



Universidade Federal de Goiás
Instituto de Física

BRUNO MARTINS MIRANDA

Quebra de Simetria em Condensados de Bose-Einstein Confinados por um Potencial Funil

Goiânia
2021



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE FÍSICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

Dissertação Tese

2. Nome completo do autor

Bruno Martins Miranda

3. Título do trabalho

Quebra de simetria em condensados de Bose-Einstein confinados por um potencial funil

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);

b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.

O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.



Documento assinado eletronicamente por **BRUNO MARTINS MIRANDA**,
Discente, em 12/04/2021, às 12:36, conforme horário oficial de Brasília, com



fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Wesley Bueno Cardoso, Professor do Magistério Superior**, em 12/04/2021, às 13:21, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1996667** e o código CRC **D527828E**.

Referência: Processo nº 23070.015159/2021-33

SEI nº 1996667



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE FÍSICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

Dissertação Tese Outro*: _____

*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

Exemplos: Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

2. Nome completo do autor

Bruno Martins Miranda

3. Título do trabalho

Quebra de simetria em condensados de Bose-Einstein confinados por um potencial funil

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

a) consulta ao(a) autor(a) e ao(a) orientador(a);

b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.

O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.



Documento assinado eletronicamente por **Bruno Martins Miranda, Discente**, em 24/10/2024, às 14:40, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **4920171** e o código CRC **356323F0**.

BRUNO MARTINS MIRANDA

Quebra de Simetria em Condensados de Bose-Einstein Confinados por um Potencial Funil

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Física da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

Área de pesquisa: Átomos Frios

Orientador: Prof. Dr. Wesley Bueno Cardoso

Goiânia
2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Miranda, Bruno Martins

Quebra de Simetria em Condensados de Bose-Einstein
Confinados por um Potencial Funil [manuscrito] / Bruno Martins
Miranda. - 2021.

52 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Wesley Bueno Cardoso.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto
de Física (IF), Programa de Pós-Graduação em Física, Goiânia, 2021.
Bibliografia.

Inclui gráfico.

1. Condensados de Bose-Einstein. 2. Equação de Gross-Pitaevskii.
3. Quebra de simetria. I. Cardoso, Wesley Bueno, orient. II. Título.

CDU 53



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE FÍSICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº 194 da sessão de Defesa de Dissertação de Bruno Martins Miranda, que confere o título de Mestre em Física, na área de concentração em Física.

Aos 09 dias do mês de abril de 2021, a partir das 14h00min, por meio de videoconferência, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada “Quebra de simetria em condensados de Bose-Einstein confinados por um potencial funil”. Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor Wesley Bueno Cardoso (IF/UFG), com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor Jorge Mário Carvalho Malbouisson (IF/UFBA), membro titular externo; e Professor Doutor Norton Gomes de Almeida (IF/UFG), membro titular interno. Durante a arguição, os membros da banca não fizeram sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido o candidato aprovado pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor Wesley Bueno Cardoso, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos membros da Banca Examinadora, aos 09 dias do mês de abril de 2021.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA



Documento assinado eletronicamente por **Norton Gomes De Almeida, Professor do Magistério Superior**, em 09/04/2021, às 16:07, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Jorge Mario Carvalho Malbouisson, Usuário Externo**, em 09/04/2021, às 16:10, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Wesley Bueno Cardoso, Professor do Magistério Superior**, em 09/04/2021, às 16:10, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1960902** e o código CRC **C03257F4**.

à minha mãe.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao orientador Prof. Dr. Wesley Bueno Cardoso, pela recepção ao IF, pela grande ajuda e orientação durante esta jornada, sem ele este trabalho não seria possível. Aos professores do Instituto de Física, pela excelência no ensino e dedicação à pesquisa. À todos que contribuíram para realização deste trabalho, em especial ao Ms. Mateus Calixto pelo auxílio nos momentos difíceis. À UFG e ao Programa de Pós-graduação pela oportunidade de estudo. Às agências de fomento, em especial ao CNPq, por financiarem a pesquisa.

“O período de maior ganho em conhecimento e experiência é o período mais difícil da vida de alguém.”

– **Dalai Lama**

RESUMO

Previsto teoricamente em 1923-1924 por Bose e Einstein e obtido experimentalmente apenas em 1995, o condensado de Bose-Einstein tornou-se um importante laboratório para a investigação de diversos fenômenos quânticos, como por exemplo, as oscilações de Josephson, o estudo de vórtex, a utilização como interferômetros, entre outros. Utilizando a teoria do campo médio, para incluir os efeitos da interação média entre as partículas, Gross e Pitaevskii obtiveram na década de 60 uma equação capaz de descrever a dinâmica de um gás diluído à temperatura de 0 K. Modelos de redução dimensional para a equação de Gross-Pitaevskii foram elaborados para diversos tipos de potencial confinantes com o objetivo de simplificarem os cálculos numéricos e reproduzirem resultados precisos. Para condensados com uma forte interação atrativa, confinados por potenciais de poço duplo, sabe-se que ocorre o fenômeno da quebra espontânea de simetria. Nesse estado, a população de partículas entre os poços torna-se assimétrica, em contraste com a simetria do potencial confinante.

Neste trabalho consideramos um condensado no regime autofocante, confinado transversalmente por um potencial do tipo funil e axialmente por um poço duplo formado pela combinação de dois potenciais Pöschl-Teller invertidos. Utilizamos uma equação efetiva, obtida por meio de um método variacional para a equação de Gross-Pitaevskii, para analisarmos a quebra de simetria da densidade de probabilidade da função de onda que caracteriza o condensado. Essa quebra de simetria foi observada para vários valores da força de interação em função do mínimo do poço de potencial. Um diagrama de fase quântica foi obtido, na qual é possível reconhecer as três fases do sistema: fase simétrica (Josephson), fase assimétrica e os estados de colapso, quando a solução se torna singular, o que não representa o sistema físico, mostrando um limite de validade para o modelo sob consideração. Analisamos nossas soluções simétricas e assimétricas pelo método de evolução em tempo real, na qual foi possível atestar a estabilidade dos resultados. Por fim, uma comparação com a equação de Schrödinger cúbica não linear unidimensional e a equação de Gross-Pitaevskii em três dimensões é efetuada com o propósito de analisar a precisão da equação efetiva utilizada.

Palavras - chave: Condensados de Bose-Einstein, equação de Gross-Pitaevskii, quebra de simetria.

ABSTRACT

Theoretically predicted in 1923-1924 by Bose and Einstein and experimentally obtained only in 1995, the Bose-Einstein condensate became an important laboratory for the investigation of various quantum phenomena, such as the Josephson oscillations, the study of vortex, use as interferometers, etc. Using mean-field theory to include the effects of the average interaction between particles, in the 1960s, Gross and Pitaevskii obtained an equation capable of describing the dynamics of a diluted gas at a temperature of 0 K. Dimensional reduction models for the Gross-Pitaevskii equation were developed for several types of confining potentials in order to simplify numerical calculations and reproduce accurate results. For condensates with a strong attractive strength, confined by double-well potentials, it is known that the phenomenon of spontaneous symmetry breaking occurs. In this state, the particle population between wells becomes asymmetrical, in contrast with the symmetry of the confining potential.

In this work, we consider a condensate in the self-focusing regime, confined transversely by a funnel-like potential and axially by a double well formed by the combination of two inverted Pöschl-Teller potentials. We used an effective equation, obtained by means of a variational method for the Gross-Pitaevskii equation, to analyze the symmetry break of the probability density of the wave function that describes the condensate. This symmetry break was observed for several interaction strength values as a function of the minimum potential well. A quantum phase diagram was obtained, in which it is possible to recognize the three phases of the system: symmetric phase (Josephson), asymmetric phase (spontaneous symmetry breaking - SSB), and collapsed states, i.e., when the solution becomes singular, which does not represent the physical system, showing a validity limit for the model under consideration. We analyzed our symmetric and asymmetric solutions using the real-time evolution method, in which it was possible to confirm the stability of the results. Finally, a comparison with the cubic nonlinear Schrödinger equation in one dimension and the Gross-Pitaevskii equation in three dimensions is performed for the purpose of analyzing the accuracy of the effective equation used here.

Key - words: Bose-Einstein condensates, Gross-Pitaevskii equation, Symmetry breaking.

SUMÁRIO

Capítulo 1: Introdução	9
1.1 A Condensação de Bose-Einstein	9
1.2 Motivação	13
1.3 Objetivos	14
Capítulo 2: Modelo Teórico	16
2.1 Propriedades do gás quântico	16
2.1.1 Gás diluído	16
2.1.2 Interação efetiva	17
2.2 A Equação de Gross-Pitaevskii	18
2.2.1 Formalismo do Campo-Médio	18
2.2.2 Aproximação de Hartree	21
2.3 Redução dimensional da equação de Gross-Pitaevskii	23
2.3.1 Condensado armadilhado por potencial harmônico	23
2.3.2 Condensado armadilhado por potencial funil	26
Capítulo 3: Quebra de Simetria	31
3.1 Quebra de Simetria em Condensados de Bose-Einstein	31
3.2 Quebra espontânea de simetria e colapso em junções de Josephson bosônicas	32
3.3 Quebra de simetria de sólitons com estabilidade oposta para potencial \mathcal{PT} -simétrico	36
3.4 Investigação da quebra de simetria para um BEC confinado por um potencial do tipo funil	39
Capítulo 4: Resultados e Discussões	41
Capítulo 5: Conclusão	47

INTRODUÇÃO

1.1 A Condensação de Bose-Einstein

Entre 1924-1925, Einstein previu que a uma certa temperatura um gás ideal formado por partículas de spin inteiro se condensariam no estado quântico de mais baixa energia (estado fundamental) e com velocidade zero, mesmo não havendo forças de interação entre as partículas do gás [1]. Em contrapartida, as teorias apontavam que, para um gás ideal, não poderia haver uma transição de fase, uma vez que a interação interatômica entre as moléculas de um gás é fator determinante para ocorrência desse fenômeno. Essa dualidade na teoria proposta por Einstein foi relatada em uma carta pessoal ao seu amigo Paul Ehrenfest [2]: *"A teoria é bonita, mas haverá nela alguma verdade?"*

Os diversos artigos publicados por Einstein buscavam a expansão da teoria proposta em 1924 por Satyendra Nath Bose para a estatística de fótons em um corpo negro [3]. Em seus trabalhos, Einstein investigou a aplicação da teoria de ondas de matéria, proposta por de Broglie, dado que se as partículas podem ser tratadas como ondas a estatística de Bose é válida tanto para fótons quanto para átomos. Cada partícula pode ser representada por sua função de onda associada ao seu estado quântico. O comprimento de onda térmico de de Broglie é dado pela seguinte relação [4]:

$$\lambda_{dB} = \frac{\hbar}{\sqrt{2\pi m k_B T}}, \quad (1.1)$$

em que \hbar é a constante de Planck reduzida ($\hbar = h/2\pi$), m é a massa do átomo, k_B é a constante de Boltzmann e T é a temperatura. Na Eq. (1.1) pode-se notar que o comprimento de onda térmico é inversamente proporcional à raiz quadrada da temperatura, por conseguinte, ao reduzir a temperatura dos átomos ocorre um aumento no comprimento de onda das partículas. Quando o sistema atinge uma certa temperatura crítica T_c , o comprimento de onda de de Broglie se torna comparável as distâncias

médias entre as partículas. Para um sistema composto por partículas bosônicas, ocorre a superposição das funções de ondas. Esse entrelaçamento entre as funções de ondas das partículas gera uma grande onda de matéria coerente onde, segundo Einstein, um número macroscópico de partículas (da ordem do número de partículas do sistema) passaria a ocupar o estado fundamental. Portanto, temos uma contribuição ou *peso* maior do estado fundamental nas propriedades físicas e termodinâmicas do sistema, sendo útil para investigar e compreender fenômenos quânticos em sistemas de muitos átomos. Uma visão simplificada desse problema é visto na Fig. 1.1

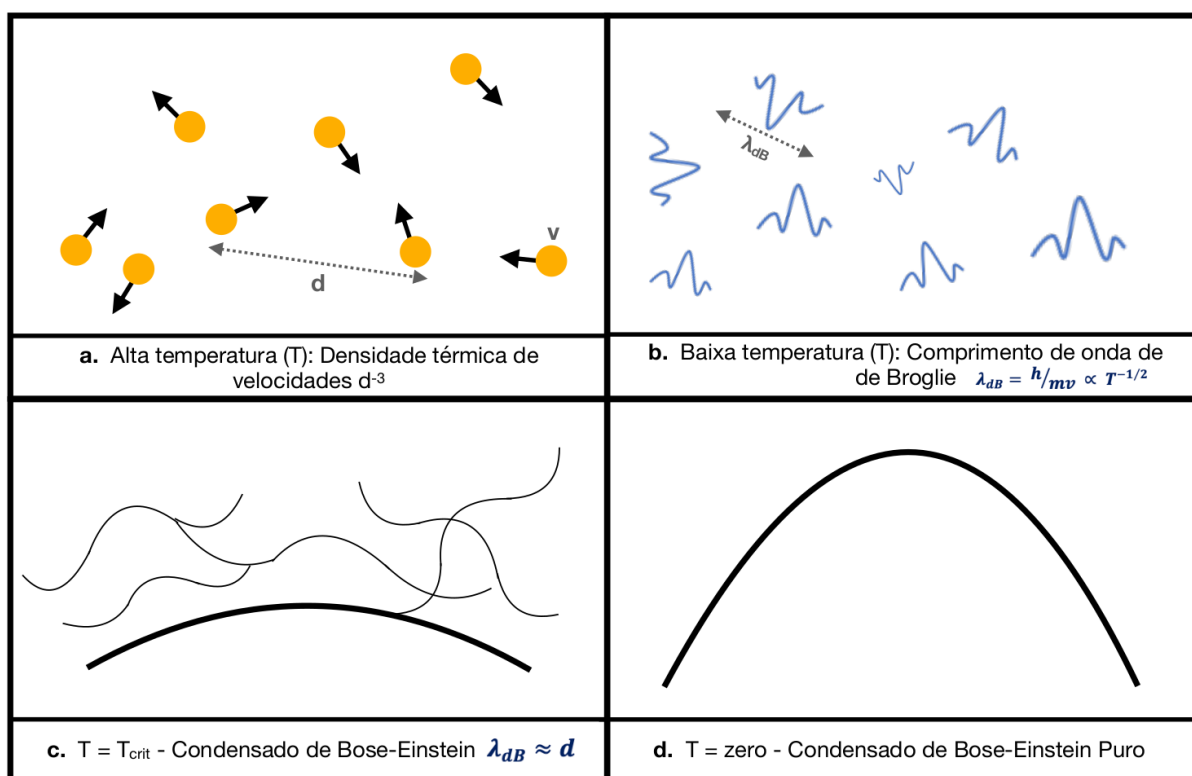


Figura 1.1: Representação do comportamento das partículas em relação à temperatura. Para altas temperaturas as partículas são tratadas como objetos pontuais através da Mecânica Clássica. A nível atômico ou a baixas temperaturas, devemos tratar as partículas segundo seus pacotes de onda usando a Mecânica Quântica. Para um gás diluído de bósons, conforme a temperatura diminui ocorre o aumento do comprimento de onda de Broglie λ_{dB} e, conseqüentemente, a superposição das funções de onda. Em $T = 0$ temos um número macroscópico de partículas ocupando o estado fundamental, o que caracteriza uma condensação de Bose-Einstein. Figura inspirada na Ref. [5].

A descoberta do ^4He em estado de superfluidez e suas propriedades bastante peculiares, como viscosidade zero, foi a primeira evidência associada ao efeito descrito por Einstein e Bose. Os estudos de London (1938) [6] relacionaram a transição de fase sofrida pelo ^4He à temperatura de 2,7 K ao fenômeno do Condensado de Bose-Einstein (do inglês *Bose-Einstein condensate* - BEC). A partir de então, o BEC deixara de ser mera especulação matemática.

O hélio superfluido exibe grandes complicações matemáticas, não havendo até o presente momento, uma teoria física que o descreve de forma bastante eficiente. Tais complicações estão principalmente ligadas ao fato de que, em um líquido, as interações entre os átomos se dão de maneira mais complexa do que em gases. Grandes estudos teóricos surgiram entre as décadas de 40 e 60, como a teoria desenvolvida por Landau para superfluidez, que rendeu-lhe o prêmio Nobel de 1962.

As grandes contribuições históricas que podem ser citadas são [7]: a aproximação de Bogoliubov (1947) proposta para sistemas de muitos corpos, na qual a contribuição do estado fundamental para a função de onda do sistema poderia ser separada dos demais estados excitados [8]; as contribuições de Penrose e Onsager (1956) para o conceito de parâmetro de ordem [9]; os trabalhos de Feynman (1953-1954) na determinação da função de onda para sistemas quânticos de muitos corpos; e, finalmente os trabalhos independentes de Eugene P. Gross e Lev Pitaevskii, no período entre 1959 a 1962, para a função de onda do BEC na aproximação do campo médio [10, 11].

Na aproximação do campo médio, assume-se que as partículas estão a adas uma das outras e a interação sentida é apenas uma interação média de dois corpos. Assim, o sistema pode ser escrito usando apenas uma função de onda. A evolução temporal para o BEC, na temperatura do zero absoluto, proposta por Gross e Pitaevskii é uma equação de campo médio para a função de onda (ou parâmetro de ordem) do tipo Schrödinger não linear (do inglês *nonlinear Schrödinger equation* - NLSE), dada por [12, 13],

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{r}) + g |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \Psi(\mathbf{r}, t), \quad (1.2)$$

em que m é a massa do átomo, $V_{ext}(\mathbf{r})$ é o potencial de confinamento da armadilha magnética e g é a constante de acoplamento a qual é diretamente proporcional ao comprimento de espalhamento a_s pela seguinte relação:

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m}. \quad (1.3)$$

A Eq. (1.2) com a constante de acoplamento dada pela Eq. (1.3) é conhecida como equação de Gross-Pitaevskii (do inglês *Gross-Pitaevskii equation* - GPE). No próximo capítulo serão abordadas mais informações acerca desta equação, como dedução através das aproximações de Hartree e Bogoliubov, potencial de alcance zero, comprimento de espalhamento da onda-s positivo e negativo, condição de gás diluído, densidade, entre outras investigações importantes para o estudo dos condensados.

Nas décadas seguintes, tiveram início os estudos experimentais por condensados de Bose-Einstein que apresentaram menores complicações teóricas do que as observadas em líquidos [14]. Na década de 80 foi confirmada a condensação para sistemas formados por excitons (par elétron-buraco) em semicondutores, ainda assim se tratava de um

sistema bastante complexo, como o ^4He superfluido. Nesse período houve um intenso estudo na busca por condensação em gases formados por hidrogênio spin-polarizado H^\uparrow , por acreditar serem estáveis mesmo para temperatura zero, $T = 0$ K. Entretanto, para as altas densidades requeridas para os experimentos da época, as interações de três corpos tornavam-se relevantes, de modo que alguns átomos de hidrogênio trocavam a orientação de seus spins fazendo surgir moléculas de H_2 e tornando o sistema inviável para o surgimento do BEC.

Os candidatos mais promissores para obtenção do estado condensado foram os átomos alcalinos: Li, Na, K, Rb e Cs e vale destacar que algumas das propriedades contribuíram para a escolha desse tipo de átomo como: níveis de energia excitáveis de forma mais eficiente por laser disponíveis; estruturas internas preenchidas, exceto a última camada s com um elétron; camada s mais simples por apresentar simetria esférica; e possuem momento magnético, o que favorece as condições para resfriamento e confinamento através de armadilhas magnéticas.

De forma simplificada, o resfriamento a laser consiste em frear átomos que saíram de um forno com uma temperatura próxima a 600 K e com velocidades de 800 m/s. Os átomos são ejetados do forno e passam por um aparato experimental chamado de Zeeman *slower*, que constitui de um laser propagando na direção oposta ao feixe de átomos e que é responsável por desacelerá-los até uma velocidade de aproximadamente 30 m/s. Para isso, é necessário que a energia do fóton seja aproximadamente igual a energia de separação dos níveis atômicos, para que ocorra um número considerável de absorções (cerca de 30.000 fótons para um átomo de sódio a 500 m/s, sendo parado em 1 ms [15]). O deslocamento Doppler dos níveis de energia, devido a velocidade relativa dos átomos, diminui a eficiente absorção dos fótons e, por conseguinte, diminui sua emissão. Para aumentar os níveis de absorção é preciso utilizar um campo magnético variável próximo a saída do forno. O intuito é deslocar os níveis de energia (deslocamento Zeeman) para restabelecer a ressonância entre o átomo e o campo de radiação produzido pelo laser. Os átomos são então capturados por uma armadilha magneto-óptica onde são novamente resfriados até aproximadamente $100 \mu\text{K}$ [12].

Apesar de muito importante, apenas o resfriamento a laser não é capaz de produzir BECs. Os primeiros resultados surgiram com a utilização do método de resfriamento evaporativo proposto por Hess [16], que consiste em ejetar as partículas mais energéticas da nuvem atômica com o objetivo de diminuir a temperatura de todo o sistema, usando para isso radiação de rádio frequência [17]. As temperaturas atingidas por esse procedimento são da ordem de 10^{-9} K. Mais informações sobre as técnicas de resfriamento podem ser encontradas nas referências [12, 17, 18].

Por fim, no ano de 1995 ao utilizar os métodos descritos acima, três grupos atingiram o estado de BEC para átomos alcalinos diluídos. O primeiro foi obtido na Universidade do Colorado, em Boulder, por Cornell e Wieman, utilizando vapor de ^{87}Rb

a aproximadamente 170 nK [19]. Bradley e colaboradores na Universidade de Houston, atingiram o estado de condensado para átomos de Li, com interações interatômicas atrativas, no qual a teoria previa a não ocorrência de condensado para esse tipo de sistema devido ao colapso da função de onda [20]. No estudo de Ketterle e colaboradores, foi atingido o estado de BEC para átomos de Na no *Massachusetts Institute of Technology*. A Fig. 1.2 mostra, em três instantes, a distribuição de velocidade para um BEC em um gás de rubídio: pouco antes da condensação; no momento exato da condensação, exibindo um pico acentuado e próximo ao centro da distribuição; e a aproximadamente 0 K.

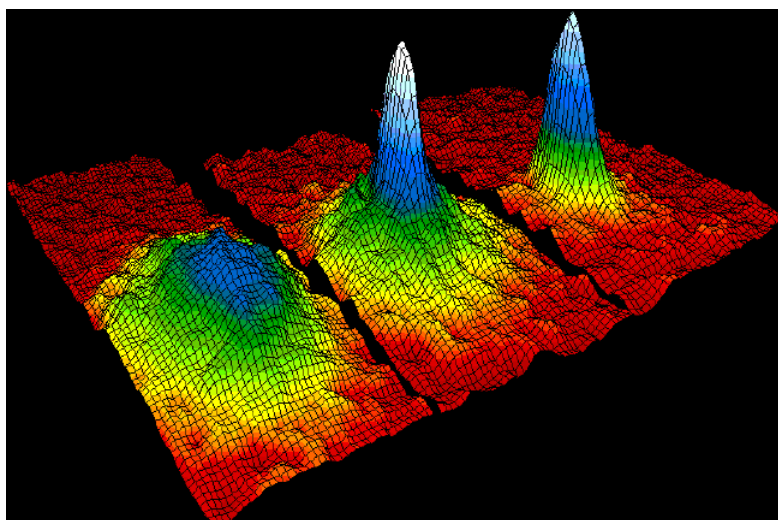


Figura 1.2: Distribuição de velocidade para um gás diluído de ^{87}Rb , confirmando a descoberta do BEC. Esquerda: antes do surgimento do condensado. Centro: imediatamente após o aparecimento do condensado. Direita: o condensado após sofrer mais resfriamento evaporativo. Imagem reproduzida da Galeria de Imagens de NIST/ JILA. Disponível em: <https://jila.colorado.edu/bec>. Domínio Público.

Com a obtenção do condensado em 1995 o interesse pelo tópico de átomos super frios fez surgir novas contribuições teóricas e experimentais sobre o tema. O estado condensado foi atingido para átomos de crômio [21], para moléculas de lítio [22, 23], para pares de partículas fermiônicas [24], além da utilização do condensado para a investigação da formação de vórtices [25], localização de Anderson [26], aplicação como interferômetro [27] e a recente observação da emissão espontânea e estacionária de radiação Hawking em análogos de buracos negros [28].

1.2 Motivação

As NLSEs, como a GPE, Eq. (1.2), são equações diferenciais parciais do tipo parabólica (elíptica no caso independente do tempo) e possuem soluções analíticas exatas apenas para poucos casos, sendo comumente necessário recorrer à utilização de

métodos numéricos computacionais, como o método de Runge-Kutta de quarta ordem, método de *split-step*, métodos espectrais, algoritmo de Crank-Nicholson para diferenças finitas, uso da transformada rápida de Fourier (*Fast Fourier Transform* - FFT), entre outros, que podem ser encontrados em vários livros de Física Computacional [29, 30]. Os cálculos computacionais necessitam de equipamentos cada vez melhores e com maior poder de processamento de dados para que seja possível realizar as milhares de iterações necessárias aos métodos numéricos no menor tempo possível. Outra forma de contribuir para diminuição no tempo de execução dos programas é o uso de métodos de redução dimensional em equações de muitas dimensões. Essas equações efetivas visam simplificar o problema inicial mas, ainda assim, garantir a recuperação de informações físicas necessárias para caracterizar o sistema. Podemos destacar dois trabalhos relevantes para nosso estudo: uma equação efetiva para o BEC, obtida usando um método variacional proposto por Salasnich et. al. em 2002 [31]; e a equação efetiva, na teoria do campo médio, proposta por Maeto e Delgado em 2008 [32].

1.3 Objetivos

O intuito deste trabalho é investigar a quebra espontânea de simetria (do inglês *spontaneous symmetry breaking* - SSB) em BEC armadilhados por um potencial externo. Analisando os trabalhos da literatura, em especial os estudos de Mazzarella e Salasnich [31, 33] e Yang [34], busca-se reproduzir os resultados obtidos e expandir o problema para um confinamento transversal do tipo funil, utilizando uma equação efetiva proposta por dos Santos [35] na qual usaremos um potencial axial na forma de poço duplo invertido.

Seguindo a Ref. [33], a SSB foi observada para um condensado em forma de charuto com interação atrativa (comprimento de espalhamento negativo) entre átomos de ${}^7\text{Li}$, confinados por uma combinação de potenciais do tipo Pöschl-Teller invertido na direção axial e um potencial genérico na direção radial. Desta forma, gera-se um poço duplo e simétrico em relação a origem do eixo de coordenadas, sendo possível aumentar ou diminuir a altura da barreira ajustando os parâmetros do potencial confinante. Assim, pode-se investigar as junções de Josephon, o (des)equilíbrio populacional fracionário entre os dois poços, a quebra de simetria e o momento onde há o colapso do condensado, simplesmente ajustando a constante da força de interação entre os átomos. Outro modelo analisado, Ref. [34], demonstrou a quebra de simetria para sólitons em uma guia de onda para um potencial \mathcal{PT} - simétrico. Para estes casos, nosso objetivo trata-se do desenvolvimento dos métodos e da aplicação, visando recuperar os mesmos resultados propostos.

Organizamos os assuntos abordados nessa dissertação da seguinte forma. No Capítulo 2 discute-se o modelo teórico que descreve a dinâmica do condensado, as propriedades de um gás quântico diluído, a simplificação do modelo ao aproximar a

interação entre os átomos por um potencial efetivo, o formalismo do campo-médio e a aproximação de Bogoliubov. Mostraremos como obter a GPE através dos operadores bosônicos e do hamiltoniano de interação de muitas partículas e também obtemos a equação com outros métodos, como a aproximação de Hartree e o método variacional para o funcional da ação. Apresentaremos a redução dimensional da GPE para dois problemas diferentes, utilizando tanto um *ansatz* gaussiano quanto um exponencial no desenvolvimento das equações efetivas.

No Capítulo 3 apresentamos um breve estudo sobre a quebra de simetria em dois tipos de sistemas descritos por NLSEs: um BEC e um sóliton em um meio óptico. Inicialmente explicaremos a quebra de simetria de um BEC em um potencial de Pöschl-Teller, seguindo como referência o trabalho de Mazzarella e Salasnich [33]. Posteriormente, abordaremos a quebra de simetria de sólitons em um potencial de paridade-tempo simétrico (\mathcal{PT} - simétrico) conforme a referência [34]. Com a metodologia desenvolvida a partir destes estudos seguimos para a caracterização do nosso problema: um condensado armadilhado transversalmente por um potencial funil e axialmente por um potencial de poço duplo (do inglês *double-well potential* - DWP).

No Capítulo 4 discutimos os resultados obtidos e analisamos a quebra de simetria para o problema considerado. Algumas comparações com outras equações são realizadas a fim de atestar a validade dos nossos resultados.

No Capítulo 5 apresentamos nossas conclusões sobre o tema e nossos objetivos futuros.

MODELO TEÓRICO

Neste capítulo nossa principal atenção será voltada para a dedução das equações matemáticas que descrevem o modelo do BEC. Primeiro deduziremos a GPE, uma equação de campo médio para o parâmetro de ordem ou função de onda. Em seguida realizaremos uma redução dimensional para esta equação a partir de um método variacional, onde obteremos uma equação efetiva para o BEC em uma dimensão, usando como referência o trabalho de Salasnich et al. [31].

2.1 Propriedades do gás quântico

Os primeiros BECs foram obtidos por meio do uso de átomos alcalinos diluídos. Os gases quânticos diluídos possuem características muito diferente dos gases normais. Nesta seção serão abordadas duas propriedades dos gases diluídos: sua densidade e a colisão entre as moléculas que o constitui.

2.1.1 Gás diluído

Os gases diluídos no centro de um condensado possuem densidade cerca de dez mil vezes menor quando comparados a um gás ideal à temperatura ambiente. Em valores físicos, a densidade do gás diluído é da ordem de $10^{13} - 10^{15}$ partículas/cm³ enquanto a densidade em um gás normal à temperatura ambiente e pressão atmosférica é 10^{19} partículas/cm³. Para observar fenômenos quânticos em sistemas tão diluídos é necessário atingir temperaturas da ordem de 10^{-5} K. Assim, pode-se comparar essa temperatura com a temperatura em que observa-se fenômenos quânticos em líquidos e sólidos, aos quais possuem densidade da ordem de 10^{22} partículas/cm³. Nos líquidos, como por exemplo o ⁴He, o comportamento de superfluidez surge para temperaturas da ordem de 1 K. Nos sólidos, como por exemplo, os metais, os fenômenos quânticos surgem para temperaturas da ordem da temperatura de Debye, que é aproximadamente 10^2 K [12].

Para um gás diluído a baixas temperaturas, pode-se investigar muitas propriedades do sistema em termos de um único parâmetro, chamado de comprimento de espalhamento da onda-s, “ a_s ”. Em termos desse parâmetro, pode-se dizer que um gás de moléculas é diluído quando a distância de separação entre os átomos é muito maior do que o comprimento de espalhamento e quando o número de partículas N em um “volume de espalhamento”, dado por $|a_s|^3$, é muito menor do que um. O parâmetro adimensional, que serve para controlar a validade da aproximação de gás diluído, é dado por $n|a_s|^3 \ll 1$, onde n é a densidade média do gás. Todavia, essa quantidade não implica necessariamente que as interações atômicas são fracas e deve-se comparar a energia de interação com a energia cinética da nuvem atômica armadilhada. Segundo [36], temos

$$\frac{E_{int}}{E_{cin}} \propto \frac{N|a_s|}{a_{osc}}, \quad (2.1)$$

em que a_{osc} é o comprimento típico do oscilador harmônico dado por $a_{osc} = \sqrt{\hbar/m\omega}$. Como pode ser notado, esse termo pode ser muito maior do que 1, mesmo para $n|a_s|^3 \ll 1$, o que mostra que um gás diluído pode apresentar comportamentos de forte interação átomo-átomo.

A interação entre os átomos de um gás diluído descrito em termos do parâmetro de espalhamento sugere que as interações atômicas e, conseqüentemente, o potencial de interação, pode ser aproximado por um potencial efetivo que é proporcional à a_s . Portanto, mostraremos como a colisão entre os átomos afeta o potencial do nosso condensado.

2.1.2 Interação efetiva

O BEC é formado por um gás diluído (não-homogêneo) de partículas interagentes. A diluição do gás torna-se fator importante para os efeitos de colisão entre as partículas do sistema. Como a média das distâncias interatômicas é suficientemente grande em comparação com o comprimento de espalhamento, os efeitos de uma colisão entre três corpos podem ser desprezados.

No gás rarefeito as colisões entre duas partículas são elásticas e conservam energia e momento, o que dá ao condensado uma relativa estabilidade, com tempo de vida da ordem de minutos. O espalhamento entre duas partículas com energia total muito pequena e no referencial do centro de massa é dominado pela contribuição da onda-s para a função de onda, e pode ser descrito inteiramente por meio de um único parâmetro, o comprimento de espalhamento. Para uma aproximação de primeira ordem na interação, chamada de aproximação de Born, o comprimento de espalhamento é dado em termos da massa reduzida m_r entre as duas partículas [12],

$$a_{Born} = \frac{m_r}{2\pi\hbar^2} \int d\mathbf{r} V(\mathbf{r}). \quad (2.2)$$

Para um gás diluído, apenas as colisões binárias em baixas energias são importantes e a forma exata do potencial pode ser ignorada. Dessa maneira, pode-se utilizar um potencial efetivo de contato entre dois corpos para Eq. (2.2) da forma [36],

$$V(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) = g\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}), \quad (2.3)$$

em que a constante g é chamada de constante de acoplamento e está relacionada ao comprimento de espalhamento para duas partículas de massas iguais ($m_r = m/2$) por meio da expressão [13]:

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m}. \quad (2.4)$$

O potencial efetivo, e conseqüentemente, a constante de acoplamento, pode ser positivo ou negativo, dependendo do valor de a_s . Um valor negativo, $a_s < 0$, indica interação atrativa e um valor positivo para o comprimento de espalhamento, $a_s > 0$, uma interação repulsiva.

Os experimentos pioneiros realizados em 1995, aquele realizado por Cornell e colaboradores [19], com átomos de rubídio, e o experimento realizado pelo grupo do MIT [37], com átomos de sódio, se tratavam de comprimentos de espalhamento positivo. O experimento de Bradley e colaboradores [20], realizado com átomos de lítio, com comprimento de espalhamento negativo, $a_s < 0$, também foi capaz de atingir o estado de condensação. Para valores negativos da constante de acoplamento, o condensado possui um limite na densidade de partículas, para o qual, valores maiores de densidade causam o colapso do condensado [12].

2.2 A Equação de Gross-Pitaevskii

Nesta seção obteremos uma equação que descreve a dinâmica de um BEC para temperaturas próximas ao zero absoluto. Primeiramente usaremos o formalismo do campo-médio e a aproximação de Bogoliubov, na qual a contribuição dos estados não condensados para o operador de campo bosônico é negligenciada e obteremos a GPE. Em seguida mostraremos como obter esta equação através da aproximação de Hartree para a função de onda do sistema condensado como sendo o produto das funções de ondas individuais de cada partícula única.

2.2.1 Formalismo do Campo-Médio

Uma forma de obter a GPE, que descreve o comportamento do condensado em temperaturas próximas ao zero absoluto, é através da aproximação de Bogoliubov. Neste método utilizaremos a segunda quantização, onde os estados quânticos de um sistema

bosônico passam a ser tratadas como operadores de campo no espaço de Fock de criação e aniquilação [13], dados por

$$\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}^*(\mathbf{r}) \hat{a}_{\alpha}^\dagger, \quad (2.5)$$

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}(\mathbf{r}) \hat{a}_{\alpha}. \quad (2.6)$$

$\psi_{\alpha}(\mathbf{r})$ é a função de onda, \hat{a}_{α}^\dagger é o operador de criação e \hat{a}_{α} é o operador de aniquilação para a partícula α . No espaço de Fock, temos que esses operadores são definidos como:

$$\hat{a}_n^\dagger |n_0, n_1, \dots, n_{\alpha}, \dots\rangle = \sqrt{n_n + 1} |n_0, n_1, \dots, n_{\alpha} + 1, \dots\rangle \quad (2.7)$$

$$\hat{a}_n |n_0, n_1, \dots, n_{\alpha}, \dots\rangle = \sqrt{n_n} |n_0, n_1, \dots, n_{\alpha} - 1, \dots\rangle \quad (2.8)$$

onde n_{α} , que é o número de átomos no estado quântico de uma partícula, α é o autovalor do operador número. Para os operadores bosônicos no espaço dos números de ocupação temos as relações de comutação [13]:

$$[\hat{\Psi}(\mathbf{r}), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}')] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (2.9)$$

$$[\hat{\Psi}(\mathbf{r}), \hat{\Psi}(\mathbf{r}')] = 0, \quad (2.10)$$

$$[\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}')] = 0. \quad (2.11)$$

A aproximação do campo médio é normalmente aplicada a sistemas de muitas partículas interagentes e tem por finalidade simplificar o problema, não sendo necessário resolver exatamente a equação de Schrödinger para muitos corpos. A ideia principal proposta por Bogoliubov em 1947 [36] para um BEC formado por um gás diluído, à temperatura do zero absoluto, tem como objetivo separar a contribuição das partículas no estado condensado das contribuições dos demais estados.

Dizemos que um sistema atingiu o estado condensado quando o número de átomos, n_0 , de um particular estado de partícula única (nesse caso o estado fundamental) é da ordem do número de partículas que compõem o sistema, N . Ou seja, devemos ter $n_0 \gg 1$ com a razão n_0/N finita no limite termodinâmico $N \rightarrow \infty$. Neste caso, a generalização da descrição de Bogoliubov de um sistema dependente do tempo pode ser descrita pela expressão na representação de Heisenberg

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \Psi(\mathbf{r}, t) + \delta\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), \quad (2.12)$$

onde temos que $\langle \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \rangle = \Psi(\mathbf{r}, t)$ é a função de onda complexa definida como o valor esperado do operador de campo. O módulo dessa função de onda fixa a densidade do

condensado:

$$n_0(\mathbf{r}, t) = |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2. \quad (2.13)$$

Para derivarmos a equação para a função de onda do condensado, devemos utilizar o operador hamiltoniano para um sistema de N bósons interagentes, confinados por um potencial externo V_{ext} , que na segunda quantização tem a forma dada por [36]:

$$\hat{H} = \int d\mathbf{r} \Psi^\dagger(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{r}) \right] \hat{\Psi}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}), \quad (2.14)$$

onde $V(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ é o potencial efetivo de contato dado pela Eq. (2.3). Na representação de Heisenberg, devemos utilizar a expressão para a evolução temporal de um operador, $\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)$:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = [\hat{\Psi}, \hat{H}]. \quad (2.15)$$

Para resolvermos essa equação, devemos usar as propriedades dos comutadores, juntamente com as regras de comutação dos operadores de campo bosônicos dados pelas Eqs. (2.9) a (2.11)[36].

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}' \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}', t) V(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}', t) \right] \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t). \quad (2.16)$$

Com a substituição do potencial efetivo da Eq. (2.3), a função delta de Dirac seleciona o ponto onde $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$, resolvendo a integral da equação acima para a evolução temporal do sistema. Tomando a aproximação de Bogoliubov para o operador de campo bosônico, Eq. (2.12), e desprezando as pequenas contribuições dos estados fora do condensado, $\delta\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)$, temos a seguinte GPE para o parâmetro de ordem, ou função de onda do estado condensado

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\mathbf{r}) + g |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \Psi(\mathbf{r}, t). \quad (2.17)$$

Essa equação foi proposta independentemente por Gross e Pitaevskii por volta de 1960 e descreve o BEC para temperaturas próximas ao zero absoluto, $T \rightarrow 0$. Com a simplificação da interação entre as partículas, através de um potencial efetivo aproximado, o que se perde na teoria do campo médio para esse sistema é a linearidade característica das equações da mecânica quântica para uma partícula. Os efeitos dessa não linearidade serão discutidos no Capítulo 3.

Uma forma de encontrar o caso estacionário da GPE, Eq. (2.17), é através da equação para a função de onda

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi(\mathbf{r}) \exp\left(-\frac{i\mu t}{\hbar}\right), \quad (2.18)$$

em que μ é o potencial químico. Dessa forma obtemos a GPE independente do tempo:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r}) + g|\Psi(\mathbf{r})|^2\right)\Psi(\mathbf{r}) = \mu\Psi(\mathbf{r}). \quad (2.19)$$

2.2.2 Aproximação de Hartree

As Eqs. (2.17) e (2.19) também podem ser obtidas com a utilização da aproximação de Hartree, onde assumimos que a função de onda do condensado é o produto simetrizado das funções de onda de uma partícula, com todos os bósons no mesmo estado, $\phi(\mathbf{r})$,

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \prod_{i=1}^N \phi(\mathbf{r}_i), \quad (2.20)$$

em que a função de onda de uma partícula é normalizada na forma usual:

$$\int d\mathbf{r} |\phi(\mathbf{r})|^2 = 1. \quad (2.21)$$

Para um condensado com N partículas bosônicas, o hamiltoniano efetivo pode ser escrito como [12]:

$$H = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + V(\mathbf{r}_i) \right] + g \sum_{i<j} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \quad (2.22)$$

onde o primeiro termo corresponde a energia cinética, o segundo ao potencial externo e o terceiro termo ao potencial de interação entre as partículas, com g sendo a constante de acoplamento.

A partir da Eq. (2.22) podemos calcular o valor esperado do hamiltoniano para o estado quântico $\Psi(\mathbf{r})$ e substituí-lo pela expressão da Eq. (2.20). O resultado é dado por [12]:

$$E = N \int d\mathbf{r} \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla\phi(\mathbf{r})|^2 + V(\mathbf{r}) |\phi(\mathbf{r})|^2 + \frac{(N-1)}{2} g |\phi(\mathbf{r})|^4 \right]. \quad (2.23)$$

É conveniente introduzir o conceito de função de onda do estado condensado, $\psi(\mathbf{r})$,

$$\psi(\mathbf{r}) = N^{1/2} \phi(\mathbf{r}), \quad (2.24)$$

com a densidade do condensado dada por

$$n(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2. \quad (2.25)$$

Dessa forma, e desprezando os termos de $1/N$ da Eq. (2.23), o valor esperado da energia pode ser escrito como [12],

$$E(\psi) = \int d\mathbf{r} \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla\psi(\mathbf{r})|^2 + V(\mathbf{r}) |\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2}g |\psi(\mathbf{r})|^4 \right]. \quad (2.26)$$

Para encontrar a equação que otimiza a função de onda ψ , devemos minimizar a Eq. (2.26) com a condição de que o número de partículas N seja mantido constante. Isso é equivalente a utilizar o método dos multiplicadores de Lagrange, onde escrevemos $\delta E - \mu \delta N = 0$, na qual o potencial químico é nosso multiplicador de Lagrange. O resultado da minimização de um funcional da ação definida como $E - \mu N$, com μ fixo e N dado por $N = \int d\mathbf{r} |\psi(\mathbf{r})|^2$ é [12]:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) + g |\psi(\mathbf{r})|^2 \right) \psi(\mathbf{r}) = \mu \psi(\mathbf{r}), \quad (2.27)$$

que é a mesma equação obtida em Eq. (2.19).

Podemos utilizar um método variacional para obter a GPE dependente do tempo, dada pela Eq. (2.17). A lagrangiana adequada para sistemas dependentes do tempo possui um termo para o fluxo da função de onda:

$$\mathcal{L} = \int d\mathbf{r} \left[\frac{i\hbar}{2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) - \varepsilon \right]. \quad (2.28)$$

Nessa equação, ε é a densidade de energia, dada pela relação:

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla\psi|^2 + V(\mathbf{r}) |\psi|^2 + \frac{1}{2}g |\psi|^4. \quad (2.29)$$

A utilização da equação de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_z} = 0, \quad (2.30)$$

para a Eq. (2.28) com respeito a ψ (ou ψ^*) resulta na GPE dependente do tempo, Eq. (2.17), que foi obtida utilizando a aproximação de Bogoliubov na seção anterior:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) + g |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \Psi(\mathbf{r}, t). \quad (2.31)$$

2.3 Redução dimensional da equação de Gross-Pitaevskii

2.3.1 Condensado armadilhado por potencial harmônico

Em muitos experimentos para obtenção do BEC, o potencial de confinamento usado para armadilhar os átomos é o do tipo harmônico. Com um confinamento muito forte na direção axial, podemos aproximar o formato do condensado para o que chamados de formato de disco. Para um potencial de armadilhamento muito forte na direção radial, temos o condensado em formato de charuto. O potencial harmônico anisotrópico é:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m^2(\omega_x^2x^2 + \omega_y^2y^2 + \omega_z^2z^2), \quad (2.32)$$

e podemos introduzir a constante que dita o formato do condensado:

$$\lambda = \frac{\omega_z}{\omega_\perp}, \quad (2.33)$$

em que tomamos z como nossa direção axial e $\omega_\perp = \omega_x = \omega_y$. Para esse parâmetro adimensional, que caracteriza a anisotropia da armadilha, temos que para o caso de $\lambda > 1$ obtemos o formato de disco, para $\lambda < 1$ o formato charuto e para $\lambda = 1$ a forma esférica do condensado. Para obtenção de uma equação efetiva em uma dimensão, que descreve o comportamento do BEC, seguiremos o trabalho de Salasnich et al. [31], onde consideraremos primeiro o caso do condensado em forma de disco. O forte confinamento na direção axial permite a aproximação da forma do condensado, e das equações, para um caso em uma dimensão.

Partindo de uma abordagem variacional, o objetivo é minimizar o funcional da ação, dado por

$$S = \int dt d\mathbf{r} \Psi^*(\mathbf{r}, t) \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - V(\mathbf{r}) - \frac{1}{2}gN |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \Psi(\mathbf{r}, t), \quad (2.34)$$

e considerando um potencial de armadilhamento harmônico na direção transversal e genérico na direção axial

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\omega_\perp^2(x^2 + y^2) + V(z). \quad (2.35)$$

Ainda segundo a referência [31], usaremos o *ansatz* para a função de onda como o produto de uma função de onda complexa na direção axial por uma função de onda gaussiana de largura radial σ , onde σ depende da parte axial da função de onda e representa a densidade local de partículas por unidade de comprimento. Mais

precisamente, temos

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \phi(x, y, t; \sigma(z, t))f(z, t), \quad (2.36)$$

em que ϕ e f são normalizadas e ϕ é representada pela seguinte gaussiana

$$\phi(x, y, t; \sigma(z, t)) = \frac{e^{[-(x^2+y^2)/2\sigma(z,t)^2]}}{\pi^{1/2}\sigma(z, t)}. \quad (2.37)$$

A escolha de uma gaussiana é uma boa aproximação no limite de baixas interações por ser a solução exata de um estado fundamental para a equação de Schrödinger com potencial harmônico. Devemos introduzir a função Ψ no funcional da ação e aplicar a equação de Euler-Lagrange para as funções f e ϕ . Vamos admitir que a gaussiana ϕ varia muito lentamente em z , de forma que podemos aproximar $\nabla^2\phi \approx \nabla_{\perp}^2\phi$, obtendo para S :

$$S = \int dt d\mathbf{r} f^* \phi^* \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - V(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} gN |f\phi|^2 \right] f \phi, \quad (2.38)$$

em que $V(\mathbf{r})$ é dado pela Eq. (2.35) e g por Eq. (2.4).

Integrando a equação acima para x e y e usando a condição de normalização $\int |\phi|^2 dx dy = 1$, obtemos:

$$S = \int dt dz f^* \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - V(z) - \frac{gN\sigma^{-2}}{4\pi} |f|^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \sigma^{-2} - \frac{m\omega_{\perp}^2}{2} \sigma^2 \right] f. \quad (2.39)$$

O passo seguinte é a utilização da equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_z} = 0, \quad (2.40)$$

primeiro para σ , no qual é simples obter:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \sigma^{-3} - \frac{m\omega_{\perp}^2}{2} \sigma + \frac{gN\sigma^{-3}}{4\pi} |f|^2 = 0. \quad (2.41)$$

Fazendo a substituição de g , da Eq. (2.4) e utilizando o comprimento do oscilador harmônico para as coordenadas transversais, $a_{\perp} = \sqrt{\hbar/m\omega_{\perp}}$ obtemos para σ :

$$\sigma^2 = a_{\perp}^2 \sqrt{1 + 2a_s N |f|^2}. \quad (2.42)$$

Podemos notar que σ depende implicitamente de z e t através da função $|f|^2$. Para a função f , a minimização do funcional da ação (\mathcal{L}) nos leva a:

$$i\hbar \frac{\partial f}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + V(z) + \frac{gN|f|^2}{4\pi} \sigma^{-2} + \frac{\hbar^2}{2m} \sigma^{-2} + \frac{m\omega_{\perp}^2}{2} \sigma^2 \right] f. \quad (2.43)$$

Inserindo a Eq. (2.42) na equação acima, substituindo g pela Eq. (2.4) e usando $a_{\perp} = \sqrt{\hbar/m\omega_{\perp}}$ obtemos finalmente:

$$i\hbar \frac{\partial f}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + V(z) + \frac{gN}{2\pi a_{\perp}^2} \frac{|f|^2}{\sqrt{1 + 2a_s N |f|^2}} \right) f + \frac{\hbar\omega_{\perp}}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + 2a_s N |f|^2}} + \sqrt{1 + 2a_s N |f|^2} \right) f. \quad (2.44)$$

Essa é a chamada equação de Schrödinger não-polinomial em uma dimensão (do inglês *nonpolynomial Schrödinger equation* - NPSE), obtida por Salasnich et. al. em [31]. Nos limites de fraca interação, $a_s N |f|^2 \ll 1$ essa equação se reduz a GPE em uma dimensão.

Podemos expressar a Eq. (2.44) de forma adimensional, escrevendo o comprimento em unidades de $a_{\perp} = \sqrt{\hbar/m\omega_{\perp}}$, o tempo em unidades de ω_{\perp}^{-1} e a energia em unidades de $\hbar\omega_{\perp}$. O resultado é

$$i \frac{\partial f}{\partial t} = \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + V(z) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma^2} + \sigma^2 \right) + \frac{\Gamma |f|^2}{\sigma^2} \right] f, \quad (2.45)$$

onde introduzimos o fator $\Gamma = 2a_s N/a_{\perp}$, sendo o parâmetro da força de interação. A largura da gaussiana é agora definida como

$$\sigma^4 = 1 + \Gamma |f|^2. \quad (2.46)$$

Estas equações estão de acordo com o artigo de Mazzarella e Salasnich [33] e iremos usá-las para investigar os efeitos da SSB em BECs.

O estado fundamental da Eq. (2.45) pode ser obtido por meio dos métodos de propagação em tempo imaginário e *split-step* de segunda ordem. Na Fig. 2.1 obtemos, para diferentes valores da força de interação entre as partículas, $\Gamma = 2Na_s/a_{\perp}$, o estado fundamental do condensado. A linha representa a solução da equação efetiva 1D NPSE e os triângulos representam a solução da GPE. Nota-se a precisão da equação efetiva Eq. (2.45) em descrever o comportamento do BEC ao compará-la com a GPE. A solução em três dimensões para GPE foi obtida utilizando os métodos numéricos e computacionais mencionados.

Percebe-se que a densidade de probabilidade do estado fundamental torna-se mais estreita com o aumento do valor absoluto de Γ no regime atrativo, alcançando o estado colapsado para valores suficientemente elevados.

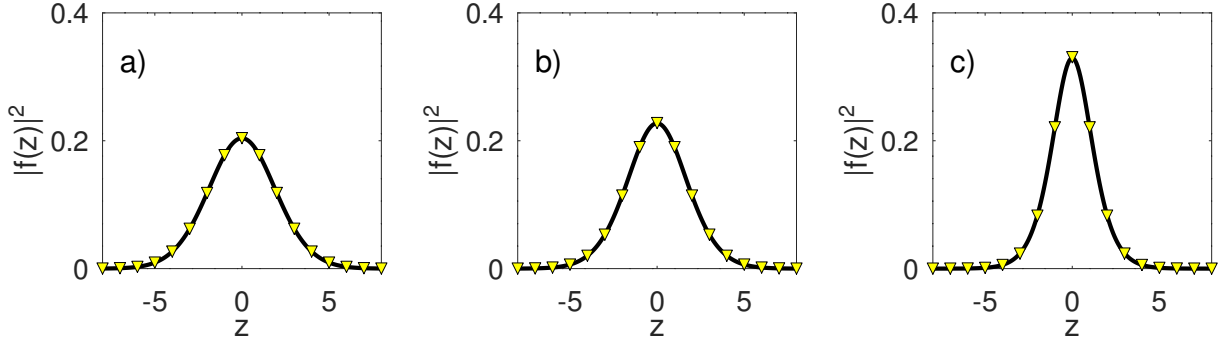


Figura 2.1: Estado fundamental de um condensado atrativo confinado por um potencial confinante. A linha representa a solução da equação efetiva em 1D e os triângulos a solução da equação 3D. Na figura a) temos o estado fundamental para $\Gamma = -0.3$, na figura b) o estado fundamental para $\Gamma = -0.5$ e na figura c) a densidade para $\Gamma = -1.0$. Nota-se o estreitamento do $|f(z)|^2$ conforme aumenta-se Γ .

2.3.2 Condensado armadilhado por potencial funil

Neste trabalho, dos Santos e colaboradores [35] considera um BEC confinado por um potencial do tipo funil, atuando no plano transversal (x, y) , isto é, um potencial atrativo 2D da forma:

$$V_{\perp}(r) = -\frac{\varepsilon^3}{2r}, \quad (2.47)$$

na qual $\varepsilon > 0$ é uma constante com dimensão de comprimento e a coordenada radial é definida como $r \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$.

A partir de uma aproximação variacional, utilizando como *ansatz* um perfil exponencial, é derivado uma equação efetiva que descreve a dinâmica do condensado. A utilização de uma aproximação variacional baseada em uma exponencial difere-se da proposta por [38], na qual utilizou-se um *ansatz* gaussiano. Entretanto, a aproximação exponencial está de acordo com a forma assintótica específica da função de onda em $r \rightarrow 0$, imposta pela singularidade do potencial do tipo funil. Desta forma, os resultados obtidos por meio da equação efetiva proposta por dos Santos et al. mostram uma precisão superior ao trabalho proposto por [38] para o mesmo tipo de confinamento transversal, quando em comparação com a GPE.

Os casos limites, como o regime de fraco acoplamento (1D NLSE) e forte acoplamento (regime de Thomas-Fermi) são também considerados para comparações com a equação efetiva desenvolvida.

A obtenção da equação efetiva parte da GPE, Eq. (2.31):

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r, z) + Ng |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \psi(\mathbf{r}, t), \quad (2.48)$$

na qual N representa o número de átomos no condensado, $\psi(\mathbf{r}, t)$ é a função de onda na aproximação do campo médio, $g = 4\pi\hbar^2 a_s/m$ é a constante de acoplamento e $V(r, z)$ o potencial do tipo funil é dado por:

$$V(r, z) \equiv -\frac{\varepsilon^3}{2r} + V(z), \quad (2.49)$$

incluindo o termo de armadilhamento transversal e o termo axial genérico $V(z)$.

Por meio de uma reescala das variáveis $t \rightarrow \omega_\perp t$, $(x, y, z) \rightarrow (x, y, z)/a_\perp$, $\psi \rightarrow \psi a_\perp^{3/2}$ e $V \rightarrow V/\hbar\omega$, com $a_\perp = \sqrt{\hbar/m\omega_\perp}$, na equação Eq. (2.48), chegamos a:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\nabla^2\psi + V(r, z)\psi + 2\pi\Gamma|\psi|^2\psi. \quad (2.50)$$

com $\Gamma = 2a_s N/a_\perp$.

A densidade de lagrangiana que corresponde à Eq. (2.50) com o potencial Eq. (2.49) é dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \left(\psi^* \frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial\psi^*}{\partial t} \right) - \frac{1}{2} |\nabla\psi|^2 - \left(V(z) - \frac{\varepsilon^3}{2r} \right) |\psi|^2 - \pi\Gamma |\psi|^4. \quad (2.51)$$

O objetivo é reduzir o modelo 3D para uma equação efetiva em 1D apropriada. O *ansatz* proposto por dos Santos e colaboradores é dada pela seguinte expressão:

$$\psi(r, z, t) = \exp\left(-\frac{r}{2\eta^2}\right) \frac{f(z, t)}{\sqrt{2\pi\eta^2}}, \quad (2.52)$$

onde $f(z, t)$ é uma função de onda complexa axial e $\eta = \eta(z, t)$ é o comprimento transversal com a condição de normalização

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(z)|^2 dz = 1, \quad (2.53)$$

necessária para garantir a normalização unitária da função de onda em três dimensões.

Inserindo o *ansatz* proposto na equação da densidade lagrangiana, Eq. (2.51), devemos realizar a integração nas variáveis do plano transversal (x, y) e negligenciar as derivadas que incluem termos do tipo $\partial\eta/\partial z$ [31]. Após estes passos, obtemos a lagrangiana efetiva em uma dimensão, L_{1D} :

$$\begin{aligned} L_{1D} = & \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{i}{2} \left(f^* \frac{\partial f}{\partial t} - f \frac{\partial f^*}{\partial t} \right) - \frac{1}{2} \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 - \right. \\ & \left. - \left[V(z) + \frac{1}{2\eta^2} \left(\frac{1}{4\eta^2} - \varepsilon^3 \right) \right] |f(z)|^2 - \frac{\Gamma}{8} \frac{|f|^4}{\eta^4} \right] dz. \end{aligned} \quad (2.54)$$

O próximo passo consiste em utilizar a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_z} = 0, \quad (2.55)$$

tanto para f quanto para η . O resultado consiste em duas expressões:

$$i \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + V(z)f + \frac{1}{2\eta^2} \left(\frac{1}{4\eta^2} - \varepsilon^3 \right) f + \frac{\Gamma|f|^2}{4\eta^4} f, \quad (2.56)$$

$$2\varepsilon^3 \eta^2 - 1 - \Gamma|f|^2 = 0, \quad (2.57)$$

para f e η respectivamente. Inserindo a Eq. (2.57) na Eq. (2.56) obtemos a 1D NPSE dependente do tempo:

$$i \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + V(z)f - \frac{\varepsilon^6}{2(1 + \Gamma|f|^2)^2} f, \quad (2.58)$$

A equação efetiva Eq. (2.58) descreve a dinâmica de um condensado confinado no plano transversal por um potencial do tipo funil, Eq. (2.49), sendo o principal resultado da Ref. [35].

Como complemento, os regimes não lineares de forte e fraca interação podem ser obtidos de forma simplificada por meio de aproximações. Um BEC no regime de fraca interação implica que a relação a seguir é válida:

$$\Gamma|f|^2 \ll 1. \quad (2.59)$$

Utilizando esta aproximação para a NPSE, Eq. (2.58), e considerando até o segundo termo, obtemos a equação de Schrödinger cúbica não linear,

$$i \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + V(z)f - \varepsilon^6 \left(\frac{1}{2} - \Gamma|f|^2 \right) f. \quad (2.60)$$

Para um sistema com interação repulsiva entre as partículas, o regime de forte interação, conhecido como aproximação de Thomas-Fermi [12, 17], implica que podemos negligenciar a contribuição das derivadas espaciais, i.e., a contribuição da energia cinética é muito menor quando comparada ao termo de interação entre as partículas.

Com o objetivo de obter uma equação para este regime, devemos substituir na Eq. (2.48) uma função de onda normalizada, dada por [35]:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = e^{-i\mu t} \frac{f(z)}{\sqrt{(2\pi)}} e^{-r/2}, \quad (2.61)$$

que corresponde ao *ansatz* inicial, Eq. (2.52), com $\eta = 1$. Realizando as integrações em x e y , obtém-se o seguinte resultado:

$$|f(z)|^2 = \begin{cases} \frac{9}{4\Gamma} [4\mu - 4V(z) + \varepsilon^3], & \text{para } \mu + \varepsilon^3/4 > V(z) \\ 0, & \text{para } \mu + \varepsilon^3/4 \leq V(z). \end{cases} \quad (2.62)$$

Na Fig. 2.2 plotamos o estado fundamental para três valores da força de interação, (a) $\Gamma = 1$, (b) $\Gamma = 10$, e (c) $\Gamma = 40$, respectivamente. Utilizamos o potencial transversal do tipo funil, Eq. (2.47), com $\varepsilon = 1$, e um potencial axial harmônico definido por:

$$V(z) = \frac{1}{2}\lambda^2 z^2, \quad (2.63)$$

com $\lambda = 0, 1$. Nesta Figura, analisamos o perfil da densidade axial para as quatro equações descritas acima: GPE (2.50) (triângulos amarelos), 1D NPSE (2.58) (linha preta), 1D NLSE (2.60) (linha tracejada azul) e a aproximação de Thomas-Fermi (2.62) (linha pontilhada vermelha). Nota-se que a equação reduzida uni-dimensional, desenvolvida por meio de um *ansatz* exponencial, é a que mais se aproxima do resultado esperado, quando comparada às demais equações. Os resultados são apresentados aqui de forma didática e correspondem a novas simulações daqueles resultados já apresentados em [35].

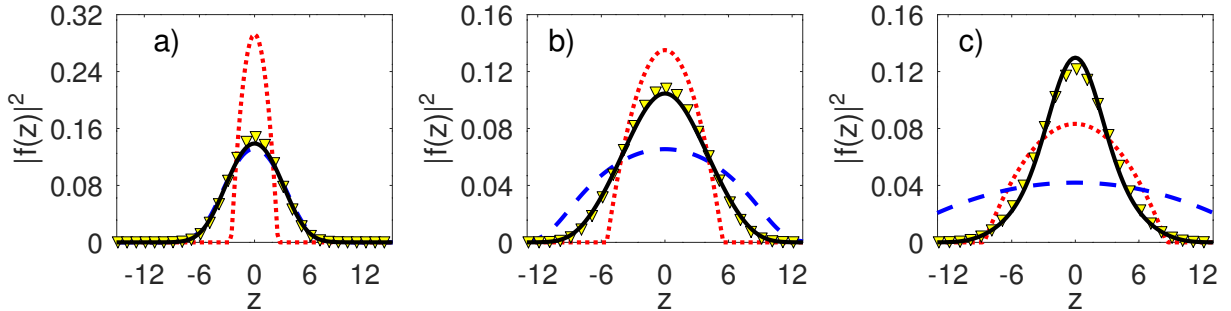


Figura 2.2: Comparação do estado fundamental da NPSE (linha preta), NLSE (tracejada azul), GPE (triângulos amarelos) e a aproximação de Thomas-Fermi (linha pontilhada vermelha), para três casos com atração repulsiva: a) $\Gamma = 1$, b) $\Gamma = 10$ e c) $\Gamma = 40$. Para o potencial confinante utilizamos $\varepsilon = 1$ e $\lambda = 0, 1$.

Adicionalmente, podemos analisar a precisão da 1D NPSE ao realizarmos simulações em tempo real. Para este propósito, usamos uma solução do estado fundamental, com $\Gamma = 5$, como *input* nos nossos cálculos, substituindo o potencial inicial por um levemente mais forte:

$$V \rightarrow 1.2 \times \left(\frac{1}{2} \lambda^2 z^2 \right). \quad (2.64)$$

Essa variação no confinamento axial dá origem à oscilações da função de onda [35]. Nosso objetivo é analisar a variação do comprimento quadrático médio de z , definido

para os casos 3D e 1D respectivamente por:

$$\langle z^2 \rangle \equiv \int z^2 |\psi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r}, \quad (2.65)$$

$$\langle z^2 \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} z^2 |f(z)|^2 dz. \quad (2.66)$$

Na Fig. 2.3 plotamos os resultados para o caso 3D (triângulos amarelos) e 1D (linha preta). Percebe-se que o resultado obtido por meio da equação efetiva está em conformidade com a dinâmica revelada pela GPE.

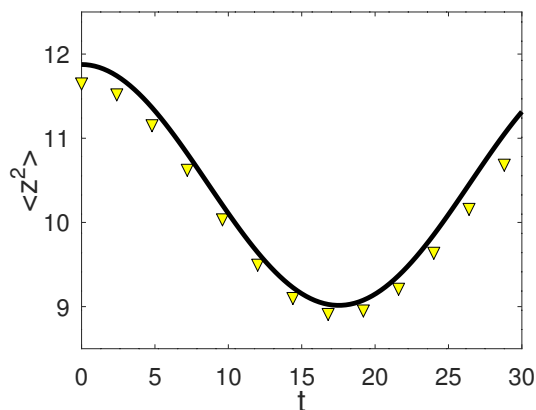


Figura 2.3: Oscilação do valor quadrático médio $\langle z^2 \rangle$ para a GPE (triângulos amarelos) e a 1D NPSE (linha preta).

Desta forma, apresentamos outro exemplo de redução dimensional para a GPE, que descreve um modelo de BEC, com um potencial transversal diferente do desenvolvido na seção anterior. Neste capítulo buscou-se corroborar a aplicabilidade da equação efetiva desenvolvida, fundamentando sua precisão em descrever a GPE.

QUEBRA DE SIMETRIA

Neste capítulo faremos uma breve revisão de dois trabalhos que abordam a SSB com o objetivo de reproduzir os resultados obtidos por Salasnish et al. [33] na Seção 3.2, e a quebra de simetria analisada por Yang para sólitons em um potencial \mathcal{PT} -simétrico [34] na Seção 3.3. Posteriormente, apresentaremos a metodologia para a investigação em um modelo de condensado confinado por um potencial transversal funil [35] e axial do tipo poço duplo, seção 3.4.

3.1 Quebra de Simetria em Condensados de Bose-Einstein

O fenômeno da SSB (*spontaneous symmetry breaking* - SSB) trata-se de uma manifestação bastante comum na física moderna, onde o estado de um sistema torna-se assimétrico com respeito à simetria que governa sua dinâmica. Usualmente, a simetria de um sistema é determinada pelo potencial externo atuante. Em particular, dois tipos são comumente empregados e investigados: potenciais de rede periódica e potenciais de poço duplo (DWP) com simetria entre os poços. Para o último caso, pode-se investigar os fenômenos de quebra de simetria, oscilações de Josephson e o estado colapsado por meio do tunelamento quântico entre os poços simétricos de um BEC confinado [39, 40, 41].

Em 1962, Josephson previu o tunelamento de elétrons para dois supercondutores separados por uma fina camada de isolante [42]. No contexto do BEC, a previsão deste fenômeno deu-se em 1997 por Smerzi e colaboradores [43] e foi obtido experimentalmente por Albiez e colaboradores em 2005 [41]. Trata-se de um tunelamento quântico dos átomos entre os poços do potencial duplo, responsável pelo aprisionamento do condensado. Dessa forma, o desequilíbrio populacional fracionário entre os dois poços é explicado pelo efeito Josephson.

Sabe-se que o estado fundamental de uma partícula na mecânica quântica segue exatamente a simetria do potencial na qual o sistema está disposto, ao passo que os

estados excitados podem assumir configurações assimétricas [39]. Como exemplo, para uma partícula presa num DWP a sua função de onda do estado fundamental é par em relação a simetria do eixo do potencial, enquanto para o primeiro estado excitado temos que a função de onda é ímpar [44]. Outra característica da mecânica quântica para uma partícula é a sua linearidade, facilmente notada pela equação de Schrödinger.

No desenvolvimento da teoria do campo médio para descrever gases rarefeitos formados por partículas bosônicas, brevemente apresentado no Capítulo 2, leva-se em consideração um potencial efetivo que tem como principal objetivo descrever a interação entre as partículas e os efeitos das colisões binárias. Assim, um termo cúbico é acrescentado à equação de Schrödinger, obtendo-se a GPE. Perde-se, todavia, a linearidade das equações da mecânica quântica para uma partícula livre. Este termo cúbico é o responsável por descrever as forças de repulsão ou atração entre as partículas e dá origem aos efeitos de autodefocagem e autofocagem da função de onda.

A GPE inclui o potencial externo, Eq. (2.17), e para modelos com a não linearidade autodefocante ($a_s > 0$) o estado fundamental permanece simétrico e estável em um DWP. Dessa forma, a não linearidade da GPE para um potencial DWP origina uma degenerescência para o estado fundamental [39, 44]. Já para modelos autofocantes ($a_s < 0$), com uma interação efetiva atrativa entre as partículas do gás, a simetria do sistema segue a simetria do DWP apenas no regime fracamente atrativo [45, 46, 47]. Com o aumento do módulo da força de interação entre as partículas, que pode ser ajustado por meio da ressonância de Feshbach [48], ocorre o fenômeno da SSB. Este fenômeno implica que o estado fundamental não é mais simétrico em relação ao eixo de simetria da barreira que separa o condensado. Essa SSB resulta em uma probabilidade maior de encontrar uma partícula em um poço do que no outro e a escolha do poço com o máximo da função de onda é determinado por pequenas perturbações aleatórias que impulsionam o sistema para o poço esquerdo ou direito [39].

Com o aumento do valor absoluto da força de interação as partículas passam a ocupar somente um dos poços e no limite crítico ocorre o colapso do BEC, fenômeno ocasionalmente chamado de *Bose-nova*. Durante o colapso a densidade da nuvem atômica aumenta, intensificando as colisões elásticas e inelásticas de dois e três corpos. Estas colisões ejetam os átomos em uma violenta explosão, destruindo o condensado [39].

3.2 Quebra espontânea de simetria e colapso em junções de Josephson bosônicas

Para demonstrar estes fenômenos usaremos a GPE [33],

$$i\frac{\partial f}{\partial t} = \left[-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + V_{\text{DW}}(z) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2} + \sigma^2\right) + \frac{\Gamma|f|^2}{\sigma^2} \right] f, \quad (3.1)$$

com

$$\sigma^4 = 1 + \Gamma|f|^2, \quad (3.2)$$

onde Γ determina a força de interação e é definido como:

$$\Gamma = \frac{2a_s N}{a_\perp} \quad (3.3)$$

Seguindo as referências [33] e [49] usaremos uma configuração simétrica na direção axial para o DWP. Trata-se de uma combinação de dois potenciais tipo Pöschl-Teller,

$$V_{\text{DW}}(z) = V_L(z) + V_R(z), \quad (3.4)$$

$$V_L(z) = -V_0 \left[\text{sech}^2 \left(\frac{z + z_0}{a} \right) \right], \quad (3.5)$$

$$V_R(z) = -V_0 \left[\text{sech}^2 \left(\frac{z - z_0}{a} \right) \right], \quad (3.6)$$

na qual $V_L(z)$ é o poço do lado esquerdo centrado em $-z_0$ e $V_R(z)$ o poço direito, centrado em $+z_0$. Na Fig. 3.1 temos a representação do potencial V_{DW} . Os poços são separados por uma barreira de potencial onde sua altura pode ser modificada por meio da mudança do parâmetro a . O uso dessa configuração de potencial Pöschl-Teller baseia-se na melhoria da precisão dos cálculos numéricos para a GPE [49].

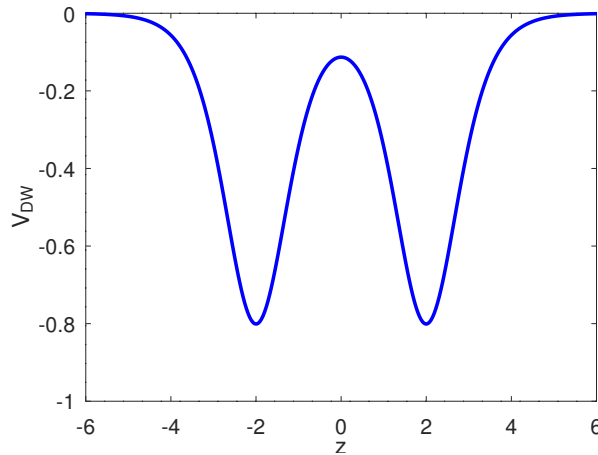


Figura 3.1: Potencial Pöschl-Teller invertido

Na direção radial, o confinamento é dado por um potencial harmônico. Dessa forma, o potencial confinante é:

$$V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) = V_{\text{DW}}(x) + \frac{m\omega_{\perp}^2}{2}\rho^2. \quad (3.7)$$

Resolvemos a equação 1D NPSE Eq. (3.1) usando o método numérico *split-step* de segunda ordem com tempo imaginário para obter o estado fundamental do condensado no potencial simétrico da Eq. (3.4). Em nosso programa, escolhemos o mínimo local dos poços em $-z_0 = -2a_{\perp}$ e $z_0 = 2a_{\perp}$ e a altura da barreira de energia que os separa como sendo $V_0 = 0, 8\hbar\omega_{\perp}$.

Como mencionado, o estado fundamental é sempre um estado metaestável para um BEC com partículas de comprimento de espalhamento negativo $a_s < 0$ [33]. Portanto, para $\Gamma < 0$ o estado estável é sempre o estado colapsado, com energia igual a menos infinito. Dessa forma, buscamos por estados metaestáveis para valores de $\Gamma < 0$.

Assim como na referência [33], encontramos o estado metaestável simétrico para valores entre $\Gamma_{\text{SSB}} < \Gamma < 0$ (fase Josephson), a fase da SSB para $\Gamma_C < \Gamma < \Gamma_{\text{SSB}}$ (fase SSB) e o estado colapsado para $\Gamma < \Gamma_C$ (fase colapsada). A Fig 3.2 mostra os resultados dos cálculos numéricos realizados. Para $\Gamma = -0.1$ temos o estado simétrico do condensado, para $\Gamma = -0.3$ nota-se o desequilíbrio populacional entre os poços direito e esquerdo e para $\Gamma = -0.7$ o condensado é localizado majoritariamente do lado direito do poço.

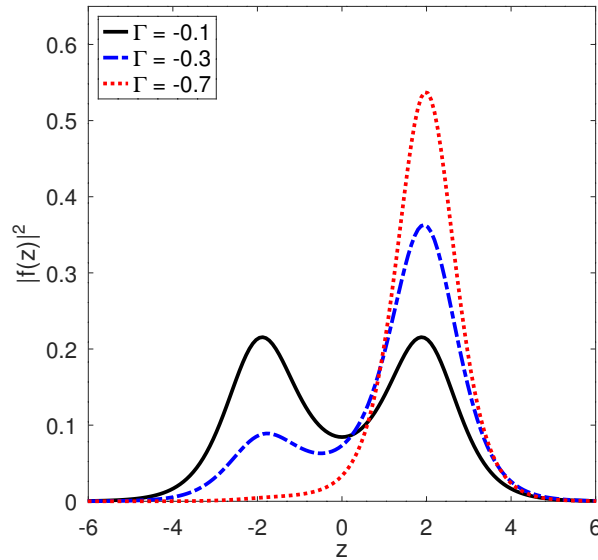


Figura 3.2: Densidade de probabilidade axial $|f(z)|^2$ do estado metaestável para o condensado atrativo em um DWP simétrico, com mínimos em $z_0 = \pm 2$. A altura da barreira é $V_0 = 0.8$ e $\Gamma = 2Na_s/a_{\perp}$ é a força de interação. Para $\Gamma = -0.1$ (linha contínua) temos o estado simétrico, para $\Gamma = -0.3$ (linha tracejada) temos a quebra de simetria e para $\Gamma = -0.7$ (linha pontilhada) o condensado encontra-se do lado direito do poço. Eixo z em unidades de a_{\perp} , densidade $|f(z)|^2$ em unidades de a_{\perp}^{-1} e energia em unidades de $\hbar\omega_{\perp}$.

Investigamos as fases quânticas desse condensado como função da altura da barreira de potencial V_0 com o objetivo de obter um diagrama de fase semelhante ao encontrado no artigo referenciado [33]. Utilizando a 1D NPSE, variando o valor absoluto da força de interação entre as partículas, Γ , e a energia da altura da barreira de potencial V_0 , obtemos uma aproximação para o diagrama de fase, Fig. 3.3. Os quadrados verdes indicam valores na qual o condensado encontra-se em um estado simétrico (fase Josephson). Os quadros brancos indicam os pontos onde há a SSB, com a densidade de probabilidade maior em um dos lados do poço duplo. Os quadros amarelos representam o estado colapsado de energia igual a menos infinito [33].

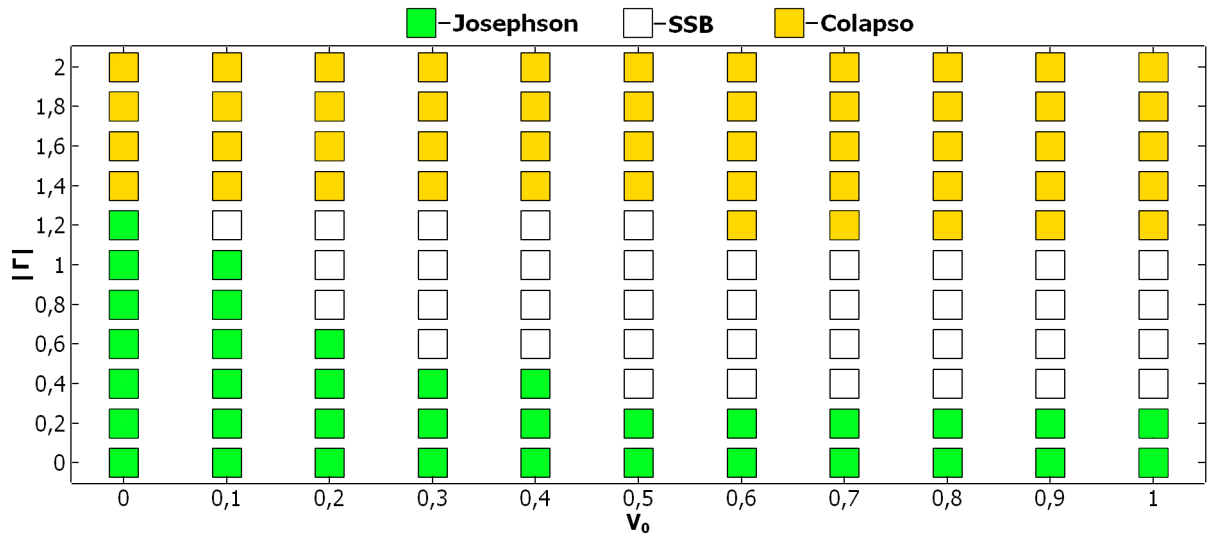


Figura 3.3: Diagrama de fase quântica ($V_0, |\Gamma|$) do condensado atrativo em um DWP. Os quadrados verdes indicam a fase Josephson, na qual o sistema é metaestável e simétrico, os quadrados brancos representam a fase da SSB e os quadrados amarelos indicam o estado colapsado do BEC. Energia V_0 em unidades de $\hbar\omega_{\perp}$.

3.3 Quebra de simetria de sólitons com estabilidade oposta para potencial \mathcal{PT} - simétrico

Outro artigo sobre quebra de simetria envolvendo uma NLSE foi investigado na Ref. [34]. O autor relata um novo tipo de bifurcação de quebra de simetria de sólitons em sistemas ópticos, com potencial paridade-tempo-simétrico. Os dois ramos bifurcados apresentam estabilidade oposta, contrastando os resultados prévios para quebra de simetria neste tipo de sistema. Para mais detalhes remetemos o leitor ao artigo de revisão que pode ser encontrado na Ref. [50].

O sistema considerado trata-se de um feixe de luz com propagação paraxial não linear em um potencial \mathcal{PT} - simétrico. Os cálculos são feitos utilizando um modelo de não linearidade cúbica-quintica [30, 51]:

$$i\Psi_z + \Psi_{xx} + V(x) + |\Psi|^2\Psi + \gamma|\Psi|^4\Psi = 0, \quad (3.8)$$

onde Ψ é o pacote complexo do campo elétrico da luz, z é a distância de propagação, x é a coordenada transversa, γ é o coeficiente de não linearidade quintica e $V(x)$ é o potencial \mathcal{PT} - simétrico, ou seja, $V^*(x) = V(-x)$. Este tipo de potencial indica que o índice de refração do meio ($\text{Re}(V)$) é simétrico no espaço, enquanto o perfil de perda e ganho ($\text{Im}(V)$) é antissimétrico no espaço [34]. Potenciais não hermitianos, no contexto dos BECs, são utilizados para implementar as colisões inelásticas de três corpos mediante o termo imaginário de perda do potencial [52].

O caso especial de potencial com simetria paridade e tempo, \mathcal{PT} - simétrico, utilizado para observar a quebra de simetria é dado por:

$$V(x) = g^2(x) + \alpha g(x) + ig'(x), \quad (3.9)$$

onde α é uma constante real, $g'(x)$ é a derivada de $g(x)$, uma função par e real, definida como:

$$g(x) = A \left(e^{-(x-x_0)^2} + e^{-(x+x_0)^2} \right), \quad (3.10)$$

e na qual utilizaremos os parâmetros $A = 2$ e $x_0 = 1, 2$. O gráfico desse potencial está plotado na Fig 3.4. Nota-se que a parte real possui duas cristas localizadas em $x_0 = \pm 1, 2$ e é simétrica em relação ao centro de coordenadas (linha sólida azul). A parte imaginária é antissimétrica (linha pontilhada preta).

Os sólitons da Eq. (3.8) são procurados da forma $\Psi(x, z; \mu) = \psi(x)e^{i\mu z}$, onde μ é a constante de propagação real e $\psi(x)$ é uma função localizada que satisfaz a relação [34]:

$$\psi_{xx} + V(x)\psi + |\psi|^2\psi + \gamma|\psi|^4\psi = \mu\psi. \quad (3.11)$$

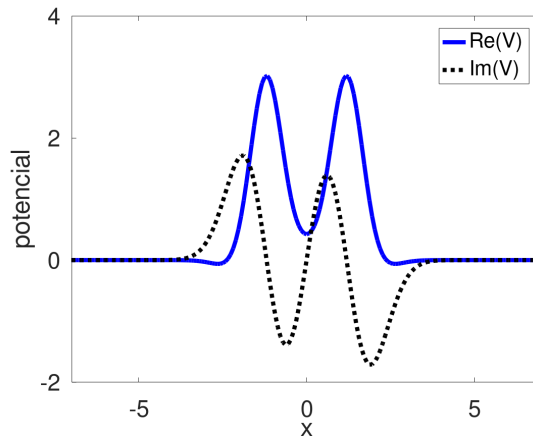


Figura 3.4: Potencial \mathcal{PT} -simétrico com a parte real simétrica e a parte imaginária antissimétrica. Utilizamos $\alpha = -0.5$, $A = 2,0$ e $x_0 = \pm 1, 2$.

No estudo de sólitons existe uma quantidade conservada, (semelhante à conservação da massa) definida como *power* (intensidade ou potência) dada por [30]:

$$P(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x; \mu)|^2 dx, \quad (3.12)$$

O gráfico de (P, μ) está plotado na Fig. 3.5 (a). É possível ver a bifurcação da curva, o que indica a quebra de simetria. Após a bifurcação a linha sólida em azul representa uma família de sólitons simétricos porém instáveis e a linha tracejada representa sólitons assimétricos que podem ser tanto estáveis como instáveis. O ponto marcado por *d* trata-se de um sóliton simétrico instável, Fig. 3.6 (a), e os pontos *e* e *f* são sólitons assimétricos, com energia concentrada na guia direita (instável), Fig. 3.6 (b), e esquerda (estável), respectivamente, Fig. 3.6 (c).

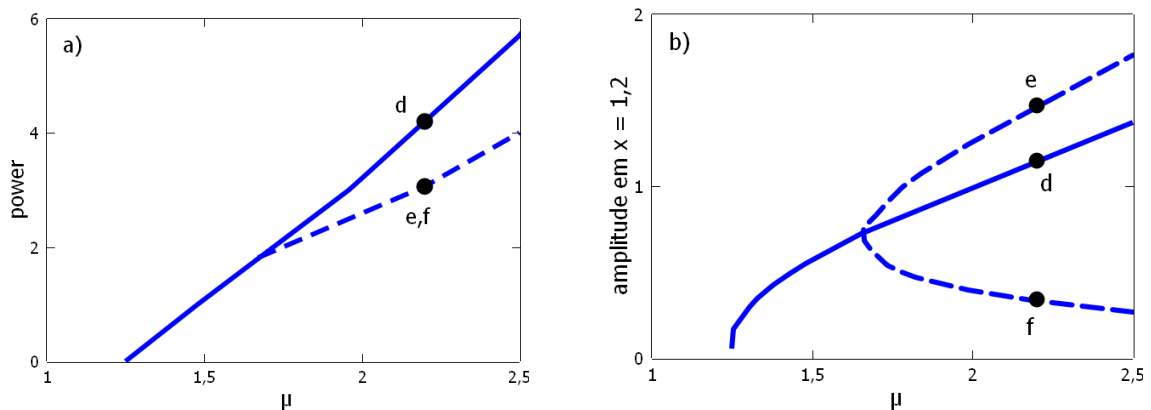


Figura 3.5: a) Curva do *power* para o potencial \mathcal{PT} - simétrico, a linha sólida representa sólitons simétricos e a linha tracejada assimétricos. b) Amplitude de ψ para o sóliton na guia de onda direita, em $x_0 = 1, 2$, em função da constante de propagação μ . O ponto *f* representa um sóliton estável, sua amplitude na guia de onda direita é a menor entre os pontos destacados.

Na Fig. 3.5 (a) não é possível distinguir entre os dois sólitons e e f . Por esta razão, plotamos a amplitude do sóliton, $|\psi|$, na guia direita, em $x = x_0 = 1, 2$, Fig. 3.5 (b). Assim, nota-se que o sóliton com energia concentrada na guia direita está acima da linha de \mathcal{PT} - simetria e o ponto com energia concentrada na guia esquerda está abaixo da linha de simetria.

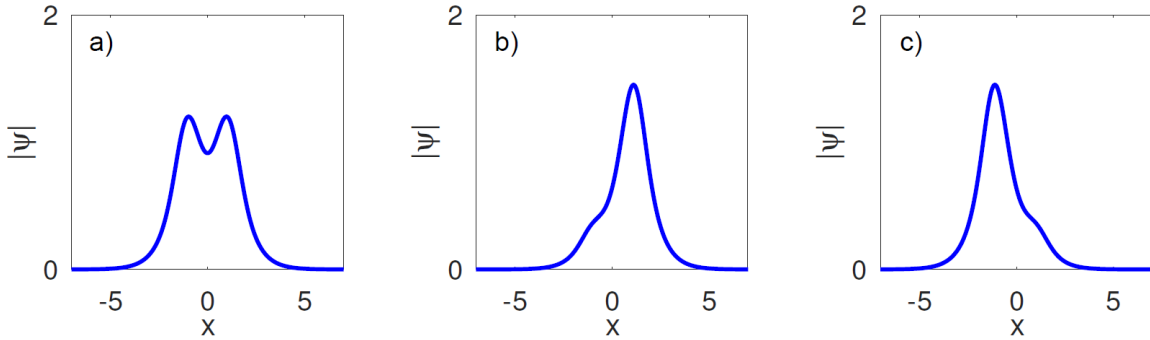


Figura 3.6: Sóliton simétrico (a) e sólitons assimétricos, com energia concentrada na guia de onda direita (b) e na guia de onda esquerda (c). Representam os pontos (d), (e) e (f) da (3.5 (a)), respectivamente.

Para analisar a estabilidade dos resultados obtidos, investigamos a evolução não-linear dos sólitons, adicionando um ruído à solução inicial, buscando corroborar os resultados encontrados na Ref. [34]. Perturbamos os sólitons das Figs. 3.6 (a) e (c) com um ruído arbitrário de 10% e utilizando o método de *split-step* de segunda ordem foi possível implementar a evolução em tempo real. O resultado está representado na Fig. 3.7.

Nota-se que o sóliton simétrico, acima do ponto de quebra de simetria e o sóliton com sua energia concentrada na guia de onda direita (pontos (d) e (e) na Fig. 3.5 (b), respectivamente) são ambos instáveis e a perturbação inicial leva-os para o canal esquerdo da guia de onda. Todavia, o sóliton com energia concentrada na guia esquerda possui uma estabilidade, vista ao analisarmos sua evolução segundo a Fig. 3.7 (c). Todos os gráficos corroboram os resultados encontrados na referência [34].

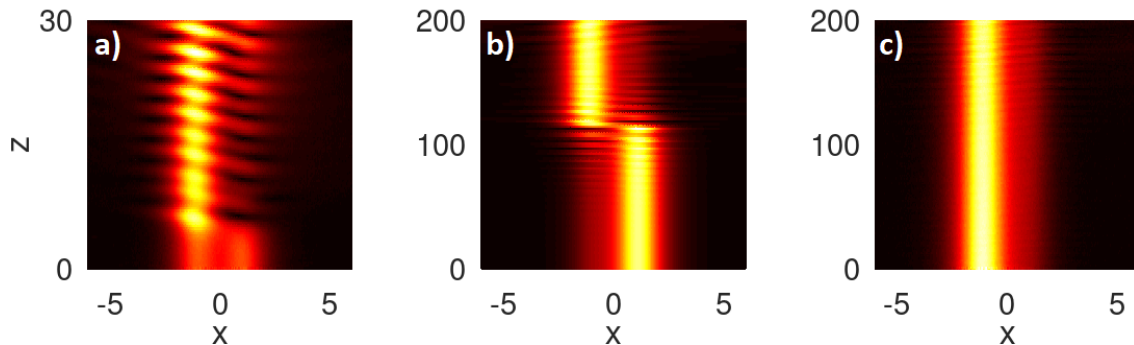


Figura 3.7: Evolução em tempo real dos sólitons da Fig. 3.6 (a), (b), (c), respectivamente.

3.4 Investigação da quebra de simetria para um BEC confinado por um potencial do tipo funil

Havendo apresentado a fundamentação teórica da GPE e as equações efetivas unidimensionais obtidas por métodos variacionais, além do fenômeno da quebra de simetria para sistemas armadilhados por certos tipos de potenciais confinantes, definiremos o estudo e a pesquisa de nosso trabalho. Analisaremos um sistema formado por um gás diluído quântico, com propriedades de interação atrativa, confinado por um potencial transversal do tipo funil [35] e um DWP na direção axial [33]. As equações que descrevem a dinâmica deste esquema foram apresentadas na sec. (2.3.2), sendo elas:

A GPE [36]:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r},t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r,z) + Ng|\psi(\mathbf{r},t)|^2 \right] \psi(\mathbf{r},t). \quad (3.13)$$

A 1D NPSE [35]:

$$i\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + V(z)f - \frac{\varepsilon^6}{2(1+\Gamma|f|^2)^2}f. \quad (3.14)$$

O potencial transversal funil e axial Pöschl-Teller invertido, representados na Fig. 3.8 (a) e (b), respectivamente [49],

$$V_{\perp}(r) = -\frac{\varepsilon^3}{2r}, \quad (3.15)$$

$$V_{\text{DW}}(z) = V_L(z) + V_R(z), \quad (3.16)$$

$$V_L(z) = -V_0 \left[\text{sech}^2 \left(\frac{z+z_0}{a} \right) \right], \quad (3.17)$$

$$V_R(z) = -V_0 \left[\text{sech}^2 \left(\frac{z-z_0}{a} \right) \right]. \quad (3.18)$$

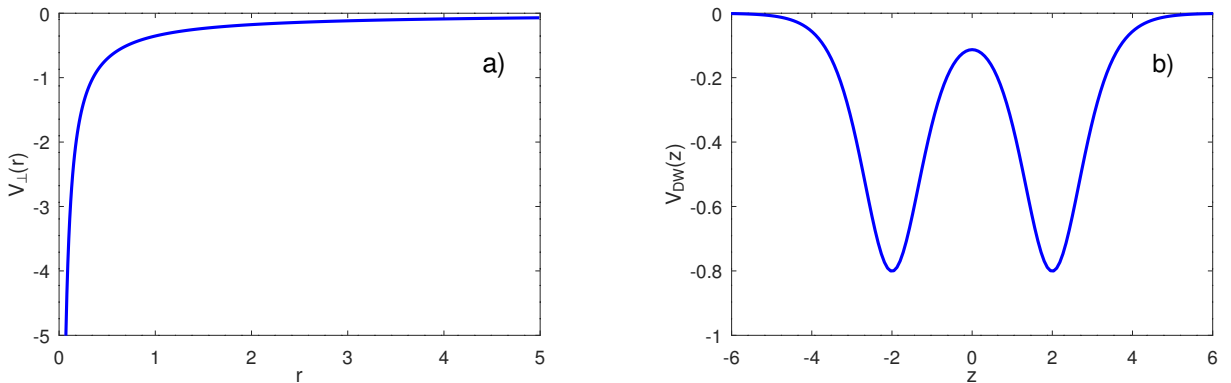


Figura 3.8: O potencial de armadilhamento nas direções transversal (a) e axial (b), com $V_0 = 0,8$, $z_0 = \pm 2$, $a = 1$ e $\varepsilon = 1$.

Aqui, usaremos um DWP na direção axial (diferente do potencial utilizado em [35]) para investigarmos se haverá a quebra de simetria na dinâmica das funções de onda que descrevem o problema. Pretende-se verificar a precisão da equação efetiva 1D NPSE em seus resultados ao compará-la com os cálculos realizados com a GPE.

Obtendo a quebra de simetria, efetuaremos as análises numéricas para elaborar um diagrama de fase quântica que represente as três fases do sistema: Josephson (simétrica), SSB (assimétrica) e o estado colapsado, que não representa uma solução física para o sistema. A efeito de comparação, um diagrama semelhante será elaborado para a NLSE em uma dimensão[35],

$$i\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + V(z)f - \varepsilon^6\left(\frac{1}{2} - \Gamma|f|^2\right)f, \quad (3.19)$$

que surge na aproximação de interação fraca, com objetivo de verificar se esta equação prevê a fase colapsada da solução. Posteriormente, calcularemos a evolução em tempo real das soluções encontradas pelo método da propagação em tempo imaginário, afim de investigar a estabilidade dos resultados.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Primeiramente, evoluímos a equação efetiva 1D NPSE em tempo imaginário, utilizando o método de *split step* de segunda ordem, para obtermos o estado fundamental do BEC em um DWP simétrico na direção axial. Este potencial trata-se da combinação de dois potenciais Pöschl-Teller invertidos, descritos pela Eq. (3.16), com $V_0 = -0,8\hbar\omega_\perp$ sendo o mínimo dos poços centrados em $\pm z_0 = \pm 2a_\perp$. Transversalmente, nosso sistema está confinado por um potencial do tipo funil, descrito pela Eq. (3.15).

A equação efetiva possui um termo não linear, responsável pela interação média das partículas do gás [35],

$$i\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + V(z)f - \frac{\varepsilon^6}{2(1 + \Gamma|f|^2)^2}f, \quad (4.1)$$

na qual fica evidente a dependência do parâmetro Γ . Na Fig. 4.1 plotamos a densidade da probabilidade axial da função de onda. Utilizamos três valores de Γ para obter uma evidência da SSB do nosso sistema. Para $\Gamma = -0,2$ (linha sólida preta) a solução apresenta-se simétrica em relação ao poço duplo, caracterizando o estado na qual denomina-se fase Josephson. Para $\Gamma > 0,2$ (linha tracejada azul) a solução do estado metaestável torna-se assimétrica e ocorre o fenômeno intitulado como SSB e, com $\Gamma = -0,5$ (linha pontilhada vermelha), o BEC está localizado praticamente no poço direito. Para valores de $\Gamma > 0,7$ a equação não prevê uma solução possível, i.e., uma singularidade em nossos resultados e a configuração do condensado colapsa na chamada *Bose-nova*, uma analogia ao fenômeno da *supernova*.

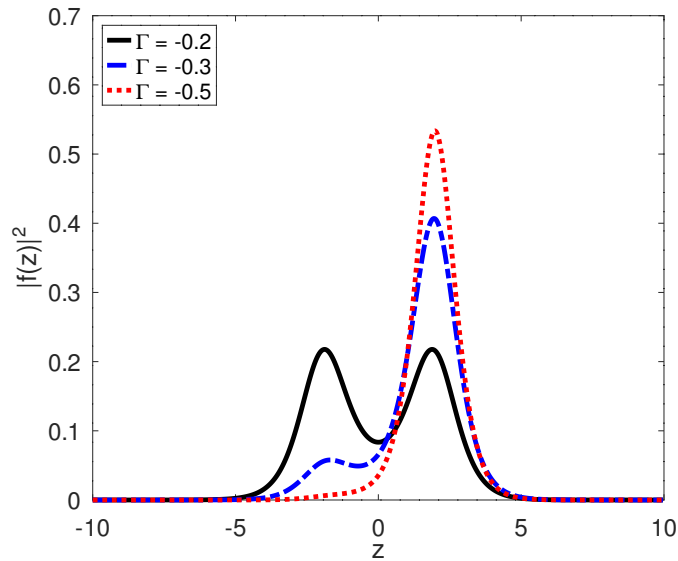


Figura 4.1: Densidade de probabilidade axial, $|f(z)|^2$, do estado fundamental para diferentes valores da força de interação, Γ , de um BEC atrativo confinado por um potencial funil na direção transversal e DWP na axial.

Em seguida, analisamos o comportamento da solução da equação efetiva para diferentes valores de V_0 e do módulo de Γ , afim de determinar um diagrama de fase para o nosso condensado. Este resultado está representado pela Fig. 4.2. Os quadrados em verde representam valores de Γ e V_0 na qual a solução é simétrica (fase Josephson), em branco temos a fase assimétrica (fase SSB) e em amarelo os estados colapsados.

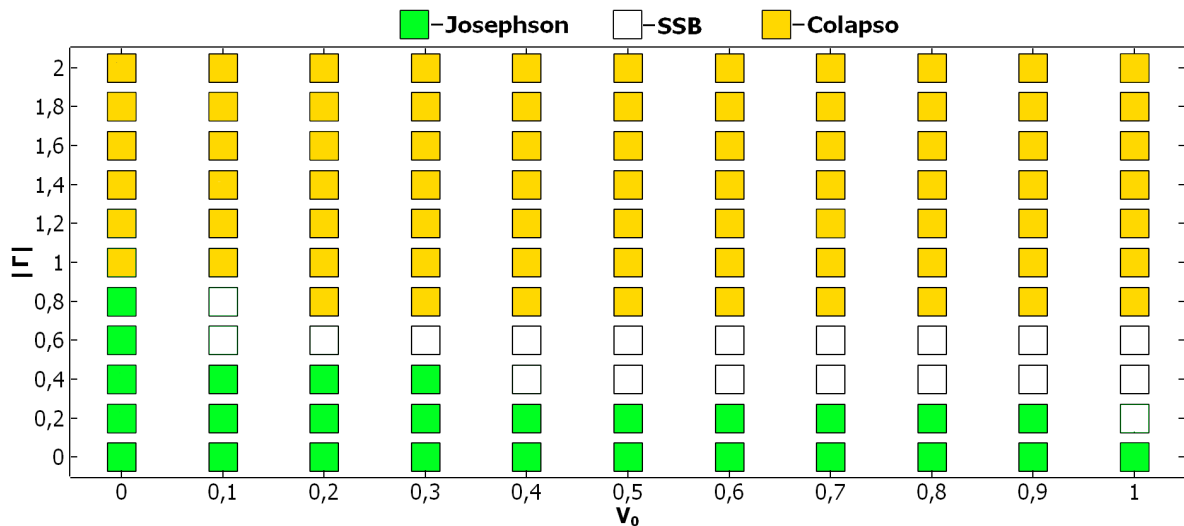


Figura 4.2: Diagrama de fase quântica da 1D NPSE, para um BEC com confinamento transversal do tipo funil e axial do tipo DWP. Em verde representamos o estado das oscilações Josephson, em branco a quebra de simetria e em amarelo o estado colapsado.

Com objetivo de comparar nossos resultados com outras equações investigamos as soluções da GPE e da NLSE, representadas respectivamente por [35]:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r, z) + Ng |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \psi(\mathbf{r}, t), \quad (4.2)$$

$$i \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + V(z)f - \varepsilon^6 \left(\frac{1}{2} - \Gamma |f|^2 \right) f, \quad (4.3)$$

Nós implementamos os cálculos para vários valores de Γ , mantendo fixo o valor de $V_0 = 0, 8\hbar\omega_\perp$ e o resultado encontra-se na Fig. 4.3. A linha preta sólida representa a solução para a 1D NPSE, os triângulos amarelos representam a solução GPE e a linha tracejada azul indica a 1D NLSE. O resultado de maior relevância é a confirmação da quebra de simetria da GPE e a precisão da equação efetiva. Observa-se que a 1D NLSE revela uma imprecisão em relação a GPE para todos os casos assimétricos. A exemplo, na Fig. 4.3 (b) com $\Gamma = -0,25$ a equação cúbica indica uma densidade de probabilidade axial, $|f(z)|^2$, simétrica em relação à origem enquanto a GPE aponta visivelmente uma quebra de simetria, similarmente à equação efetiva, demonstrando uma precisão melhor do que a anterior.

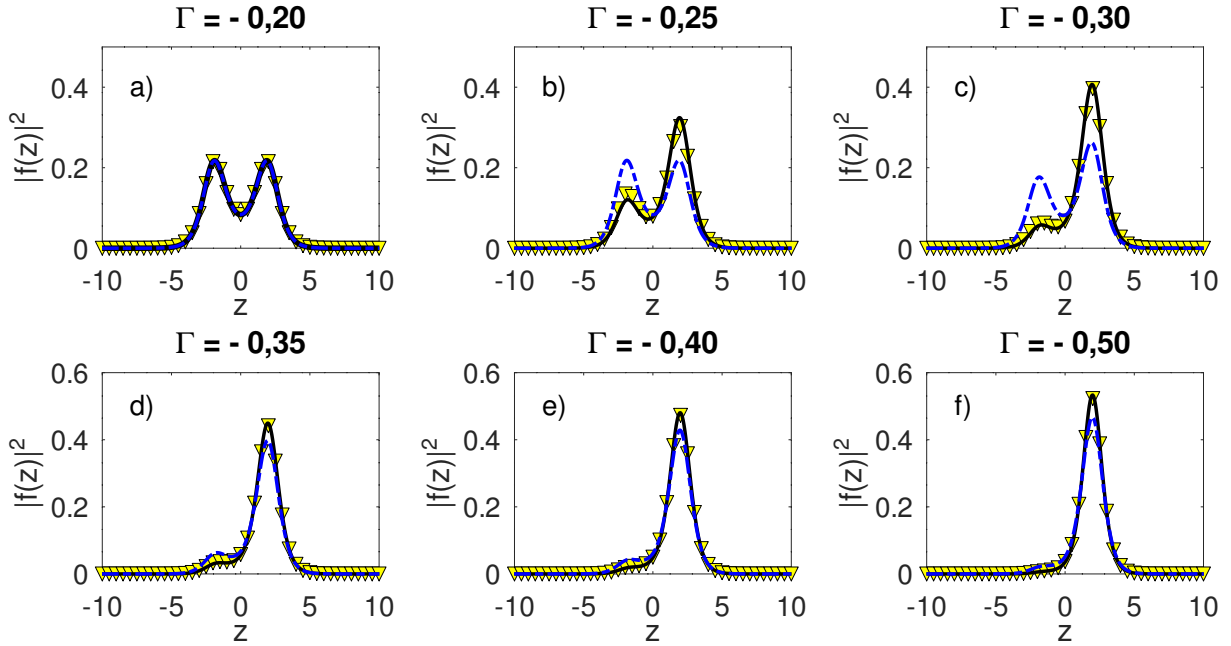


Figura 4.3: Comparação entre a 1D NPSE (linha preta), NLSE (tracejada azul) e a GPE (triângulos amarelos).

Como exposto acima, a Eq. (4.1) prevê o colapso do condensado, onde na Fig. 4.2 simbolizamos por meio dos quadrados amarelos. Buscamos investigar se a equação cúbica, Eq. (4.3), seria capaz de prever um diagrama de fase semelhante ao produzido pela equação efetiva. Na Fig. 4.4 plotamos o resultado obtido. Nota-se que a equação não prevê o colapso do sistema para altos valores do módulo da força de interação e do potencial confinante, revelado pela falta de pontos amarelos na figura. Apesar disto, para baixos valores do módulo de Γ e de V_0 , os diagramas diferem-se apenas por alguns pontos, sendo necessário uma análise mais precisa e criteriosa para que seja possível uma comparação mais satisfatória.

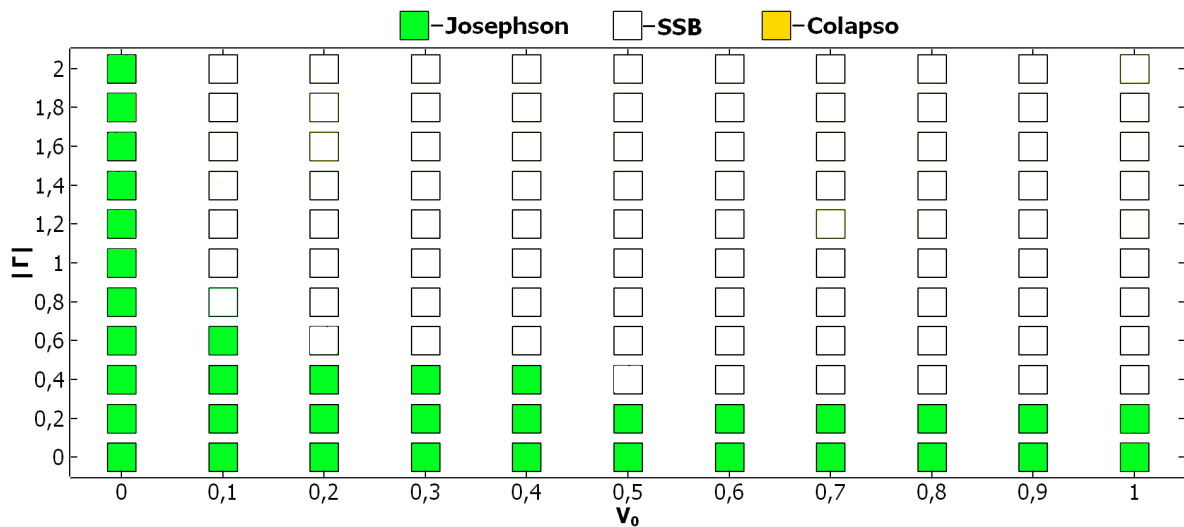


Figura 4.4: Diagrama de fase quântica da NLSE para um BEC com confinamento transversal do tipo funil e axial do tipo DWP. Em verde representamos o estado das oscilações Josephson, em branco a quebra de simetria. Nota-se que esta equação não prevê o colapso do sistema para altos valores do módulo da força de interação e do potencial confinante.

Retomando nossa investigação sobre a equação efetiva, havendo demonstrado sua precisão à GPE, realizamos os cálculos para atestar a estabilidade dos nossos resultados e analisar a dinâmica do condensado. Para isto, adicionamos um ruído de 10 % às soluções obtidas pelo método de propagação em tempo imaginário e as utilizamos como soluções de entrada no cálculo da evolução em tempo real. Dois casos foram analisados. No primeiro, mantivemos o módulo do potencial axial constante. Este resultado está plotado na Fig. 4.5. Nos painéis superiores apresentamos as soluções de entrada, com (a) representando o estado simétrico, (b), (c) e (d) os estados assimétricos. Observa-se nos painéis centrais a estabilidade da propagação das soluções e nos painéis inferiores as pequenas oscilações do valor esperado de z , $\langle z \rangle$.

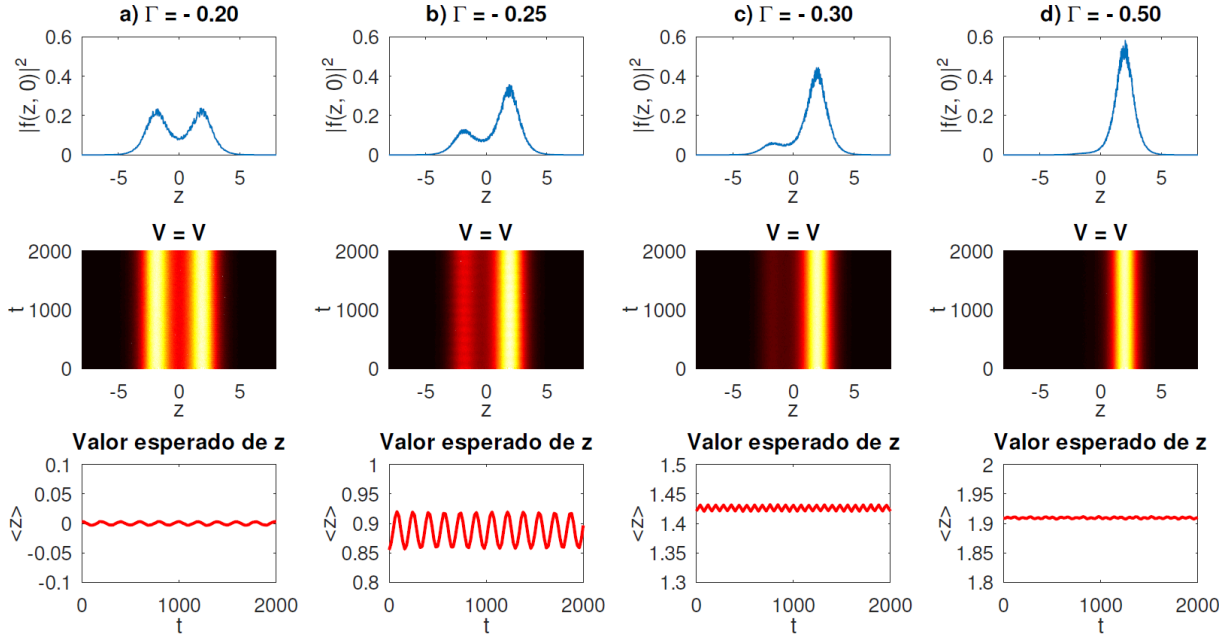


Figura 4.5: Representação das simulações em tempo real para a dinâmica do sistema com potencial mantido constante. Um ruído foi adicionado à solução de entrada com objetivo de analisar a estabilidade das soluções.

No segundo caso, incluímos um aumento instantâneo no potencial:

$$V \rightarrow 1.2 \times (V_{\text{DW}}). \quad (4.4)$$

Isto provocou oscilações periódicas mais acentuadas no nosso sistema, Fig. 4.6. Utilizamos os mesmos valores de Γ para as soluções de entrada e analisamos a evolução em tempo real sob os mesmos parâmetros do caso anterior. Apesar das oscilações no valor esperado de z , $\langle z \rangle$ (painéis inferiores), constata-se que as soluções são estáveis pela observação das evoluções obtidas nos painéis centrais.

Para a coluna (a) da Fig. 4.6, que representa a evolução do estado simétrico, é interessante notar que a figura do painel central tem seu máximo oscilando para valores negativos de z , ou seja, para o poço esquerdo. De fato, é arbitrário o sentido, ou poço, na qual o sistema dirige-se e aqui representamos apenas os casos em que a solução conduziu-se para a direita. Na coluna (b) temos uma solução de entrada assimétrica, com uma densidade de probabilidade maior do lado direito, e constata-se a oscilação das partículas do gás entre os dois poços, ressaltada pela variação do módulo do potencial, quando comparada à mesma evolução para o potencial fixo. O valor esperado de z , $\langle z \rangle$, enfatiza esta observação.

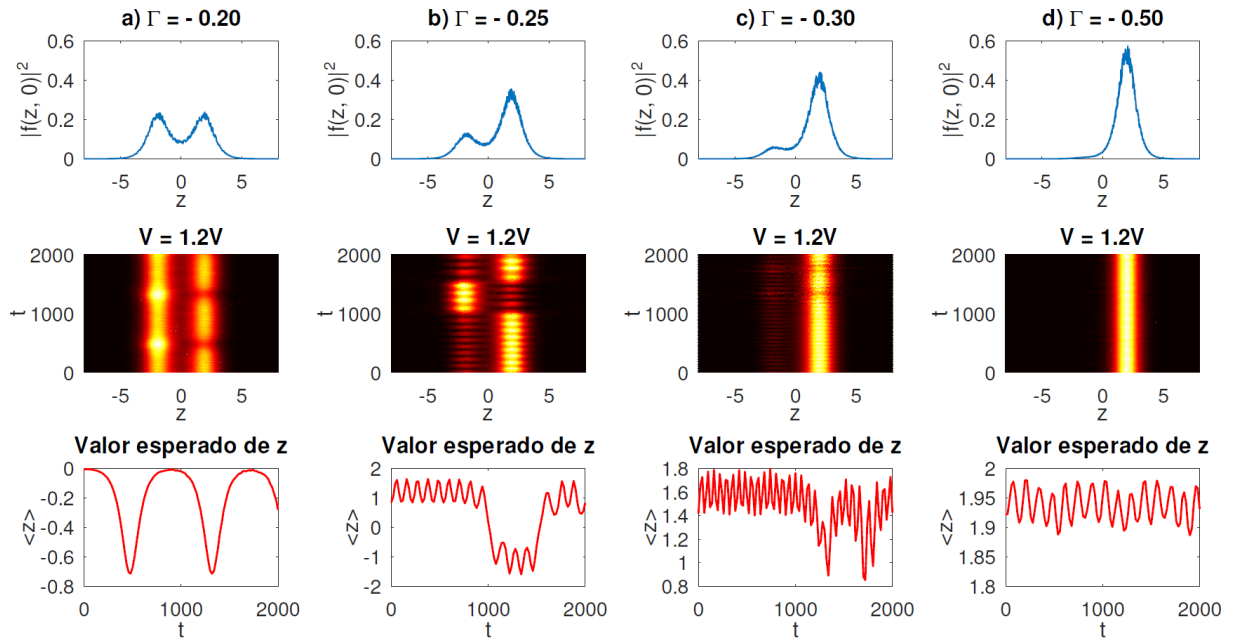


Figura 4.6: Representação das simulações em tempo real para a dinâmica do sistema com um potencial ligeiramente mais forte. Um ruído foi adicionado à solução de entrada com objetivo de analisar a estabilidade das soluções.

Finalizamos nossa discussão acerca dos resultados obtidos, destacando que alcançamos os objetivos previstos do nosso trabalho, tanto a respeito da aprendizagem e da utilização dos métodos numéricos mencionados, das aproximações variacionais para redução dimensional da GPE, assim como a validade da 1D NPSE para prever os resultados e a quebra de simetria além da estabilidade das soluções ao analisarmos suas respectivas evoluções em tempo real.

CONCLUSÃO

Neste trabalho investigamos a quebra de simetria em um BEC confinado por um DWP axial e funil transversal. Iniciamos a pesquisa analisando o BEC desde sua predição teórica, feita por Bose e Einstein [1, 3], passando por grandes contribuições para o modelo matemático que descreve sistemas formados por átomos frios [8, 9, 10], até sua obtenção experimental em 1995 [19, 20] e os avanços experimentais e teóricos que irromperam desde então.

A aproximação de campo médio, uma teoria que simplifica a interação entre as partículas, foi empregada no Capítulo 2 com o objetivo de determinar a GPE que é utilizada para descrever sólitons e condensados próximos ao zero absoluto [12, 13, 36]. Modelos de redução dimensional da equação de GP em uma equação efetiva unidimensional foram aplicados para condensados confinados por potenciais transversais do tipo harmônico [31] e do tipo funil [35] dos quais obtivemos os resultados propostos nas referências. Técnicas computacionais e métodos numéricos para resolução de equações não lineares foram desenvolvidos durante a pesquisa com objetivo aplicá-los em novos problemas e novas dinâmicas

No Capítulo 3 demonstramos a quebra de simetria ao examinarmos o uso de potenciais simétricos tanto em BECs [33] quanto em sólitons num guia de onda [34]. Utilizamos as equações efetivas para evidenciar a quebra de simetria do sistema em relação ao potencial confinante. Essa quebra de simetria origina uma probabilidade maior de encontrar uma partícula em um determinado poço do potencial para BECs, ou uma maior intensidade luminosa em um guia de onda em óptica [44].

Dissertamos sobre a quebra de simetria ao analisarmos o comportamento de um condensado atrativo mediante o confinamento transversal, dado por um potencial do tipo funil, e axial do tipo DWP, mais precisamente, uma combinação de potenciais Pöschl-Teller invertidos. Nossos resultados confirmaram que este sistema sofre uma quebra de simetria, na qual utilizamos a 1D NPSE e corroboramos os resultados com a GPE. Um diagrama de fase quântica, dado por $|\Gamma|$ em função de V_0 , foi obtido para nosso sistema,

o que tornou possível a identificação de valores para a fase simétrica (fase Josephson), a fase da quebra de simetria (fase SSB) e os valores que representam o estado colapsado.

Comparamos os resultados da quebra de simetria obtidos através da 1D NPSE e da 1D NLSE com aqueles obtidos por meio da GPE. Identificamos que a 1D NPSE apresenta uma maior precisão para descrever o modelo considerado. Um diagrama semelhante foi proposto para a 1D NLSE e notamos sua falha ao prever o colapso do condensado atrativo analisado.

Verificamos a estabilidade das nossas soluções obtidas pelo método de propagação em tempo imaginário realizando uma evolução em tempo real. Para isto, incluímos às soluções de entrada um ruído de 10% e observamos o comportamento da evolução para dois casos. No primeiro caso mantivemos o potencial constante e no segundo aumentamos instantaneamente o módulo do potencial axial. Para ambos os casos o sistema mostrou-se estável, descrevendo pequenas oscilações, como era esperado.

Pretendemos continuar nossa pesquisa sobre BECs e métodos numéricos para equações não lineares, ampliando as áreas de estudos, compreendendo novos tipos de modelos computacionais, novos tipos de confinamentos para condensados, aplicações em sólitons e óptica, além de estabelecer novas pesquisas com o grupo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] EINSTEIN, A. Quantum theory of the monatomic ideal gas. **Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse**, p. 261–267, 1924. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 47.
- [2] DAHMEN, S. R. Bose e einstein: do nascimento da estatística quântica à condensação sem interação ii. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 27, n. 2, p. 283–298, 2005. Citado na página 9.
- [3] BOSE, S. N. Planck’s law and the hypothesis of light quanta. **Z. Phys**, v. 26, n. 178, p. 1–5, 1924. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 47.
- [4] HUANG, K. **Statistical Mechanics**. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1987. v. 1. 506 p. Citado na página 9.
- [5] KETTERLE, W. Nobel lecture: When atoms behave as waves: Bose-Einstein condensation and the atom laser. **Reviews of Modern Physics**, v. 74, n. 4, p. 1131, 2002. Citado na página 10.
- [6] LONDON, F. The λ -phenomenon of liquid helium and the Bose-Einstein degeneracy. **Nature**, v. 141, n. 3571, p. 643–644, 1938. Citado na página 10.
- [7] GRIFFIN, A. A Brief History of Our Understanding of BEC: From Bose to Beliaev. jan 1999. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/cond-mat/9901123>>. Citado na página 11.
- [8] BOGOLYUBOV, N. Izv. an sssr, ser. fiz. 11, 77 (1947). **J. Phys.(USSR)**, v. 11, p. 23, 1947. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 47.
- [9] PENROSE, O.; ONSAGER, L. Bose-Einstein condensation and liquid helium. **Physical Review**, v. 104, n. 3, p. 576, 1956. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 47.
- [10] GROSS, E. P. Structure of a quantized vortex in boson systems. **Il Nuovo Cimento (1955-1965)**, Springer, v. 20, n. 3, p. 454–477, 1961. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 47.
- [11] PITAEVSKII, L. P. Vortex lines in an imperfect Bose gas. **Sov. Phys. JETP**, v. 13, n. 2, p. 451–454, 1961. Citado na página 11.
- [12] PETHICK, C. J.; SMITH, H. **Bose–Einstein Condensation in Dilute Gases**. 2. ed. New York: Cambridge University Press, 2008. 569 p. Citado 9 vezes nas páginas 11, 12, 16, 17, 18, 21, 22, 28 e 47.

- [13] PITAEVSKII, L.; STRINGARI, S. **Bose-Einstein condensation and superfluidity**. Oxford. Citado 4 vezes nas páginas [11](#), [18](#), [19](#) e [47](#).
- [14] HOLZ, S. M. **Estabilidade de sistemas condensados com interação atrativa ou repulsiva**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, 2005. Citado na página [11](#).
- [15] MIRANDA, S. G. d. **Carregamento de armadilhas magneto-ópticas a partir de feixes atômicos desacelerados para realização da condensação de Bose-Einstein**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 1999. Citado na página [12](#).
- [16] HESS, H. F. Evaporative cooling of magnetically trapped and compressed spin-polarized hydrogen. **Physical Review B**, v. 34, n. 5, p. 3476–3479, 1986. Citado na página [12](#).
- [17] FOOT, C. **Atomic Physics**. 1. ed. OUP Oxford, 2005. v. 1. 331 p. Citado 2 vezes nas páginas [12](#) e [28](#).
- [18] BAGNATO, V. S. A condensação de Bose-Einstein. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 19, 1997. Citado na página [12](#).
- [19] ANDERSON, M. H. et al. Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor. **Science**, v. 269, n. 5221, p. 198–201, 1995. Citado 3 vezes nas páginas [13](#), [18](#) e [47](#).
- [20] BRADLEY, C. C. et al. Evidence of Bose-Einstein condensation in an atomic gas with attractive interactions. **Physical Review Letters**, v. 75, n. 9, p. 1687, 1995. Citado 3 vezes nas páginas [13](#), [18](#) e [47](#).
- [21] GRIESMAIER, A. et al. Bose-Einstein condensation of chromium. **Physical Review Letters**, v. 94, n. 16, p. 160401, 2005. Citado na página [13](#).
- [22] JOCHIM, S. et al. Bose-Einstein condensation of molecules. **Science**, v. 302, n. 5653, p. 2101–2103, 2003. Citado na página [13](#).
- [23] ZWIERLEIN, M. W. et al. Observation of Bose-Einstein condensation of molecules. **Physical Review Letters**, v. 91, n. 25, p. 250401, 2003. Citado na página [13](#).
- [24] ZWIERLEIN, M. et al. Condensation of pairs of fermionic atoms near a Feshbach resonance. **Physical Review Letters**, v. 92, n. 12, p. 120403, 2004. Citado na página [13](#).
- [25] MATTHEWS, M. R. et al. Vortices in a Bose-Einstein condensate. **Physical Review Letters**, v. 83, n. 13, p. 2498, 1999. Citado na página [13](#).
- [26] ROATI, G. et al. Anderson localization of a non-interacting Bose-Einstein condensate. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 453, n. 7197, p. 895–898, 2008. Citado na página [13](#).
- [27] SHIN, Y. et al. Atom interferometry with Bose-Einstein condensates in a double-well potential. **Physical Review Letters**, v. 92, n. 5, p. 050405, 2004. Citado na página [13](#).

- [28] KOLOBOV, V. I. et al. Observation of stationary spontaneous Hawking radiation and the time evolution of an analogue black hole. **Nature Physics**, p. 1–6, 2021. Citado na página 13.
- [29] VESELY, F. J. **Computational Physics**. New York. Springer, 1994. Citado na página 14.
- [30] YANG, J. **Nonlinear waves in integrable and nonintegrable systems**. SIAM, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 14, 36 e 37.
- [31] SALASNICH, L.; PAROLA, A.; REATTO, L. Effective wave equations for the dynamics of cigar-shaped and disk-shaped Bose condensates. **Physical Review A**, v. 65, n. 4, p. 043614, 2002. Citado 6 vezes nas páginas 14, 16, 23, 25, 27 e 47.
- [32] MATEO, A. M.; DELGADO, V. Effective mean-field equations for cigar-shaped and disk-shaped Bose-Einstein condensates. **Physical Review A**, v. 77, n. 1, p. 013617, 2008. Citado na página 14.
- [33] MAZZARELLA, G.; SALASNICH, L. Spontaneous symmetry breaking and collapse in bosonic Josephson junctions. **Physical Review A**, v. 82, n. 3, p. 033611, 2010. Citado 10 vezes nas páginas 14, 15, 25, 31, 32, 33, 34, 35, 39 e 47.
- [34] YANG, J. Symmetry breaking with opposite stability between bifurcated asymmetric solitons in parity-time-symmetric potentials. **Optics Letters**, v. 44, n. 11, p. 2641–2644, 2019. Citado 6 vezes nas páginas 14, 15, 31, 36, 38 e 47.
- [35] SANTOS, M. C. dos; MALOMED, B. A.; CARDOSO, W. B. Quasi-one-dimensional approximation for Bose-Einstein condensates transversely trapped by a funnel potential. **Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics**, v. 52, n. 24, p. 245–301, 2019. Citado 10 vezes nas páginas 14, 26, 28, 29, 31, 39, 40, 41, 43 e 47.
- [36] DALFOVO, F. et al. Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases. **Reviews of Modern Physics**, v. 71, n. 3, p. 463, 1999. Citado 6 vezes nas páginas 17, 18, 19, 20, 39 e 47.
- [37] KETTERLE, W. Experimental studies of Bose-Einstein condensation. **Phys. Today**, v. 52, n. 12, p. 30–35, 1999. Citado na página 18.
- [38] LI, Y. et al. Dynamics of an ultracold Bose gas in funnel-shaped potential. **Communications in Theoretical Physics**, v. 52, n. 3, p. 431, 2009. Citado na página 26.
- [39] MALOMED, B. A. **Spontaneous symmetry breaking, self-trapping, and Josephson oscillations**. Springer, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 32.
- [40] SUKHATME, K. et al. Observation of the ideal Josephson effect in superfluid 4 he. **Nature**, v. 411, n. 6835, p. 280–283, 2001. Citado na página 31.
- [41] ALBIEZ, M. et al. Direct observation of tunneling and nonlinear self-trapping in a single bosonic Josephson junction. **Physical Review Letters**, v. 95, n. 1, p. 010402, 2005. Citado na página 31.

- [42] JOSEPHSON, B. Possible new effect in superconducting tunneling. **Phys. Lett.**, v. 1, p. 251–253, 1962. Citado na página 31.
- [43] SMERZI, A. et al. Quantum coherent atomic tunneling between two trapped Bose-Einstein condensates. **Physical Review Letters**, v. 79, n. 25, p. 4950, 1997. Citado na página 31.
- [44] SHAMRIZ, E.; DROR, N.; MALOMED, B. A. Spontaneous symmetry breaking in a split potential box. **Physical Review E**, v. 94, n. 2, p. 022211, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 47.
- [45] MALOMED, B. A. Spontaneous symmetry breaking in nonlinear systems: An overview and a simple model. In: **Nonlinear Dynamics: Materials, Theory and Experiments**. Springer, 2016. p. 97–112. Citado na página 32.
- [46] ESRY, B.; GREENE, C. H. Spontaneous spatial symmetry breaking in two-component Bose-Einstein condensates. **Physical Review A**, v. 59, n. 2, p. 1457, 1999. Citado na página 32.
- [47] MAYTEEVARUNYOO, T.; MALOMED, B. A.; DONG, G. Spontaneous symmetry breaking in a nonlinear double-well structure. **Physical Review A**, v. 78, n. 5, p. 053601, 2008. Citado na página 32.
- [48] INOUE, S. et al. Observation of Feshbach resonances in a Bose-Einstein condensate. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 392, n. 6672, p. 151–154, 1998. Citado na página 32.
- [49] MAZZARELLA, G. et al. Atomic Josephson junction with two bosonic species. **Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics**, v. 42, n. 12, p. 125301, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 39.
- [50] KONOTOP, V. V.; YANG, J.; ZEZYULIN, D. A. Nonlinear waves in PT-symmetric systems. **Reviews of Modern Physics**, v. 88, n. 3, p. 035002, 2016. Citado na página 36.
- [51] AVELAR, A. T.; BAZEIA, D.; CARDOSO, W. B. Solitons with cubic and quintic nonlinearities modulated in space and time. **Physical Review E**, v. 79, n. 2, p. 025602, 2009. Citado na página 36.
- [52] DAST, D. et al. A Bose-Einstein condensate in a PT-symmetric double well. **Fortschritte der Physik**, v. 61, n. 2-3, p. 124–139, 2013. Citado na página 36.