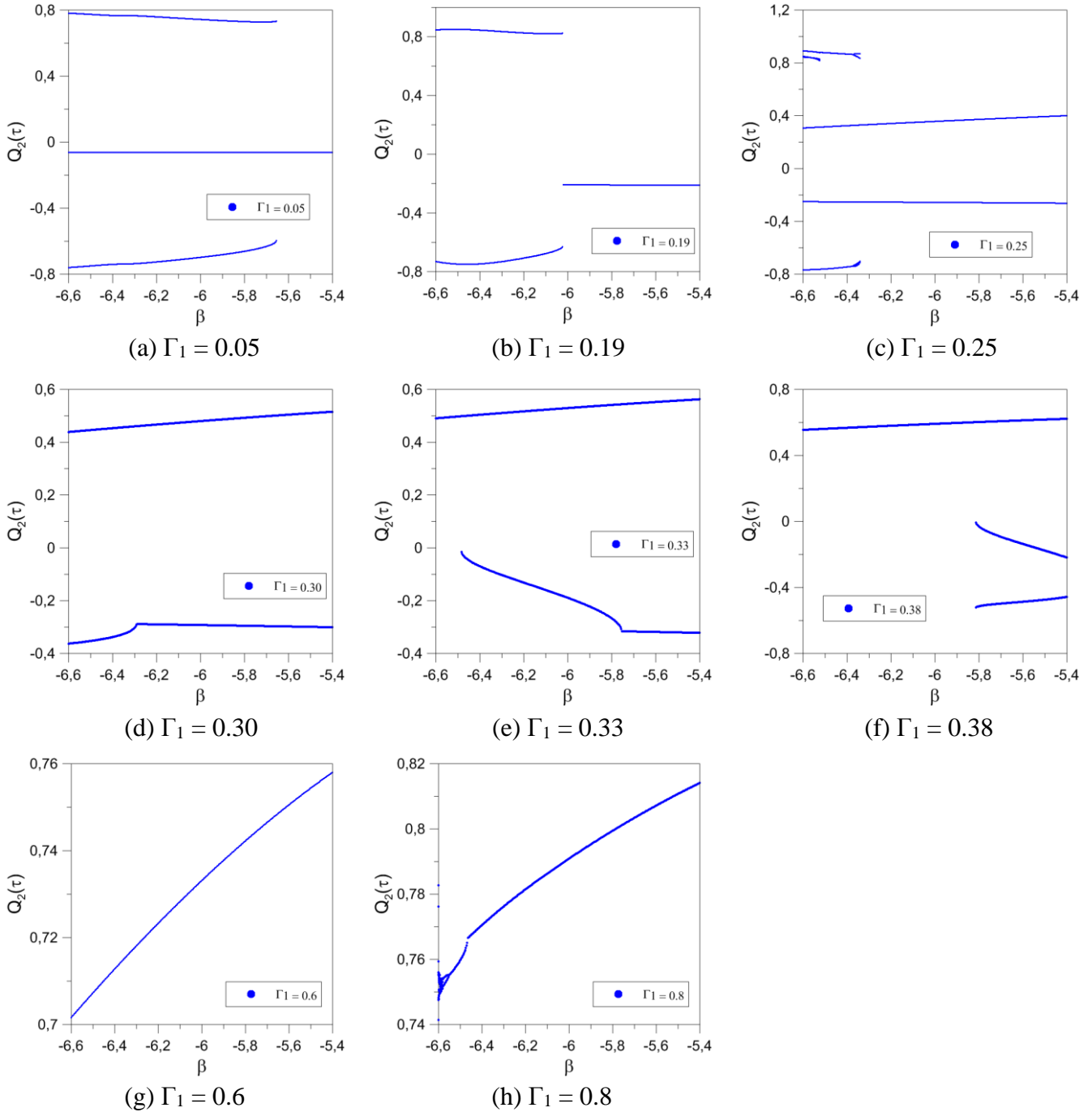


O diagrama de bifurcação para $\beta = -6.6$, representado pela cor azul na Figura 4.18, apresenta um comportamento análogo ao parâmetro nominal de β (cor preta), com a redução de soluções estáveis a medida que se aumenta o valor de Γ_1 . Mas essa incerteza apresenta uma

particularidade para valores de Γ_1 entre 0.25 e 0.28, que é a presença de quatro soluções periódicas estáveis, característica que não é apresentada por nenhuma outra bifurcação.

Figura 4.19 –Diagrama de bifurcação para o parâmetro β em relação a $Q_2(\tau)$ para determinados valores de Γ_1 .

$$(\Omega = 1.1, \delta = 4, \lambda = 4 \text{ e } \zeta = 0.1)$$



Já a incerteza de $\beta = -5.4$, representado pela cor vermelha na Figura 4.18, apresenta um número menor de soluções estáveis logo no início do diagrama de bifurcação, apresentando na maioria

dos seus trechos somente uma solução periódica estável. Porém, ela apresenta uma particularidade, que é a presença de uma duplicação de período para Γ_1 entre 0.36 a 0.5, obtendo assim nesse trecho três soluções periódicas estáveis para o mesmo valor de Γ_1 , como ilustra a Figura 4.18.

Para analisar o comportamento dos diagramas de bifurcações quanto a variação presente no parâmetro β , apresentado na Figura 4.18, foram obtidos diagramas de bifurcação que relacionam os valores de $Q_2(\tau)$ com os valores de β , variando de entre -6.6 a -5.4 que são os limites da incerteza analisadas neste trabalho para o parâmetro β .

O método numérico empregado para construção da Figura 4.19 foi o mesmo utilizado para a obtenção dos diagramas de bifurcações, só que ao invés de se incrementar os valores de Γ_1 , deixou-se ele pré-determinado e variou-se os valores do parâmetro β , obtendo para um determinado valor de Γ_1 o comportamento de β em relação a $Q_2(\tau)$.

Confrontando as Figuras 4.18 e 4.19, pode-se observar que o comportamento do diagrama de bifurcação estão em consonância a medida que se incrementa o valor de β . Reforçando que de forma geral, a medida que se incrementa o valor de Γ_1 diminui o número de soluções periódicas estáveis, embora haja presença de algumas particularidades. A presença de quatro soluções estáveis na incerteza de $\beta = -6.6$, para $\Gamma_1 = 0.25$, pode ser observado na Figura 4.19 (c). Já o comportamento com três soluções periódicas estáveis para a incerteza de $\beta = -5.4$, para valores de $\Gamma_1 = 0.38$, pode ser comprovado na Figura 4.19 (f). O comportamento com a presença de uma solução periódica estável no diagrama de bifurcação, com e sem incerteza, apresentadas na Figura 4.18 para incrementos maiores de Γ_1 fica evidente na Figura 4.19 (g) e (h).

A incerteza no parâmetro β afeta de forma significativa o comportamento no diagrama de bifurcações da Figura 4.18, fazendo surgir outras soluções periódicas estáveis para o mesmo valor de Γ_1 .

Para a análise do comportamento da incerteza do parâmetro δ nos diagramas de bifurcações, assim como no caso de β , além da bifurcação para o parâmetro nominal, dado pela Figura 4.16 (d), foram obtidas também as bifurcações para as incertezas apresentadas na seção 4.1.3 no

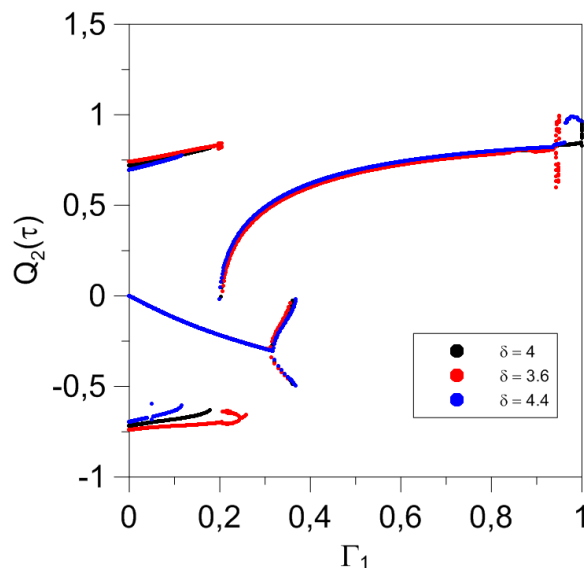
parâmetro e no caso analisado. Para permitir a comparação do comportamento das bifurcações com incerteza foi construída a Figura 4.20.

O diagrama de bifurcação para o parâmetro nominal ($\delta = 4$), representado pela cor preta na Figura 4.20, possui o comportamento igual ao parâmetro nominal da Figura 4.18, por se tratar da mesma bifurcação, visto que nesse caso o parâmetro $\beta = -6$ é mantido fixo na análise das bifurcações. Observa-se que para este caso analisado à medida que se incrementam os valores de Γ_1 diminui o número de soluções periódicas estáveis do sistema.

Tanto a bifurcação da incerteza de $\delta = 3.6$, representada pela cor vermelha, quanto da incerteza de $\delta = 4.4$, representada pela cor azul, como ilustrado na Figura 4.20, apresentam um comportamento análogo ao parâmetro nominal quanto ao número de soluções periódicas estáveis.

A incerteza no parâmetro δ não afeta de forma significativa o comportamento no diagrama de bifurcações da Figura 4.20, elas apresentam o mesmo número de soluções estáveis com o incremento de Γ_1 , na maioria dos seus trechos.

Figura 4.20 – Diagrama de bifurcação do tipo *Butterfly* considerando as incertezas no parâmetro δ . ($\Omega = 1.1$, $\beta = -6$, $\lambda = 4$ e $\xi = 0.1$)

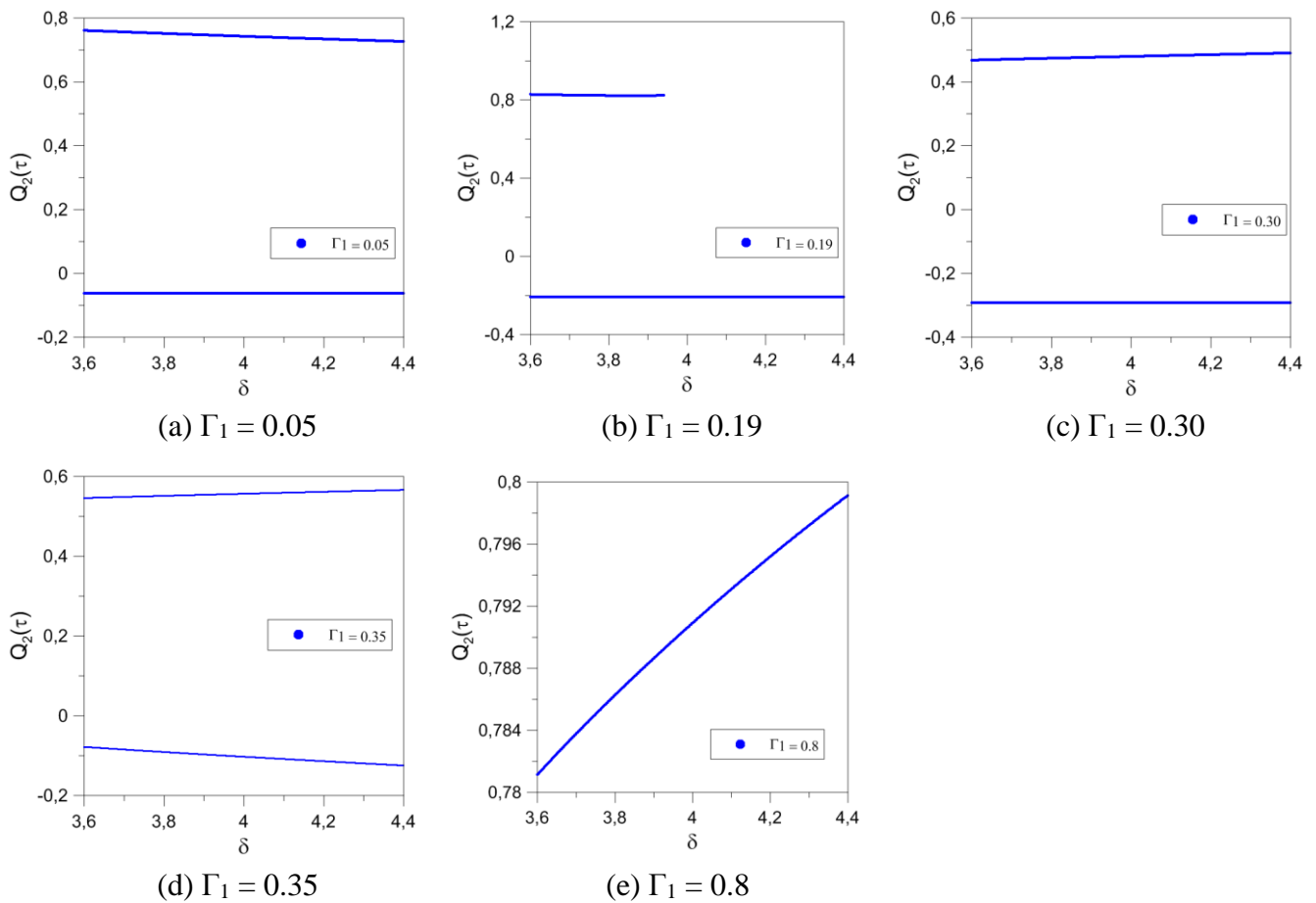


Esse comportamento análogo entre as bifurcações com e sem a incerteza pode ser observada na Figura 4.21, onde são relacionados os valores de $Q_2(\tau)$ com os valores de δ , variando de 3.6 a 4.4, que são os limites da incerteza analisadas neste trabalho para o parâmetro em questão.

A quantidade de soluções periódicas estáveis para o mesmo valor de Γ_1 são as mesmas, independentemente do incremento do valor de δ . Para valores de $\Gamma_1 < 0.35$ se tem duas soluções periódicas estáveis, já para valores maiores que 0.35 existe apenas uma única solução periódica estável, como ilustrado na Figura 4.21. A única particularidade aparece quando $\Gamma_1 = 0.19$, Figura 4.21 (b), onde dependendo do valor de δ a bifurcação pode apresentar uma ou duas soluções periódicas estáveis.

Figura 4.21 – Diagrama de bifurcação do parâmetro δ em relação a $Q_2(\tau)$ para determinados valores de Γ_1 .

$$(\Omega = 1.1, \beta = -6, \lambda = 4 \text{ e } \xi = 0.1)$$



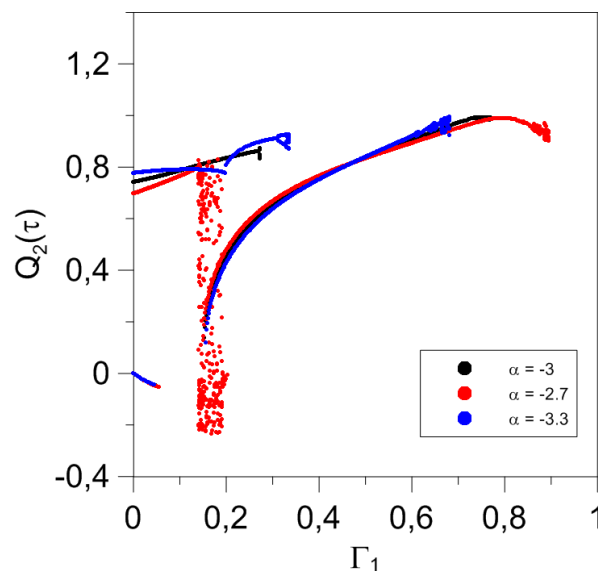
Para a bifurcação do tipo *Swallowtail* existe apenas um parâmetro determinístico, α , que será analisado para avaliar a influência da incerteza desse parâmetro no diagrama de bifurcação.

Assim como na análise para o caso *Butterfly*, além da bifurcação para o parâmetro nominal ($\alpha = -3$), Figura 4.17 (d), foram obtidas também os diagramas de bifurcação para as incertezas apresentadas na seção 4.1.3 no parâmetro e no caso analisado. Para permitir a comparação do

comportamento entre os diagramas de bifurcação com incerteza, construiu-se a Figura 4.22 com os casos limites do valor do parâmetro α .

O diagrama de bifurcação, para $\alpha = -3$, possui um traçado diferente, à medida que se incrementa o valor de Γ_1 . Para valores de Γ_1 , maiores que 0.27, ou entre 0.15 e 0.19, o diagrama de bifurcação apresenta apenas uma solução periódica estável. Para valores de Γ_1 menores que 0.27, para um mesmo valor de Γ_1 o diagrama de bifurcação apresenta duas soluções periódicas estáveis.

Figura 4.22 – Diagrama de bifurcação do tipo *Swallowtail* considerando as incertezas no parâmetro α .
($\Omega = 1.1$, $\lambda = 4$ e $\xi = 0.1$)



O diagrama de bifurcação para $\alpha = -3.3$, representado pela cor azul, na Figura 4.22, apresenta um comportamento análogo ao diagrama de bifurcação com parâmetro nominal (cor preta), com a redução do número de soluções periódicas estáveis a medida que se aumenta o valor de Γ_1 . Mas essa incerteza apresenta uma particularidade quando Γ_1 assume o valor de 0.32 que é a presença de três soluções periódicas estáveis, característica que não é apresentada por nenhuma das outras bifurcações apresentadas na Figura 4.22.

Já o diagrama de bifurcação para $\alpha = -2.7$, dado pela cor vermelha na Figura 4.22, também apresenta um comportamento análogo ao diagrama de bifurcação com parâmetro nominal, apresentando, na maioria nos seus trechos, uma ou duas soluções estáveis a medida que se

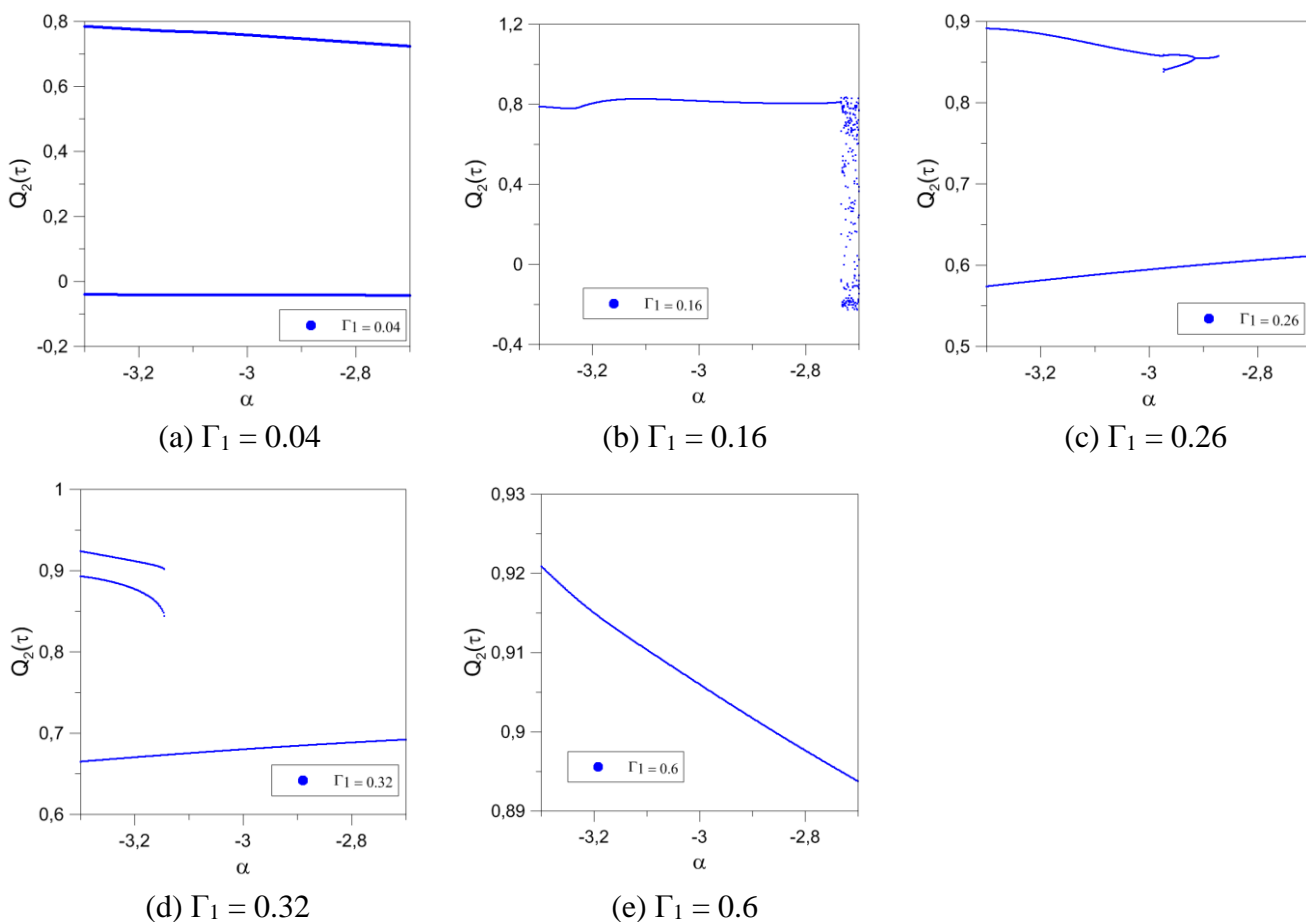
incrementa o valor de Γ_1 . Porém, o diagrama de bifurcação apresenta uma particularidade, que é a presença de soluções caóticas para Γ_1 entre 0.15 e 0.19.

Para analisar o comportamento dos diagramas de bifurcações, apresentados na Figura 4.22, foram obtidos diagramas que relacionam os valores de $Q_2(\tau)$ com os valores de α , variando de -3.3 a -2.7 que são os limites da incerteza analisadas para o parâmetro α .

Confrontando as Figuras 4.22 e 4.23, pode-se observar que o comportamento dos diagramas de bifurcações estão em consonância a medida que se incrementa o valor de α , reforçando que de forma geral, a medida que se incrementa o valor de Γ_1 diminui o número de soluções periódicas estáveis.

Figura 4.23 – Diagrama de bifurcação do parâmetro α em relação a $Q_2(\tau)$ para determinados valores de Γ_1 .

$$(\Omega = 1.1, \lambda = 4 \text{ e } \xi = 0,1)$$



A presença da solução caótica, para $\alpha = -2.7$, assim como o trecho com apenas uma solução periódica estável para $\Gamma_1 = 0.16$, pode ser observado na Figura 4.23 (b). Já o comportamento

particular com três soluções periódicas para $\alpha = -3.3$ e $\Gamma_1 = 0.32$, pode ser comprovado na Figura 4.23 (d). O traçado com apenas uma solução periódica estável dos diagramas de bifurcação com e sem incerteza apresentadas na Figura 4.22, para incrementos maiores de Γ_1 fica evidente na Figura 4.23 (e).

A incerteza no parâmetro α afeta de forma significativa o comportamento no diagrama de bifurcações da Figura 4.22, fazendo surgir outras soluções periódicas estáveis para o mesmo valor de Γ_1 e até soluções caóticas em determinados trechos.

Assim como a bifurcação do tipo *Butterfly*, a *Swallowtail* também é afetada de forma significativa em relação a variação das incertezas. Dependendo do valor que se insere a incerteza pode acontecer um aumento no número de soluções estáveis, mas dependendo do valor também pode gerar soluções caóticas. A partir das Figuras 4.18, 4.20 e 4.22 é possível afirmar que, independentemente da incerteza e do caso de bifurcação analisado, para valores de Γ_1 maiores que 0.5 as soluções são estáveis, apresentando somente uma solução periódica. Pode-se notar também, que as incertezas afetam mais o comportamento dos diagramas de bifurcações para valores de Γ_1 menores que 0.5.

Para se avaliar a aleatoriedade dessas incertezas no sistema estudado, aplica-se o método do polinômio de caos, seção 3.3.3, para obter-se as equações determinísticas equivalentes, a partir da equação (3.38), que permitirá a obtenção de informações estatísticas do problema (média e variância) sem a necessidade de gerar amostras. Neste trabalho serão avaliados a aleatoriedade nos parâmetros β , δ e α .

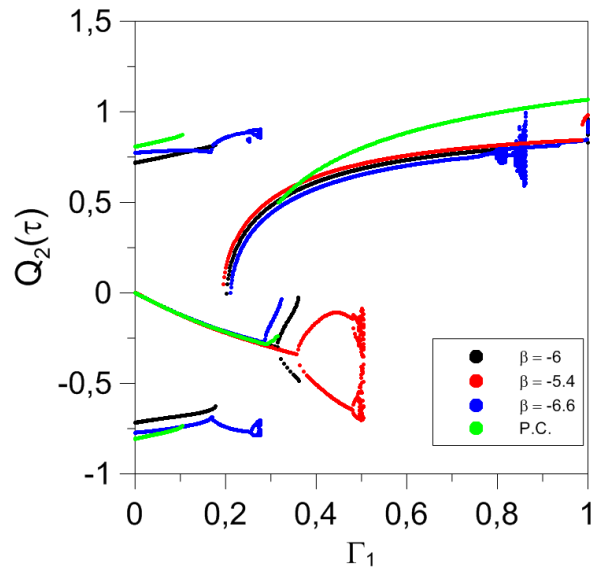
Todos os diagramas de bifurcação deste trabalho que representam a variabilidade imposta pelas incertezas, obtidas pelo polinômio de Legendre-Caos, equação (3.41), foram obtidas numericamente através da aplicação do método de Runge-Kutta de quarta ordem, incrementando-se a amplitude da excitação harmônica, Γ_1 , e mantendo-se a frequência de excitação, Ω , constante e igual 1.1.

O incremento do número de polinômio de Legendre-Caos na solução do problema discretiza com mais precisão a função de densidade de probabilidade da variável aleatória, equação (3.40), garantindo ao problema maior confiabilidade da cobertura do espectro amostral (XIU;

KARNIADAKIS, 2002). Visando isso, será utilizado para análise das aleatoriedades dos três parâmetros (β , δ e α) os seis primeiros termos do polinômio de Legendre-Caos.

Figura 4.24 – Diagramas de bifurcação determinístico e não determinístico do tipo *Butterfly*, com incerteza em β .

$$(\Omega = 1.1, \delta = 4, \lambda = 4 \text{ e } \xi = 0.1)$$



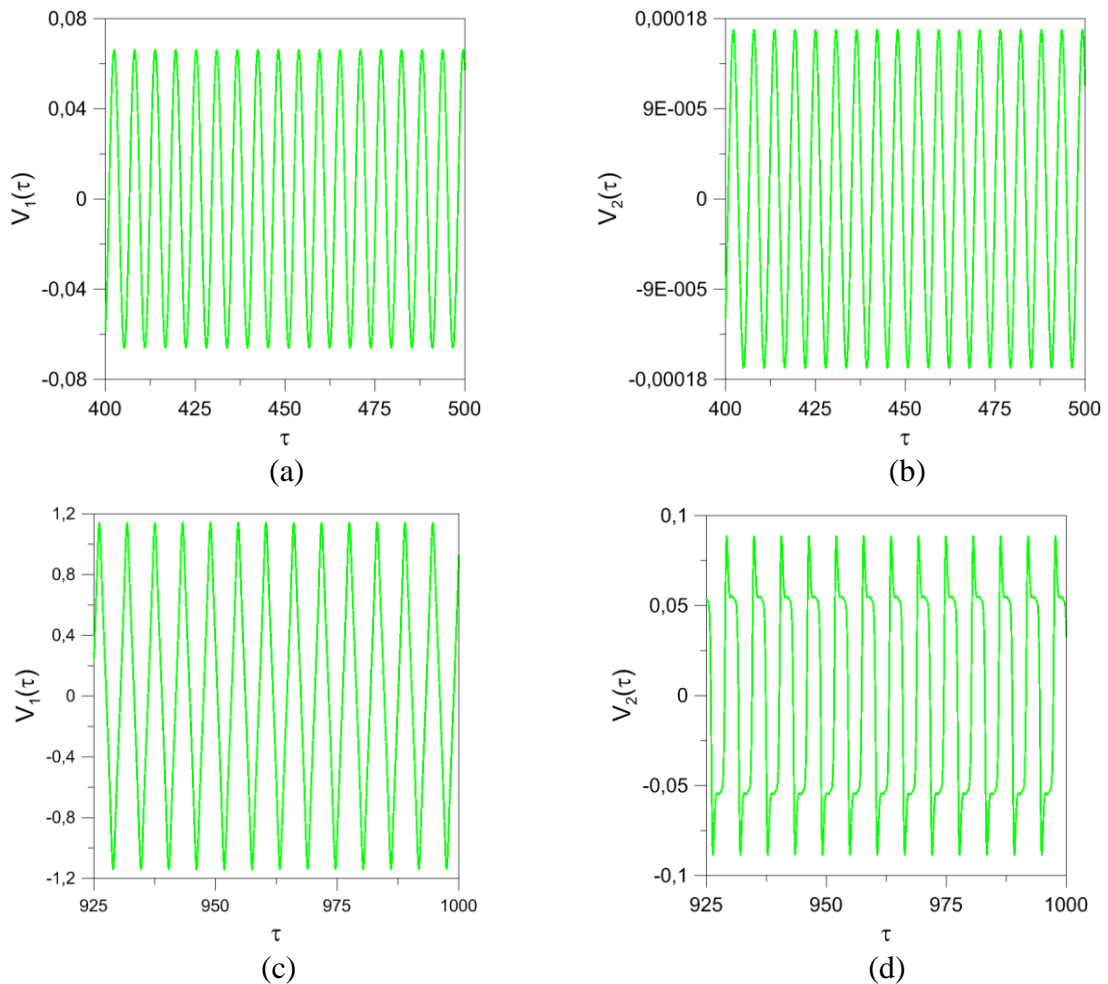
A Figura 4.24 apresenta os diagramas de bifurcação do tipo *Butterfly*, cujo o parâmetro de controle é β , tanto para o caso determinísticos quanto para o não determinístico. O diagrama de bifurcação para o caso estocástico está representado pela cor verde. Já os diagramas de bifurcação para o parâmetro nominal e para as incertezas, estão representados pelas mesmas cores relacionadas anteriormente na Figura 4.18.

De modo a comprovar a eficiência do método do polinômio de caos no estudo do problema não determinístico, comparam-se os diagramas de bifurcação determinístico, cujo parâmetro de controle é β , com o diagrama obtido para o caso não determinístico (verde) e considerando as mesmas condições de pré-carregamento. Para a validação do método é necessário que a bifurcação não determinística represente a variabilidade do parâmetro β no intervalo $-6.6 < \beta < -5.4$, compreendido entre as curvas em azul e em vermelho, respectivamente.

Analisando a Figura 4.24, observa-se que o diagrama para o caso não determinístico se comporta como a média dos limites analisados no trecho inicial da bifurcação, quando $\Gamma_1 < 0.32$. A medida que se incrementa Γ_1 , a bifurcação tem um comportamento diferente do trecho inicial, compreendido ente as fronteiras das incertezas (azul e vermelha). Isso ocorre porque a

técnica do polinômio de caos incorpora à análise do problema a variância das amostras na resposta no tempo do sistema, como ilustrado na Figura 4.25 que apresenta além da média do processo dado por $V_1(t)$ a variância da resposta dada por $V_2(t)$. Na Figura 4.25 (a) e (b), obtida para o valor de $\Gamma_1 = 0.05$, observa-se que a variância é pequena levando a resposta não determinística do sistema a se aproximar da média aritmética. Já a Figura 4.25 (c) e (d), obtida para um valor de $\Gamma_1 = 0.33$, a variância é suficiente para modificar a resposta não determinística do sistema.

Figura 4.25 – Resposta no tempo não determinística para a bifurcação do tipo *Butterfly*, com incerteza em β : $\Gamma_1 = 0.05$ (a) $V_1(t)$ (média) e (b) $V_2(t)$ (variância); $\Gamma_1 = 0.33$ (c) $V_1(t)$ (média) e (d) $V_2(t)$ (variância). ($\Omega = 1.1$)



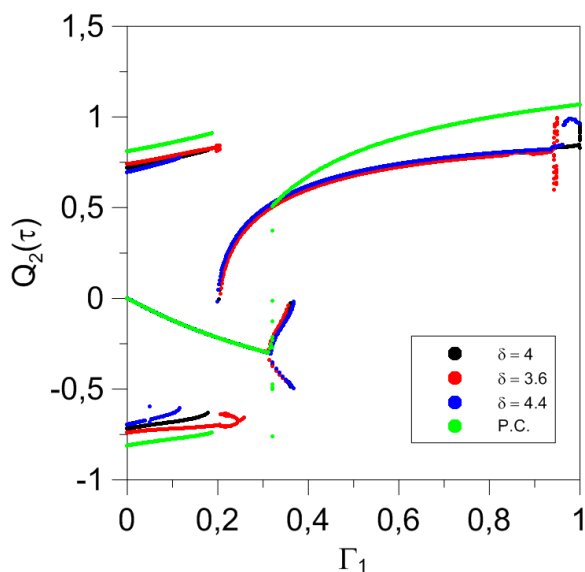
Cabe ressaltar que para $\Gamma_1 < 0.1$, o diagrama de bifurcação regido pelo polinômio de caos, apresenta três soluções estáveis para o mesmo valor de Γ_1 , assim como as bifurcações do parâmetro nominal (preto) e da incerteza $\beta = -6.6$ (azul), mas apesar do comportamento análogo ele não se comporta como a média das respostas, que seria posicionado entre as duas

bifurcações determinística, pelo contrário, ele se comporta como sendo um limite inferior ou superior da Figura 4.24. A resposta não determinística do polinômio de caos se tornar uma ferramenta interessante para estimar diretamente a média da resposta dinâmica, pelo menos, no vale potencial pré-flambagem.

Já a Figura 4.26 ilustra os diagramas de bifurcação do tipo *Butterfly* cujo o parâmetro de controle agora é δ . São representados tanto as bifurcações para o caso determinísticos quanto para o não determinístico, sendo este obtido considerando os seis primeiros termos do polinômio de Legendre-Caos da equação (3.41), representado pela cor verde. Já os diagramas de bifurcação para o parâmetro nominal e para as incertezas, estão representados pelas mesmas cores relacionadas anteriormente na Figura 4.20.

Figura 4.26 – Diagramas de bifurcação determinístico e não determinístico do tipo *Butterfly*, com incerteza em δ .

$$(\Omega = 1.1, \lambda = 4, \beta = -6, \text{ e } \xi = 0.1)$$



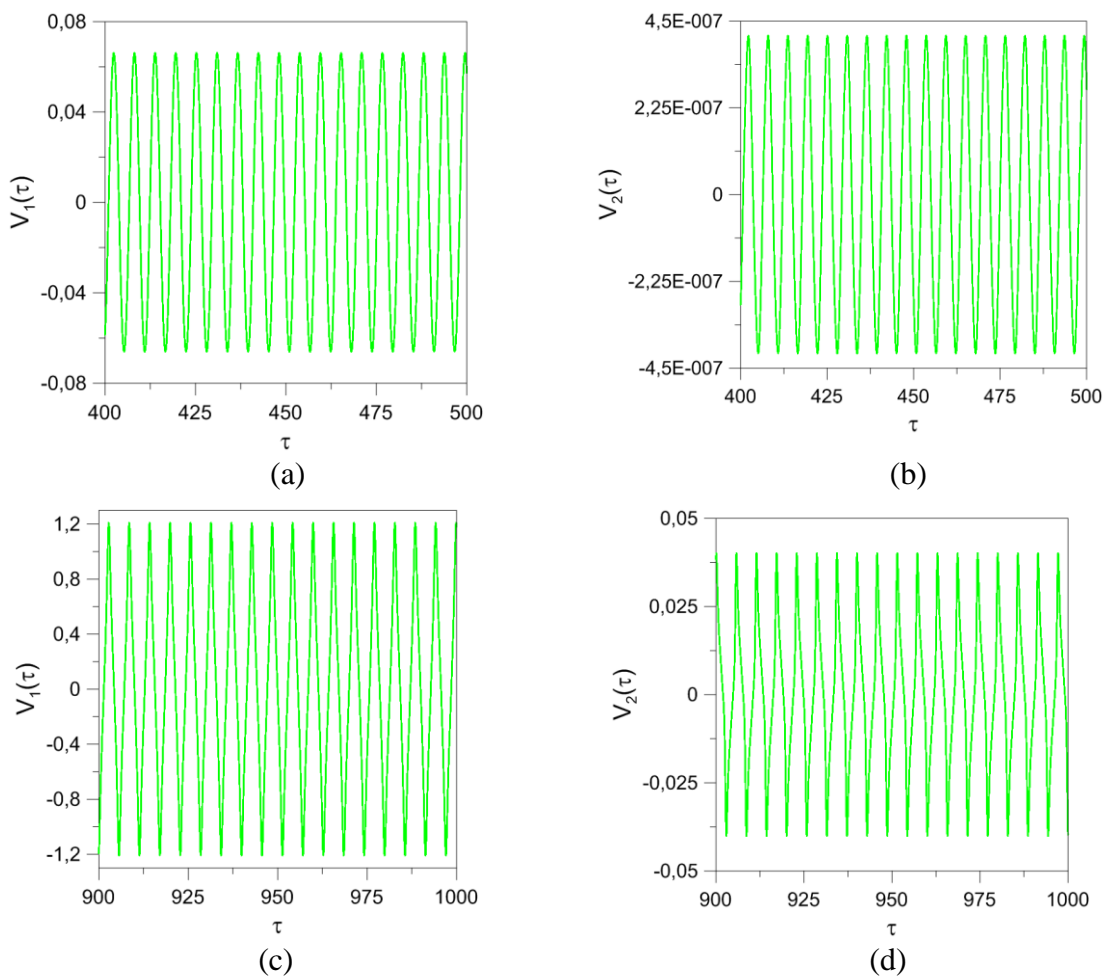
Para se permitir a comparação entre os diagramas de bifurcação, o diagrama para o caso não determinístico (verde) foi obtido considerando as mesmas condições de pré-carregamento. Para a validação do método é necessário que a bifurcação não determinística represente a variabilidade do parâmetro δ no intervalo $3.6 < \delta < 4.4$, compreendido pelas curvas em vermelho e em azul, respectivamente.

Analisando a Figura 4.26, observa-se que de forma análoga ao parâmetro de controle β , o diagrama para o caso não determinístico em δ se comporta como a média dos limites analisados

somente no trecho inicial da bifurcação, para $\Gamma_1 < 0.32$, e também tem um comportamento diferente do trecho inicial à medida que se incrementa Γ_1 .

A explicação para este comportamento deve-se a incorporação da variância das amostras na resposta no tempo à análise, como ilustrado na Figura 4.27 que apresenta a média do processo, dado por $V_1(t)$, e a variância da resposta, dada por $V_2(t)$, para os valores de $\Gamma_1 = 0.05$ e $\Gamma_1 = 0.8$, respectivamente. Na Figura 4.27 (a) e (b), obtida para o valor de $\Gamma_1 = 0.05$, observa-se que a variância é quase nula levando a resposta não determinística do sistema a se comporta como a média aritmética das respostas. Já a Figura 4.27 (c) e (d), obtida para um valor de $\Gamma_1 = 0.8$, a variância é o suficiente para modificar a resposta não determinística do sistema.

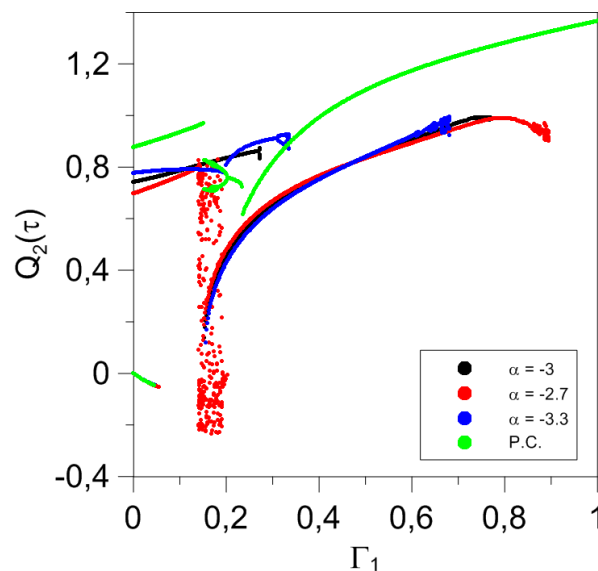
Figura 4.27 – Resposta no tempo não determinística para a bifurcação do tipo *Butterfly*, com incerteza em δ : $\Gamma_1 = 0.05$ (a) $V_1(t)$ (média) e (a) $V_2(t)$ (variância); $\Gamma_1 = 0.8$ (c) $V_1(t)$ (média) e (d) $V_2(t)$ (variância). ($\Omega = 1.1$)



A partir da Figura 4.26, observa-se que para $\Gamma_1 < 0.19$, o diagrama de bifurcação não determinístico (verde), apresenta três soluções periódicas estáveis para o mesmo valor de Γ_1 , assim como as bifurcações do parâmetro nominal (preto) e da incertezas em δ (azul e vermelha), mas apesar do comportamento análogo ele não se comporta como a média das respostas nas suas três soluções, que seria posicionado entre as duas bifurcações determinística. O atrator central se comporta com a média aritmética das respostas, já os atratores da esquerda e direita se comportam como sendo um limite inferior e superior, respectivamente, na Figura 4.26.

Na bifurcação do tipo *Swallowtail* o parâmetro de controle é α , na Figura 4.28 é ilustrado os diagramas de bifurcação para o caso determinísticos e não determinístico do problema. Assim como as outras análises estocásticas do trabalho, serão considerados os seis primeiros termos do polinômio de Legendre-Caos da equação (3.41) para a construção do diagrama de bifurcação para o caso não determinístico, representado pela cor verde. Já os diagramas de bifurcação para o parâmetro nominal e para as incertezas, estão representados pelas mesmas cores relacionadas anteriormente na Figura 4.22.

Figura 4.28 – Diagramas de bifurcação determinístico e não determinístico do tipo *Swallowtail*, com incerteza em α . ($\Omega = 1.1$, $\lambda = 4$, e $\xi = 0.1$).



De modo a comprovar a eficiência do método do polinômio de caos no estudo do problema não determinístico, comparam-se os diagramas de bifurcação determinístico com o diagrama obtido para o caso não determinístico (verde) e considerando as mesmas condições de pré-carregamento. Para a validação do método é necessário que a bifurcação não determinística

represente a variabilidade do parâmetro α no intervalo $-3.3 < \alpha < -2.7$, compreendido entre as curvas em azul e em vermelho, respectivamente.

Analisando a Figura 4.28, observa-se que para a bifurcação do tipo *Swallowtail*, o diagrama de bifurcação para o caso estocástico é mais afetado com a incorporação da variância das amostras na resposta no tempo, ele se comporta como a média das respostas somente em um pequeno trecho inicial da bifurcação, quando $\Gamma_1 < 0.04$. Tendo um comportamento diferente desse trecho inicial, a medida que se incrementa Γ_1 . Observa-se que nesse trecho inicial ($\Gamma_1 < 0.04$), o diagrama não determinístico, apresenta duas soluções periódicas estáveis para o mesmo valor de Γ_1 , assim como as bifurcações do parâmetro nominal (preto) e da incertezas em α (azul e vermelha).

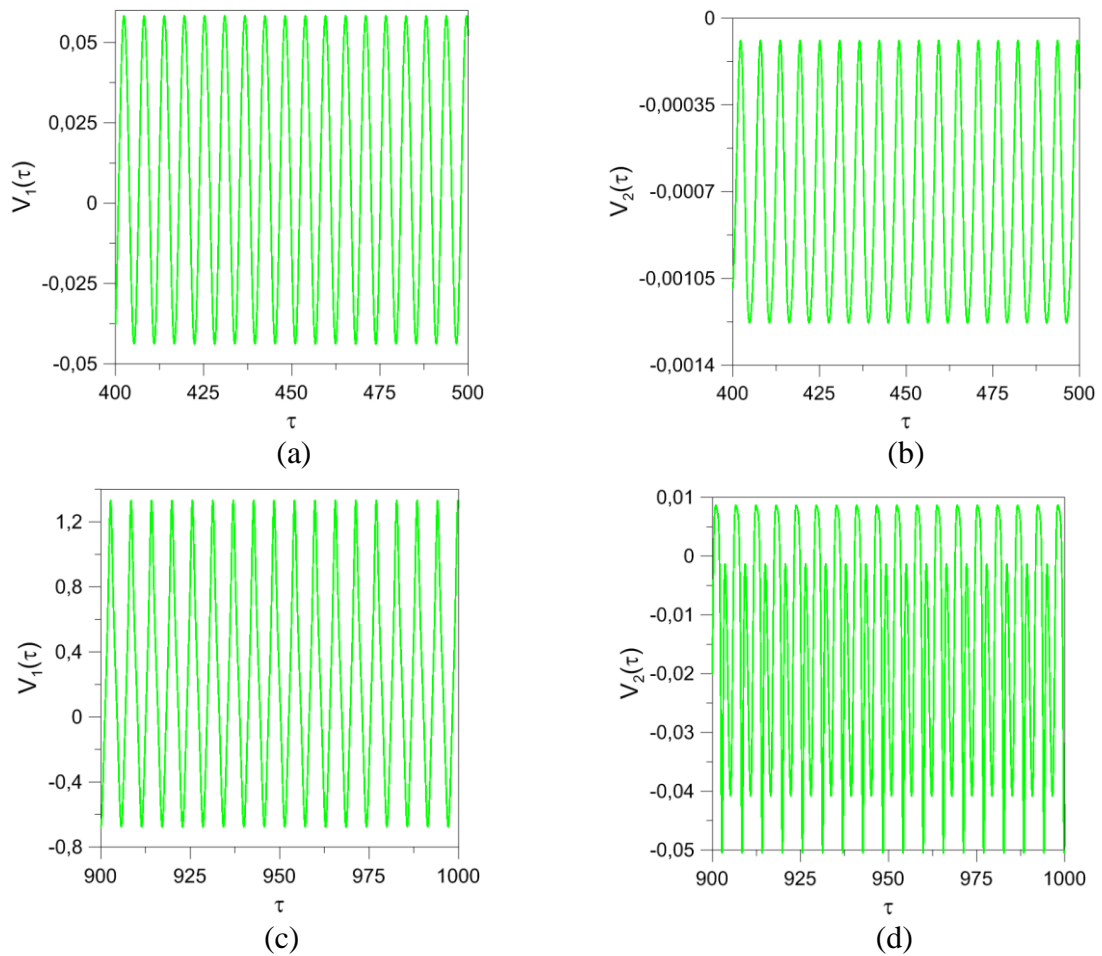
Cabe ressaltar que na região onde a incerteza de $\alpha = -2.7$ apresenta uma solução caótica, o diagrama de bifurcação regido pelo polinômio de caos, apresenta duas soluções estáveis para o mesmo valor de Γ_1 , como ilustrado na Figura 4.28.

Assim como a bifurcação do tipo *Butterfly*, Figuras 4.24 e 4.26, a bifurcação do tipo *Swallowtail*, Figura 4.28, possui um comportamento análogo em relação as suas bifurcações estocásticas. As mesmas apresentam incorporação à análise do problema a variância das amostras na resposta no tempo do sistema.

Na Figura 4.29 representa a resposta no tempo estocástica, para a bifurcação do tipo *Swallowtail* incerteza em α , para $\Gamma_1 = 0.04$ e 0.65 . Onde pode ser observado que para o primeiro caso a variância é pequena, levando a resposta não determinística do sistema a se comportar com a média das respostas determinísticas, já para o segundo caso, a variância é o suficiente para modificar a resposta.

Apesar do comportamento análogo relação as suas respostas estocásticas, a bifurcação do tipo *Butterfly*, se comporta da maneira esperada para amplitudes maiores de excitação harmônica ($\Gamma_1 < 0.32$), já a do tipo *Swallowtail* mostra ter uma sensibilidade maior ao incremento de Γ_1 , saindo da fronteira paramétrica para pequenas amplitudes de excitação harmônica ($\Gamma_1 < 0.04$).

Figura 4.29 – Resposta no tempo não determinística para a bifurcação do tipo *Swallowtail*, com incerteza em α : $\Gamma_1 = 0.04$ (a) $V_1(t)$ (média) e (a) $V_2(t)$ (variância); $\Gamma_1 = 0.65$ (c) $V_1(t)$ (média) e (d) $V_2(t)$ (variância). ($\Omega = 1.1$)



4.2.3 Resposta no tempo e plano fase

Para avaliar a periodicidade das apresentadas nos diagramas de bifurcação anteriores, é observando, a seguir, a resposta no tempo e os planos fases das respostas do modelo discreto estudado. Deve-se ficar atento a sensibilidade das condições iniciais, pois, em uma integração no tempo com condições iniciais praticamente idênticas, ou seja, com pequenas variações em aproximação, podem divergir exponencialmente quando o movimento é caótico (MILLON, 1991).

Analisa-se a resposta no espaço fase para os dois tipos de bifurcação: *Butterfly* e *Swallowtail*, com as suas respectivas incertezas nos parâmetros. Deve-se observar quando o movimento for periódico, ou seja, a órbita representada no plano fase fornece uma curva fechada com um

número de seções de Poincarè, ou quando o movimento for caótico, com órbitas que nunca se repetem, apresentando um número indeterminado de seções de Poincarè. O mapeamento de Poincarè, que pode ser definido como uma sequência de pontos no espaço fase gerada pela “perfuração” de uma superfície generalizada, ou plano inserido, no espaço fase por uma trajetória contínua. Basicamente, esta técnica consiste em observar as coordenadas determinantes da posição e velocidade a cada ciclo ou período da força excitadora (MILLON, 1991).

Para qualquer tipo de resultado obtido nesta seção é necessária a integração ao longo do tempo do sistema de equações diferenciais ordinária de segunda ordem a partir de alguma método numérico. Neste trabalho a técnica escolhida é o método de Runge-Kutta de quarta ordem que apresenta uma boa estabilidade numérica.

Cabe ressaltar que os planos fases e as respostas no tempo, para os dois tipos de bifurcação analisados neste trabalho, foram obtidos assim como as análises anteriores para determinados valores de Γ_1 , um pré-carregamento $\overline{P}_0 = 0.5$, parâmetro de frequência $\Omega = 1.1$ e considerando uma taxa de amortecimento $\zeta = 0.1$. Os padrões em relações as cores de relaciona cada valor de incerteza também foi mantido.

Figura 4.30 – Planos fases e seções de Poincarè para vibrações forçadas amortecidas do tipo *Butterfly*, para os casos determinísticos e não determinísticos com incerteza em β . ($\Omega = 1.1, \delta = 4, \lambda = 4$ e $\zeta = 0.1$)

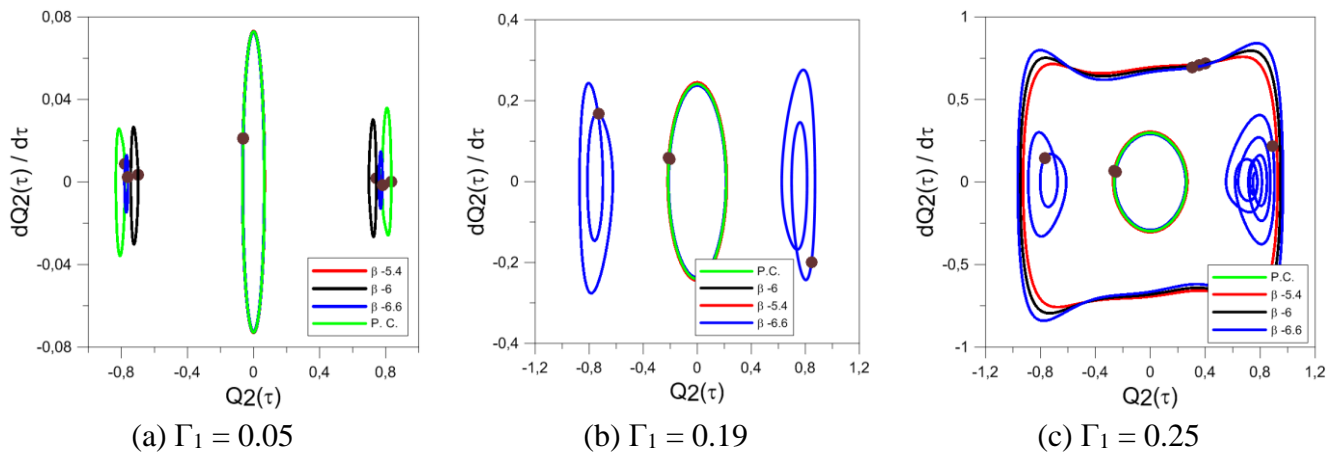
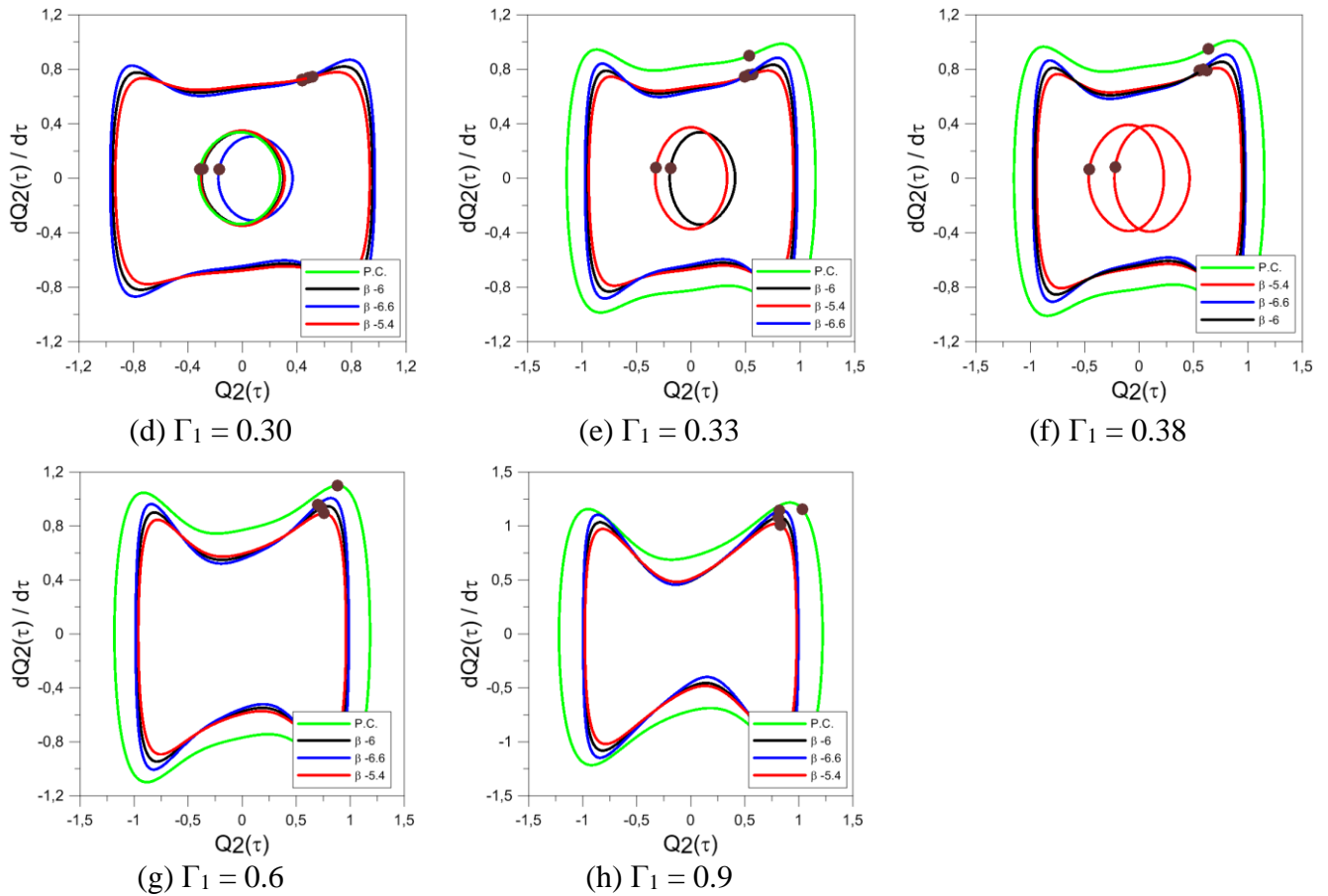


Figura 4.30 – Continuação...



A Figura 4.30 mostra as seções de Poincarè, dadas pelos pontos marrons, e a resposta do plano fase analisadas para as vibrações forçadas amortecidas do tipo *Butterfly* para os casos determinísticos e não determinísticos com incerteza em β . As relações de cores foram mantidas de acordo com as seções anteriores. Como pode ser observado, no estado permanente a resposta obtida para os planos fases tanto para os casos determinísticos quanto para os não determinísticos, para diversos valores de Γ_1 , estão em consonância com os diagramas de bifurcações da Figura 4.24, onde a medida que se incrementa os valores de Γ_1 diminui-se as soluções periódicas estáveis, como ilustrado na Figura 4.30(g) e (h), onde o plano fase possui periodicidade unitária.

Na Figura 4.30 (a) é ilustrado as seções de Poincarè e as respostas do plano fase para $\Gamma_1 = 0.05$, apresentando três planos fase com periodicidade unitária para o parâmetro nominal $\beta = -6$ (preto), $\beta = -6.6$ (azul), para $\beta = -5.4$ (vermelho) e para o polinômio de caos (verde), todas as órbitas apresentam um plano fase com periodicidade unitária. No plano fase da Figura 4.30 (a)

é possível observar como a resposta não determinística no vale potencial pré-flambagem converge para a média entre os valores analisados. Para as respostas presentes no vale pós-flambagem, a resposta não determinística da Figura 4.30 (a) converge para limites superiores ou inferiores das órbitas determinísticas avaliadas.

O comportamento da resposta estocásticas pode ser observado nas Figuras 4.30 (e), (f), (g) e (h), onde o seu plano fase e seções de Poincarè envolve os demais planos fase dos casos determinísticos, atingindo assim valores maiores que os limites impostos pelas incertezas, comportamento que se explica devido a incorporação da variância das amostras na resposta no tempo do sistema.

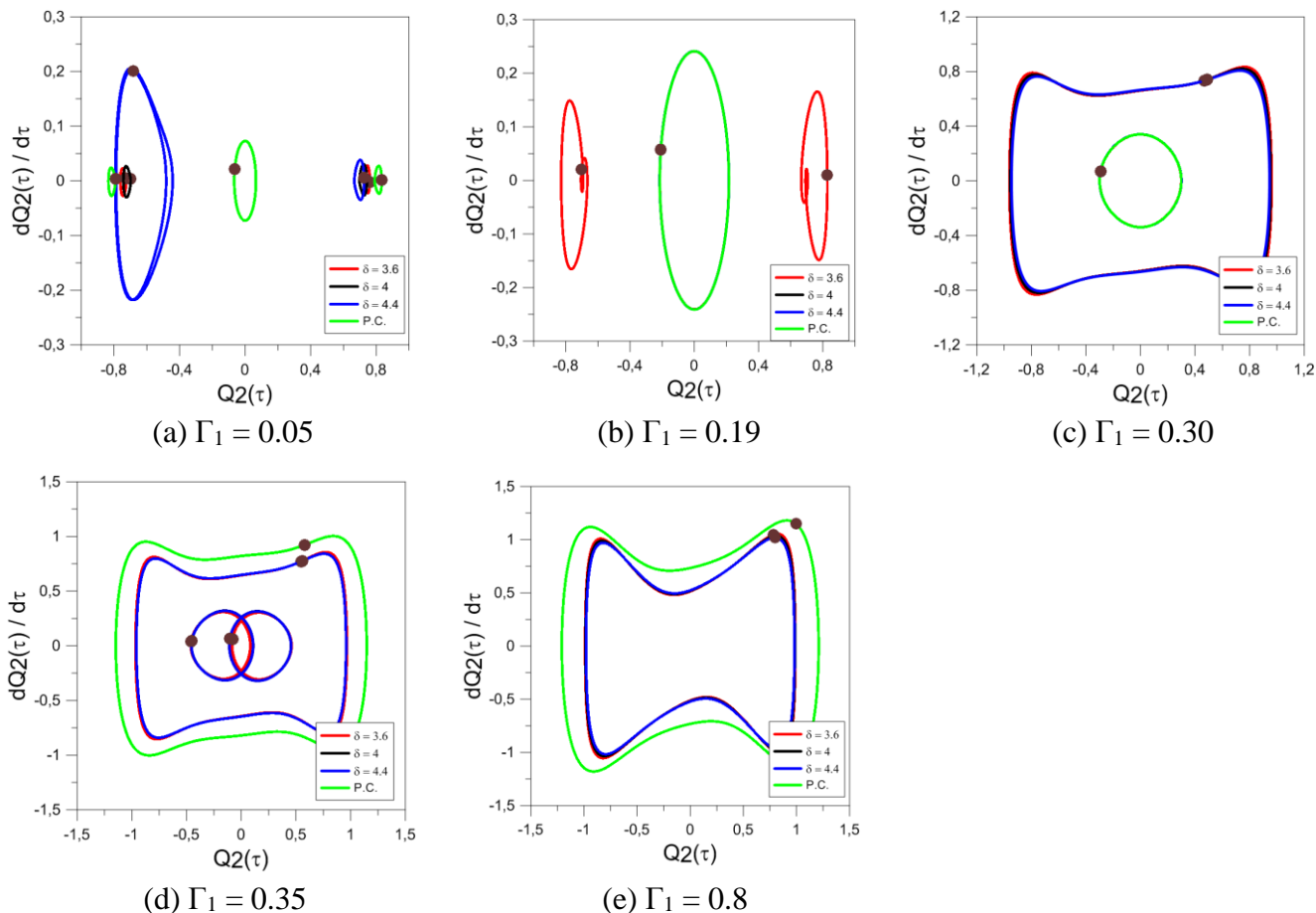
Os resultados da seção de Poincarè e plano fase para as vibrações forçadas amortecidas do tipo *Butterfly* para os casos determinísticos e não determinísticos com incerteza em δ são mostrados a seguir, na Figura 4.31. A partir da Figura 4.31 pode-se observar que, de forma análoga a incerteza em β , os resultados da seção de Poincarè e plano fase para as vibrações forçadas amortecidas do tipo *Butterfly*, estão de acordo com a Figura 4.26, tanto para os casos determinísticos quanto para os não determinísticos.

Na Figura 4.31(a) pode-se observar que, no estado permanente, a resposta obtida para $\Gamma_1 = 0.04$, as seções de Poincarè e as respostas do plano fase apresentam três órbitas com periodicidade unitária, tanto para os casos determinísticos quanto para o caso estocástico. Cabe ressaltar o acréscimo de soluções impostas pelas incertezas de $\delta = 3.6$ (vermelho), quando $\Gamma_1 = 0.19$, e de $\delta = 4.4$ (azul), quando $\Gamma_1 = 0.35$, representado respectivamente, nas Figuras 4.31 (b) e (c), onde as seções de Poincarè e as respostas dos planos fase apresentam três órbitas com periodicidade unitária para os dois valores de δ .

A partir das Figuras 4.30 e 4.31 pode-se observar que a variação dos valores de β e δ não afetam na forma das respostas dos planos fase para as vibrações amortecidas do tipo *Butterfly* à medida que se incrementa os valores de Γ_1 , nota-se que a independentemente de qual parâmetro está sendo analisando, que os planos fases apresentam formato similar para os mesmos valores de Γ_1 . Quanto a resposta não determinística, observa-se que quanto maior são os valores de Γ_1 , o que propicia vibrações de grande amplitude entre os vales pré e pós-flambagem, a resposta média do polinômio de caos não estará entre os limites do parâmetro analisado, prescrevendo órbitas com valores superiores aos valores determinísticos por conta da consideração da

variabilidade que o método impõe e por conta da variabilidade de soluções que coexistem simultaneamente.

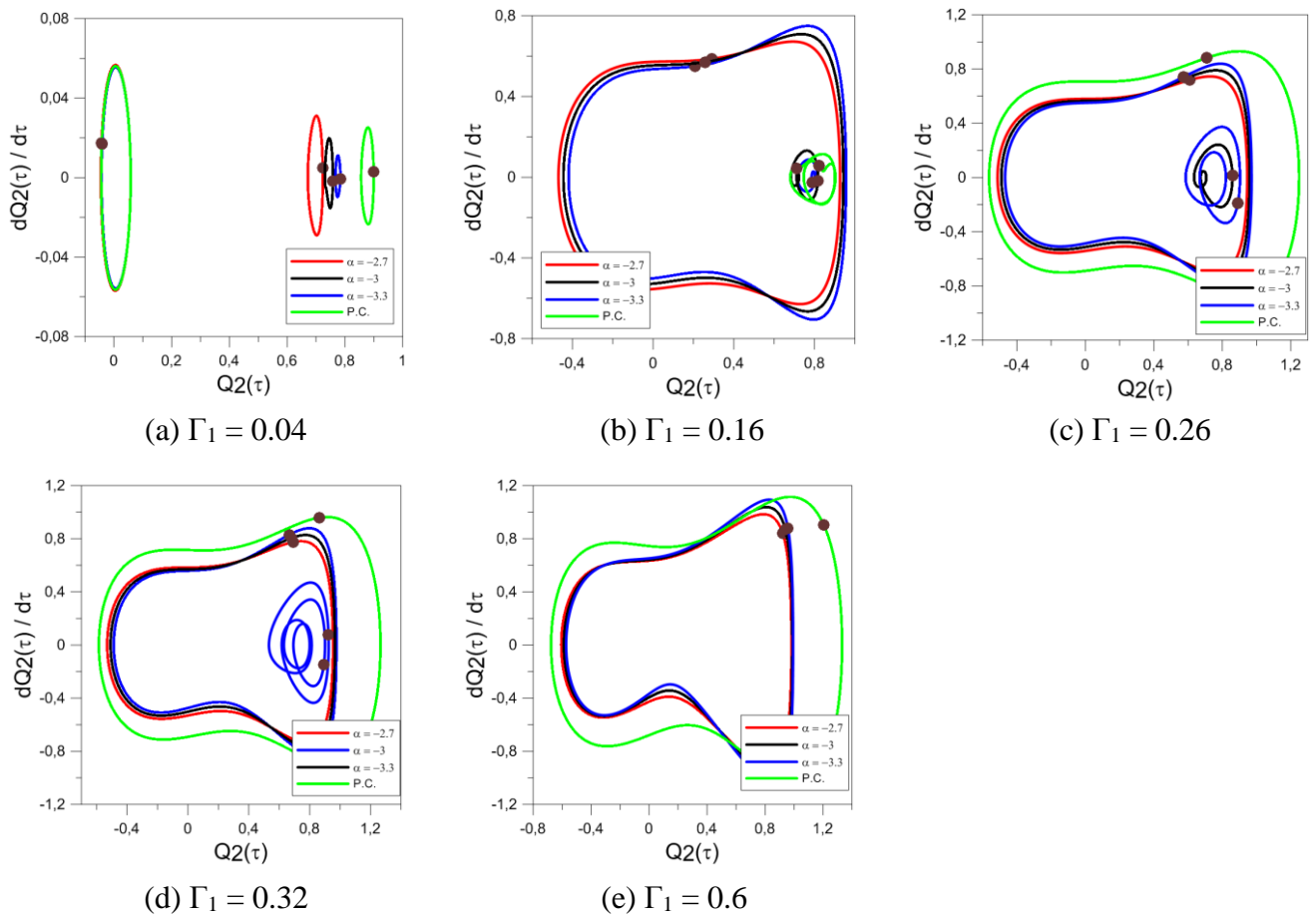
Figura 4.31 – Planos fases e seções de Poincaré para vibrações forçadas amortecidas do tipo *Butterfly* para os casos determinísticos e não determinísticos com incerteza em δ . ($\Omega = 1.1$, $\beta = -6$, $\lambda = -4$ e $\xi = 0.1$)



As análises dos planos fases e seções de Poincaré para as vibrações forçadas amortecidas do tipo *Swallowtail*, para os casos determinísticos e não determinísticos com incerteza em α , para determinados valores de Γ_1 são apresentados na Figura 4.32. As relações de cores foram mantidas de acordo com as seções anteriores.

Como pode se analisar, no estado permanente, a resposta obtida para os planos fases tanto para os casos determinísticos quanto para os não determinísticos estão em consonância com os diagramas de bifurcações da Figura 4.28, ou seja, diminuindo o número de soluções periódicas estáveis à medida que se incrementa o valor de Γ_1 , como ilustrado na Figura 4.32.

Figura 4.32 – Planos fases e seções de Poincarè para vibrações forçadas amortecidas do tipo *Swallowtail*, para os casos determinísticos e não determinísticos com incerteza em α . ($\Omega = 1.1$, $\lambda = 4$ e $\xi = 0.1$)

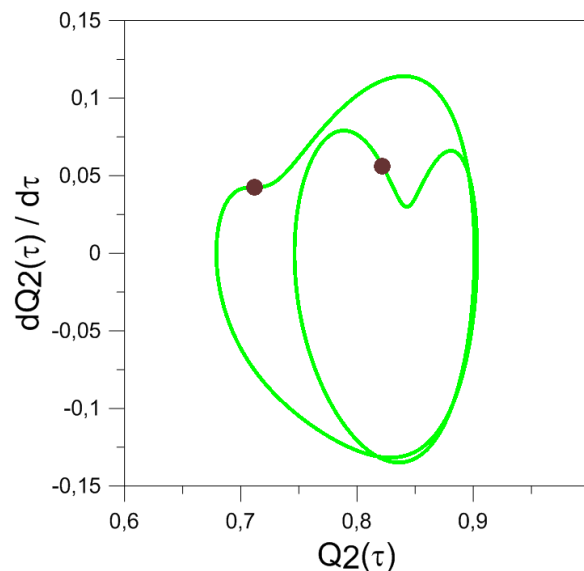


Para $\Gamma_1 = 0.04$, Figura 4.32 (a), os resultados da seção de Poincarè e plano fase apresentam duas órbitas com periodicidade unitária, tanto para os casos determinísticos quanto para o não determinístico. Cabe ressaltar que a resposta estocástica se comporta com uma média dos resultados apenas para um plano fase, para o plano fase das soluções do vale potencial pós-flambagem ele se comporta como um resultado limite, comportamento já esperando quando se analisa a Figura 4.28.

A medida que se incrementa os valores de Γ_1 as respostas do plano fase, para $\alpha = -2.7$ (vermelho), apresentam uma órbita com periodicidade unitária, já para o parâmetro nominal (preto) e para $\alpha = -3.3$ (azul) elas apresentam duas órbitas com periodicidade unitária, conforme ilustra as Figuras 4.32 (b) e (c).

Assim como na análise das respostas no tempo no caso não determinístico para a bifurcação do tipo *Butterfly*, a do tipo *Swallowtail* se comporta com valores limites à medida que se incrementa a amplitude a excitação harmônica, Figura 4.32 (c), (d) e (e), onde a órbita do plano fase do caso não determinístico envolve as órbitas dos casos determinísticos. A particularidade na resposta estocástica aparece quando $\Gamma_1 = 0.6$, onde ela apresenta uma órbita com periodicidade dupla, ou seja duas seções de Poincaré, conforme pode ser observado com mais clareza na Figura 4.33. Esses comportamentos já eram esperados a partir da análise da Figura 4.28.

Figura 4.33 – Plano fase e seção de Poincaré para vibrações forçadas amortecidas do tipo *Swallowtail*, para o caso não determinísticos com α como parâmetro de controle, para $\Gamma_1 = 0.16$. ($\Omega = 1.1$, $\lambda = 4$ e $\xi = 0.1$)



4.2.4 Bacias de atração dinâmica das bifurcações do tipo *Butterfly* e *Swallowtail*

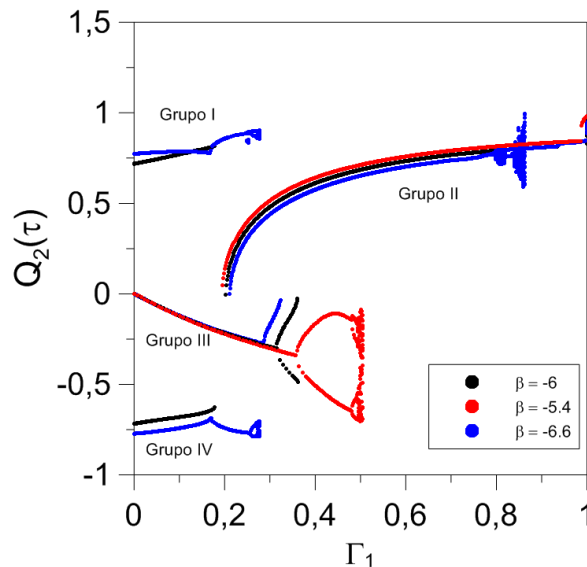
Foram obtidas as bacias de atração dinâmica através da equação (3.44), para os dois tipos de bifurcação avaliados neste trabalho e considerando-se as suas respectivas incertezas nos parâmetros determinísticos. Para o traçado das bacias foi utilizado o método de Runge-Kutta de quarta ordem, para calcular o atrator de cada ponto pertencente a um plano que varia os deslocamentos e a velocidade do sistema discreto de $[-1,1]$ e $[-3,3]$, respectivamente. Os eixos horizontais simbolizam a variação da condição inicial de deslocamento $Q_2(\tau)$ e enquanto os eixos verticais varia-se a condição inicial de velocidade, $dQ_2(\tau)/d\tau$.

Serão analisadas as bacias dos dois tipos de bifurcação: *Butterfly* e *Swallowtail*, para determinados valores de Γ_1 e um pré-carregamento $\overline{P}_0 = 0.5$, mantendo-se a frequência de excitação, Ω , constante no valor de 1.1, e considerando uma taxa de amortecimento $\xi = 0.1$. Este método, como no caso estático, consiste em discretizar o plano desejado para calcular a bacia de atração em um conjunto de células, avaliando a convergência dessas condições iniciais para um determinado atrator.

Para os dois tipos de bifurcação analisados: *Butterfly* e *Swallowtail*, não se obteve as bacias de atração para o caso não determinístico por entender que as mesmas não fariam sentido em uma comparação com os casos determinísticos, pois na análise não determinística se obtêm médias e variâncias enquanto que nas análises determinísticas se obtêm deslocamentos e velocidades.

Visando uma análise mais clara do comportamento das bacias de atração da bifurcação do tipo *Butterfly*, considerando a incerteza no parâmetro β , dividiu-se os diagramas de bifurcações apresentado na Figura 4.18 em quatro Grupos, como pode ser observado na Figura 4.34

Figura 4.34 – Diagrama de bifurcação do tipo *Butterfly*, dividindo em Grupos, considerando as incertezas no parâmetro β . ($\Omega = 1.1$, $\delta = 4$, $\lambda = 4$ e $\xi = 0.1$)



Os Grupos I e II são as soluções que convergem para o atrator direito (AD) nas bacias de atração e serão representados respectivamente pelas cores vermelho e amarelo. Já o Grupo III representam as soluções que convergem para o atrator central (AC), sendo representadas pela

cor preta. O Grupo IV será representado nas bacias de atração pela cor azul para indicar soluções que convergem para o atrator esquerdo (AE).

A bifurcação do tipo *Butterfly* com o nível de carregamento estático igual 0.5, apresentam três soluções periódicas estáveis, sendo uma delas trivial (AC), e duas soluções instáveis, independentemente de ser avaliada com parâmetro nominal ou com as incertezas em β ou δ , como apresentado nas Figuras 4.5 e 4.7. Na Figura 4.35 estão ilustradas as bacias de atração dinâmicas para este mesmo pré-carregamento, considerando-se as incertezas no parâmetro β , além de se avaliar várias amplitudes da excitação harmônica.

Figura 4.35 – Bacias de atração dinâmicas para a bifurcação do tipo *Butterfly*, com incerteza no parâmetro β , para diferente valores de Γ_1 . ($\Omega = 1.1$, $\delta = 4$, $\lambda = 4$ e $\xi = 0.1$)

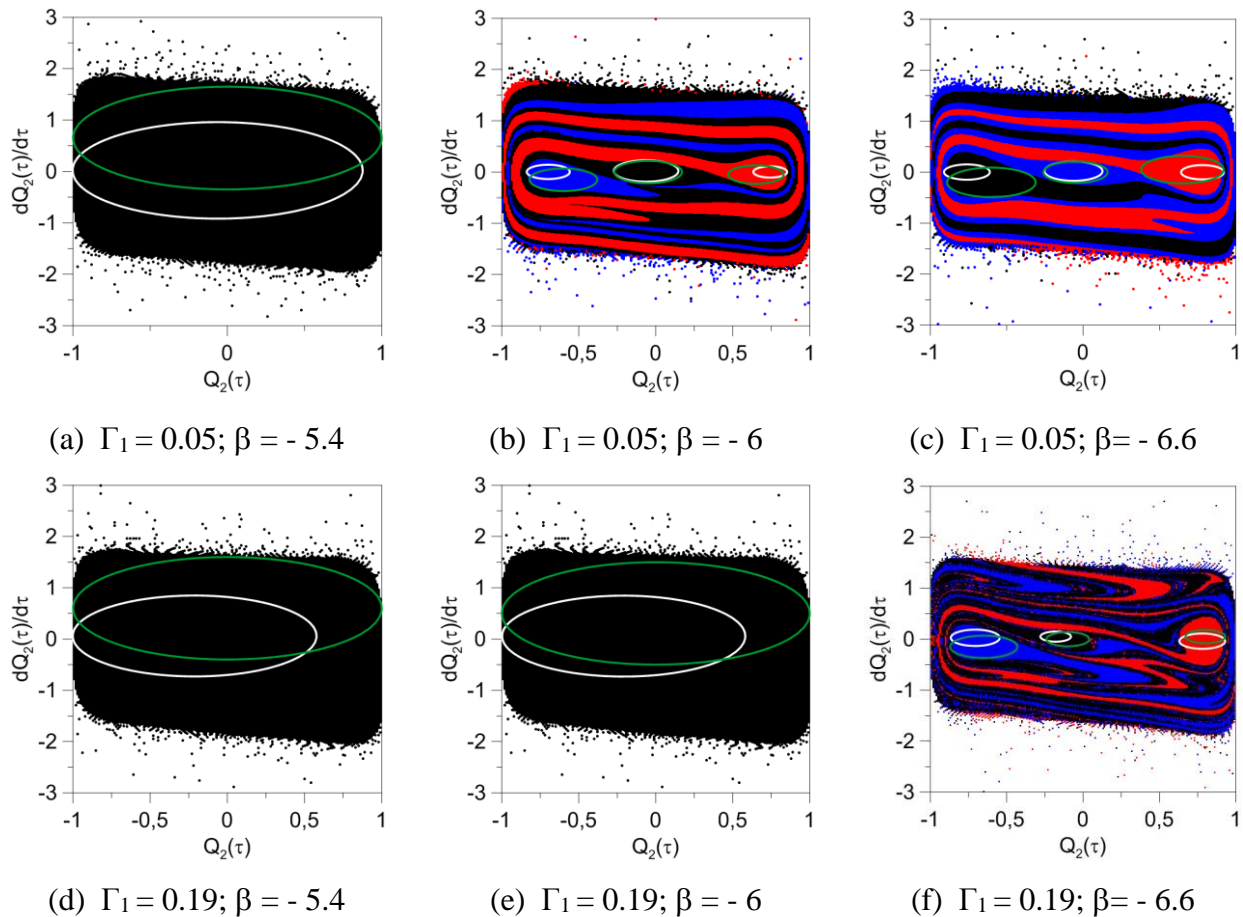


Figura 4.35 – Continuação...

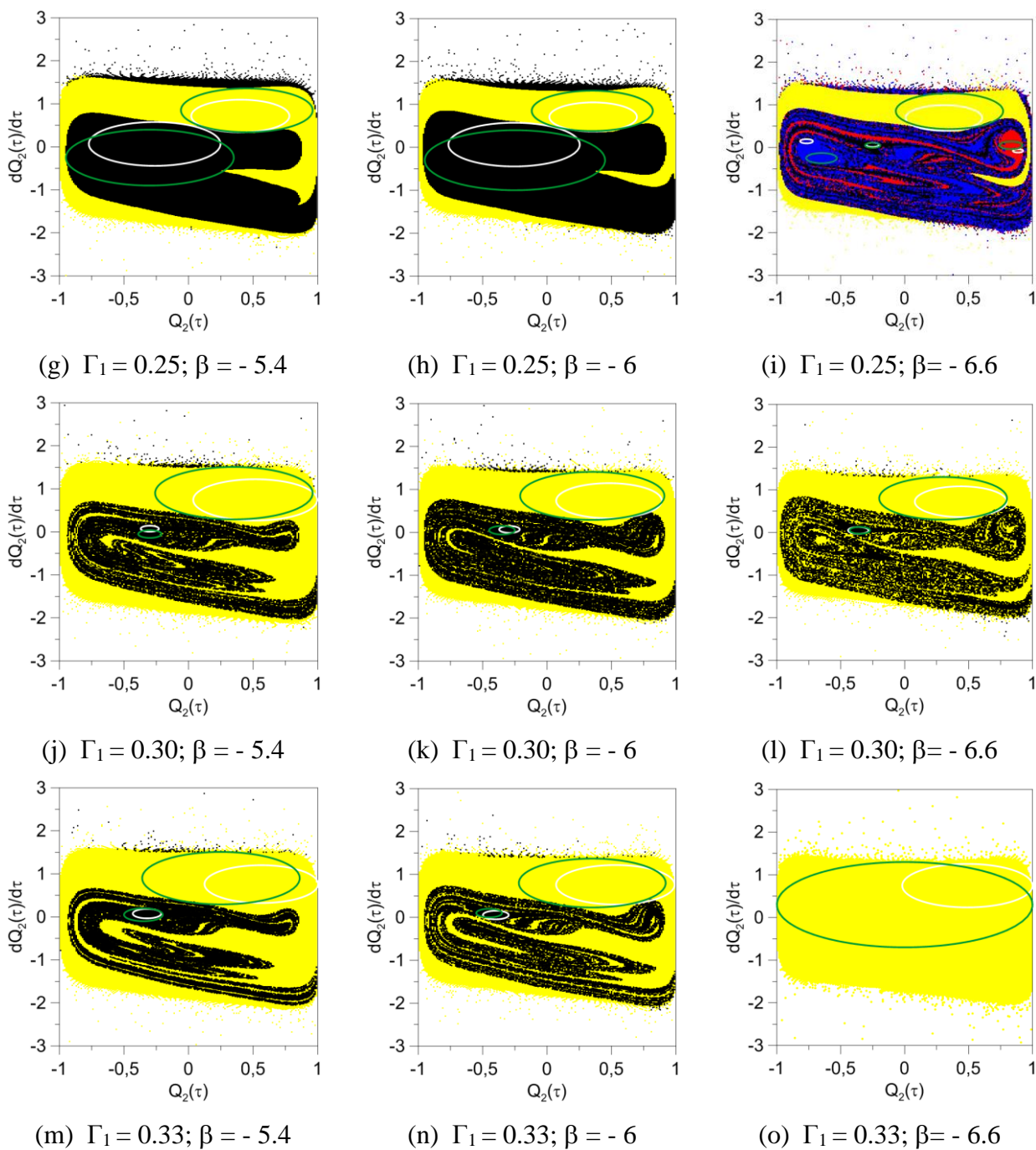
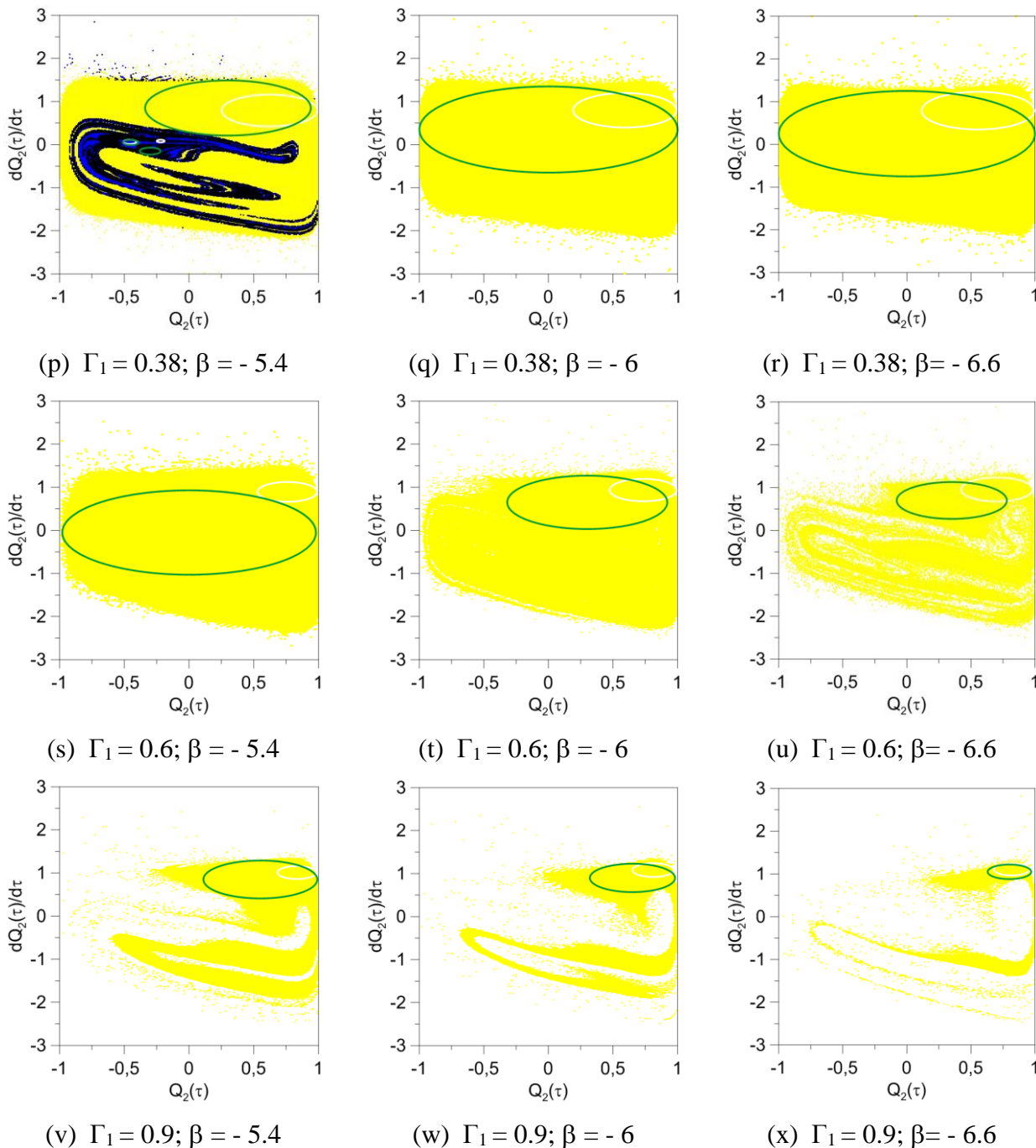


Figura 4.35 – Continuação...



Nota-se, a partir da Figura 4.35, que à medida se que aumenta a amplitude da excitação harmônica, independentemente do valor da incerteza, maior é a tendência das condições iniciais da bacia de atração se estabilizar no foco direito (região de cor amarela) ou central (região de cor preta), minimizando a região do foco esquerdo (região de cor azul). Nota-se também que com o incremento de Γ_1 há uma redução no número de soluções. Nas Figuras 4.35 (s) – (x)

pode-se notar a redução significativa na área das bacias de atração. A região de cor branca das bacias de atração corresponde às condições iniciais as quais as soluções tendem ao infinito.

Pode-se observar, a partir da Figura 4.35, que há uma variação da distribuição dos atratores dependendo da incerteza avaliada na bacia de atração dinâmica. As bacias de atração geradas para $\Gamma_1 = 0.05$ se estabilizam nos atratores AE, AC e AD para $\beta = -6$ e $\beta = -6.6$, já para $\beta = -5.4$ as condições iniciais convergem apenas para o AC, conforme ilustrado nas Figuras 4.35 (a) – (c). A medida que se incrementa Γ_1 maior é a tendência das condições iniciais convergirem para o mesmo atrator independentemente da variação da incerteza, como pode ser observado nas Figuras 4.35 (s) – (x), onde todas as soluções convergem para AD, o que é um forte indicativo do quanto há variabilidade tanto no parâmetro analisado quanto nas condições iniciais estáveis do problema, o que contribui para o polinômio de caos divergir da solução média com o incremento de Γ_1 .

Observa-se que nas Figuras 4.35 (b), (c) e (f), foram detectadas três soluções periódicas estáveis dadas por três cores distintas na janela de observação da bacia de atração, sendo duas delas simétricas (AE e AD). Na Figura 4.35 (i) detectou-se quatro soluções periódicas estáveis, indicando ter uma solução periódica estável a mais quando comparadas com as anteriores. Já as Figuras 4.35 (g), (h), (j), (k), (l), (m) e (n), possuem duas soluções estáveis, enquanto as demais bacias apresentaram apenas uma solução periódica estável. Esse comportamento era esperado quando se compara com os diagramas de bifurcações apresentados na Figura 4.34. Cabe ainda ressaltar a particularidade para $\beta = -5.4$, quando $\Gamma_1 = 0.38$, nesta bacia tem-se a presença de três soluções periódicas estáveis, isso acontece devido a bifurcação dessa incerteza com o incremento da amplitude harmônica.

Juntamente com as bacias de atração foram analisados os fatores de integridades locais e globais do sistema com bifurcação *Butterfly* com a incerteza em β . Os fatores de integridades estão apresentados pelas regiões delimitada pelos círculos nas bacias de atração da Figura 4.35. O fator de integridade local está representado pela circunferência de cor branca, já o fator de integridade global está representado pela circunferência de cor verde. Para cada Grupo foram obtidos os valores e comportamentos dos fatores de integridade local e global. O valor dos fatores de integridade, raio da circunferência, local e global, com a incerteza em β para o

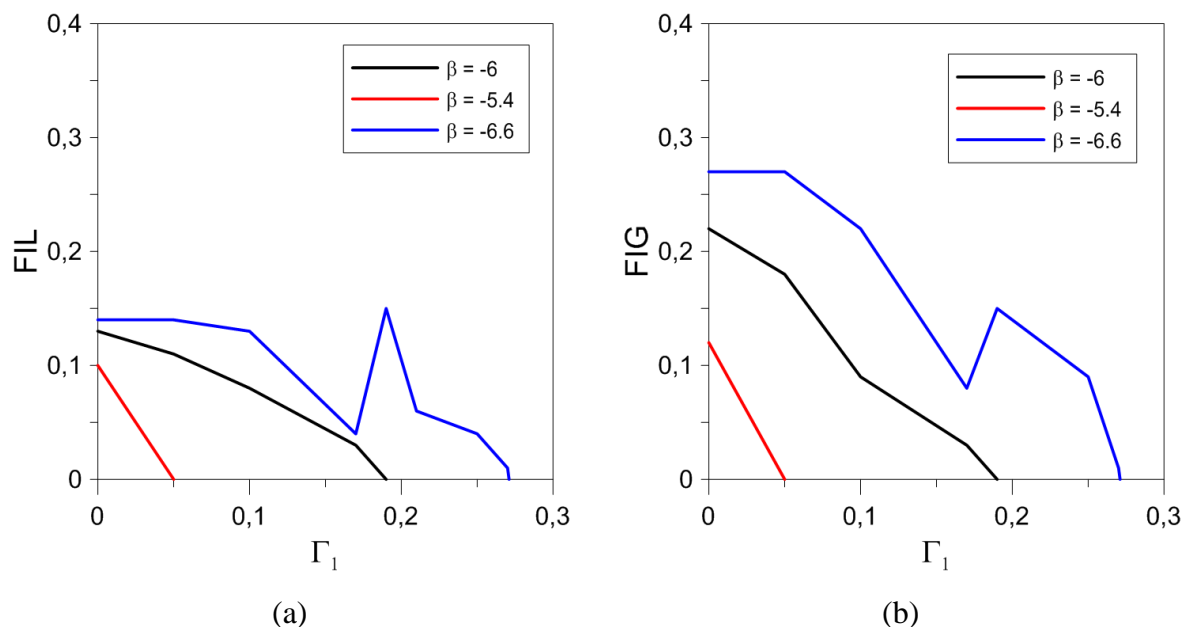
diagrama de bifurcação do tipo *Butterfly* serão analisados por Grupos, conforme apresentado na Figura 4.34.

Na Tabela 4.3 estão relacionados os valores dos fatores de integridade local (FIL) e fatores de integridade global (FIG) para diversos valores de Γ_1 que fazem parte do Grupo I de bifurcações da Figura 3.34.

Tabela 4.3 – Variação dos fatores de integridade local e global para a bifurcação do tipo *Butterfly*, incerteza em β referente ao Grupo I da Figura 4.34.

Parâmetro		Γ_1											
β	δ	0.0		0.05		0.1		0.19		0.21		0.27	
		FIL	FIG	FIL	FIG	FIL	FIG	FIL	FIG	FIL	FIG	FIL	FIG
-5.4	4	0.10	0.12	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
-6	4	0.13	0.22	0.11	0.18	0.08	0.09	0.03	0.03	0.0	0.0	0.0	0.0
-6.6	4	0.14	0.27	0.14	0.27	0.13	0.22	0.15	0.15	0.06	0.13	0.0	0.0

Figura 4.36 – Fator de integridade para a bifurcação do tipo *Butterfly*, com incerteza em β referente ao Grupo I: Fator de integridade (a) Local (b) Global



Observa-se a partir da Tabela 4.3 que o fator de integridade, local e global, do Grupo I, para um mesmo do valor β , diminui com o incremento da amplitude da carga harmônica Γ_1 , tornando-

se nula para $\Gamma_1 > 0.27$, para qualquer valor dentre as incertezas no parâmetro β como ilustra a Figura 4.36.

Ainda a partir da Tabela 4.1 e da Figura 4.36, observa-se que o fator de integridade, local e global, para determinados valores Γ_1 , sofre uma significativa variação quando se considera a incerteza no parâmetro β . Quando $\beta = -5.4$ não se tem soluções estáveis para o Grupo I, já com $\beta = -6.6$, existem soluções com variação dos fatores de integridade bastante significativa para incrementos de Γ_1 .

Já na Tabela 4.4 estão representados os valores dos fatores de integridade local e fatores de integridade global para diversos valores de Γ_1 que faz parte do Grupo II de bifurcações da Figura 4.34.

Observa-se a partir da Tabela 4.4 que o fator de integridade, local e global, do Grupo II, para um mesmo do valor β , aumenta para valores de $\Gamma_1 < 0.38$, para qualquer valor dentre as incertezas no parâmetro β , conforme ilustrado na Figura 4.37. Isso já era esperado após observar a perda de soluções nas bacias de atração, para incremento maiores em Γ_1 , Figuras. 4.35 (s) – (x). Com a redução das soluções estáveis, conseqüentemente há redução nos fatores de integridade, pois reduz-se assim as condições iniciais que tendem a se estabilizar no AD.

Tabela 4.4 – Variação dos fatores de integridade local e global para a bifurcação do tipo *Butterfly*, incerteza em β referente ao Grupo II da Figura 4.34.

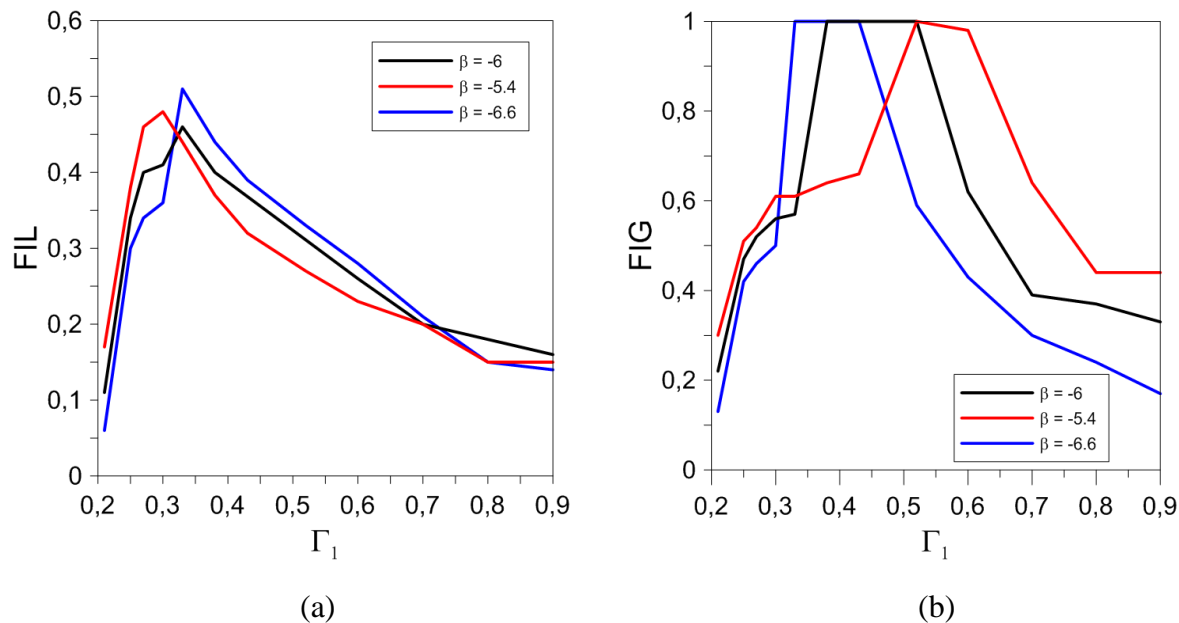
Parâmetro		Γ_1											
β	δ	0.21		0.30		0.38		0.52		0.7		0.9	
		FIL	FIG	FIL	FIG	FIL	FIG	FIL	FIG	FIL	FIG	FIL	FIG
-5.4	4	0.17	0.3	0.48	0.61	0.37	0.64	0.27	1.0	0.2	0.64	0.15	0.44
-6	4	0.11	0.22	0.41	0.56	0.4	1.0	0.29	1.0	0.2	0.39	0.16	0.33
-6.6	4	0.06	0.13	0.36	0.5	0.44	1.0	0.33	0.59	0.21	0.3	0.14	0.17

Ainda a partir da Tabela 4.4 e da Figura 4.37, observa-se que o fator de integridade, local e global, para determinados valores Γ_1 , sofre uma significativa variação quando se considera a incerteza no parâmetro β . Há uma redução na área das condições iniciais que se estabilizam no

atrator direito, à medida que se incrementa os valores de β . Quando $\beta = -5.4$ se tem, FIL e FIG, com raios maiores, já para $\beta = -6.6$ há uma redução significativa nesses valores.

Figura 4.37 – Fator de integridade para a bifurcação do tipo *Butterfly*, com incerteza em β referente ao Grupo II:

Fator de integridade (a) Local (b) Global



Na Tabela 4.5 estão representados os valores dos fatores de integridade local e fatores de integridade global para diversos valores de Γ_1 que fazem parte do Grupo III de bifurcações da Figura 4.34.

Tabela 4.5 – Variação dos fatores de integridade local e global para a bifurcação do tipo *Butterfly*, incerteza em β referente ao Grupo III da Figura 4.34.

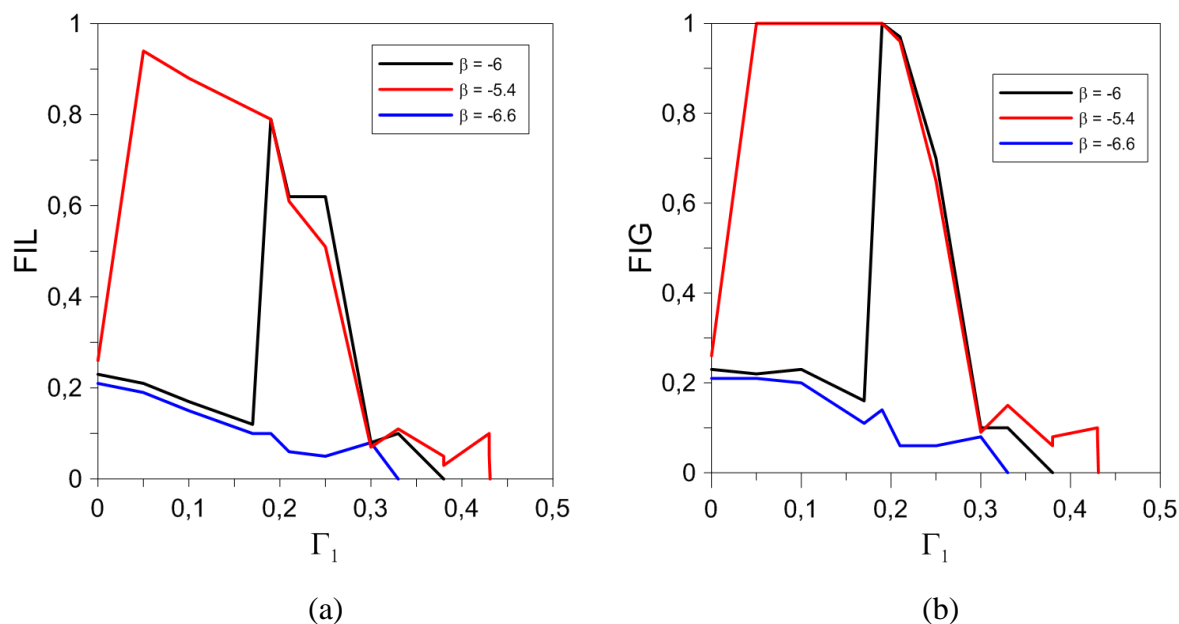
Parâmetro		Γ_1											
β	δ	0.0		0.05		0.19		0.30		0.38		0.43	
		FIL	FIG	FIL	FIG	FIL	FIG	FIL	FIG	FIL	FIG	FIL	FIG
-5.4	4	0.26	0.26	0.94	1.0	0.79	1.0	0.07	0.09	0.05	0.06	0.05	0.08
-6	4	0.23	0.23	0.21	0.22	0.79	1.0	0.08	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0
-6.6	4	0.21	0.21	0.19	0.21	0.1	0.14	0.08	0.08	0.0	0.0	0.0	0.0

Observa-se a partir da Tabela 4.5 que o fator de integridade, local e global, do Grupo III, para um mesmo do valor β , diminui com o incremento da amplitude da carga harmônica Γ_1 ,

tornando-se nula para $\beta = -6$ e $\beta = -6.6$, quando $\Gamma_1 > 0.38$, comportamento este representado na Figuras 4.38. Isso já era esperado, já que para incremento de $\Gamma_1 > 0.38$ nessas duas incertezas, existe apenas uma solução e ela tende a se estabilizar no atrator direito, conforme pode-se observar nas Figuras 4.35 (q) e (r).

Figura 4.38 – Fator de integridade para a bifurcação do tipo *Butterfly*, com incerteza em β referente ao Grupo III:

Fator de integridade (a) Local (b) Global



Ainda a partir da Tabela 4.5 e da Figura 4.38, observa-se que o fator de integridade, local e global, para determinados valores Γ_1 , sofre uma significativa variação quando se considera a incerteza no parâmetro β . Há uma redução na área das condições iniciais que se estabilizam no atrator central, à medida que se incrementa os valores de β . Quando $\beta = -5.4$ se tem, FIL e FIG, com raios maiores, já para $\beta = -6.6$ há uma redução significativa nos valores dos raios.

Já o Grupo IV apresenta um comportamento análogo ao Grupo I, já que eles apresentam uma relação de simetria nos diagramas de bifurcação, como pode ser observado na Figura 4.34. Na Tabela 4.6 estão relacionados os valores dos fatores de integridade local e fatores de integridade para diversos valores de Γ_1 que fazem parte do Grupo IV de bifurcações da Figura 4.34.

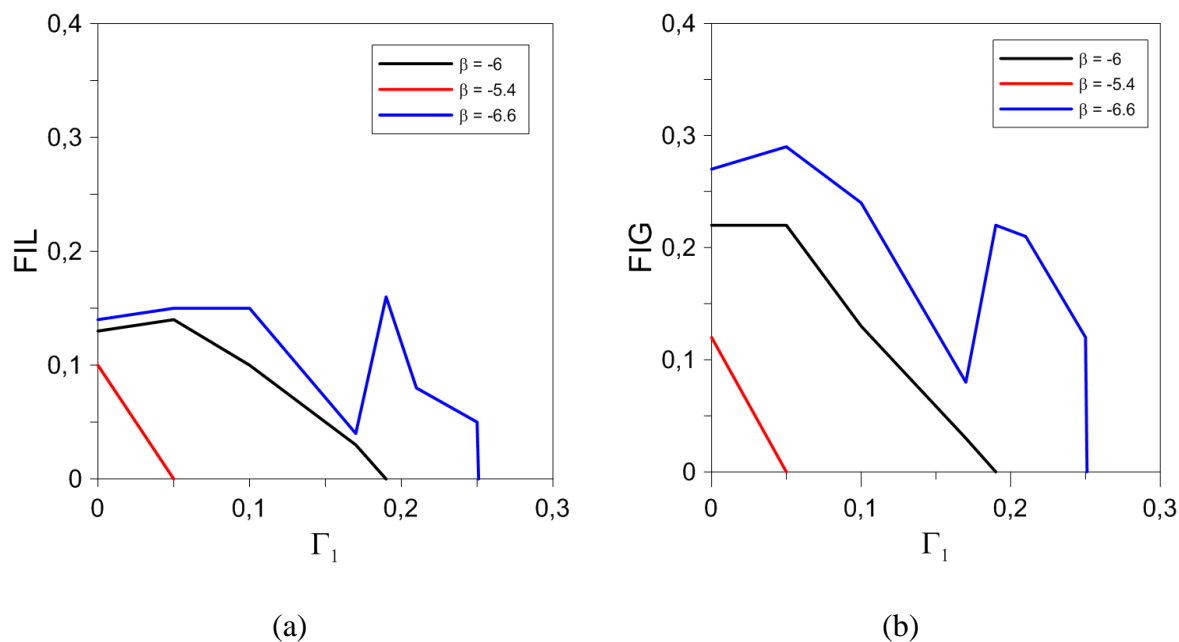
Observa-se a partir da Tabela 4.6 que os fatores de integridade, local e global, do Grupo IV, assim como do Grupo I, diminui com o incremento da amplitude da carga harmônica Γ_1 , para um mesmo do valor β . Tornando-se nula quando $\Gamma_1 > 0.05$ e $\Gamma_1 > 0.19$ para $\beta = -5.4$ e

$\beta = -6$, respectivamente, comportamento ilustrado na Figura 4.39. Isso já era esperado ao analisar as bacias de atração nas Figuras 4.35 (f) e (g), onde para esses parâmetros as condições iniciais tendem a se estabilizar nos atratores AC e AD.

Tabela 4.6 – Variação dos fatores de integridade local e global para a bifurcação do tipo *Butterfly*, incerteza em β referente ao Grupo IV da Figura 4.34.

Parâmetro		Γ_1											
β	δ	0.0		0.05		0.1		0.19		0.21		0.25	
		FIL	FIG	FIL	FIG	FIL	FIG	FIL	FIG	FIL	FIG	FIL	FIG
-5.4	4	0.10	0.12	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
-6	4	0.13	0.22	0.14	0.22	0.1	0.13	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
-6.6	4	0.14	0.27	0.15	0.29	0.15	0.24	0.16	0.22	0.08	0.21	0.05	0.12

Figura 4.39 – Fator de integridade para a bifurcação do tipo *Butterfly*, com incerteza em β referente ao Grupo IV: Fator de integridade (a) Local (b) Global

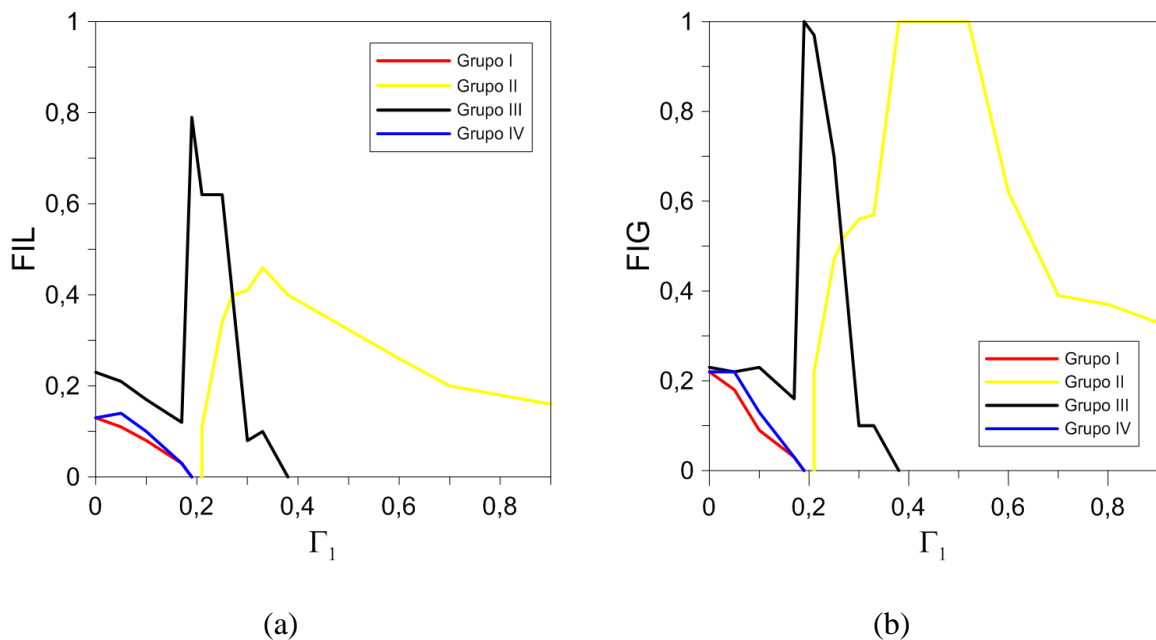


Ainda a partir da Tabela 4.6 e da Figura 4.39, observa-se que o fator de integridade, local e global, para determinados valores Γ_1 , sofre uma significativa variação quando se considera a incerteza no parâmetro β . De forma análoga ao Grupo I, quando $\beta = -5.4$ não se tem soluções

estáveis para o Grupo IV, já com $\beta = -6.6$, existem soluções com variação dos fatores de integridade bastante significativa para incrementos de Γ_1 .

Com o objetivo de analisar o comportamento dos fatores de FIL e FIG como um todo, unificou-se a Figura 4.40, que reúne todos os fatores de integridade, locais e globais, para o parâmetro nominal $\beta = -6$. Foi mantida na Figura 4.40 as relações de cores designadas para cada Grupo da Figura 4.34.

Figura 4.40 – Fatores de integridade para a bifurcação do tipo *Butterfly*, para o parâmetro nominal $\beta = -6$ referente aos Grupos da Figura 4.34: Fator de integridade (a) Local (b) Global

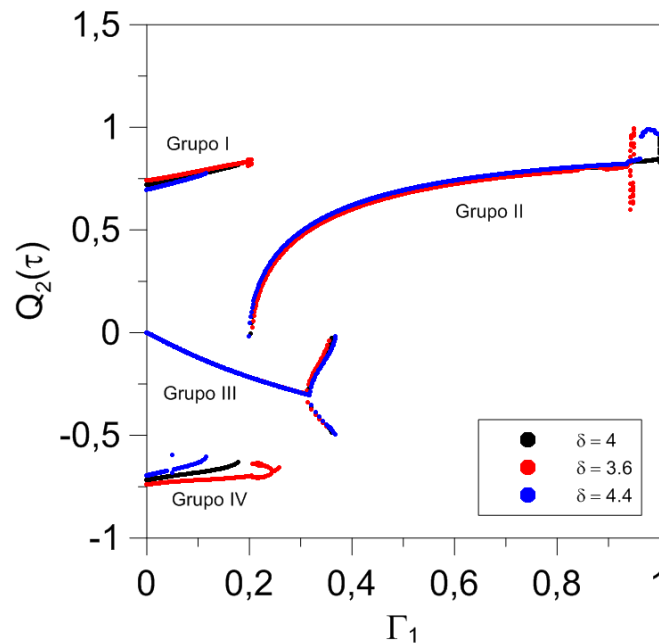


A partir da Figura 4.40 pode-se observar que tanto os FILs, quanto os FIGs possuem o maiores valores de raio, quando as soluções convergem para o Grupo III (cor preta) para qualquer valor de $\Gamma_1 < 0.27$. Cabe ressaltar que o maior valor para o FIL e FIG acontece no Grupo III, quando $\Gamma_1 = 0.19$, já que para esse valor acaba os FILs e FIGs para os Grupos I e IV, representados respectivamente pelas cores vermelha e azul. Os valores dos FIL e FIG do Grupo II, representado pela cor amarela, começam a surgir quando terminam os FILs e FIGs do Grupo I e IV. A partir das Figuras 4.34 e 4.40 pode-se observar que nas regiões onde acabam as soluções periódicas estáveis para um determinado Grupo, começa as soluções periódicas estáveis em outro Grupo. Isso reflete nos fatores de integridade, enquanto os FIL e FIG de um Grupo vai diminuindo os de um outro Grupo vai aumentando, esse comportamento pode ser observado na

Figura 4.40 entre o Grupo II e III, onde a medida que os FIL e FIG do primeiro aumentam os do segundo diminuem.

Considerou-se a divisão de Grupos para análise dos fatores de integridade, local e global, dos diagramas de bifurcação do tipo *Butterfly*, considerando a incerteza no parâmetro δ . Na Figura 4.41 apresenta a divisão dos trechos dos diagramas de bifurcação em quatro Grupos.

Figura 4.41 – Diagrama de bifurcação do tipo *Butterfly*, dividindo em Grupos, considerando as incertezas no parâmetro δ . ($\Omega = 1.1$, $\beta = -6$, $\lambda = 4$ e $\xi = 0.1$)



A divisão da Figura 4.41 seguiu o mesmo padrão da Figura 4.34, onde os Grupos I e II serão representados nas bacias de atração pelas cores vermelho e amarelo, respectivamente. As soluções desse Grupo convergem para o atrator direito do caminho de equilíbrio não linear, Figura 4.7. Já o Grupo III, representado pela cor preta, são as soluções que convergem para o atrator central da Figura 4.7. Por fim, tem-se o Grupo IV que indica as soluções que convergem para o atrator esquerdo, representado nas bacias de atração pela cor azul.

A Figura 4.42 ilustra as bacias de atração dinâmica, considerando o pré-carregamento estático de $\bar{P}_0 = 0.5$, as incertezas no parâmetro δ e a variação da amplitude de excitação dinâmica Γ_1 .

Figura 4.42 – Bacias de atração dinâmicas para a bifurcação do tipo *Butterfly*, com incerteza no parâmetro δ , para diferente valores de Γ_1 . ($\Omega = 1.1$, $\beta = -6$, $\lambda = -4$ e $\xi = 0.1$)

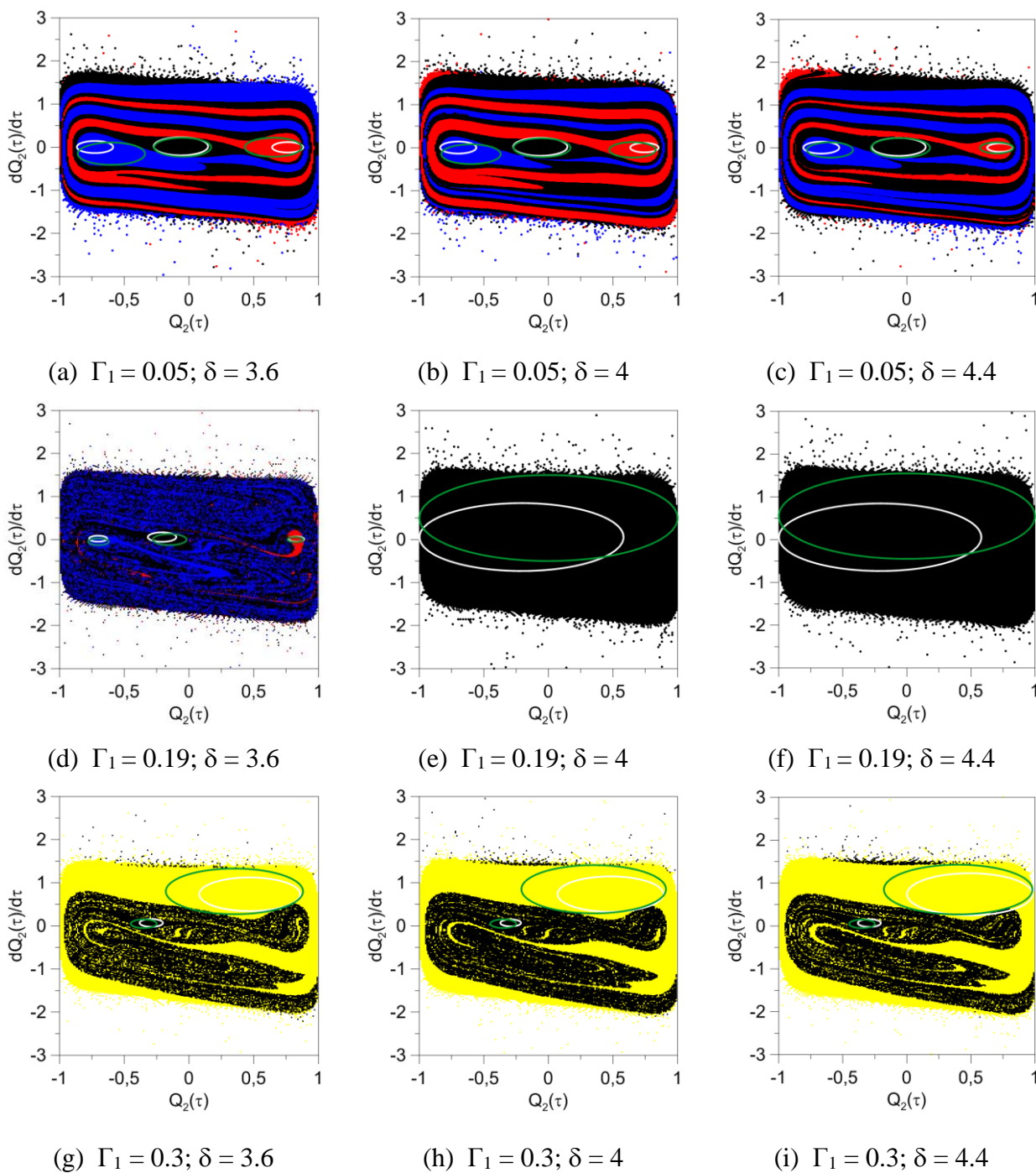
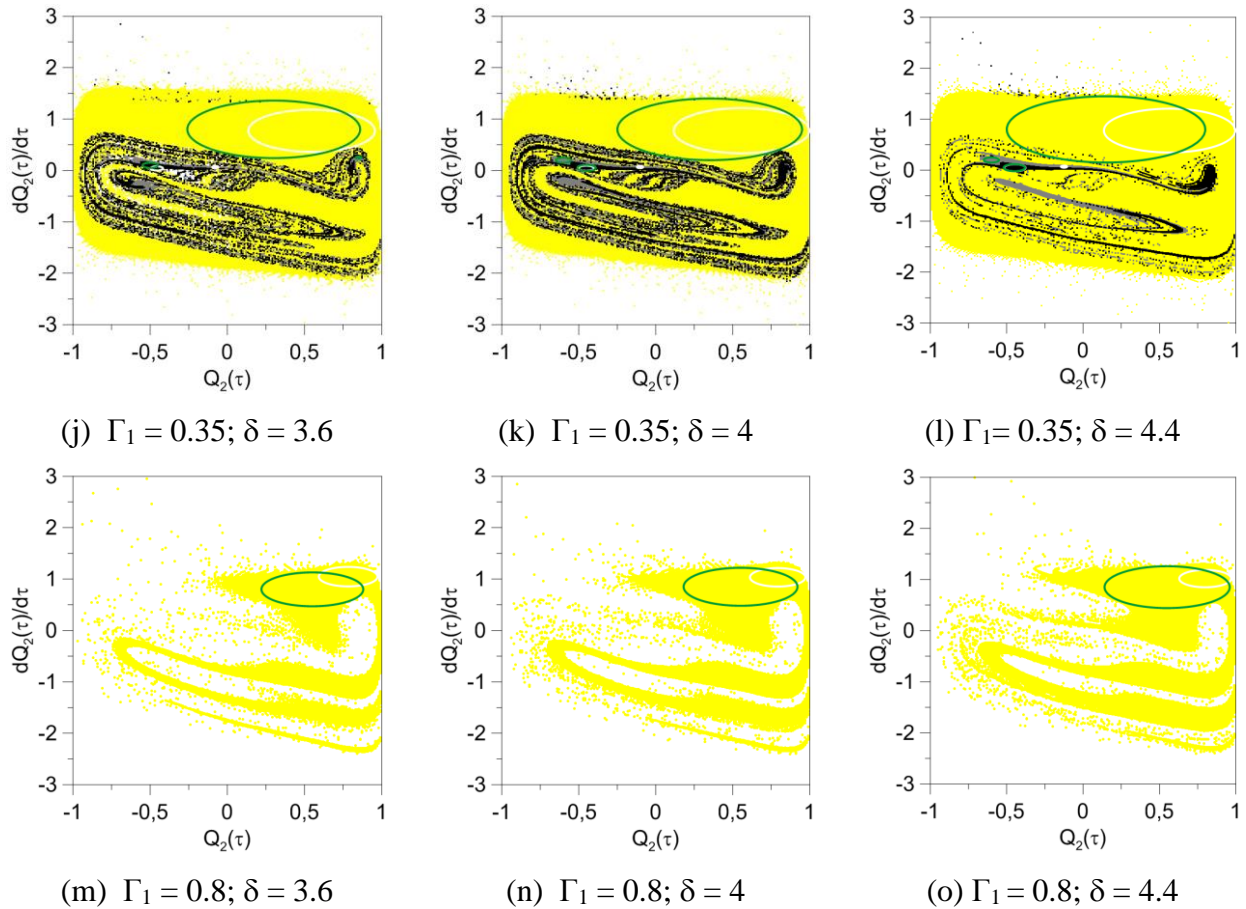


Figura 4.42 – Continuação ...



Observa-se, a partir da Figura 4.42, que a incerteza no parâmetro δ na bifurcação do tipo *Butterfly* apresenta uma menor influência nas distribuições das condições iniciais da bacia de atração entre os atratores, quando comparado com a incerteza no parâmetro β dado pela Figura 4.35. Para os valores das excitações harmônicas analisadas, a única particularidade aparece quando analisa-se a bacia de atração dinâmica para $\Gamma_1 = 0.19$, onde para $\delta = 3.6$ a bacia de atração gerada apresenta três cores, ou seja, três soluções periódicas estáveis, que se estabiliza no AE (região em azul), AC (região em preto) e AD (região em vermelho). Já para o parâmetro nominal, $\delta = 4$, e para o caso com incerteza, $\delta = 3.6$, as bacias geradas apresentam somente uma cor, ou seja, somente uma solução periódica estável, que se estabiliza no atrator central – AC.

De maneira análoga as bacias de atração dinâmica para a bifurcação do tipo *Butterfly* com incerteza no parâmetro em β , as bacias geradas com a incerteza em δ , Figura 4.42, a medida que se incrementa Γ_1 maior é a tendência das condições iniciais convergirem para os atratores

a direita e/ou central, independentemente da variação da incerteza, como pode ser observado nas Figuras 4.42 (g) – (o). Cabe ressaltar também a redução significativa na área das bacias de atração com o incremento de Γ_1 .

Para $\Gamma_1 = 0.35$ a bacia de atração dinâmica, independentemente da variação da incerteza δ , apresenta três soluções estáveis periódicas, isso deve-se a duplicação de soluções presente no diagrama de bifurcação para esse valor de Γ_1 , como pode ser observado na Figura 4.41, sendo que duas dessas soluções pertencem ao Grupo III (AC) e uma pertence ao Grupo II (AD). Particularmente neste caso para as soluções do Grupo III foram usadas além da cor preta, a cor cinza para representar as soluções que convergem para o atrator central, como pode ser observado na Figura 4.42 (j) – (l).

Também na Figura 4.42 estão representados os fatores de integridade locais e globais das bacias de atração dinâmica da bifurcação do tipo *Butterfly* com a incerteza em δ , representados pelas cores branca e verde, respectivamente. O valor dos fatores de integridade, raio da circunferência, local e global serão analisados por Grupos, conforme apresentado na Figura 4.41.

Na Tabela 4.7 estão relacionado o valores dos FIL e FIG para os diversos valores de Γ_1 que fazem parte do Grupo I de bifurcações da Figura 4.41.

Tabela 4.7 – Variação dos fatores de integridade local e global para a bifurcação do tipo *Butterfly*, incerteza em δ referente ao Grupo I da Figura 4.41.

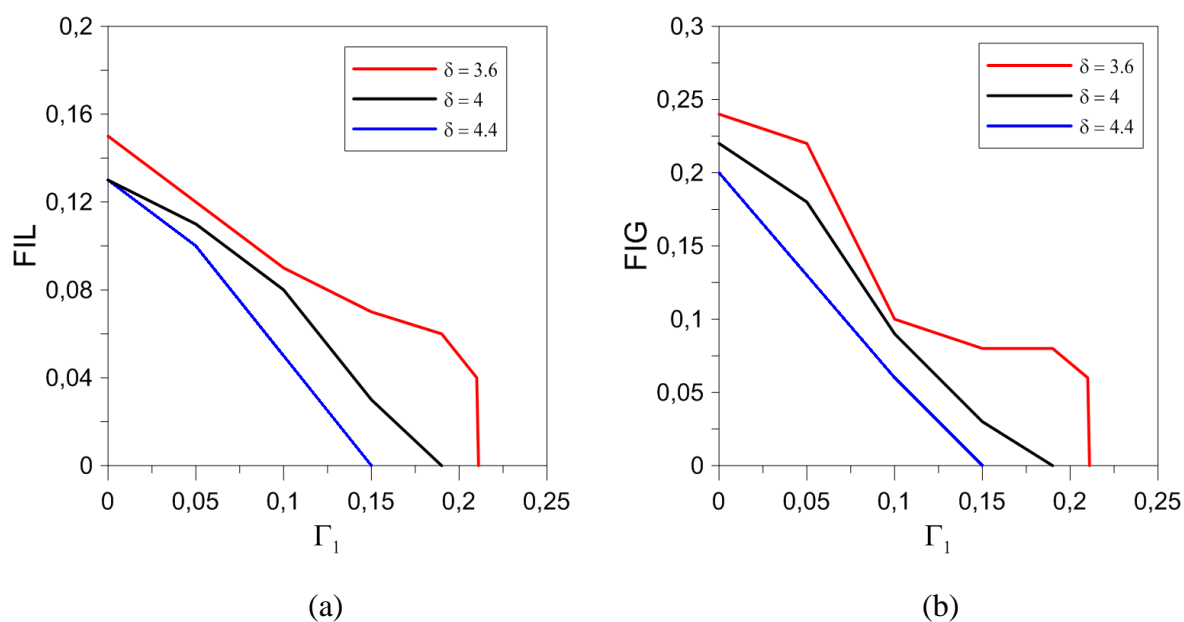
Parâmetro		Γ_1											
δ	β	0.0		0.05		0.1		0.15		0.19		0.21	
		FIL	FIG	FIL	FIG	FIL	FIG	FIL	FIG	FIL	FIG	FIL	FIG
3.6	-6	0.15	0.24	0.12	0.22	0.09	0.10	0.07	0.08	0.06	0.08	0.04	0.06
4	-6	0.13	0.22	0.11	0.18	0.08	0.09	0.03	0.03	0.0	0.0	0.0	0.0
4.4	-6	0.12	0.20	0.10	0.13	0.05	0.06	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

A partir da Tabela 4.7 pode-se observar que os FIL e FIG do Grupo I, para um mesmo valor de δ , diminui com o incremento de Γ_1 , tornando-se nula para o parâmetro nominal, $\delta = 4$, e para a incerteza, $\delta = 4.4$, quando $\Gamma_1 > 0.15$, como ilustra a Figura 4.43. Isso já era esperado ao analisar

a Figura 4.41 e 4.42 (d) – (f), onde mostra que para valores de $\Gamma_1 > 0.15$, somente $\delta = 3.6$ apresenta soluções que convergem para o atrator a direita (Grupo I).

Cabe ressaltar que os FIL e FIG relacionados na Tabela 4.7, sofre uma variação pequena nos seus valores, quando comparados ao mesmo Grupo I da bifurcação do tipo *Butterfly* com incerteza em β , Figura 4.36.

Figura 4.43 – Fator de integridade para a bifurcação do tipo *Butterfly*, com incerteza em δ referente ao Grupo I:
Fator de integridade (a) Local (b) Global



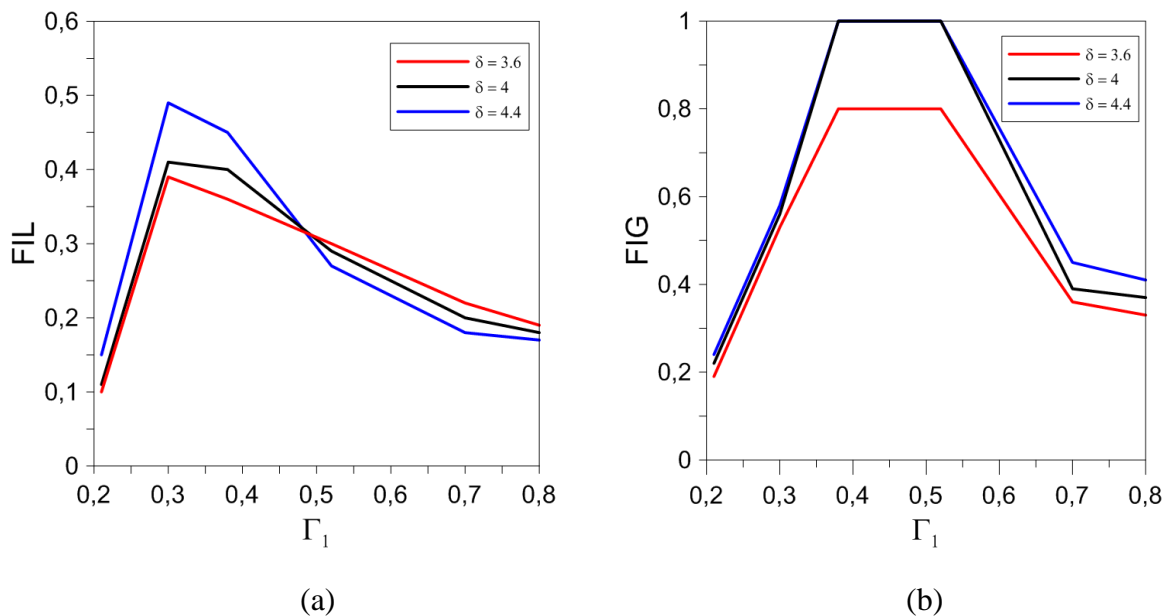
Já na Tabela 4.8 estão representados os valores dos FIL e FIG para diversos valores de Γ_1 que faz parte do Grupo II de bifurcações da Figura 4.41.

Tabela 4.8 – Variação dos fatores de integridade local e global para a bifurcação do tipo *Butterfly*, incerteza em δ referente ao Grupo II da Figura 4.41.

Parâmetro		Γ_1											
δ	β	0.21		0.30		0.38		0.52		0.7		0.8	
		FIL	FIG	FIL	FIG	FIL	FIG	FIL	FIG	FIL	FIG	FIL	FIG
3.6	-6	0.10	0.19	0.39	0.53	0.36	0.8	0.30	0.8	0.22	0.36	0.19	0.33
4	-6	0.11	0.22	0.41	0.56	0.4	1.0	0.29	1.0	0.2	0.39	0.18	0.37
4.4	-6	0.15	0.24	0.49	0.58	0.45	1.0	0.27	1.0	0.18	0.45	0.17	0.41

A partir da Tabela 4.8 foi construída a Figura 4.44, que representa o comportamento dos FIL e FIG para diversos valores de Γ_1 que faz parte das bifurcações do Grupo II representados na Figura 4.41. Observa-se, a partir da Tabela 4.8 e da Figura 4.44, que para o Grupo II, os FILs, para um mesmo valor de δ aumenta para $\Gamma_1 \leq 0.30$, já para $\Gamma_1 > 0.30$ há uma redução nos FILs. Essa redução deve-se a perda de soluções com o incremento de Γ_1 , como pode ser observado na Figura 4.42 (m) – (o). Já os FIGs aumentam para um mesmo valor de δ para $\Gamma_1 \leq 0.52$, quando se incrementa mais que este valor há uma redução significativa nos seus valores.

Figura 4.44 – Fator de integridade para a bifurcação do tipo *Butterfly*, com incerteza em δ referente ao Grupo II:
Fator de integridade (a) Local (b) Global

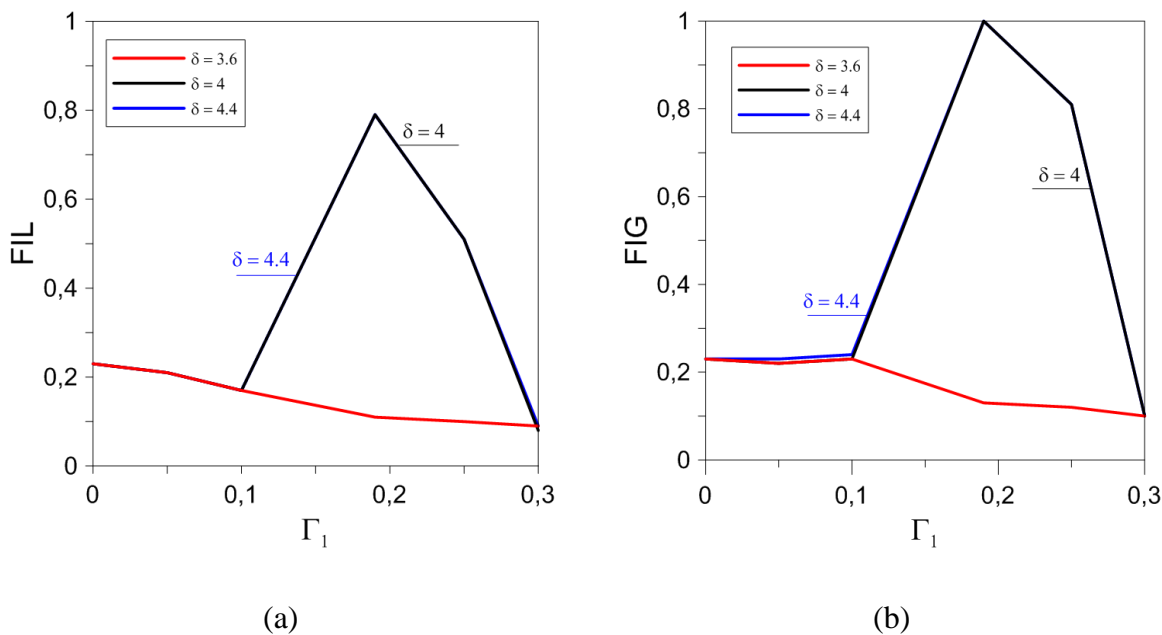


Os FILs e FIGs que fazem parte das bifurcações do Grupo III, da Figura 4.41, estão relacionados na Tabela 4.9. Observa-se que para $\Gamma_1 \leq 0.1$ os FILs e FIGs possuem os mesmos valores, independentemente, do valor de δ . Já para $\Gamma_1 = 0.19$ eles apresentam uma variação de valores dependendo do valor de δ , essa variação deve-se a presença de três soluções periódicas estáveis para $\delta = 3.6$, o que leva a uma redução dos FILs e FIGs para essa bifurcação. Já para $\delta = 4$ e 4.4 há um aumento pontual na área das regiões dos FIL e FIG, já que as mesmas apresentam apenas uma solução periódicas estável para $\Gamma_1 = 0.19$. Este comportamento dos fatores de integridade, local e global, para a bifurcação do tipo *Butterfly* com incerteza no parâmetro δ , referente ao Grupo III, está ilustrado na Figura 4.45.

Tabela 4.9 – Variação dos fatores de integridade local e global para a bifurcação do tipo *Butterfly*, incerteza em δ referente ao Grupo III da Figura 4.41.

Parâmetro		Γ_1											
δ	β	0.0		0.05		0.1		0.19		0.25		0.30	
		FIL	FIG	FIL	FIG	FIL	FIG	FIL	FIG	FIL	FIG	FIL	FIG
3.6	-6	0.23	0.23	0.21	0.22	0.17	0.23	0.11	0.13	0.10	0.12	0.09	0.1
4	-6	0.23	0.23	0.21	0.22	0.17	0.23	0.79	1	0.51	0.81	0.08	0.1
4.4	-6	0.23	0.23	0.21	0.23	0.17	0.23	0.79	1	0.51	0.81	0.09	0.1

Figura 4.45 – Fator de integridade para a bifurcação do tipo *Butterfly*, com incerteza em δ referente ao Grupo III: Fator de integridade (a) Local (b) Global



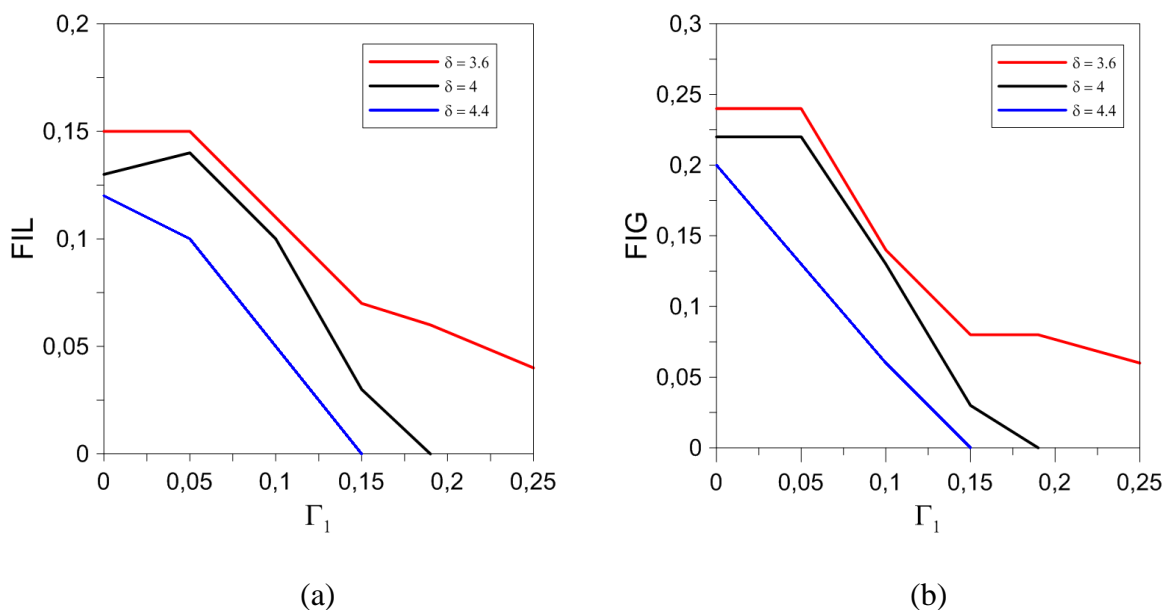
Já o Grupo IV por apresentar uma relação de simetria com o Grupo I nos diagramas de bifurcação ilustrados na Figura 4.41, possuem um comportamento análogo em relação aos seus FILs e FIGs. Conforme pode-se observar na Tabela 4.10 e na Figura 4.46 os fatores de integridade, local e global, diminuem com o incremento da amplitude da carga harmônica Γ_1 , para um mesmo do valor δ , tornando-se nula para $\Gamma_1 > 0.1$ e $\Gamma_1 > 0.15$ respectivamente, para $\delta = 4.4$ e $\delta = 4$.

Tabela 4.10 – Variação dos fatores de integridade local e global para a bifurcação do tipo *Butterfly*, incerteza em δ referente ao Grupo IV da Figura 4.41.

Parâmetro		Γ_1											
δ	β	0.0		0.05		0.1		0.15		0.19		0.25	
		FIL	FIG	FIL	FIG	FIL	FIG	FIL	FIG	FIL	FIG	FIL	FIG
3.6	-6	0.15	0.24	0.15	0.24	0.11	0.14	0.07	0.08	0.06	0.08	0.04	0.06
4	-6	0.13	0.22	0.14	0.22	0.1	0.13	0.03	0.03	0.0	0.0	0.0	0.0
4.4	-6	0.12	0.20	0.10	0.13	0.05	0.06	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

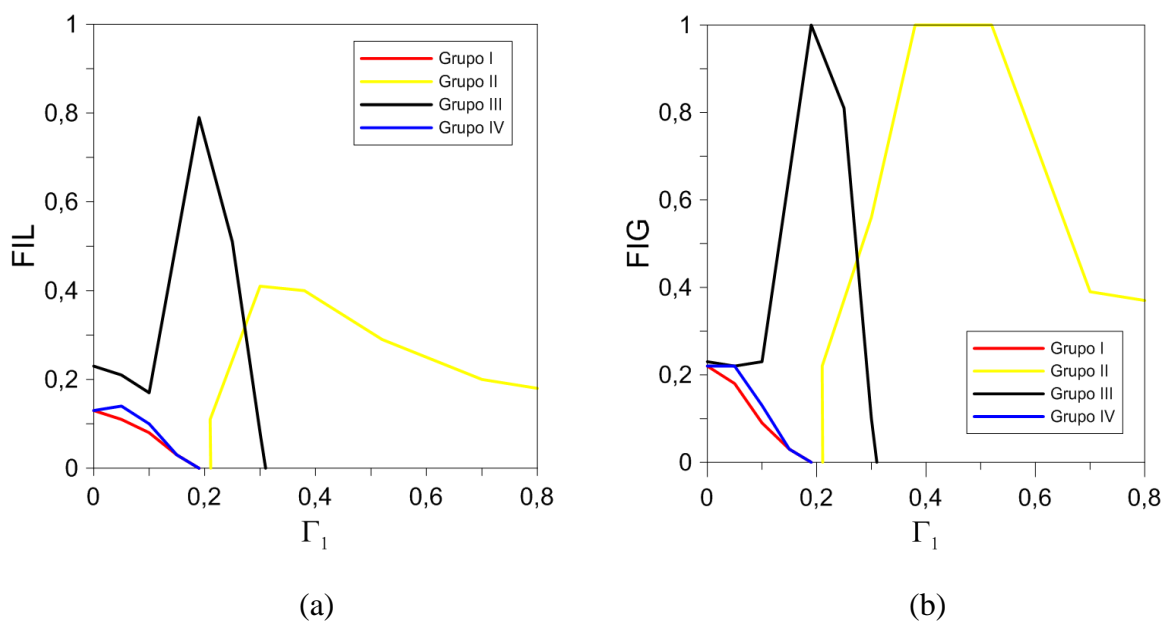
Cabe ressaltar que os FILs e FIGs relacionados na Tabela 4.10, sofre uma variação pequena nos seus valores, quando comparados ao mesmo Grupo IV da bifurcação do tipo *Butterfly* com incerteza no parâmetro β , Figura 4.39. Isso já era esperado ao comparar os diagramas de bifurcação gerados pelas incertezas em β e δ , ilustrados, respectivamente nas Figuras 4.34 e 4.41, onde nota-se que as incertezas em β causam uma significativa variação de comportamento das bifurcações quando comparada as incertezas no parâmetro δ , que possui na maioria dos seus trechos um comportamento semelhante nos diagramas de bifurcação, como pode-se observar na Figura 4.41.

Figura 4.46 – Fator de integridade para a bifurcação do tipo *Butterfly*, com incerteza em δ referente ao Grupo IV: Fator de integridade (a) Local (b) Global



Objetivando a análise do comportamento dos fatores de integridade, local e global, como um todo, gerou-se a Figura 4.47, que reúne todos os FILs e FIGs para o parâmetro nominal $\delta = 4$, para a bifurcação do tipo *Butterfly*, mantendo a relação de cores designadas para cada Grupo de bifurcações da Figura 4.41.

Figura 4.47 – Fatores de integridade para a bifurcação do tipo *Butterfly*, para o parâmetro nominal $\delta = 4$ referente aos Grupos da Figura 4.41: Fator de integridade (a) Local (b) Global



Os FILs e FIGs da Figura 4.47 possui um comportamento semelhante aos respectivos fatores de integridade da Figura 4.40, isso já era esperado por se tratar do mesmo diagrama de bifurcação, pois em ambas as figuras foram mantidos os valores dos parâmetros nominais, $\beta = -6$ e $\delta = 4$. A partir da Figura 4.47 pode-se observar que, os fatores de integridade, locais e globais, possuem uma relação inversamente proporcional entre os Grupos, ou seja, a medida que um Grupo tem um aumento nos seus FILs e FIGs, outro Grupo que possui soluções periódicas estáveis para o mesmo valor de Γ_1 tem os seus FILs e FIGs diminuídos. Esse comportamento pode ser observado na Figura 4.47 no trecho onde $0.1 \leq \Gamma_1 \leq 0.2$, onde a medida que se diminui os FILs e FIGs do Grupo I e IV, representados respectivamente pelas cores vermelha e azul, aumentam FILs e FIGs, do Grupo III, representado pela cor preta, atingindo assim os seus valores máximos para o FIL e FIG. Isso se deve ao fato da área total da bacia de atração das Figuras 4.42 (g) – (l) manterem nesse intervalo de Γ_1 praticamente a mesma área, ou seja, o que ocorre é uma redistribuição entre os fatores de integridade.

Também visando uma análise sobre aos fatores de integridade, local e global, das bacias de atração da bifurcação do tipo *Swallowtail*, considerando a incerteza no parâmetro α , dividiu-se os diagramas de bifurcação da Figura 4.22 em três grupos, como pode ser observado na Figura 4.48.

O Grupo I são as soluções que convergem para o AD nas bacias de atração e será representada pela cor azul. O Grupo II, representado pela cor preta, são as soluções que convergem para o AC, já o Grupo III será representado nas bacias de atração pela cor vermelha para indicar as soluções que se estabilizam no AE.

A bifurcação do tipo *Swallowtail* com o nível de carregamento estático igual 0.5 apresentam três posições de equilíbrio, duas estáveis, sendo uma delas o caminho fundamental, e uma instável, independentemente de ser avaliada com o parâmetro nominal ou com as incertezas no parâmetro α , como apresentado nas Figuras 4.6 e 4.12. Na Figura 4.49 estão ilustradas as bacias de atração dinâmicas para este mesmo pré-carregamento, considerando-se as incertezas no parâmetro α , além de se avaliar várias amplitudes da excitação harmônica.

Figura 4.48 – Diagrama de bifurcação do tipo *Swallowtail*, dividindo em grupos, considerando as incertezas no parâmetro α . ($\Omega = 1.1$, $\lambda = 4$ e $\xi = 0.1$)

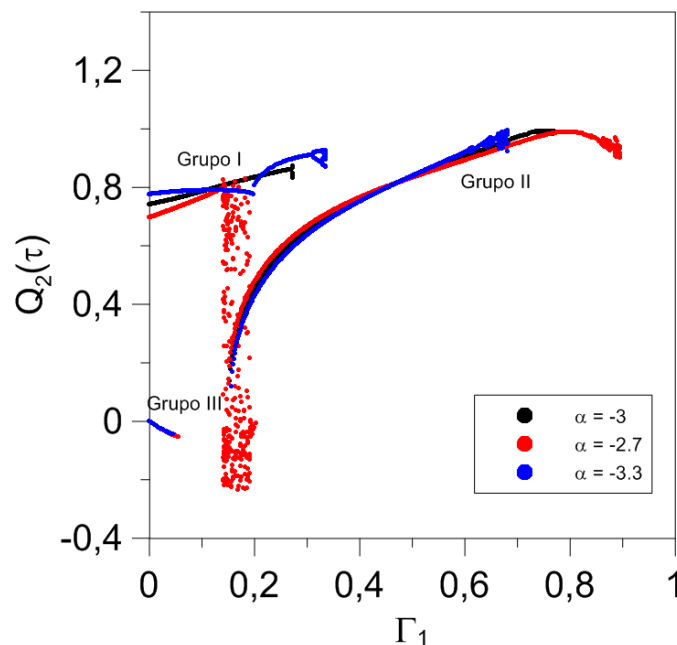


Figura 4.49 – Bacias de atração dinâmicas para a bifurcação do tipo *Swallowtail*, com incerteza no parâmetro α , para diferente valores de Γ_1 . ($\Omega = 1.1$, $\lambda = 4$ e $\xi = 0.1$)

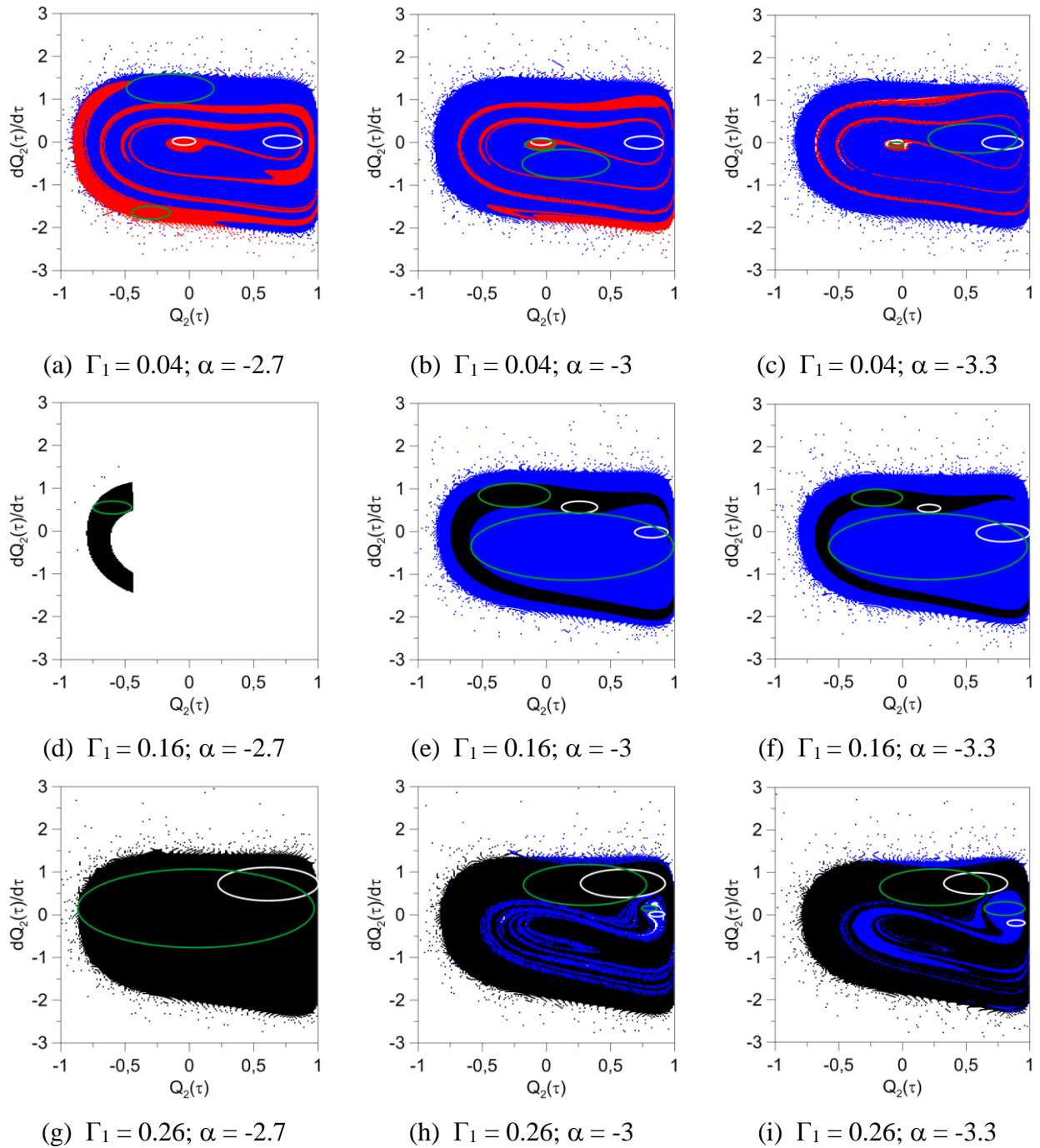
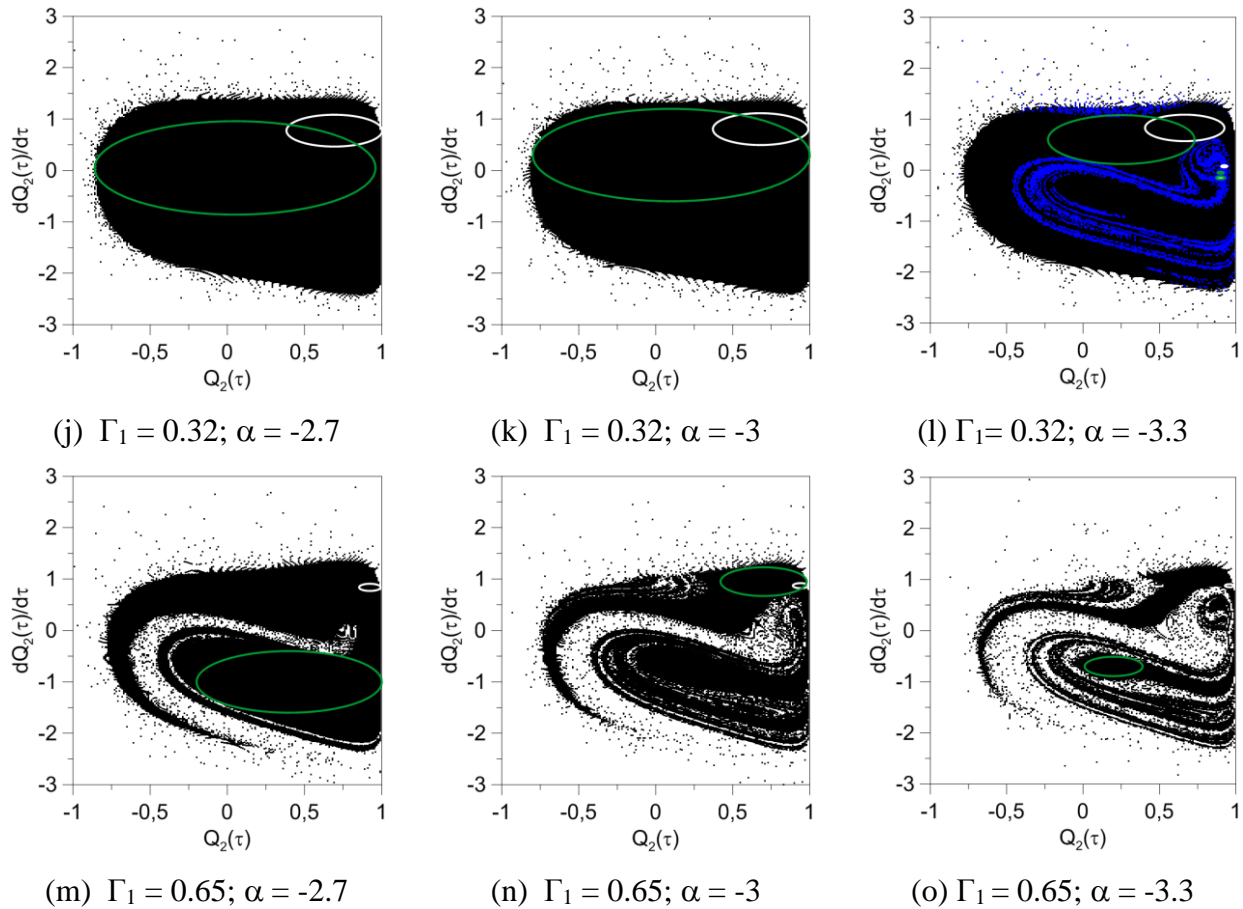


Figura 4.49 – Continuação ...



Nota-se, a partir da Figura 4.49, que à medida se que aumenta a amplitude da excitação harmônica, independentemente do valor da incerteza, maior é a tendência das condições iniciais da bacia de atração se estabilizar no Grupo II (região preta da Figura 4.49). Nota-se também que, assim como a bifurcação do tipo *Butterfly*, as bacias dinâmicas para a bifurcação do tipo *Swallowtail* sofrem uma redução na sua área com o incremento de Γ_1 . Nas Figuras 4.49 (m) – (o) pode-se notar a redução significativa nas soluções das bacias de atração. Na Figura 4.49 (d) essa redução no número de soluções é maior devido a solução caótica que apresenta a bifurcação do tipo *Swallowtail* para $\alpha = -2.7$ quando $\Gamma_1 = 0.16$, conforme apresentado na Figura 4.48. A região de cor branca das bacias de atração corresponde às condições iniciais as quais as soluções tendem ao infinito e não convergem pra nenhum atrator conhecido.

Observa-se nas Figuras 4.49 (a) – (c) que foram detectadas duas soluções periódicas estáveis, dada por duas cores distintas na janela de observação da bacia de atração. Para $0.04 < \Gamma_1 < 0.27$

as bacias de atração tendem a continuar com duas soluções periódicas estáveis apenas para $\alpha = -3$ e -3.3 , conforme ilustrado nas Figuras 4.49 (e), (f), (h) e (i).

Na Figura 4.49 (l) foram detectadas três soluções periódicas estáveis, sendo duas soluções do Grupo I e uma solução do Grupo II. Neste caso diferente do apresentado para o caso *Butterfly* com incerteza no parâmetro δ , dado nas Figuras 4.42 (j) – (l), manteve-se a mesma cor para as soluções periódicas estáveis do Grupo I (região azul da Figura 4.49), pois, o seu plano fase apresenta uma única órbita com duas seções de Poincaré, conforme ilustrado na Figura 4.32 (d), diferente do caso anterior que possuía duas órbitas, conforme ilustrado na Figura 4.31 (d).

Juntamente com as bacias de atração foram analisados os FILs e FIGs para a bifurcação do tipo *Swallowtail* com a incerteza no parâmetro α . Os fatores de integridades estão apresentados pelas regiões delimitada pelos círculos nas bacias de atração da Figura 4.49. O fator de integridade local está representado pela circunferência de cor branca, já o fator de integridade global está representado pela circunferência de cor verde. Para cada grupo apresentado na Figura 4.48 foram obtidos os valores dos fatores de integridade local e global.

Na tabela 4.11 e 4.12 estão relacionados os valores dos FILs e FIGs para os diversos valores de Γ_1 que fazem parte respectivamente, do Grupo I e III.

Observa-se a partir das Tabelas 4.11 e 4.12 que os FILs e FIGs, para os dois grupos, diminuem com o incremento da amplitude da carga harmônica Γ_1 , para um mesmo valor de α . Ainda a partir da Tabela 4.11 e da Figura 4.50, observa-se que os FILs e FIGs do Grupo I, para $\Gamma_1 < 0.1$ possuem uma pequena variação quando se considera a incerteza no parâmetro α . Tornando-se nula para $\Gamma_1 > 0.13$ e $\alpha = -2.7$.

Tabela 4.11 – Variação dos fatores de integridade local e global para a bifurcação do tipo *Swallowtail*, incerteza em α referente ao Grupo I da Figura 4.48.

Parâmetro	Γ_1											
	0.0		0.04		0.1		0.16		0.26		0.32	
α	FIL	FIG	FIL	FIG	FIL	FIG	FIL	FIG	FIL	FIG	FIL	FIG
-2.7	0.17	0.30	0.15	0.34	0.23	0.95	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
-3	0.17	0.34	0.15	0.34	0.21	0.92	0.13	0.79	0.06	0.06	0.0	0.0
-3.3	0.16	0.38	0.16	0.35	0.21	0.90	0.21	0.78	0.07	0.16	0.02	0.03

Tabela 4.12 – Variação dos fatores de integridade local e global para a bifurcação do tipo *Swallowtail*, incerteza em α referente ao Grupo III da Figura 4.48.

Parâmetro α	Γ_1									
	0.0		0.01		0.02		0.03		0.04	
	FIL	FIG	FIL	FIG	FIL	FIG	FIL	FIG	FIL	FIG
-2.7	0.12	0.13	0.11	0.13	0.11	0.15	0.10	0.15	0.09	0.15
-3	0.10	0.10	0.10	0.12	0.09	0.13	0.09	0.13	0.08	0.12
-3.3	0.09	0.09	0.09	0.10	0.08	0.12	0.08	0.09	0.04	0.06

Figura 4.50 – Fator de integridade para a bifurcação do tipo *Swallowtail*, com incerteza no parâmetro α referente ao Grupo I: Fator de integridade (a) Local (b) Global

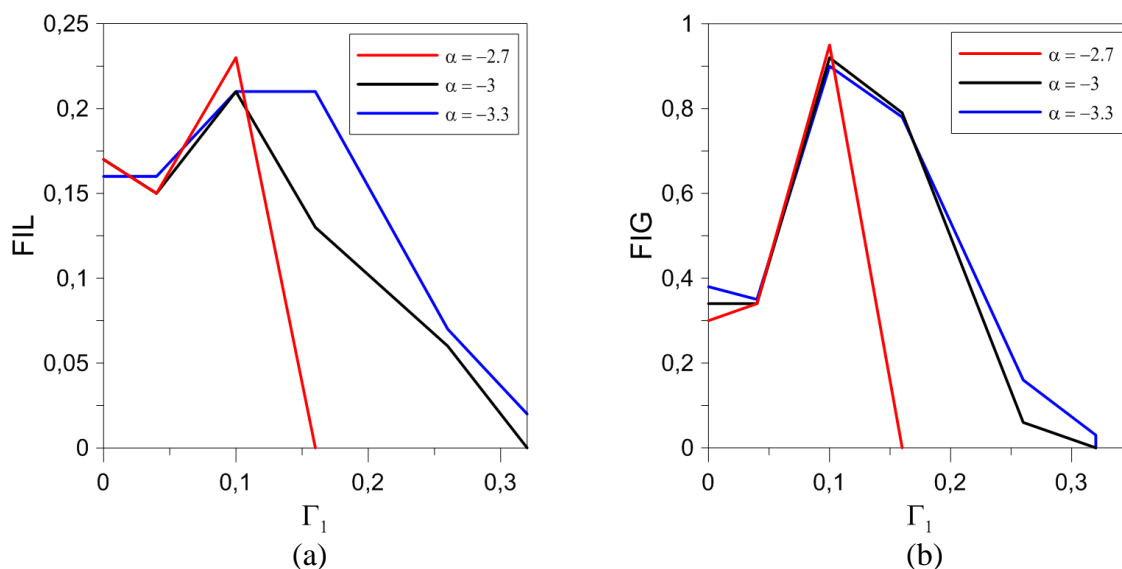
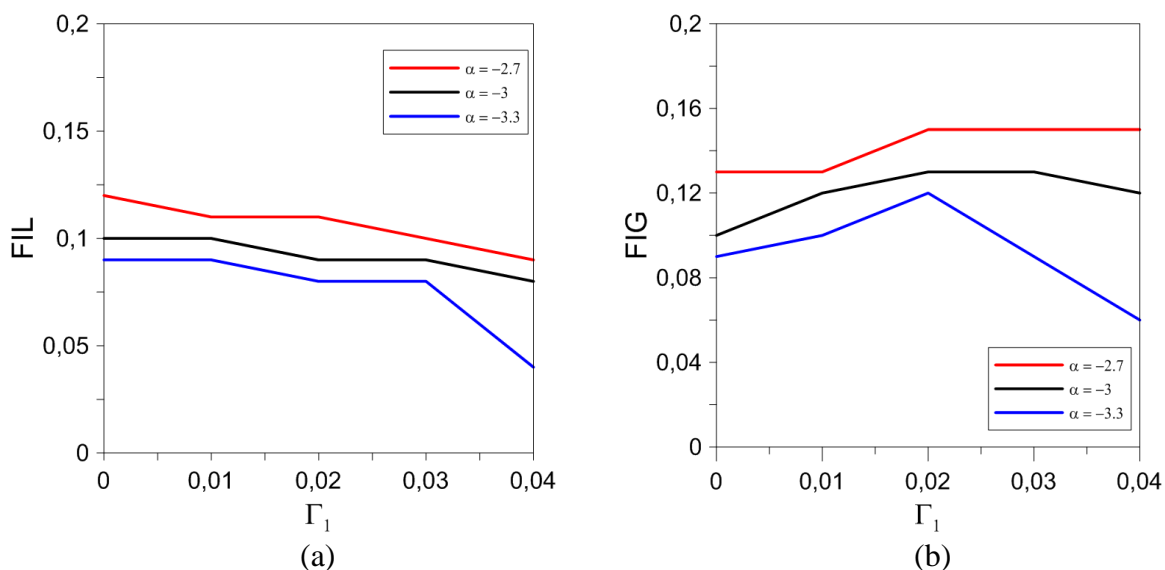


Figura 4.51 – Fator de integridade para a bifurcação do tipo *Swallowtail*, com incerteza no parâmetro α referente ao Grupo III: Fator de integridade (a) Local (b) Global



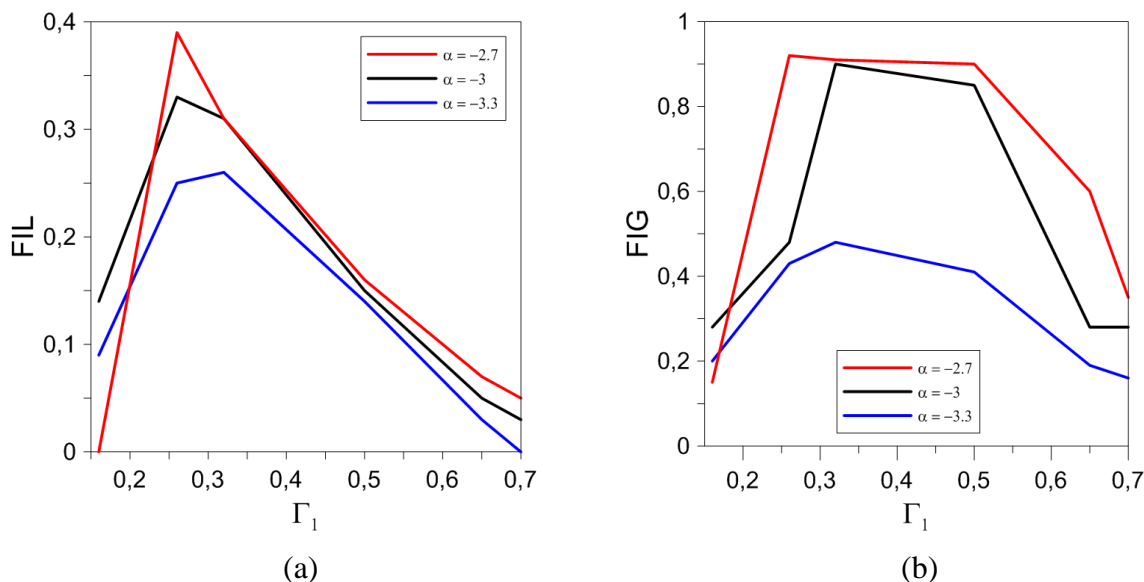
Já no Grupo III a variação nos valores de FILs e FIGs é menor ainda, por se tratar de um trecho pequeno do diagrama de bifurcação, os valores permanecem praticamente os mesmos, conforme ilustrado na Figura 4.51.

Já na Tabela 4.13 estão representados os valores dos fatores de integridade local e fatores de integridade global para diversos valores de Γ_1 que faz parte do Grupo II de bifurcações da Figura 4.48.

Tabela 4.13 – Variação dos fatores de integridade local e global para a bifurcação do tipo *Swallowtail*, incerteza em α referente ao Grupo II da Figura 4.48.

Parâmetro α	Γ_1											
	0.16		0.26		0.32		0.5		0.65		0.7	
	FIL	FIG	FIL	FIG	FIL	FIG	FIL	FIG	FIL	FIG	FIL	FIG
-2.7	0.0	0.15	0.39	0.92	0.31	0.91	0.16	0.90	0.07	0.60	0.05	0.35
-3	0.14	0.28	0.33	0.48	0.31	0.90	0.15	0.85	0.05	0.28	0.03	0.28
-3.3	0.05	0.20	0.25	0.43	0.26	0.48	0.14	0.41	0.03	0.19	0.0	0.16

Figura 4.52 – Fator de integridade para a bifurcação do tipo *Swallowtail*, com incerteza no parâmetro α referente ao Grupo II: Fator de integridade (a) Local (b) Global



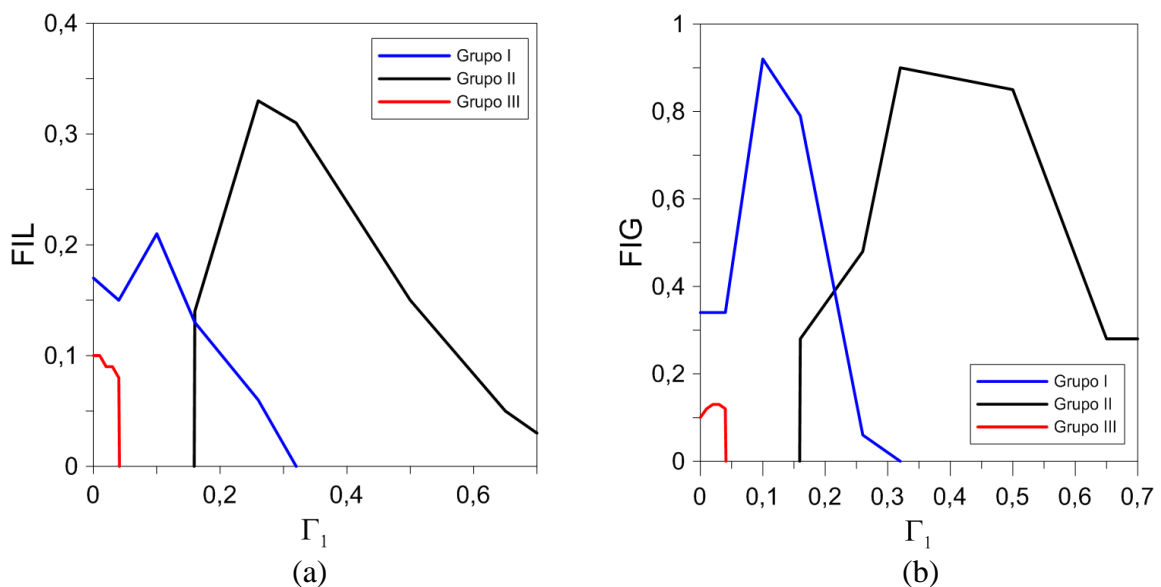
Observa-se a partir da Tabela 4.13 que o fator de integridade, local e global, do Grupo II, para um mesmo do valor α , aumenta para valores de $\Gamma_1 < 0.32$, para qualquer valor dentre as incertezas no parâmetro α , conforme ilustrado na Figura 4.52. Isso já era esperado após

observar a diminuição das condições iniciais estáveis que são atraídas pelas soluções estáveis das bacias de atração, para incremento maiores em Γ_1 , Figuras 4.49 (m) – (o). Com a redução das soluções estáveis, conseqüentemente há redução nos fatores de integridade, pois reduz-se assim as condições iniciais que tendem a se estabilizar no Grupo II.

Ainda a partir da Tabela 4.13 e da Figura 4.52, observa-se que o fator de integridade, local e global, para determinados valores Γ_1 , sofre uma significativa variação quando se considera a incerteza no parâmetro α . Há uma redução na área das condições iniciais que se estabilizam no Grupo II, à medida que se incrementa os valores de α . Essa variação é mais evidente no FIG, quando $\alpha = -2.7$ se tem FIG com raios maiores, já para $\alpha = -3.3$ há uma redução significativa nos valores desses raios.

Assim como as análises dos FILs e FIGs para a bifurcação do caso *Butterfly* nos parâmetros nominais, β e δ , analisa-se os FILs e FIGs para a bifurcação do caso *Swallowtail* para o parâmetro nominal $\alpha = -3$, ilustrado na Figura 4.53, onde as relações de cores designadas para os três Grupos da Figura 4.48 foram mantidas.

Figura 4.53 – Fatores de integridade para a bifurcação do tipo *Swallowtail*, para o parâmetro nominal $\alpha = -3$ referente aos Grupos da Figura 4.48: Fator de integridade (a) Local (b) Global



A partir da Figura 4.53 pode-se observar que os FILs e FIGs possuem os maiores valores, quando as soluções periódicas estáveis convergem para o Grupo II, representado pela cor preta, este por sua vez tem atinge o seu maior valor para $\Gamma_1 = 0.32$, valor este quando o Grupo I,

representado pela cor azul, termina. A relação inversamente proporcional entre os fatores de integridade, local e global, também pode ser observado para o caso *Swallowtail*, onde a medida que as curvas do FIL e FIG do Grupo I diminui, as curvas do Grupo II aumentam, conforme ilustrado na Figura 4.53.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Neste capítulo são apresentadas as conclusões sobre o comportamento dinâmico não linear do modelo mecânico sujeito a flambagem, bem como a aplicabilidade do polinômio de caos no sistemas, analisadas de acordo com os resultados apresentados no Capítulo 4, seguidas de algumas sugestões para trabalhos futuros.

Com o objetivo de avaliar a influência das incertezas dos parâmetros físicos e geométricos nas vibrações não-lineares e na estabilidade de sistemas mecânicos sujeito a flambagem, bem como a aplicabilidade do polinômio de caos generalizado para o estudo das aleatoriedade deste sistema, foram feitas diversas análises para a bifurcação simétrica instável do tipo *Butterfly* e para a bifurcação assimétrica instável do tipo *Swallowtail*.

Primeiramente foram investigadas as respostas determinísticas para os parâmetros nominais e para as incertezas que definem a mola não linear do sistema estudado para os dois tipos de bifurcação, *Butterfly* e *Swallowtail*, obtendo assim seus respectivos digramas de bifurcação, planos fases, bacias de atração e fatores de integridade, local e global.

Devido à presença de aleatoriedades, o problema abordado é estocástico, de forma que, a discretização do campo aleatório é feita utilizando o método do polinômio de Legendre-Caos, que transforma a equação diferencial parcial estocástica em um conjunto de equações diferenciais parciais determinísticas, que incorporam a aleatoriedade do sistema.

A incerteza é analisada considerando-se a aleatoriedade nos parâmetros, β e δ , para a bifurcação do tipo *Butterfly* e no parâmetro α , para a bifurcação do tipo *Swallowtail*. Esses parâmetros definem o comportamento da mola não linear do sistema mecânico estudado.

Sendo assim foram investigadas também as respostas não determinísticas das duas bifurcações analisadas, com seus respectivos parâmetros nominais e incertezas, para efeito comparativo com as respostas não determinísticas, de forma que a partir dos resultados obtidos tem-se que as principais conclusões deste trabalho são:

- ◆ Na análise determinística não linear estática, a incerteza proposta nos parâmetros de rigidez da mola não linear não modifica o tipo de bifurcação, o comportamento pós-crítico dos sistemas discretos e o valor da carga crítica. Apenas o valor da carga mínima pós-crítica dos diagramas de bifurcação é alterado com a incerteza, levando a mudanças na coexistência entre soluções pós críticas com a solução fundamental, principalmente, no caso da bifurcação *Swallowtail*;
- ◆ As bacias de atração obtidas na análise determinística não linear estática apresentaram erosão e o decréscimo dos fatores de integridade, local e global, para as soluções triviais com o incremento do carregamento estático, para ambos os casos de bifurcação investigados. Já para as soluções pós-críticas, os resultados ilustraram que os fatores de integridade, local e global, aumentaram com o incremento do carregamento estático;
- ◆ Quanto a análise determinística estática da incerteza nos parâmetros de rigidez da mola não linear do sistema mecânico, observou-se que a maior variabilidade detectada nas soluções pós-críticas de ambos os casos de bifurcação ocorreu para valores de carregamento entre o mínimo pós-crítico e a carga crítica, conseqüentemente, os fatores de integridade, local e global, apresentaram maior dispersão nos seus valores para esta região;
- ◆ Os diagramas de bifurcação do tipo *Butterfly*, para a análise determinística dinâmica, sofrem maior modificação em relação as incertezas quando ela é avaliada no parâmetro β . Dependendo da incerteza em β pode surgir mais soluções periódicas estáveis quando comparado as soluções obtidas para o parâmetro nominal. Já as incertezas impostas no parâmetro δ pouco modificam o comportamento do diagrama de bifurcação, tendo assim um comportamento análogo ao parâmetro nominal;
- ◆ Assim como a bifurcação do tipo *Butterfly*, a *Swallowtail* também é afetada de forma significativa em relação a variação das incertezas, quando se analisa seus diagramas de bifurcação determinístico dinâmico. Dependendo do valor que se insere a incerteza pode acontecer um aumento no número de soluções estáveis, mas dependendo do valor também pode gerar soluções caóticas;

- ◆ A partir dos diagramas de bifurcação obtidos para a análise dinâmica determinísticas é possível concluir que, independente da incerteza e do caso de bifurcação analisado, para amplitudes da carga de excitação (Γ_1) maiores que 0.5 as soluções são estáveis, apresentando somente uma solução periódica. Conclui-se também, que as incertezas afetam mais o comportamento dos diagramas de bifurcações para valores de Γ_1 menores que 0.5;
- ◆ A partir das análises não determinísticas conclui-se que a aplicabilidade do polinômio de caos não se mostrou viável para a análises das oscilações não lineares, quando se considera grandes valores de Γ_1 . Para os diagramas de bifurcação estocásticos obtidos com o polinômio de Legendre-Caos, independentemente da bifurcação analisada, os resultados obtidos se comportaram como a média dos resultados limites apenas para pequenos valores de Γ_1 ou para as soluções presentes no vale potencial pré-flambagem. Concluindo que esse comportamento acontece porque a técnica do polinômio de caos incorpora à análise do problema a variância das amostras na resposta no tempo do sistema, logo para incrementos grandes de Γ_1 , a variância é suficiente para modificar a resposta não determinística do sistema;
- ◆ Para as duas bifurcações analisadas conclui-se que, quanto maior são os valores de Γ_1 , o que propicia vibrações de grande amplitudes entre o vale pré e pós-flambagem, a resposta não determinística não estará entre os limites do parâmetro analisado, levando o seu plano fase não determinístico a prescrever órbitas com valores superiores aos valores determinísticos por conta da consideração da variabilidade que o método do polinômio de caos impões e por conta da variabilidade de soluções que coexistem simultaneamente.

Sugerem-se, como continuidade deste trabalho, pesquisas que contribuam com os seguintes temas:

- ◆ Estudo da aplicabilidade do polinômios de caos para problemas dinâmicos não-lineares, de modo que a variabilidade das amostras na resposta no tempo possa ser controlada ou prescrita;
- ◆ Avaliar a pertinência e o significado de se construir bacias de atração com o sistema de equações não determinísticas, obtidas via polinômio de caos, principalmente nos

casos em que há erosão da bacia de atração com um determinado parâmetro de controle;

- ◆ Consideração de dois ou mais parâmetros aleatórios simultâneos para quantificar a influência das incertezas na bifurcações de sistemas sujeito a flambagem;
- ◆ Estudo da aplicabilidade do polinômio de caos para problemas dinâmicos não-lineares com a utilização de outro polinômio ortogonal, para efeito de comparação com o presente trabalho, permitindo avaliar assim a influência imposta pela variabilidade das amostras na sua resposta no tempo;
- ◆ Expandir as aplicações do polinômio de caos para outros sistemas estruturais dinâmicos, principalmente n -dimensionais para poder analisar as oscilações não lineares considerando a aleatoriedade das incertezas nos seus parâmetros físicos e geométricos.

REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, J. M. **Pilares esbeltos de concreto armado: algoritmos para análise e dimensionamento**. 1 ed. 158 p. Rio Grande: Editora da Fundação Universidade do Rio Grande, 1993.
- BRAZÃO, A. F. **Aplicação do polinômio de Hermite-Caos para a determinação da carga de instabilidade paramétrica de cascas cilíndricas com incerteza nos parâmetros físicos e geométricos**. 2014. 92 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil: Estruturas) – Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2014.
- BUENO, M. M. E. **Avaliação dos parâmetros de instabilidade global em estruturas de concreto armado**. 2009. 88 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil) – Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, 2009.
- CEDOLIN, L.; BAZANT, Z. P. **Stability of Structures**, New York: Ed. Dover Science, p.1014, 2003.
- GOMES, W. J. S. **Otimização de riscos sob processos aleatórios de corrosão e fadiga**. 2013. 188 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil: Estruturas) – Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013.
- GONÇALVES, P. B.; DEL PRADO, Z. J. G. N. Effect of non-linear modal interaction on the dynamic instability of axially excited cylindrical shells. **Computers & Structures**, v. 82, n. 31, p. 2621-2634, 2004.
- GONÇALVES, P. B.; SILVA, F. M. A.; REGA, G.; LENCI, S. Global dynamics and integrity of a two-dof model of a parametrically excited cylindrical shell. **Nonlinear Dynamics**, [s. l.], v. 63, p. 61-82, 2011.
- HOFF, A. **Estruturas de bifurcação em sistemas dinâmicos quadridimensionais**. 2014. 65 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Departamento de Física, Universidade do Estado de Santa Catarina, Centro de Ciências Tecnológicas, Joinville, 2014.
- KROETZ, H. M. **Meta-Modelagem em confiabilidade estrutural**. 2015. 115 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil: Estruturas) – Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.
- MILLON, S. L. J. **Técnicas gráficas e computacionais para a análise de oscilações não lineares e caos em sistemas estruturais suscetíveis à flambagem**. 1991. 232 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil: Estruturas) – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1991.
- NAYFEH, A. H.; BALACHANDRAN, B. **Applied nonlinear dynamics: analytical, computational, and experimental methods**, New York: Ed. John Wiley and Sons, p.691, 1995.
- PAZ, M. **Structural dynamics: Theory and computation**. 2 ed. New York: Van Nostrand Reinhold, 1985. 825 p.

REGA, G.; LENCI, S. Identifying, evaluating and controlling dynamical integrity measures in non-linear mechanical oscillators. **Nonlinear Anal.** v. 63, p. 902–914, 2005.

RIOS, R. D. **Aplicação do método dos elementos discretos em estruturas de concreto.** 2002. 151 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil: Estruturas) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, UFRGS, 2002.

RODRIGUES, L. **Uma introdução à influência da interação modal nas oscilações não lineares de cascas cilíndricas.** 2013. 143 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil: Mecânica das Estruturas) – Departamento de Engenharia Civil, Programa de Pós-Graduação em Geotecnia, Estruturas e Construção Civil, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2013.

RODRIGUES, L.; SILVA, F. M. A.; GONÇALVES, P. B.; DEL PRADO, Z. J. G. N. Effect of modal coupling on the dynamics of parametrically and directly excited cylindrical shells. **Thin-Walled Structures**, v. 81, p. 210-2224, 2013.

SILVA JÚNIOR, C. R. A. **Aplicação do método de Galerkin em problemas estocásticos de flexão de placas de Kirchhoff.** 2004. 111 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, 2004.

SILVA JÚNIOR., C. R. A.; BECK, A. T. Chaos-Galerkin solution of stochastic Timoshenko bending problems. **Computers and Structures**, [s. l.], v. 89, p. 599-611, 2011.

SILVA, F. M. A.; BRAZÃO, A. F.; GONÇALVES, P. B. Influence of physical and geometrical uncertainties in the parametric instability load of an axially excited cylindrical shell. **Mathematical Problems in Engineering**, vol 1, 2015.

SILVA, F. M. A.; GONÇALVES, P. B. The influence of uncertainties and random noise on the dynamic integrity analysis of a system liable to unstable buckling. **Nonlinear Dynamics**, [s. l.], v. 66, p. 303-333, 2011.

TEDESCO, J.W.; McDOUGAL, W. G.; ROSS, C. A. **Structural dynamics: Theory and applications.** 1 ed. Menlo Park: Addison-Wesley, 1998. 816 p.

THOMPS, J.M.T. Chaotic phenomena triggering the escape from a potential well. **Proc. R. Soc. Lond.** v. 421, p. 195–225, 1989.

XIU, D.; KARNIADAKIS, G. E. The Wiener-Askey polynomial chaos for stochastic differential equations. **SIAM Journal on Scientific Computing**, [s. l.], v. 24, n. 2, p. 619-644, 2002.