UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

EDSON FERREIRA DA COSTA JUNIOR

ANÁLISE DE PROCESSOS DE CONSTRUÇÕES DE MODELOS: O MOVIMENTO DE TRANSLAÇÃO

GOIÂNIA
2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
GERÊNCIA DE CURSOS E PROGRAMAS INTERDISCIPLINARES

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

[X] Dissertação [ ] Tese

2. Nome completo do autor

EDSON FERREIRA DA COSTA JUNIOR

3. Título do trabalho

ANÁLISE DE PROCESSOS DE CONSTRUÇÕES DE MODELOS: O MOVIMENTO DE TRANSLAÇÃO

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:
a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.
O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.

---

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Karly Barbosa Alvarenga**, **Professor do Magistério Superior**, em 17/08/2021, às 10:21, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **EDSON FERREIRA DA COSTA JUNIOR**, **Discente**, em 17/08/2021, às 10:27, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do

Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2280185** e o código CRC **2E49BF06**.

Referência: Processo nº 23070.031228/2021-56 SEI nº 2280185

EDSON FERREIRA DA COSTA JUNIOR

ANÁLISE DE PROCESSOS DE CONSTRUÇÕES DE MODELOS: O MOVIMENTO DE TRANSLAÇÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, da Pró-Reitoria de Pós-Graduação, da Universidade Federal de Goiás (UFG), como requisito para obtenção do título de mestre em Educação em Ciências e Matemática.
Área de concentração: Qualificação de Professores de Ciências e Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Karly Barbosa Alvarenga

GOIÂNIA
2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Costa Junior, Edson Ferreira da
ANÁLISE DE PROCESSOS DE CONSTRUÇÕES DE MODELOS: O MOVIMENTO DE TRANSLAÇÃO [manuscrito] / Edson Ferreira da Costa Junior. - 2021.
CXLVI, 146 f.

Orientador: Profa. Dra. Karly Barbosa Alvarenga.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Pró reitoria de Pós-graduação (PRPG), Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Goiânia, 2021.
Bibliografia. Anexos. Apêndice.
Inclui lista de figuras.

1. álgebra. 2. aritmética. 3. geometria. 4. ensino. 5. isometrias. I. Alvarenga, Karly Barbosa, orient. II. Título.

CDU 51:37

UFG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

GERÊNCIA DE CURSOS E PROGRAMAS INTERDISCIPLINARES

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata da sessão de Defesa de Dissertação de EDSON FERREIRA DA COSTA JUNIOR, que confere o título de Mestre(a) em EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA, na área de concentração em **Qualificação de Professores de Ciências e Matemática**.

Ao/s **19 dias do mês de julho de 2021**, a partir da(s) **16:00**, por VIDEOCONFERÊNCIA, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada **"**ANÁLISE DE ALGUNS PROCESSOS DE CONSTRUÇÕES DE MODELOS MATEMÁTICOS: O MOVIMENTO DE TRANSLAÇÃO**"**. Os trabalhos foram instalados pelo(a) Orientador(a), Professor(a) Doutor(a) KARLY BARBOSA ALVARENGA - UFG com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor(a) Doutor(a) JHONY ALEXANDER VILLA OCHOA - UA, membro titular externo; Professor(a) Doutor(a) JHONE CALDEIRA SILVA - UFG, membro titular externo. Durante a arguição os membros da banca **fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido(a) o(a) candidato(a) **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo(a) Professor(a) Doutor(a) KARLY BARBOSA ALVARENGA, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

ANÁLISE DE PROCESSOS DE CONSTRUÇÕES DE MODELOS: O MOVIMENTO DE TRANSLAÇÃO

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Karly Barbosa Alvarenga**, **Professor do Magistério Superior**, em 04/08/2021, às 19:59, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Jhone Caldeira Silva**, **Professor do Magistério Superior**, em 06/08/2021, às 14:07, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

sei! assinatura eletrônica

Documento assinado eletronicamente por **Marlon Herbert Flora Barbosa Soares**, **Coordenadora de Pós-Graduação**, em 18/08/2021, às 11:14, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2249541** e o código CRC **1E3C26B4**.

Referência: Processo nº 23070.031228/2021-56 SEI nº 2249541

AGRADECIMENTOS

Não poderia iniciar, sem agradecer a todos que, ao meu lado, continuam sonhando por uma educação de qualidade e diferenciada.

Agradeço aos meus pais, Ivaní Dias e Edson Ferreira, e à minha irmã, Lorena Ferreira, por proporcionarem todo o apoio durante o desenvolvimento deste trabalho, nos últimos anos.

À querida professora Karly Alvarenga, obrigado pela parceria em diferentes formas. Certo de que, nela, tenho fonte de inspiração.

Agradeço ao Colégio Estadual Nossa Senhora de Lourdes, por receber-me e ter-me concedido o espaço necessário para que eu desenvolvesse esta pesquisa.

Aos alunos e às alunas do Colégio Estadual Nossa Senhora de Lourdes, cujas vozes foram fundamentais para a consolidação deste trabalho.

Aos meus parceiros e parceiras do Grupo de Estudos em Educação Matemática – GEEM/UFG.

Aos meus amigos e amigas por todo o suporte e apoio durante a construção deste trabalho.

Agradeço à banca de pesquisadores, por aceitar participar deste trabalho, na medida em que o leram e explicitaram importantes questionamentos para a sua composição.

A construção de um modelo matemático não se faz de maneira automática nem imediata, pelo contrário, requer certo período de tempo no qual o modelador põe em jogo seus conhecimentos matemáticos, o conhecimento do contexto e da situação e suas habilidades para descrever, estabelecer e representar as relações existentes entre as quantidades, de tal maneira que se possa construir novo objeto matemático. (VILLA-OCHOA, 2007, p. 67, tradução nossa)

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo analisar os processos de construção de modelos matemáticos realizados por alunos do primeiro ano do ensino médio, para representar as transformações no plano, especificamente o movimento horizontal. É comum as transformações geométricas, as isometrias, os movimentos rígidos e as simetrias serem apresentados ou com formalidade, ou de maneira simplória. Com o propósito de gerar um trabalho intermediário entre esses dois extremos, elaborou-se uma oficina, com a finalidade de desenvolver o ensino conjunto de álgebra, de geometria e de aritmética para que, assim, os alunos pudessem fazer uso da criatividade e da linguagem matemática e descrever as ações observadas. A oficina foi subsidiada por ideias acerca da modelagem matemática, com a intenção de interpretar e descrever, matematicamente, o movimento de translação horizontal por meio da manipulação do material concreto, para, desse modo, proporcionar melhor visualização da situação investigada pelos participantes. Portanto, foram realizadas duas oficinas com alunos do 1° ano do ensino médio de uma escola pública de Goiás. É importante ressaltar que o objetivo não era encontrar a solução correta, a resposta ideal, mas, sim, possibilitar o contexto de construção do conhecimento fundamentado e significativo em que os estudantes, com o auxílio do professor, eram instruídos a descobrir, criticar e questionar as suas decisões e a criar um modelo com implicações no mundo concreto. Para a obtenção dos dados, foram empregados ficha de atividade, questionário e gravação em áudio. Em relação aos resultados, analisaram-se as abordagens aritmética, algébrica e geométrica, ao representar o fenômeno, e os estudantes apresentaram dificuldades relacionadas às operações elementares e ao uso da simbologia. Notou-se que eles recorrem a uma das linguagens, a matemática ou a materna escrita, ou a ambas, para resolver as situações problema com escolha da que é mais conveniente em seu entendimento. Conclui-se que essas dificuldades são reflexos de um ensino mecânico e sem produção de significado nas séries anteriores. Além disso, os resultados da pesquisa podem contribuir para o tratamento interdisciplinar desse tema e impulsionar o desenvolvimento da matemática, além de destacar a sua aplicabilidade no cotidiano.

Palavras-chave: álgebra; aritmética; geometria; ensino; isometrias.

ABSTRACT

This work aims to analyze the construction processes of mathematical models carried out by first-year high school students, to represent the changes in the plane, specifically the horizontal movement. Geometric transformations, isometries, rigid movements and symmetries are common, either formally or in a simple way. With the purpose of mediating the work between these two extremes, a workshop was carried out, with the students developing the mutual teaching of algebra, geometry and arithmetic so that they could make use of creativity and mathematical language to descrive the actions observed. The workshop was supported by ideas about mathematical modeling, with the intention of mathematically interpreting and describing the horizontal translation movement through the manipulation of the concrete material, then providing a better visualization of the situation investigated by the participants. Therefore, two workshops were held with students during the 1st year of high school (14 – 15 years) in a public school in Goiás. It is important to emphasize that the objective was not to find the correct solution, the ideal answer, but to create a space of construction of significant knowledge where students, with the help of the teacher, were instructed to discover, criticize and question their decisions and the creation of a model based on the concrete world. To gather data, activity forms, questionnaires and audio recordings were used. Regarding the results, the arithmetic, algebraic and geometric approaches were analyzed when representing the phenomenon, and students showed difficulties related to the elementary operations and the use of symbology. It was noticed that students used one of the languages, the mathematics or the written mother tongue, or both, to solve problems by choosing the one that is more convenient for them to understand. It is possible to conclude that these difficulties are reflections of a mechanical teaching without meaning production in the previous grades. In addition, the research results can contribute to the interdisciplinary treatment of this topic and boost the development of mathematics, in addition to highlighting its applicability in everyday life.

Keywords: algebra; arithmetic; geometry; teaching; isometries.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: esboço da pesquisa 19
Figura 2: exemplo de padrão presente na natureza 20
Figura 3: exemplo de apresentação de um conceito e discussão 29
Figura 4: ilustração do processo de modelagem 38
Figura 5: processo de modelagem 39
Figura 6: exemplo do movimento de translação 53
Figura 7: exemplo do movimento de rotação 53
Figura 8: movimento de translação 55
Figura 9: movimento de rotação com ângulo θ 56
Figura 10: reflexão do boneco em relação à reta t 56
Figura 11: exemplo da reflexão deslizante 57
Figura 12: exemplo utilizado na oficina 59
Figura 13: situação problema referente ao movimento horizontal 66
Figura 14: ilustração da primeira situação abordada 68
Figura 15: ilustração da segunda situação 69
Figura 16: ilustração da terceira situação 70
Figura 17: dados do grupo 1 de respostas. 85
Figura 18: grupo 1 de respostas 86
Figura 19: resposta do aluno F para o grupo 1 de questões 86
Figura 20: abordagem de cada estudante no grupo 1 de respostas 87
Figura 21: resposta do aluno C para o grupo 1 de respostas 87
Figura 22: dados do grupo 2 de respostas 88
Figura 23: grupo 2 de respostas 89
Figura 24: abordagem de cada estudante no grupo 2 de respostas 90
Figura 25: resposta do aluno C para o grupo 2 de questões 90
Figura 26: dados do grupo 3 de respostas 91
Figura 27: grupo 3 de respostas 92
Figura 28: abordagem utilizada pelos participantes no grupo 3 de respostas 93
Figura 29: resposta do participante A para o grupo 3 de questões 93
Figura 30: dados do grupo 4 de respostas 95
Figura 31: grupo 4 de respostas 96
Figura 32: resposta do participante D para o grupo 4 de questões 97
Figura 33: abordagem de cada participante no grupo 4 de respostas 97

Figura 34: dados do grupo 5 de respostas 98
Figura 35: grupo 5 de respostas 99
Figura 36: resposta do participante H para o grupo 5 de questões 99

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: classificação da modelagem em três casos 25
Quadro 2: tipos de modelos apresentados pelo autor 37
Quadro 3: diferenças entre os processos de modelagem 40
Quadro 4: etapas da primeira abordagem 39
Quadro 5: benefícios para os alunos em um trabalho com a modelagem 39
Quadro 6: etapas da segunda abordagem 40
Quadro 7: vantagens de um trabalho com modelagem matemática 41
Quadro 8: dificuldades do professor no trabalho com a modelagem matemática 41
Quadro 9: algumas dificuldades enfrentadas pelos alunos 42
Quadro 10: algumas habilidades esperadas no ensino fundamental e médio 44
Quadro 11: os tipos de pensamento e o seu sistema de representação 48
Quadro 12: descrição de cada enfoque e sua relação com o modelo matemático 48
Quadro 13: possível modelo a ser desenvolvido pelos estudantes 49
Quadro 14: conceitos, definições e exemplos 50
Quadro 15: aspectos do processo de estudar, comparar e classificar as figuras 54
Quadro 16: desenvolvimento da oficina 67
Quadro 17: categorias referentes ao modelo matemático 72
Quadro 18: quantitativo dos dados do teste piloto 72
Quadro 19: perfil dos participantes 73
Quadro 20: modelos produzidos pelos estudantes NV e S 74
Quadro 21: modelo produzido pelos alunos P e G 76
Quadro 22: modelo produzido pelos alunos W e A 77
Quadro 23: modelo apresentado pelos estudantes F e R 78
Quadro 24: algumas informações sobre a oficina 2 82
Quadro 25: organização dos dados em características segundo as questões propostas 83
Quadro 26: questionário aplicado após a implementação da oficina 83
Quadro 27: grupo 1 de questões 85
Quadro 28: grupo 2 de questões 88
Quadro 29: grupo 3 de questões 90
Quadro 30: grupo 4 de questões 94
Quadro 31: grupo 5 de questões 98

SUMÁRIO

A TRAJETÓRIA QUE LEVOU AO TEMA **17**
INTRODUÇÃO 19
CAPÍTULO 1: UM PASSEIO PELA LITERATURA **23**
1.1 MODELAGEM MATEMÁTICA 24
1.2 LINGUAGEM MATEMÁTICA 27
1.3 MOVIMENTOS NO PLANO 29
1.4 UTILIZAÇÃO DO MATERIAL CONCRETO 31
1.5 NOVA PERSPECTIVA PARA A CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO 31
CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO **34**
2.1 O MARCO TEÓRICO PARA A MODELAGEM MATEMÁTICA 35
2.2 O MARCO TEÓRICO PARA A LINGUAGEM MATEMÁTICA 45
2.3 O MARCO TEÓRICO PARA OS MOVIMENTOS NO PLANO 52
2.4 O MARCO TEÓRICO PARA O MATERIAL CONCRETO 59
2.5 O MARCO TEÓRICO PARA O ENSINO REMOTO 61
CAPÍTULO 3: METODOLOGIA DE PESQUISA, COLETA E ANÁLISE DE DADOS63
3.1 METODOLOGIA DE PESQUISA 64
3.2 QUESTIONÁRIO 65
3.3 METODOLOGIA DE ORGANIZAÇÃO DOS DADOS 66
3.4 METODOLOGIA DE ENSINO NO TESTE PILOTO 67
3.5 CARACTERIZAÇÃO DOS INDIVÍDUOS DO TESTE PILOTO 68
3.6 METODOLOGIA DE ENSINO REMOTO 69
3.7 CARACTERIZAÇÃO DOS INDIVIDUOS DA OFICINA 2 72
CAPÍTULO 4: RESULTADOS INICIAIS – DADOS DO TESTE PILOTO **74**
CAPÍTULO 5: NOVA COLETA DE DADOS **84**
5.1 DADOS DA OFICINA 2 85
5.2 GRUPO 1 DE RESPOSTAS 88
5.3 GRUPO 2 DE RESPOSTAS 91
5.4 GRUPO 3 DE RESPOSTAS 93
5.5 GRUPO 4 DE RESPOSTAS 97
5.6 GRUPO 5 DE RESPOSTAS 101
CONSIDERAÇÕES FINAIS **104**
REFERÊNCIAS **108**
APÊNDICE A: *SLIDE* UTILIZADO NO TESTE PILOTO **112**

APÊNDICE B: QUESTIONÁRIO DA PESQUISA **120**
APÊNDICE C: MATERIAL DE APOIO **121**
APÊNDICE D: *SLIDE* DA OFICINA 2 .... **133**
APÊNDICE E: ROTEIRO DA ATIVIDADE - MOVIMENTO HORIZONTAL **139**
ANEXO: PARECER CONSUBSTANCIADO DO COMITÊ DE ÉTICA E PESQUISA (CEP) **143**

A TRAJETÓRIA QUE LEVOU AO TEMA

Considero importante exibir os caminhos que possibilitaram o interesse pelo tema da pesquisa e a minha trajetória de pesquisador. Sou licenciado em Matemática, pela Universidade Federal de Goiás (UFG), desde 2017. Durante a graduação, participei do Programa de Educação Tutorial da Licenciatura em Matemática (PETMAT) e do Programa de Extensão e Cultura (PROBEC). No PETMAT/UFG, desenvolvi projetos ligados ao ensino, à pesquisa e à extensão durante dois anos e meio. Nesse período, atuei como ministrante do curso de Matemática Básica, destinado à população de Goiânia e fui monitor no projeto Círculo Tutorial de Cálculo, voltado aos estudantes de cálculo dos cursos da UFG. Além disso, colaborei para o desenvolvimento de atividades lúdicas para o ensino fundamental em uma escola municipal da região de Goiânia, pelo projeto Clube de Matemática.

Após o encerramento das atividades no PETMAT/UFG, tive a oportunidade de ingressar no projeto Aprenda Matemática por Meio de Materiais Lúdicos, vinculado ao Programa de Bolsas de Extensão e Cultura (PROBEC). Dessa forma, durante minha participação, desenvolvi uma pesquisa de cunho bibliográfico que contribuiu na elaboração de atividades de matemática com os materiais disponíveis no Laboratório de Educação Matemática (LEMAT), da UFG.

O objetivo desse projeto foi desenvolver atividades associadas à álgebra no contexto da geometria, junto ao estudo dos movimentos no plano, com intuito de proporcionar o pensamento algébrico e geométrico, com o auxílio da modelagem matemática. Entretanto, ao realizar um estudo mais aprofundado sobre os movimentos no plano, especificamente, as transformações geométricas, as isometrias, os movimentos rígidos e as simetrias, compreendi, naquele momento, que esses termos eram empregados como sinônimos em livros e artigos científicos. No decorrer do tempo, percebi que essa relação é incorreta e que cada termo tem as suas particularidades.

Por outro lado, não foi possível desenvolver essa proposta pela complexidade do tema, de acordo com o cronograma estabelecido. Dessa forma, após minha participação no PROBEC/UFG e a conclusão do curso de Licenciatura em Matemática, em 2017, fiz duas disciplinas na condição de aluno especial, denominadas Fundamentos Teórico-Metodológicos do Ensino de Matemática no Programa de Pós-Graduação Ensino na Educação Básica (PPGEEB), em nível de mestrado, da UFG, e as TIC no Ensino de Ciências e Matemática, do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGECM), em nível de mestrado, também da UFG. Tais disciplinas foram de grande importância para refletir acerca do tema que havia desenvolvido no PROBEC/UFG.

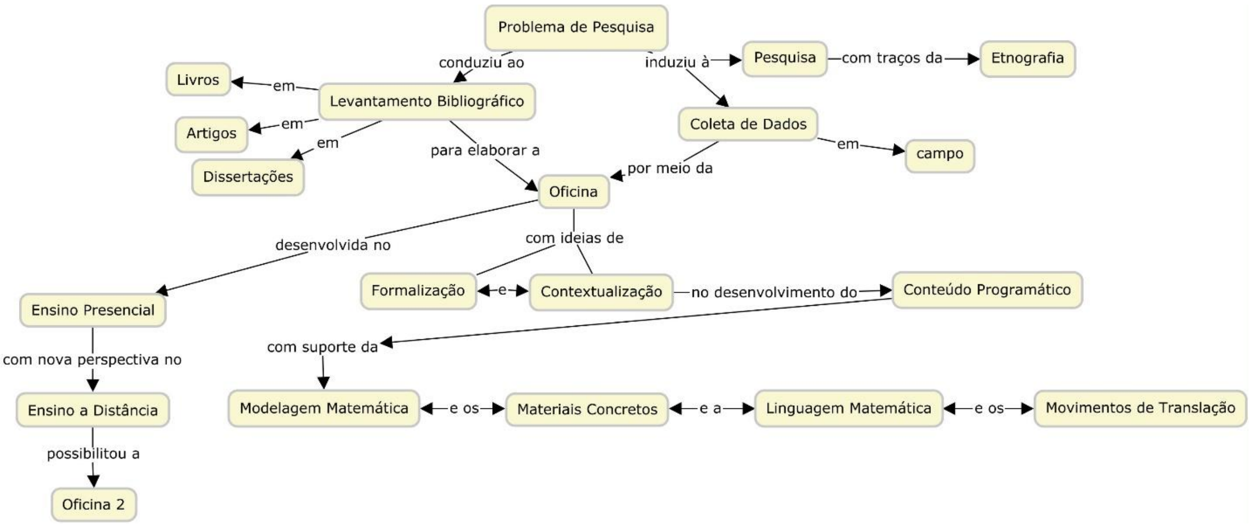
Subsequentemente, com a minha aprovação no PPGECM/UFG, no nível de mestrado, em 2019, conjuntamente com a minha orientadora, decidi continuar a investigação sobre os movimentos no plano. Nesse sentido, com a minha entrada no Grupo de Estudos em Educação Matemática (GEEM), verificamos a necessidade de reformular a proposta e adequar as atividades mediante as noções matemáticas acerca das transformações no plano, para desenvolver um trabalho de pesquisa.

INTRODUÇÃO

As análises de publicações nacionais e estrangeiras e os livros referentes às transformações no plano deram início à investigação. Entretanto, essas publicações não explicitaram as inter-relações existentes entre as transformações geométricas, as isometrias, os movimentos rígidos e as simetrias. Sendo assim, compreendíamos esses conceitos como sinônimos. Além disso, a abordagem utilizada para explanação dos conceitos, algumas vezes, é feita sem utilização da linguagem matemática. Em outras situações, esses conceitos são tratados com uma linguagem extremamente formal, sem a contextualização do tema para facilitar a compreensão.

Com o intuito de abordar tanto a formalidade quanto a contextualização, realizamos um trabalho com a modelagem matemática, com suporte dos materiais concretos e do uso da linguagem matemática para a modelação do movimento de translação horizontal. Para a coleta dos dados, elaboramos uma oficina para estudantes do 1° ano do ensino médio de uma escola da rede pública da cidade de Goiânia-GO. Para atingir tais fins, realizamos as seguintes etapas da pesquisa como pode ser observado na figura 1.

Figura 1: esboço da pesquisa



Fonte: Elaboração do autor no CmapTools.

Os objetivos da oficina foram: possibilitar o ensino de álgebra, de geometria e de aritmética em conjunto; estimular o estudante a desenvolver o pensamento matemático e a linguagem matemática na modalidade oral e escrita. Tínhamos como perspectiva inicial o ensino presencial, mas deparamos com nova possibilidade: o ensino remoto.

Um dos princípios do ensino de matemática é o prazer da descoberta, mas, há muito tempo, esse aspecto cedeu lugar à memorização. Albuquerque (1954, p. 6), em sua época, asseverou:

"nosso ensino apela muito para a memória, e, como memória não significa inteligência, a criança de inteligência normal ou superior deixará de aprender coisas elementares se não possui boa memória". Diante dessa realidade, autores, como Silva, Sousa e Medeiros (2020) ressaltam a importância de ressignificar o ensino. Vejamos os seus argumentos:

> Os resultados deste arcabouço teórico apontam para a necessidade de ressignificação do processo de ensino e aprendizagem, o que requer investimentos, capacitações e formações para que os profissionais, muitos ainda atrelados às técnicas básicas de ensino, possam oxigenar novas possibilidades de ensinar com práticas de qualidade que objetivem o desenvolvimento real e satisfatório dos estudantes para além do contexto escolar. (SILVA; SOUSA; MEDEIROS, 2020, p. 2)

A perspectiva desses autores reforça a importância da nossa proposta, que contém objetivos de ressignificar o ensino para além da memorização, contextualizar o conteúdo e aproximá-lo do mundo concreto do estudante, inclusive fora do ambiente escolar. Cometeríamos uma falha se fizéssemos algo diferente disso. Nessa mesma linha, Albuquerque (1954) explica:

> A criança, que aprende sozinha tantas coisas, é a mesma que vai para a escola; e se esse ensino intencional, sistemático, a que a escola se propõe, lhe oferecer os mesmos elementos que a vida de cada dia lhe proporciona, a aprendizagem não apresentará problemas. (ALBUQUERQUE, 1954, p. 10)

Dessa maneira, faz-se necessário, em relação às práticas cotidianas de nossos alunos, descobrir formas mais simples e dinâmicas para o ensino, independentemente da área de conhecimento. Afinal, "em geral, falhas em leitura e em noções básicas de Matemática originam o insucesso do estudante". (ALBUQUERQUE, 1954, p. 6).

Nesse sentido, alguns autores ressaltam a importância de um trabalho dinâmico que extrapole o tradicional, com o intuito de romper com a mecanização do ensino, em específico o de geometria. Ribeiro e Jahn (2015, p. 40), de acordo com esse ponto de vista, afirmam:

> Ocorre ainda que, de um modo geral, as abordagens para o ensino e a aprendizagem de Geometria na Educação Básica são feitas de maneira estática. As figuras são apresentadas sem que se dê movimento a elas, o que pode dificultar a compreensão de suas características ou propriedades por parte dos alunos.

Propomos, assim, com a modelagem matemática, auxiliada pela álgebra, pela geometria e pela aritmética, contribuir para a superação de dificuldades no processo de ensino das isometrias, que estão presentes no cotidiano. Nesse contexto a modelagem matemática foi uma oportunidade para trabalhar com o movimento de translação, no sentido de extrair o essencial e descrevê-lo com uso da linguagem matemática, obtendo assim o modelo a representar tal situação analisada.

Essas formas podem ser observadas, por exemplo, na construção dos padrões artísticos, como o tratamento dos polígonos regulares, nas figuras geradas por livros de espelhos, ou seja, por reflexões, na classificação dos quadriláteros quanto às suas simetrias, na construção dos polígonos regulares inscritos numa circunferência ou em frisos e padrões por iteração de um conjunto de isometrias geradoras dessas figuras (BASTOS, 2006). Na física, notadamente, observam-se as transformações que mantêm o volume. Na matemática, têm o significado pautado nas transformações que preservam distâncias entre pontos, ângulos, ou seja, são responsáveis por transformar uma figura ou forma em outra geometricamente igual. Além disso, encontramos padrões na natureza, como mostra a figura 2.

Figura 2: exemplo de padrão presente na natureza

Fonte: Banco de dados do Pinterest.

Quando analisamos a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), especificamente a sexta competência, que ressalta as habilidades necessárias para o ensino fundamental relativas à área da matemática, observamos a necessidade do desenvolvimento de atividades referentes a múltiplos contextos reais ou imaginários em relação ao cotidiano do estudante (BRASIL, 2017). Em vista disso, a modelagem matemática pode contribuir para a inserção do contexto em sala de aula, além de ser um meio para dar significado ao ensino e associá-lo ao mundo real. Ademais, durante esse processo, a construção do conhecimento é o fator principal, em que o estudante, com a ajuda do professor, será instruído a descobrir, criticar, questionar as próprias conclusões e, assim, construir o seu conhecimento fundamentado e com significado.

Nesse sentido, com o uso de materiais manipuláveis e utilizáveis em situações reais, podemos desenvolver o senso crítico do estudante e auxiliá-lo na capacidade de constatar o significado da matemática no cotidiano. Na nossa proposta, o resultado final do trabalho com a modelagem matemática é a construção de um modelo que represente o movimento de translação horizontal.

Este trabalho partiu da seguinte questão investigativa: quais são os modelos matemáticos e os processos de modelagem para o movimento de translação apresentados pelos estudantes do 1° ano do ensino médio de uma escola pública de Goiânia-Go, após participarem de uma oficina com material concreto? O objetivo principal desta pesquisa é analisar os processos de construção de modelos matemáticos produzidos pelos estudantes do 1° ano do ensino médio para o movimento de translação, em um contexto de modelagem matemática mediado por material manipulável. O nosso intuito é propor caminhos que levem o estudante a ter o prazer da descoberta das próprias conclusões, a desenvolver sua capacidade de aprendizagem, a elaborar modelos e a obter conhecimento matemático.

Este trabalho está dividido em cinco capítulos. O primeiro é denominado *Um passeio pela literatura*, e seu objetivo é realizar uma discussão acerca das pesquisas na área da modelagem matemática, da linguagem matemática, dos movimentos no plano, do material concreto e do ensino remoto, os quais estão diretamente relacionados ao objeto de pesquisa. Para isso, apresentamos alguns autores estudiosos dos temas mencionados.

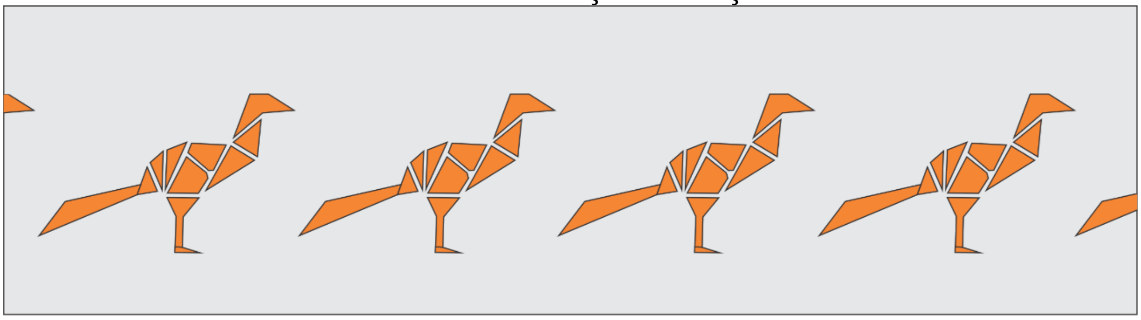
O segundo capítulo é intitulado *Marco teórico* e tem o objetivo de aprofundar as reflexões teóricas que nos auxiliaram na elaboração da nossa proposta. Apresentamos autores com cujas pesquisas sobre os conceitos analisados compactuamos.

Sob o título *Metodologia de pesquisa, coleta e análise de dados*, o capítulo 3 tem o objetivo de apresentar os caminhos metodológicos sob nova perspectiva para a coleta de dados. Para isso, realizamos a pesquisa de campo, no sentido de obter dados referentes aos modelos matemáticos produzidos pelos estudantes.

No quarto capítulo, intitulado *Resultados iniciais: dados do teste piloto*, exibimos os dados referentes ao teste piloto, de acordo com as categorias encontradas no desenvolvimento deste trabalho. No capítulo 5, *Nova coleta de dados*, discutimos os resultados coletados na Oficina 2. Nas *Considerações finais*, o objetivo é apresentar as observações acerca do desenvolvimento do trabalho e as conclusões obtidas.

CAPÍTULO 1: UM PASSEIO PELA LITERATURA

Infinitas simetrias de translação na direção horizontal.



Fonte: Elaboração do autor no *software* CorelDraw.

O intuito deste capítulo é apresentar o que é discutido na literatura sobre modelagem matemática, linguagem matemática, isometrias, material concreto e a nova perspectiva para coleta de dados, temas relacionados diretamente ao nosso objeto de pesquisa. A nossa proposta consiste em analisar os processos de construção de modelos matemáticos desenvolvidos pelos estudantes para o movimento de translação. Assim, discutiremos essas temáticas de acordo com a perspectiva de autores consagrados.

1.1 Modelagem matemática

A modelagem é uma ferramenta de estudo de situações e fenômenos presentes no mundo real, com o propósito de obter resultados e conclusões. Em nossa pesquisa, é utilizada para a análise de um fenômeno que não é considerado propriamente do cotidiano, mas que está presente e passa despercebido aos olhos de muitos. A perspectiva que expõe Machado (2009) sobre a relação entre o abstrato e o concreto justifica a nossa proposta:

> A possibilidade de as abstrações matemáticas serem tratadas como algo em si, desvinculadas do substrato empírico que as engendrou, não pode ser negada. Afinal, assim se processam profícuos trabalhos de numerosos matemáticos que, assumindo uma divisão do trabalho que embasa toda a sociedade de que participam, deixam para outros a tarefa de discutir, *a posteriori*, os possíveis vínculos do que produzem com o mundo que está por aí, de procurar aplicações para o que, ingenuamente, acreditam produzir de forma livre e desinteressada. Trata-se, muitas vezes, de uma opção que deve ser respeitada tal como a avestruz, que esconde a cabeça no solo; é o seu modo de interagir com o mundo real (MACHADO, 2009, p. 53).

Dessa forma, não buscamos a alternativa correta ou a resposta ideal para as questões abordadas, mas, sim, o raciocínio crítico sobre o conjunto da eventual problemática subjacente às questões, com uso de ferramentas matemáticas para a compreensão da realidade e a elaboração de um modelo com resultados aplicáveis à realidade concreta.

A modelagem matemática é uma abordagem recente no nosso país e tomou contorno nos últimos 30 anos. Esse tema é recorrente nos principais eventos da área de Educação Matemática, como no Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – SIPEM, no Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM e na Conferência Nacional de Modelagem na Educação Matemática – CNMEM (TAMBARUSSI; KLUBER, 2014).

Considerando a relevância desse conceito para a pesquisa e o contexto educacional e científico, realizamos um levantamento de trabalhos para subsidiar a nossa discussão e orientar os leitores sobre o que é discutido nessa perspectiva. Destacamos algumas ideias defendidas por Barbosa (2001, 2009), Araújo (2009, 2010), Biembengut e Hein (2004), Villa-Ochoa (2007), Barbosa, Caldeira e Araújo (2007), Bassanezi (2009), Burak (2019) e Rocha e Pinto (2020).

Barbosa (2001) realiza um levantamento das pesquisas nacionais e internacionais acerca do tema, destaca que a compreensão dessa abordagem está relacionada às influências teóricas emprestadas da matemática e apresenta-a em termos de construção do modelo matemático. Entre as suas contribuições, observa que os pesquisadores se apropriam do conceito de modelagem, sem necessariamente ter um modelo e, em outra situação, fazem uso de uma situação problema imaginária, diferentemente do trabalho desenvolvido por modeladores profissionais que investigam situações concretas.

O autor apresenta a modelagem sob a perspectiva de três correntes: pragmática, científica e sociocrítica. Essa última encontra-se próxima ao que propõe Araújo (2009). A corrente denominada sociocrítica é uma oportunidade para explorar as funções da matemática na sociedade contemporânea, uma vez que são meios para investigar a realidade vivenciada. Nesse sentido, a modelagem tem potencial para gerar algum nível de crítica no estudante. Um resultado interessante apresentado pelo autor, a partir da análise de trabalhos nacionais e internacionais, é a classificação da modelagem em três casos conforme o quadro 1.

Quadro 1: classificação da modelagem em três casos

Casos	Desenvolvimento
Caso 1	O professor apresenta uma situação com o problema e destaca as informações necessárias para a resolução, que é responsabilidade dos estudantes.
Caso 2	O professor aborda um problema de outra área do conhecimento; os alunos são responsáveis pela coleta de informações para a resolução.
Caso 3	Com base em temas não matemáticos, os estudantes elaboram o problema, coletam informações, formulam as hipóteses e resolvem-no.

Fonte: Elaboração do autor com base em Barbosa (2001).

O professor possui papel mais presente no caso 1 e é responsável pela formulação do problema, diferentemente do caso 3, em que essa etapa é compartilhada com os alunos. O desenvolvimento de nossa oficina contém similaridades com o caso 1, visto que destacamos informações necessárias à resolução do problema, mas essa tarefa é responsabilidade dos estudantes. Entretanto, o autor defende a perspectiva de que não necessariamente existirá um modelo, o que diverge da nossa proposta.

Diferentemente, em uma produção posterior, Barbosa (2009) reconhece o aumento do uso de modelos matemáticos pelos estudantes na educação científica, pois servem a propósitos, como justificar proposições, estabelecer conceitos e utilizar a matemática para ordenar fenômenos. A depender da abordagem, os alunos podem construir modelos e reconhecer a modelagem como processo para a sua produção. Entretanto, Barbosa (2009) deixa explícita a necessidade da continuidade dos estudos quanto ao papel dos modelos matemáticos na educação científica.

Biembengut e Hein (2004) discutem as possibilidades de um trabalho com a modelagem matemática, cuja finalidade é a construção do modelo matemático. Além disso, apresentam esse conceito vinculado ao processo de resolução do problema com uso de símbolos e relações matemáticas a representar o fenômeno analisado.

Os autores defendem dois tipos de abordagem no ensino possíveis em qualquer escolaridade. No primeiro, o professor pode eleger um tema de alguma área do conhecimento de interesse dos alunos e elaborar um modelo matemático adaptado ao ensino. No segundo, o intuito é orientá-los para um trabalho de maneira a criar condições para que sejam capazes de investigar e elaborar modelos matemáticos aplicados a alguma área (BIEMBENGUT; HEIN, 2004). Ambas as vertentes têm como premissa a promoção de conhecimentos e habilidades matemáticos para aplicá-los também em outros contextos e, assim, fornecer elementos para o aluno desenvolver o seu potencial e promover o seu pensamento crítico e independente. Pelo exposto, identifica-se que a nossa proposta tem similaridade com as duas abordagens, pois definimos o tema e criamos situações investigativas a ser exploradas e representadas por meio de um modelo matemático.

Villa-Ochoa (2007, p. 65) discute o processo de modelagem como estratégia didática em sala de aula para a construção de conceitos matemáticos. Esse pesquisador defende essa abordagem como uma ferramenta de representação das situações do mundo real. As similaridades com o nosso trabalho referem-se à conversão da modelagem como ferramenta didática para a construção de conceitos matemáticos. Porém, no desenvolvimento do trabalho com essa abordagem, não é possível considerar ou identificar todos os fatores envolvidos, pois, ao realizar simplificações e suposições, eliminam-se alguns aspectos relacionados ao fenômeno.

Quando analisamos a perspectiva sociocrítica na Educação Matemática, deparamos com trabalho dos pesquisadores Barbosa, Caldeira e Araújo (2007), Araújo (2009, 2010), Rocha e Pinto (2020), que discutem as possibilidades de um trabalho na perspectiva crítica e consideram as dificuldades no ensino de matemática, com atenção especial aos aspectos políticos da educação. Essa abordagem é estabelecida como um diálogo sobre a democracia na formação política dos estudantes. Além disso, destaca a proximidade com a Etnomatemática, estimula a participação crítica dos estudantes e possibilita a discussão sobre questões políticas, econômicas e ambientais, com suporte da matemática. Quanto aos modelos, são utilizados para descrever uma situação real ou resolver problemas da realidade com o uso da matemática.

O nosso trabalho contém similaridades com a perspectiva da modelagem matemática crítica, no sentido de construir o conhecimento de forma crítica, possibilitar a discussão sobre as questões abordadas no contexto da temática (transformações no plano), associar o cotidiano ao estudo de tal fenômeno e criar um ambiente para investigar tal situação. Apesar disso, nossa proposta afasta-se quando não necessariamente desenvolvemos um trabalho relacionado a questões políticas, econômicas e ambientais.

Em sua publicação, Bassanezi (2009) trata das possibilidades do trabalho com a modelagem. Essa alternativa alia teoria e prática e motiva o usuário para o entendimento da sua realidade, para fins de agir e transformá-la. Logo, pode ser utilizada no sentido de romper com a fronteira entre as áreas de pesquisa. Além disso, salienta que o objetivo fundamental do uso da matemática é extrair o essencial e formalizá-lo em um contexto abstrato. Nesse sentido, há similaridades com a nossa proposta, pois realizamos a formalização do fenômeno observado com uso da matemática. Segundo Bassanezi (2009), o modelo matemático deve ter uma linguagem concisa, para expressar ideias de forma clara, sem ambiguidade, e, assim, proporcionar resultados que possibilitem calcular soluções numéricas.

Outro pesquisador, Burak (2019) descreve alguns elementos dessa abordagem no ensino e na aprendizagem da matemática na educação básica. Destaca que o uso dessa abordagem propicia a interação entre a matemática e os diversos campos, os números e as operações, as grandezas e as medidas, a geometria, a álgebra, a geometria, com outras áreas do conhecimento. Conforme esse pesquisador, a modelagem constitui-se em cinco etapas para explicar, matematicamente, os fenômenos: escolha do tema, pesquisa exploratória, levantamento dos problemas, solução do problema, desenvolvimento de conteúdos e da matemática relacionada ao tema e, por fim, a análise crítica das soluções. Essa abordagem contém similaridades com o nosso trabalho, pela possibilidade de interação entre a álgebra, a aritmética e a geometria, mas ainda difere em alguns pontos, pois não seguimos as etapas citadas quanto ao uso da modelagem.

1.2 Linguagem matemática

No processo de aprendizagem da matemática, entramos em um universo no qual estaremos em contato com um meio de comunicação, com uma linguagem própria para descrever, analisar e avaliar inúmeras situações. Como expõe Menezes (2000):

> Sendo a matemática uma área do saber de enorme riqueza, é natural que seja pródiga em inúmeras facetas; umas delas é, precisamente, ser possuidora de uma linguagem própria, que em alguns casos e em certos momentos históricos se confundiu com a própria matemática. Se atendermos à conceptualização que apresentamos para linguagem, facilmente admitimos esta particularidade na matemática. Na realidade, estamos perante um meio de comunicação, possuidor de um código próprio, com uma gramática e que é utilizado por uma certa comunidade.

Quando falamos em linguagem matemática, pensamos em livros e textos didáticos, tradicionalmente vistos como meios de caráter universal, mais sistemático e formal. A matemática apresenta-se na sociedade mediante outros meios de comunicação, de forma oral ou escrita (NACARATO; LOPES, 2018).

De acordo com a nossa proposta, empregaremos a linguagem matemática escrita para o estudo do fenômeno de translação no plano. Para isso, utilizaremos ferramentas algébricas, aritméticas e geométricas para analisar e descrever a situação. Entretanto, como discutido por autores, como Lins e Gimenez (2000), Sierpinska, (2000), Pontei (2006), Breda *et al*. (2011), Castro (2012), Oliveira e Laudares (2015), existem algumas dificuldades e a necessidade do trabalho conjunto entre as três áreas citadas.

As principais dificuldades apontadas pelos pesquisadores são a relação da álgebra e a aritmética e a forma como se tem desenvolvido o seu ensino. Segundo Lins e Gimenez (2000) e Castro (2012), a álgebra e a aritmética estão tão interligadas que se considera a álgebra como aritmética generalizada, mas a relação entre as duas tem levado a alguns desafios. Além disso, os autores observam que o conhecimento aritmético supõe um obstáculo ao algébrico e os alunos apresentam dificuldades para cumprir determinadas regras algébricas, as mesmas que perpassam a aritmética, dado que é uma tradição a aprendizagem da aritmética antes da álgebra (CASTRO, 2012). Dessa forma, a nossa proposta tem o intuito de suprir essas dificuldades no trabalho disjunto entre essas áreas. Ademais, destacado por Alvarenga, Brasil e Guadagnini (2020) e Alvarenga e Brasil (2020) essas dificuldades são um reflexo das abordagens mecânicas no ensino.

Alguns autores tratam da importância da álgebra, da aritmética e da geometria para a matemática, assim como os elementos que as compõem. Para Lins e Gimenez (2000, p. 12) “a aritmética e a álgebra constituem, junto com a geometria, a base da matemática escolar”. Na mesma perspectiva, para Ponte (2006), no centro da aritmética, estão os números e suas operações; na geometria, estão os objetos geométricos, as abstrações do plano e do espaço e suas transformações; na álgebra, as relações matemáticas abstratas, que podem ser equações, inequações ou funções, ou estruturas demarcadas por operações ou relações em conjuntos.

Quando praticamos o ensino com as três áreas, a álgebra, a aritmética e a geometria concomitantemente, fortalecemos a aprendizagem e facilitamos a compreensão ampla dos significados conceituais. Ademais, “o uso da Geometria, para contextualizar o ensino da Álgebra no ensino fundamental, pode tornar seu ensino mais interessante e motivador” (OLIVEIRA e LAUDARES, 2015, p. 7). Assim, nossa proposta está de acordo com essa perspectiva.

A necessidade dos conhecimentos geométricos é evidenciada também nos estudos de Breda *et al* (2011). Segundo os autores, o trabalho com a geometria, muitas vezes, é deixado para o final do ano letivo. Esse fato já era evidenciado por Pavanello (1989). Na tentativa de mudar esse contexto, algumas alterações foram realizadas, como, por exemplo, a disciplina de geometria encontra-se separada da aritmética e da álgebra. Isso contribui para que os estudantes compreendam as três áreas como universos separados e não como objetos que se complementam.

Essa perspectiva é similar à de Sierpinska (2000), que destaca alguns aspectos acerca do raciocínio dos alunos em álgebra linear a ser responsáveis pelas suas dificuldades em dominar o conteúdo. A autora argumenta que os estudantes tendem a usar formas práticas ao invés de teóricas e demonstram dificuldades no uso da linguagem de geometria visual, da linguagem aritmética e da linguagem estrutural. Além disso, em seu trabalho, tenta resolver o principal problema referente ao obstáculo do formalismo.

Vale destacar o documento de adequação dos currículos regionais com propostas pedagógicas, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2017), que estabelece um conjunto de aprendizagens essenciais aos estudantes brasileiros por meio de competências e habilidades. As habilidades estão organizadas de acordo com as unidades do conhecimento (números, álgebra, geometria, grandezas e medidas, probabilidade e estatística), tanto para o ensino fundamental quanto para o ensino médio. Esse documento é importante para as nossas discussões, pois subsidia elementos acerca das habilidades esperadas dos participantes da oficina, de acordo com a sua série. Por fim, a linguagem matemática auxilia a construção do modelo matemático a representar os movimentos no plano, com suporte do material concreto, a ser classificado de acordo com suas características.

1.3 Movimentos no plano

Apresentamos alguns autores que discutem transformações geométricas, isometria, movimento rígido e simetrias, principalmente em relação ao movimento de translação. Esses conceitos estão relacionados à oficina, contudo são trabalhados de forma totalmente intuitiva, sem uso de sua definição formal.

Grande parte da literatura apresenta o conceito de isometria com muita formalidade (LIMA, 1992; BACALHAU, 2012). Outros autores utilizam uma abordagem mais didática, como Farmer (1996), Veloso (2012), Ribeiro e Jahn (2015), que associam as transformações à estrutura de grupos, além de matrizes e outros conteúdos. Mas, dentre os materiais analisados, somente Veloso (2012) explicita a relação entre os conceitos *transformações geométricas, isometrias, movimento rígido* e *simetria* diferentemente dos outros mencionados, que trabalham com, pelo menos, dois conceitos e não os distinguem entre si.

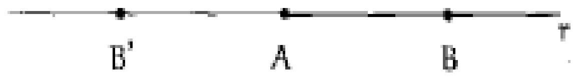
Sobre transformações geométricas e formalização de simetrias, Veloso (2012) apresenta definições e considerações, além de exemplificá-las com imagens. Entretanto, não há o estímulo à utilização desses conceitos na educação básica, mas, sim, no ensino superior. De modo diferente, Ribeiro e Jahn (2015) incentivam o desenvolvimento das transformações geométricas com uso do *software* GeoGebra, em uma abordagem didática no ensino fundamental.

Lima (1992), com uma abordagem extremamente formal, assume que o leitor já tem ciência e campo de visão acerca de alguns termos. Logo, em várias situações, não são utilizados elementos visuais para contribuir com a compreensão. Seu trabalho resume-se a definições, demonstrações e exemplos abstratos, conforme aponta a figura 3.

Figura 3: exemplo de apresentação de um conceito e discussão

5. *Se a isometria* $T: r \to r$ *possui um ponto fixo* A *então ou* T *é a função identidade ou* T *é a reflexão em torno de* A.

Com efeito, se T não é a função identidade então existe algum ponto $B \in r$ (necessariamente diferente de A) tal que $T(B) = B' \neq B$. Temos $d(A, B') = d(T(A), T(B)) = d(A, B)$, logo A é o ponto médio do segmento BB'. Então a isometria T coincide com a reflexão R_A nos pontos distintos A e B. Segue de 4 que $T = R_A$. ∎



Fonte: Livro texto (LIMA, 1992, p. 5).

Também constatamos isso no seguinte trecho, “uma isometria entre os planos π e π' é uma função $T: \pi \to \pi'$ que preserva distância. Isto significa que, para quaisquer pontos $X, Y \in \pi$, pondo $X' = T(X)$ e $Y' = T(Y)$, tem-se $d(X', Y') = d(X, Y)$” (LIMA, 1992, p. 2). Novamente, há extrema formalidade e uso de linguagem abstrata na apresentação de teoremas e definições.

Bacalhau (2012) apresenta definições análogas às de Lima (1992) para o conceito de isometria. Ambos os autores fazem uso acentuado da linguagem matemática simbólica para definição ou conceito. Além disso, suas aplicações referem-se, especificamente, a retas, pontos, segmentos e planos, diferentemente de Vilela (2012), que faz uso de uma abordagem ampla e explícita na relação entre os conceitos.

Em uma pesquisa realizada em nível de mestrado, Bacalhau (2012) diz tratar do tema de modo acessível aos professores, do básico ao secundário. Entretanto, utiliza-se de uma abordagem extremamente formal com vetores e uso excessivo da linguagem matemática simbólica. As aplicações referentes a transformações, isometrias e simetrias são embasadas por meio de vetores, ou seja, o autor utiliza o espaço vetorial para definir esses termos e realiza a associação com grupos. Nesse caso, o recurso visual é pouco explorado.

As transformações geométricas, as isometrias, os movimentos rígidos e as simetrias são abordados ou com extrema formalidade, ou de modo superficial. Esse foi um dos problemas iniciais que nos despertou interesse pela temática. Assim, com o propósito de gerar um trabalho intermediário relativo aos dois extremos apresentados (LIMA, 1992; BACALHAU, 2012; FARMER, 1996; VELOSO, 2012; RIBEIRO e JAHN, 2015), utilizamos como embasamento o autor Veloso (2012), que discute, de maneira aprofundada, o assunto e abrange os conceitos citados.

1.4 Utilização do material concreto

Com a finalidade de facilitar a análise do fenômeno estudado, há o material concreto, que possibilita o contato direto do aluno como sujeito responsável pela própria aprendizagem (TURRORIONI; PEREZ, 2012). Além disso, propicia o desenvolvimento do aluno quanto à autonomia, à capacidade de ação, à criatividade e à crítica (RÊGO M. e RÊGO G., 2006).

Nesse sentido, Rêgo M. e Rêgo G. (2006) afirmam que o material concreto tem importância fundamental a partir da utilização adequada, com possibilidade de ampliar a concepção dos estudantes sobre o que é, como e para que aprender matemática. Porém, apenas a sua utilização não garantirá a aprendizagem, sendo necessária a mediação do professor.

O material concreto contribui para a construção do modelo na modelagem matemática, além de auxiliar o desenvolvimento do raciocínio crítico e científico do estudante, a observação e a experimentação do fenômeno. Entretanto, o mais importante é a discussão e a resolução da situação problema associada ao contexto do aluno (FIORENTINI; MIORIM, 1990), em que, nesse caso, o material concreto atua como estímulo para a educação que construa o conhecimento de maneira significativa, diferentemente da forma pela qual é tradicionalmente conduzida: a educação centrada na avaliação.

Outra perspectiva para o uso de materiais manipuláveis é a aprendizagem significativa crítica baseada em Ausubel (1982). Nessa concepção, o aprendiz é responsável pela própria aprendizagem e faz uso do conteúdo que já internalizou, para poder captar os significados dos materiais e reorganizar o seu conhecimento. Nesse sentido, o aprendiz constrói o conhecimento.

A abordagem que subsidia as nossas discussões é a de Turrorioni e Perez (2012) e Rêgo M. e Rêgo G. (2006). Para esses autores, o uso do material concreto possibilita o desenvolvimento dos alunos, a autonomia, a capacidade de ação, a criatividade e o aspecto crítico. Esses elementos estão presentes na nossa proposta, principalmente, quando levamos em consideração os objetivos da oficina.

A partir dessa perspectiva, é possível superar as dificuldades no processo de ensino e utilizar a simbologia, as relações e as operações matemáticas para descrever o fenômeno estudado. Além disso, complementa-se essa abordagem com a utilização do material concreto, para auxiliar os e colocá-los como sujeitos do processo de aprendizagem. Contudo, em razão da pandemia, com o ensino remoto, elaboramos nova proposta para a coleta de dados.

1.5 Nova perspectiva para a construção do conhecimento

Em decorrência da pandemia do Sars - Cov 2 causada pelo coronavírus, as aulas presenciais foram suspensas por tempo indeterminado. Assim, foi necessário manter o isolamento social e repensar a continuidade do ano letivo, com intuito de manter a educação e a qualidade que atenda essa demanda. Daí, adveio a possibilidade do ensino remoto.

A escola passou por mudanças, e com isso, surgiram dificuldades para manter a educação dos estudantes, direito garantido pela Constituição Federal. Como é evidenciado por Marques (2020, p. 33) “as mudanças emergentes que ocorreram no processo de ensino diante do atual contexto da pandemia causada pelo novo coronavírus levaram à adoção de metodologias, até então, não adotadas por muitos professores em seus ambientes de ensino”.

No estado de Goiás, foram desenvolvidas ações com meios alternativos para o processo de ensino e aprendizagem enquanto perdurar o isolamento social, tais como, Google Classroom, Google Meet, WhatsApp, Youtube e aulas transmitidas pelos canais de televisão, buscando minimizar os impactos decorrentes da pandemia sobre a educação. Assim, fazemos uso do ensino remoto. As aulas e as atividades acontecem pontualmente, com uso de plataformas digitais, diferentemente do ensino a distância, que tem funcionamento próprio, é bem estruturado e ocorre em horários flexíveis.

Com isso, deparamos com uma situação na qual somente o conhecimento tecnológico do professor não é suficiente, como expõe Marques (2020, p. 36): “A mediação pedagógica com essas tecnologias faz toda a diferença, pois, mais do que saber utilizar esses recursos, é saber como usá-los de forma dialética e em prol da educação”.

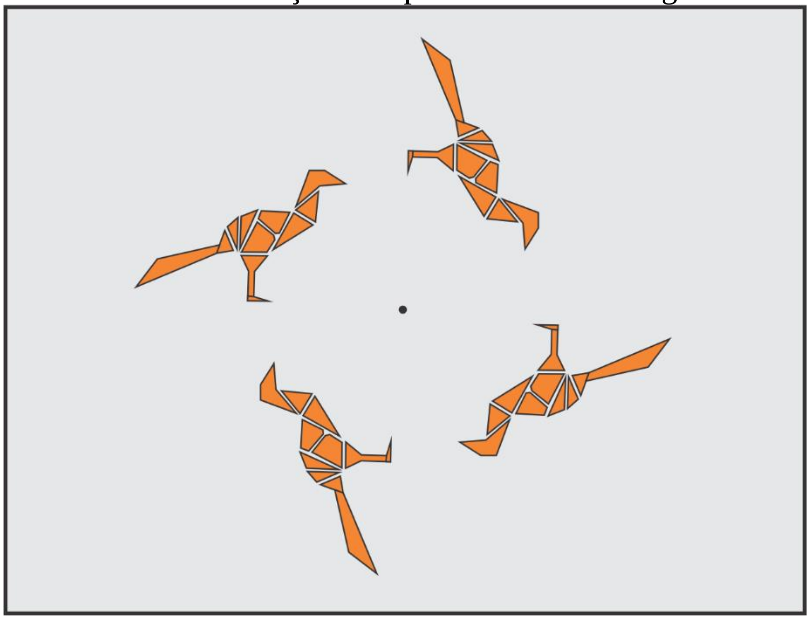
Santos (2020) elenca as dificuldades e os desafios referentes à ressignificação dos métodos de ensino de matemática em tempos de atividade remota. Essa mudança não só gerou alguns obstáculos para o professor pelo uso de tecnologias, mas também proporcionou impasses aos estudantes pela falta de acesso à internet. Além disso, deparamos com a pouca interação entre o professor e os alunos. Encontramos essa situação também no decorrer da oficina.

Reconhecemos a necessidade do uso da tecnologia e seu grande impacto na sociedade. Para Oliveira, Santana e Reali (2012), devemos compreender como utilizá-la a nosso favor. Assim, tivemos a experiência inicial com o auxílio do ensino remoto, no desenvolvimento de uma oficina no VII Encontro Brasiliense de Educação Matemática para profissionais e professores.

No próximo capítulo aprofundamos a discussão dos referenciais acerca da abordagem escolhida e a justificativa para determinada escolha. Apresentamos os teóricos que delimitaram o nosso marco teórico e forneceram-nos subsídios para refletir sobre os conceitos, elaborar as oficinas, coletar os dados e analisá-los.

A nossa proposta condiz em utilizar da modelagem matemática com propósitos de ensino do conteúdo de isometrias, para descrever a situação analisada com uso da álgebra, da aritmética e da geometria através de um modelo. Para isso, empregamos o material concreto para facilitar a observação do fenômeno estudado e, por meio do ensino remoto, estabelecemos o contato entre o pesquisador e os sujeitos participantes. Portanto, com isso analisar os processos de construção de modelos matemáticos produzidos. Em vista disso, o intuito deste capítulo foi apresentar o que é discutido na literatura sobre modelagem matemática, linguagem matemática, isometrias, material concreto e a nova perspectiva para a construção do conhecimento. As discussões apresentadas auxiliaram na compreensão das perspectivas existentes dentro de cada temática e na definição do nosso Marco Teórico, de acordo com as similaridades com a nossa proposta de trabalho e assim ter subsídios para aprofundar as nossas análises.

Simetria de rotação com ponto fixo fora da figura.



Fonte: Elaboração do autor no *software* CorelDraw.

O objetivo deste capítulo é aprofundar os temas *modelagem matemática, linguagem matemática escrita, isometrias, material concreto e ensino remoto*. Além disso, utilizamos a modelagem matemática para contextualizar a oficina com propósitos de ensino, consoante as ideias de Biembengut e Hein (2004), Villa-Ochoa (2007) e Bassanezi (2009), na expectativa de que o estudante utilize a álgebra, a aritmética e a geometria, para retratar a situação analisada por meio do modelo matemático. Ademais, empregamos o material concreto para mediar e facilitar a observação do fenômeno estudado e, por meio do ensino remoto, estabelecemos um ambiente interativo de contato entre o pesquisador e os sujeitos participantes.

2.1 O marco teórico para a modelagem matemática

O contexto da oficina é subsidiado pelas ideias da modelagem matemática com propósitos de ensino, no sentido de situar os estudantes em um contexto de interpretar o fenômeno. Portanto, compactuamos com as posições dos autores Biembengut e Hein (2004), Villa-Ochoa (2007) e Bassanezi (2009) sobre esse conteúdo, pois articulam a adaptação da atividade científica no ensino de matemática, convertendo-a em estratégia didática, para abordar temas durante a aula, por isso foram escolhidos para delimitar as nossas referências teóricas.

Em relação ao processo de ensino, Biembengut e Hein (2004) destacam que não é suficiente ter conhecimento sobre o assunto específico e exercer somente a mera transmissão. Em contrapartida, “a modelagem matemática, em seus vários aspectos, é um processo que alia teoria e prática, motiva seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la” (BASSANEZI, p. 17, 2009). Consequentemente, é importante o uso de estratégias alternativas de ensino e de aprendizagem que facilitem a compreensão e a utilização da matemática nessa concepção:

> A modelagem matemática, originalmente, como metodologia de ensino, parte de um tema e nele desenvolve questões ou perguntas que você deseja compreender, resolver ou inferir. Essas perguntas devem ser respondidas usando o conjunto de ferramentas matemáticas e de investigação sobre o assunto. (BIEMBENGUT; HEIN, 2004, p. 107, tradução nossa).

Para responder a tais perguntas, necessita-se de algumas ferramentas referentes à álgebra, à aritmética e à geometria, para, assim, obter-se o modelo. De acordo com Bassanezi (2009), o objetivo fundamental do uso da matemática está vinculado a uma posição crítica, em que se extrai o essencial e formaliza-se em um contexto abstrato, com a economia de linguagem. Essa perspectiva tem grande proximidade com a nossa proposta de modelo matemático.

Por outro lado, Biembengut e Hein (2004) discutem esse conceito no âmbito da modelagem, assim como o seu significado no processo de resolução de uma situação. Para eles:

> A modelagem matemática é um processo destinado à obtenção de um modelo matemático. Um modelo matemático de um fenômeno ou situação-problema é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representa, de alguma maneira, o fenômeno em questão. O modelo permite não só obter uma solução particular, mas também servir de suporte para outras aplicações ou teorias. (BIEMBENGUT; HEIN, 2004, p. 107, tradução nossa).

No mesmo sentido, Villa-Ochoa (2007) e Bassanezi (2009) defendem a concepção de modelagem matemática como processo de obtenção do modelo matemático. Os autores salientam que, embora seja um trabalho de pesquisa, a modelagem tem várias restrições, e seu uso só será positivo se contribuir para o desenvolvimento e a compreensão do fenômeno.

Para Villa-Ochoa (2007), a modelagem tem por finalidade construir uma reinterpretação mais profunda do objeto estudado, como um ciclo. O processo inicia-se com a determinação do fenômeno ou problema do mundo real, na tentativa de aprofundar sua compreensão pela busca de dados; fazem-se simplificações, e eliminam-se alguns deles; assim, constrói-se um modelo que represente o fenômeno. Contudo, o autor deixa explícito que não é possível identificar todos os fatores envolvidos, pois, com as simplificações, perdem-se alguns dados. Essa mesma perspectiva é abordada por Bassanezi (2009).

Assim, de acordo com Biembengut e Hein (2004), Vila-Ochoa (2007) e Bassanezi (2009), a modelagem matemática é uma abordagem de estudo de situações e fenômenos presentes no mundo real, com propósito de obter resultados e conclusões. Portanto, no contexto da oficina, realizamos uma reinterpretação profunda do problema submetido ao processo de experimentação na tentativa de identificação dos fatores envolvidos, fazendo simplificações e suposições, para obter o modelo matemático. Esse enfoque utiliza a simbologia e as relações com a realidade da matemática que representam o objeto estudado, com uma posição crítica e abrangente.

O conceito de modelo está presente em muitos campos da ciência (VILLA-OCHOA, 2007). Bassanezi (2009) considera-o como “um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam, de alguma forma, o objeto estudado” (p. 20). Além disso, consiste em ter uma linguagem concisa, para expressar ideias de forma clara e sem ambiguidades e proporcionar resultados que possibilitem calcular soluções numéricas (BASSANEZI, 2009). Biembengut e Hein (2004) e Villa-Ochoa (2007) apresentam ideias similares sobre esse tema, com a qual compactuamos.

Villa-Ochoa (2007) considera que a construção do modelo não é algo simples e imediato, sendo necessários alguns conhecimentos específicos, como é destacado a seguir:

> A construção de um modelo matemático não se faz de maneira automática nem imediata, pelo contrário, requer certo período de tempo no qual o modelador põe em jogo seus conhecimentos matemáticos, o conhecimento do contexto e da situação e suas habilidades para descrever, estabelecer e representar as relações existentes entre as quantidades, de tal maneira que se possa construir um novo objeto matemático. (VILLA-OCHOA, 2007, p. 67, tradução nossa).

De acordo com Bassanezi (2009), os modelos podem ser classificados em quatro tipos, dependendo do conteúdo, conforme mostra o quadro 2. Nossa proposta assemelha-se ao modelo educacional apresentado por Bassanezi (2009), que se baseia em um número pequeno ou simples de suposições.

Quadro 2: tipos de modelos apresentados pelo autor

Modelos matemáticos	Características
Linear ou não linear	De acordo com as características das equações básicas.
Estático ou dinâmico	Estático, se retrata único objeto. Dinâmico, se há várias fases do fenômeno.
Educacional	Embasado em número pequeno de suposições, com, na maioria das vezes, soluções analíticas. Envolve o estudo de uma ou duas variáveis e, geralmente, não traduz o fenômeno com o grau de precisão para fazer previsões.
Estocástico ou determinístico	O modelo estocástico em empregado para previsões, pois retrata, em termos probabilísticos, a dinâmica do sistema.

Fonte: Elaboração do autor com base em Bassanezi (2009, p. 20-22).

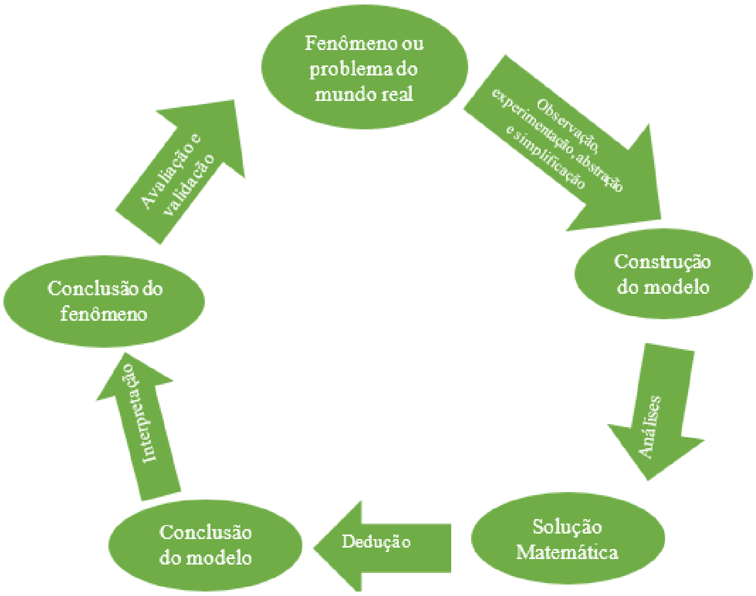
Na construção de um modelo, o uso da simbologia exagerada pode ser mais destrutivo que esclarecedor. Nos termos de linguagem e conteúdo, tal simbologia deve ser equilibrada, objetiva e adequada ao tipo de problema e ao que se deseja alcançar. Bassanezi (2009) destaca alguns pressupostos:

> A obtenção do modelo matemático pressupõe, por assim dizer, a existência de um dicionário que interpreta, sem ambiguidades, os símbolos e as operações de uma teoria matemática em termos da linguagem utilizada na descrição do problema estudado, e vice-versa. Com isto, transpõe-se o problema de alguma realidade para a Matemática, onde será tratado através de teorias e técnicas próprias desta Ciência; pela mesma via de interpretação, no sentido contrário, obtém-se resultado dos estudos na linguagem original do problema (BASSANEZI, p. 25, 2009).

Sobre a construção do modelo matemático, Bassanezi (2009) faz alguns comentários. Em primeiro lugar, a teoria pode não existir. Isso exigirá grande esforço do pesquisador, sendo necessário, às vezes, o desenvolvimento de novo ramo da Matemática. Para evitar isso, ao estudar um problema, o modelo deve ser construído sob uma teoria já desenvolvida e amplamente estudada que facilite a obtenção de resultados, resolvendo-o da maneira mais simples possível. Em segundo lugar, mesmo que o modelo referente à situação analisada esteja sob uma teoria matemática conhecida, pode ocorrer que as técnicas e os métodos sejam insuficientes para a obtenção do resultado, o que exigirá habilidade e criatividade para desenvolver os métodos necessários.

Para Villa-Ochoa (2007), obter o modelo não é o final do processo, sendo necessário validá-lo. Assim, após construído o modelo, têm-se todas as análises possíveis com base no uso de ferramentas matemáticas, para construir uma solução e encontrar conclusões, as quais necessitam ser interpretadas em relação ao fenômeno estudado. Nesse sentido, utilizam-se estratégias de avaliação e validação para verificar a coerência entre as conclusões e o modelo. Posteriormente, se estiver de acordo com o problema, finaliza-se o ciclo. Caso não esteja, "começa-se de novo, partindo da avaliação do fenômeno enriquecido com as análises, fazem-se observações, ajustam-se os dados, as variáveis, continua-se a reforma do modelo e assim sucessivamente" (VILLA-OCHOA, 2007, p. 68, tradução nossa). O autor representa esse processo conforme explicita a figura 4.

Figura 4: ilustração do processo de modelagem



Fonte: Villa-Ochoa (2007, p. 68, tradução nossa).

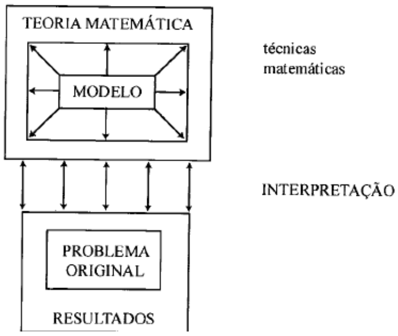
Villa-Ochoa (2007) deixa explícito que todos os elementos do processo de modelagem se referem à atividade científica ou à ferramenta em sala de aula, sendo possível que os estudantes reproduzam o processo para construir os conceitos matemáticos. Nesse sentido:

> A modelagem matemática é a atividade que é realizada na aula de matemática cuja natureza é derivada da atividade científica da modelagem matemática. A modelagem matemática é mais que uma ferramenta para construir conceitos e converte-se em uma estratégia que possibilita o entendimento de um conceito matemático imerso em um micromundo (contexto dotado de relações e significados) que prepara os estudantes para desenvolver uma atitude diferente de perguntar e abordar problemas de um contexto real. (VILLA-OCHOA, 2007, p. 70-71, tradução nossa)

Os elementos comuns a ambas as abordagens são experimentação, abstração, simplificação e uso de representações nas diferentes fases que incluem a jornada, desde a exposição do fenômeno até a sua construção, avaliação, validação e modificação do modelo. Com isso, quando se fala em *modelagem*, refere-se à ressignificação do processo com fins educativos. Todavia, a metodologia não pode ser a única estratégia para abordar os conceitos matemáticos em sala de aula (VILLA-OCHOA, 2007).

Bassanezi (2009) exibe o processo de modelagem e a relação da utilização de teorias matemáticas na obtenção dos modelos, conforme indica a figura 5.

Figura 5: processo de modelagem



Fonte: Bassanezi (2009, p 25).

A teoria matemática e o problema original relacionam-se aos métodos e às técnicas matemáticas que podem ser frequentemente interpretados na linguagem do fenômeno original, visto que a interpretação é determinante no auxílio ao desenvolvimento da questão. Portanto, a interpretação visa confirmar se o argumento matemático é válido ou se deve ser substituído por outros. Dessa forma, tem extrema importância fornecer a validade ou não dos resultados (BASSANEZI, 2009).

Nenhum modelo será considerado definitivo, pois pode sempre ser melhorado. Nesse sentido, "o bom modelo é aquele que propicia a formulação de novos modelos" (BASSANEZI, 2009, p. 31). Para isso, argumenta-se que, para a construção de outros modelos, é necessário o uso de teorias passíveis de modificações e evolução. Logo, sabemos que a nossa proposta não é um objeto final, mas pode possibilitar a criação de novos modelos futuramente.

Bassanezi (2009) classifica como atividade do matemático aplicado a construção e a análise de modelo. Para atividades de outros pesquisadores, é essencial o intercâmbio com um matemático para a produção de um modelo útil e coerente. O autor apresenta a modelagem sob duas perspectivas: o método científico ou o método de ensino.

No primeiro caso, a modelagem é empregada em Física, Química, Biomatemática, entre outras áreas. Além disso, pode propiciar benefícios, como estímulo a novas ideias e técnicas, informações em diferentes aspectos das previsões, método para interpolação, extrapolação e previsões, sugerir prioridades de aplicações, pesquisas e tomadas de decisões, preencher lacunas, servir de recurso para entender a realidade, tornar-se linguagem universal para compreensão e entrosamento entre pesquisadores e áreas do conhecimento (BASSANEZI, 2009).

Na educação básica, o ensino tem-se desvinculado da realidade. De acordo com Bassanezi (2009), o desenvolvimento das aulas tem a seguinte sequência: enunciado, demonstração e aplicação. Entretanto, para o autor, deveria ser uma construção na ordem inversa, ou seja, iniciar-se pela motivação, fazer a formulação de hipóteses e validar novos questionamentos. Nesse sentido, como método de ensino, a modelagem matemática reinventa o resultado juntamente com os alunos. Isso significa que a matéria será ensinada de modo significativo, pois considera as próprias realidades do sistema educacional. Essa perspectiva é similar à nossa proposta, pois propicia significado ao que se ensina, no sentido de reinventar o resultado com os alunos.

Semelhantemente às duas abordagens de Bassanezi (2009), Villa-Ochoa (2007) apresenta algumas diferenças entre os processos de modelagem como atividade científica e como ferramenta para construir conceitos matemáticos em sala de aula, conforme aponta o quadro 3.

Quadro 3: diferenças entre os processos de modelagem

Critério	Como atividade científica	Como ferramenta em sala de aula
Propósito do modelo	O modelo é construído para resolver um problema de outras ciências (naturais, sociais, humanas) ou para avançar em uma teoria ou ciência.	O modelo é elaborado para construir um conceito matemático dotado de significado e com a intenção de despertar motivação e interesse pela matemática pela sua natureza aplicativa.
Os conceitos matemáticos	Emergem da situação pelo processo de abstração e simplificação do fenômeno.	Devem ser considerados *a priori*, com base na preparação e na seleção do contexto pelo professor e de acordo com os propósitos da classe.
Contexto	Obedecem a problemas que, comumente, não são abordados ou o são de maneira diferente na ciência.	Devem obedecer a problemas abordados previamente pelo docente da classe, com o objetivo de avaliar sua pertinência aos propósitos educativos.
Outros fatores	São apresentados, geralmente, em um ambiente próprio da ciência no qual se aplica, externo a fatores educativos.	São apresentados em sala de aula, para motivação e contextualização cotidiana e relação com outras ciências.

Fonte: Elaboração do autor com base em Villa-Ochoa (2007, p. 69, tradução nossa).

Villa-Ochoa (2007) julga necessária essa distinção, em razão de que o processo de modelagem matemática, na maioria das vezes, não pode ser totalmente desenvolvido em sala de aula e pelo fato de que o estudo de algumas situações do mundo real requer ferramentas matemáticas que não têm correspondência com o desenvolvimento do pensamento dos estudantes. Com isso, é papel do docente realizar o trabalho direcionado em dois sentidos: “primeiro, o de descontextualização; segundo, o de recontextualização, de tal maneira que a situação, sem perder sua essência e intencionalidade, transforme e propicie a aprendizagem dos estudantes” (VILLA-OCHOA, 2007, p. 70, tradução nossa).

Complementarmente, Biembengut e Hein (2004) discutem dois tipos de abordagem para o trabalho com a modelagem matemática possíveis em qualquer nível de escolaridade.

> Para implementar a modelagem matemática no ensino, o professor age em dois tipos de abordagens: o primeiro permite desenvolver conteúdo programático a partir de modelos matemáticos aplicados às mais diversas áreas de conhecimento, e o segundo orienta seus alunos a fazer um trabalho de modelagem. A modelagem pode ser implementada em qualquer nível de escolaridade: do ciclo primário à graduação (BIEMBENGUT; HEIN, 2004, p. 108, tradução nossa).

No desenvolvimento do conteúdo programático em sala de aula, o professor escolhe um tema que seja suficiente e que esteja em sintonia com os interesses dos alunos. Por fim, elabora um modelo adaptado ao ensino. Outra possibilidade é eleger um modelo matemático aplicado a outras áreas (BIEMBENGUT; HEIN, 2004). Nesse sentido, referente à primeira abordagem, no ensino, o professor é envolvido em uma série de etapas, de acordo com o quadro 4.

Quadro 4: etapas da primeira abordagem

Etapas	Explicação
Exposição do tema	No início da aula, faz-se breve explicação do assunto aos alunos, instigando-os, para que formulem perguntas sobre o tema abordado.
Delimitação do problema	Selecionam-se perguntas que permitam desenvolver o conteúdo programático. Se for possível e/ou conveniente, propõe-se aos alunos que façam uma investigação sobre o assunto, por meio de bibliografia ou entrevista a algum especialista.
Formulação do problema	Apresenta-se o problema, constroem-se hipóteses, desenvolvem-se equações, e organizam-se os dados de maneira que o conteúdo matemático os requeira para a resolução.
Desenvolvimento do conteúdo programático	Apresenta-se o conteúdo programático, e estabelece-se uma conexão com a pergunta que gerou o processo.
Apresentação de exemplos semelhantes	Apresentam-se exemplos semelhantes, expandindo a gama de aplicações e evitando, assim, que o conteúdo seja restrito ao tópico ou ao problema. Além disso, incentiva-se o uso da tecnologia, que faz parte da prática diária, como calculadoras ou computadores.
Formulação de um modelo matemático e resolução de problemas a partir do modelo	Propõe-se aos alunos que retornem ao problema que gerou o processo e resolvam-no.
Interpretação da solução e validação do modelo	É importante que o aluno avalie o modelo. Isso permite melhor compreensão e discernimento dos resultados obtidos.

Fonte: Elaboração do autor com base em Biembengut e Hein (2004, p. 110, tradução nossa).

Biembengut e Hein (2004) ressaltam nove benefícios propiciados aos alunos quando realizamos um trabalho com modelagem matemática em sala de aula conforme o quadro 5.

Quadro 5: benefícios para os alunos em um trabalho com a modelagem

Benefícios
Integração da matemática com outras áreas do conhecimento
Interesse pela matemática e por sua aplicabilidade
Melhoria na apresentação dos conceitos matemáticos
Capacidade de ler, interpretar, formular e resolver situações problemas
Estimular a criatividade na formulação e na resolução de problemas
Habilidade no uso da tecnologia: calculadora gráfica e computadores
Capacidade de atuar em grupo
Orientação para a realização da investigação
Capacidade para escrever a investigação

Fonte: Elaboração do autor com base em Biembengut e Hein (2004, p. 108, tradução nossa).

Na segunda abordagem (pesquisa), os alunos são orientados para que façam um trabalho de modelação, objetivando criar condições em que aprendam a investigar e a elaborar modelos matemáticos aplicados a alguma área do conhecimento (BIEMBENGUT; HEIN, 2004). Ambas as abordagens (ensino e pesquisa) trabalham paralelamente ao desenvolvimento do conteúdo programático, com sugestão de que os alunos se agrupem conforme seus interesses e afinidades e que o período letivo se divida em, pelo menos, cinco etapas para que se cumpram as propostas, como indica o quadro 6.

Quadro 6: etapas da segunda abordagem

Etapas	Explicação
Escolha do tema	Formam-se grupos de, no máximo, quatro alunos. Cada grupo elege um tema de acordo com seus interesses. Com orientação do professor, cada grupo deve ser responsável pela escolha e pela direção do próprio trabalho. O professor propõe que se obtenham dados mediante bibliografia especializada, de acordo com o tema escolhido.
Familiarização com o assunto a ser modelado	Os alunos, já familiarizados com o tema, devem dispor de muitos dados. Assim, o professor propõe que elaborem uma série de perguntas e uma síntese da investigação que lhe permita inteirar-se sobre o tema e selecionar, como sugestão, cerca de três perguntas para cada grupo.
Delimitação e formulação do problema	Delimitado o problema ou as perguntas selecionadas, passa-se a formulá-lo a partir da pergunta, que requer a matemática mais elementar. Quando o grupo tem boa base sobre o tema com que está trabalhando, uma entrevista com um especialista pode contribuir para o trabalho.
Elaboração de um modelo matemático, resolução e validação	Uma vez formulado o problema, busca-se elaborar um modelo que permita não só solucionar a questão em particular, mas também encontrar outras soluções e efetuar previsões.
Organização do trabalho escrito e exposição oral	É essencial que o trabalho seja divulgado. Assim, nesta etapa, os grupos devem apresentar o trabalho por escrito e oralmente, por meio de um seminário, aos demais alunos e a quem possa interessar-se.

Fonte: Elaboração do autor com base em Biembengut e Hein (2004, p.117-118, tradução nossa).

Dessa maneira, Biembengut e Hein (2004) defendem:

> A modelagem matemática pode ser utilizada como método para desenvolver o conteúdo programático (método de ensino) ou como método para ensinar aos alunos a fazer a modelação (método de investigação). Usando-a como método de ensino, sugerimos que o professor conduza os alunos a fazer investigações (por meio de bibliografia especializada ou mediante uma entrevista com um especialista) sobre o tema do modelo (ou modelos) diretor(es). Apenas como método de investigação, o desenvolvimento do conteúdo programático pode ser tratado de forma tradicional (BIEMBENGUT; HEIN, 2004, p. 118, tradução nossa).

O trabalho com as abordagens, ensino e pesquisa, tem como premissa a promoção de conhecimento e habilidades matemáticas para aplicá-las também em outras áreas do conhecimento e, assim, fornecer elementos para os estudantes desenvolverem o seu potencial e promoverem o seu pensamento crítico e independente (BIEMBENGUT; HEIN, 2004). Nesse sentido, a perspectiva das contribuições dessa abordagem é semelhante à de Bassanezi (2009).

De acordo com o ponto de vista apresentado por Biembengut e Hein (2004), a nossa proposta encontra-se próxima à abordagem de ensino. Nesse sentido, tem-se como objetivo estimular os alunos a fazer a modelação da situação observada. Além disso, utilizamos essa proposta para desenvolver o conteúdo do currículo. Para essa tarefa, existem vantagens e desvantagens que podem ser sanadas à medida que se tem conhecimento sobre elas. Biembengut e Hein (2004) destacam algumas vantagens, indicadas no quadro 7, a alunos e professores.

Quadro 7: vantagens de um trabalho com modelagem matemática

Vantagens	Explicação
Em relação ao modelo guia	Propicia ao aluno melhor compreensão dos conteúdos desenvolvidos e aprimora o grau de interesse do aluno pela matemática, mediante a aproximação com a área relacionada e a aplicação.
	Permite maior segurança do professor na condução da classe, pois pode determinar um tempo para ensinar o conteúdo matemático, apresentar exemplos análogos e retornar ao modelo diretor, resolvendo e avaliando.
Em relação ao trabalho de modelagem	Favorece ao aluno agir, não só receber, sem compreender o significado do que está estudando; investigar o assunto, o que é uma atividade pouco comum, apesar de ser parte do currículo; criar conhecimento e sentido crítico principalmente na formulação e na validação do modelo; descobrir os trabalhos dos demais grupos e com eles interagir.
	Permite ao professor estar mais atento às dificuldades do aluno, tomar conhecimento dos trabalhos de maneira gradual, em especial, no momento em que orienta os alunos, modificar os critérios e os instrumentos de avaliação.

Fonte: Elaboração do autor com base em Biembengut e Hein (2004, p. 119, tradução nossa).

Para os alunos, a resistência à modelagem é significativa, porque esse método requerer mais empenho nos estudos, na pesquisa e na interpretação de contexto (BIEMBEGUT; HEIN, 2004). As principais dificuldades estão relacionadas à formação dos professores e à falta de vivência do estudante com esse tipo de tarefa. Na formação de professores de Matemática, raramente, há orientações específicas sobre a modelagem e sua utilização no ensino formal, conforme explicitado no quadro 8.

Quadro 8: dificuldades do professor no trabalho com a modelagem matemática

Dificuldades	Explicação
Interpretação do contexto	No ensino tradicional, particularmente em Matemática, poucas vezes, são apresentadas aos alunos situações problema que exigem, depois de sua leitura e interpretação, a formulação e a explicação desse contexto. Sem essa experiência, como estudante ou profissional, essa capacidade é perdida. Resgatá-la não é uma tarefa fácil.
Melhoria	A modelagem é defendida como método de ensino desde pouco mais de duas décadas [...], por isso os cursos já são realizados nessa área, todavia isso não é suficiente para alcançar todos os professores. Por outro lado, esses cursos duram entre 20 e 40 horas, o que não é suficiente para o treinamento completo sobre o método. Os cursos apenas esboçam a questão e causam certa motivação aos professores.
Referências bibliográficas	Há poucos trabalhos publicados sobre modelagem no ensino ou trabalhos acadêmicos disponíveis aos quais o professor pode ter acesso. No entanto, em quase todas as áreas (Física, Química, Biologia, Economia, etc.), existem modelos matemáticos aplicados que exigem do professor certa base na área do conhecimento.
Orientação	Um curso de aperfeiçoamento ou um texto sobre o assunto não propiciam a confiança suficiente ao professor, para colocar em prática o método de modelagem em primeiro momento. A confiança e a habilidade adquirem-se com o tempo. A orientação de um especialista no assunto diminui as dificuldades, auxilia o planejamento e a condução das atividades e propicia mais confiança ao professor.
Planejamento	O planejamento é vital. Anteriormente, é preciso estabelecer estratégias que devem ser utilizadas para diminuir os problemas referentes à aprendizagem, à estrutura, à forma a ser adotada, às práticas que serão melhor aplicadas e à avaliação do processo e dos resultados. A falta de planejamento para ensinar um tópico ou outro do programa e apresentar exemplos semelhantes, integrando o trabalho dos alunos, pode levar à desorientação por parte do professor e, por conseguinte, dos alunos.
Disponibilidade para aprender e orientar	Para que possa orientar o aluno na realização de seus trabalhos, é necessário que o professor tome ciência dos temas por eles escolhidos, antes de chegar-se à terceira etapa do processo de modelação como método de investigação e decidir sobre a delimitação do problema e sua abordagem. Quanto maior é o número de grupos de alunos, maior é o número de temas e, por

	consequência, maior é o tempo que o professor terá de dispor para estudar. Este estudo é vital para a orientação e requer disponibilidade de tempo.
Orientação	O processo exige boa orientação por parte do professor. A questão é saber como lidar com o programa e com os trabalhos de modelagem. Neste caso, o planejamento é essencial. Planeja-se, inclusive, o tempo de que pode dispor cada grupo na classe. Por exemplo, para cursos com mais de 30 alunos, que implicam a formação de mais de 5 grupos, o tempo disponível nas aulas é insuficiente para a orientação adequada. Além disso, realizar orientação fora dos limites de aula pode comprometer outra atividade do professor ou do aluno.
Apoio da comunidade	O compromisso com a educação é de todos os que estão diretamente ou indiretamente envolvidos. Assim, comprometer a comunidade escolar e a instituição ou mesmo colocá-los a par do processo pode contribuir para a tarefa. Sem esse apoio, o professor pode desmotivar-se caso exista resistência por parte dos alunos ou dos pais.
Avaliação	O processo de ensino e de aprendizagem para os alunos requer orientação adequada, formalização e organização dos conteúdos, assim como estímulo à criatividade. Neste sentido, os critérios e os instrumentos de avaliação devem ser reformulados. A prova escrita com a verificação de aprendizagem de uma técnica de resolução já não pode ser o único procedimento. A modelagem requer uma avaliação diagnóstica, processual e de resultados. O objetivo da avaliação é saber o que e quanto sabe o aluno e o que ele ainda precisa saber.

Fonte: Elaboração do autor com base em Biembengut e Hein (2004, p. 120-122, tradução nossa).

Os autores também destacam as dificuldades dos alunos apontadas no quadro 9. Ter conhecimento dessas adversidades pode amenizar os obstáculos enfrentados por ambas as partes, professores e alunos.

Quadro 9: algumas dificuldades enfrentadas pelos alunos

Dificuldades	Explicação
Interpretação do contexto	O ensino tradicional não capacita o aluno para fazer uma leitura do contexto no sentindo amplo. Raramente, desenvolvem-se as habilidades para realizar a leitura de uma obra musical, de uma obra de arte, de uma poesia, de um contexto histórico, de uma situação política ou de um resultado estatístico, entre outros. Esta é uma das maiores falhas da educação atual. Neste sentido, quando o aluno é colocado diante de um texto ou contexto, apresenta sérias dificuldades para ler, entender e interpretá-lo, isto é, para fazer uma leitura.
Disponibilidade para investigar	Os temas exigem investigação, para a qual, muitas vezes, a escola não dispõe de recursos. Neste caso, a investigação fora dos limites escolares pode não ser possível, dependendo da idade dos alunos e da disponibilidade fora do horário escolar. Ademais, os alunos que possuem emprego têm dificuldades para realizar uma investigação, assim como obter uma orientação fora do horário de aula. Cabe ressaltar que, quanto maior é o tempo que o aluno dispõe para a orientação adequada, melhor será a qualidade do trabalho e do exercício da criatividade.
Escolha do tema	A escolha do tema não é uma tarefa fácil. A ideia de que cada aluno escolhe um assunto de interesse nem sempre proporciona os resultados esperados. Se os dados sobre o tema escolhido foram tão simples que não incrementam nenhum conhecimento matemático ou, igualmente, se não foram fáceis de obter, isso pode gerar perda de motivação e desinteresse pelo trabalho. Neste caso, a orientação do professor na escolha do tema é essencial para evitar que isso aconteça na metade do processo.
Trabalho em grupo	Um tema escolhido pelo grupo garante que todos, efetivamente, estejam interessados. Ademais, o tema pode exigir um conhecimento matemático que não esteja no currículo, o qual requereria maior empenho de cada um para aprender e realizar a proposta. A ausência de empenho ou de compromisso de alguns alunos enfraquece uma proposta importante, que é a capacidade de realizar um trabalho em grupo, deixando em mão de um ou outro para fazer o trabalho inteiro, desviando, assim, o sentido da cooperação e da socialização a favor da aprendizagem.

Fonte: Elaboração do autor com base em Biembengut e Hein (2004, p.122-123, tradução nossa).

Em síntese, os autores destacam que o objetivo do ensino deve propiciar ao estudante adquirir conhecimento e desenvolver habilidades para favorecer a interação com a sociedade. Defende-se, assim, o uso da modelagem matemática como método de ensino e de investigação, para que esses processos deixem de ser mera transmissão de técnicas de resolução e promovam o avanço em sala de aula:

> Modelar, no entanto, não é uma panaceia para superar todos os problemas da prática escolar relativos ao ensino de matemática. As investigações são a primeira etapa a representar um avanço no ensino de matemática em sala de aula, porque esta deixa de ser mera transmissão de técnicas de resolução (do tipo: siga o modelo) e passa a ser apresentada como ferramenta ou estrutura de outra área do conhecimento. Isso exige maior empenho nos estudos, na investigação e na interpretação do contexto, tanto para o professor como para os alunos. Em outras palavras: muito mais trabalho! (BIEMBENGUT, HEIN, 2004, p. 123, tradução nossa).

Para finalizar, os pesquisadores Biembengut e Hein (2004) discutem a importância de contemplar o conhecimento como seiva vital nos níveis de escolaridade, além de destacar como os professores colocam em prática as propostas educacionais. Tem extrema importância entender quais fatores podem comprometer ou dificultar os movimentos em prol da educação. Apesar das dificuldades, o uso de modelos no ensino é um meio que proporciona melhor desempenho do aluno, tornando-o um dos principais agentes de mudança. Ademais, para a sua construção são necessários alguns conhecimentos, como o uso da linguagem matemática.

2.2 O marco teórico para a linguagem matemática

A prática dos professores tem forte influência no desenvolvimento da linguagem matemática dos estudantes. Além disso, fatores internos influenciam a aprendizagem. Menezes (2000) destaca que "a linguagem da aula de matemática, além das concepções dos professores, é influenciada por outros factores, como sejam as aprendizagens anteriores dos alunos, o nível sociocultural e a formação de professores". Dessa maneira, o professor precisa criar espaço para repensar a sua prática e, assim, proporcionar estímulos para os alunos formularem, raciocinarem, desenvolverem estratégias e argumentarem acerca de problemas trabalhados em sala de aula.

Nesse sentido, com o intuito de considerar as aprendizagens anteriores dos estudantes, com o interesse em integrar a matemática aplicada à realidade por meio da álgebra, da aritmética e da geometria e com a finalidade de desenvolver processos de reflexão e abstração na construção de modelos, recorremos à Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Esse documento define as habilidades a ser praticadas com os estudantes em cada série. Quando analisamos a BNCC, especificamente as unidades temáticas Números (aritmética), Álgebra e Geometria, observamos similaridades com a nossa proposta conforme indica o quadro 10.

Quadro 10: algumas habilidades esperadas no ensino fundamental e médio

Etapa	Habilidades esperadas e similaridades com a nossa proposta

Ensino fundamental	A unidade temática *Números* tem por finalidade a construção da noção de número, proporção, equivalência e outros conceitos fundamentais da matemática. A expectativa é que os alunos resolvam problemas com números, com uso das diferentes operações fundamentais, compreendendo os processos envolvidos. Portanto, há similaridades com o nosso trabalho, pois os participantes da oficina utilizaram esses recursos para representar o fenômeno matematicamente. Nesse caso, um exemplo de seu uso é nas situações em que era necessário adicionar os pares ordenados referentes ao centro da figura e ao deslocamento realizado.
	A unidade temática *Álgebra* tem por finalidade desenvolver o pensamento algébrico, sendo essencial para utilizar modelos matemáticos com letras e outros símbolos. Além disso, pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento computacional, pois esses elementos podem ser capazes de traduzir uma situação dada em outras linguagens. Dessa forma, a nossa proposta é a construção de um modelo para representar o movimento de translação com a utilização de letras e símbolos matemáticos a partir da observação desse fenômeno. Assim, a identificação de padrões para estabelecer generalizações é uma habilidade também esperada dos estudantes do ensino fundamental e explorada durante a oficina.
	A unidade temática *Geometria* envolve o estudo de posição e deslocamentos no espaço entre formas, figuras planas e espaciais. É importante considerar o estudo das transformações geométricas, especialmente a simetria. Dessa forma, propomos o movimento de translação com abordagens de ampliação e redução em figuras e formas no plano cartesiano, identificando seus elementos invariantes e variantes em consonância com a BNCC.
Ensino médio	Nesse sentido, colocam-se em jogo os conhecimentos já explorados anteriormente, com intuito de construir uma visão mais integrada da matemática aplicada à realidade. Portanto, é necessário dar continuidade ao desenvolvimento do pensamento computacional e estimular processos mais elaborados de reflexão e abstração para resolver problemas em diversos contextos. Para atingir tal propósito, os participantes da oficina desenvolveram habilidades relacionadas ao processo de construção de modelos com uso de diferentes registros matemáticos (algébrico, geométrico, aritmético), para representar a situação estudada em concordância com a BNCC.

Fonte: Elaboração do autor com base em Brasil (2017).

Consideramos que álgebra e aritmética estão relacionadas entre si, e seu ensino não deve ocorrer de forma disjunta, o que pode proporcionar dificuldades como foi apontado por Castro (2012) principalmente em relação aos conhecimentos algébricos. Como expõe o pesquisador, essas áreas estão tão relacionadas que, se os estudantes apresentarem dificuldades em aritmética, quanto às convenções que também se aplicam à álgebra, mostrarão deficiência nas convenções algébricas. No caso da geometria, muitas vezes deixada para os finais do ano letivo, resta pouco espaço para a compreensão dos seus conceitos (BREDA *et al*, 2011).

Acreditamos que essas dificuldades são proporcionadas pelo ensino nas séries anteriores que enfatiza a memorização e a mecanização de fórmulas, o que pode gerar dificuldades posteriores na resolução de problemas. Desse modo, os estudantes não conseguem fazer uso das ferramentas que aprenderam, tal como expõem Oliveira e Laudares (2015, p. 2): “Esse tipo de abordagem reflete, diretamente, a compreensão das operações elementares e a aprendizagem significativa da Álgebra, acarretando dificuldades associadas à resolução de problemas em um contexto do cotidiano e em outros níveis de ensino”.

Novamente, pela difusão do ensino mecânico, os estudantes fazem uso de ferramentas, sem ter o mínimo conhecimento sobre elas e sobre qual será a sua utilidade na resolução de problemas. Oliveira e Laudares (2015, p. 2) explicam que:

> O ensino da matemática de forma tradicional, como uma simples transmissão de conhecimentos através de técnicas desprovidas de significados e a repetição do algoritmo sem sentido algum, dá lugar à memorização, repetição sem a garantia do sucesso da aprendizagem.

Nesse sentido, como evidenciado por Breda *et al* (2011) e Castro (2012), os conhecimentos geométricos, aritméticos e algébricos são reduzidos a meras receitas de bolo. A álgebra é caracterizada como equações, inequações, funções etc.; a aritmética é relacionada a números, quatro operações, tabuada etc.; a geometria refere-se ao estudo de área, volume etc. Além disso, esses conhecimentos são trabalhados de forma independente.

Breda *et al* (2011, p. 13) justificam a importância do ensino de geometria: “Para descrever, analisar e compreender o mundo físico, recorremos, muitas vezes, à geometria. Ao confrontar os alunos com fenômenos geométricos como as reflexões, e deixando-os resolver problemas geométricos simples, estes aprendem a compreender melhor o mundo a sua volta”. Assim, a geometria possibilita o desenvolvimento da comunicação matemática e estabelece conexões entre diferentes áreas. Nesse contexto, os alunos utilizam a visualização, o raciocínio espacial e o conhecimento geométrico para a resolução de problemas do mundo real. No sentido espacial, a geometria permite a leitura do mundo, e é reconhecida a sua presença na arte, na natureza e nas coisas que fazemos.

> *Sentido espacial*, um sentir intuitivo para forma e espaço, inclui a capacidade de reconhecer, visualizar, representar e transformar formas geométricas, mas também inclui modos menos formais de olhar para o espaço bi e tri-dimensional como as dobragens, as transformações, as pavimentações etc. (BREDA *et al* 2011, p. 14, grifo do autor)

Ressaltamos a relevância da nossa proposta com as transformações, portanto utilizamos um espaço bidimensional $\mathbb{R}^2$, o plano cartesiano, juntamente com a manipulação de figuras para representar o movimento. Breda *et al* (2011, p. 15) evidenciam os benefícios desse trabalho: “À medida que os alunos classificam, criam, desenham, modelam, traçam, medem ou constroem, a sua capacidade de visualização das relações geométricas desenvolve-se. Em simultâneo, estão a aprender a raciocinar e a formular, testar e justificar conjecturas sobre essas relações”.

Esperávamos que, ao final deste tipo de tarefa, o estudante estivesse capacitado a descrever o movimento correspondente, após participar, de forma ativa, na construção e na modelação do problema. Como é evidenciado por Breda *et al* (2011, p. 20), “as crianças usam transformações informalmente quando fazem *puzzles*: rodam as peças e deslocam-nas para o seu lugar. Deste modo, também aprendem que mudar a posição ou a orientação de um objeto não altera a sua forma ou seu tamanho”.

Castro (2012) concentra-se, especificamente, na álgebra, na aritmética e nas relações que permeiam as duas áreas, e, apesar disso, ainda são trabalhadas de forma disjunta. Segundo Castro

(2012, p. 76, tradução nossa), “a aprendizagem da álgebra faz-se difícil à maioria dos estudantes”. Esse pensamento é comum a professores e pesquisadores em Educação Matemática. Portanto, mais uma vez, explicita-se esse problema quando se observa que muitas investigações pesquisam as dificuldades relacionadas à álgebra escolar (CASTRO, 2012).

Entre os conteúdos de maior dificuldade, estão as expressões, a linguagem que associa valores e números a letras, a generalização de algumas propriedades, a preservação da hierarquia de operações sem justificativa, o uso de parênteses, a percepção da igualdade como equivalência e outros (CASTRO, 2012). A maioria das dificuldades e dos obstáculos estão relacionados à complexidade da abstração e da generalização advindas da álgebra. Contudo, o seu ensino está muito ligado à concepção do currículo e ao professor que o coloca em prática.

Em muitas situações, quando se pensa em álgebra, recorda-se de algo relacionado a equações, polinômios e funções. Esses elementos envolvem letras, como o uso de x e y. Entretanto, segundo Castro (2012, p. 77, tradução nossa), quando se enfatizam somente aspectos relacionados ao cálculo, “a álgebra perde características essenciais, uma das quais é o uso de uma linguagem precisa para descrever a realidade, outra é ser poderoso instrumento de raciocínio e previsão mediante a formulação de hipóteses para construir conhecimento”.

Castro (2012) divide a ciência dos números em dois ramos: “a álgebra, que trata das leis, e a aritmética, que trata dos fatos” (p. 79, tradução nossa). Logo, é tradição nas escolas o ensino da aritmética antes da álgebra, ou seja, a aprendizagem da aritmética na educação primária e a da álgebra na educação secundária. Contudo, como é feita a conexão entre elas, causam-se conflitos no ensino. Isso é explícito neste trecho:

> A relação entre aritmética e álgebra leva a muitas das dificuldades dos estudantes e conduz a erros, ao trabalhar-se com a álgebra escolar. Isso se justifica pela falta de conhecimento dos estudantes sobre o mesmo assunto em aritmética ou porque o conhecimento aritmético supõe um obstáculo para o algébrico. (CASTRO, 2012, p. 80, tradução nossa)

Assim, ao realizar um trabalho de forma conjunta, o estudante pode entender as relações que perpassam tanto a aritmética quanto a álgebra. Caso isso não aconteça, o fracasso será atribuído a ambas. Para Castro (2012, p. 81, tradução nossa) “uma das caracterizações da álgebra é a linguagem para descrever ações e relações entre quantidades”. Porém, isso pode proporcionar dificuldades pelo fato de o uso da linguagem simbólica estar restrito apenas à sala de aula (CASTRO, 2012). A compreensão da simbologia “+”; “-” e “=” tem vários significados, em específico, o referente à igualdade e à equivalência:

> O entendimento da igualdade e da equivalência que significa está no centro da compreensão da álgebra já que as expressões equivalentes têm o mesmo valor numérico para todos os valores das letras e mantêm-se as aplicações de validade das regras de transformação de uma expressão em outra (CASTRO, 2012, p. 84, tradução nossa).

Nesse caso, é preciso seguir normas para que não se modifique a solução e obtenha-se resultado compatível. No entanto, muitos estudantes não possuem ciência dessa relação, sendo necessário contornar esse tipo de situação e construir o significado de equivalência no trabalho com igualdades aritméticas, anterior à introdução à álgebra (CASTRO, 2012).

Outra situação que trabalha com equivalências são as expressões algébricas que contêm sinais e símbolos, como, por exemplo, as equações e as funções. Quanto ao uso das incógnitas, “nas equações (quando não se trata de sistemas de equações), aparece uma só variável, que representa alguns números. Nas funções, há duas ou mais variáveis que podem assumir uma infinidade de valores relacionados entre si” (CASTRO, 2012, p. 85).

Sierpinska (2000) trata de aspectos responsáveis pelas dificuldades no domínio da álgebra linear. Evidenciou-se que os alunos tendem a pensar na prática ao invés de formas imaginárias, e o principal problema que a autora tenta resolver é o obstáculo causado pelo formalismo.

Apesar de todos os esforços e inovações da autora para apresentar a teoria estrutural da álgebra linear aos alunos do seu experimento, eles não conseguiram entendê-la, pois pareciam assimilá-la como uma abordagem prática em vez de teórica. Sierpinska (2000) distingue o pensamento teórico e o prático. O pensamento teórico “é caracterizado por uma reflexão consciente sobre os meios semióticos de representação do conhecimento e por sistemas de conceitos (sistemas conceituais) em vez de agregados de ideias” (p. 212, tradução nossa) e está baseado em conexões e relações gerais. O pensamento prático está associado à manipulação de operações e símbolos com uso de elementos matemáticos.

A autora acrescenta que a linguagem do pensamento prático pode manifestar-se de diversas maneiras. Além disso, o pensamento teórico e o prático estão determinados por três modos de pensamento: o sintético-geométrico (prático), o analítico-aritmético (o teórico) e o analítico-estrutural (cf. quadro 11). São eles igualmente úteis e complementam-se.

Quadro 11: os tipos de pensamento e o seu sistema de representação

Os tipos de pensamento	O sistema específico de representação
geométrico-sintético	Usa a linguagem de figuras geométricas – plano, linhas, intersecções – bem como suas convencionais representações gráficas.
analítico-aritmético	Um objeto é definido por uma fórmula que permite computá-lo. Os objetos são regidos por relações, operações e procedimentos com números e variáveis. As figuras geométricas são entendidas como conjuntos de “n-tuplas” de números que satisfazem certas condições que são escritas, por exemplo, na forma de sistemas de equações ou desigualdades.
analítico-estrutural	Sintetiza os elementos algébricos das representações analíticas em totalidades estruturais.

Fonte: Elaboração do autor com base em Sierpinska (2000, p. 234-235, tradução nossa).

Além desses tipos de pensamento, os alunos usam outros modos de raciocínio intermediários entre o geométrico-sintético, o analítico-aritmético e o analítico-estrutural. Nesse sentido, como expõe Sierpinska (2000),

> Mesmo que tenham acesso, até certo ponto, a cada um desses modelos de pensar, eles não veem por que teriam que usar um ou outro em uma forma pura e consistente, e eles preferem fazer algumas formas intermediárias que lhes parecem mais convenientes e fazem mais sentido. Eles também têm problemas para mudar e traduzir de um modelo para outro (p. 236, tradução nossa).

Por fim, destaca a autora que é natural o pensamento estrutural representar maior desafio aos alunos, que, no impulso para a simplicidade, aderem ao analítico-aritmético (SIERPINSKA, 2000). Uma diferença é que, no modo geométrico, os objetos são descritivos e dados diretamente, diferentemente do analítico (aritmético e estrutural), em que os objetos são indiretos, ou seja, são construídos por definições e propriedades (SIERPINSKA, 2000). Assim, a partir das orientações indicadas por Oliveira e Laudares (2015), Breda *et al* (2011), Castro (2012) e Sierpinska (2000), elaboramos o quadro 12 com a descrição de cada enfoque correspondente à nossa proposta de atividade.

Quadro 12: descrição de cada enfoque e sua relação com o modelo matemático

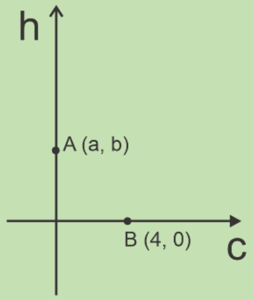
Componentes possíveis de um modelo matemático	Descrição	Relação com o modelo matemático
Enfoque geométrico	O plano cartesiano e suas transformações. A reta indica o movimento na horizontal realizado.	O uso do plano cartesiano na demonstração do movimento. Identificar a reta que indica a direção do movimento realizado.
Enfoque aritmético	Operações numéricas e relações quantitativas para descrever o movimento na horizontal.	O uso de operações numéricas ou abstratas na representação do movimento, ou seja, a adição ou a subtração das coordenadas em relação à unidade de deslocamento, além do uso das retas numéricas constituintes do plano cartesiano, assim como a ordenação e a localização.
Enfoque algébrico	Relações matemáticas abstratas ou estruturas demarcadas por operações entre essas relações para descrever o movimento generalizado.	O uso de generalizações na representação do movimento, com a finalidade de representar e formalizar, com a adição ou a subtração das coordenadas em relação à unidade de deslocamento.

Fonte: Elaboração do autor.

Cada enfoque da nossa atividade foi discutido de acordo com as propostas de Breda *et al* (2011), Castro (2012) e Sierpinska (2000), apresentadas neste tópico, para o trabalho de forma conjunta entre a geometria, a álgebra e a aritmética, no sentido de suprir as dificuldades na aprendizagem desses conceitos (cf. quadro 13).

Quadro 13: possível modelo a ser desenvolvido pelos estudantes

Componentes possíveis de um	Uso da linguagem matemática para o movimento horizontal	Necessidade

modelo matemático		
Enfoque geométrico	Uso do $\mathbb{R}^2$ ou plano cartesiano, como é conhecido, para representar pontos relativos ao movimento. Ex: $A\ (a,b)$, $B\ (4{,}0)$, entre outros. No movimento horizontal, a reta direção está relacionada ao valor de h. Por exemplo, se estamos olhando para um movimento sob o eixo c, essa reta é $h\ = 0$.  Sistema de referências ch utilizado no movimento	O uso do plano cartesiano é necessário para exibir os pontos escolhidos para o movimento com fins de representar, registrar a posição e facilitar a identificação da reta direção.
Enfoque aritmético	No sistema de referências utilizado, temos o ponto $(4, 0)$. Ao analisarmos esse ponto em relação à unidade de deslocamento $(4, 0)$, obtemos o seguinte: $M(4{,}0) = (4, 0) + (4{,}0)$ $= (4 + 4, 0 + 0)$ $M(4, 0) = (4 + 4, 0)$ Portanto, o resultado indica a posição do ponto, ao sofrer o movimento em relação à unidade de deslocamento, com sentido para a direita, logo, para o movimento com sentido contrário, é suficiente utilizar o oposto simétrico da unidade de deslocamento.	O uso de operações numéricas ou abstratas na representação do movimento com a finalidade de sistematizar os fatores envolvidos, abstratos ou não, e realizar operações entre eles. Na atividade, há condições de uso do enfoque aritmético não somente abstrato, mas também com valores numéricos, de acordo com a situação escolhida pelo estudante, além da ordenação dos números nos eixos perpendiculares (∟).
Enfoque algébrico	No sistema de referências, temos um ponto qualquer (a, b) pertencente à figura. Ao analisarmos esse ponto em relação à unidade de deslocamento $(k, 0)$, obtemos o seguinte: $M(a, b) = (a, b) + (k, 0)$ $= (a + k, b + 0)$ $M(a, b) = (a + k, b)$ Portanto, o resultado indica a posição do ponto em função da unidade de deslocamento.	O uso de generalizações na representação do movimento, com a finalidade de representar e formalizar. Na atividade, houve condições para o uso da álgebra, para generalizar, representar e formalizar o fenômeno analisado.

Fonte: Elaboração do autor.

Nesse segmento, os estudantes utilizaram uma linguagem clara com emprego de simbologia matemática, operações e relações que representem o movimento de translação no plano, mediante um modelo. Assim, transpõe-se o problema à realidade da Matemática com uso da geometria, da aritmética e da álgebra, tendo como mediador o material concreto para que os alunos sejam sujeitos ativos no processo de ensino e de aprendizagem. Pensamos em maneiras de tratar do tema, de modo a favorecer o modo intermediário dos dois extremos considerados – a abordagem formal e a simplória – referentes aos movimentos no plano. Em seguida, apresentamos algumas relações intrínsecas a esse tema.

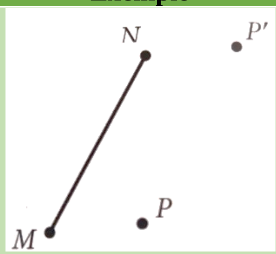
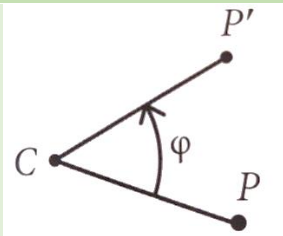
2.3 O marco teórico para os movimentos no plano

Neste tópico abordamos as ideias acerca das transformações no plano, na perspectiva de Veloso (2012), pois, entre os artigos, as dissertações e os livros analisados, esse autor parece analisar as relações entre as transformações geométricas, as isometrias, os movimentos rígidos e as simetrias. Além disso, defende o uso do termo *movimento* para as transformações, o que coincide com o nosso trabalho. Portanto, aprofundamos as ideias referentes às isometrias (conteúdo abordado na oficina) e apresentamos algumas sugestões elucidativas, sem eximir as ideias matemáticas formais com auxílio do material concreto.

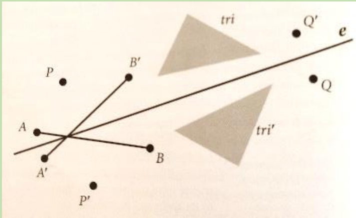
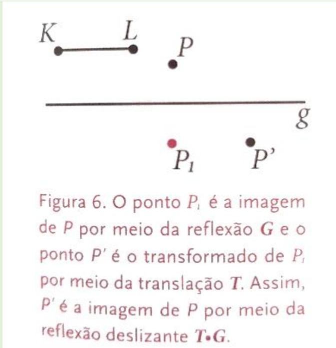
Veloso (2012) trata, inicialmente, do conceito de transformações geométricas[1] referentes ao plano euclidiano, denotado por $\mathbb{R}^2$, com uso de uma linguagem formal e abstrata, o que difere da nossa proposta. É possível observar isso na seguinte definição: "uma transformação geométrica T é uma correspondência que associa, a cada ponto P de $\mathbb{R}^2$, um e um só ponto P' de $\mathbb{R}^2$" (VELOSO, 2012, p. 5). No mesmo sentido, o autor apresenta outros conceitos com apenas pontos e retas, para demonstrar os resultados.

As transformações geométricas apresentam oito tipos: translação, rotação, reflexão, reflexão deslizante, dilatação ou homotetia, semelhança em espiral ou dilatação rotativa, alongamento e inversão. Apenas quatro delas são consideradas isometrias: translação, rotação, reflexão e reflexão deslizante, que preservam a forma, ou seja, a distância entre os pontos. O quadro 14 explicita como Veloso (2012) faz a apresentação das isometrias com os conceitos, as definições e os exemplos da abordagem do autor.

Quadro 14: conceitos, definições e exemplos

Conceito	Definição	Exemplo
Translação	Dado um segmento orientado MN, diz-se translação definida por MN a transformação geométrica T que faz corresponder, a cada ponto P do plano, o ponto P' que é a extremidade do segmento orientado PP', equipolente a MN, tendo P como origem. [...] Se M coincide com N, ou seja, se o seu módulo é zero, a translação reduz-se à identidade (todos os pontos do plano são invariantes ou fixos para a identidade. A translação inversa de T é a translação T^{-1}, definida pelo segmento orientado NM.	 Exemplificação da translação.
Rotação	Sejam dados um ponto C e um ângulo orientado φ. Diz-se rotação R de centro C e ângulo φ a transformação geométrica que faz corresponder, a cada ponto P do plano, o ponto $P' = R(P)$, diante das seguintes condições: *i)* $R(C) = C$, isto é, o ponto fixo para a rotação **R.** *ii)* Se $P \neq C$, ● o ângulo PCP' igual a φ; ● os segmentos CP e CP' são iguais.	 Exemplificação da rotação.

[1]Para mais detalhes, o leitor pode consultar Veloso (2012). O objetivo neste tópico é aprofundar a temática sobre isometrias.

	A rotação inversa de R é a rotação R^{-1} de centro C e ângulo $-\varphi$. Uma rotação em que φ seja um múltiplo inteiro de 360° é a transformação **Identidade, I** (grifo original).	
Reflexão	Dada uma reta e, diz-se reflexão E de eixo e a transformação geométrica que faz corresponder a cada ponto P do plano $P' = E(P)$ que verifica as seguintes condições: *i)* SeP pertence a e, $P = P'$; *ii)* Se P não pertence a **e,** a mediatriz do segmento PP' é a reta e. Se E é uma reflexão, E^{-1} é a mesma reflexão (veja porque razão assim é). Constate também que a composta de uma reflexão E com ela própria é a identidade ($E^2 = E * E^{-1} = I$).	 Exemplo da reflexão.
Reflexão deslizante	Dados um segmento orientado KL e uma reta g paralela ao segmento KL, sejam T a translação definida pelo segmento KL e G a reflexão definida pelo eixo g. Diz-se reflexão deslizante definida pela reta g e pelo segmento orientado KL a transformação geométrica ToG.	 Exemplo da reflexão deslizante.

Fonte: Elaboração do autor com base em Veloso (2012, p. 7-9).

De acordo com Veloso (2012), ao realizar a transformação geométrica de uma reta, por exemplo, a translação, ocorre a transformação de todos os seus pontos, e a figura permanece uma reta. Em outras palavras, a translação, mas não somente ela, preserva a forma, ou seja, conserva a distância entre os pontos, por isso é uma isometria.

O autor relaciona ambos os termos, *transformações geométricas* e *isometrias*, mais uma vez, de forma abstrata, como se evidencia na seguinte definição: “Diz-se que a transformação geométrica T é uma isometria se, para quaisquer dois pontos P e Q, tem-se $dist\ (P', Q') = dist\ (P, Q)$, em que $P' = T(P)$ e $Q' = T(Q)$” (VELOSO, 2012, p. 21). Logo em sequência, o pesquisador apresenta outro resultado, também de modo abstrato: “as isometrias preservam as noções de ponto médio, segmento, semirreta, reta, triângulo, ângulo, amplitude, paralelismo e perpendicularidade” (VELOSO, 2012, p. 21).

Uma situação muito comum, mostrada por Veloso (2012), é a associação das palavras *translação* e *rotação* a movimentos. Embora não exista movimento nas transformações geométricas, essa percepção não deve ser combatida, mas, sim, aproveitada. Isto é indicado no seguinte trecho:

> A ideia de movimento da vida corrente ajuda a imaginar a posição do ponto P' correspondente a P em dada translação ou rotação. Em inglês, a qualquer destes dois tipos de transformação geométrica é habitual chamar *motions*, e, em português, são designados por *deslocamentos.* Na realidade, o ponto P não se desloca para a posição P', mas aquela

> visualização é um auxiliar precioso para relacionar duas posições. Ao longo dos anos, a ideia de correspondência deve ir crescendo e substituindo a ideia de movimento (VELOSO, 2012, p. 8).

A nossa proposta de atividade trata, de forma intuitiva, do movimento de translação somente. Além disso, como é evidenciado pelo autor, esse tipo de visualização (movimento) é um auxiliar para correlacionar duas posições. Outro fato destacado por Veloso (2012, p. 9) é que "a reflexão é uma transformação fundamental, no sentido em que qualquer isometria é um produto de reflexões". Além disso, a isometria é referente a todos os pontos do plano diferentemente da associação natural que fazemos para a obtenção de imagens no espelho.

Uma observação evidenciada por Veloso (2012) é que o conceito de simetria é vago. Na corrente não escolarizada, significa harmonia de proporções, que torna os objetos e as figuras visualmente agradáveis.

> Naturalmente, não se trata do estudo no ensino básico dos diferentes aspectos do conceito de simetria em matemática, mas, sim, da abordagem geométrica da noção de simetria de uma figura plana, tal como surgiu quando a matemática tentou interpretar, no mundo visual que nos rodeia, a realidade milenária da arte decorativa (VELOSO, 2012, p. 41).

Do ponto de vista matemático, diversas abordagens matemáticas da arte decorativa têm sido desenvolvidas. Com isso, Veloso (2012) apresenta um panorama bibliográfico sobre o conceito de simetria e destaca que a matemática procura encontrar regularidades no processo de interpretação, organização e classificação das figuras da arte decorativa. Assim, utiliza objetos matemáticos existentes ou cria novos conceitos. Por fim, denota que esse processo começou a ser realizado no fim do século XIX e na primeira metade do século XX.

Quando analisamos as obras de Escher[2], encontramos padrões referentes às simetrias (cf. figuras 6 e 7).

[2] Maurits Cornelis Escher (1898-1972), artista gráfico holandês, é conhecido por suas xilogravuras, litografias e meios-tons que representam construções imagéticas em padrões geométricos entrecruzados e isometrias.

Figura 6: exemplo do movimento de translação

Fonte: https://mcescher.com/gallery/symmetry/

Na figura 6, observamos a translação, pois identificamos que a imagem do objeto pode ser obtida repetidas vezes, pelo movimento horizontal ou diagonal. Ademais, podemos observar, em outras obras de arte, a rotação, como ocorre na figura 7.

Figura 7: exemplo do movimento de rotação

Fonte: https://mcescher.com/gallery/symmetry/

No exemplo da figura 7, uma imagem pode ser obtida através da outra de mesma cor, pelo movimento de rotação em torno de um ponto central. Além disso, verificamos a reflexão se considerarmos o eixo de simetria entre algumas imagens de mesma cor. Em relação ao processo de estudar, comparar e classificar as figuras da arte decorativa do ponto de vista da simetria, observam-se alguns aspectos abordados por Veloso (2012), demonstrados no quadro 15.

Quadro 15: aspectos do processo de estudar, comparar e classificar as figuras

Aspectos	Descrição
I	O primeiro aspecto observado são as repetições de elementos da figura, chamados *motivos*. O próximo interesse é referente ao modo como se processa essa repetição, ou seja, a estrutura ou a organização. Podem os artistas ter milhares de figuras com motivos diferentes, mas se a organização é a mesma, logo é do mesmo tipo.
Ii	Após a abstração, necessita-se criar o processo para comparar figuras, estudar a sua organização, classificar as figuras em diversos tipos e para cada um, avaliar o nível de complexidade dessa organização. Para isso, o *movimento rígido de um plano* e a *simetria* vão fundamentar esse processo.

Fonte: Elaboração dos autores com base em Veloso (2012).

Quanto ao Movimento Rígido, Veloso (2012) indica a seguinte ideia:

> Começamos por ter um plano $\mathbb{R}^2$ e uma figura nele desenhado e *fazemos uma cópia* $(\mathbb{R}^2)'$*do plano incluindo a cópia* F'*da figura*. Em seguida, deslocamos a cópia no espaço, podendo até voltá-la sobre si própria (de pernas para o ar), e tornamos a assentá-la sobre o plano original. A *única restrição* é que não podemos deformar (encolher, rasgar, ampliar) a cópia, pois, então, o movimento deixaria de ser rígido (VELOSO, 2012, p. 51, grifo do autor).

Além disso, o autor estabelece a associação com outros conceitos, como a seguir:

> Em suma, cada *movimento rígido* de $\mathbb{R}^2$ define uma *transformação geométrica em* $\mathbb{R}^2$. Mas, há ainda outra constatação decisiva a fazer! Como, claramente, *as distâncias são preservadas nos movimentos rígidos*, as transformações geométricas que correspondem aos movimentos rígidos preservam as distâncias... ou seja: um movimento rígido de $\mathbb{R}^2$ é representado por isometrias de $\mathbb{R}^2$ (VELOSO, 2012, p. 52, grifos do autor).

Com isso, Veloso (2012) deixa explícito que cada movimento rígido é resultado de uma isometria no plano e pode ser interpretado sob essa mesma perspectiva. Logo, o movimento rígido é utilizado para comparar diferentes figuras e definir os seus diversos tipos de acordo com o seu conjunto.

As simetrias também partem do conceito de movimento rígido, pois são decorrência de uma isometria, como fica claro na seguinte definição: “Dada uma figura plana F, chama-se *simetria* de F toda a *isometria* S *do plano* que *deixe* F *(globalmente) invariante,* isto é, $S(F) = F$” (VELOSO, 2012, p. 56, grifo do autor). Além disso, o autor salienta uma questão importante acerca da definição anterior, “esta definição não implica que todos os pontos de F fiquem invariantes para a isometria S, mas, sim, que a imagem de F por meio de S coincide com F (daí a palavra *globalmente*)” (VELOSO, 2012, p. 56).

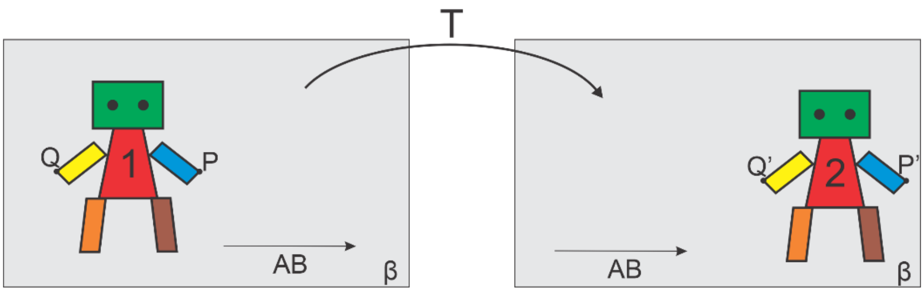
Veloso (2012) conclui que as isometrias são de grande importância para a análise de figuras e que as simetrias serão sempre uma parte do conjunto de todas as isometrias. Nesse contexto, é considerada a estrutura de grupos em relação às transformações geométricas, sendo válida a identidade que fixa todos os pontos, a existência da inversa e o produto entre simetrias. Portanto, o autor ressalta os seguintes aspectos para uma pesquisa sobre simetrias de uma figura:

- Procurar as translações que deixam F invariante; se T for tal translação, então T é uma *simetria* (*de translação*) de F (p. 57, grifos do autor);
- Procurar as rotações que deixam F invariante; se R for tal rotação, então R é uma *simetria* (*de rotação*) de F (p. 57, grifos do autor);
- Procurar as reflexões que deixam F invariante; se E for tal reflexão, então E é uma *simetria* (*de reflexão*) de F (p. 57, grifos do autor);
- Procurar as reflexões deslizantes que deixam F invariante; se Rd for tal reflexão deslizante, então Rd é uma *simetria* (*de reflexão deslizante*) de F (p. 57, grifos do autor).

Com abordagem específica para a educação básica, evitando o uso de linguagem extremamente formal e tornando a linguagem acessível e de fácil compreensão, elaboramos a apresentação a seguir, para o conteúdo de isometrias, de acordo com Veloso (2012).

Translação é o deslocamento horizontal ou vertical dos pontos do plano em direção à reta AB, conforme a figura 8. Quando aplicamos várias translações no objeto, no mesmo sentido, o resultado final continua sendo a translação do objeto, que pode ser obtida de único movimento. A isometria mantém a orientação do plano, porém não tem nenhum ponto fixo. Logo, ao realizarmos esse deslocamento, nenhum ponto é mantido no mesmo lugar.

Figura 8: movimento de translação

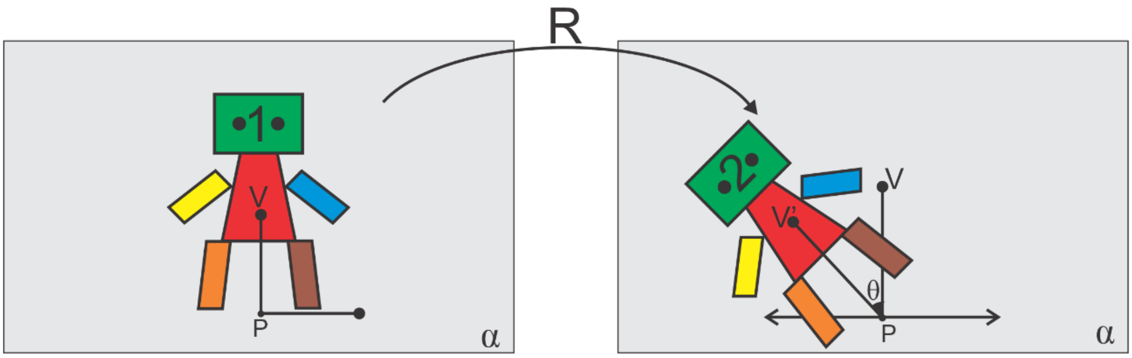


Fonte: Elaboração do autor com uso do *software* CorelDraw.

Com o uso da linguagem matemática algébrica, temos as seguintes considerações: a transformação geométrica T faz corresponder, a cada ponto P do plano, o ponto P' e a cada ponto Q do plano, um ponto Q'. Logo, existe uma isometria T, tal que $P' = T(P)$ e $Q' = T(Q)$. Além disso, a distância $d(Q,P) = d(Q',P')$, ou podemos afirmar $\overline{PQ} \equiv \overline{P'Q'}$. Consequentemente, a transformação que associa o boneco 1 ao boneco 2 é uma **translação**.

Rotação é um movimento realizado no sentido horário ou anti-horário, com um ângulo α maior que zero em torno de um ponto fixo, que não muda seja qual for a rotação, e é denominado *centro*. Essa é a única isometria, que, ao sofrer uma transformação, permanece com único ponto fixo pertencente ou não à figura, denominado *centro da rotação*. Com ponto fixo P e ângulo θ, considerando o uso da linguagem matemática algébrica, construímos a seguinte afirmação: dado um ponto P e um ângulo orientado θ, a transformação geométrica R faz corresponder, a cada ponto V do plano, o ponto V'. Portanto, existe uma isometria R, tal que $V' = R(V)$. Desde que, $R(P) = P$, este é ponto fixo da transformação (cf. figura 9).

Figura 9: movimento de rotação com ângulo θ

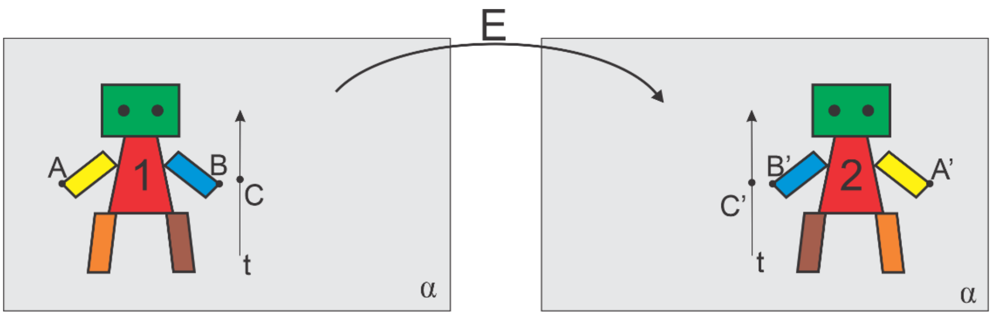


Fonte: Elaboração do autor com uso do *software* CorelDraw.

Logo, se $V \neq P$, o ângulo $V\hat{P}V'$ é igual a θ, e os segmentos $\overline{VP}$ e $\overline{PV'}$ são iguais. Consequentemente, a transformação que associa o boneco 1 ao boneco 2 é uma **rotação**.

Reflexão é o conjunto de pontos em torno de uma reta t, denominada eixo de simetria, que o divide em dois conjuntos simétricos; além disso, é a única que inverte a orientação no plano. A reta t contém infinitos pontos fixos. Ao realizarmos o movimento de reflexão, nenhum dos pontos pertencentes à reta t sofre alteração, conforme indica a figura 10. Afirmar que a transformação contém infinitos pontos fixos significa que eles não sofrem alteração ou não fazem o movimento, ou seja, permanecem no mesmo lugar.

Figura 10: reflexão do boneco em relação à reta t

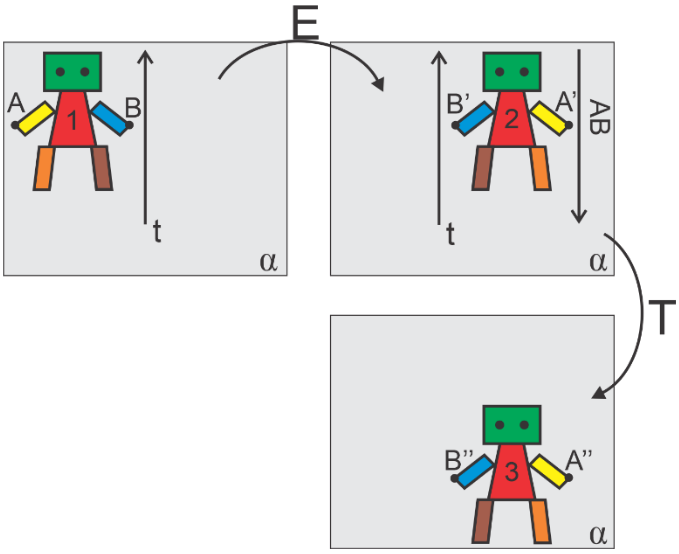


Fonte: Elaboração do autor com uso do *software* CorelDraw.

Fazendo uso da linguagem matemática algébrica, a transformação geométrica E faz corresponder, a cada ponto A do plano, o ponto A' e a cada ponto B do plano, um ponto B'. Logo, existe uma isometria E, tal que $A' = E(A)$ e $B' = E(B)$. Além disso, se $C \in t$, então $C = C'$, e, caso não pertença à reta t, esta será mediatriz do segmento $\overline{CC'}$. Consequentemente, a transformação que associa o boneco 1 ao boneco 2 é uma **reflexão**.

Reflexão deslizante é uma transformação que sofreu movimentos de reflexão com sequência de um movimento de translação. A ordem das transformações não faz diferença no resultado final, conforme aponta a figura 11. A reflexão com deslizamento, ao contrário da rotação, não contém nenhum ponto fixo e não preserva a orientação do plano em decorrência do movimento de reflexão.

Figura 11: exemplo da reflexão deslizante



Fonte: Elaboração do autor com uso do *software* CorelDraw.

A transformação geométrica $(T \circ E)$ faz corresponder, a cada ponto do plano, a sua imagem. Por exemplo, o ponto A tem imagem A'', e, a cada ponto B do plano, há um ponto B''. Logo, existe uma isometria $T\left(E(A)\right) = A''$, e $T\left(E(B)\right) = B''$, tal que $A' = E(A)$ e $B' = E(B)$. Consequentemente, a transformação que associa o boneco 1 ao boneco 2 é uma reflexão seguida de uma translação em relação ao segmento $\overline{AB}$, com imagem no boneco 3, portanto a transformação que associa o boneco 1 ao boneco 3 é a **reflexão deslizante**.

Assim, qualquer que seja a transformação que mantenha o tamanho, a forma e os ângulos é denominada *isometria*. Também podemos afirmar que figuras transformadas são ditas congruentes, por manterem a mesma forma, tamanho e ângulos. Para observar o movimento de translação, utilizamos um material concreto, a impressão de figuras em papel, na oficina.

2.4 O marco teórico para o material concreto

Segundo Rêgo M. e Rêgo G. (2006), existe a necessidade de metodologias diversificadas que coloquem o estudante no centro do processo de ensino e aprendizagem e que estimulem o seu desenvolvimento quanto à autonomia, à criatividade e à crítica. Em suas palavras, "as novas demandas sociais educativas apontam para a necessidade de um ensino voltado para a promoção do desenvolvimento da autonomia intelectual, da criatividade e da capacidade de ação, reflexão e crítica pelo aluno" (RÊGO M. e RÊGO G., 2006, p. 40). Esses elementos são destacados como necessários ao sujeito e associados aos objetivos da nossa proposta.

Os autores afirmam que o material concreto tem importância fundamental pela utilização adequada no ensino de matemática, com possibilidade de ampliar a concepção dos estudantes sobre o que é, como e para que aprender Matemática. Assim, "por meio de experiências pessoais bem-sucedidas, o aluno desenvolve o gosto pela descoberta, a coragem para enfrentar desafios e para vencê-los, desenvolvendo conhecimentos na direção de uma ação autônoma" (RÊGO M. e RÊGO G., 2006, p. 43).

Nesse contexto, é imprescindível considerar o sujeito integrante do processo, assim como os seus conhecimentos anteriores, ao integrar nova abordagem para o ensino. Portanto:

> Faz-se necessária a introdução da aprendizagem de novos conteúdos de conhecimento e de metodologias que, baseada na concepção de que o aluno deve ser o centro do processo de ensino-aprendizagem, reconheça, identifique e considere seus conhecimentos prévios como ponto de partida e prepare-o para realizar-se como cidadão em uma sociedade submetida a constantes mudanças (RÊGO M. e RÊGO G., 2006, p. 40-41).

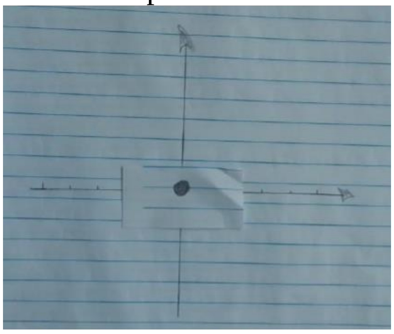
Com a finalidade de facilitar a análise do fenômeno estudado, usamos figuras impressas que possibilitaram o contato direto do aluno como sujeito responsável pela própria aprendizagem, além de contribuir para vencer mitos e preconceitos e favorecer a aprendizagem na formação de ideias e modelos (RÊGO M. e RÊGO G., 2006). Podemos observar sua importância no seguinte trecho: "O material concreto exerce um papel importante na aprendizagem. Facilita a observação e a análise, desenvolve o raciocínio lógico, crítico e científico, é fundamental para o ensino experimental e é excelente para auxiliar o aluno na construção de seus conhecimentos" (TURRORIONI; PEREZ, 2012, p. 61).

A figura impressa serviu de suporte para a construção do modelo em atribuição à modelagem matemática e auxiliou o desenvolvimento do raciocínio crítico e científico, a observação e a experimentação do fenômeno por meio da sua manipulação. Portanto, com base em um processo reflexivo:

> Uma vez trabalhado e avaliado em sala de aula, um recurso didático pode ser, caso indicado, reestruturado, compreendendo-se que a aprendizagem não reside em sua estrutura física ou na simples ação sobre ele, mas resulta do aprofundamento de reflexões sobre essa ação (RÊGO M.; RÊGO G., 2006, p. 42).

A partir disso, é possível superar as dificuldades no processo de aprendizagem e, assim, com o auxílio da linguagem, da simbologia, das relações e das operações matemáticas, descrever o fenômeno estudado. O material concreto utilizado constituiu de figuras impressas para o teste piloto, e, em algumas situações, os alunos utilizaram um pedaço de papel. Especificamente na oficina 2, por não ser no formato presencial, os participantes tiveram de criar o próprio material, para observar o movimento (cf. figura 12).

Figura 12: exemplo utilizado na oficina 2



Fonte: Dados da pesquisa.

Nesse caso, o participante utilizou uma figura no formato de um retângulo, para visualizar o fenômeno de translação durante o movimento. Apesar de a nossa proposta ter sido desenvolvida inicialmente para um trabalho presencial em sala de aula, deparamos com nova variável em razão da pandemia provocada pela Sars-Cov 2: o ensino remoto.

2.5 O marco teórico para o ensino remoto

Como evidenciado por Santos (2020), a pandemia proporcionou um contexto desafiador tanto para os professores quanto para os alunos. Na tentativa de suprir essas dificuldades, a autora salienta a importância de ressignificar os conteúdos aplicados, até chegar-se ao nível de compreensão daqueles estudantes, como exposto neste trecho:

> Nesse sentido, pensar, refletir tanto no aluno quanto no professor, leva a compreender, significativamente, o conhecimento apresentado, pois aprender e ensinar matemática faz parte do processo e deve ser constituído dos saberes associados, apresentando um ensino de qualidade pelo qual o aluno compreenda o significado dos conteúdos aplicados. Ou seja, é necessário ressaltar o significado apreendido na medida em que o conhecimento chega ao nível de compreensão. (SANTOS, 2020, p. 45)

Diante dessa nova realidade, a ressignificação da escola está centrada no uso do computador, do celular ou do *tablet*, considerando esses recursos tecnológicos como elemento transdisciplinar que favorece o ensino remoto. Além disso, o professor, antes, era o responsável por organizar o tempo e o espaço para assimilação do conteúdo, entretanto, atualmente, essa função ficou sob a responsabilidade do aluno, pois é ele quem decide quando e onde vai realizar o aprendizado (SANTOS, 2020).

A autora também destaca alguns desafios enfrentados pelos professores, que tiveram de reinventar-se, como a falta de interação com os alunos durante as aulas. Além disso, foi necessário realizar parcerias governamentais com as empresas de telefonia, para possibilitar o acesso à internet sem redução dos dados móveis.

Os autores Oliveira, Santana e Reali (2012) salientam que, com os avanços tecnológicos e a popularização dos dispositivos móveis, surge novo conceito, o *Mobile Learning* (aprendizado móvel), que pode proporcionar a extensão dos conteúdos ensinados em sala de aula. Para isso, é dever do professor usar a tecnologia como recurso pedagógico.

Há a presença intensificada das tecnologias na sociedade, impondo, assim, a sua inclusão no processo educativo (OLIVEIRA; SANTANA; REALI, 2012). Com isso, devemos utilizá-las a nosso favor, inclusive, pelo seu grande potencial. Se forem bem utilizadas, podem garantir bons frutos que serão refletidos na educação escolar. Os autores destacam que esses dispositivos tecnológicos podem auxiliar a extensão dos conteúdos ensinados. Além disso, proporcionam a troca de informações de maneira imediata e possibilitam um ambiente interativo em tempo real, ou seja, um ambiente dinâmico que pode enriquecer o processo de aprendizagem.

A inclusão dessas ferramentas no ensino é inevitável. Algumas escolas particulares já as utilizam, e, de mesmo modo, as escolas públicas começam a ter um incentivo do governo para sua compra e utilização. Porquanto a tecnologia faz parte da sociedade, é responsabilidade da educação proporcionar uma consciência crítica ao indivíduo (OLIVEIRA; SANTANA; REALI, 2012).

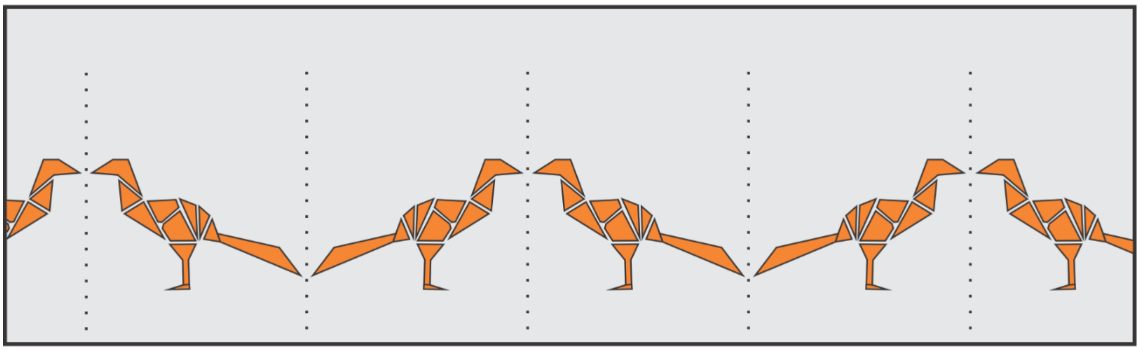
É evidenciado pelos autores que a tecnologia pode ser considerada como facilitadora do processo, enquanto outros ainda possuem, ou alegam possuir, alguma dificuldade quanto ao seu manuseio. A tecnologia, por si só, não garante o aprendizado. É necessário o trabalho em conjunto entre professor e estudantes, para proporcionar a construção significativa do conhecimento, produzindo cidadãos críticos, autônomos e reflexivos. O educador deve estar em constante processo de aprimoramento da sua prática em sala de aula, assumindo a posição de coordenador do processo de aprendizagem.

Com base nisso, realizamos a nossa atividade por meio do ensino remoto, com uso de plataformas (Google Meet e WhatsApp) que possibilitem o contato entre os sujeitos e a escola. Assim, conseguimos coletar os dados para a nossa pesquisa. Como exposto por Oliveira, Santana e Reali (2012), existem várias formas de integração dos recursos tecnológicos. A depender do seu uso, o processo educacional poderá obter melhor resultado com novas formas de desenvolvimento e construção do conhecimento com autonomia.

No próximo capítulo, discorremos sobre a metodologia, a coleta e a análise de dados que permearam os procedimentos das atividades. Os resultados obtidos foram recolhidos em dois momentos: o teste piloto e a oficina 2.

CAPÍTULO 3: METODOLOGIA DE PESQUISA

Simetria de reflexão de eixos verticais.



Fonte: Elaboração do autor com uso do *software* CorelDraw.

A pesquisa tem traços na etnografia, referente à coleta de dados em campo, na concepção de André (2013). Os dados coletados são relativos aos modelos matemáticos produzidos pelos estudantes para o movimento de translação horizontal. O contexto de duas oficinas possibilitou a coleta de dados: o teste piloto, desenvolvido no sentido de obter resultados iniciais e verificar as potencialidades dos instrumentos de coleta; a segunda oficina, realizada posteriormente à reformulação dos instrumentos e da atividade.

3.1 Metodologia de pesquisa

A proposta desenvolvida tem traços da pesquisa etnográfica discutida por André (2013), na qual são aliados elementos inerentes às abordagens qualitativas com respaldo numérico. Assim, realizamos um trabalho de campo diretamente em contato com a situação e o ambiente da pesquisa. Segundo a autora, o tipo etnográfico exige um contato direto do pesquisador com a situação analisada, afetando-a e sendo afetado por ela, pois esse procedimento permite reconstruir os processos e as relações que configuram a experiência escolar.

No nosso caso, a pesquisa foi desenvolvida no ambiente escolar, durante as aulas, e o professor da turma foi o próprio pesquisador. Nesse sentido, respaldamo-nos em André (2001), que discute alguns elementos inerentes a esse tipo de prática.

> São tantas as perguntas relevantes que ainda não foram formuladas, tantas as problemáticas que ainda precisamos conhecer que sobram espaços para todo tipo de investigação, desde que se cuide da sistematização e do controle dos dados. Que o trabalho de pesquisa seja devidamente planejado, que os dados sejam coletados mediante procedimentos rigorosos, que a análise seja densa e fundamentada e que o relatório descreva, claramente, o processo seguido e os resultados alcançados. (ANDRÉ, 2001, p. 57)

Dessa forma, tomamos os devidos cuidados durante a investigação, principalmente com os procedimentos de coleta e a análise de dados, para manter o rigor e a clareza dos resultados alcançados. O trabalho de campo é caracterizado por Ghedin e Franco (2011, p. 193) como "um conjunto de ações orientadoras dos procedimentos de pesquisa a ser realizada em determinado contexto, com o objetivo de compreender um objeto de investigação". No nosso caso, o objeto de investigação é o modelo matemático, a ser construído pelos estudantes ao longo do desenvolvimento da oficina.

André (2013) caracteriza a etnografia com base na utilização de técnicas, a saber: observação participante, entrevista intensiva e análise de documentos. Além disso, apresenta outras características: o principal agente na coleta e na análise de dados é o pesquisador; o maior interesse é no processo e não no resultado final; o trabalho de campo, o pesquisador tem contato direto com os indivíduos por longo tempo.

Acerca da abordagem etnográfica, outro pesquisador, Vilelas (2017), afirma que:

> A abordagem etnográfica combina vários métodos de colheita de dados, sendo os principais: observação participante e entrevista. Entretanto, além destes, outros métodos podem ser usados, como histórias pessoais, análise de documentos, testes psicológicos, vídeos, fotografias e outros (p. 207).

Dessa forma, acreditamos que essa abordagem é a mais próxima da nossa proposta investigativa, pois o principal mediador é o pesquisador, o qual, diante das circunstâncias, pode modificar as técnicas de coleta de dados, revisar as questões orientadoras da pesquisa, localizar novos sujeitos e rever a metodologia durante o desenvolvimento do trabalho (ANDRÉ, 2013). Esse tipo de pesquisa "visa à descoberta de novos conceitos, novas relações, novas formas de entendimento da realidade" (ANDRÉ, 2013, s/p).

Com isso, é possível observar relações com a nossa abordagem, pelo interesse em descrever e entender a realidade com uso da linguagem matemática. Além disso, um trabalho orientado pela etnografia "busca descrever, compreender e interpretar os fenômenos educativos presentes no contexto escolar" (GHEDIN; FRANCO, 2011, p. 203).

Realizamos duas oficinas sobre o movimento de translação no plano, com foco em atividades pré-elaboradas, com base nos autores apresentados no Capítulo 2, cujo objetivo foi a construção de um modelo matemático pelos participantes. As duas oficinas foram desenvolvidas em um contexto metodológico sobre as ideias da modelagem matemática, com o auxílio dos materiais concretos.

Para tanto, utilizamos os seguintes instrumentos: a gravação da oficina em áudio, uma ficha de atividade e um questionário. A gravação em áudio[3] registrou as ocorrências durante a implementação das oficinas. A ficha de atividade foi destinada aos participantes como forma de coleta de dados acerca da escrita, para descrever o fenômeno, o relato sobre o processo, a simbologia, as operações envolvidas e as exemplificações utilizadas pelos sujeitos. Por fim, o questionário foi aplicado após a atividade como forma de avaliar a participação e o desenvolvimento do processo, além de compor o perfil dos participantes da oficina.

3.2 Questionário

O questionário foi aplicado após a atividade, como meio de avaliar a participação e o desenvolvimento do processo, coletar dados, compor o perfil de cada um dos participantes e entender o contexto onde foi realizada a pesquisa. Como explicita Vilelas (2017, p. 315), "os

[3] Em substituição ao diário de campo, o pesquisador e também professor da turma utilizou desse recurso para facilitar o registro das ocorrências observadas. Dado que, como afirma André (2013), o pesquisador pode modificar os seus instrumentos de coleta de dados, caso seja necessário.

questionários são instrumentos de registro escrito e planejados para pesquisar dados de sujeitos, através de questões, a respeito de conhecimentos, atitudes, crenças e sentimentos".

O questionário[4] para coleta de dados é do tipo misto. Como destaca Vilelas (2017, p. 316), "no questionário misto, há uma combinação de questões fechadas e abertas, com vista à redução dos seus inconvenientes", pois, com as perguntas abertas, tem-se a possibilidade de obter mais informações. Todavia, o autor aponta que, ao elaborar muitas perguntas abertas em um questionário, sujeitos com baixo nível de formação ou que não tenham o hábito de colocar as suas vivências por escrito podem deixar as respostas em branco.

O instrumento foi composto por quatro questões fechadas com registro de uma ou mais alternativas. As perguntas foram: *Você gosta de matemática? Quais são as dificuldades enfrentadas nos estudos e quais são os seus interesses pessoais quanto à escola?* Além disso, havia duas questões abertas referentes ao uso da Matemática que, juntamente com a pergunta fechada *O que é linguagem matemática para você?*, são importantes para entender a concepção do sujeito acerca da linguagem e do uso da matemática.

Essas perguntas foram importantes para entender o contexto em que foi realizado a pesquisa. Especificamente, para conhecer quem foram os sujeitos participantes da oficina e assim, de certa forma, compreender aquela realidade.

No teste piloto, aplicamos o questionário ao final, com o objetivo de avaliar o potencial do instrumento. Em seguida, realizamos algumas modificações necessárias para melhorá-lo, de forma a atingir nossos objetivos investigativos, ao aplicá-lo na oficina 2. Por fim, os dados foram analisados, categorizados e são apresentados nos capítulos 4 e 5. Na oficina 2, o questionário que, antes, seria preenchido de modo presencial, tornou-se um formulário *online*.

3.3 Metodologia de organização dos dados

O objetivo principal da nossa pesquisa é analisar os modelos matemáticos construídos pelos participantes e categorizá-los. Com isso, temos o intuito de construir categorias que agrupem elementos com características semelhantes relativas aos modelos produzidos pelos estudantes. Portanto, empregamo-lo, a fim de representar as informações obtidas do modelo matemático para o movimento horizontal, construído pelos participantes.

De acordo com os dados coletados na atividade e no questionário, realizamos a categorização. Por fim, organizamos os dados do teste piloto e da oficina 2 em quadros e esquemas.

[4] Cf. Apêndice B.

3.4 Metodologia de ensino no teste piloto

A metodologia escolhida para a realização das atividades foi uma abordagem de ensino por meio da modelagem matemática, conforme os posicionamentos de Biembengut e Hein (2004), Villa-Ochoa (2007) e Bassanezi (2009), explicitados no capítulo 2. Além disso, empregamos o material concreto, uma figura impressa em papel, como apoio aos alunos na visualização do fenômeno estudado e no desenvolvimento do pensamento matemático, mediante a manipulação da figura, com base em Rêgo M. e Rêgo G. (2006) e Turrorioni e Perez (2012).

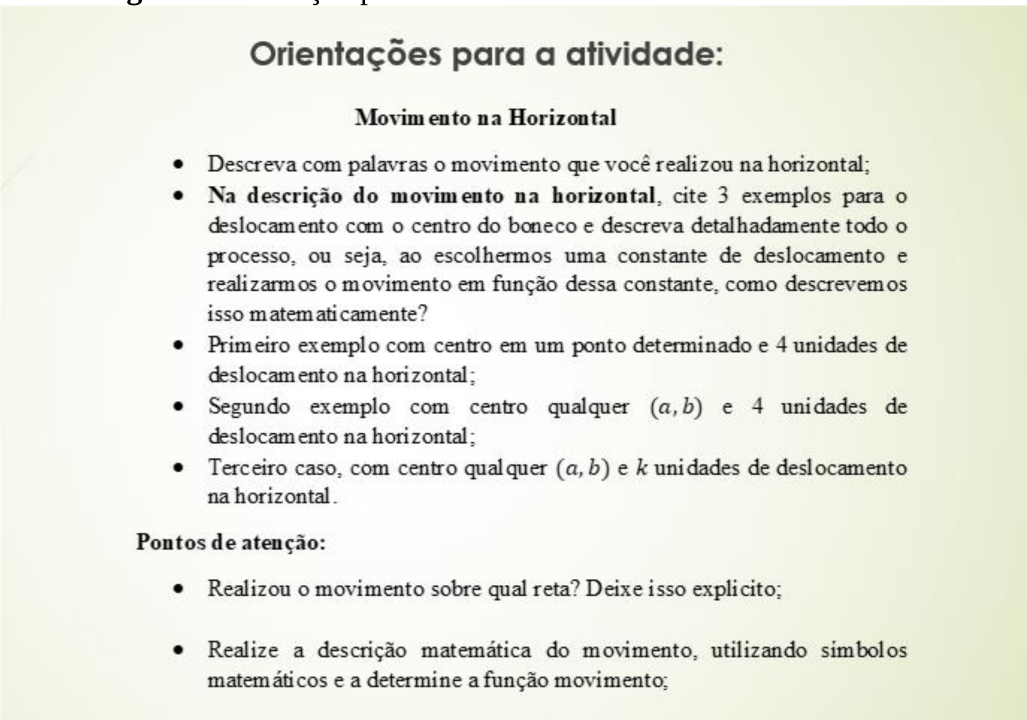
Nesse contexto, o objetivo principal das atividades foi estimular os estudantes a observar o fenômeno de translação vertical, diagonal e horizontal e a empregar a linguagem matemática que o represente. Nessa etapa, as atividades consistiram em realizar alguns deslocamentos no $\mathbb{R}^2$ de forma livre, com apoio de uma figura sobre uma folha A-4, fixada à mesa, para construir o modelo que representasse aquele movimento.

As atividades continham quatro etapas ocorridas em quatro dias. A primeira foi a discussão acerca dos movimentos das figuras e a verificação de algumas propriedades relativas às isometrias. Na segunda etapa, o professor pesquisador apresentou uma situação problema do movimento vertical com informações necessárias para descrevê-lo matematicamente; essa fase foi desenvolvida em conjunto com os alunos. No Apêndice C, apresentamos pontos relevantes referentes às orientações para o trabalho com o movimento de translação vertical.

O professor pesquisador também mostrou o movimento diagonal com informações necessárias para descrevê-lo matematicamente, na terceira etapa. No Apêndice C, há pontos importantes abordados na atividade desenvolvida em sala de aula, relativos às orientações e às finalidades deste trabalho com o movimento de translação diagonal.

Conforme apresentado na situação 1 (movimento vertical) e na situação 2 (movimento horizontal), ambas as atividades foram realizadas pelo professor pesquisador em conjunto com os participantes. Por fim, apresentamos a situação problema relativa ao movimento horizontal. A terceira etapa envolveu uma atividade para casa (cf. figura 13) realizada em dupla. A entrega do material ocorreu em aula posterior, assim como o preenchimento do questionário da pesquisa.

Figura 13: situação problema referente ao movimento horizontal



Fonte: Elaboração do autor para a coleta de dados.

No desenvolvimento dessa atividade, o professor pesquisador usou o Datashow e a cartolina afixada ao quadro, para exemplificar os movimentos vertical e diagonal[5]. Além disso, durante o processo, o professor pesquisador realizou alguns questionamentos na forma de estímulos para que os estudantes entendessem o processo de construção dos modelos matemáticos das situações 1 e 2.

3.5 Caracterização dos indivíduos do teste piloto

Nossa temática pode ser desenvolvida desde a educação básica até o ensino superior, dependendo do recorte realizado na atividade, pois, como foi exposto no Capítulo 2, no Tópico 2.3, existe a possibilidade de conexão do conteúdo de isometrias com a teoria de grupos, os sistemas e as matrizes etc. Contudo, a nossa proposta trabalha apenas com ideias intuitivas sobre o conceito de isometrias, em específico, a translação.

Com o intuito de coletar os dados iniciais e analisar o potencial da atividade, foi realizada uma oficina em forma de teste piloto, em outubro de 2019, com 14 alunos do 1° ano do ensino médio, em uma escola pública de Goiânia, GO. Considerou-se a presença do conteúdo sobre as isometrias no currículo e as dificuldades de aprendizagem em matemática como critérios de seleção da turma. O teste ocorreu em três dias consecutivos, sendo três aulas no primeiro, três no segundo e duas no terceiro.

---
[5] Cf. Apêndice A.

3.6 Metodologia de ensino remoto

Inicialmente, as oficinas foram pensadas para o modo presencial. Em razão da pandemia, a segunda oficina foi desenvolvida remotamente[6]. Em vista disso, os materiais e a abordagem precisaram ser reelaborados. Consequentemente, a oficina passou a focalizar um desenho de animação, para representar os movimentos no plano a ser realizados pelos estudantes. No entanto, isso já havia sido explorado na oficina do teste piloto, pois os materiais foram elaborados com recurso de animação do Datashow.

Após a organização de todo o material, feita a readaptação, tivemos a oportunidade de desenvolver um minicurso para professores da educação básica durante o VIII Encontro Brasiliense de Educação Matemática. Com isso, foi possível obter novos dados, para aprimorar nossa experiência. A participação no evento possibilitou a vivência da oficina, pela primeira vez, por meio remoto, obtendo *feedbacks* e sugestões dos participantes, além de proporcionar mais segurança ao pesquisador, pois, em outro momento, aconteceria a Oficina 2, em que refinamos as ideias acerca da atividade, com outras possibilidades de respostas para as questões propostas.

Dessa maneira, a Oficina 2 foi desenvolvida remotamente, durante as aulas de Matemática da turma. Construímos o modelo para o movimento vertical e coletamos os dados referentes ao modelo de translação horizontal, situação investigada pelos estudantes. Além disso, o professor pesquisador incentivou que os participantes refletissem sobre o processo de construção do modelo matemático.

Com a mudança do campo presencial para o virtual, alguns materiais foram substituídos. O Datashow, a cartolina, os materiais impressos tornaram-se uma apresentação animada no PowerPoint, com reprodução pelo Google Meet, durante as aulas de matemática da turma. O desenvolvimento da oficina constitui-se em 3 etapas descritas no quadro 16.

Quadro 16: desenvolvimento da oficina

Etapa 1	Etapa 2	Etapa 3
Contextualização da oficina com a realidade.	Ideias iniciais da oficina.	Movimento vertical.
Introdução do conteúdo de movimentos no plano por meio de um vídeo.	Verificação das condições do movimento para ser uma isometria.	Explicação da atividade para o movimento horizontal.

Fonte: Elaboração do autor.

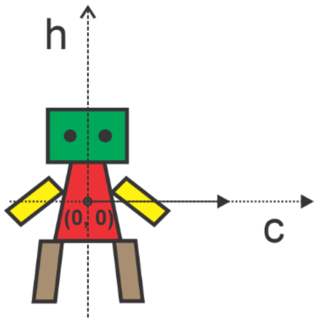
[6] Apesar de existirem alguns embates, indicados em Polivanov (2013), acerca do desenvolvimento da etnografia no ambiente virtual, algumas vezes chamada de etnografia virtual (HINE, 2000), netnografia (KOZINETS, 2010) ou etnografia (BRAGA, 2006), continuamos com a adaptação da etnografia para o ambiente virtual. Portanto, como destaca André (2013), diante das circunstâncias, o pesquisador pode modificar as suas técnicas de coleta, revisar as questões da pesquisa, localizar novos participantes e rever a metodologia durante o desenvolvimento do trabalho com viés etnográfico.

A primeira etapa refere-se à contextualização do tema abordado na atividade[7], em que foram apresentadas algumas ideias sobre os padrões encontrados na natureza, nas artes, na arquitetura. Por fim, utilizamos um vídeo[8] para apresentar algumas ideias matemáticas, relacionadas aos padrões geométricos. Esse material é uma produção audiovisual, disponível no *Youtube*, e exibe a construção de figuras e mosaicos utilizando dos conhecimentos referentes as transformações geométricas.

Na segunda etapa[9], as atividades consistiam em alguns deslocamentos com apoio de uma figura. Com isso, foi feita a discussão acerca dos movimentos e a verificação de algumas propriedades referentes às isometrias.

Na terceira etapa[10], o professor pesquisador apresentou situações referentes ao movimento vertical com informações necessárias para a construção do modelo. Essa etapa foi desenvolvida em conjunto com os participantes. Por fim, foi explicitada a atividade referente ao movimento horizontal[11] mediante uma tarefa individual que consistia no uso da simbologia, das relações e das operações matemáticas, para representar o fenômeno. Na construção desse modelo, utilizamos um roteiro composto de três situações com cinco perguntas sobre cada uma delas, contidas em uma ficha, para auxiliar os participantes. A utilidade desse roteiro foi evidenciada pelos dados coletados no teste piloto, em que os sujeitos não responderam a todos os questionamentos da atividade. No roteiro, a primeira situação é relacionada à análise em relação ao ponto central da figura no ponto $(0, 0)$, com constante fixa de quatro unidades de deslocamento (cf. figura 14).

Figura 14: ilustração da primeira situação abordada



Fonte: Elaboração do autor com uso do *software* CorelDraw.

O estudante escolheu o sentido do movimento para a esquerda ou a direita e, em seguida, respondeu aos questionamentos:

[7] Cf. Apêndice D, *slide* 1-16.
[8] Disponível em: https://youtu.be/7spm0BHLWWM.
[9] Cf. Apêndice D, *slide* 17-23.
[10] Cf. Apêndice D, *slide* 24-35.
[11] Cf. Apêndice E.

i) Em geral, como é denominada matematicamente essa direção, isto é, como escrevemos, em matemática, a reta por onde deslocamos o centro da figura nesse movimento horizontal?

ii) Com esse movimento, qual é o par ordenado que representa a nova posição do centro da figura?

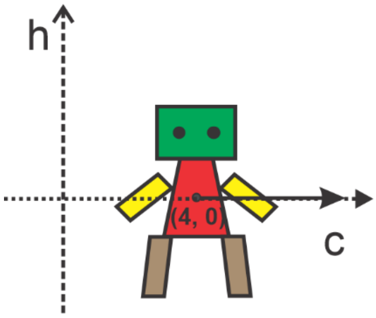
iii) Como podemos escrever, matematicamente, esse movimento, isto é, de que maneira, utilizando a linguagem matemática, podemos representar esse movimento?

iv) O que aconteceria se esse movimento fosse horizontal à esquerda, a partir do ponto (0,0)? Descreva, matematicamente, esse movimento com 4 unidades de deslocamento.

v) Descreva, com palavras, na língua materna (português), o movimento horizontal que você realizou.

A segunda situação referiu-se ao centro da figura no ponto $(4, 0)$ com constante fixa de quatro unidades de deslocamento (cf. figura 15).

Figura 15: ilustração da segunda situação



Fonte: Elaboração do autor com uso do *software* CorelDraw.

O estudante, novamente, escolheu o sentido do movimento e, em seguida, respondeu aos questionamentos:

i) Em geral, como é denominada matematicamente essa direção, isto é, como escrevemos, em matemática, a reta por onde deslocamos o centro da figura na direção horizontal?

ii) Após o movimento, qual é o par ordenado que representa a nova posição do centro da figura?

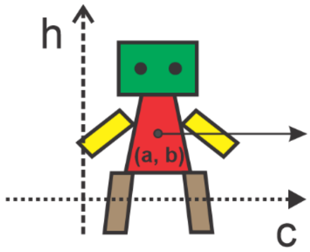
iii) Como podemos escrever, matematicamente, esse movimento, isto é, de que maneira, utilizando a linguagem matemática, podemos representar esse movimento?

iv) O que aconteceria se esse movimento fosse horizontal à esquerda, a partir do ponto $(4, 0)$? Descreva, matematicamente, esse movimento com k unidades de deslocamento.

v) Descreva, com palavras, na língua materna (português), o movimento horizontal que você realizou.

A última situação referiu-se a um ponto qualquer (a, b) da figura com uma constante de deslocamento k conforme figura 16.

Figura 16: ilustração da terceira situação



Fonte: Elaboração do autor com uso do *software* CorelDraw.

Após a escolha da direção e a realização do movimento, o estudante respondeu aos seguintes questionamentos:

i) Em geral, como é denominada matematicamente essa direção, isto é, como escrevemos, em matemática, a reta por onde deslocamos o centro da figura nesse movimento horizontal?

ii) Com esse movimento, qual é o par ordenado que representa a nova posição do centro da figura?

iii) Como podemos escrever, matematicamente, esse movimento, isto é, de que maneira, utilizando a linguagem matemática, podemos representar esse movimento?

iv) O que aconteceria se esse movimento fosse horizontal, à esquerda, a partir do ponto (a, b)? Descreva, matematicamente, esse movimento com k unidades de deslocamento.

v) Descreva, com palavras, na língua materna (português), o movimento horizontal que você realizou.

Após a conclusão da atividade, os estudantes enviaram o roteiro respondido pelo Whatsapp ao professor pesquisador.

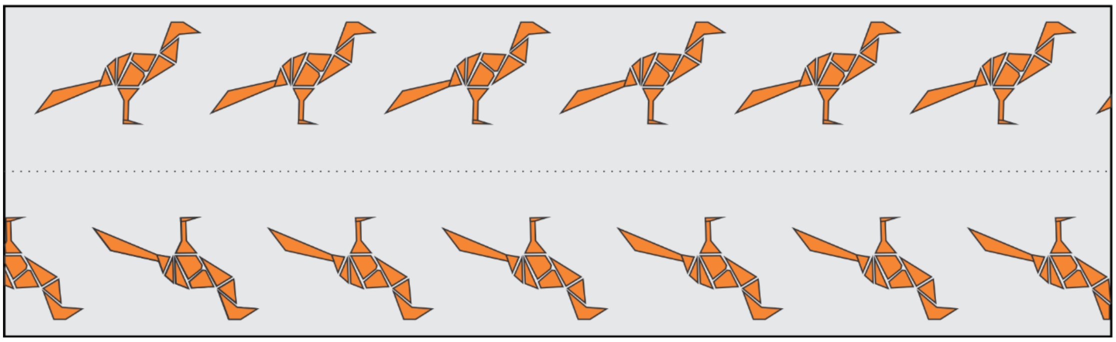
3.7 Caracterização dos indivíduos da oficina 2

A oficina 2 foi desenvolvida em uma escola pública estadual de Goiânia-GO, na região noroeste da cidade, considerada periferia de população pobre, no mesmo local onde foi realizado o teste piloto, entretanto com diferentes participantes. Como destacado por Santos e Pereira (2020),

> Os bairros que formam a Região Noroeste criam um "cinturão de pobreza", o núcleo urbano da classe menos favorecida, na qual as pessoas que a ocupam se encontram vulneráveis em relação à precarização da infraestrutura básica (saneamento, pavimentação e rede viária) que possibilitem a sua mobilidade e acessibilidade aos bens e aos serviços encontrados na região central da cidade (p. 205).

No período matutino, a escola atende ao ensino médio, do 1° ao 3° ano, com nove turmas no total, e a maioria dos seus estudantes reside em setores próximos. A oficina 2 foi ministrada pelo professor regente e pesquisador que desenvolveu este trabalho durante as aulas de Matemática do 1° ano. Durante o teste piloto, foi possível coletar dados com o uso do questionário, que auxiliou a elaboração do contexto dos participantes da oficina 2. O próximo capítulo apresenta os dados do teste piloto.

Simetria de reflexão deslizante com eixo de reflexão.



Fonte: Elaboração do autor com uso do *software* CorelDraw.

O teste piloto foi a primeira oficina desenvolvida e teve a finalidade de avaliar as potencialidades da atividade ministrada, para, assim, alterar o que fosse necessário antes da próxima coleta de dados. Consequentemente, analisamos e avaliamos o tipo de escrita do modelo matemático, a simbologia, as relações, as operações, o esboço do movimento de translação e as exemplificações utilizadas pelos estudantes de acordo com as categorias já mencionadas. Cada modelo foi considerado correto, parcialmente correto ou incorreto mediante os três enfoques discutidos no Capítulo 2: o geométrico, o aritmético e o algébrico.

No teste piloto, encontramos, na análise da atividade desenvolvida pelos alunos, as seguintes categorias apresentadas no quando 17: modelo matemático adequado, modelo matemático parcialmente adequado e modelo matemático inadequado.

Quadro 17: categorias referentes ao modelo matemático

Categorias	modelo matemático adequado	modelo matemático parcialmente adequado	modelo matemático inadequado
	Apresenta os enfoques corretamente[12]	Apresenta até dois enfoques corretos	Apresenta os enfoques de forma incorreta
	Apresenta enfoque geométrico	Apresenta enfoque geométrico correto ou incorreto	Apresenta enfoque geométrico incorreto
	Apresenta enfoque aritmético	Apresenta enfoque aritmético correto ou incorreto	Apresenta enfoque aritmético incorreto
	Apresenta enfoque algébrico	Apresenta enfoque algébrico correto ou incorreto	Apresenta enfoque algébrico incorreto

Fonte: Elaboração dos autores com base nos dados da ficha de atividade.

A análise e a discussão referentes aos dados do teste piloto estavam voltadas ao produto. Nesse caso, o resultado, ou seja, o modelo matemático elaborado pelos participantes foi caracterizado como adequado, parcialmente adequado e inadequado, diferentemente da abordagem analítica dos dados da oficina 2, que também analisou os processos utilizados pelos estudantes para a construção do modelo. Assim, no teste piloto, obtivemos os seguintes resultados: modelo matemático parcialmente adequado e modelo matemático inadequado. Entre os resultados apresentados, nenhum está na categoria *modelo matemático adequado*. O quantitativo de dados no teste piloto em relação às tarefas analisadas de acordo com o número de participantes, os questionários coletados e os dados descartados estão indicados no quadro 18.

Quadro 18: quantitativo dos dados do teste piloto

Dados	Quantitativo
Número de participantes	14
Tempo de oficina	6 h 30 min
Objetivo da oficina	Representar o movimento de translação mediante um modelo matemático
Trabalhos avaliados	4 trabalhos de 4 duplas
Trabalhos descartados	3 trabalhos de 3 duplas

[12] Os modelos matemáticos no teste piloto foram analisados de acordo com o quadro 13 na pág. 48 – 49.

Questionários analisados	8 questionários individuais
Questionários descartados	6

Fonte: Elaboração do autor com base nos dados da pesquisa.

No teste piloto, houve um número maior de participantes, entretanto alguns dados foram descartados em três situações: os sujeitos que obtiveram, pelo menos, uma falta durante a oficina e não participaram de todo o processo; os questionários individuais que apresentaram respostas idênticas; os trabalhos com elementos idênticos na construção do modelo, ou seja, com enfoques aritmético, geométrico e algébrico iguais. Logo, houve um número menor de tarefas analisadas em relação ao quantitativo coletado.

Com os questionários, foi possível elaborar o perfil dos participantes da oficina (cf. quadro 19). Para não identificar os sujeitos participantes, utilizamos as letras como pseudônimos (NV, S, P, G, W, A, F, R).

Quadro 19: perfil dos participantes

Sujeitos	Caracterização
NV	Declara não gostar de matemática, tem dificuldade em fazer contas, em resolver problemas e justifica seus motivos para ir à escola, para aprender e ter um emprego bom. Pondera que fez matemática na oficina com a justificativa, “realizei todas as atividades em sala”, porém julga não ter descrito nenhum fenômeno matematicamente. A matemática é referente a números, letras e cálculos numéricos.
S	Declara não gostar de matemática, tem dificuldade em fazer contas, não entende a matéria e justifica seus motivos para ir à escola, para aprender e encontrar-se com seus amigos. Considera que fez matemática na oficina com a justificativa “sim, realizei todas as atividades”, porém julga não ter descrito nenhum fenômeno matematicamente na escola. A matemática é referente a números, letras e cálculos numéricos.
P	Considera que não gosta de matemática, tem dificuldade para fazer cálculos e em resolver problemas, além do cansaço da sua rotina diária. Os motivos para ir à escola são pelo gosto pelos estudos, para ter um emprego bom e para aprender. Pondera que já utilizou a matemática em sala de aula, para descrever algum fenômeno matematicamente, não cita nenhum exemplo, mas considera que fez matemática na oficina. A matemática para esse estudante é um conjunto de regras.
G	Declara que gosta de matemática, tem dificuldades em resolver problemas matemáticos e frequenta a escola pelo gosto de estudar, além de querer um emprego bom. Considera que fez matemática na oficina pelo uso de cálculo, gráficos e que isso tudo está relacionado à matemática, porém julga não ter descrito algum fenômeno matematicamente. Esse sujeito caracteriza a matemática como números, letras e composta de cálculos numéricos.
W	Declara não gostar de matemática, tem dificuldade em resolver problemas e justifica seus motivos para ir à escola, para ter um emprego bom. Pondera que fez matemática na oficina com a justificativa “porque vemos conteúdo de matemática”, porém julga não ter descrito nenhum fenômeno matematicamente. A matemática é referente a números, letras e cálculos numéricos.
A	Declara que gosta de matemática, tem dificuldade em resolver problemas e em fazer contas, justifica seus motivos para ir à escola, para aprender, pelo gosto pelos estudos e ter um emprego bom. Considera que fez matemática na oficina, com a justificativa “pois realizei cálculos matemáticos”, porém julga não ter descrito nenhum fenômeno matematicamente. A matemática é referente a números, letras e cálculos numéricos.
F	Declara que gosta de matemática, tem dificuldade em resolver problemas e justifica seus motivos para ir à escola, para aprender. Considera que fez matemática na oficina “porque teve muitas atividades”, entretanto julga não ter descrito nenhum fenômeno matematicamente. A matemática para esse indivíduo é referente ao uso de números, letras e cálculos numéricos.

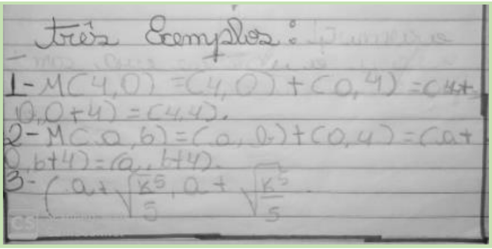
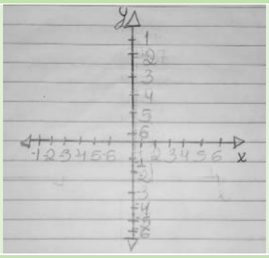
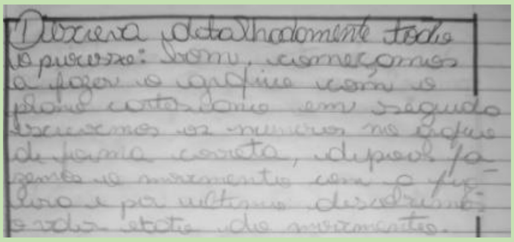
R	Declara que gosta de matemática, tem dificuldade em resolver problemas e justifica seus motivos para ir à escola, para aprender e ter um emprego bom. Considera que fez matemática na oficina, com justificativa “porque fizemos contas, gráficos, e tudo isso está relacionado à matemática”, porém julga não ter descrito nenhum fenômeno matematicamente. A matemática é referente a números, letras e cálculos numéricos.

Fonte: Elaboração do autor com base no questionário aplicado.

Observa-se que grande parte dos estudantes gostam de matemática, mas possuem dificuldades em resolver problemas e justificam ir à escola, justamente, para aprender. Contudo, a maioria dos participantes consideram que não descreveram nenhum fenômeno matematicamente e associam a matemática a números, letras e cálculos numéricos. Portanto, não lembraram que fizeram uso dessas ferramentas para a construção do modelo.

Acerca dos outros dados coletados da atividade, ressaltamos que o trabalho desenvolvido pelos estudantes NV e S, de acordo com o quadro 20, encontra-se na 3ª categoria, *modelo matemático inadequado*. Em vista disso, apresentaram os enfoques aritmético, geométrico e algébrico inadequados, pois, quando tentaram generalizar um ponto qualquer da figura (a, b), usaram algo similar às definições do movimento diagonal, além de outros erros identificados.

Quadro 20: modelos produzidos pelos estudantes NV e S

Sujeitos (duplas)	NV e S
Modelo matemático	
Enfoque geométrico	
Descrição do movimento	

Fonte: Elaboração do autor com base nos dados da ficha de atividade.

O modelo apresentado pelos estudantes NV e S é o seguinte: $M(4, 0) = (4, 0) + (0, 4) = (4 + 0, 0 + 4) = (4, 4)$. Trata-se do mesmo exemplo citado durante a oficina para o movimento vertical, que se encontra no material de apoio[13]. Contudo, é possível perceber que este modelo está incorreto para a proposta da atividade. Portanto, com o centro da figura sobre o ponto $(4, 0)$, no movimento horizontal, a unidade de deslocamento correta é $(4, 0)$, cuja descrição matemática é $M_h = (4, 0) + (4, 0) = (8, 0)$, diferentemente do que apresentaram NV e S.

Situação similar ocorreu quando os estudantes generalizaram o centro da figura para um ponto qualquer (a, b). Novamente, a unidade de deslocamento seria para o movimento vertical $(0, 4)$, obtendo-se $M_h = (a, b) + (0, 4) = (a + 0, b + 4) = (a, b + 4)$. Portanto, com o centro da figura sobre o ponto (a, b), a unidade de deslocamento correta para a horizontal é $(4, 0)$. Assim, obtém-se $M_h = (a, b) + (4, 0) = (a + 4, b)$, diferentemente do exposto por NV e S.

No terceiro caso, os estudantes apenas concluíram algo semelhante ao movimento diagonal com constante k para um ponto qualquer, obtendo $(a + \sqrt{\frac{k^5}{5}}, a + \sqrt{\frac{k^5}{5}})$. Portanto, com o centro da figura sobre o ponto (a, b), a unidade de deslocamento correta é $(k, 0)$. Assim, obtém-se $M_h = (a, b) + (k, 0) = (a + k, b)$.

Logo, supõe-se que os estudantes NV e S não compreenderam a proposta, pois:

i) o esboço do plano cartesiano (enfoque geométrico) está incorreto em razão da ordem numérica na reta. Além disso, não deram nenhuma utilidade ao plano cartesiano.

ii) descreveram a atividade da seguinte forma: "começamos a fazer o gráfico com o plano cartesiano; em seguida, escrevemos os números no gráfico de forma correta; depois, fizemos o movimento com a figura; por último, descobrimos o valor exato do movimento" (NV e S). Entretanto, como observado anteriormente, o plano cartesiano está incorreto;

iii) segundo eles, "na reta retilínea, no plano cartesiano na horizontal" (NV e S), não especificaram, exatamente, de qual se tratava, além de realizarem um movimento vertical com sentido para cima, de acordo com o vetor selecionado, diferentemente do que foi descrito.

Com base nesses resultados, verifica-se que os estudantes podem não ter compreendido a atividade ou não possuem conhecimento geométrico, aritmético e algébrico suficiente para entender que as variáveis envolvidas no processo são diferentes da direção vertical para a horizontal, ou seja, na direção vertical, temos alterações na ordenada em relação à unidade de deslocamento, com abscissa fixa. Para o movimento horizontal, ocorre o contrário. Em relação a essas dificuldades, Castro (2012) assevera que são inerentes ao objeto e devem-se, em grande parte, à natureza da álgebra, a sua linguagem e a outros elementos que a compõem.

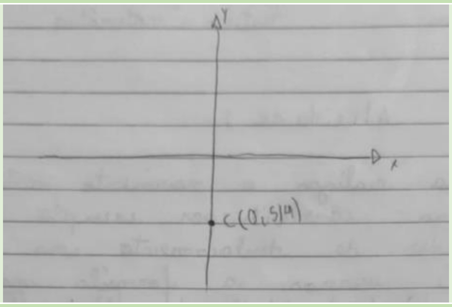
A resposta produzida por NV e S foi considerada inadequada, por apresentar erros no processo de construção da função movimento, além de ser um exemplo para o movimento vertical.

[13] Cf. Apêndice C.

Os estudantes apresentaram dados semelhantes no questionário: ambos declararam não gostar de matemática e nunca ter descrito algum fenômeno matematicamente; associaram a linguagem ao uso de números e letras; para eles, a matemática em si são cálculos numéricos. Entretanto, é possível analisar e estudar situações com ferramentas adequadas, além de descrever e investigar um fenômeno matematicamente (BIEMBENGUT; HEIN, 2004; VILLA-OCHOA, 2007; BASSANEZI, 2009), mas parece que NV e S não concebem a matemática sob esse aspecto.

O modelo apresentado pelos alunos P e G, conforme o quadro 21, encontra-se na 3ª categoria, *modelo matemático inadequado*. Diferentemente da proposta da atividade, desenvolveram os enfoques geométrico, algébrico e aritmético para o movimento vertical. A atividade apresentada pelos alunos K e N foi similar a esse modelo, com os mesmos exemplos e a descrição da atividade de forma idêntica. Entretanto, por conhecimento dos sujeitos pelo professor pesquisador, supõe-se que K e N copiaram a atividade de P e G.

Quadro 21: modelo produzido pelos alunos P e G

Sujeitos (duplas)	**P e G**
Modelo matemático	$M(0, \frac{5}{4}) = (0, \frac{5}{4}) - (0, 2) = (0, \frac{5}{4}) + (0, -2) = (0-0, \frac{5}{4} - 2) = 0, -\frac{5}{4}$
Enfoque geométrico	
Descrição do movimento	• na horizontal vai ser o oposto com movimento para baixo, subtrairemos o valor da constante na unidade de deslocamento

Fonte: Elaboração do autor com base nos dados da ficha de atividade.

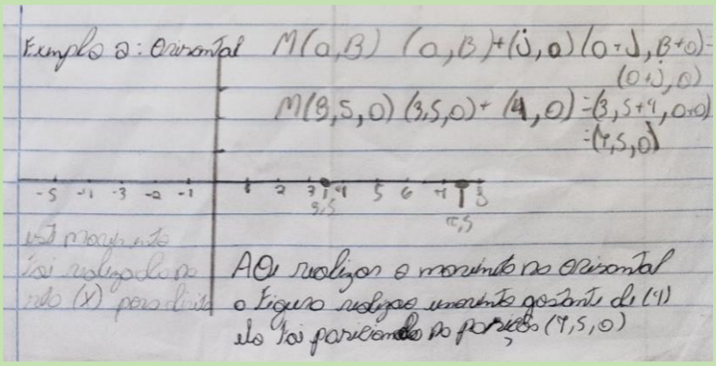
Os alunos P e G apresentaram, na descrição do movimento, a afirmativa do desenvolvimento de um exemplo para a direção horizontal, embora seja diferente do exposto no modelo aritmético. Registraram: “na horizontal vai ser o oposto com movimento para baixo, subtraímos o valor da constante na unidade de deslocamento” (P e G). Contudo, observa-se a inversão da direção horizontal com a vertical.

A resposta de P e G foi $M\left(0,\frac{5}{4}\right)=\left(0,\frac{5}{4}\right)-(0,2)=\left(0-\ 0,\frac{5}{4}-2\right)=\left(0,-\frac{5}{4}\right)$, inadequada para a solução esperada. Dessa forma, conclui-se que as operações estão incorretas. Se o centro da figura é o ponto $(0,\frac{5}{4})$ para o movimento horizontal e a unidade de deslocamento para baixo correta é $(-4,0)$, descrevendo o movimento, temos $M_h=\left(0,\frac{5}{4}\right)+(-4,0)=(-4,\frac{5}{4})$, diferentemente do que explicitaram P e G. Além disso, não apresentaram o enfoque algébrico.

O modelo produzido por P e G foi considerado inadequado, por ser um exemplo para o movimento vertical. Inferimos que eles possuem dificuldades para descrever o fenômeno utilizando a aritmética, a geometria e a álgebra. Evidenciamos mais uma vez que o conhecimento algébrico é insatisfatório, como expõe Castro (2012), mas não somente ele.

Outro modelo, produzido pelos alunos W e A, conforme o quadro 21, encontra-se na 2ª categoria, o *modelo matemático parcialmente correto*, com algumas observações destacadas.

Quadro 22: modelo produzido pelos alunos W e A

Sujeitos (duplas)	**W e A**
Modelo matemático	
Enfoque geométrico	
Descrição do movimento	

Fonte: Elaboração do autor com base nos dados da ficha de atividade.

O modelo apresentado por W e A foi $M(3{,}5,0)(3{,}5,0)+(4,0)=(3{,}5+4,0+0)=(7{,}5,0)$, correto para a proposta. Considerou-se adequado o enfoque aritmético, porém observou-se a falta da simbologia de igualdade na construção do modelo. No enfoque aritmético, eles generalizaram o centro da figura para um ponto qualquer (a,b) e a unidade de deslocamento para $(i,0)$ e obtiveram o resultado $M_h=(a,b)+(i,0)=(0+i,b+0)=(0+i,0)$, inadequado. Com o centro da figura sobre o ponto (a,b) e a unidade de deslocamento $(i,0)$, obteríamos a expressão $M_h=(a,b)+(i,0)=(a+i,b)$, diferentemente do exposto por W e A.

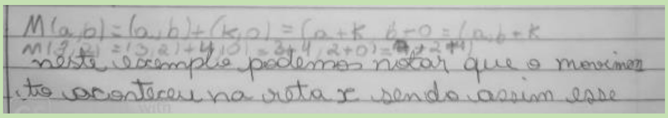
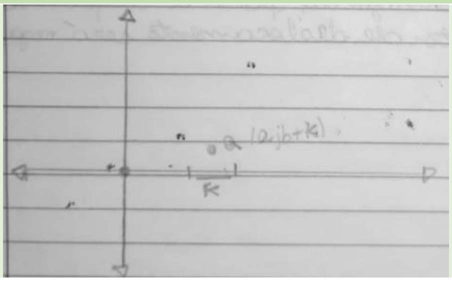
Ao descrever, matematicamente, o movimento, W e A generalizaram a constante deslocamento para a incógnita i, diferentemente dos exemplos realizados em sala de aula, onde utilizávamos a constante k. Com isso, inferimos que os estudantes entendem alguns aspectos da álgebra, pois utilizaram outra incógnita para generalizar a unidade de deslocamento. Porém, tentaram utilizar uma linguagem própria para descrever a situação, mas sem êxito, apresentando o enfoque algébrico inadequado.

O enfoque geométrico está correto quando analisamos o ponto inicial e o final correspondentes ao movimento em função da unidade de deslocamento, contudo descreveram que esse "foi realizado na reta (x) para a direita" (W e A), diferentemente do esperado, que era sob a reta $y = 0$, para a direita.

Pelas dificuldades com as operações aritméticas, percebemos limitações para realizar as operações no enfoque algébrico. Todavia, os sujeitos conseguiram responder, corretamente, ao esboço no enfoque geométrico e no enfoque aritmético. Além disso, observou-se a falta do uso da simbologia matemática, que foi um requisito necessário à construção do modelo matemático, para descrever aquela situação. Comprovamos, novamente, como aponta Castro (2012), que os conhecimentos algébricos obtidos na escola são insatisfatórios, em específico o uso da igualdade como relação de equivalência.

Em outro caso, os estudantes F e R apresentaram um modelo inadequado, que se encontra na 3ª categoria, *modelo matemático inadequado*, com os enfoques aritmético, geométrico e algébrico inadequados. Além disso, os alunos não apresentaram a situação com um ponto qualquer (a, b) e a constante com 4 unidades de deslocamento (cf. quadro 23).

Quadro 23: modelo apresentado pelos estudantes F e R

Sujeitos (duplas)	**F e R**
Modelo matemático	 M(a,b) = (a,b) + (k,0) = (a+k, b+0 = (a,b+k M(3,2) = (3,2) + 4(0) = 3+4, 2+0) = 2+4) neste exemplo podemos notar que o movimento aconteceu na reta x sendo assim esse
Enfoque geométrico	

Descrição do movimento	movimento foi realizado na horizontal para a direita podemos concluir que adicionamos o valor da constante.

Fonte: Elaboração do autor com base nos dados da ficha de atividade.

O modelo apresentado para o movimento na horizontal por F e G foi $M(3,2) = (3,2) + (4,0) = (3+4, 2+0) = (7, 2+4)$, considerado inadequado para a proposta de atividade. Nesse caso, se o centro da figura estava no ponto $(3,2)$ e realizaríamos um movimento horizontal, com unidade de deslocamento $(4,0)$, descreveríamos o movimento com a expressão $M_h = (3,2) + (4,0) = (7,2)$, diferentemente do que apresentaram F e G. Eles realizaram as operações de forma incorreta, pois deveriam ter adicionado valores da ordenada com ordenada e abscissa com abscissa.

Os estudantes F e G generalizaram o centro da figura para um ponto qualquer (a,b) e a unidade de deslocamento $(k,0)$, obtendo a seguinte resposta: $M_h = (a,b) + (k,0) = (a+k, b+0) = (a, b+k)$. Contudo, o enfoque algébrico está inadequado. Portanto, com o centro da figura sobre o ponto (a,b) e a unidade de deslocamento para a direção horizontal $(k,0)$, obteríamos $M_h = (a,b) + (k,0) = (a+k, b)$. Inferimos que o erro foi cometido apenas na última etapa do cálculo, em que F e G deveriam ter adicionado a constante (k)ao valor de a.

Ao analisar o esboço do plano cartesiano, percebemos que os participantes generalizaram pontos e unidade de deslocamento com a notação incorreta, que deveria conter letras maiúsculas e variação na ordenada y. Evidencia-se, assim, o movimento vertical, diferente do enfoque aritmético apresentado por eles, resultado obtido no enfoque algébrico. Portanto, concluímos que os estudantes não entenderam as relações entre os dois enfoques. Como expõe Castro (2012), os conhecimentos aritméticos podem ser obstáculos para resolver questões algébricas.

Os estudantes F e R destacam: “neste exemplo, podemos notar que o movimento aconteceu na reta x; sendo assim, esse movimento foi realizado na horizontal para a direita. Podemos concluir que adicionamos o valor da constante” (F e R). Verificamos a afirmação com base na direção e no sentido escolhido, $(4,0)$, referente ao movimento horizontal para a direita, que, entretanto, foi realizado sobre a reta $y = 2$, diferentemente do exposto. Dessa forma, o modelo produzido por F e R está parcialmente correto e encontra-se na 2ª categoria. Conclui-se que os participantes não possuem conhecimentos suficientes sobre os enfoques geométrico e algébrico, mas têm habilidade com o aritmético.

As dificuldades mais recorrentes foram quanto às operações aritméticas e algébricas, referentes à operação de adição entre o ponto e a unidade de deslocamento, a escolha do par ordenado para o movimento e a construção do plano cartesiano. Associado a isso, identificamos a ausência da simbologia, como os sinais de igualdade e adição.

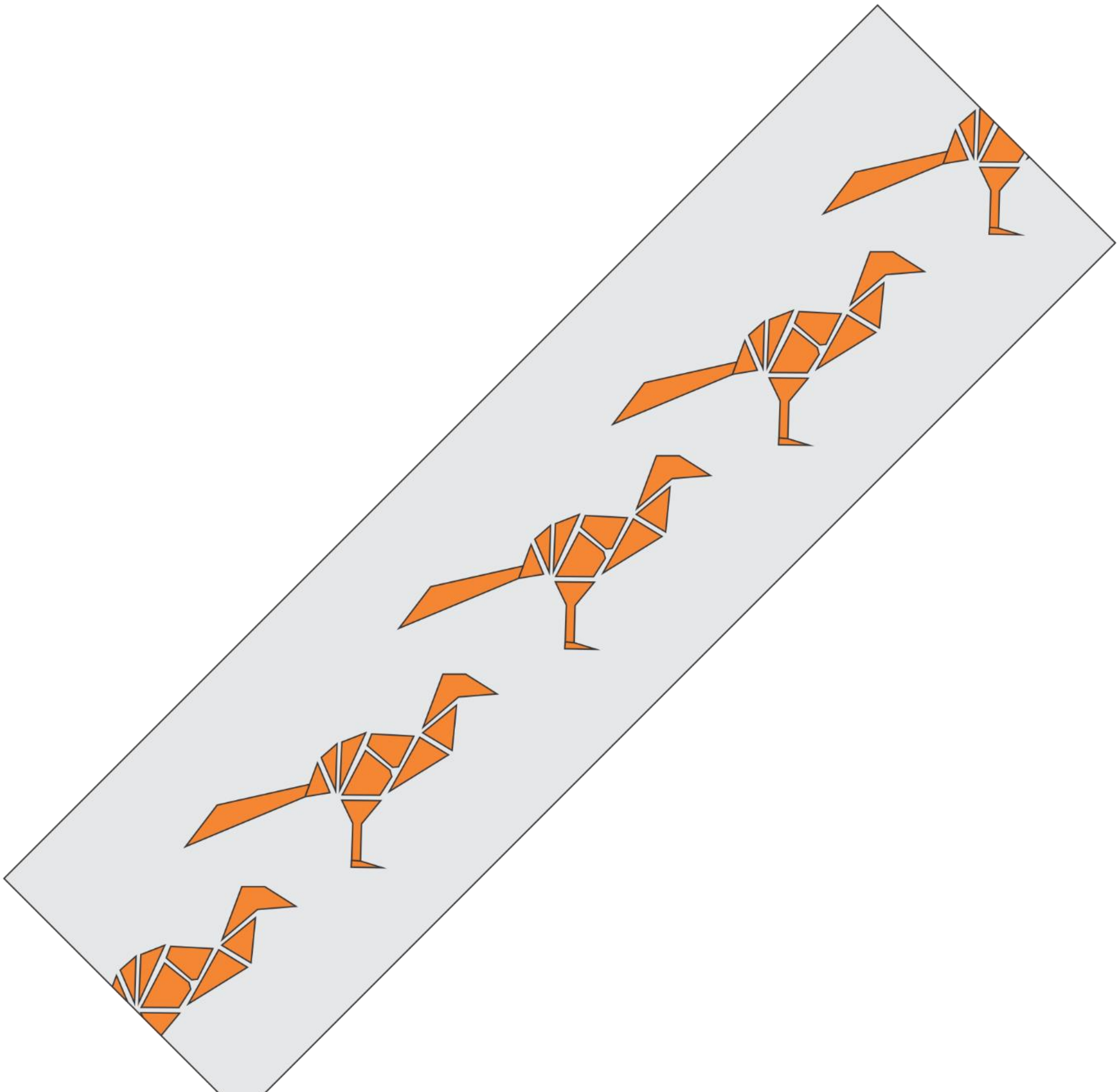
Inferimos que as causas são, como ressaltado por Breda *et al* (2011) e Castro (2012), os conhecimentos geométricos, aritméticos e algébricos serem reduzidos a meras receitas de bolo e trabalhados de forma independente, proporcionando dificuldades na compreensão desses conteúdos. Junto a esse fato, há o ensino mecânico (OLIVEIRA e LAUDARES, 2015), em que os estudantes fazem uso de ferramentas, sem ter o mínimo conhecimento sobre elas.

A atividade possibilita o desenvolvimento do conteúdo programático e permite que o professor esteja mais atento às dificuldades de cada aluno no momento da orientação. Outrossim, o trabalho concatenado às três áreas, álgebra, geometria e aritmética, pode ajudar a diminuir as dificuldades dos estudantes acerca desses conteúdos, pois, como assevera Castro (2012) e Sierpinska (2000), o ensino disjunto da álgebra e da aritmética pode proporcionar obstáculos ao desenvolvimento do pensamento aritmético e geométrico.

O próximo capítulo apresenta os dados da segunda oficina. Além disso, analisa as respostas aos grupos de questões aplicadas aos partícipes diferentes dos do teste piloto.

CAPÍTULO 5: NOVA COLETA DE DADOS

Infinitas simetrias de reflexão deslizante



Fonte: Elaboração do autor com uso do *software* CorelDraw.

A oficina 2 foi fundamentada por ideias da modelagem matemática, no sentido de inserir o contexto em sala de aula, dar significado ao ensino e utilizar a simbologia e as relações matemáticas para representar o fenômeno. Além do material concreto, usamos a animação no *slide*, para facilitar a visualização do fenômeno estudado. O aspecto principal nesse processo é o fato de que o aluno foi instruído a descobrir, criticar e questionar as próprias conclusões e, assim, construir o seu conhecimento fundamentado significativamente. A atividade desenvolvida na oficina 2 consistiu na construção de modelos que representavam a situação analisada: o movimento de translação vertical e horizontal.

Na primeira etapa, exemplificamos os movimentos verticais com o recurso visual do *slide* compartilhado com os respondentes e, em seguida, apresentamos o modelo matemático que representava cada um. Assim, a animação do *slide* demonstrava o movimento a ser realizado pelos alunos e as demais explicações sobre a ação executada. Além disso, cada participante repetia a mesma ação do *slide* com a figura em mão.

A segunda etapa consistiu na descrição do movimento horizontal com palavras e no uso da simbologia, das relações e das operações matemáticas com direção horizontal e sentido à direita ou à esquerda, a critério de cada dupla. Essa etapa foi desenvolvida individualmente.

Na análise e na discussão referentes aos dados do teste piloto, demos ênfase à solução final como adequada, inadequada e parcialmente adequada. Ao avaliar os procedimentos, percebemos que a resolução também era importante, por isso incluímos essa etapa na oficina 2, cujos processos utilizados pelos participantes são examinados neste capítulo.

5.1 Dados da oficina 2

Realizamos a coleta de dados com 9 alunos do 1° ano do ensino médio, em uma escola pública de Goiânia, com o intuito analisar os modelos desenvolvidos por eles. O número de participantes, os dados coletados e o tempo de oficina são apresentados no quadro 24.

Quadro 24: algumas informações sobre a oficina 2

Dados	Quantitativo
Número de participantes	9
Tempo de oficina	1 h 20 min
Trabalhos avaliados	9
Formulários avaliados	9 questionários individuais

Fonte: Elaboração do autor com base em dados da pesquisa.

Um dos materiais analisados foi a ficha de atividade desenvolvida pelos estudantes, em que analisamos o tipo de escrita utilizada no modelo, o relato sobre o processo, a simbologia, as operações envolvidas e as exemplificações. A ficha de atividade continha quinze questões separadas em cinco grupos com características semelhantes, para auxiliar a análise e a organização dos dados (cf. quadro 25).

Quadro 25: organização dos dados em características segundo as questões propostas

Grupos	Elementos
Grupo 1	i, vi e xi) Em geral, como é denominada, matematicamente, essa direção, isto é, como escrevemos, em matemática, a reta por onde deslocamos o centro da figura nesse movimento horizontal?
Grupo 2	ii, vii e xii) Com esse movimento, qual é o par ordenado que representa a nova posição do centro da figura?
Grupo 3	iii, viii e xiii) Como podemos escrever, matematicamente, esse movimento, isto é, de que maneira, utilizando a linguagem matemática, podemos representar esse movimento?
Grupo 4	iv) O que aconteceria se esse movimento fosse horizontal para a esquerda, a partir do ponto (0, 0)? Descreva, matematicamente, esse movimento com 4 unidades de deslocamento. ix) O que aconteceria se esse movimento fosse horizontal para a esquerda, a partir do ponto (4, 0)? Descreva, matematicamente, esse movimento com k unidades de deslocamento. xiv) O que aconteceria se esse movimento fosse horizontal para a esquerda, a partir do ponto (a, b)? Descreva, matematicamente, esse movimento com k unidades de deslocamento.
Grupo 5	v, x e xv) Descreva, com palavras, na língua materna (português), o movimento horizontal que você realizou.

Fonte: Elaboração do autor.

Organizamos o grupo 1 com questões referentes à reta na qual foi realizado o movimento horizontal; o grupo 2 com questões referentes ao novo centro da figura; o grupo 3 referente à descrição matemática do movimento; o grupo 4 sobre a generalização para qualquer ponto e qualquer deslocamento; o grupo 5 sobre a descrição na língua materna de cada participante. O questionário foi aplicado aos respondentes após a atividade como forma de avaliar a participação e o desenvolvimento do processo, coletar dados e conhecer o perfil dos estudantes como na primeira oficina. Entretanto, com o formato do trabalho não presencial, realizamos a adaptação do questionário para o formulário *online*. Assim, foi possível obter informações acerca dos participantes da oficina com os resultados indicados no quadro 26. Para não identificar os sujeitos participantes, utilizamos as letras como pseudônimos (A, B, C, D, E, F, G, H, I).

Quadro 26: questionário aplicado após a implementação da oficina

Sujeitos	Caracterização
A	Declara gostar de matemática, entretanto tem dificuldade em fazer contas e resolver problemas e justifica seus motivos para ir à escola, por obrigação, porque quer aprender, para encontrar com os amigos, porque gosta de estudar e para ter um emprego bom. Quando questionado se já utilizou a matemática para descrever alguma situação, pondera que “foi na tabuada que eu fiz”; além disso, considera que fez matemática na atividade. Para esse estudante, a matemática é referente a números, letras, símbolos, cálculos numéricos e conjunto de regras.
B	Declara gostar de matemática, entretanto enfrenta dificuldade em fazer contas e sono, ao estudar matemática, em resolver problemas e justifica seus motivos para ir à escola, para aprender e ter um emprego bom. Pondera que fez matemática na oficina, com a justificativa “sim, foi realizado o uso da matemática nas questões, para descobrir o resultado das questões” e julga utilizar a matemática diariamente, para descrever situações no trabalho ou no dia a dia. A matemática para esse estudante é referente a números, símbolos e cálculos numéricos.

C	Declara gostar de matemática, entretanto tem dificuldade em fazer contas e justifica seus motivos para ir à escola, porque quer aprender. Pondera que fez matemática na oficina, com a justificativa “sim, porque os cálculos são réguas da vertical e da horizontal”, porém considera não ter utilizado a matemática para descrever alguma situação. A matemática para esse estudante é referente a cálculos numéricos.
D	Declara não gostar de matemática, pois tem dificuldades em fazer contas e em resolver problemas e justifica seus motivos para ir à escola, porque quer aprender, encontrar com os amigos, estudar e ter um emprego bom. Pondera que fez matemática na oficina, mas julga nunca ter descrito um fenômeno matematicamente. A matemática para essa estudante é referente a números e cálculos numéricos.
E	Declara não gostar de matemática, pois enfrenta dificuldades em fazer contas, e seus motivos para ir a escola são referentes a querer aprender, estudar e ter um emprego bom. Pondera que fez matemática na oficina, mas julga não ter utilizado a matemática para descrever alguma situação.
F	Declara não gostar de matemática, pois tem sono, ao estudar matemática, e seu motivo para ir à escola é porque quer aprender. Pondera que fez matemática na oficina, mas não considera já ter utilizado a matemática para descrever alguma situação. A matemática para esse estudante é referente a letras.
G	Declara não gostar de matemática, pois tem dificuldades em fazer contas, em resolver problemas e não entende a matéria, ao estudar matemática e seus motivos para ir à escola são porque quer aprender e ter um emprego bom. Pondera que fez matemática na oficina, justificando “sim, porque, em toda questão teve matemática envolvida”, mas não considera já ter utilizado a matemática para descrever alguma situação. A matemática para esse estudante é referente a cálculos numéricos.
H	Declara não gostar de matemática, pois tem dificuldade em fazer contas e em resolver problemas, e seus motivos para ir à escola são porque quer aprender, estudar, ter um emprego bom e ter um futuro. Pondera que fez matemática na oficina, justificando “sim, pois utilizei lógica numérica, números e símbolos matemáticos” e julga já ter utilizado a matemática para descrever alguma situação. A matemática para esse estudante são números, símbolos, cálculos numéricos e conjunto de regras.
I	Declara gostar de matemática, mas enfrenta sono, ao estudar, e seus motivos para ir á escola são porque quer aprender, estudar, ter um emprego bom. Pondera que fez matemática na oficina justificando “sim, porque envolve cálculos e regras” e julga já ter utilizado a matemática para descrever alguma situação, “sim, quando comecei a dar aula de matemática para crianças, tive que mostrar o sentido de estudar a matemática, então citei exemplos do cotidiano em que sempre estamos utilizando a matemática e mostrei que ela sempre está presente no nosso dia a dia”. A matemática para esse estudante são números, cálculos numéricos e conjunto de regras.

Fonte: Elaboração do autor com base nos dados do questionário.

Observamos que a maioria dos participantes não gosta de matemática, possui dificuldades em resolver problemas e em fazer cálculos. Além disso, todos afirmaram ir à escola para aprender, e grande parte, para ter um emprego bom. Também consideram que nunca utilizaram a matemática para descrever alguma situação e associam-na, principalmente, a cálculos numéricos, números, um conjunto de regras, letras e símbolos. Portanto, não lembraram ou não entenderam que fizeram uso dessas ferramentas matemáticas para a construção do modelo.

Com base nas análises iniciais, subdividimos a amostra (as resoluções) em cinco características principais: abordagem geométrica gráfica, abordagem aritmética, abordagem algébrica, linguagem materna escrita e linguagem matemática escrita. Tais subdivisões advieram à medida que entramos em contato com os dados da ficha de registro.

5.2 Grupo 1 de respostas

Organizamos o grupo 1 de questões referentes à denominação da reta na qual foi realizado o movimento horizontal conforme o quadro 27.

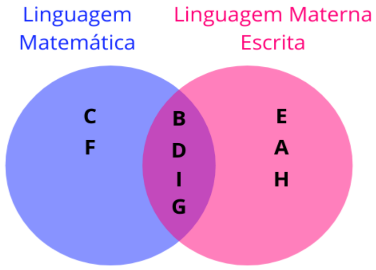
Quadro 27: grupo 1 de questões

Grupos	Elementos
Grupo 1	i, vi e xi) Em geral, como é denominada, matematicamente, essa direção, isto é, como escrevemos em matemática a reta por onde deslocamos o centro da figura nesse movimento horizontal?

Fonte: Elaboração do autor para coleta de dados.

Assim, obtivemos os resultados ilustrados na figura 17. Os participantes B, D, I, G recorreram às duas linguagens, materna escrita e matemática, para responder aos questionamentos desse grupo.

Figura 17: dados do grupo 1 de respostas.

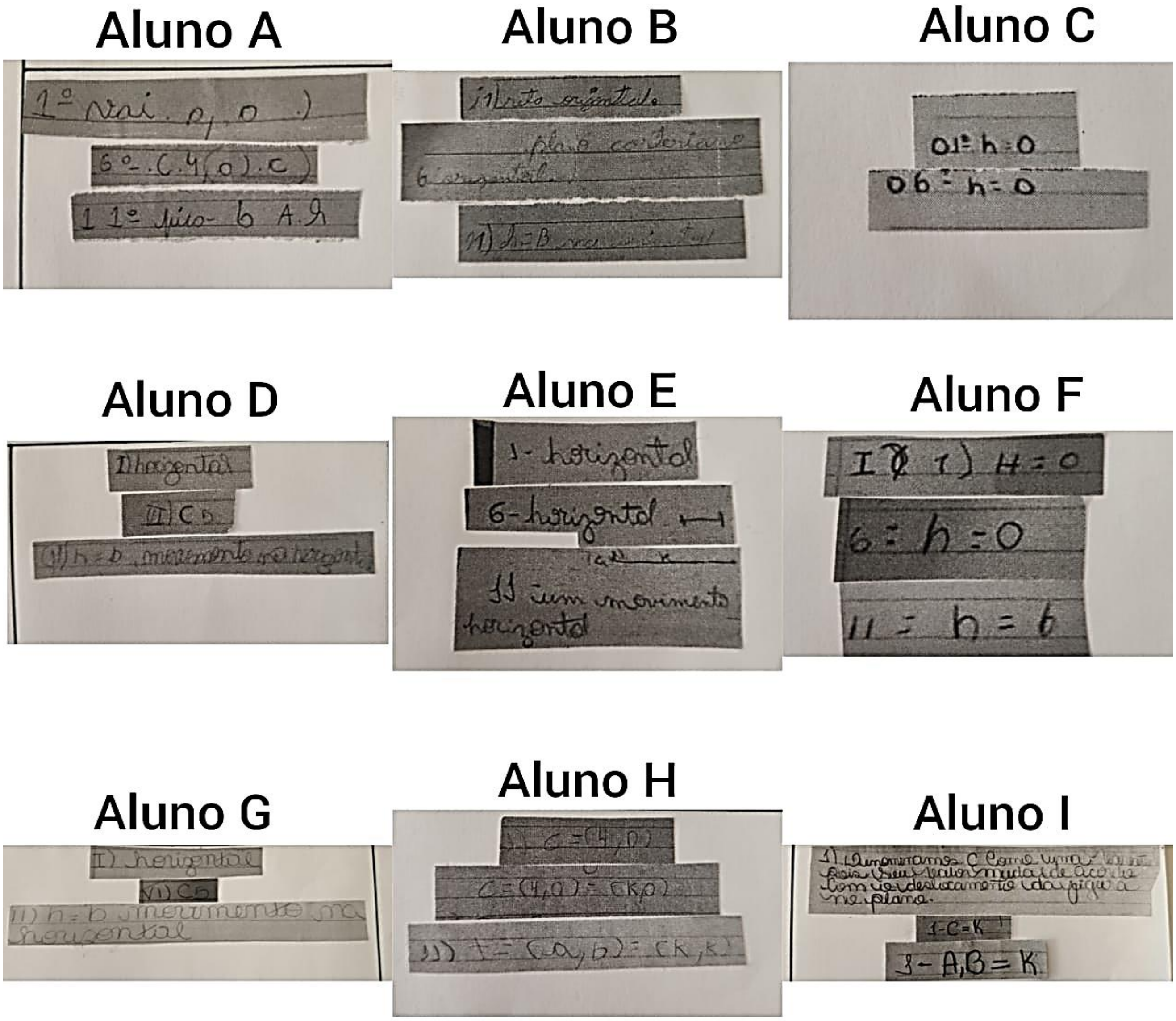


Fonte: Elaboração do autor no *software* Canva com base nos dados da pesquisa.

A maioria utilizou as duas linguagens. É possível que os estudantes não se sentissem seguros com o uso da matemática e recorreram à linguagem materna escrita, para responder ao questionamento. Aparentemente, há dificuldades com o uso da linguagem matemática, pois, entre os nove respondentes, apenas dois utilizaram-na.

Observamos, pela figura 18, a frequência da resposta: “movimento na horizontal” (cf. participantes B, D, E, G). Ademais, inferimos que falta aprimorar o registro escrito do participante I, pois ele tentou utilizar a notação de par ordenado, mas não usou os parênteses.

Figura 18: grupo 1 de respostas

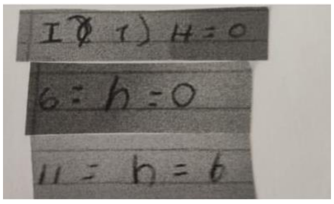


Fonte: Elaboração do autor com base nas respostas da ficha de atividade.

O respondente A tentou utilizar a linguagem materna e a abordagem geométrica, mas não foi possível compreender o seu raciocínio na resposta dada. Esperávamos uma construção acerca da equação da reta referente àquele movimento e não somente a indicação do sentido realizado. Notamos esse fato nas respostas dos participantes B, D, E, G.

Nessa situação, há o uso intermediário dos três tipos de pensamento, o sintético-geométrico, o analítico-aritmético e o analítico-estrutural, sob a perspectiva de Sierpinska (2000). Os respondentes utilizaram alguns objetos (equação da reta) que não são dados de forma direta e são explicados a partir de algumas propriedades (tipo analítico-estrutural), mas também fazem uso de objetos dados por relações e operações com números e variáveis (tipo analítico-aritmético), e isso só aconteceu por meio da linguagem geométrica (tipo sintético-geométrico), como demonstra a figura 19.

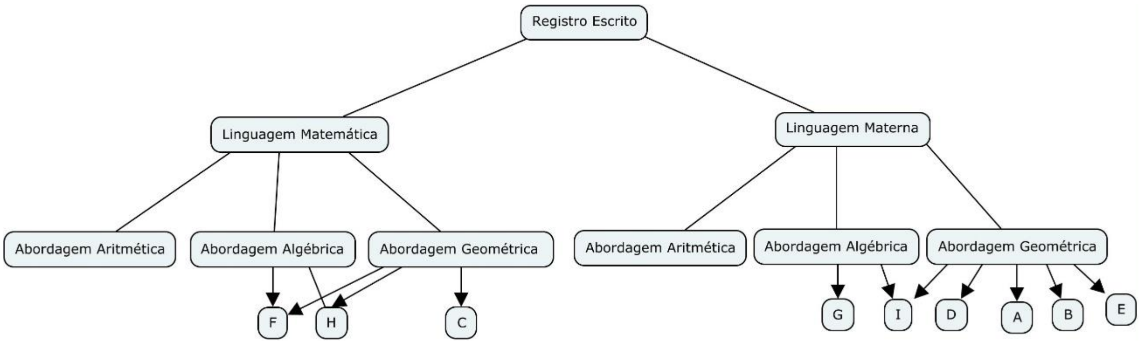
Figura 19: resposta do aluno F para o grupo 1 de questões



Fonte: Elaboração do autor com base nos dados da ficha de atividade.

Os estudantes que utilizaram a linguagem matemática para responder ao questionamento relacionaram o movimento à equação da reta direção referente ao deslocamento distintivamente de quem utilizou somente a linguagem materna escrita. Por fim, as respostas dos alunos contribuíram com elementos para a criação do esquema na figura 20.

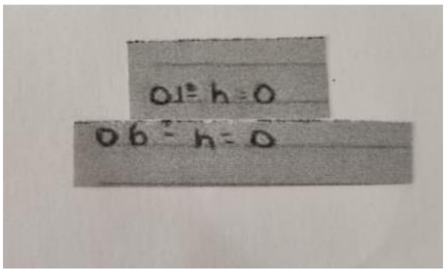
Figura 20: abordagem de cada estudante no grupo 1 de respostas



Fonte: Elaboração do autor no *software* CmapTools com base nos dados da pesquisa.

Os respondentes D, A, B, E utilizaram a linguagem materna escrita e a abordagem geométrica. Os participantes F e H empregaram a abordagem algébrica e a geométrica. O estudante C utilizou apenas a abordagem geométrica, porém não respondeu a um dos itens questionados (cf. figura 21).

Figura 21: resposta do aluno C para o grupo 1 de respostas



Fonte: Elaboração do autor com base nos dados da ficha de atividade.

Com base nos registros coletados, identificamos dificuldades quanto ao uso do conhecimento geométrico. Isso pode ocorrer pelo fato de que a geometria é deixada para o final do ano letivo, restando pouco espaço para a compreensão dos conceitos geométricos, como destaca Breda *et al* (2011). Além disso, evidenciado também por Breda *et al* (2011), Castro (2012), Oliveira e Laudares (2015), os conhecimentos geométricos, aritméticos e algébricos são reduzidos a meras receitas de bolo e são trabalhados de forma independente e mecanizada. Observamos esse fato ao analisar a grade curricular do ensino médio, onde a geometria é trabalhada de forma separada das demais.

Nesse sentido, quando analisamos os resultados e comparamos com as propostas da BNCC, observamos que os estudantes, ao chegarem ao ensino médio, apresentam dificuldades quanto aos conteúdos abordados no ensino fundamental. Porém, é nessa etapa que deveríamos aprofundar o conhecimento desses conteúdos. Assim, salientamos a importância desse tipo de atividade, para representar um fenômeno matematicamente, pois, além de estar em consonância com a BNCC, possibilitou aos participantes a reflexão acerca das representações numérica, algébrica e geométrica.

5.3 Grupo 2 de respostas

Organizamos o grupo 2 de questões referentes ao novo centro da figura após o movimento. Observamos o uso acentuado da linguagem matemática e, em apenas único caso, também o uso da linguagem materna. É provável que isso se deva ao tipo de pergunta realizado nesse grupo (cf. quadro 28).

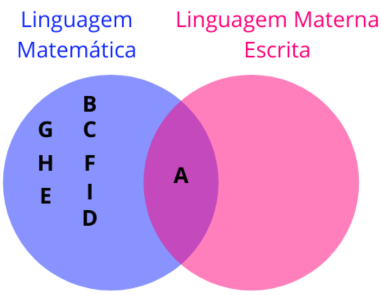
Quadro 28: grupo 2 de questões

Grupos	Elementos
Grupo 2	ii, vii e xii) Com esse movimento, qual é o par ordenado que representa a nova posição do centro da figura?

Fonte: Elaboração do autor.

Assim, analisamos o grupo 2 de respostas e organizamos os dados na figura 22. Notamos o uso expressivo da linguagem matemática pelos respondentes G, H, E, B, C, F, I, D.

Figura 22: dados do grupo 2 de respostas

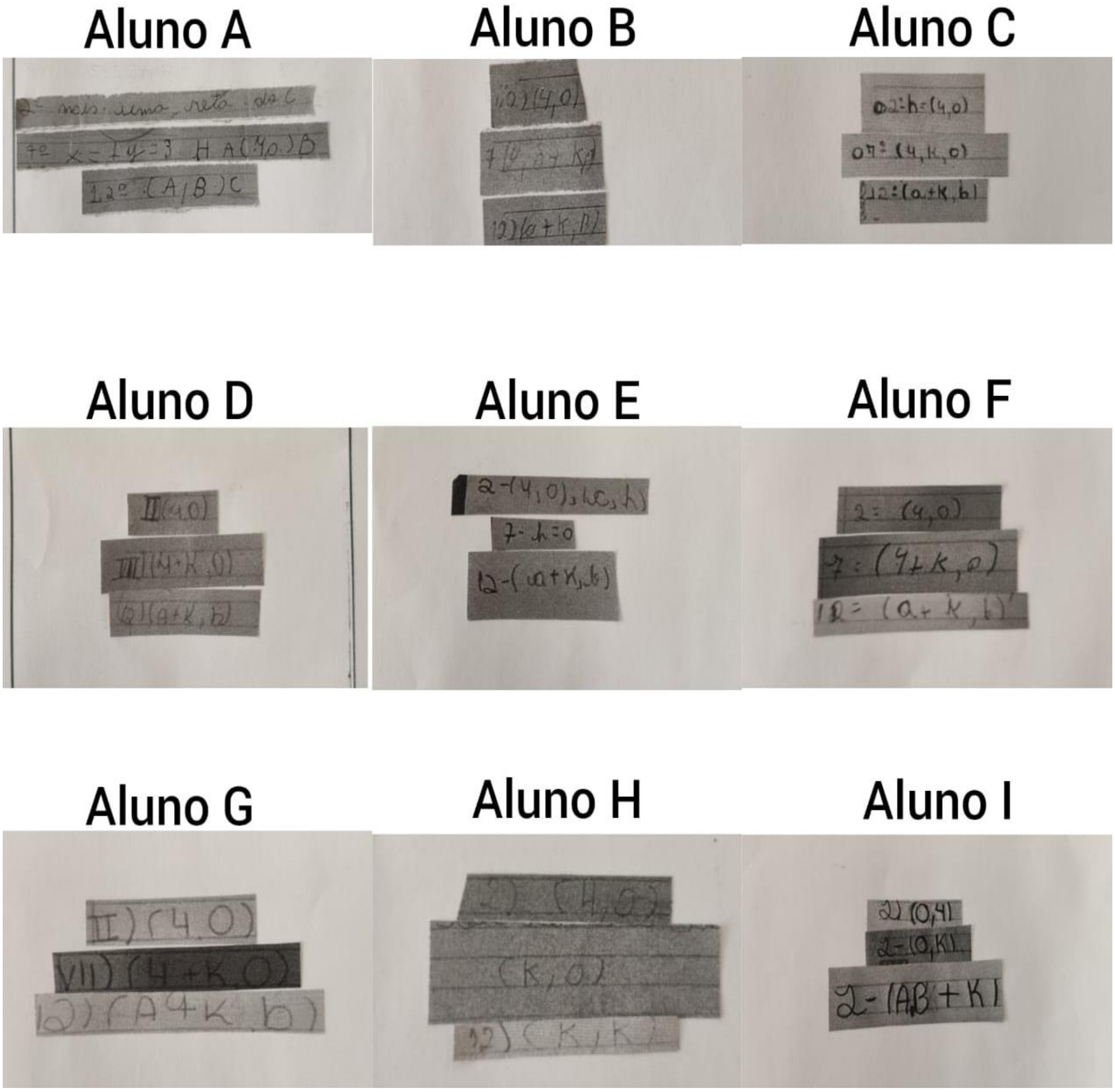


Fonte: Elaboração do autor no *software* Canvacom base nos dados da ficha de atividade.

Nesse contexto, era de grande importância o domínio da linguagem matemática, pois, para responder ao questionamento, era necessário o uso das representações aritméticas, geométricas e algébricas. Ademais, os estudantes precisavam realizar o movimento com o material concreto, para visualizar o fenômeno, refletir sobre o processo e construir o seu modelo.

Entre os resultados obtidos (cf. figura 23), os respondentes utilizaram a notação de par ordenado para resolver o problema. Podemos inferir que o participante A tentou utilizar o recurso da linguagem materna escrita para responder às questões.

Figura 23: grupo 2 de respostas

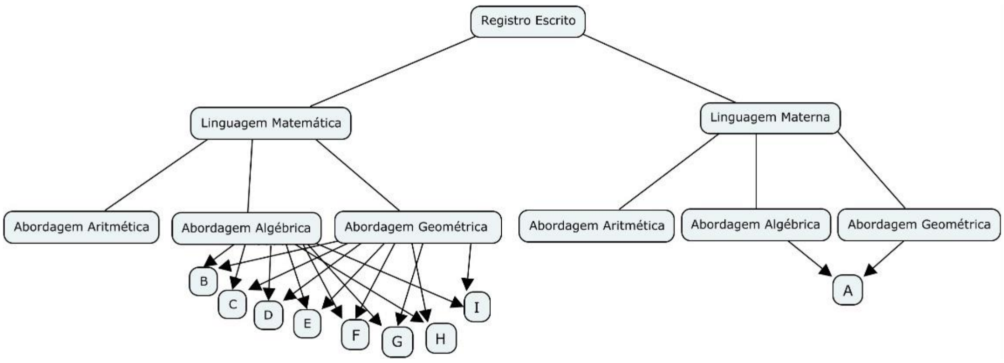


Fonte: Elaboração dos autores com base em dados da ficha de atividade.

Observamos o uso do par ordenado em todas as respostas. Entretanto, dois casos chamaram a atenção. O respondente A utilizou a língua materna escrita e a linguagem matemática concomitantemente, mas não foi possível compreender as respostas indicadas por ele. Um dos motivos que podem justificar o uso recorrente da língua materna escrita pelo respondente A é a sua dificuldade com a matemática, os cálculos ou, inclusive, a leitura. Como evidenciado por Sierpinska (2000), os estudantes fazem uso do registro mais conveniente ao seu entendimento.

No segundo caso, o participante I, desde as questões iniciais, fez a inversão das coordenadas nos pares ordenados. Aparentemente, ele utilizou nova construção para representá-los, confundiu-se com o movimento vertical ou, simplesmente, copiou o modelo desenvolvido para o movimento vertical. Por fim, as respostas dos alunos contribuíram com elementos para a criação do esquema na figura 24, sobre a abordagem de cada um deles.

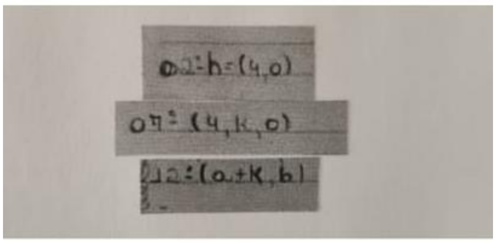
Figura 24: abordagem de cada estudante no grupo 2 de respostas



Fonte: Elaboração do autor no *software* CmapTools com base nos dados da pesquisa.

Os participantes B, C, D, E, F, G, H, I utilizaram o recurso visual geométrico, a abordagem algébrica e a geométrica para responder aos questionamentos, e somente A recorreu também à linguagem materna. Portanto, os respondentes utilizaram as três formas de pensamento, na concepção de Sierpinska (2000), para esboçar suas respostas. À vista disso, empregaram o recurso do plano cartesiano (sintético-geométrico), para visualizar a situação estudada, o analítico-aritmético e o analítico-estrutural, para descrevê-la (cf. figura 25).

Figura 25: resposta do aluno C para o grupo 2 de questões



Fonte: Elaboração do autor com base nos dados da ficha de atividade.

Ressaltamos que o estudo de posição e deslocamento no espaço entre formas e figuras planas e espaciais compõe uma das habilidades esperadas dos estudantes do ensino fundamental, enfatizada na BNCC, com a expectativa de aprofundamento no ensino médio. Assim, o participante já deveria ter domínio desse conteúdo.

5.4 Grupo 3 de respostas

Outro conjunto analisado é o grupo 3 de questões que tratam da descrição matemática do movimento horizontal (cf. quadro 29).

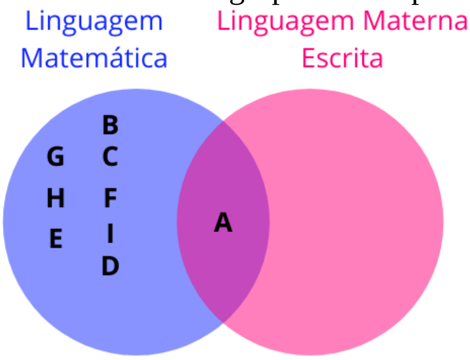
Quadro 29: grupo 3 de questões

Grupos	Elementos
Grupo 3	iii, viii e xiii) Como podemos escrever, matematicamente, esse movimento, isto é, de que maneira, utilizando a linguagem matemática, podemos representar esse movimento?

Fonte: Elaboração do autor.

Nessa situação, analisamos o grupo 3 de respostas e organizamos os resultados ilustrados na figura 26. Ressaltamos o uso acentuado da linguagem matemática e, em apenas único caso, o uso da linguagem materna escrita também.

Figura 26: dados do grupo 3 de respostas

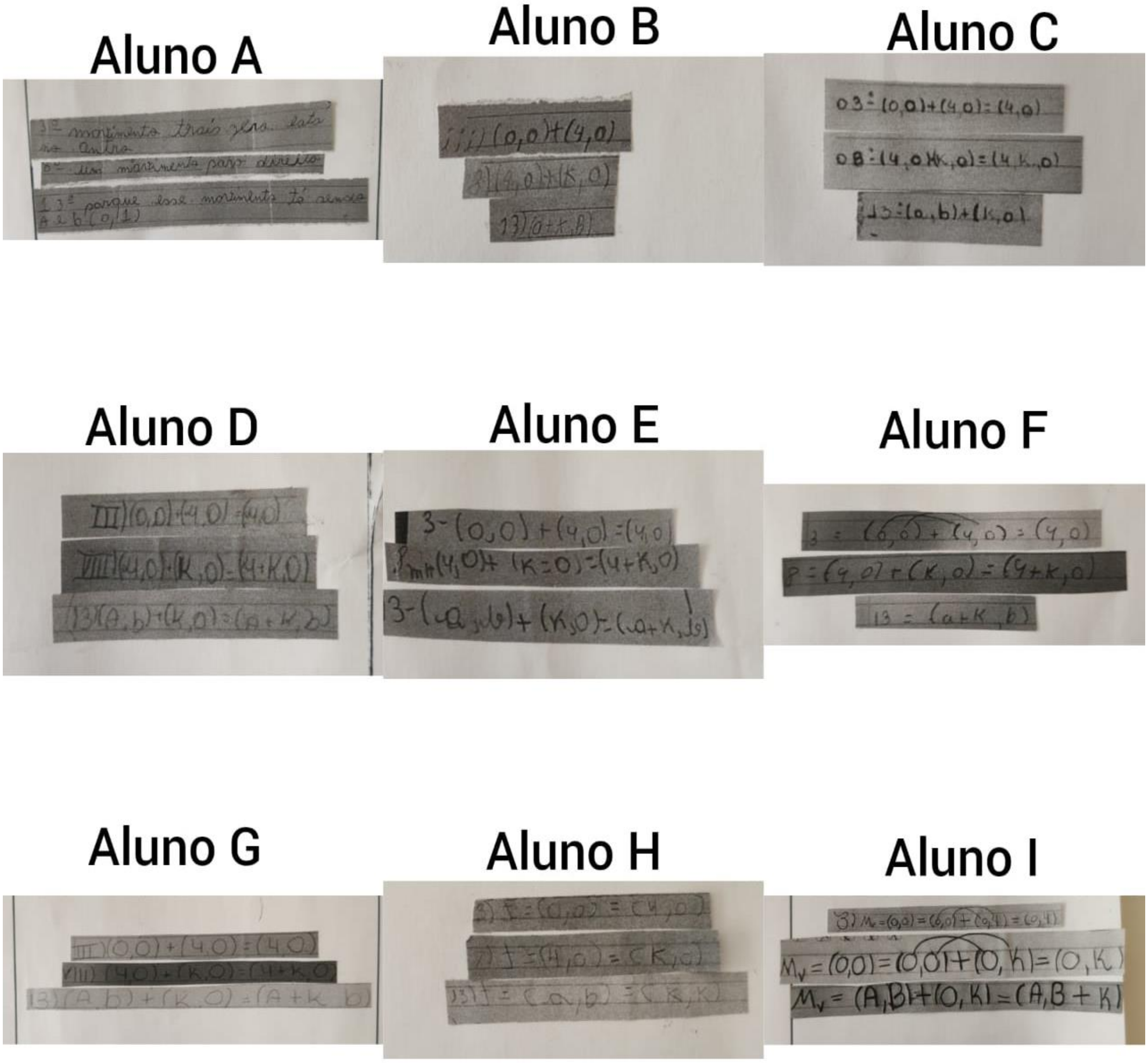


Fonte: Elaboração do autor no *software* Canva com base em dados da ficha de atividade.

Nesse conjunto de respostas, o participante A declarou possuir dificuldades quando estuda e, como indicado no questionário, mais uma vez, utilizou a linguagem materna escrita em uma situação em que era necessário descrever, matematicamente, o movimento. Além disso, os respondentes C e F foram os que mais recorreram ao uso da linguagem matemática para resolver a situação problema. É possível que eles tenham optado pelo registro mais conveniente ao seu entendimento, a língua materna escrita, como assevera Sierpinska (2000).

Entre os resultados obtidos (cf. figura 27), na maioria dos casos, o participante utilizou a adição de pares ordenados (centro da figura + deslocamento) conforme B, C, D, E, F, G, H, I.

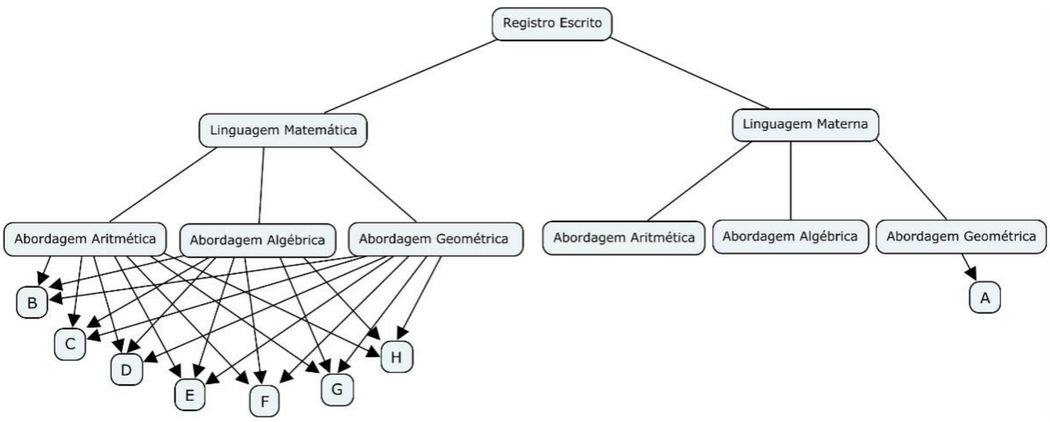
Figura 27: grupo 3 de respostas



Fonte: Elaboração do autor com base em dados da ficha de atividade.

O participante I pode ter feito nova construção para representar os pares ordenados ou se confundiu com um movimento vertical, ou copiou o modelo do movimento vertical. Em alguns casos, observamos a necessidade de aprimorar o registro escrito, como os respondentes C e H, em razão dos erros cometidos na adição das coordenadas. Essas respostas contribuíram com elementos para a criação do esquema na figura 28, com cada abordagem utilizada.

Figura 28: abordagem utilizada pelos participantes no grupo 3 de respostas

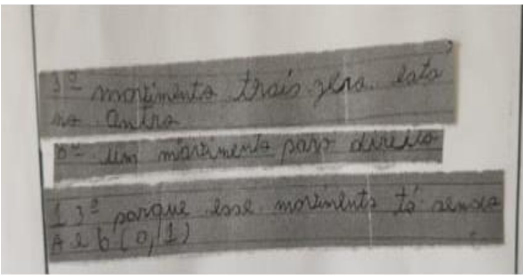


Fonte: Elaboração do autor no *software* CmapTools com base em dados da ficha de atividade.

Obtivemos dados similares ao grupo 2 de respostas, em vista de o grupo 3 ser o processo para encontrar as respostas obtidas no grupo 2. Os participantes B, C, D, E, F, G, H, I utilizaram as abordagens algébrica, aritmética e geométrica para responder aos questionamentos, e o respondente A recorreu também à linguagem materna. Portanto, para descrever o movimento, era necessário utilizar os três tipos de pensamento, sintético-geométrico, analítico-aritmético e analítico-estrutural (SIERPINSKA, 2000), para analisar, graficamente, a situação e descrevê-la matematicamente. Além disso, existe a substituição do tipo analítico-estrutural pelo analítico-aritmético, por ser um desafio aos alunos. Assim, eles usam outros modos de raciocínio intermediários entre o geométrico-sintético, o analítico-aritmético e o analítico-estrutural.

O participante A tentou fazer uso das coordenadas para responder à situação problema (cf. figura 29), mas, ainda sim, fez uso da língua materna escrita em grande parte das respostas.

Figura 29: resposta do participante A para o grupo 3 de questões



Fonte: Elaboração do autor com base nos dados da ficha de atividade.

Em alguns casos, notamos a necessidade de aprimorar o registro escrito tanto aritmético quanto algébrico. É tradição, nas escolas, o ensino da aritmética antes da álgebra, ou seja, a aprendizagem da aritmética na educação primária e a álgebra na educação secundária. Assim, ao realizar um trabalho de forma conjunta, o estudante pode entender as relações que perpassam as suas áreas. Caso isso não aconteça, o fracasso será atribuído a ambas (CASTRO, 2012).

Nesse sentido, enfatizamos a necessidade de estimular as competências matemáticas para trabalhar com modelos, desenvolver o pensamento algébrico, aritmético e geométrico, descrever situações e fenômenos, pois são habilidades ressaltadas na BNCC. Ademais, salientamos a importância de executar o movimento e não somente utilizar a matemática estática como evidenciado por Veloso (2012). Além disso, o ensino pautado na repetição, de forma mecanizada, não propicia a compreensão acerca da utilidade da matemática ao estudante (OLIVEIRA e LAUDARES, 2015). Isso é observado quando a maioria dos participantes afirma nos questionários que o uso da matemática é referente principalmente a cálculos numéricos, nesse momento esqueceram que durante a atividade construíram o seu próprio modelo matemático a representar o movimento de translação na horizontal, mas para isso tiveram que pensar matematicamente[14] para resolver o problema.

5.5 Grupo 4 de respostas

Outro conjunto analisado é o grupo 4 de questões que tratam da descrição matemática do movimento realizado em três situações (cf. quadro 30).

Quadro 30: grupo 4 de questões

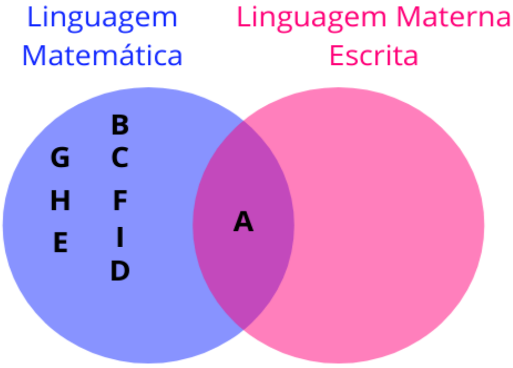
Grupos	Elementos
Grupo 4	iv) O que aconteceria se esse movimento fosse horizontal para a esquerda, a partir do ponto (0, 0)? Descreva, matematicamente, esse movimento com 4 unidades de deslocamento. ix) O que aconteceria se esse movimento fosse horizontal para a esquerda, a partir do ponto (4, 0)? Descreva, matematicamente, esse movimento com k unidades de deslocamento. xiv) O que aconteceria se esse movimento fosse horizontal para a esquerda, a partir do ponto (a, b)? Descreva, matematicamente, esse movimento com k unidades de deslocamento.

Fonte: Elaboração do autor.

Analisamos o grupo 4 de respostas e organizamos os seus resultados na figura 30. Notamos mais emprego da linguagem matemática e, em apenas único caso, o uso da linguagem materna também. Inferimos que isso é devido ao tipo de questionamento realizado, em que era esperada uma construção com uso da álgebra, da aritmética e da geometria.

[14] No sentido de entender o problema e descrevê-lo, de alguma forma, com ferramentas matemáticas.

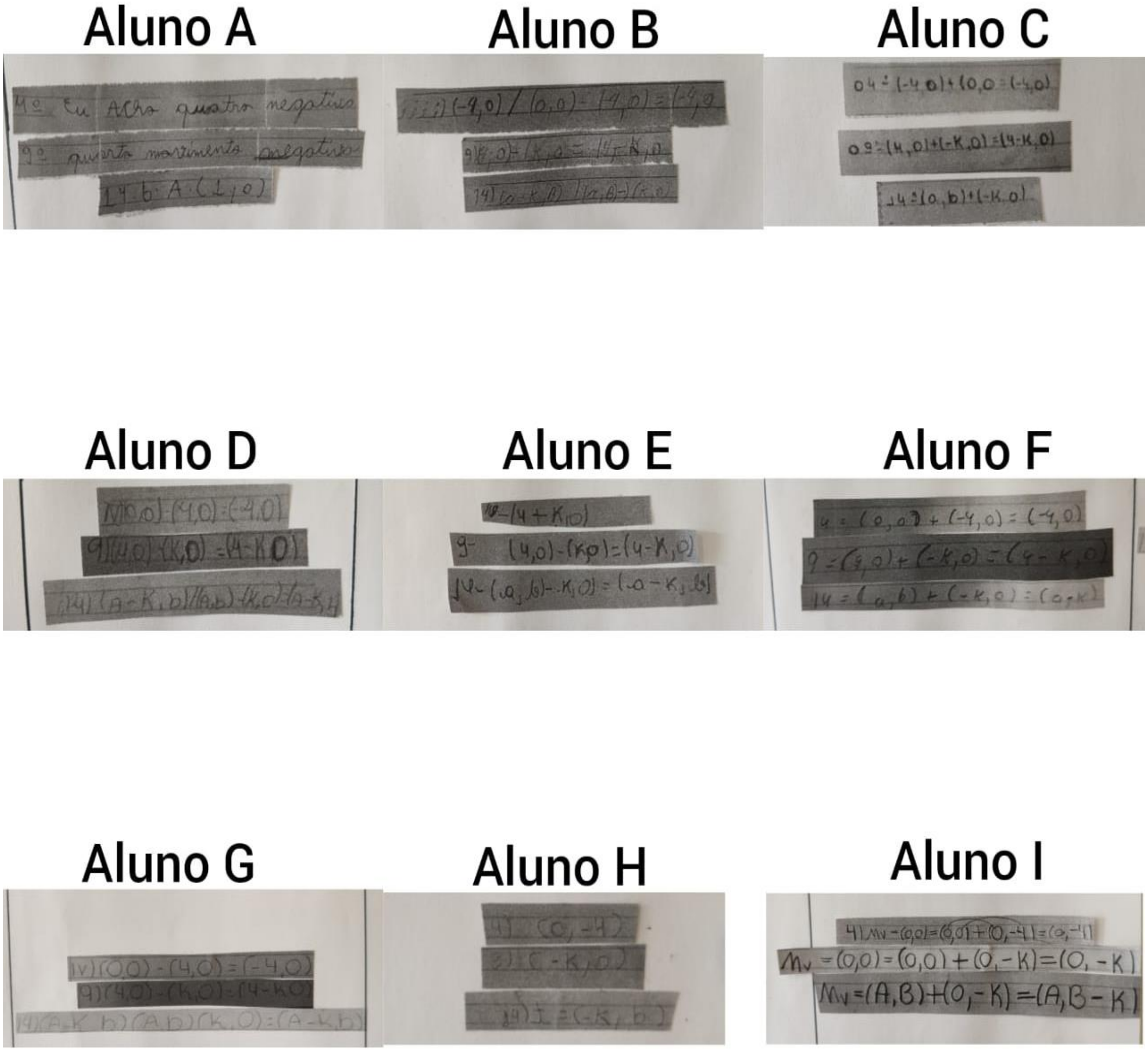
Figura 30: dados do grupo 4 de respostas



Fonte: Elaboração do autor no *software* Canva com base nos dados da ficha de atividade.

A linguagem matemática utilizada pelo respondente A não pode ser compreendida em relação ao que foi questionado. Ele recorreu ao uso da linguagem materna escrita quando era necessário descrever matematicamente. Mesmo que, nesse conjunto de questões, fosse necessário utilizar os três tipos de pensamentos, sintético-geométrico, analítico-aritmético e analítico-estrutural, algumas vezes, os estudantes optaram pelo registro mais conveniente no seu entendimento, como assevera Sierpinska (2000). Entre os resultados obtidos (cf. figura 31), na maioria dos casos, os participantes B, C, D, E, F, G, H, I utilizaram a adição de pares ordenados (centro + deslocamento) para as três situações.

Figura 31: grupo 4 de respostas

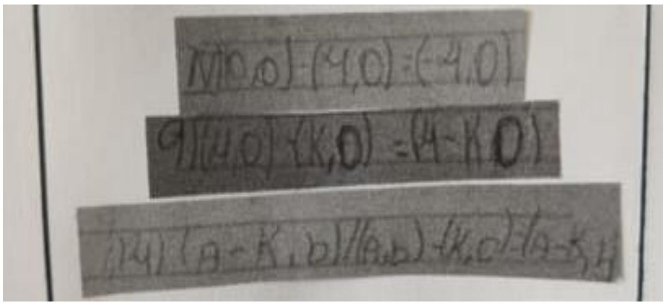


Fonte: Elaboração do autor com base nas respostas da atividade.

A participante I realizou a mesma construção dos grupos 2 e 3 com a inversão das coordenadas dos pares ordenados. Ademais, notamos a necessidade de aprimorar o registro escrito, no caso dos respondentes B e D, pela falta do uso da simbologia matemática durante as operações e pelo esquecimento dos parênteses e dos sinais de adição. Inferimos que o foco do ensino mecanizado em séries anteriores, com ênfase na memorização de fórmulas, sem ter o mínimo conhecimento sobre elas, gerou dificuldades na resolução de situações problemas (OLIVEIRA e LAUDARES, 2015).

Os respondentes utilizaram as três formas de pensamento, na concepção de Sierpinska (2000), para esboçar as respostas. À vista disso, empregaram os recursos com características geométricas (plano cartesiano e coordenadas) denominados de pensamento sintético-geométrico, o tipo analítico-aritmético em relações e operações com números e variáveis e o analítico-estrutural mediante o emprego de relações de propriedades e definições para descrever a situação estudada. Destacamos um exemplo disso na figura 32.

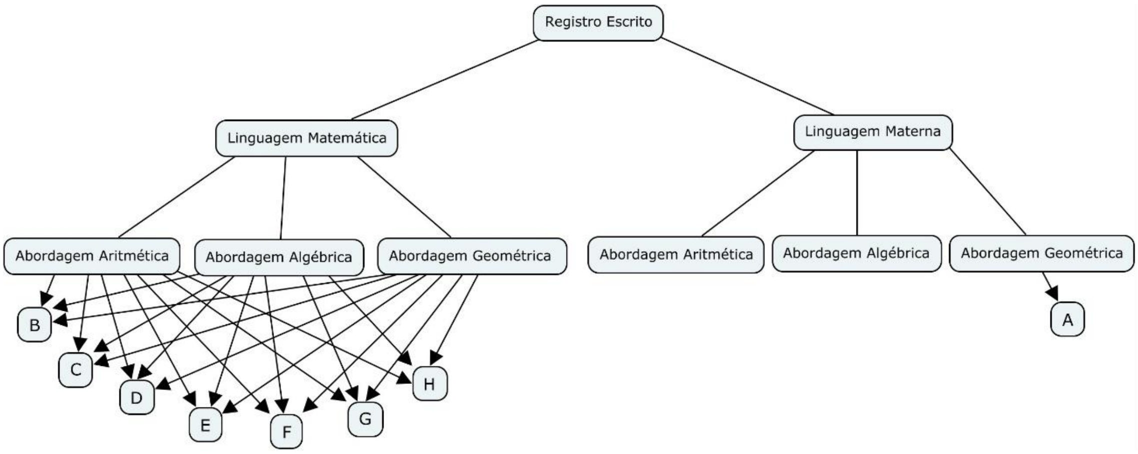
Figura 32: resposta do participante D para o grupo 4 de questões



Fonte: Elaboração do autor com base em dados da ficha de atividade.

Os estudantes que empregaram a álgebra, a aritmética e a geometria realizaram a adição do centro da figura à constante de deslocamento. As respostas dos alunos contribuíram com elementos para a criação do esquema na figura 33 com cada abordagem utilizada.

Figura 33: abordagem de cada participante no grupo 4 de respostas



Fonte: Elaboração do autor no *software* CmapTools com base nas respostas da ficha de atividade.

Os participantes B, C, D, E, F, G, H utilizaram as abordagens aritmética, algébrica e geométrica para responder aos questionamentos, exceto o respondente A, que, na maioria das vezes, empregou a linguagem materna escrita. Apesar de afirmarem dificuldades para fazer cálculos em matemática, os respondentes B, C, D, E, G tiveram bom desempenho na atividade.

A prática dos professores em sala de aula tem grande importância no desenvolvimento da linguagem matemática dos estudantes, mas também é influenciada por outros fatores, como a aprendizagem anterior ou a formação do profissional (MENEZES, 2000). Portanto, é de extrema importância que o professor repense a sua prática e proporcione estímulos para os alunos formularem, raciocinarem, argumentarem e desenvolverem estratégias de resolução para situações trabalhadas em sala de aula. Para isso, é preciso propiciar um ambiente onde se desenvolvam os três tipos de pensamentos, sintético-geométrico, analítico-aritmético, analítico-estrutural, conjuntamente aplicados à realidade para que se evidencie sua utilidade e complementaridade (SIERPINSKA, 2000; BRASIL, 2017).

5.6 Grupo 5 de respostas

Organizamos o grupo 5 de questões com a descrição, em língua materna, do movimento realizado, conforme o quadro 31.

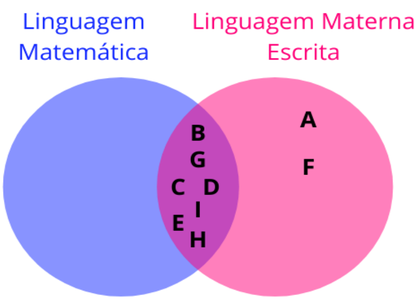
Quadro 31: grupo 5 de questões

Grupos	Elementos
Grupo 5	v, x e xv) Descreva, com palavras, na língua materna (português), o movimento horizontal que você realizou.

Fonte: Elaboração do autor.

Encontramos os resultados ilustrados na figura 34. Os respondentes B, C, D, E, G, H, I recorreram à linguagem matemática e à materna escrita, para responder aos questionamentos.

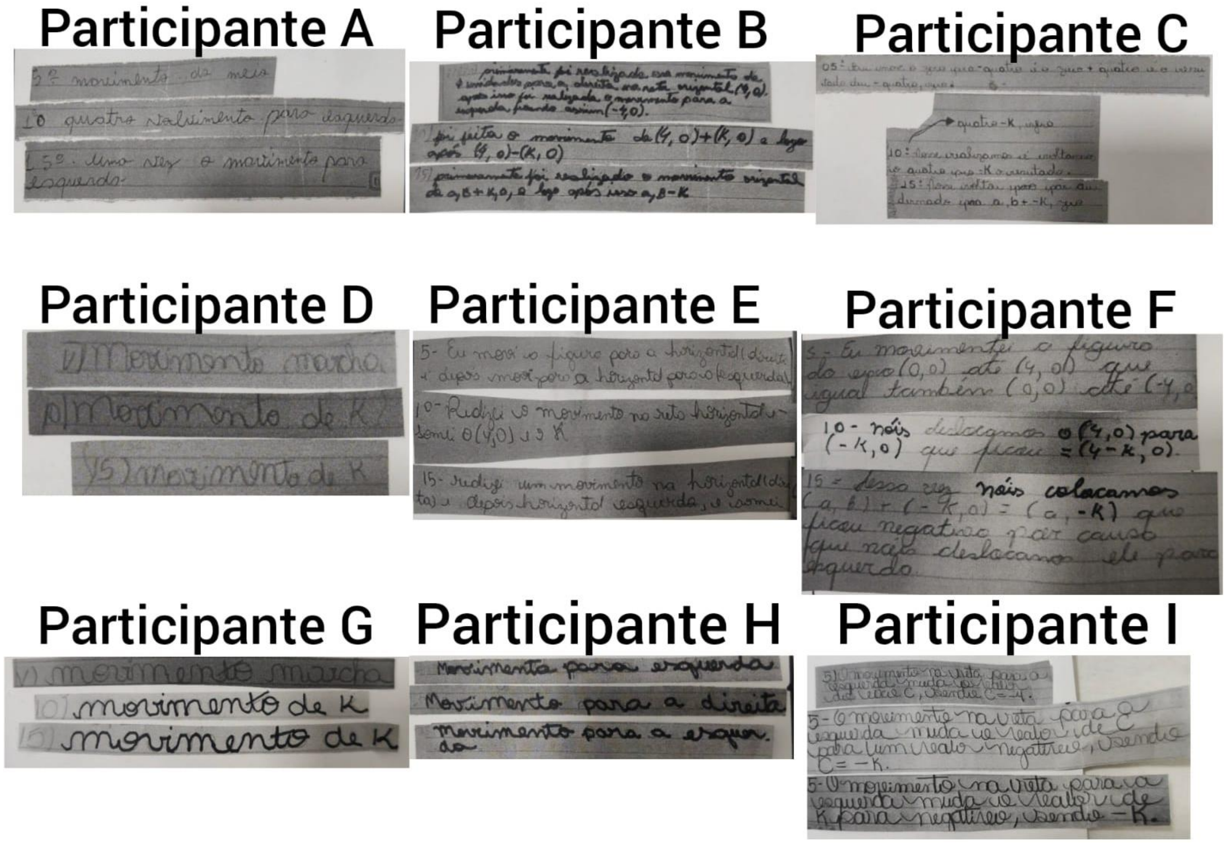
Figura 34: dados do grupo 5 de respostas



Fonte: Elaboração do autor no *software* Canva a partir dos resultados da ficha de atividade.

No grupo 5 de respostas, notamos mais o uso da linguagem matemática em conjunto à linguagem materna. Apesar de o tipo de questão solicitar o uso da língua materna para descrever o processo realizado, alguns participantes utilizaram também a linguagem materna para elucidar o problema. Os participantes B, C, D, E, G, H, I usaram esses dois recursos concomitantemente. É possível que se sentissem mais seguros também com o uso da linguagem matemática. Diferentemente, os sujeitos A e F recorreram somente à linguagem materna escrita. Dessa maneira, como evidenciado por Sierpinska (2000), os estudantes optam, durante a solução de uma situação problema, pelo registro mais conveniente ao seu entendimento. Entre os resultados obtidos, a maioria dos respondentes utilizaram a linguagem materna e a linguagem matemática escrita para explicar o processo durante a atividade, como ilustra a figura 35.

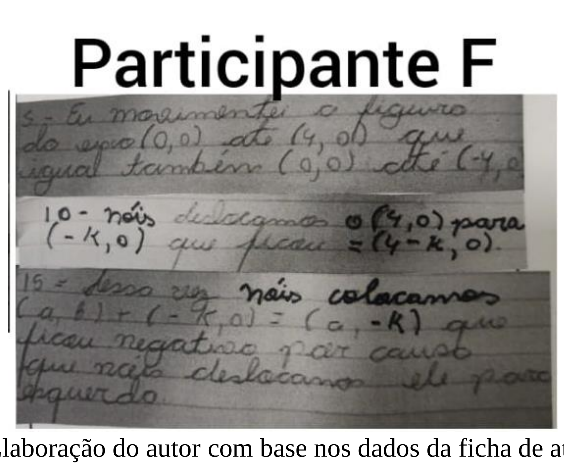
Figura 35: grupo 5 de respostas



Fonte: Elaboração dos autores com base em dados da pesquisa.

Na maioria dos casos, os participantes tentaram responder aos questionamentos com a direção esquerda ou direita e o sentido horizontal. Consideramos que alguns deles se sentiram mais seguros quanto ao uso da linguagem matemática escrita e, assim, explanaram os encaminhamentos para descrever o processo, conforme demonstra a figura 36.

Figura 36: resposta do participante F para o grupo 5 de questões



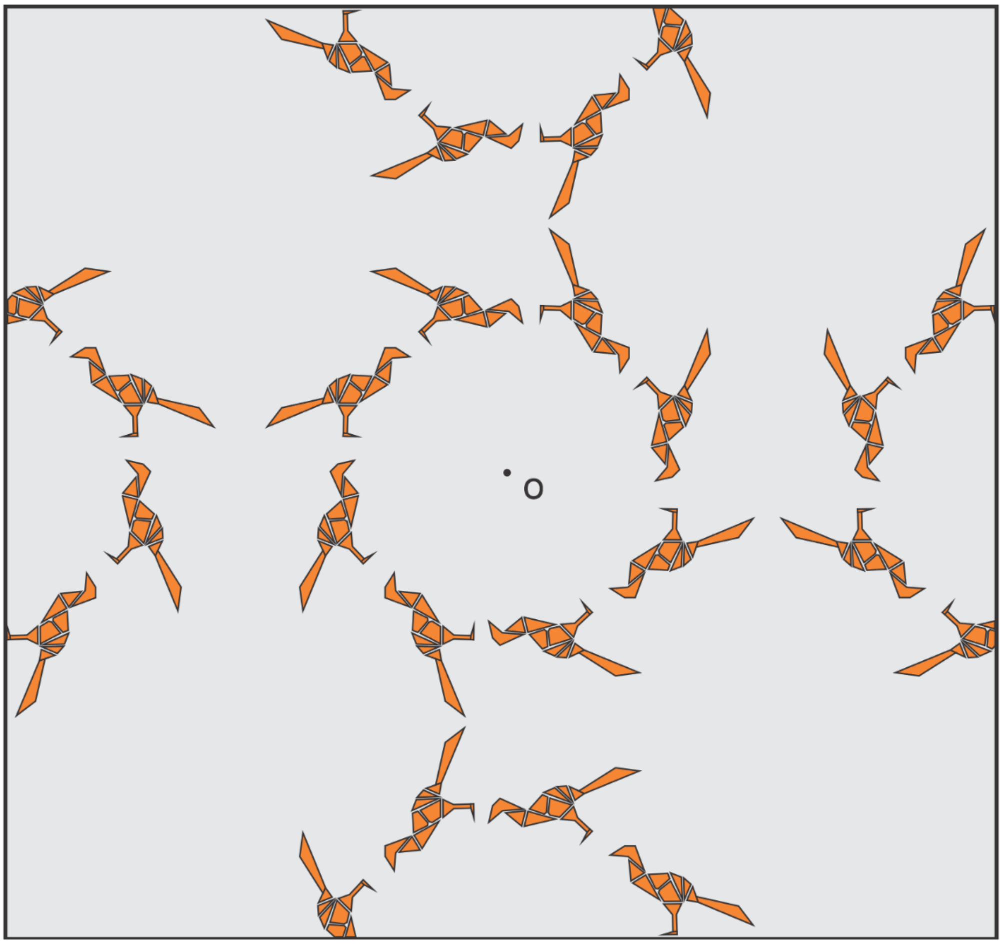
Fonte: Elaboração do autor com base nos dados da ficha de atividade.

A atividade desenvolvida proporciona benefícios, como o estímulo à capacidade de ler, escrever, criar, reinterpretar, formular e resolver situações problemas, além de possibilitar o desenvolvimento do conteúdo programático e permitir que o professor esteja mais atento quanto às dificuldades de cada aluno. Cometeríamos um erro se considerássemos algo diferente disso. Como assevera Biembengut e Hein (2004), quando o ensino tem princípios da educação tradicional, ao ler, entender, interpretar e construir um modelo, o aluno apresenta sérias dificuldades. O trabalho com a modelagem é essencial, pois mostra a aplicabilidade da matemática e possibilita aos estudantes o desenvolvimento do pensamento crítico, da capacidade de criar, ler e interpretar situações problemas (BIEMBENGUT e HEIN, 2004).

Ademais, é imprescindível estimular o trabalho com modelos no desenvolvimento do pensamento algébrico, do aritmético e do geométrico, para descrever situações e fenômenos e aperfeiçoar as habilidades de leitura e escrita em língua materna, competências destacadas na BNCC. Um dos motivos para o insucesso na aprendizagem da matemática é o trabalho disjunto das três áreas, álgebra, aritmética e geometria, e um fator importante no processo de superação dessa tendência é o trabalho do professor. Essas áreas estão tão relacionadas que, se os estudantes apresentarem dificuldades em aritmética, quanto às convenções que também se aplicam à álgebra, apresentarão também dificuldades nas convenções algébricas (Castro, 2012). Portanto, inferimos que essas dificuldades são reflexos de um ensino mecânico e sem produção de significado nas séries anteriores.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Infinitas simetrias de rotação e reflexão



Fonte: Elaboração do autor no *software* CorelDraw.

Os resultados obtidos e demonstrados ao longo deste trabalho podem incentivar o uso da matemática e enfatizar a sua utilidade para descrever fenômenos. A modelagem possibilita que os estudantes transformem situações da realidade em problemas matemáticos e resolvam-nos, propiciando a construção do conhecimento, em que são motivados a descobrir, criticar e questionar os dados encontrados.

Nesse sentido, elaboramos maneiras de tratar do tema, para favorecer o intermédio entre a linguagem formal e a linguagem não formal, na busca de caminhos em que o estudante seja sujeito ativo no processo, internalize os conhecimentos obtidos com base na experiência em sala de aula, desenvolva o encanto pela matemática e tenha motivação nos estudos. O intuito deste trabalho não é aprofundar o conceito de isometrias, mas, sim, trabalhar com algumas ideias intuitivas do movimento de translação e descrevê-lo matematicamente. Em momento algum, relacionamos a ideia de função, apesar de a linguagem utilizada para a construção do modelo ter proximidade com o conteúdo.

Empregamos a modelagem matemática não somente para contextualizar a oficina com finalidades de ensino, mas para observar os modelos e as ações de construção de modelos/representações utilizadas pelos participantes. Ademais, utilizamos o material concreto para observar o fenômeno estudado. Com essa proposta, ressaltamos a importância do conhecimento matemático na formação do indivíduo e sua funcionalidade no dia a dia, além de motivar a participação do estudante em sala de aula.

A modelagem matemática, acompanhada do uso da álgebra, da geometria e da aritmética, contribui para o ensino das isometrias com uma abordagem alternativa. As isometrias estão presentes no cotidiano e podem ser observadas na natureza e na construção de padrões artísticos, assim como na física, nas transformações que preservam o volume, e na matemática, nas transformações que preservam distâncias entre dois pontos e ângulos.

Com a finalidade de abordar a formalidade e a contextualização da didática do conteúdo de isometrias, desenvolvemos duas oficinas com as ideias da modelagem matemática, com o suporte do material concreto e da linguagem matemática para a modelação do movimento de translação. Os objetivos das oficinas foram: possibilitar o ensino conjunto da álgebra, da geometria e da aritmética; estimular o estudante a desenvolver o pensamento matemático e a linguagem matemática por meio oral e escrito.

As oficinas, desenvolvidas em duas fases, possibilitaram a coleta de dados por meio da ficha de atividade. Na primeira delas, o teste piloto verificou as potencialidades do instrumento. A segunda oficina foi realizada após a reformulação da atividade, com base nos resultados do teste piloto. Desse modo, este trabalho contém traços da pesquisa-ação, pois aplicamos as atividades em primeiro momento, no teste piloto, e analisamos os dados; posteriormente, na oficina 2, reestruturamos o material e aplicamos as atividades novamente, para obter outros dados. A metodologia escolhida tem fundamentos na etnografia e é relativa à coleta de dados em campo referentes aos modelos matemáticos produzidos pelos estudantes.

Realizamos o teste piloto presencialmente, com quatorze alunos do 1° ano do ensino médio de uma escola pública de Goiânia-Go. Na análise da atividade desenvolvida pelos estudantes, encontramos as seguintes categorias: modelo matemático adequado, modelo matemático inadequado e modelo matemático parcialmente adequado. Além disso, identificamos a necessidade de sintetizar o conteúdo da oficina e, assim, ativemo-nos ao movimento de translação horizontal e vertical.

As dificuldades mais comuns foram: o uso das operações aritméticas e algébricas, a escolha da unidade de deslocamento para a horizontal e os erros na ordenação da reta numérica. Muitos desses conceitos começam a ser explorados no ensino fundamental, e, mesmo assim, observamos as dificuldades dos estudantes no ensino médio. Comprova-se a necessidade de realizar atividades de forma interdisciplinar nas séries iniciais da educação básica, para que os conhecimentos geométricos, aritméticos e algébricos não sejam reduzidos a meras receitas. Como corrobora Castro (2012), existe insuficiência quanto aos conhecimentos algébricos e aritméticos adquiridos na educação básica. Deparamos com esse fato na resolução das operações, que, em maioria, estavam incorretas.

Inferimos que uma das causas do insucesso na aprendizagem da matemática é o trabalho disjunto entre a álgebra, a aritmética e a geometria. Nesse caso, um fator importante nesse processo é o trabalho do professor. Entretanto, precisamos reconhecer que esses profissionais têm um currículo a cumprir, resultados positivos a alcançar, avaliações de larga escala, excesso de horas trabalhadas, salas lotadas e falta de materiais nas instituições. Além disso, durante o período de aulas *online*, boa parcela dos estudantes não participam pela falta de internet e aparelho próprio para acesso, e os que participam estão desmotivados.

A oficina 2 foi realizada na mesma escola do teste piloto, mas com outros sujeitos, por meio do ensino remoto. Foram nove participantes do 1° ano do ensino médio. Com base nas análises, dividimos a amostra (as resoluções) em cinco características principais: abordagem geométrica, abordagem aritmética, abordagem algébrica, linguagem materna escrita e linguagem matemática.

Quando comparamos os resultados com as propostas da BNCC, observamos que os estudantes apresentam dificuldades em conteúdos antes abordados no ensino fundamental. Portanto, é no ensino médio que deveríamos aprofundar essas questões, mas em razão dessas dificuldades, temos um obstáculo à frente. Assim, salientamos a importância do desenvolvimento desse tipo de atividade que explore, de forma concatenada, os conhecimentos algébricos, aritméticos e geométricos, para amenizar as dificuldades futuras em relação a esses conteúdos. Além disso, essa prática está em consonância com as habilidades e as competências estabelecidas na BNCC. Salientamos também a importância de executar movimentos com as figuras e não somente utilizá-las de maneira estática.

Nos dados coletados, os modelos matemáticos produzidos pelos estudantes do 1° ano do ensino médio, os participantes utilizaram da álgebra, da aritmética e da geometria para descrever matematicamente a situação a analisada, o movimento de translação. Apesar da atividade requerer um registro matemático escrito, em algumas situações, nos deparamos também com o uso da linguagem materna escrita para resolver o problema. Portanto, esses participantes utilizaram da linguagem mais conveniente do seu entendimento (SIERPINSKA, 2000).

Notamos o uso intermediário entre os três tipos de pensamento: sintético-geométrico, analítico-aritmético e analítico-estrutural (SIERPINSKA, 2000). Nas situações analisadas, os estudantes fizeram uso de recursos, como coordenadas, plano cartesiano, relações e operações com números e letras, para resolver a situação problema.

Nessa situação, os estudantes foram instruídos a descobrir, questionar, criticar as suas conclusões e, assim, construir o seu conhecimento fundamentado e com significado. Com isso, tiveram a oportunidade de pensar e entender a importância da matemática a sua volta, foram capacitados a executar a leitura de mundo e investigar outras ciências pela modelagem.

Este tipo de pesquisa pode abrir portas para metodologias alternativas e possibilita extrapolar o ensino tradicional com o uso comum do quadro e do giz, pois propõe analisar, cientificamente, uma situação em que seja possível substituir a visão ingênua da realidade mediante a perspectiva crítica e abrangente que facilite e racionalize o pensamento, que possibilite agir e transformar o contexto (BASSANEZI, 2009).

Ressaltamos a necessidade de mais pesquisas na área de modelagem matemática e isometrias e trabalhos que desenvolvam a aritmética, a álgebra e a geometria de forma conjunta. Para a construção do material da oficina, foi realizado um estudo, para chegar-se ao modelo representativo do movimento de translação. Como foi exposto pelos autores Biembengut e Hein (2004), no desenvolvimento da modelagem, é necessária, por parte do professor, boa base acerca do tema, ou seja, é preciso disponibilidade de tempo para estudar a temática, além de ter bom planejamento para o seu desenvolvimento.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, Irene de. **Metodologia da matemática**. 2 ed. Rio de Janeiro: Conquista, 1954.

ALVARENGA, Karly; BRASIL, Débora Barbosa Moura. Análise de algumas compreensões algébricas de estudantes da educação superior. In: NEVES, Regina da Silva Pina; DÖRR, Raquel Carneiro. **Ensino de matemática**. Jundiaí: Paco Editorial, 2020.

ALVARENGA, Karly; BRASIL, Débora Barbosa Moura; GUADAGNINI, Míriam Rocio. Erros algébricos insistentes: uma análise de 1910 e outra de 2019. In: BRAGA, Dalvirene; NOLETO, Carine; NOGUEIRA, Cleia. **Investigações em ensino de matemática**. Jundiaí: Paco Editorial. 2020.

ANDRÉ, Marli. Pesquisa em educação: buscando rigor e qualidade. In: **Cadernos de pesquisa**, n. 113, p. 51-64, 2001.

ANDRÉ, Marli. **Etnografia da prática escolar**. São Paulo: Papirus, 2013.

ARAÚJO, Jussara Loiola. Uma abordagem sociocrítica da modelagem matemática: a perspectiva da educação matemática crítica. In: **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 2, n. 2, 2009. p. 55-68.

ARAÚJO, Jussara de Loiola. Uma abordagem sócio-crítica da modelagem matemática: a perspectiva da educação matemática crítica. **Alexandria Revista de Educação em Ciências e Tecnologia**, Florianópolis, v. 2, n. 2, p. 55-68, jul. 2009.

ARAÚJO, Jussara de Loiola. Brazilian research on modeling in mathematics education. **ZDM The International Journal on Mathematics Education**, Eggenstein, Leopoldshafen, v. 43, n. 3-4, p. 337-348, Jun. 2010.

AUSUBEL, DAVID PAUL. **A aprendizagem significativa**: a teoria de David Ausubel. São Paulo: Moraes, 1982.

BACALHAU, Fernando Marques. **Isometrias do plano e simetria**. Dissertação de mestrado profissional. Faculdade de Ciências e Departamento de Matemática, Universidade de Lisboa. Lisboa, 2012.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem na educação matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24, 2001, Caxambu. **Anais eletrônicos**. Rio de Janeiro: ANPED, 2001. p. 1-30. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Artigo_Barbosa.pdf. Acesso em: 9 de jun. de 2020.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem e modelos matemáticos na educação científica. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, Florianópolis, v. 2, n. 2, p. 69-85, jul. 2009. ISSN 1982-5153. Disponível em:

https://periodicos.ufsc.br/index.php/alexandria/article/view/37949/28977. Acesso em: 15 ago. 2020.

BARBOSA, Jonei Cerqueira; CALDEIRA, Ademir Donizeti; ARAÚJO, Jussara de Loiola. Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais. **Sociedade Brasileira de Educação Matemática**. Recife, v. 3, 2007.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Modelagem matemática**: um método científico ou uma estratégia de ensino aprendizagem. São Paulo: Contexto. 2009.

BASTOS, Rosa. Notas sobre o ensino da geometria. In: **Quadrante**. maio/junho, 2006.

BIEMBENGUT, Maria Salett; HEIN, Nelson. Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. In: **Educación matemática**, v. 16, n. 2, p. 105-125, ago. 2004.

BRAGA, Adriana. **Técnica etnográfica aplicada à comunicação online**: uma discussão metodológica. UNIrevista, vol. 1, n° 3, julho 2006.

BRASIL, Mistério da Educação. **Base nacional comum curricular**. Brasília: MEC, Secretaria de Educação Básica, 2017.

BREDA, Ana et al. **Geometria e medida no ensino básico**. 2011. Disponível em: https://repositorio.ipv.pt/bitstream/10400.19/1150/4/070_Brochura_Geometria.pdf. Acesso em: 23 de ago. de 2020

BURAK, Dionísio. A modelagem matemática na perspectiva da educação matemática. **Educação Matemática Sem Fronteiras: Pesquisas em Educação Matemática**, Chapecó, v. 1, n. 1, p. 96-111, 2019.

CASTRO, Encarnación. Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. In: **Investigación en Educación Matemática**, 16, 2012, Granada, Anais. Jaén: SEIEM, 2012. p. 75-94.

FARMER, David W. **Grupos e simetria**: um guia para descobrir a matemática. Trad. Cristina Isabel Januário. Portugal: Gradiva, 1996.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da matemática. In: **Boletim da SBEM-SP**, v. 4, n. 7, 1990.

GHEDIN, Evandro; FRANCO, Maria Amélia do Rosário Santoro. **Questões de método na construção da pesquisa em educação**. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

HINE, Christine. **Virtual Ethnography**. London: SAGE Publications, 2000.

KOZINETS, Robert. **Netnography**: Doing Ethnographic Research Online. London: Sage, 2010.

LIMA, Elon Lages. **Coordenadas no plano***:* geometria analítica, vetores e transformações geométricas. Rio de Janeiro: SBM, 1992.

LINS, Rômulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. São Paulo: Papirus, 2000.

MACHADO, Nílson José. **Matemática e realidade**. 7. ed. São Paulo: Cortez, 2009.

MARQUES, Ronualdo. A ressignificação da educação e o processo de ensino e aprendizagem no contexto de pandemia da COVID-19. In: **Boletim de Conjuntura (BOCA)**, v. 3, n. 7. 2020. p. 31-46,

MENEZES, Luís. Matemática, linguagem e comunicação. In: **Actas do ProfMat 99**. 2000. p. 71-81.

NACARATO, Adair Mendes; LOPES, Celi Espasandin. **Escritas e leituras na educação matemática**. Autêntica, 2018.

OLIVEIRA, Juliana Barcelos; SANTANA, Anderson Messias; REALI, Graciela Aluízio. O uso de *tablets* e o *geogebra* como ferramentas auxiliares no ensino da matemática. In: **Atas da Conferencia Latinoamericana de GeoGebra.** Uruguai. 2012. p. 405-413.

OLIVEIRA, Silvânia Cordeiro; LAUDARES, João Bosco. Pensamento algébrico: uma relação entre álgebra, aritmética e geometria. In: **Encontro Mineira de Educação Matemática**, 7. Anais EMEM, São João Del Rei, 2015, p. 1-10.

PAVANELLO, Regina Maria. **O abandono do ensino de Geometria**: uma visão histórica. (Dissertação em Educação), Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1989.

POLIVANOV, Beatriz. Etnografia virtual, netnografia ou apenas etnografia? Implicações dos conceitos. **Revista Esferas**, v. 2, n. 3, p. 61-71, 2013.

PONTE, João Pedro. Números e álgebra no currículo escolar. In: VALE, Isabel; PIMENTEL, Teresa; BARBOSA, Ana et al. (org.) **Números e álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores**. Lisboa: SEM-SPCE, 2006. p. 5-27.

RÊGO, Rômulo Marinho; RÊGO, Rogéria Gaudêncio. Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de matemática. In: LORENZATO, Sérgio (org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2006. p. 39-56.

RIBEIRO, Marco Antônio da Silva; JAHN, Ana Paula. **Transformações geométricas planas**: um estudo experimental e dinâmico. Anais. São Paulo: IME-USP, 2015.

ROCHA, André Luiz; PINTO, Márcia Maria Fusaro. A modelagem matemática na educação como recurso na formação crítica dos alunos no Ensino Fundamental. **Revemop**, Ouro Preto, v. 2, p. 1-28, 2020.

SANTOS, Gislaina Rayana Freitas. Ensino de matemática: Concepções sobre o conhecimento matemático e a ressignificação do método de ensino em tempos de pandemia. **Culturas & Fronteiras**, v. 2, n. 2, p. 40-57, 2020.

SANTOS, Daniela Braga; PEREIRA, Pedro Henrique Máximo. PAISAGEM, CENTRALIDADE E SUSTENTABILIDADE: O CASO DA REGIÃO NOROESTE DE GOIÂNIA. **I Seminário da Paisagem Urbana e Sustentabilidade**, p. 202.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem na educação matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24, 2001, Caxambu. **Anais eletrônicos**. Rio de Janeiro: ANPED, 2001. p. 1-30. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Artigo_Barbosa.pdf. Acesso em: 9 de jun. de 2020.

SIERPINSKA, Anna. On some aspects of students' thinking in linear algebra. In DORIER J.-L. (ed.), On The Teaching of Linear Algebra in Question, **On the teaching of linear algebra**. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000. p. 209-246.

SILVA, Ana Gisnayane Sousa; SOUSA, Francisco Jucivânio Félix de; MEDEIROS, Jarles Lopes de. O ensino da matemática: aspectos históricos. In: **Research, Society and Development**, v. 9, n. 8, 2020.

VELOSO, Eduardo. **Simetria e transformações geométricas**. Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 2012.

VILELAS, José. **Investigação**: o processo de construção do conhecimento. 2. ed. Lisboa: Sílabo, 2017.

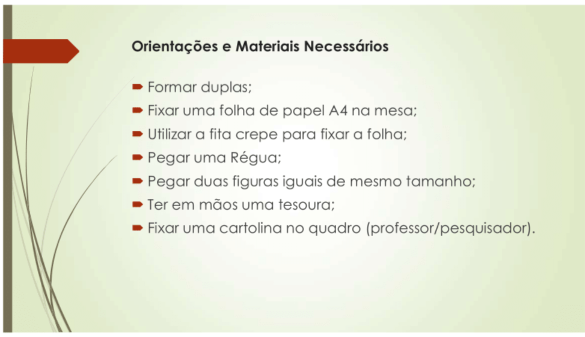
VILLA-OCHOA, Jhony Alexánder. La modelación como proceso en el aula de matemáticas: un marco de referencia y un ejemplo. In: **Tecno-Lógicas**, n. 559, v. 19, dez. 2007. p. 63-85.

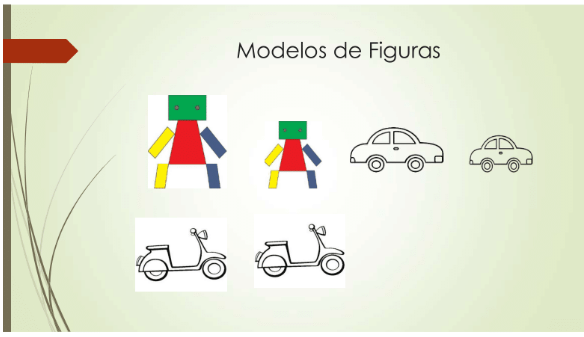
TAMBARUSSI, Carla Melli; KLÜBER, Tiago Emanuel. Focos da pesquisa stricto sensu em Modelagem Matemática na Educação Matemática brasileira: considerações e reflexões. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v. 16, n. 1, p. 209-225, 2014.

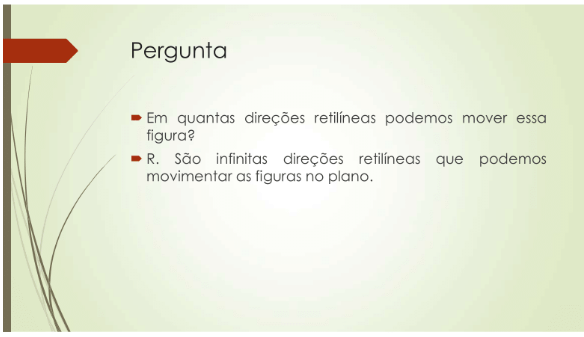
TURRIONI, Ana Maria Silveira; PEREZ, Geraldo. Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de matemática. In: LORENZATO, S. (org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2012. p. 39-56.

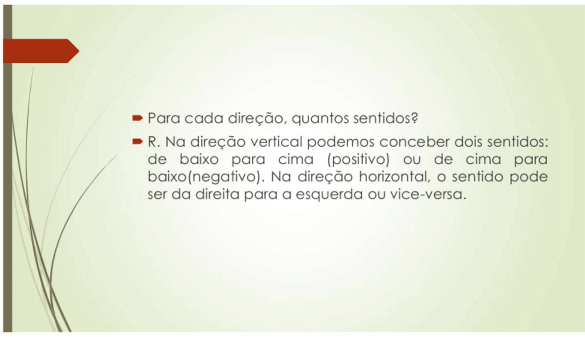
APÊNDICE A

SLIDES UTILIZADOS NO TESTE PILOTO









Curiosidade

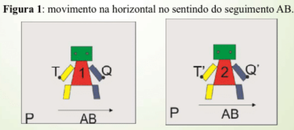
- Existe um infinidade de pontos na figura e no plano. Quando imagino que esta é formada por infinitos pontos, o mesmo acontece com o plano, assim também existem infinitas retas e circunferências contidas no mesmo espaço.
- Um exemplo dessa infinidade é a imagem na TV. Vamos imaginar que a tela da TV seja um caderno quadriculado, quando a imagem da TV é formada, cada quadradinho exibe uma cor diferente, formando uma espécie de mosaico e cada imagem possui uma infinidade. Cada um deles recebe o nome de pixels, quanto mais pixels, melhor é a imagem e menor será o tamanho de cada quadradinho.

Faça o que se pede

- Fazer dois pontos quaisquer na figura;
- Desloque a figura sobre o plano para a direita, em linha reta, o que você pode observar?
- R. Observa-se que todos os pontos são deslocados, no mesmo sentido, um segmento de reta $\overrightarrow{AB}$ no plano P.
- Quando realizo algum movimento retilíneo com a figura, houve alteração no seu tamanho?
- R. Não, as dimensões continuam sendo as mesmas.

- Ao movermos sobre a folha em linha reta, deslocamos com sentido e direção, dessa forma, todos os seus pontos seguem esse mesmo sentido e direção. O mesmo acontece se for um boneco conforme (fig. 1), designamos este somente pelo par de vértices (T,P), ao realizarmos novamente o movimento no sentido do segmento $\overrightarrow{AB}$ está será deslocada para o ponto (T', P'), ao movimentarmos a novamente, obtemos os pontos (T'', P'').

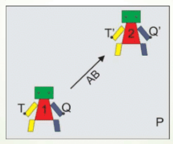
Figura 1: movimento na horizontal no sentindo do seguimento AB.



Outra possibilidade

- Outra possibilidade de movimento da figura é na diagonal, conforme (fig. 2).

Figura 2: exemplo do movimento do boneco na diagonal



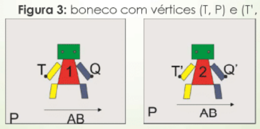
Segunda parte, alguns questionamentos.

- Ao deslocarmos a figura sobre o plano, alteramos o seu tamanho ou a sua forma?
- A sua cor foi alterada?
- Os ângulos foram alterados?
- A resposta para todas essas perguntas obviamente é não, porém pode ser apresentada no quadro todos os movimentos realizados, auxiliando na concretização das respostas sobre os questionamentos.

Faça o que se pede

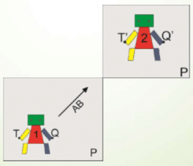
- Fazer uma reta no plano;
- Desenhar dois pontos quaisquer sobre a figura;
- Movimentar a figura sobre essa reta;
- Ao movimentarmos a figura conforme (fig. 3) sobre a reta, a distância entre os pontos $d(T,Q)$ é diferente da $d(T',Q')$? Por quê?

Figura 3: boneco com vértices (T, P) e (T', P').



- A resposta esperada é não, a figura continua com o mesmo tamanho e forma, como verificado anteriormente.
- Faça outros dois pontos na figura;
- Movimentar a figura conforme (fig. 4) sobre a reta $\overrightarrow{AB}$, a distância entre os pontos $d(T,Q)$ é diferente da $d(T',Q')$?
- R. Independentemente dos pontos escolhidos, a distância não altera após o movimento retilíneo.

Figura 4: movimento na diagonal



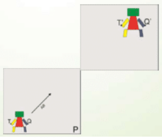
Curiosidade 2

- Sabemos que a menor distância entre dois pontos é uma reta, entretanto podemos comentar sobre a existência de várias formas de conectar dois pontos em um plano, obviamente as distâncias serão maiores que o segmento retilíneo que liga esses dois pontos.

Terceira Parte

- Entregar duas figuras iguais, mas de tamanho diferentes para todos os grupos.
- Fazer dois pontos quaisquer sobre a figura e no mesmo local da outra figura;
- Realizar o movimento com uma figura, vamos imaginar que ela sofreu uma ampliação durante o deslocamento.
- Ao movimentá-las conforme (fig. 5), o boneco sofreu uma ampliação durante o movimento retilíneo.

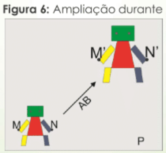
Figura 5: Movimento na diagonal



Questionamentos

- Após o movimento, a distância entre os pontos $d(M,N)$ e $d(M',N')$ continua sendo a mesma? Por quê?
- Se denominarmos por $\overline{MN}$ o segmento dos pontos do boneco 1 e por $\overline{M'N'}$ do boneco 2 qual deles é maior? Por quê?
- Utilizando a simbologia matemática, como representamos que um deles é maior?

Figura 6: Ampliação durante o movimento.



Respostas Esperadas

- Questionamento 1
- Esperamos a seguinte resposta, a distância $d(T,Q) \neq d(T',Q')$. Com a notação matemática representaríamos da seguinte forma: o segmento $d(T,Q) < d(T',Q')$, pelo simples fato do boneco 2 ser uma figura ampliada do boneco 1, além de possuir outras dimensões.
- Questionamento 2
- Sem a referência do plano cartesiano enfrentamos dificuldade para isso. Com o uso do plano cartesiano seria possível determinar coordenadas e assim identificar os valores da abscissa (x) e ordenada (y) dos pontos.

- Agora com as duas figuras sobre o plano;
- É possível identificar a posição dos pontos matematicamente?
- Como seria feito isso no plano fixo a mesa?

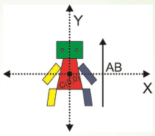
Agora com o papel Quadriculado fixo na mesa

- Qual a diferença do papel branco com o plano cartesiano (papel quadriculado)?
- A resposta esperada é de que antes não havia nenhuma referência, diferente de quando temos papel quadriculado.
- Agora é possível determinar as coordenadas dos pontos?
- Agora é possível fazer o plano cartesiano e assim determinar a abscissa (x) e ordenada (y) do ponto.

Agora

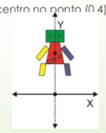
- Marque o ponto central dessa figura;
- Realizar o movimento retilíneo da figura na vertical, com uma constante (unidade de deslocamento) de 4 unidades, em relação ao centro da figura, ao longo da reta $x = 0$ e descreveremos matemática o movimento realizado.
- Vamos colocar o centro da nossa figura, o boneco, no ponto (0,0), conforme (fig. 7), para realizarmos o movimento retilíneo na vertical para cima no sentido da reta (AB), com uma constante de deslocamento de 4 unidades.
- Centro no ponto (0,0);
- Movimento retilíneo na vertical para cima, no sentido da reta $\overrightarrow{AB}$.
- Constante (unidade de deslocamento) igual a 4 unidades.

- **Figura 7:** Boneco com centro no ponto (0,0).

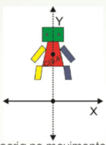


- Após o movimento, qual será a nova coordenada do centro do boneco?

- Ao realizar o movimento na direção verticalmente para cima, no sentido da reta $\overrightarrow{AB}$, com uma constante igual a 4, sabemos que todos os pontos serão deslocados conforme (fig. 8), ou seja, o centro da figura, assim como todos os seus pontos na ordenada y sofreram um acréscimo de 4 unidades de distância. Logo, o centro da figura estará na posição (0, 4), o valor da abscissa x continuará sendo o mesmo.
- Todos os pontos da ordenada y sofreram um acréscimo de 4 unidades.
- Centro da figura na posição (0,4).
- O valor da abscissa continuará sendo o mesmo.
- **Figura 8:** Boneco com centro no ponto (0,4)



- **Figura 8:** Boneco com centro no ponto (0,4).



- O que aconteceria no movimento para baixo?
- O oposto aconteceria com o movimento para baixo, subtrairíamos o valor da constante (unidade de deslocamento)
- Como descreveríamos o movimento matematicamente?

Descrevendo o movimento

- O boneco anterior ao movimento permanecia com centro no ponto (0,0) e ao realizar o movimento, de 4 unidades na vertical para cima, ao longo da reta $x = 0$, todos os seus pontos na ordenada sofreram um acréscimo da constante (unidade de deslocamento). Dessa forma, o seu centro deslocou-se para a posição (0,4).
- Na notação matemática teríamos o seguinte: $M(0,0) = (0,0) + (0,4) = (0 + 0, 0 + 4) = (0,4)$.

Segunda situação

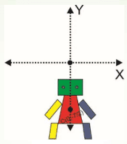
- Vamos colocar o centro da nossa figura, o boneco, no ponto (0,1/2), conforme (fig. 9), para realizarmos o movimento retilíneo na vertical para baixo, no sentido da reta $\overrightarrow{AB}$ com uma constante de deslocamento de 4 unidades.
- Centro no ponto (0, ½);
- Movimento retilíneo no sentido da reta $\overrightarrow{AB}$, na vertical para baixo;
- Deslocamento com uma constante de 4 unidades.

- **Figura 9:** Boneco com centro no ponto (0, 1/2).

- Com o movimento, qual será a nova coordenada do centro do boneco?
- Como descreveríamos matematicamente?

- O boneco anterior ao movimento permanecia com centro no ponto (0, 1/2) e ao realizar o movimento, de 4 unidades na vertical para baixo, ao longo da reta $x = 0$, todos os seus pontos na ordenada sofreram um decréscimo de 4 unidades. Dessa forma, o seu centro deslocou-se para a posição (0,-7/2), conforme (fig. 10). Na notação matemática teríamos o seguinte: $M\left(0,\frac{1}{2}\right) = (0,\frac{1}{2}) + (0,-4) = \left(0+0,\frac{1}{2} - 4\right) = \left(0,-\frac{7}{2}\right)$.
- Todos os pontos deslocados no sentido da reta $\overrightarrow{AB}$;
- Constante igual a 4 unidades;
- Os pontos na ordenada y sofreram um decréscimo de 4 unidades;
- O centro deslocou-se para a posição (0, -7/2);
- O valor da abscissa continua sendo o mesmo.

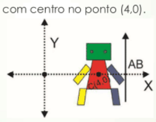
- **Figura 10**: Boneco com centro no ponto (0, -7/2).



- O boneco anterior ao movimento permanecia com centro no ponto (0, 1/2) e ao realizar o movimento, de 4 unidades na vertical para baixo, ao longo da reta $x = 0$, todos os seus pontos na ordenada sofreram um decréscimo de 4 unidades. Dessa forma, o seu centro deslocou-se para a posição (0,-7/2), conforme (fig. 10).
- Na notação matemática teríamos o seguinte: $M\left(0,\frac{1}{2}\right) = \left(0,\frac{1}{2}\right) + (0,-4) = \left(0+0,\frac{1}{2} - 4\right) = \left(0,-\frac{7}{2}\right)$.

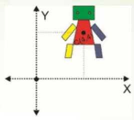
Terceira Situação

- Vamos colocar o centro da nossa figura, o boneco, no ponto (4,0), conforme (fig. 11), para realizarmos o movimento retilíneo na vertical para cima no sentido da reta $\overrightarrow{AB}$, com uma constante de deslocamento de 4 unidades.
- **Figura 11:** Boneco com centro no ponto (4,0).



- Com o movimento, qual será a nova coordenada do centro do boneco?
- Como descrever matematicamente esse movimento?

- **Figura 12:** Boneco com centro no ponto (4,4).

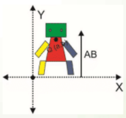


- O boneco anterior ao movimento permanecia com centro no ponto (4,0) e ao realizar o movimento, de 4 unidades na vertical para cima, ao longo da reta $x = 4$, todos os seus pontos na ordenada sofreram um acréscimo da constante (unidade de deslocamento). O oposto aconteceria com o movimento para baixo, subtrairíamos o valor da constante (unidade de deslocamento). Dessa forma, o seu centro deslocou-se para a posição (4,4).
- Na notação matemática teríamos o seguinte: $M(4,0) = (4,0) + (0,4) = (4+0, 0+4) = (4,4)$.

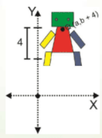
Quarta Situação

- Por fim, vamos imaginar o movimento para um ponto qualquer da figura. A notação de um ponto qualquer da figura será o par ordenado (a, b), conforme (fig. 13), para realizarmos o movimento retilíneo na vertical para cima no sentido da reta $\overline{AB}$, com uma constante de deslocamento de *4* unidades.

Figura 13: Boneco com um ponto qualquer (a, b).



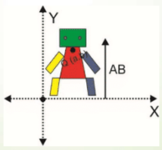
- Ao realizarmos o movimento na direção verticalmente para cima, no sentido da reta $\overline{AB}$, com uma constante igual a *4*, sabemos que todos os pontos serão deslocados conforme (fig. 14), ou seja, todos os seus pontos na ordenada y sofreram um acréscimo de *4* unidades. Logo, o ponto da figura estará na posição $(a, b + 4)$. Entretanto o valor da abscissa *x* continuará sendo o mesmo.
- **Figura 14:** Boneco com centro no ponto (a, b+4).



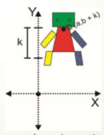
Quinta Situação

- Por fim, vamos imaginar o movimento para um ponto qualquer da figura. A notação de um ponto qualquer da figura será o par ordenado (a, b), conforme (fig. 15), para realizarmos o movimento retilíneo na vertical para cima no sentido da reta $\overline{AB}$, com uma constante de deslocamento de *k* unidades.

Figura 15: Boneco com um ponto qualquer (a, b).



- Ao realizarmos o movimento na direção verticalmente para cima, no sentido da reta $\overline{AB}$, com uma constante igual a *k*, sabemos que todos os pontos serão deslocados conforme (fig. 16), ou seja, todos os seus pontos na ordenada y sofreram um acréscimo de k unidades. Logo, o ponto da figura estará na posição $(a, b + k)$. Entretanto o valor da abscissa *x* continuará sendo o mesmo.
- **Figura 16:** Boneco com ponto (a, b + k).



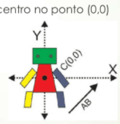
- Como descreveríamos esse movimento matematicamente?
- Qual a equação da reta que movimentaremos o boneco?

Descrevendo Matematicamente

- O boneco anterior ao movimento permanecia no ponto (a, b) e ao realizar o movimento, de *k* unidades na vertical para cima, ao longo da reta $x = a$, todos os seus pontos na ordenada y sofreram um acréscimo da constante (unidade de deslocamento). Dessa forma, o seu centro deslocou-se para a posição $(a, b + k)$.
- Na notação matemática teríamos o seguinte: $M(a, b) = (a, b) + (0, k) = (a, b + k)$, o que corresponde ao movimento da figura em função da constante de deslocamento.

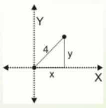
Movimento na Diagonal

- Vamos colocar o centro da nossa figura, o boneco, no ponto (0,0), conforme (fig. 17), para realizarmos o movimento retilíneo sobre a reta $y = x$ na diagonal do 1° quadrante no sentido positivo da reta $\overline{AB}$, com uma constante de deslocamento de 4 unidades de distância.
- **Figura 27:** Boneco com centro no ponto (0,0)



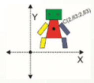
- Qual será o novo centro da figura?

- Ao realizarmos o movimento na direção diagonal no sentido positivo, da reta $\overline{AB}$, com uma constante igual a 4, sabemos que todos os pontos serão deslocados conforme (fig. 17), ou seja, o centro da figura, assim como todos os seus pontos na ordenada x e y sofrerão um acréscimo de 2,83 unidades de distância. Logo, o centro da figura estará na posição (2,83; 2,83).
- Ao realizar o movimento na diagonal, os valores de x e y crescem na mesma variação, ou seja, se temos uma constante igual a 4 unidade e queremos saber quanto variou em x e y, devemos utilizar o teorema de Pitágoras conforme (fig. 18) que corresponde a seguinte sentença: a soma dos quadrados de seus catetos corresponde ao quadrado de sua hipotenusa, ou seja, $a^2 = b^2 + c^2$.
- **Figura 28**: Aplicação do teorema de Pitágoras para encontrar valores de x e y.



- Neste exemplo a corresponde a hipotenusa que no caso é 4 unidades, assim temos: $4^2 = x^2 + y^2$, entretanto sabemos que x e y crescem na mesma variação, logo possuem mesmo valor, devido ao movimento sob a reta $y = x$.
- Portanto podemos colocar na mesma variável: $4^2 = d^2 + d^2$, desenvolvendo, temos o seguinte: $16 = 2d^2 \rightarrow d^2 = \frac{16}{2} \rightarrow d^2 = 8 \rightarrow d = \sqrt{8} \cong 2{,}83$, que corresponde ao valor da abscissa e ordenada do centro do boneco após o deslocamento conforme (fig. 19).

Figura 19: Boneco com centro no ponto (2,83, 2,83).

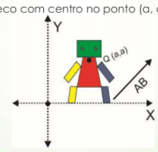


- O que aconteceria se o movimento fosse na diagonal no sentido contrario?
- Realizaríamos a adição da constante com sinal negativo.

- O boneco anterior ao movimento permanecia com centro no ponto (0,0) e ao realizar o movimento, de 4 unidades na diagonal no sentido positivo, ao longo da reta $y = x$, todos os pontos na abscissa e ordenada sofreram um acréscimo de 2,83 unidades. Dessa forma, o seu centro deslocou-se para a posição (2,83; 2,83).
- Na notação matemática teríamos o seguinte: $M_a(0,0) = (0,0) + (2{,}83; 2{,}83) = (0 + 2{,}83, 0 + 2{,}83) = (2{,}83; 2{,}83)$.

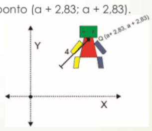
Segundo Caso

- Vamos colocar o centro da nossa figura, o boneco, no ponto (a,a), conforme (fig. 20), para realizarmos o movimento na diagonal no sentido positivo da reta $\overline{AB}$, que é a reta $y = x$, com uma constante de deslocamento de 4 unidades de distância.
- **Figura 20:** Boneco com centro no ponto (a, a).



- Qual será o novo centro da figura?

- Ao realizarmos o movimento na direção diagonal no sentido positivo, no sentido da reta $y = x$ com uma constante igual a 4, sabemos que todos os pontos serão deslocados conforme (fig. 21), ou seja, o centro da figura, assim como todos os seus pontos na ordenada y e abscissa x sofreram um acréscimo de 2,83 unidades de distância. Logo, o centro da figura estará na posição (a + 2,83, a + 2,83) conforme (fig. 21).
- **Figura 21:** Boneco com ponto (a + 2,83; a + 2,83).



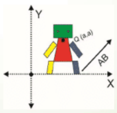
- Como descreveríamos esse movimento matematicamente?

- O boneco anterior ao movimento permanecia no ponto (a, a) e ao realizar o movimento, de 4 unidades na diagonal no sentido positivo, ao longo da reta $y = x$, todos os seus pontos na abscissa e ordenada sofreram um acréscimo da constante (unidade de deslocamento). O oposto aconteceria com o movimento no sentido negativo, subtrairíamos o valor da constante (unidade de deslocamento).
- Dessa forma, o seu centro deslocou-se para a posição $(a + 2{,}83; a + 2{,}83)$. Na notação matemática teríamos o seguinte: $M(a, a) = (a, a) + (2{,}83; 2{,}83) = (a + 2{,}83;\ a + 2{,}83)$, o que corresponde ao movimento da figura em função da constante de deslocamento. Além disso, podemos concluir que ordenada e abscissa sofreram a variação na mesma constante.
- **Matematicamente:** $M(a, a) = (a, a) + (2{,}83; 2{,}83) = (a + 2{,}83;\ a + 2{,}83)$.

Terceiro Caso

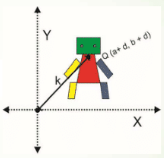
- Por fim, vamos imaginar o movimento para um ponto qualquer da figura. A notação de um ponto qualquer da figura será o par ordenado (a, a), conforme (fig. 22), para realizarmos o movimento na diagonal no sentido positivo, da reta $\overrightarrow{AB}$ que é $y = x$, com uma constante de deslocamento de k unidades de distância.

Figura 22: Boneco com um ponto qualquer (a, b).



- Ao realizarmos o movimento na direção diagonal no sentido positivo, da reta $\overrightarrow{AB}$, com uma constante igual a k, sabemos que todos os pontos serão deslocados conforme (fig. 23), ou seja, todos os seus pontos na abscissa x e ordenada y sofrerão acréscimo de $\sqrt{\frac{k^2}{2}}$ unidades. Logo, o ponto da figura estará na posição $(a + \sqrt{\frac{k^2}{2}}, a + \sqrt{\frac{k^2}{2}})$.
- Neste exemplo a corresponde a hipotenusa que no caso é k unidades, assim temos: $k^2 = x^2 + y^2$, entretanto sabemos que x e y crescem na mesma variação, logo possuem mesmo valor, devido ao movimento sob a reta $y = x$. Portanto podemos colocar na mesma variável: $k^2 = d^2 + d^2$, desenvolvendo, temos o seguinte: $k^2 = 2d^2 \rightarrow d^2 = \frac{k^2}{2} \rightarrow d^2 = \frac{k^2}{2} \rightarrow d = \sqrt{\frac{k^2}{2}}$, que corresponde ao valor da abscissa e ordenada do centro do boneco após o deslocamento conforme (fig. 23).

- **Figura 23:** Boneco com ponto (a + d, a + d).



- O boneco anterior ao movimento permanecia no ponto (a, a) e ao realizar o movimento, de k unidades na diagonal no sentido positivo, ao longo da reta $y = x$, todos os seus pontos na abscissa e ordenada sofreram um acréscimo da constante (unidade de deslocamento). O oposto aconteceria com o movimento no sentido negativo, subtrairíamos o valor da constante (unidade de deslocamento). Dessa forma, o seu centro deslocou-se para a posição $(a + d, a + d)$.
- Na notação matemática teríamos o seguinte: $M(a, b) = (a, a) + (d, d) = \left(a + \sqrt{\frac{k^2}{2}}, a + \sqrt{\frac{k^2}{2}}\right)$, que corresponde ao movimento da figura em função da constante de deslocamento. Além disso, podemos concluir que durante o movimento diagonal, no sentido positivo ou negativo, a ordenada y e abscissa x sofrem alteração.

Orientações para a atividade:

Movimento na Horizontal

- Descreva com palavras o movimento que você realizou na horizontal;
- **Na descrição do movimento na horizontal**, cite 3 exemplos para o deslocamento com o centro do boneco e descreva detalhadamente todo o processo, ou seja, ao escolhermos uma constante de deslocamento e realizarmos o movimento em função dessa constante, como descrevemos isso matematicamente?
- Primeiro exemplo com centro em um ponto determinado e 4 unidades de deslocamento na horizontal;
- Segundo exemplo com centro qualquer (a, b) e 4 unidades de deslocamento na horizontal;
- Terceiro caso, com centro qualquer (a, b) e k unidades de deslocamento na horizontal.

Pontos de atenção:

- Realizou o movimento sobre qual reta? Deixe isso explicito;
- Realize a descrição matemática do movimento, utilizando símbolos matemáticos e a determine a função movimento;

APÊNDICE B

QUESTIONÁRIO DA PESQUISA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇAO

Nome (opcional): ___________________________ Turma: ______

Caro estudante, pretendemos repensar nossa prática e, futuramente, auxiliá-lo ao longo da jornada escolar com maior eficiência. Sua opinião é muito importante para nós, por isso, por favor, responda a este questionário com sinceridade e evite deixar questões em branco.

1. Você gosta de matemática?
( ) sim ( ) não

2. Marque quais dificuldades você enfrenta ao estudar matemática.
( ) sono ( ) cansaço
( ) dificuldade em fazer contas ( ) não entendo a matéria
( ) dificuldade em resolver problemas ( ) Outros _____________

3. Por que você vai à escola? Marque quantos itens achar necessários.
( ) Por obrigação ( ) Para encontrar meus amigos ( ) Por causa do lanche
( ) Porque quero aprender ( ) Porque gosto de estudar ( ) Para ter um emprego bom
( ) Outros _____________

4. Você já utilizou a matemática para descrever alguma situação? Se sim, como foi a experiência?
____
____
____.

5. O que é a linguagem matemática para você? Marque quantas alternativas achar necessárias.
( ) Números
( ) Letras
( ) Símbolos
( ) Cálculos numéricos
( ) Conjunto de regras
( ) Outros____________

6. Você considera que fez matemática nessa atividade? Justifique.
____
____
____.

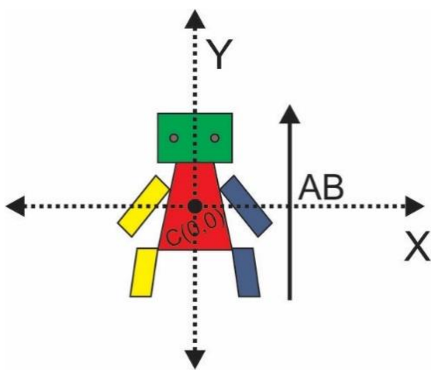
APÊNDICE C

MATERIAL DE APOIO

MOVIMENTO NA DIREÇÃO VERTICAL

No oitavo passo, realizaremos o movimento retilíneo vertical da figura com uma constante de deslocamento de 4 unidades, ao longo da reta $x = 0$ e descreveremos, matematicamente, o movimento realizado. Todos os movimentos realizados com as figuras serão retilíneos. Vamos colocar o centro da nossa figura, o boneco, no ponto (0,0), conforme a figura 1, para realizarmos o movimento retilíneo vertical para cima, no sentido da reta $\overrightarrow{AB}$, com uma constante de deslocamento de 4 unidades.

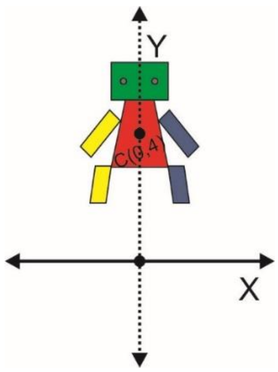
Figura1: boneco com centro no ponto $(0, 0)$



Fonte: Elaboração dos autores.

Ao realizarmos o movimento na direção vertical para cima, no sentido da reta $\overrightarrow{AB}$, com uma constante igual a 4, os pontos serão deslocados conforme a figura 2, ou seja, o centro da figura, e os pontos na ordenada y sofrerão um acréscimo de 4 unidades de distância. Logo, o centro da figura estará na posição (0, 4), e o valor da abscissa *x* continuará o mesmo.

Figura 2: boneco com centro no ponto (0,4).



Fonte: Elaboração dos autores.

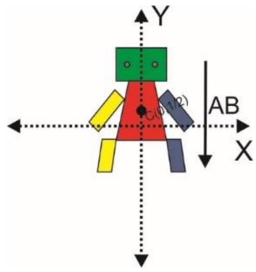
O boneco, anteriormente ao movimento, permaneceu com centro no ponto (0,0), e, ao realizar o movimento vertical para cima, com 4 unidades de distância, ao longo da reta $x = 0$, os pontos na ordenada sofreram acréscimo da constante de deslocamento. O oposto aconteceria com o movimento para baixo, em que subtrairíamos o valor da constante. Dessa forma, o centro deslocou-se para a posição (0,4). Na notação matemática, teríamos $M(0{,}0) = (0{,}0) + (0{,}4) = (0 + 0{,}0 + 4) = (0, 4)$.

Durante a atividade, é importante realizar alguns questionamentos do tipo:

1. Em quantas direções retilíneas, podemos deslocar a figura? São infinitas as direções retilíneas com que podemos movimentar a figura no plano.
2. Para cada direção, há quantos sentidos? Na direção vertical podemos conceber dois sentidos: de baixo para cima ou de cima para baixo. Na direção horizontal, o sentido pode ser da direita para a esquerda ou vice-versa.

Em seguida, colocaremos o centro da nossa figura, o boneco, no ponto (0,1/2), conforme a figura 3, para realizarmos o movimento retilíneo vertical para baixo, no sentido da reta $\overrightarrow{AB}$, com uma constante de deslocamento de 4 unidades de distância.

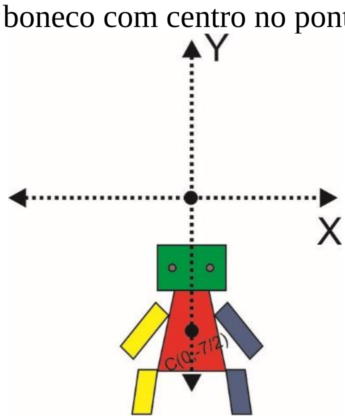
Figura 3: boneco com centro no ponto (0, 1/2)



Fonte: Elaboração dos autores.

Ao realizarmos o movimento na direção vertical para baixo, no sentido da reta $\overrightarrow{AB}$, com uma constante igual a 4, os pontos serão deslocados conforme a figura 4, ou seja, o centro da figura e os pontos na ordenada y sofrerão um decréscimo de 4 unidades de distância. Logo, o centro da figura estará na posição (0, -7/2), e o valor da abscissa *x* continuará o mesmo.

Figura 4: boneco com centro no ponto (0, -7/2)

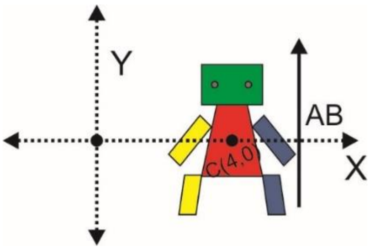


Fonte: Elaboração dos autores.

O boneco, anteriormente ao movimento, permaneceu com centro no ponto (0, 1/2), e, ao realizar o movimento vertical para baixo, com 4 unidades, ao longo da reta $x = 0$, os pontos na ordenada sofreram um decréscimo de 4 unidades de distância. Dessa forma, o centro deslocou-se para a posição (0,-7/2), conforme a figura 10. Na notação matemática, teríamos o seguinte: $M\left(0,\frac{1}{2}\right) = \left(0,\frac{1}{2}\right) - (0,4) = (0,\frac{1}{2}) + (0, \ -4) = \left(0 - 0, \ \frac{1}{2} - 4\right) = \left(0, \ -\frac{7}{2}\right)$.

Vamos colocar o centro da nossa figura, o boneco, no ponto (4,0), conforme a figura 5, para realizarmos o movimento retilíneo vertical para cima, no sentido da reta $\overrightarrow{AB}$, com uma constante de deslocamento de 4 unidades de distância.

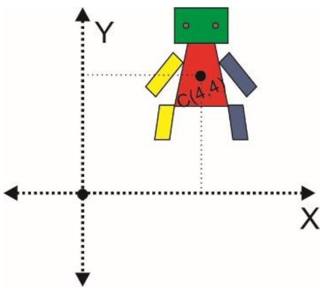
Figura 5: boneco com centro no ponto (4,0)



Fonte: Elaboração dos autores.

Ao realizarmos o movimento na direção vertical para cima, no sentido da reta $\overrightarrow{AB}$, com uma constante igual a 4, os pontos serão deslocados conforme a figura 6, ou seja, o centro da figura e os pontos na ordenada y sofrerão um acréscimo de 4 unidades de distância. Logo, o centro da figura estará na posição (4, 4), e o valor da abscissa x continuará o mesmo.

Figura 6: boneco com centro no ponto (4,4)

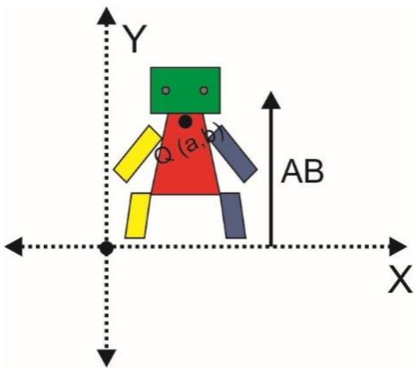


Fonte: Elaboração dos autores.

O boneco, anteriormente ao movimento, permaneceu com centro no ponto (4,0), e, ao realizar o movimento vertical para cima, com 4 unidades, ao longo da reta $x = 4$, os pontos na ordenada sofreram acréscimo da constante. Dessa forma, o centro foi deslocado para a posição (4,4). Na notação matemática, teríamos: $M(4,0) = (4,0) + (0,4) = (4 + 0,0 + 4) = (4, 4)$.

Vamos imaginar o movimento para um ponto qualquer da figura. A sua notação será o par ordenado (a, b), conforme a figura 7, para realizarmos o movimento retilíneo vertical para cima, no sentido da reta $\overrightarrow{AB}$, com uma constante de deslocamento de 4 unidades de distância.

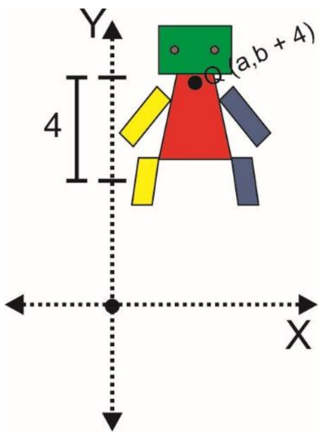
Figura 7: boneco com um ponto qualquer (a, b).



Fonte: Elaboração dos autores.

Ao realizarmos o movimento na direção vertical para cima, no sentido da reta $\overrightarrow{AB}$, com uma constante igual a 4, os pontos serão deslocados conforme a figura 8, ou seja, os pontos na ordenada y sofrerão acréscimo de 4 unidades. Logo, o ponto da figura estará na posição $(a, b + 4)$, e o valor da abscissa x continuará o mesmo.

Figura 8: boneco com ponto (a, b + 4).



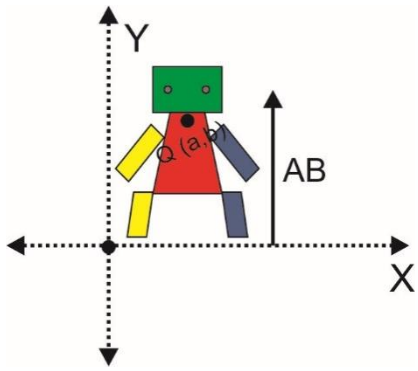
Fonte: Elaboração dos autores.

O boneco, anteriormente ao movimento, permaneceu no ponto (a, b), e, ao realizar o movimento vertical para cima, com 4 unidades, ao longo da reta $x = a$, os pontos na ordenada sofreram acréscimo da constante. O oposto aconteceria com o movimento para baixo, em que subtrairíamos o valor da constante. Dessa forma, o centro deslocou-se para a posição $(a, b + 4)$. Na notação matemática, teríamos $M(a, b) = (a, b) + (0,4) = (a + 0, b + 4) = (a, b + 4)$, o que corresponde ao movimento da figura em função da constante de deslocamento. Além disso, podemos concluir que, durante o movimento vertical, para cima ou para baixo, a abscissa x não sofre alteração, mas permanece a mesma.

Por fim, vamos imaginar o movimento para um ponto qualquer da figura. A sua notação será o par ordenado (a, b), conforme a figura 9, para realizarmos o movimento retilíneo vertical para cima, no sentido da reta $\overrightarrow{AB}$, com a constante de deslocamento de k unidades de distância.

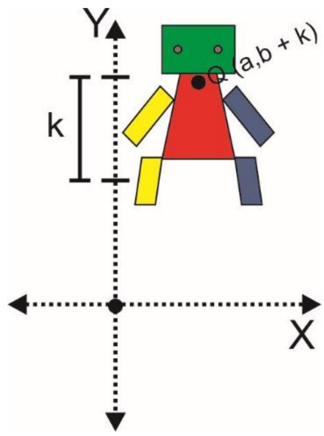
Figura 9: boneco com um ponto qualquer (a, b)

Fonte: Elaboração dos autores.



Ao realizarmos o movimento na direção vertical para cima, no sentido da reta $\overrightarrow{AB}$, com uma constante igual a k, os pontos serão deslocados conforme a figura 10, ou seja, os pontos na ordenada y sofrerão um acréscimo de k unidades. Logo, o ponto da figura estará na posição $(a, b + k)$, e o valor da abscissa x continuará o mesmo.

Figura 10: boneco com ponto (a, b + k)



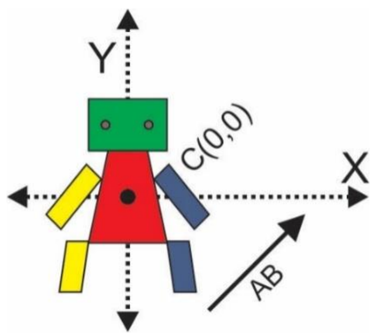
Fonte: Elaboração dos autores.

O boneco, anteriormente ao movimento, permaneceu no ponto (a, b), e, ao realizar o movimento vertical para cima, com k unidades, ao longo da reta $x = a$, os pontos na ordenada sofreram acréscimo da constante de deslocamento. O oposto aconteceria com o movimento para baixo, em que subtrairíamos o valor da constante de deslocamento. Dessa forma, o centro deslocou-se para a posição $(a, b + k)$. Na notação matemática, teríamos $M(a, b) = (a, b) + (0, k) = (a + 0, b + k) = (a, b + k)$, o que corresponde ao movimento da figura em função da constante de deslocamento. Além disso, podemos concluir que, durante o movimento vertical, para cima ou para baixo, a abscissa x não sofre alteração, mas permanece a mesma.

MOVIMENTO DIAGONAL

No décimo passo, realizaremos o movimento retilíneo diagonal da figura com uma constante de deslocamento de 4 unidades, ao longo da reta $y = x$ e descreveremos, matematicamente, o movimento realizado. Todos os movimentos realizados com as figuras serão retilíneos. Vamos colocar o centro da nossa figura, o boneco, no ponto (0,0), conforme a figura 11, para realizarmos o movimento retilíneo sobre a reta $y = x,$ na diagonal do 1° quadrante, no sentido positivo da reta $\overrightarrow{AB}$, com uma constante de deslocamento de 4 unidades de distância.

Figura 11: boneco com centro no ponto (0,0).

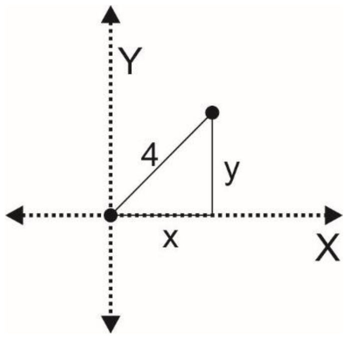


Fonte: Elaboração dos autores.

Ao realizarmos o movimento na direção diagonal, no sentido positivo da reta $\overrightarrow{AB}$, com uma constante igual a 4, os pontos serão deslocados conforme a figura 11, ou seja, o centro da figura e os pontos na ordenada x e y sofrerão um acréscimo de 2,83 unidades de distância. Logo, o centro da figura estará na posição (2,83; 2,83).

Ao realizar o movimento diagonal, os valores de x e y crescem na mesma variação, ou seja, se temos uma constante igual a 4 unidades e queremos saber quanto variou em x e y, devemos utilizar o teorema de Pitágoras, conforme a figura 12, que corresponde à seguinte sentença: a soma dos quadrados de seus catetos corresponde ao quadrado de sua hipotenusa, ou seja, $a^2 = b^2 + c^2$.

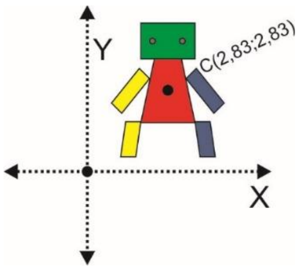
Figura 12: aplicação do teorema de Pitágoras para encontrar os valores de x e y.



Fonte: Elaboração dos autores.

Nesse exemplo, a corresponde à hipotenusa que, no caso, corresponde a 4 unidades. Assim temos: $4^2 = x^2 + y^2$. Sabemos que x e y crescem na mesma variação, logo contêm o mesmo valor em razão do movimento sobre a reta $y = x$. Portanto, podemos colocar a mesma variável: $4^2 = d^2 + d^2$. Desenvolvendo, temos o seguinte: $16 = 2d^2 \rightarrow d^2 = \frac{16}{2} \rightarrow d^2 = 8 \rightarrow d = \sqrt{8} \cong 2{,}83$, que corresponde ao valor da abscissa e da ordenada do centro do boneco após o deslocamento, conforme a figura 13.

Figura 13: boneco com centro no ponto (2,83, 2,83).

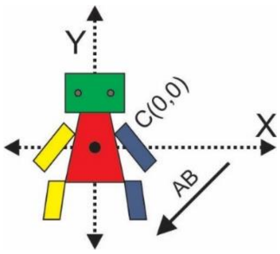


Fonte: Elaboração dos autores.

O boneco, anteriormente ao movimento, permaneceu com o centro no ponto (0,0), e, ao realizar o movimento diagonal no sentido positivo, com 4 unidades, ao longo da reta $y = x$, os pontos na abscissa e na ordenada sofreram o acréscimo de 2,83 unidades. Dessa forma, o centro deslocou-se para a posição (2,83; 2,83). Na notação matemática, teríamos o seguinte: $M_h(0{,}0) = (0{,}0) + (2{,}83; 2{,}83) = (0 + 2{,}83, 0 + 2{,}83) = (2{,}83; 2{,}83)$.

Em seguida, colocaremos o centro da nossa figura, o boneco, no ponto (0,0), conforme a figura 14, para realizarmos o movimento diagonal no sentido negativo, conforme a reta $\overrightarrow{AB}$, que é a reta $y = x$, com uma constante de deslocamento de 4 unidades de distância.

Figura 14: boneco com centro no ponto (0, 0).

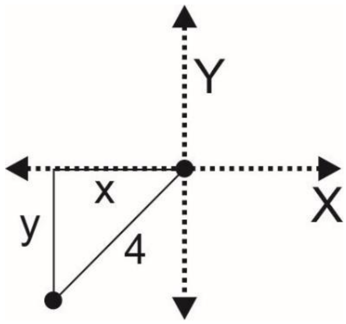


Fonte: Elaboração dos autores.

Ao realizarmos o movimento diagonal no sentido negativo, da reta $\overrightarrow{AB}$, com constante igual a 4, os pontos serão deslocados conforme a figura 14, ou seja, o centro da figura e os seus pontos na ordenada x e na abscissa y sofrerão o decréscimo de 2,83 unidades de distância. Logo, o centro da figura estará na posição (-2,83; -2,83).

Ao realizar o movimento diagonal, os valores de x e y crescem na mesma variação, ou seja, se temos uma constante igual a 4 unidades e queremos saber quanto variou em x e y, devemos utilizar o teorema de Pitágoras, conforme a figura 15, que corresponde à sentença: a soma dos quadrados de seus catetos corresponde ao quadrado de sua hipotenusa, ou seja, $a^2 = b^2 + c^2$.

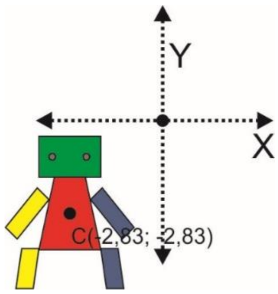
Figura 15: aplicação do teorema de Pitágoras para encontrar os valores de x e y.



Fonte: Elaboração dos autores.

Nesse exemplo, a corresponde à hipotenusa, que, no caso, corresponde a 4 unidades. Assim temos: $4^2 = x^2 + y^2$. Sabemos que x e y crescem na mesma variação, logo contêm o mesmo valor em razão do movimento sobre a reta $y = x$. Portanto, podemos colocar a mesma variável: $4^2 = d^2 + d^2$. Desenvolvendo, temos $16 = 2d^2 \rightarrow d^2 = \frac{16}{2} \rightarrow d^2 = 8 \rightarrow d = \sqrt{8} \cong 2{,}83$, que corresponde ao valor da abscissa e da ordenada do centro do boneco, após o deslocamento, conforme a figura 16.

Figura16: boneco com centro no ponto (-2,83; -2,83).

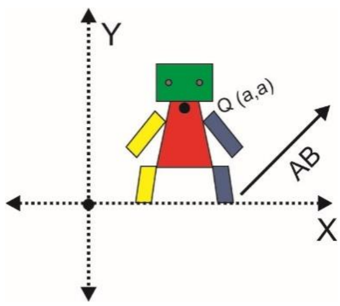


Fonte: Elaboração dos autores.

O boneco, anteriormente ao movimento, permaneceu com o centro no ponto $(0, 0)$, e, ao realizar o movimento diagonal no sentido positivo, com 4 unidades, ao longo da reta $y = x$, os pontos na abscissa *x* e na ordenada *y* sofreram o decréscimo de $-2{,}83$ unidades de distância. Dessa forma, o centro deslocou-se para a posição (-2,83, -2,83), conforme a figura 16. Na notação matemática, teríamos $M(0,\ 0) = (0{,}0) + (-2{,}83;\ -2{,}83) = (0 - 2{,}83,\ 0 - 2{,}83) = (-2{,}83, -2{,}83)$.

Vamos colocar o centro da nossa figura, o boneco, no ponto (a, a), conforme a figura 17, para realizarmos o movimento diagonal no sentido positivo da reta $\overrightarrow{AB}$, que é a reta $y = x$, com uma constante de deslocamento de 4 unidades de distância.

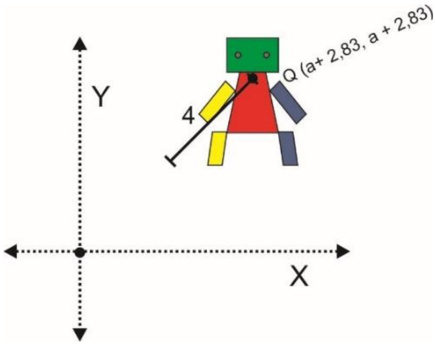
Figura 17: boneco com centro no ponto (a, a).



Fonte: Elaboração dos autores.

Ao realizarmos o movimento na direção diagonal, no sentido positivo da reta $y = x$, com uma constante igual a 4, os pontos serão deslocados conforme a figura 17, ou seja, o centro da figura e os pontos na ordenada *y* e na abscissa *x* sofrerão o acréscimo de 2,83 unidades de distância. Logo, o centro da figura estará na posição (a + 2,83, a + 2,83), conforme a figura 18.

Figura 18: boneco com ponto (a + 2,83; a + 2,83).

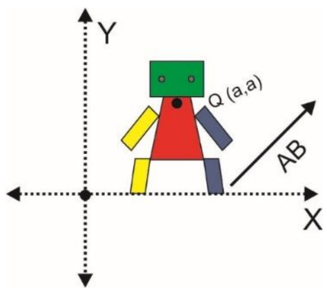


Fonte: Elaboração dos autores.

O boneco, anteriormente ao movimento, permaneceu no ponto (a, a), e, ao realizar o movimento diagonal no sentido positivo, com 4 unidades, ao longo da reta $y = x$, os pontos na abscissa e na ordenada sofreram um acréscimo da constante de deslocamento. O oposto aconteceria com o movimento no sentido negativo, em que subtrairíamos o valor da constante de deslocamento. Dessa forma, o centro deslocou-se para a posição $(a + 2{,}83; a + 2{,}83)$. Na notação matemática, teríamos $M(a, a) = (a, a) + (2{,}83; 2{,}83) = (a + 2{,}83;\ a + 2{,}83)$, o que corresponde ao movimento da figura em função da constante de deslocamento. Além disso, podemos concluir que a ordenada e a abscissa sofreram a variação na mesma constante.

Por fim, vamos imaginar o movimento para um ponto qualquer da figura cuja notação será o par ordenado (a, a), conforme a figura 19, para realizarmos o movimento diagonal no sentido positivo da reta $\overrightarrow{AB}$, que é $y = x$, com uma constante de deslocamento de k unidades de distância.

Figura 19: boneco com um ponto qualquer (a, b)

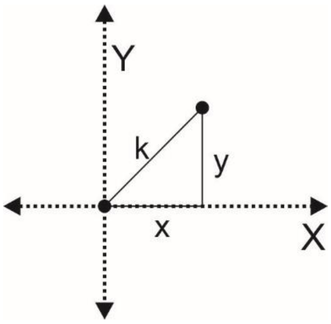


Fonte: Elaboração dos autores.

Ao realizarmos o movimento na direção diagonal, no sentido positivo da reta $\overrightarrow{AB}$, com uma constante igual a k, os pontos serão deslocados conforme a figura 19, ou seja, os pontos na abscissa x e na ordenada y sofrerão acréscimo de $\sqrt{\frac{k^2}{2}}$ unidades. Logo, o ponto da figura estará na posição $(a + \sqrt{\frac{k^2}{2}}, a + \sqrt{\frac{k^2}{2}})$.

Ao realizar o movimento diagonal, os valores de x e y crescem na mesma variação, ou seja, se temos uma constante igual a 4 unidade e queremos saber quanto variou em x e y, devemos utilizar o teorema de Pitágoras, conforme a figura 20, que corresponde à seguinte sentença: a soma dos quadrados de seus catetos corresponde ao quadrado de sua hipotenusa, ou seja, $a^2 = b^2 + c^2$.

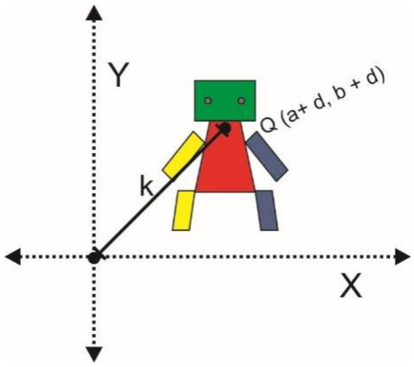
Figura 20: aplicação do teorema de Pitágoras para encontrar os valores de x e y



Fonte: Elaboração dos autores.

Nesse exemplo, a corresponde à hipotenusa, que, no caso, é k unidades. Assim, temos: $k^2 = x^2 + y^2$. Sabemos que x e y crescem na mesma variação, logo têm o mesmo valor em razão do movimento sobre a reta $y = x$. Portanto, podemos colocar a mesma variável: $4^2 = d^2 + d^2$. Desenvolvendo, temos $k^2 = 2d^2 \rightarrow d^2 = \frac{k^2}{2} \rightarrow d^2 = \frac{k^2}{2} \rightarrow d = \sqrt{\frac{k^2}{2}}$, que corresponde ao valor da abscissa e da ordenada do centro do boneco após o deslocamento (cf. figura 21).

Figura 21:boneco com ponto (a + d, a + d)



Fonte: Elaboração dos autores.

O boneco, anteriormente ao movimento, permaneceu no ponto (a, a), e, ao realizar o movimento diagonal no sentido positivo, com k unidades, ao longo da reta $y = x$, os pontos na abscissa e na ordenada sofreram um acréscimo na constante de deslocamento. O oposto aconteceria com o movimento no sentido negativo, em que subtrairíamos o valor da constante de deslocamento. Dessa forma, o centro deslocou-se para a posição $(a + d, a + d)$. Na notação matemática, teríamos $M(a, b) = (a, a) + (d, d) = \left(a + \sqrt{\frac{k^2}{2}}, a + \sqrt{\frac{k^2}{2}}\right)$, que corresponde ao movimento da figura em função da constante de deslocamento. Além disso, podemos concluir que, durante o movimento diagonal, no sentido positivo ou negativo, a ordenada y e a abscissa x sofrem alteração.

ORIENTAÇÕES PARA A ATIVIDADE: MOVIMENTO HORIZONTAL

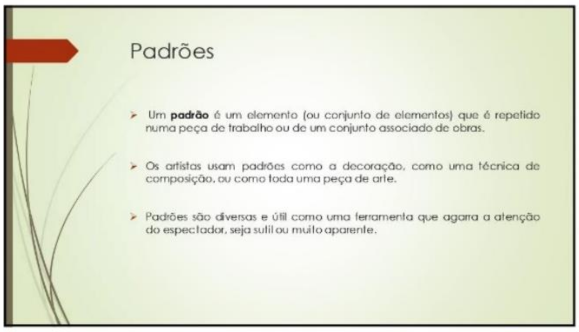
- Descreva, com palavras, o movimento horizontal que você realizou.
- **Na descrição do movimento horizontal**, cite 3 exemplos para o deslocamento com o centro do boneco e descreva, detalhadamente, todo o processo, ou seja, ao escolhermos uma constante de deslocamento e realizarmos o movimento em função dessa constante, como descrevemos isso matematicamente?
- Primeiro exemplo com centro em um ponto determinado e 4 unidades de deslocamento na horizontal;
- Segundo exemplo com centro qualquer (a, b) e 4 unidades de deslocamento na horizontal;
- Terceiro caso, com centro qualquer (a, b) e k unidades de deslocamento na horizontal.

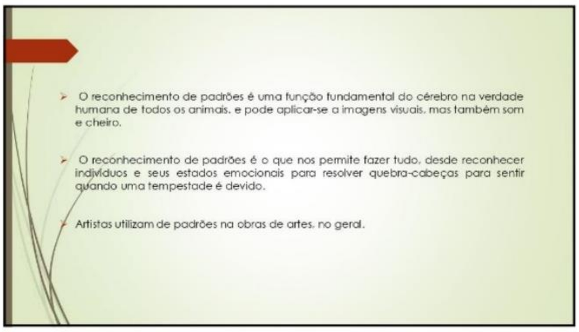
Pontos de atenção:

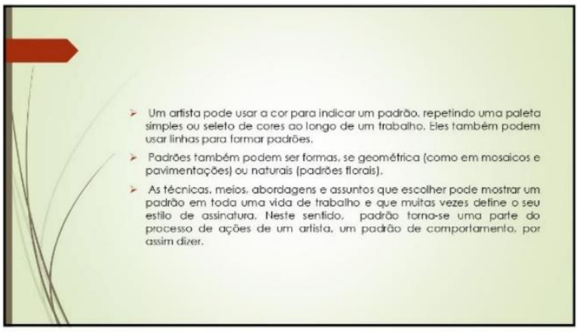
- Realizou o movimento sobre qual reta? Deixe isso explícito.
- Realize a descrição matemática do movimento, utilizando símbolos matemáticos e determine a função movimento.

APÊNDICE D

SLIDES DA OFICINA 2







Obras de Escher

O Limite do Círculo
(1958)

O Limite do Círculo III
(1959)

Qual é o padrão da imagem?
Com esse padrão temos um formato geométrico por trás? Se sim, qual é?

Padrões Naturais

- Padrões são encontrados em toda a natureza, a partir das folhas de uma árvore para a estrutura microscópica dessas folhas. Conchas e rochas têm padrões, animais e flores têm padrões, mesmo o corpo humano segue um padrão e inclui inúmeros padrões dentro dele.
- Flocos de neve quase sempre têm seis lados, mas cada floco de neve separada tem um padrão que é diferente de qualquer outro floco de neve.

O fotógrafo russo Alexey Kljatov é mestre em fotografar flocos de neve em 2013.

Padrões Criados Pelo Homem

- O mosaico é uma arte decorativa milenar que reúne pequenas peças de diversas cores para formar uma grande figura. Do grego, o termo mosaico (mouseîn) é relativo às musas.
- Representam a colagem próxima de pequenas peças, formando um efeito visual (seja um desenho, figura, representação) que envolve organização, combinação de cores, de materiais e de figuras geométricas, além de criatividade e paciência.
- Até hoje o mosaico é utilizado nas artes e pode ser formado por diversos tipos de materiais (tesselas) em formatos distintos: pedaços de vidro, plástico, papel, cerâmica, porcelana, pedras preciosas, mármore, granito, marfim, grãos, miçangas, conchas, azulejos, ladrilhos, dentre outros.

- Além de ser usado em peças de arte, tem sido muitas vezes associado à arquitetura e a decoração de ambientes (interiores e exteriores).
- Um dos exemplos mais notórios no Brasil, são os mosaicos em forma de ondas na calçada de Copacabana, no Rio de Janeiro.
- Além da calçada de Copacabana podemos encontrar diversos mosaicos nas igrejas, museus, avenidas, palácios do Brasil e em peças de artesanato.
- Merecem destaque a Quinta da Boa Vista (antigo Palácio São Cristóvão), o Teatro Municipal e o Museu Nacional de Belas Artes, todos no Rio de Janeiro.

A ideia por trás dos padrões

- Vídeo: https://www.youtube.com/watch?v=7spm0BHLWWM&ab_channel=MundoMatem%C3%A1ticoOficial
- Agora faça o seu próprio mosaico

Modelo Matemático e o Movimento de translação

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA – PPGECM
Grupo de Estudos em Educação Matemática (GEEM).
Prof.º: Edson Ferreira.
Orientadora: Karly Barbosa.

Objetivos

Espera-se que ao final da oficina o participante consiga:

- modelar o movimento $M(a, b)$ com base nas orientações da oficina;
- usar a criatividade e a linguagem matemática para descrever as ações; e
- realizar todos os registros em escrito numa folha de papel, seja criativo nesse registro;

Materiais

- 1 folhas de papel A-4;
- Uma figura qualquer:

Ideias Iniciais

Com uma figura plana em mãos execute as seguintes ações e registre as respostas na folha de papel:

- Realizar um movimento retilíneo de forma livre sem tirar a figura do plano.

- Registrar as respostas das próximas questões na folha de papel.

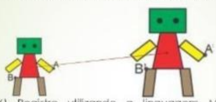
- 1) Registrar em quantas direções posso movimentar a minha figura?
- 2) Para cada direção temos quantos sentidos?
- 3) Ao deslocarmos a figura sobre o plano, alteramos o seu tamanho ou a sua forma? Registre a sua resposta.
- 4) Vocês acreditam que os ângulos foram alterados? Registre a sua resposta.

- Agora faça dois pontos quaisquer na figura.
- Movimentar a figura sobre uma direção retilínea r qualquer.

- 5) Utilize a linguagem matemática e escreva uma relação entre $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$? Existe outras relações entre os dois segmentos?

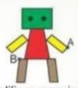
Imaginar a seguinte situação:

Se durante o movimento houver uma ampliação da figura:

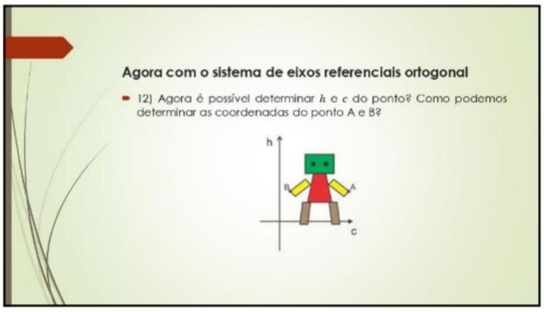


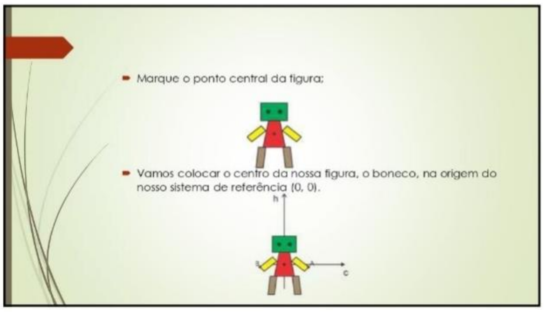
- 6) Registre utilizando a linguagem Matemática, quais relações podemos fazer entre $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$?
- 7) Existe uma única forma de representar a relação entre os dois segmentos?
- 8) Ao deslocar a figura sobre o plano, alteramos o seu tamanho ou a sua forma?
- 9) Se houver uma redução da figura durante o movimento, quais relações podemos estabelecer entre $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$?

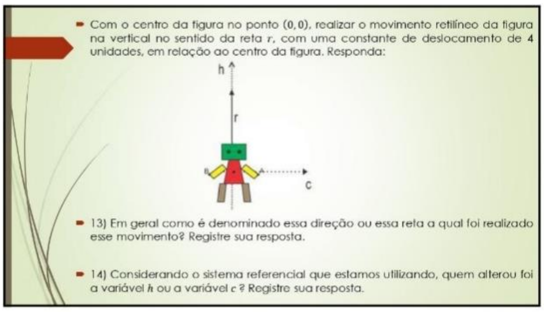
Com a figura no plano

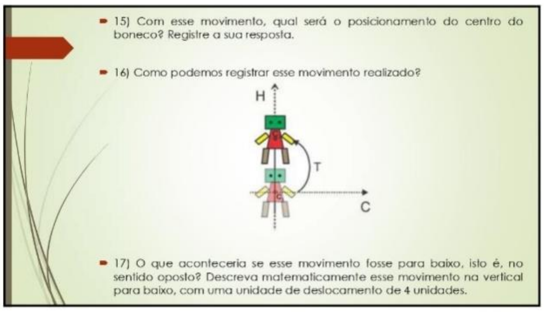


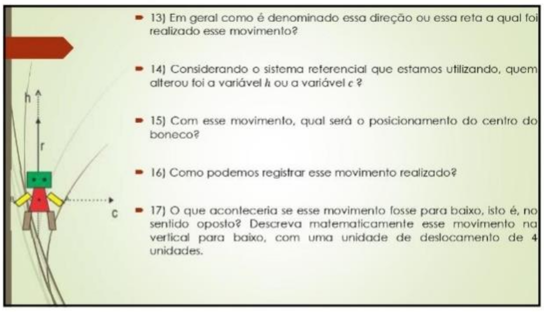
- 10) Seria possível identificar a posição dos pontos? Como isso pode ser feito? Registre a sua resposta.
- 11) Com uso do sistema de eixos referenciais isso é possível? Justifique e registre a sua resposta.

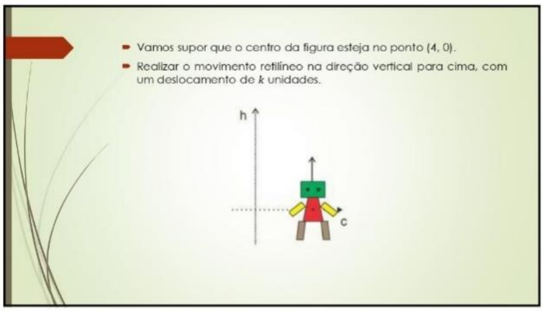

Agora com o sistema de eixos referenciais ortogonal
12) Agora é possível determinar h e c do ponto? Como podemos determinar as coordenadas do ponto A e B?
h
B
A
c

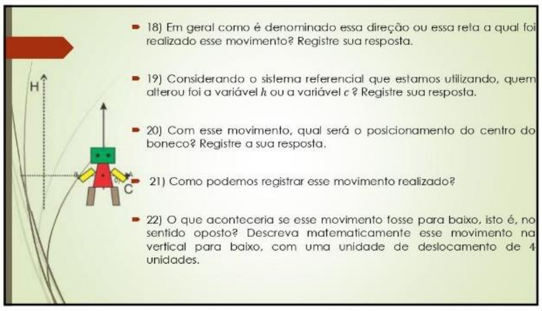

Marque o ponto central da figura;
Vamos colocar o centro da nossa figura, o boneco, na origem do nosso sistema de referência (0, 0).
h
c

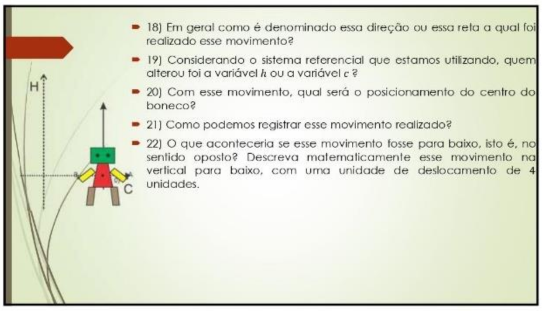

Com o centro da figura no ponto (0, 0), realizar o movimento retilíneo da figura na vertical no sentido da reta r, com uma constante de deslocamento de 4 unidades, em relação ao centro da figura. Responda:
h
r
c
13) Em geral como é denominado essa direção ou essa reta a qual foi realizado esse movimento? Registre sua resposta.
14) Considerando o sistema referencial que estamos utilizando, quem alterou foi a variável h ou a variável c ? Registre sua resposta.

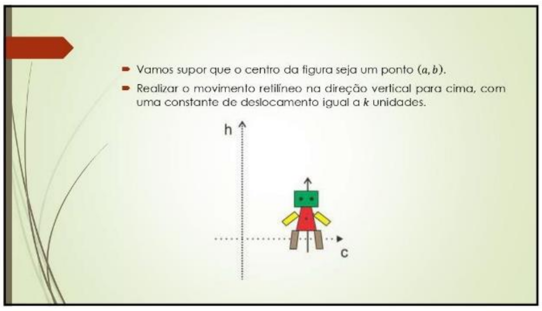

15) Com esse movimento, qual será o posicionamento do centro do boneco? Registre a sua resposta.
16) Como podemos registrar esse movimento realizado?
H
T
C
17) O que aconteceria se esse movimento fosse para baixo, isto é, no sentido oposto? Descreva matematicamente esse movimento na vertical para baixo, com uma unidade de deslocamento de 4 unidades.

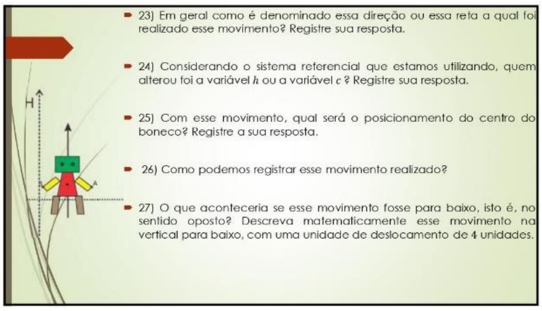

13) Em geral como é denominado essa direção ou essa reta a qual foi realizado esse movimento?
14) Considerando o sistema referencial que estamos utilizando, quem alterou foi a variável h ou a variável c ?
15) Com esse movimento, qual será o posicionamento do centro do boneco?
16) Como podemos registrar esse movimento realizado?
17) O que aconteceria se esse movimento fosse para baixo, isto é, no sentido oposto? Descreva matematicamente esse movimento na vertical para baixo, com uma unidade de deslocamento de 4 unidades.
h
r
c

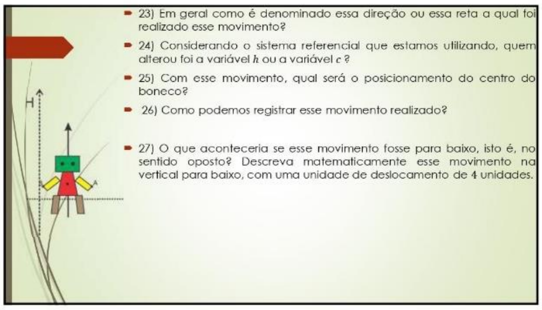

Vamos supor que o centro da figura esteja no ponto (4, 0).
Realizar o movimento retilíneo na direção vertical para cima, com um deslocamento de k unidades.
h
c

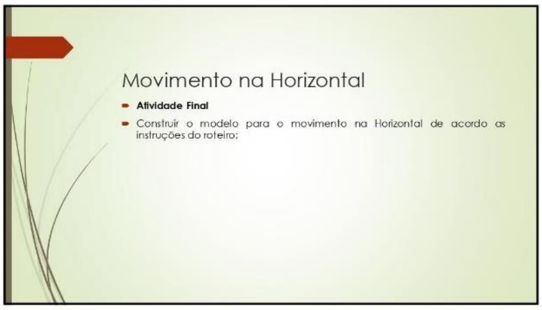

18) Em geral como é denominado essa direção ou essa reta a qual foi realizado esse movimento? Registre sua resposta.
19) Considerando o sistema referencial que estamos utilizando, quem alterou foi a variável h ou a variável c ? Registre sua resposta.
20) Com esse movimento, qual será o posicionamento do centro do boneco? Registre a sua resposta.
21) Como podemos registrar esse movimento realizado?
22) O que aconteceria se esse movimento fosse para baixo, isto é, no sentido oposto? Descreva matematicamente esse movimento na vertical para baixo, com uma unidade de deslocamento de 4 unidades.
H
C


18) Em geral como é denominado essa direção ou essa reta a qual foi realizado esse movimento?
19) Considerando o sistema referencial que estamos utilizando, quem alterou foi a variável h ou a variável c ?
20) Com esse movimento, qual será o posicionamento do centro do boneco?
21) Como podemos registrar esse movimento realizado?
22) O que aconteceria se esse movimento fosse para baixo, isto é, no sentido oposto? Descreva matematicamente esse movimento na vertical para baixo, com uma unidade de deslocamento de 4 unidades.
H
C


Vamos supor que o centro da figura seja um ponto (a, b).
Realizar o movimento retilíneo na direção vertical para cima, com uma constante de deslocamento igual a k unidades.
h
c


23) Em geral como é denominado essa direção ou essa reta a qual foi realizado esse movimento? Registre sua resposta.
24) Considerando o sistema referencial que estamos utilizando, quem alterou foi a variável h ou a variável c ? Registre sua resposta.
25) Com esse movimento, qual será o posicionamento do centro do boneco? Registre a sua resposta.
26) Como podemos registrar esse movimento realizado?
27) O que aconteceria se esse movimento fosse para baixo, isto é, no sentido oposto? Descreva matematicamente esse movimento na vertical para baixo, com uma unidade de deslocamento de 4 unidades.
H


23) Em geral como é denominado essa direção ou essa reta a qual foi realizado esse movimento?
24) Considerando o sistema referencial que estamos utilizando, quem alterou foi a variável h ou a variável c ?
25) Com esse movimento, qual será o posicionamento do centro do boneco?
26) Como podemos registrar esse movimento realizado?
27) O que aconteceria se esse movimento fosse para baixo, isto é, no sentido oposto? Descreva matematicamente esse movimento na vertical para baixo, com uma unidade de deslocamento de 4 unidades.
H


Movimento na Horizontal
Atividade Final
Construir o modelo para o movimento na Horizontal de acordo as instruções do roteiro;

APÊNDICE E

ROTEIRO DA ATIVIDADE: MOVIMENTO NA DIREÇÃO HORIZONTAL

	Colégio Estadual Nossa Senhora de Lourdes			
	Componente Curricular:	Professor (a):	Edson Ferreira	
	Matemática	Aluno (a):		
		Série/ turma:		Valor: 10,0
		Data:	___de ___________de 2020	Nota:

Tenha, em mão, os seguintes materiais:

- uma figura de sua escolha (pode ser um pedaço pequeno de papel);
- uma folha de papel para registrar as suas respostas;
- caneta com cor de sua preferência.

Movimento horizontal

1° passo

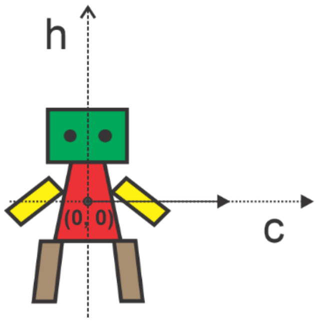
Desenhar o plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ na sua folha de papel.

2° passo

Marcar um ponto no centro da sua figura.

3° passo

Colocar a figura sobre o plano cartesiano, com o centro no ponto $(0, 0)$ e realizar um deslocamento de 4 unidades na direção horizontal, para a direita.



Feito isso, responda:

vi) Como é denominada, matematicamente, essa direção, isto é, como escrevemos, em matemática, a reta por onde deslocamos o centro da figura no movimento horizontal? ____

____.

vii) Com esse movimento, qual é o par ordenado que representa a nova posição do centro da figura?

____

____.

viii) Como podemos escrever, matematicamente, esse movimento, isto é, de que maneira, com a linguagem matemática, podemos representar esse movimento?

____

____.

ix) O que aconteceria se esse movimento fosse na direção horizontal, para a esquerda, a partir do ponto $(0, 0)$? Descreva, matematicamente, esse movimento com 4 unidades de deslocamento.

____

____

____.

x) Descreva, com palavras, na língua materna (português), o movimento horizontal que você realizou.

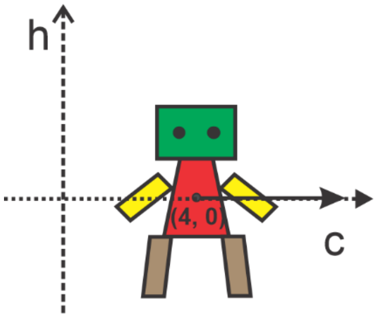
____

____

____.

4° passo

Colocar a figura sobre o plano cartesiano, com o centro no ponto $(4, 0)$ e realizar um deslocamento qualquer de k unidades na direção horizontal, para a direita.



Feito isso, responda:

i) Como é denominada, matematicamente, essa direção, isto é, como escrevemos, em matemática, a reta por onde deslocamos o centro da figura na direção horizontal?

____

____.

ii) Após o movimento, qual é o par ordenado que representa a nova posição do centro da figura?

____

____.

iii) Como podemos escrever, matematicamente, esse movimento, isto é, de que maneira, com a linguagem matemática, podemos representar esse movimento?

____

____.

iv) O que aconteceria se esse movimento fosse na direção horizontal, para a esquerda, a partir do ponto $(4, 0)$? Descreva, matematicamente, esse movimento com k unidades de deslocamento.

____

____

____.

v) Descreva, com palavras, na língua materna (português), o movimento horizontal que você realizou.

____

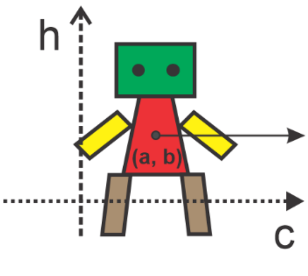
____

____

____.

5° passo

Coloque a figura sobre o plano cartesiano. Vamos considerar um ponto qualquer (a, b), pertencente à figura e realizar um deslocamento qualquer de k unidades na direção horizontal, para a direita.



Feito isso, responda:

i) Como é denominada, matematicamente, essa direção, isto é, como escrevemos, em matemática, a reta por onde deslocamos o centro da figura nesse movimento horizontal?

____

____.

ii) Com esse movimento, qual é o par ordenado que representa a nova posição do centro da figura?

____

____.

iii) Como podemos escrever, matematicamente, esse movimento, isto é, de que maneira, com a linguagem matemática, podemos representar esse movimento?

____

____.

iv) O que aconteceria se esse movimento fosse na direção horizontal, para a esquerda, a partir do ponto (a, b)? Descreva, matematicamente, esse movimento com k unidades de deslocamento.

____

____

____.

v) Descreva, com palavras, na língua materna (português), o movimento horizontal que você realizou.

____

____

____.

ANEXO:
PARECER CONSUBSTANCIADO DO COMITÊ DE ÉTICA E PESQUISA (CEP)

UFG - UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

Plataforma Brasil

PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP

DADOS DO PROJETO DE PESQUISA

Título da Pesquisa: Modelagem e o Ensino de Isometrias
Pesquisador: EDSON FERREIRA DA COSTA JUNIOR
Área Temática:
Versão: 1
CAAE: 25986219.8.0000.5083
Instituição Proponente: Universidade Federal de Goiás - UFG
Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 3.753.820

Apresentação do Projeto:
O projeto de pesquisa apresentado por Edson Ferreira da Costa Júnior intitulado, "Modelagem e o Ensino de Isometrias", pretende elucidar alguns problemas relativos ao ensino de isometrias no Ensino Fundamental. Para tanto, a pesquisa contará com a participação de 20 alunos do 1° ano do ensino médioa matriculados em uma escola pública estadual goiana. O resultado final do trabalho de investigação será a construção de um modelo com o suporte do material concreto, proveniente do processo de formulação das isometrias como uma função. O projeto de pesquisa pretende indagar sobre as contribuições para a aprendizagem de isometrias com o uso da modelagem matemática e o material concreto. Com o estudo, busca-se caminhos que levem o estudante a ter uma motivação pelos estudos, que este seja capaz de aprender e a fazer modelos adquirindo conhecimento matemático. A metodologia de pesquisa para este trabalho refere-se à análise de dados coletados em campo, durante a intervenção (oficinas), para que se possa compreender os efeitos do uso da modelagem matemática vinculada a utilização de materiais manipuláveis na aprendizagem de isometrias. Espera-se que com este trabalho o estudante seja capaz de compreender a importância da matemática, além de que este possa utiliza-la em situações cotidianas.

Objetivo da Pesquisa:
Objetivo Primário:
O objetivo geral deste trabalho é analisar as contribuições na aprendizagem de isometrias com o

Endereço: Pró-Reitoria de Pesquisa e Inovação - Agência UFG de Inovação, Alameda Flamboyant, Qd. K, Edifício K2
Bairro: Campus Samambaia, UFG **CEP:** 74.690-970
UF: GO **Município:** GOIANIA
Telefone: (62)3521-1215 **Fax:** (62)3521-1163 **E-mail:** cep.prpi.ufg@gmail.com

uso da modelagem matemática e o material concreto.

Avaliação dos Riscos e Benefícios:

Riscos:

O pesquisador destaca que a pesquisa não prevê riscos aos participantes da pesquisa. Existe a possibilidade de um leve desconforto dos participantes (professores do tema contextual), pelo fato da realização da entrevista aberta, mas que pode ser amenizado pelo estabelecimento de confiança entre pesquisador e participantes da pesquisa.

Benefícios:

Ao participar da pesquisa os participantes poderão se beneficiar pela troca de experiências entre os membros e também da aprendizagem possibilitada pela realização das atividades relacionadas para a construção do conhecimento matemático.

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:

A coleta de dados ocorrerá no Colégio Estadual Nossa Senhora de Lourdes, em Goiânia. Para tanto, serão realizadas 5 oficinas, com no mínimo 2 horas de duração cada, com abordagem de isometrias. Os encontros estão previstos para ocorrer entre 20 de janeiro e 7 de fevereiro de 2020. As oficinas serão dinâmicas, com foco em atividades pré-elaboradas com o objetivo final de formalização matemática e construção do modelo matemático, pelos próprios participantes. As atividades serão realizadas em grupos, de no máximo 4 estudantes. O pesquisador garante o anonimato dos participantes da pesquisa.

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:

Foram apresentados os seguintes documentos:

1. Informações Básicas do Projeto;
2. TCLE para os pais/responsáveis;
3. TALE para os alunos menores de 18 anos;
4. Folha de Rosto;
5. Termo de Anuência: declaração do Programa de Pós-Graduação em Educação e Ciências Matemáticas, UFG;
6. Termo de Anuência emitido pelo Colégio Estadual Nossa Senhora de Lourdes;
7. Termo de Compromisso assinado pela equipe de pesquisa;
8. Questões norteadoras: são apresentadas seis questões para a realização de uma entrevista aberta, a ser realizada com os estudantes participantes da oficina;
9. Questionário: apresenta nove questões que serão respondidas após a realização das oficinas;

10. Projeto de Pesquisa;

11. Orçamento: com recursos próprios, o pesquisador estima que terá um gasto de R$ 6.200,00;

12. Cronograma: o documento indica que a coleta de dados será realizada entre os meses de janeiro e abril de 2020.

Verificou-se que não foi inserido o Termo de Anuência da Secretaria de Estado da Educação de Goiás.

Conclusões ou Pendências e Lista de Inadequações:

Após a análise dos documentos apresentados, verificou-se a ausência do Termo de Anuência da Secretaria de Estado da Educação, que DEVERÁ ser enviado assim que for emitido por meio de notificação. Todos os outros documentos estão adequados.

Ao final, consideramos o protocolo de pesquisa APROVADO, salvo melhor juízo deste Comitê.

Considerações Finais a critério do CEP:

Informamos que o Comitê de Ética em Pesquisa/CEP-UFG considera o presente protocolo APROVADO, o mesmo foi considerado em acordo com os princípios éticos vigentes. Reiteramos a importância deste Parecer Consubstanciado, e lembramos que o(a) pesquisador(a) responsável deverá encaminhar ao CEP-UFG o Relatório Final baseado na conclusão do estudo e na incidência de publicações decorrentes deste, de acordo com o disposto na Resolução CNS n. 466/12 e Resolução CNS n. 510/16. O prazo para entrega do Relatório é de até 30 dias após o encerramento da pesquisa, previsto para fevereiro de 2021.

Este parecer foi elaborado baseado nos documentos abaixo relacionados:

Tipo Documento	Arquivo	Postagem	Autor	Situação
Informações Básicas do Projeto	PB_INFORMAÇÕES_BÁSICAS_DO_PROJETO_1472380.pdf	21/11/2019 12:07:49		Aceito
TCLE / Termos de Assentimento / Justificativa de Ausência	Modelo_TCLE_Humanas_finalizado.pdf	21/11/2019 12:06:36	EDSON FERREIRA DA COSTA JUNIOR	Aceito
Outros	Tale_finalizado.pdf	21/11/2019 11:58:15	EDSON FERREIRA DA COSTA JUNIOR	Aceito
Folha de Rosto	Folha_de_rosto_Reitor_ufg.pdf	19/11/2019 13:36:52	EDSON FERREIRA DA COSTA JUNIOR	Aceito
Outros	termo_de_anuencia_PPGEM.pdf	19/11/2019 13:31:55	EDSON FERREIRA DA COSTA JUNIOR	Aceito
Outros	termoanuencia.pdf	19/11/2019 12:07:23	EDSON FERREIRA DA COSTA JUNIOR	Aceito

Outros	termocompromisso.pdf	19/11/2019 12:06:21	EDSON FERREIRA DA COSTA JUNIOR	Aceito
Outros	Questoes_Norteadoras.pdf	19/11/2019 11:56:02	EDSON FERREIRA DA COSTA JUNIOR	Aceito
Outros	Questionario.pdf	19/11/2019 11:54:59	EDSON FERREIRA DA COSTA JUNIOR	Aceito
Projeto Detalhado / Brochura Investigador	Projeto_de_Pesquisa_Edson.pdf	18/11/2019 18:21:39	EDSON FERREIRA DA COSTA JUNIOR	Aceito
Orçamento	Orcamento.pdf	18/11/2019 18:19:16	EDSON FERREIRA DA COSTA JUNIOR	Aceito
Cronograma	Cronograma.pdf	18/11/2019 18:17:22	EDSON FERREIRA DA COSTA JUNIOR	Aceito

Situação do Parecer:
Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:
Não

GOIANIA, 09 de Dezembro de 2019

Assinado por:
Geisa Mozzer
(Coordenador(a))