Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística

Lidiane Mayumi Hieda

Superfícies Mínimas com Curvatura Constante nas Formas Espaciais 4-Dimensionais

Goiânia
2011

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[x] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):	Lidiane Mayumi Hieda				
E-mail:	lidmayumihieda@hotmail.com				
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [x]Sim [ ] Não					
Vínculo empregatício do autor					
Agência de fomento:	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior	Sigla:	CAPES		
País:	Brasil	UF:	GO	CNPJ:	00889834/0001-08
Título:	Superfícies Mínimas com Curvatura Constante nas Formas Espaciais 4-Dimensionais				
Palavras-chave:	Superfícies mínimas, curvatura constante, imersões mínimas do 2-plano hiperbólico, forma fundamental de tensores.				
Título em outra língua:	Minimal Surfaces with Constant Curvature in 4-Dimensional Space Forms.				
Palavras-chave em outra língua:	Minimal surfaces, constant curvature, minimal immersions of the hyperbolic2-plane, fundamental forms tensors.				
Área de concentração:	Geometria				
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	13/05/2011				
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado em Matemática				
Orientador (a):	Prof. Dr. Romildo da Silva Pina				
E-mail:	romildo@mat.ufg.br				
Co-orientador (a):*					
E-mail:					

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Liberação para disponibilização?[1] [x] total [ ] parcial

Em caso de disponibilização parcial, assinale as permissões:
[ ] Capítulos. Especifique: ______________________
[ ] Outras restrições: ______________________

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O Sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Lidiane Mayumi Hieda
Assinatura do (a) autor (a)

Data: 30 / 05 / 2011

[1] Em caso de restrição, esta poderá ser mantida por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Todo resumo e metadados ficarão sempre disponibilizados.

LIDIANE MAYUMI HIEDA

Superfícies Mínimas com Curvatura Constante nas Formas Espaciais 4-Dimensionais

Dissertação apresentada ao Programa de Pós–Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria.

Orientador: Prof. Dr. Romildo da Silva Pina

Goiânia
2011

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)
GPT/BC/UFG

H633s

Hieda, Lidiane Mayumi.

Superfícies Mínimas com Curvatura Constante nas formas Espaciais 4-Dimensionais [manuscrito] / Lidiane Mayumi Hieda. - 2011.

xv, 79 f.

Orientador: Prof. Dr. Romildo da Silva Pina.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, 2011.

Bibliografia.

1. Superfícies Mínimas 2. Curvatura Constante 3. Imersões Mínimas de 2-Plano Hiperbólico 4. Forma Fundamental de Tensores I. Título.

CDU: 514.7

LIDIANE MAYUMI HIEDA

SUPERFÍCIES MÍNIMAS COM CURVATURA CONSTANTE NAS FORMAS ESPACIAIS 4-DIMENSIONAIS

Dissertação defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada no dia 13 de maio de 2011, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Romildo da Silva Pina

Prof. Dr. Romildo da Silva Pina
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca

Kellcio O. Araújo

Prof. Dr. Kellcio Oliveira Araújo
Departamento de Matemática-UnB

Marcelo Almeida de Souza

Prof. Dr. Marcelo Almeida de Souza
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Lidiane Mayumi Hieda

Graduou-se em Licenciatura Plena em Matemática na UNESP/FCT - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", foi bolsista de iniciação científica pela FAPESP.

Aos meus avós.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por mais uma conquista e por me fortalecer todos os dias.

À minha família. Meus pais, Laura e Akio, e meus irmãos, Luciana e Anderson. Estes que sempre me apóiam, acreditam em mim e valorizam os meus esforços.

Aos meus padrinhos, Lucia e Hélio, Terezinha (*in memoriam*) e Miguel.

Aos grandes amigos, Magna e Alex Rezende, pelo incentivo e pela verdadeira amizade.

Aos colegas do mestrado, Bruno, Carlos, Diogo, Douglas, Fernando, Lívio, Lucimeire, Newton Mayer, Silvana, Thársis, Ubirajara, Benedito, Márcio, Milton Gabriel, Alex Neri, Flávio, Edwin, Hugo, Rosane, Sérgio, pela convivência e partilha de conhecimento.

Às amigas de Goiânia, Alexandra, Gabriella e Juliana Canella.

Ao Emerson, que além do companheirismo, deu-me muito apoio durante esta etapa.

Ao professor Romildo da Silva Pina, pela orientação e paciência, ao incentivo, pela ajuda e sugestões no desenvolvimento desta dissertação.

Aos professores Marcelo Almeida de Souza e Maurício Donizetti Pieterzack, que ajudaram em algumas interpretações e sugestões para o desenvolvimento deste.

À Banca Examinadora, especialmente, ao professor Dr. Kellcio Oliveira Araújo pelos comentários e sugestões.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo suporte financeiro.

"Mesmo que a rota da minha vida me conduza a uma estrela, nem por isso fui dispensado de percorrer os caminhos do mundo."

José Saramago.

Resumo

Hieda, Lidiane Mayumi. **Superfícies Mínimas com Curvatura Constante nas Formas Espaciais 4-Dimensionais**. Goiânia, 2011. 79p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Este trabalho foi baseado nos artigos **On Compact Minimal Surfaces with non-negative Gaussian Curvature in a Space of Constant Curvature: I** e **Minimal Surfaces with Constant Curvature in 4-dimensional Space Forms** de Katsuei Kenmotsu que consistem em classificar superfícies mínimas com curvatura Gaussiana constante K nas formas espaciais 4-dimensionais, sem alguma hipótese global. Mostraremos que uma imersão isométrica mínima $x : M^2(K) \to M^4(c)$, onde c é a curvatura seccional, ou é totalmente geodésica, ou localmente um Toro de Clifford, ou localmente uma superfície de Veronese. Como corolário, temos que não existe uma imersão isométrica mínima com curvatura Gaussiana constante negativa numa esfera unitária $S^4(1)$ mesmo que localmente.

Palavras–chave

Superfícies mínimas, curvatura constante, imersões mínimas do 2-plano hiperbólico, forma fundamental de tensores.

Abstract

Hieda, Lidiane Mayumi. **Minimal Surfaces with Constant Curvature in 4-Dimensional Space Forms**. Goiânia, 2011. 79p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

This work was based on papers **On Compact Minimal Surfaces with non-negative Gaussian Curvature in a Space of Constant Curvature: I** and **Minimal Surfaces with Constant Curvature in 4-dimensional Space Forms**, by Katsuei Kenmotsu, consisting in the classification of minimal surfaces with constant Gaussian curvature K in a 4-dimensional space form without any global assumption. We will show that an isometric minimal immersion $x : M^2(K) \to M^4(c)$, where c is sectional curvature, is either totally geodesic, or locally Clifford Torus, or locally a Veronese surface. As a corollary, we have that there is not isometric minimal immersions with constant negative Gaussian curvature into unit sphere $S^4(1)$ even locally.

Keywords

Minimal surfaces, constant curvature, minimal immersions of the hyperbolic 2-plane, fundamental forms tensors.

Sumário

Introdução **10**

1 Preliminares **12**

1.1 Método do Referencial Móvel 12

1.1.1 Equações de Estrutura do $\mathbb{R}^n$ 12

1.1.2 Lema de Cartan e a Unicidade das Formas de Conexão 17

1.1.3 Subvariedades de um Espaço Euclidiano 19

1.1.4 Variedades Riemannianas 28

1.1.5 Tensores em Variedades Riemannianas 38

1.1.6 Imersões Riemannianas 41

2 Superfícies Mínimas com Curvatura Gaussiana não-negativa em Espaço de Curvatura Constante **47**

2.1 Espaço Osculador de Ordem Superior e n-ésima Formas Fundamentais 51

2.2 Laplaciano de $f_{(b)}$ e de $K_{(b)}$ 57

3 Superfícies Mínimas com Curvatura Constante **68**

Referências Bibliográficas **78**

Introdução

Um assunto muito estudado em Geometria Diferencial é a classificação de superfícies, com alguma propriedade especial, mergulhadas ou imersas, em espaços de curvatura constante. Por exemplo: existem muitos resultados classificando superfícies mínimas ou com curvatura média constante não nula nos espaços modelos tridimensionais. Continua sendo objeto de estudo, nos dias atuais, classificar superfícies, com alguma propriedade adicional, em espaços com curvatura constante de dimensões superiores.

Nesta direção, B. Y. Chen provou em [6] que se $x : M^2(K) \to M^3(c)$ é uma imersão isométrica mínima com curvatura Gaussiana constante K, então M é totalmente geodésica ou $c > 0$ e M é localmente um Toro de Clifford.

Por um Teorema de Rigidez de Callabi [5], DoCarmo e Wallach [7], Chen [6], e Barbosa [1], e um Teorema de Localização de Wallach [18], uma superfície mínima com curvatura constante positiva em $S^4(1) = \{p \in \mathbb{R}^5; \|p\| = 1\}$ é localmente a totalmente geodésica $S^2(1) = \{p \in \mathbb{R}^3; \|p\| = 1\}$ ou a superfície de Veronese.

Kenmotsu [14], encontrou todas as superfícies mínimas de $\mathbb{R}^2$ em $S^n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1}; \|p\| = 1\}$ cuja curvatura Gaussiana $K \equiv 0$. Um dos problemas proposto por S.T. Yau, em [20], é classificar superfícies mínimas fechadas com curvatura negativa em S^N. Neste trabalho mostramos uma resposta parcial, isto é, Kenmotsu mostrou que não existe imersão isométrica mínima com curvatura Gaussiana constante negativa numa esfera unitária $S^4(1)$ mesmo que localmente.

Kenmotsu, em [15], considerou uma variedade Riemanniana conexa $M^m(c)$ de curvatura seccional constante c, classificou as superfícies mínimas com curvatura Gaussiana constante K, em formas espaciais 4-dimensionais sem alguma hipótese global. Resultados parciais também foram obtidos para a classificação de imersões mínimas de $M^2(K)$ em $M^5(c)$.

Neste trabalho estudamos o artigo do Kenmotsu [15] onde ele considerou o caso $n = 4$, ou seja, se $x : M^2(K) \to M^4(c)$ é uma imersão isométrica mínima de $M^2(K)$ em $M^4(c)$, então x ou é totalmente geodésica, ou localmente um Toro de Clifford, ou localmente uma superfície de Veronese. A saber, x é totalmente geodésica, se $K = c$; x é localmente um Toro de Clifford em uma subvariedade totalmente geodésica 3-dimensional $S^3(c)$ de $S^4(c)$, se $K = 0$, $c > 0$; x é localmente uma superfície de Veronese em $S^4(c)$, se $K = c/3$, $c > 0$.

O método utilizado neste trabalho será a generalização do Teorema Fundamental das superfícies para subvariedades, onde utilizaremos as equações de compatibilidade via formas diferenciais e o método do referencial móvel.

No capítulo 1, apresentaremos o Método do Referencial Móvel em Geometria Diferencial a partir de um mínimo pré-requisito, que pressupõe apenas um curso de geometria diferencial de curvas e superfícies, noções de variedades diferenciáveis e uma certa familiaridade com formas diferenciais em variedades. A fim de evitar apelos a conhecimentos de Grupos de Lie, restringimo-nos à estrutura Riemanniana, que corresponde ao grupo ortogonal, o qual possui aparentemente medida de complexidade que torna o estudo da sua geometria uma tarefa não trivial porém tratável.

No capítulo 2, estudaremos de superfícies mínimas com curvatura Gaussiana não-negativa nos espaço de curvatura constante. Adotaremos o método de Bochner, isto é, usaremos campos escalares $f_{(b)}$, $K_{(b)}$ e $N_{(b)}$, nas superfícies e calcularemos seus Laplacianos. Definiremos o Espaço Osculador de ordem superior e as n-ésimas Formas Fundamentais e definiremos os campos escalares mencionados. Calcularemos os Laplacianos de $f_{(b)}$ e $K_{(b)}$ e estudaremos a equação de Codazzi de ordem superior.

No capítulo 3, provaremos que se $x : M^2(K) \to M^4(c)$ é uma imersão isométrica mínima de $M^2(K)$ em $M^4(c)$, então, ou x é totalmente geodésica, se $K = c$; ou x é localmente um Toro de Clifford em uma subvariedade totalmente geodésica 3-dimensional $S^3(c)$ de $S^4(c)$, se $K = 0$, $c > 0$; ou x é localmente uma superfície de Veronese em $S^4(c)$, se $K = c/3$, $c > 0$. Este resultado implica que não existe imersão isométrica mínima do plano hiperbólico $H^2(-1)$ em $S^4(1)$ mesmo que localmente.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos resultados de Geometria Riemanniana que utilizaremos ao longo deste trabalho. Explicações mais precisas podem ser encontradas em [8], [9] e [10].

1.1 Método do Referencial Móvel

Visando estabelecer os fatos fundamentais do método do referencial móvel, adotamos como ponto de partida o $\mathbb{R}^n$ e iremos construindo progressivamente as situações mais gerais. Entre as aplicações feitas, encontra-se um Teorema de E. Cartan sobre a determinação local da métrica pela curvatura. O capítulo pode ser considerado como uma breve introdução à Geometria Riemanniana pelo método do referencial móvel.

1.1.1 Equações de Estrutura do $\mathbb{R}^n$

Uma Variedade Riemanniana é uma variedade diferenciável M tal que em cada ponto $p \in M$, existe um produto interno positivo definido $\langle\ ,\ \rangle_p$ no espaço tangente T_pM de M em p, que varia diferenciavelmente com p no seguinte sentido: se X e Y são campos diferenciáveis de vetores em M, então a função $p \mapsto \langle X,Y\rangle_p$, $p \in M$, é diferenciável em M. Por convenção, diferenciável sempre significará de classe C^∞. O produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ é usualmente chamado de métrica Riemanniana em M.

A noção natural de equivalência entre variedades Riemannianas M e M' é a noção de isometria. Um difeomorfismo (uma aplicação injetiva cuja inversa é diferenciável) $f : M \to M'$ de M em M' é uma isometria se para todo $p \in M$ e todo par $X,Y \in T_pM$, tem-se

$$\langle X,Y\rangle_p = \langle df_p(X), df_p(Y)\rangle_{f(p)}.$$

A importância da noção de variedade Riemanniana é que nela podemos definir as noções métricas usuais da geometria euclidiana, como ângulo, comprimentos, áreas, etc. Em verdade, a geometria euclidiana é o estudo das noções métricas na mais simples de todas as variedades Riemannianas, a saber, $\mathbb{R}^n$ munido da estrutura diferenciável usual e do seguinte produto interno: se $u = (u_1, \ldots, u_n)$ e $v = (v_1, \ldots, v_n)$ são vetores do $\mathbb{R}^n$, define-se, para todo $p \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle u, v \rangle_p = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n.$$

Observe que identificamos os espaços tangentes de $\mathbb{R}^n$ com o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$.

Mesmo sendo a variedade Riemanniana mais simples, o $\mathbb{R}^n$ é, em um certo sentido, a variedade Riemanniana universal. Isto ficará mais claro à medida que formos desenvolvendo o método de referencial móvel.

Iniciaremos, portanto, estabelecendo as chamadas equações de estrutura do $\mathbb{R}^n$.

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto do $\mathbb{R}^n$ e sejam $e_1, \ldots, e_n$ n campos diferenciáveis de vetores em U tal que, para todo $p \in U$, tenha-se $\langle e_i, e_j \rangle_p = \delta_{ij}$, onde $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$, $1 \leq i, j \leq n$. Um tal conjunto de campos de vetores é chamado um referencial ortonormal móvel em U. A partir de agora omitiremos os adjetivos ortonormal e móvel.

A partir do referencial $\{e_i\}$ podemos definir formas diferenciais lineares $\omega_1, \ldots, \omega_n$ pela condição $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$; em outras palavras, em cada ponto $p \in U$, a base $\{(\omega_i)_p\}$ é a base dual da base $\{(e_i)_p\}$. O conjunto das formas diferenciais $\{\omega_i\}$ é chamado de coreferencial associado ao referencial $\{e_i\}$.

Cada campo e_i pode ser pensado como uma aplicação diferenciável $e_i : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. A diferencial $(de_i)_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, em $p \in U$, é uma aplicação linear. Portanto, para todo $v \in \mathbb{R}^n$, podemos escrever

$$(de_i)_p(v) = \sum_j (\omega_{ij})_p(v) e_j.$$

Observe que as expressões $(\omega_{ij})_p(v)$, acima definidas, dependem linearmente de v. Portanto, $(\omega_{ij})_p$ é uma forma linear em $\mathbb{R}^n$. Como e_i é um campo diferenciável, ω_{ij} é uma forma diferencial linear. Sendo assim, podemos escrever

$$de_i = \sum_j \omega_{ij} e_j, \tag{1-1}$$

como definição das formas ω_{ij}, que são chamadas formas de conexão do $\mathbb{R}^n$ no referencial

$\{e_i\}$. As formas de conexão são anti-simétricas nos índices i, j, isto é, $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$. De fato, derivando a expressão $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, temos

$$\langle de_i, e_j \rangle + \langle e_i, de_j \rangle = 0.$$

Por outro lado,

$$de_i = \sum_s \omega_{is} e_s,$$

o que implica que,

$$\begin{aligned} \langle de_i, e_j \rangle &= \left\langle \sum_s \omega_{is} e_s, e_j \right\rangle \\ &= \sum_s \omega_{is} \langle e_s, e_j \rangle = \omega_{ij}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle de_i, e_j \rangle + \langle e_i, de_j \rangle \\ &= \omega_{ij} + \omega_{ji}, \end{aligned}$$

ou seja, as formas de conexão $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ são anti-simétricas nos índices i, j.

O ponto fundamental no método do referencial móvel é que as formas ω_i, ω_{ij} satisfazem as chamadas equações de estrutura de Elie Cartan.

Antes de apresentarmos essa equações de estrutura, recordaremos um fato puramente algébrico. Temos que se ω_1, ω_2 são formas lineares em um espaço vetorial V de dimensão n, então o produto exterior $\omega_1 \wedge \omega_2$ de ω_1 com ω_2 é a forma bilinear alternada $\omega_1 \wedge \omega_2 : V \times V \to \mathbb{R}$ dada por

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(v_1, v_2) = \omega_1(v_1)\omega_2(v_2) - \omega_1(v_2)\omega_2(v_1), \qquad v_1, v_2 \in V.$$

Além disto, se $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ é base para o espaço das formas lineares V^*, então $\omega_i \wedge \omega_j$, $i < j$ e $1 \leq i, j \leq n$, formam uma base para o espaço $\Lambda^2 V^*$ das formas bilineares alternadas de $V \times V$.

Teorema 1.1 (Equações de Estrutura do $\mathbb{R}^n$) *Seja $\{e_i\}$ um referencial ortonormal móvel em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Sejam $\{\omega_i\}$ o coreferencial associado a $\{e_i\}$, e ω_{ij} as formas de conexão de U no referencial $\{e_i\}$. Então,*

$$\begin{aligned} d\omega_i &= \sum_k \omega_k \wedge \omega_{ki}, && (1\text{-}2) \\ d\omega_{ij} &= \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}, && (1\text{-}3) \end{aligned}$$

com $1 \leq k \leq n$.

Prova. Seja $a_1 = (1,0,\ldots,0), a_2 = (0,1,0,\ldots,0),\ldots,a_n = (0,0,\ldots,0,1)$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$ e seja $x_i : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a função que corresponde a cada $p = (x_1,\ldots,x_n) \in U$ a i-ésima coordenada. Então, dx_i é a forma diferencial em U, que satisfaz a condição $dx_i(a_j) = \delta_{ij}$, assim concluímos que $\{dx_i\}$ é o coreferencial associado ao referencial $\{a_i\}$. O referencial dado se exprime em termos dos a_i por

$$e_i = \sum_j \beta_{ij} a_j, \tag{1-4}$$

onde os β_{ij}'s são as funções diferenciáveis em U e, para cada $p \in U$, a matriz $(\beta_{ij}(p))$ é uma matriz ortogonal. Como $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$, temos

$$\omega_i = \sum_j \beta_{ij} dx_j. \tag{1-5}$$

Diferenciando (1-4), obtemos

$$de_i = \sum_k d\beta_{ik} a_k = \sum_k \left(d\beta_{ik} \sum_j \beta_{jk} e_j \right).$$

Como $de_i = \sum_j \omega_{ij} e_j$, concluímos que

$$\omega_{ij} = \sum_k d\beta_{ik} \beta_{jk}. \tag{1-6}$$

Segue que

$$\begin{aligned} \sum_j \omega_{ij} \beta_{js} &= \sum_{j,k} d\beta_{ik} \beta_{jk} \beta_{js} \\ &= \sum_k d\beta_{ik} \delta_{ks} = d\beta_{is}, && (1\text{-}7) \end{aligned}$$

onde $1 \leq s \leq n$. Finalmente, diferenciando exteriormente (1-5) e usando (1-7), obtemos

$$\begin{aligned} d\omega_i &= \sum_j d\beta_{ij} \wedge dx_j \\ &= \sum_j \left(\sum_k \omega_{ik}\beta_{kj} \right) \wedge dx_j \\ &= \sum_k \omega_{ik} \wedge \sum_j \beta_{kj} dx_j \\ &= \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_k = -\sum_k \omega_k \wedge \omega_{ik} \\ &= \sum_k \omega_k \wedge \omega_{ki}, \end{aligned}$$

que é a primeira equação de estrutura (1-2). Agora diferenciando (1-6) e usando (1-7), obtemos

$$\begin{aligned} d\omega_{ij} &= \sum_k d(d\beta_{ik}) \wedge \beta_{jk} + (-1)^1 \sum_k d\beta_{ik} \wedge d\beta_{jk} \\ &= \sum_k d\beta_{jk} \wedge d\beta_{ik} \\ &= \sum_k \left\{ \left(\sum_l \omega_{jl}\beta_{lk} \right) \wedge \left(\sum_s \omega_{is}\beta_{sk} \right) \right\} \\ &= \sum_l \left(\omega_{jl} \wedge \sum_s \omega_{is} \sum_k \beta_{lk}\beta_{sk} \right). \end{aligned}$$

Observe que,

$$\sum_k \beta_{lk}\beta_{sk} = \delta_{ls}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} d\omega_{ij} &= \sum_l \left(\omega_{jl} \wedge \sum_s \omega_{is} \sum_k \beta_{lk}\beta_{sk} \right) \\ &= \sum_l \left(\omega_{jl} \wedge \sum_s \omega_{is}\delta_{ls} \right) \\ &= \sum_l \omega_{jl} \wedge \omega_{il} = -\sum_l \omega_{il} \wedge \omega_{jl} \\ &= \sum_l \omega_{il} \wedge \omega_{lj} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}, \end{aligned}$$

que é a segunda equação de estrutura (1-3). □

A ideia básica do método do referencial móvel pode ser descrita da seguinte maneira.

Seja $x: M^n \to \mathbb{R}^{n+q}$ uma imersão de uma variedade diferenciável de dimensão n em um espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+q}$. É uma consequência do Teorema da Função Inversa que, para todo $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que a restrição $x|_U$ de x a U é injetiva. Seja $V \subset \mathbb{R}^{n+p}$ uma vizinhança de $x(p)$ em $\mathbb{R}^{n+p}$ de tal modo que $x(U) \subset V$. Admitamos V suficientemente pequeno para que exista um referencial móvel $\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}, \ldots, e_{n+q}\}$ em V com a propriedade que, quando restritos a $x(U)$, os vetores $e_1, \ldots, e_n$ sejam tangentes a $x(U)$ e os vetores $e_{n+1}, \ldots, e_{n+q}$ sejam normais a $x(U)$. Um tal referencial é dito referencial adaptado a imersão x.

A existência de um referencial adaptado pode ser provada da seguinte maneira. Se V é suficientemente pequeno, existe um difeomorfismo $g: V \to g(V) \subset \mathbb{R}^{n+q}$ tal que $g \circ x(U)$ é um aberto de uma subvariedade linear de dimensão n de $\mathbb{R}^{n+q}$. Então, existe um referencial $\{f_1, \ldots, f_n, f_{n+1}, \ldots, f_{n+q}\}$ adaptado a $g \circ x(U)$ em $g(V)$. A imagem inversa $\{g^{-1}(f_1), \ldots, g^{-1}(f_{n+q})\}$ de um tal referencial pode não ser ortonormal. Caso isto ocorrer, usamos então o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt em cada ponto de V. Observando que os vetores obtidos por este processo "variam diferencialmente"com os vetores dados, obteremos assim, em V, um referencial ortonormal adaptado a $x(U)$.

Em V estão definidas as formas ω_i do referencial $\{e_i\}$ e as formas de conexão ω_{ij} que satisfazem as equações de estrutura (1-2) e (1-3). A aplicação $x: U \subset M \to V \subset \mathbb{R}^{n+q}$ induz formas diferenciais $x^*(\omega_i)$, $x^*(\omega_{ij})$ em U. Como x^* comuta com a derivação exterior e com o produto exterior, tais formas em U satisfazem as equações de estrutura (1-2) e (1-3). Observe que toda geometria métrica local da imersão x está contida nestas equações de estrutura, o que reflete o caráter "universal" do $\mathbb{R}^n$.

1.1.2 Lema de Cartan e a Unicidade das Formas de Conexão

Lema 1.2 (Cartan) *Seja V espaço vetorial de dimensão n. Sejam $\omega_1, \ldots, \omega_r : V \to \mathbb{R}$, $r \leq n$, formas lineares de V linearmente independentes. Suponha que existam formas lineares $\theta_1, \ldots, \theta_r : V \to \mathbb{R}$ satisfazendo a seguinte condição: $\sum_{i=1}^{r} \omega_i \wedge \theta_i = 0$. Então,*

$$\theta_i = \sum_j a_{ij}\omega_j, \quad 1 \leq i, j \leq r, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Prova. Completemos as formas $\omega_1, \ldots, \omega_r$, em uma base $\{\omega_1, \ldots, \omega_r, \omega_{r+1}, \ldots, \omega_n\}$ de V^*, e escrevamos

$$\theta_i = \sum_j a_{ij}\omega_j + \sum_l b_{il}\omega_l, \quad r+1 \leq l \leq n.$$

Observemos que a condição $\sum_{i=1}^{r}\omega_i\wedge\theta_i = 0$ implica que

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{r}\omega_i\wedge\theta_i \\
&= \sum_{i=1}^{r}\omega_i\wedge\left(\sum_{j=1}^{r}a_{ij}\omega_j + \sum_{l=r+1}^{n}b_{il}\omega_l\right) \\
&= \sum_{i=1}^{r}\omega_i\wedge\sum_{j=1}^{r}a_{ij}\omega_j + \sum_{i=1}^{r}\omega_i\wedge\sum_{l=r+1}^{n}b_{il}\omega_l.
\end{aligned}$$

Restringindo os índices, isto é, fazendo $i<j$, temos

$$\sum_{i<j}(a_{ij}-a_{ji})\omega_i\wedge\omega_j + \sum_{i<l}b_{il}\omega_i\wedge\omega_l = 0,$$

ou seja,

$$\sum_{i<j}(a_{ij}-a_{ji})\omega_i\wedge\omega_j = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i<l}b_{il}\omega_i\wedge\omega_l = 0.$$

Como $\omega_k\wedge\omega_s$, $k<s$, $1\leq k,s\leq n$, são linearmente independentes, conclui-se que $a_{ij}=a_{ji}$ e $b_{il}=0$. Portanto, com a condição $\sum_i\omega_i\wedge\theta_i = 0$, temos que

$$\theta_i = \sum_j a_{ij}\omega_j, \quad 1\leq i,j\leq r, \quad a_{ij}=a_{ji}.$$

□

Lema 1.3 *Sejam M uma variedade Riemanniana, $p\in M$, e $U\subset M$ uma vizinhança de p. Sejam $e_1,\ldots,e_n$ campos diferenciáveis de vetores em U com $\langle e_i,e_j\rangle=\delta_{ij}$ um referencial móvel em U. Sejam $\omega_1,\ldots,\omega_n$ formas diferenciais em U definidas pela condição $\omega_i(e_j)=\delta_{ij}$ o coreferencial de $\{e_i\}$. Suponha que exista em U um conjunto de 1-formas diferenciais ω_{ij} satisfazendo as condições:*

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji} \quad e \quad d\omega_j = \sum_k \omega_k\wedge\omega_{kj}.$$

Então, um tal conjunto é único.

Prova. Suponhamos que exista um outro conjunto de formas $\overline{\omega}_{ij}$ com

$$\overline{\omega}_{ij} = -\overline{\omega}_{ji} \quad \text{e} \quad d\omega_j = \sum_k \omega_k\wedge\overline{\omega}_{kj}.$$

Então, temos que

$$\sum_k \omega_k \wedge \overline{\omega}_{kj} = d\omega_j = \sum_k \omega_k \wedge \omega_{kj},$$

o que implica que

$$\sum_k \omega_k \wedge \overline{\omega}_{kj} - \sum_k \omega_k \wedge \omega_{kj} = 0,$$

isto é,

$$\sum_k \omega_k \wedge (\overline{\omega}_{kj} - \omega_{kj}) = 0.$$

Pelo Lema de Cartan,

$$\overline{\omega}_{kj} - \omega_{kj} = \sum_i B^j_{ki}\omega_i, \quad B^j_{ki} = B^j_{ik}.$$

Observe que

$$\begin{aligned} \overline{\omega}_{kj} - \omega_{kj} &= -\overline{\omega}_{jk} - (-\omega_{jk}) \\ &= -(\overline{\omega}_{jk} - \omega_{jk}) \\ &= -\sum_i B^k_{ji}\omega_i. \end{aligned}$$

Então,

$$\sum_i B^j_{ki}\omega_i = \overline{\omega}_{kj} - \omega_{kj} = -\sum_i B^k_{ji}\omega_i$$

e como ω_i são linearmente independentes, temos que

$$B^j_{ki} = -B^k_{ji}.$$

Usando as simetrias obtidas, concluímos que

$$B^k_{ji} = -B^j_{ki} = -B^j_{ik} = B^i_{jk} = B^i_{kj} = -B^k_{ij} = -B^k_{ji} = 0,$$

ou seja, $\overline{\omega}_{kj} = \omega_{kj}$. $\square$

1.1.3 Subvariedades de um Espaço Euclidiano

Seja $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+q}$ uma imersão de uma variedade de dimensão n em $\mathbb{R}^{n+q}$. Seja $p \in M$ e U uma vizinhança de p em M na qual a restrição $x|_U$ seja injetiva. Seja V uma vizinhança de $x(p)$ em $\mathbb{R}^{n+q}$ de tal modo que $x(U) \subset V$ e que em V esteja definido um referencial adaptado $\{e_1, \ldots, e_{n+q}\}$. Pensaremos em x como uma inclusão de U em $V \subset \mathbb{R}^{n+q}$ e usaremos a mesma notação para uma entidade em V ou a sua restrição a U. Admitiremos esta convenção sem maiores comentários.

Usaremos os seguintes tipos de índices:

$$1 \leq A, B, C, \ldots \leq n+q,$$

$$1 \leq i, j, k, \ldots \leq n,$$

$$n+1 \leq \alpha, \beta, \gamma, \ldots \leq n+q.$$

Dado o referencial $\{e_A\}$ em U, definimos o coreferencial $\{\omega_A\}$ e as formas de conexão ω_{AB} em V por

$$dx = \sum_A \omega_A e_A, \tag{1-8}$$
$$de_A = \sum_B \omega_{AB} e_B. \tag{1-9}$$

As formas ω_A e ω_{AB} satisfazem as equações de estrutura

$$d\omega_A = \sum_B \omega_B \wedge \omega_{BA}, \tag{1-10}$$
$$d\omega_{AB} = \sum_C \omega_{AC} \wedge \omega_{CB}. \tag{1-11}$$

As restrições das formas ω_A, ω_{AB} a $U \subset V$ satisfazem ainda as equações (1-10) e (1-11), com a relação adicional $\omega_\alpha = 0$, para todo α. Esta última relação provém do fato de que os vetores e_α são normais a U, e portanto, para todo $q \in U$ e todo $v = \sum_i v_i e_i \in T_q M$, tem-se

$$\omega_\alpha(v) = \omega_\alpha\left(\sum_i v_i e_i\right) = 0.$$

No que se segue só usaremos formas restritas a U.
Como $\omega_\alpha = 0$, temos que $d\omega_\alpha = 0$.
Por outro lado,

$$\begin{aligned} d\omega_\alpha &= \sum_B \omega_B \wedge \omega_{B\alpha} \\ &= \sum_\beta \omega_\beta \wedge \omega_{\beta\alpha} + \sum_i \omega_i \wedge \omega_{i\alpha} \\ &= \sum_i \omega_i \wedge \omega_{i\alpha}. \end{aligned}$$

Portanto, $\sum_i \omega_i \wedge \omega_{i\alpha} = 0$.

Pelo Lema de Cartan,

$$\omega_{i\alpha} = \sum_j h^\alpha_{ij}\omega_j, \quad h^\alpha_{ij} = h^\alpha_{ji}.$$

A forma quadrática definida por

$$II^\alpha = \sum_i \omega_i\omega_{i\alpha} = \sum_{i,j} h^\alpha_{ij}\omega_i\omega_j$$

é chamada a segunda forma quadrática de x na direção e_α.

O espaço normal da imersão x em p, $p \in M$, e indicado por N_pM, é o espaço gerado pelos vetores de $\mathbb{R}^{n+q}$ que são normais a $dx_p(T_pM)$, para cada $p \in M$. Um campo diferenciável de vetores normais é uma aplicação diferenciável $\eta : M \to \mathbb{R}^{n+q}$ com $\eta(p) \in N_pM$, $p \in M$.
Dado um campo diferenciável unitário de vetores normais $\eta : U \subset M \to \mathbb{R}^{n+q}$, em uma vizinhança U suficientemente pequena de p, podemos escolher um referencial adaptado $\{e_A\}$ em U de tal modo que $e_{n+1} = \eta$. A segunda forma quadrática II^{n+1} é chamada a segunda forma quadrática de x na direção η e indicada por II^η.

Vamos agora escrever as equações (1-10) e (1-11), separando as partes tangenciais (índices $i, j, \ldots$) das partes normais (índices $\alpha, \beta, \ldots$). Então,

$$d\omega_i = \sum_j \omega_j \wedge \omega_{ji} \quad \text{e} \quad d\omega_\alpha = \sum_\beta \omega_\beta \wedge \omega_{\beta\alpha} = 0, \tag{1-12}$$

$$d\omega_{ij} = \sum_C \omega_{iC} \wedge \omega_{Cj} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \sum_\alpha \omega_{i\alpha} \wedge \omega_{\alpha j}, \tag{1-13}$$

$$d\omega_{i\alpha} = \sum_C \omega_{iC} \wedge \omega_{C\alpha} = \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_{j\alpha} + \sum_\beta \omega_{i\beta} \wedge \omega_{\beta\alpha}, \tag{1-14}$$

$$d\omega_{\alpha\beta} = \sum_C \omega_{\alpha C} \wedge \omega_{C\beta} = \sum_i \omega_{\alpha i} \wedge \omega_{i\beta} + \sum_\gamma \omega_{\alpha\gamma} \wedge \omega_{\gamma\beta}. \tag{1-15}$$

Observe que a equação (1-13) é semelhante à equação de estrutura de um espaço Euclidiano, com um termo de "correção" dado por

$$\sum_\alpha \omega_{i\alpha} \wedge \omega_{\alpha j} = \Omega_{ij} \quad \text{e} \quad \Omega_{ij} = -\Omega_{ji}.$$

Para esclarecer o significado das 2-formas Ω_{ij}, notemos que a imersão $x : M^n \to \mathbb{R}^{n+q}$ determina uma métrica Riemanniana $\langle\ ,\ \rangle$ em M dado por

$$\langle v_1, v_2\rangle_p = \langle dx_p(v_1), dx_p(v_2)\rangle, \quad p \in M, \quad v_1, v_2 \in T_pM,$$

onde o produto interno de segundo membro é o produto interno usual do $\mathbb{R}^{n+q}$. A métrica

Riemanniana $\langle\ ,\ \rangle$ em M é chamada a métrica induzida por x. A métrica induzida e a parte tangente $\{e_i\}$ do referencial determinam as formas ω_i, donde as formas $d\omega_i$. Pela unicidade, as formas ω_{ij} ficam então inteiramente determinadas, o mesmo se verifica para as formas

$$\Omega_{ij} = d\omega_{ij} - \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}.$$

Portanto, a matriz anti-simétrica de 2-formas (Ω_{ij}) depende apenas da métrica induzida e da escolha do referencial.

Isto sugere que a matriz (Ω_{ij}) é uma espécie de medida de quanto a métrica induzida deixa de ser euclidiana. (Ω_{ij}) é chamada formas de curvatura no referencial $\{e_i\}$.
Observe que se $M^n = \mathbb{R}^n$, $\Omega_{ij} = 0$. Além disto, se $x : M^2 \to \mathbb{R}^3$, temos que

$$\begin{aligned} \Omega_{12} &= d\omega_{12} - \sum_{k=1}^{2} \omega_{1k} \wedge \omega_{k2} \\ &= -K\omega_1 \wedge \omega_2, \end{aligned}$$

o que mostra que (Ω_{ij}) generaliza a noção de curvatura Gaussiana de uma superfície.
Lembrando que a definição de curvatura Gaussiana de uma superfície S em p é dada por

$$K = det(de_3)_p = \lambda_1\lambda_2 = h_{11}h_{22} - (h_{12})^2.$$

De fato, calculando $d\omega_{12}$, temos

$$d\omega_{12} = \omega_{13} \wedge \omega_{32},$$

sendo que $\omega_{13} = h_{11}\omega_1 + h_{12}\omega_2$ e $\omega_{23} = h_{21}\omega_1 + h_{22}\omega_2$.
Substituindo,

$$\begin{aligned} d\omega_{12} &= (h_{11}\omega_1 + h_{12}\omega_2) \wedge (-h_{21}\omega_1 - h_{22}\omega_2) \\ &= -h_{11}h_{21}\omega_1 \wedge \omega_1 - h_{11}h_{22}\omega_1 \wedge \omega_2 - h_{12}h_{21}\omega_2 \wedge \omega_1 - h_{12}h_{22}\omega_2 \wedge \omega_2 \\ &= -h_{11}h_{22}\omega_1 \wedge \omega_2 + h_{12}h_{21}\omega_1 \wedge \omega_2 \\ &= -h_{11}h_{22}\omega_1 \wedge \omega_2 + (h_{12})^2\omega_1 \wedge \omega_2 \\ &= -\{h_{11}h_{22} - (h_{12})^2\}\omega_1 \wedge \omega_2 \\ &= -K\omega_1 \wedge \omega_2. \end{aligned}$$

Como h_{ij} é a matriz simétrica, concluímos que a diferencial da aplicação normal de Gauss é uma aplicação linear auto-adjunta. Por um resultado de Álgebra Linear, segue que os autovalores $-\lambda_1$, $-\lambda_2$ são números reais, e os vetores próprios são ortogonais.

Para associar um significado geométrico à matriz das formas de curvatura, precisamos verificar como elas variam com a mudança da parte tangente do referencial $\{e_i\}$. A parte normal $\{e_\alpha\}$ do referencial não afeta as formas Ω_{ij}. Será conveniente usar a seguinte notação matricial.

As matrizes das formas ω_{ij} e Ω_{ij} serão indicadas por W e Ω, respectivamente, e o vetor coluna das formas ω_i, por ω. As equações de estrutura (1-12) e (1-13) podem ser escritas como

$$\begin{aligned} d\omega &= W \wedge \omega, \\ dW &= W \wedge W + \Omega. \end{aligned}$$

Uma mudança na parte tangente $\{e_i\}$ do referencial será dada por $e_i = \sum_j u_{ij}\bar{e}_j$, onde $(u_{ij}) = U$ é uma matriz de funções diferenciáveis em M; além disso, U é ortogonal, isto é, $UU^* =$ identidade, onde U^* indica a matriz transposta de U.

Lema 1.4 *Por uma mudança do referencial tangente $\{e_i\}$ dada por $e_i = \sum_j u_{ij}\bar{e}_j$, a matriz das formas de conexão W é dada por*

$$W = dUU^* + U\overline{W}U^*, \tag{1-16}$$

e a matriz das formas de curvatura Ω é dada por

$$\Omega = U\overline{\Omega}U^*, \tag{1-17}$$

onde a barra indica a entidade correspondente no referencial $\{\bar{e}_i\}$.

Prova. De $e_i = \sum_j u_{ij}\bar{e}_j$ decorre que $\omega_i = \sum_j u_{ij}\bar{\omega}_j$, isto é, $\omega = U\bar{\omega}$ o que implica que $\bar{\omega} = U^*\omega$. Portanto,

$$\begin{aligned} d\omega &= dU \wedge \bar{\omega} + Ud\bar{\omega} \\ &= dU \wedge \bar{\omega} + U(\overline{W} \wedge \bar{\omega}) \\ &= dU \wedge (U^*\omega) + U(\overline{W} \wedge U^*\omega) \\ &= dUU^* \wedge \omega + U\overline{W} \wedge U^*\omega \\ &= dUU^* \wedge \omega + U\overline{W}U^* \wedge \omega \\ &= (dUU^* + U\overline{W}U^*) \wedge \omega. \end{aligned}$$

Por outro lado, $d\omega = W \wedge \omega$.
Pelo Lema da Unicidade, temos

$$(dUU^* + U\overline{W}U^*) \wedge \omega = d\omega = W \wedge \omega,$$

o que implica que.

$$W = dUU^* + U\overline{W}U^*,$$

o que demonstra (1-16).
Agora observe que $dUU^* = -U(dU)^*$.
Calculemos $W \wedge W$ e dW, obteremos

$$\begin{aligned}
W \wedge W &= (dUU^* + U\overline{W}U^*) \wedge (dUU^* + U\overline{W}U^*) \\
&= (dUU^* + U\overline{W}U^*) \wedge (-U(dU)^* + U\overline{W}U^*) \\
&= dUU^* \wedge (-U(dU)^*) + dUU^* \wedge U\overline{W}U^* + U\overline{W}U^* \wedge (-U(dU)^*) + \\
&+ U\overline{W}U^* \wedge U\overline{W}U^* \\
&= -dUU^*U \wedge (dU)^* + dUU^*U \wedge \overline{W}U^* - U\overline{W}U^*U \wedge (dU)^* + U\overline{W}U^*U \wedge \overline{W}U^* \\
&= -dU \wedge (dU)^* + dU \wedge \overline{W}U^* - U\overline{W} \wedge (dU)^* + U\overline{W} \wedge \overline{W}U^*,
\end{aligned}$$

e como $W = dUU^* + U\overline{W}U^* = -U(dU)^* + U\overline{W}U^*$, então derivando exteriormente, obtemos

$$dW = -dU \wedge (dU)^* + dU \wedge \overline{W}U^* + Ud\overline{W}U^* - U\overline{W} \wedge (dU)^*.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\Omega &= dW - W \wedge W \\
&= Ud\overline{W}U^* - U\overline{W} \wedge \overline{W}U^* \\
&= U(d\overline{W}U^* - \overline{W} \wedge \overline{W}U^*) \\
&= U(d\overline{W} - \overline{W} \wedge \overline{W})U^* \\
&= U\overline{\Omega}U^*,
\end{aligned}$$

o que demonstra (1-17). □

Decorre do Lema anterior que, fixado $p \in M$, quando mudamos o referencial tangente $\{e_i\}$, a matriz das formas $((\Omega_{ij})_p)$ muda como a matriz de uma transformação linear em T_pM. Portanto, fixados dois vetores $X, Y \in T_pM$, a matriz numérica $\{(\Omega_{ij})_p(X,Y)\}$ representa uma transformação linear em T_pM, que indicaremos por $(R_{XY})_p : T_pM \to T_pM$, que é chamado operador curvatura da métrica induzida, e que não depende do referencial tangente.

Passaremos a analisar as equações (1-15) e escrevendo-as na forma

$$d\omega_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma} \omega_{\alpha\gamma} \wedge \omega_{\gamma\beta} + \Omega_{\alpha\beta},$$

onde

$$\Omega_{\alpha\beta} = \sum_{i} \omega_{\alpha i} \wedge \omega_{i\beta} = -\sum_{i} \omega_{\beta i} \wedge \omega_{i\alpha} = -\Omega_{\beta\alpha},$$

vemos que elas possuem uma certa analogia formal com as equações de estrutura de um espaço Euclidiano com um termo de "correção" $\Omega_{\alpha\beta}$. Por um raciocínio análogo ao do Lema anterior, verificaremos que a matriz de formas $(\omega_{\alpha\beta}) = W^{\perp}$ e a matriz de formas $(\Omega_{\alpha\beta}) = \Omega^{\perp}$ se transformam, por uma mudança da parte normal $\{e_\alpha\}$ do referencial, de modo semelhante às formas W e Ω, respectivamente. Por esta razão, chamaremos $\omega_{\alpha\beta}$ as formas da conexão normal e $\Omega_{\alpha\beta}$ as formas da curvatura normal.

Quando fixamos $p \in M$ e dois vetores $X,Y \in T_pM$, a matriz $\{(\Omega_{\alpha\beta})_p(X,Y)\}$ determina uma transformação linear $(R^{\perp}_{XY})_p : N_pM \to N_pM$. $R^{\perp}_{XY}$ é chamado operador de curvatura normal da imersão x.

Como no caso de superfícies, as formas ω_{ij} possuem a seguinte interpretação geométrica.

Sejam X um campo diferenciável de vetores tangentes em M, $Y \in T_pM$ e seja ainda $\alpha : (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ uma curva diferenciável com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = Y$. Definamos

$$(\nabla_Y X)_p \quad = \quad \text{projeção sobre} \quad T_pM \quad \text{de} \quad \left(\frac{dX}{dt}\right)_{t=0},$$

onde t é o parâmetro da curva α.

Vamos mostrar que $\nabla_Y X$ só depende da métrica induzida em M por X.

Para isto, escolhamos um referencial adaptado $\{e_A\}$ em uma vizinhança $U \subset M$ e escrevamos $X = \sum_i x_i e_i$, onde x_i são funções diferenciáveis em U. Como

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\sum_i x_i e_i\right) = \sum_i \frac{dx_i}{dt} e_i + \sum_i x_i \frac{de_i}{dt} \\ &= \sum_j \frac{dx_j}{dt} e_j + \sum_i x_i \sum_j \omega_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) e_j + \sum_i x_i \sum_\alpha \omega_{i\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) e_\alpha, \end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned}(\nabla_Y X)_p &= \sum_j \left\{ \frac{dx_j}{dt} + \sum_i \omega_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) x_i \right\} e_j \\ &= \sum_j \left\{ dx_j(Y) + \sum_i \omega_{ij}(Y) x_i \right\} e_j\end{aligned}$$

o que mostra que $\nabla_Y X$ só depende dos ω_{ij} e, portanto, da métrica induzida.

$(\nabla_Y X)_p$ é chamada de derivada covariante do campo X segundo o vetor Y no ponto p. Se $X = e_i$, temos que $\frac{dX}{dt} = \frac{de_i}{dt}$, então $(\nabla_Y e_i)_p = \frac{de_i}{dt} = de_i(Y)$, e

$$\langle \nabla_Y e_i, e_j \rangle = \langle de_i(Y), e_j \rangle = \omega_{ij}(Y),$$

o que fornece um interpretação geométrica das formas de conexão ω_{ij} em termos da derivação covariante.

Uma interpretação análoga pode ser feita às formas de conexão normal $\omega_{\alpha\beta}$.

De fato, sejam η um campo diferenciável de vetores normais em M e $y \in T_pM$. A derivada covariante normal $(\nabla_y^{\perp}\eta)_p$ de η em relação a y no ponto p é a projeção sobre o complemento ortogonal N_pM de T_pM da derivada usual $\left(\frac{d\eta}{dt}\right)_{t=0}$. Como anteriormente, t é o parâmetro de uma curva diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = y$. De maneira análoga à anterior, escolhamos um referencial adaptado $\{e_A\}$ e uma vizinhança $U \subset M$ e escrevamos $\eta = \sum_\alpha \eta_\alpha e_\alpha$, onde η_α são funções diferenciáveis em U. Como

$$\begin{aligned}\frac{d\eta}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\sum_\alpha \eta_\alpha e_\alpha\right) \\ &= \sum_\alpha \frac{d\eta_\alpha}{dt} e_\alpha + \sum_\alpha \eta_\alpha \frac{de_\alpha}{dt} \\ &= \sum_\beta \frac{d\eta_\beta}{dt} e_\beta + \sum_\alpha \eta_\alpha \sum_\beta \omega_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) e_\beta + \sum_\alpha \eta_\alpha \sum_i \omega_{\alpha i}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) e_i,\end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned}(\nabla_y^{\perp}\eta)_p &= \sum_\beta \left(\frac{d\eta_\beta}{dt} + \sum_\alpha \omega_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \eta_\alpha \right) e_\beta \\ &= \sum_\beta \left(d\eta_\beta(y) + \sum_\alpha \omega_{\alpha\beta}(y) \eta_\alpha \right) e_\beta,\end{aligned}$$

isto é, $\nabla_y^{\perp}\eta$ depende apenas das formas $\omega_{\alpha\beta}$.
A interpretação geométrica das formas $\omega_{\alpha\beta}$ é obtida observando que, se $\eta = e_\alpha$, temos

$$\begin{aligned} \langle \nabla_y^{\perp} e_\alpha, e_\beta \rangle &= \left\langle \frac{de_\alpha}{dt}, e_\beta \right\rangle \\ &= \langle de_\alpha(y), e_\beta \rangle \\ &= \omega_{\alpha\beta}(y). \end{aligned}$$

Finalmente, observe que as equações

$$\Omega_{ij} = \sum_\alpha \omega_{i\alpha} \wedge \omega_{\alpha j}, \quad \Omega_{\alpha\beta} = \sum_i \omega_{\alpha i} \wedge \omega_{i\beta},$$

relacionam as formas de curvatura da métrica induzida e as formas de curvatura normal com as segundas formas quadráticas de imersão da seguinte maneira:
Sabemos que

$$\omega_{i\alpha} = \sum_j h_{ij}^\alpha \omega_j, \quad h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha$$

e a segunda forma quadrática é dada por

$$II^\alpha = \sum_i \omega_i \omega_{i\alpha} = \sum_{i,j} h_{ij}^\alpha \omega_i \omega_j.$$

Então, temos que

$$\omega_{i\alpha} = \sum_k h_{ik}^\alpha \omega_k \quad \text{e} \quad \omega_{\alpha j} = -\omega_{j\alpha} = \sum_l h_{jl}^\alpha \omega_l.$$

Assim, obtemos que

$$\begin{aligned} \Omega_{ij} &= \sum_\alpha \omega_{i\alpha} \wedge \omega_{\alpha j} \\ &= \sum_\alpha \left\{ \sum_k h_{ik}^\alpha \omega_k \wedge \left(-\sum_l h_{jl}^\alpha \omega_l \right) \right\} \\ &= -\sum_\alpha \left(\sum_k h_{ik}^\alpha \omega_k \wedge \sum_l h_{jl}^\alpha \omega_l \right) \\ &= \sum_\alpha \left(\sum_l h_{jl}^\alpha \omega_l \wedge \sum_k h_{ik}^\alpha \omega_k \right) \\ &= \sum_{l<k} \left\{ \sum_\alpha (h_{ik}^\alpha h_{jl}^\alpha - h_{il}^\alpha h_{jk}^\alpha) \right\} \omega_l \wedge \omega_k \end{aligned} \tag{1-18}$$

e

$$
\begin{aligned}
\Omega_{\alpha\beta} &= -\sum_i \left(\sum_k h^{\alpha}_{ik}\omega_k \wedge \sum_l h^{\beta}_{il}\omega_l \right) \\
&= \sum_{k<l} \left\{ \sum_i (h^{\alpha}_{ki}h^{\beta}_{il} - h^{\beta}_{ki}h^{\alpha}_{il}) \right\} \omega_k \wedge \omega_l. \qquad (1\text{-}19)
\end{aligned}
$$

As equações (1-18) e (1-19) são chamadas as equações de Gauss e as equações de Ricci, respectivamente. As equações (1-14) são chamadas de equações de Codazzi.
Isto tudo é como se a geometria da imersão x se decompusesse em duas, uma geometria tangente e uma geometria normal, ligadas pelas segundas formas quadráticas, isto é, nas formas $\omega_{i\alpha}$. As equações de Codazzi exprimem as diferenciais das segundas formas quadráticas em termos das formas $\omega_{i\alpha}$, da conexão tangente e da conexão normal.

1.1.4 Variedades Riemannianas

As equações de estrutura relativas a uma métrica induzida por uma imersão, a saber,

$$
d\omega_i = \sum_j \omega_j \wedge \omega_{ji}, \qquad (1\text{-}20)
$$

nos sugerem a possibilidade de desenvolver o método do referencial móvel para uma variedade Riemanniana M^n. Desta forma, considere $p \in M$ um ponto de M e $U \subset M$ uma vizinhança de p em M, onde seja possível definir campos diferenciáveis de vetores $e_1, \ldots, e_n$ tais que $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. O conjunto $\{e_i\}$, $1 \leq i \leq n$, será o referencial em U. Seja ω_i formas diferenciais em U definidas por $\omega_i(e_j) = \delta_{ij}$ o coreferencial associado a $\{e_i\}$. Vimos no Lema da Unicidade que se existirem formas diferenciais $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ satisfazendo (1-20), elas estarão inteiramente determinadas. O que garante que tais formas existem a partir da métrica Riemanniana de M é o conteúdo do lema seguinte.

Lema 1.5 (Levi-Civita) *Escolhido um referencial $\{e_i\}$ em um aberto $U \in M$ de uma variedade Riemanniana M existe em U um (único) conjunto de formas diferenciais ω_{ij} que são anti-simétricas $(\omega_{ij} = -\omega_{ji})$ e satisfazem (1-20).*

Prova. Façamos $d\omega_j(e_k, e_i) = A^j_{ki}$, isto é,

$$
d\omega_j = \sum_{k<i} A^j_{ki}\omega_k \wedge \omega_i, \qquad A^j_{ki} = -A^j_{ik}.
$$

Queremos determinar funções $C_{kj}^{i} = -C_{jk}^{i}$ tais que as formas diferenciais

$$\omega_{kj} = \sum_{i} C_{kj}^{i} \omega_{i} \tag{1-21}$$

satisfazem (1-20). Se tais funções existirem, teremos

$$\begin{aligned}
\sum_{k<i} A_{ki}^{j} \omega_{k} \wedge \omega_{i} &= d\omega_{j} \\
&= \sum_{k} \omega_{k} \wedge \omega_{kj} \\
&= \sum_{k} \omega_{k} \wedge \left(\sum_{i} C_{kj}^{i} \omega_{i} \right) \\
&= \sum_{k<i} \left(C_{kj}^{i} - C_{ij}^{k} \right) \omega_{k} \wedge \omega_{i}.
\end{aligned}$$

Igualando os coeficientes de termos correspondentes nas equações acima, temos

$$\begin{aligned}
A_{ki}^{j} &= C_{kj}^{i} - C_{ij}^{k}, \\
A_{ij}^{k} &= C_{ik}^{j} - C_{jk}^{i}, \\
A_{kj}^{i} &= C_{ki}^{j} - C_{ji}^{k}.
\end{aligned}$$

Adicionando membro a membro, temos que

$$A_{ki}^{j} + A_{ij}^{k} + A_{kj}^{i} = C_{kj}^{i} - C_{ij}^{k} + C_{ik}^{j} - C_{jk}^{i} + C_{ki}^{j} - C_{ji}^{k},$$

o que implica a condição necessária para a existência dos C_{kj}^{i} dada por

$$C_{kj}^{i} = \frac{1}{2} \left(A_{ki}^{j} + A_{ij}^{k} + A_{kj}^{i} \right).$$

Definindo C_{kj}^{i} pela equação anterior e as formas ω_{ij} por (1-21), assim elas satisfazem as condições pedidas. □

As formas ω_{ij} são chamadas de formas de conexão de M no referencial $\{e_i\}$. O interesse geométrico das formas de conexão é que elas permitem definir uma noção de derivação para campos de vetores em M.

Observe que em uma variedade diferenciável, podemos derivar funções, porém não campos de vetores. O conteúdo do Lema 1.4 e a proposição seguinte é que em uma variedade Riemanniana uma tal derivação é bem definida.

Proposição 1.6 *Sejam X e Y campos diferenciáveis de vetores em uma variedade Riemanniana M e seja $\{e_i\}$ um referencial em um aberto $U \in M$. Suponhamos que $Y = \sum_i y_i e_i$ e façamos*

$$\nabla_X Y = \sum_j \left\{ dy_i(X) + \sum_i \omega_{ij}(X) y_i \right\} e_j. \tag{1-22}$$

Então, $\nabla_X Y$ não dependente do referencial $\{e_i\}$ e, portanto, está globalmente definido em M.

A prova desta Proposição encontra-se em [8].

$\nabla_X Y$ é chamada de derivada covariante de Y em relação a X. A proposição seguinte garante que a derivada covariante é uma derivação que tem as mesmas propriedades da derivada covariante das superfícies em $\mathbb{R}^3$.

Proposição 1.7 *Sejam X, Y, Z campos de vetores diferenciáveis em M, f, g funções diferenciáveis em M e a, b são números reais. Então,*

1. $\nabla_{fX+gZ} Y = f \nabla_X Y + g \nabla_Z Y$,
2. $\nabla_X (aY + bZ) = a \nabla_X Y + b \nabla_X Z$,
3. $\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + X(f) Y$,
4. $\langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle = X(\langle Y, Z \rangle)$,
5. *Se $p \in M$, $(\nabla_X Y)(p)$ só depende do valor de X no ponto p e dos valores de Y ao longo de uma curva parametrizada $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = X(p)$.*

A prova desta proposição segue da definição na Proposição 1.6 da equação (1-22).

Observe que a derivação covariante permite uma interpretação geométrica das formas de conexão. Com efeito, de (1-22), temos

$$\nabla_X Y = \sum_j \left\{ dy_j(X) + \sum_i \omega_{ij}(X) y_i \right\} e_j, \qquad Y = \sum_i y_i e_i.$$

Então,

$$\nabla_X e_i = \sum_j \sum_i \omega_{ij}(X) e_i,$$

e assim

$$\langle \nabla_X e_i, e_j \rangle = \sum_j \sum_i \omega_{ij}(X) \langle e_i, e_j \rangle.$$

Portanto, $\omega_{ij}(e_k) = \langle \nabla_{e_k} e_i, e_j \rangle$.

Convém estender a noção de derivada covariante para campos de vetores definidos ao longo de uma curva parametrizada $\alpha : (a,b) \to M$ da seguinte maneira.

Um campo diferenciável de vetores ao longo de α é uma correspondência que a cada $t \in (a,b)$ associa um vetor $Y(t) \in T_{\alpha(t)}M$ de tal modo que escolhendo um referencial $\{e_i\}$ em torno de $\alpha(t)$, as funções $y_i(t)$ dadas por $Y(t) = \sum_i y_i(t)e_i$ sejam diferenciáveis. É claro que esta condição não depende do referencial escolhido.
Observe que

$$
\begin{aligned}
\frac{DY}{dt} &= \sum_j \left\{ \frac{dy_i}{dt} + \sum_i \omega_{ij} d\alpha\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) y_i \right\} e_j \\
&= \sum_j \left\{ \frac{dy_i}{dt} + \sum_i \alpha^* \omega_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) y_i \right\} e_j.
\end{aligned}
$$

Pelo item (5) da Proposição 1.7, temos

$$
\begin{aligned}
\nabla_{d\alpha(\frac{\partial}{\partial t})} Y(t) &= \frac{DY}{dt} \\
&= \sum_j \left\{ \frac{dy_i}{dt} + \sum_i \alpha^* \omega_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) y_i \right\} e_j,
\end{aligned}
$$

está bem definida, e é chamada derivada covariante de Y ao longo de α.

Um campo Y ao longo de α é dito paralelo se $\frac{DY}{dt} \equiv 0$. Uma curva α é uma geodésica se o seu campo de vetores tangentes (que é um campo ao longo de α) é paralelo, isto é, $\frac{D}{dt} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = 0$.

A condição para que o campo $Y(t) = \sum_i y_i(t)e_i$ seja paralelo é

$$
\frac{dy_i}{dt} + \sum_i \alpha^* \omega_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) y_i = 0, \qquad 1 \leq j \leq n.
$$

É o equivalente a um sistema de equações diferenciais lineares em $y_i(t)$.

Passemos agora à introdução da curvatura em uma variedade Riemanniana. Definimos

$$
\Omega_{ij} = d\omega_{ij} - \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}. \tag{1-23}
$$

As formas Ω_{ij} são chamadas formas de curvatura de M no referencial $\{e_i\}$.

O significado geométrico de tais formas é análogo ao das formas Ω_{ij} da seção anterior, a saber, para cada ponto $p \in M$ e cada par de vetores $X, Y \in T_pM$ a matriz $\{(\Omega_{ij})_p(X,Y)\}$ é a matriz de uma aplicação linear

$$(R_{XY})_p : T_pM \to T_pM.$$

R_{XY} é o operador de curvatura de M. Como $\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$ e Ω_{ij} é uma forma bilinear alternada, temos as seguintes identidades para o operador de curvatura: Se X, Y, Z, T são campos diferenciáveis de vetores em M, então

$$\begin{aligned} \langle R_{XY}Z, T\rangle &= -\langle R_{YX}Z, T\rangle, && (1\text{-}24)\\ \langle R_{XY}Z, T\rangle &= -\langle R_{XY}T, Z\rangle. && (1\text{-}25)\end{aligned}$$

Derivando exteriormente a equação 1-20, obtemos

$$\begin{aligned} d(d\omega_i) &= d\left(\sum_k \omega_k \wedge \omega_{kj}\right)\\ &= \sum_k (d\omega_k)\wedge\omega_{kj} + (-1)\sum_k \omega_k \wedge d\omega_{kj}\\ &= \sum_k \left(\sum_i \omega_i \wedge \omega_{ik}\right)\wedge\omega_{kj} - \sum_i \omega_i \wedge d\omega_{ij}\\ &= \sum_i \omega_i \wedge \left(\sum_k \omega_{ik}\wedge\omega_{kj}\right) - \sum_i \omega_i \wedge d\omega_{ij}\\ &= \sum_i \omega_i \wedge \left\{-\left(d\omega_{ij} - \sum_k \omega_{ik}\wedge\omega_{kj}\right)\right\}\\ &= -\sum_i \omega_i \wedge \Omega_{ij}. \end{aligned}$$

Como $d(d\omega_i) = 0$, então

$$\sum_i \omega_i \wedge \Omega_{ij} = 0. \qquad (1\text{-}26)$$

Esta última equação é a primeira identidade de Bianchi.

Em termos do operador curvatura, ela se deduz da seguinte maneira: Se X, Y, Z são campos diferenciáveis de vetores de M, então, para todo $1 \leq j \leq n$,

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_i \omega_i \wedge \Omega_{ij}(X,Y,Z) \\
&= \sum_i \{\omega_i(X)\Omega_{ij}(Y,Z) + \omega_i(Y)\Omega_{ij}(Z,X) + \omega_i(Z)\Omega_{ij}(X,Y)\} \\
&= \langle R_{YZ}X + R_{ZX}Y + R_{XY}Z, e_j\rangle
\end{aligned}$$

donde

$$R_{YZ}X + R_{ZX}Y + R_{XY}Z = 0. \tag{1-27}$$

Assim como foi obtido (1-27) a partir de (1-26), podemos obter

$$\langle R_{XY}Z + R_{YZ}X + R_{ZX}Y, T\rangle = 0,$$

isto é,

$$\begin{aligned}
\langle R_{XY}Z,T\rangle + \langle R_{YZ}X,T\rangle + \langle R_{ZX}Y,T\rangle &= 0, \\
\langle R_{YZ}T,X\rangle + \langle R_{ZT}Y,X\rangle + \langle R_{TY}Z,X\rangle &= 0, \\
\langle R_{ZT}X,Y\rangle + \langle R_{TX}Z,Y\rangle + \langle R_{XZ}T,Y\rangle &= 0, \\
\langle R_{TX}Y,Z\rangle + \langle R_{XY}T,Z\rangle + \langle R_{YT}X,Z\rangle &= 0.
\end{aligned}$$

Somando as equações acima e usando as equações (1-24) e (1-25), obtemos

$$\langle R_{ZX}T,Y\rangle = \langle R_{TY}Z,X\rangle. \tag{1-28}$$

Derivando exteriormente (1-23), temos

$$\begin{aligned}
0 &= d\Omega_{ij} - d(d\omega_{ij}) + d\left(\sum_k \omega_{ik}\wedge\omega_{kj}\right) \\
&= d\Omega_{ij} + \sum_k d\omega_{ik}\wedge\omega_{kj} + (-1)\sum_k \omega_{ik}\wedge d\omega_{kj} \\
&= d\Omega_{ij} + \sum_k \left(\sum_s \omega_{is}\wedge\omega_{sk} + \Omega_{ik}\right)\wedge\omega_{kj} - \sum_k \omega_{ik}\wedge\left(\sum_l \omega_{kl}\wedge\omega_{lj} + \Omega_{kj}\right) \\
&= d\Omega_{ij} + \sum_k \Omega_{ik}\wedge\omega_{kj} - \sum_{ik}\wedge\Omega_{kj},
\end{aligned} \tag{1-29}$$

e é chamada segunda identidade de Bianchi.

Como as formas Ω_{ij} são formas de grau dois, elas podem ser escritas como

$$\Omega_{ij} = -\frac{1}{2}\sum_{k,l} R_{ijkl}\omega_k \wedge \omega_l.$$

As funções R_{ijkl} são chamadas componentes do tensor curvatura de M.
Observe que

$$\begin{aligned}
\langle R_{e_k e_l}(e_i), e_j\rangle &= \Omega_{ji}(e_k, e_l)\\
&= -\frac{1}{2}\sum_{s,t} R_{jist}\omega_s \wedge \omega_t(e_k, e_l)\\
&= R_{ijkl}\\
&= \langle R_{e_i e_j}(e_k), e_l\rangle.
\end{aligned}$$

As formas de curvatura permitem definir vários tipos de curvatura em M, sendo a mais importante a curvatura que passaremos a introduzir.

Seja $\pi \subset T_pM$ um subespaço de dimensão dois do espaço tangente T_pM de M em $p \in M$. Escolhamos um referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ em uma vizinhança de p de tal modo que e_1, e_2 geram π. Vamos mostrar que o número $(\Omega_{12})_p(e_1, e_2)$ dependem apenas do subespaço π.

Para isto, seja $\{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n\}$ outro referencial em torno de p de modo que $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ ainda gerem π. Então,

$$e_i = \sum_j u_{ij}\overline{e}_j,$$

onde $U = (u_{ij})$ é da forma

$$U = \begin{pmatrix} A & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdot & \cdots \\ 0 & \vdots & B \end{pmatrix},$$

com

$$A = \begin{pmatrix} cos\theta & sen\theta \\ -sen\theta & cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} -sen\theta & cos\theta \\ cos\theta & sen\theta \end{pmatrix}$$

dependendo da orientação de $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ relativamente a e_1, e_2. Pelo Lema 1.4,

$$\Omega_{ij} = \sum_{k,l} u_{ik}\overline{\Omega}_{kl}u_{jl},$$

donde

$$\begin{aligned}
\Omega_{12} &= \sum_{k,l} u_{1k}u_{2l}\overline{\Omega}_{kl} \\
&= \pm(cos^2\theta\overline{\Omega}_{12} - sen^2\theta\overline{\Omega}_{21}) \\
&= \pm(cos^2\theta\overline{\Omega}_{12} + sen^2\theta\overline{\Omega}_{12}) \\
&= \pm(cos^2\theta + sen^2\theta)\overline{\Omega}_{12} = \pm\overline{\Omega}_{12},
\end{aligned}$$

onde o sinal depende da orientação. Como

$$\begin{aligned}
\Omega_{12}(e_1,e_2) &= \pm\overline{\Omega}_{12}(e_1,e_2) \\
&= \overline{\Omega}_{12}(\overline{e}_1,\overline{e}_2),
\end{aligned}$$

qualquer que seja a orientação adotada, segue que $\Omega_{12}(e_1,e_2)$ só depende do subespaço π. O número

$$\begin{aligned}
K_p(\pi) &= -(\Omega_{12})_p(e_1,e_2) \\
&= \langle (R_{e_1e_2})_p(e_1), e_2\rangle,
\end{aligned}$$

é chamado de curvatura seccional de M em p segundo π.

Agora vamos obter a expressão da curvatura seccional em termos do operador de curvatura. Para isso, tomemos dois vetores linearmente independentes $X,Y \in \pi \subset T_pM$ e um referencial ortonormal $\{e_i\}$ tal que e_1,e_2 gerem π. Então, podemos escrever

$$X = x_1e_1 + x_2e_2 \qquad \text{e} \qquad Y = y_1e_1 + y_2e_2.$$

Pela linearidade e pelas relações de simetria (1-24) e (1-25), temos

$$\begin{aligned}
\langle R_{XY}X,Y\rangle &= \langle R_{x_1e_1+x_2e_2,y_1e_1+y_2e_2}(x_1e_1+x_2e_2), y_1e_1+y_2e_2\rangle \\
&= (x_1y_2 - x_2y_1)\langle R_{e_1e_2}(x_1e_1+x_2e_2), y_1e_1+y_2e_2\rangle \\
&= (x_1y_2 - x_2y_1)\langle R_{x_1e_1+x_2e_2,y_1e_1+y_2e_2}e_1, e_2\rangle \\
&= (x_1y_2 - x_2y_1)^2\langle R_{e_1e_2}e_1, e_2\rangle = (A(X,Y))^2K(\pi),
\end{aligned}$$

onde $A(X,Y)$ é a área do paralelogramo formado por X,Y. Portanto,

$$K(\pi) = \frac{\langle R_{XY}X,Y\rangle}{(A(X,Y))^2}. \tag{1-30}$$

Dizemos que uma variedade Riemanniana M é isotrópica em $p \in M$ se todas as curvaturas seccionais em p tem o mesmo valor, isto é, se $K_p(\pi)$ não depende de $\pi \subset T_pM$.

Proposição 1.8 *Seja M uma variedade Riemanniana, p um ponto de M e $\{e_i\}$ um referencial em uma vizinhança de p. Então, M é isotrópica em p se e só se*

$$\Omega_{ij} = -K_p \omega_i \wedge \omega_j. \tag{1-31}$$

Prova. Sejam $X = \sum_i x_i e_i$ e $Y = \sum_i y_i e_i$ dois vetores linearmente independentes de T_pM. Pela linearidade,

$$\begin{aligned}
\langle R_{XY}X, Y\rangle &= \left\langle R_{\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j} \sum_k x_k e_k, \sum_l y_l e_l \right\rangle \\
&= \sum_{i,j,k,l} \langle R_{e_i e_j} e_k, e_l\rangle x_i y_j x_k y_l \\
&= \sum_{i,j,k,l} R_{ijkl} x_i y_j x_l y_k.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(A(X,Y))^2 &= |X|^2|Y|^2 - \langle X, Y\rangle \\
&= \left(\sum_{i,k} x_i x_k \delta_{ik}\right)\left(\sum_{j,l} y_j y_l \delta_{jl}\right) - \left(\sum_{i,j} x_i y_j \delta_{ij}\right)(x_k y_l \delta_{kl}) \\
&= \sum_{i,j,k,l} \delta_{ik}\delta_{jl} x_i x_k y_j y_l - \sum_{i,j,k,l} \delta_{ij}\delta_{kl} x_i y_j x_k y_l \\
&= \sum_{i,j,k,l} (\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{ij}\delta_{kl}) x_i y_j x_k y_l.
\end{aligned}$$

Suponhamos que M seja isotrópica em p, isto é, para todo $X, Y \in T_pM$, temos

$$\langle R_{XY}X, Y\rangle = K_p (A(X,Y))^2,$$

ou seja,

$$\sum_{i,j,k,l} R_{ijkl} x_i y_j x_k y_l = K_p \left\{ \sum_{i,j,k,l} (\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{ij}\delta_{kl}) x_i y_j x_k y_l \right\},$$

para todo X, Y. Conclui-se que, para todo i, j, k, l,

$$R_{ijkl} = K_p(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{ij}\delta_{kl}), \tag{1-32}$$

e portanto,

$$\begin{aligned}
\Omega_{ij} &= -\frac{1}{2}\sum_{k,l} R_{i,j,k,l}\,\omega_k \wedge \omega_l \\
&= -K_p \sum_{k,l} (\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{ij}\delta_{kl})\,\omega_k \wedge \omega_l \\
&= -K_p \omega_i \wedge \omega_j .
\end{aligned}$$

Revertendo os passos, provaremos a recíproca. □

Uma variedade Riemanniana M tem curvatura seccional constante se $K_p(\pi)$ não depende de p e de π.

O resultado seguinte mostra que se $dimM \geq 3$, a isotropia de M em todos os seus pontos implica que a curvatura de M é constante.

Teorema 1.9 (Schur) *Seja M^n uma variedade Riemanniana conexa, $n \geq 3$. Suponha que M é isotrópica para todo $p \in M$. Então, M tem curvatura seccional constante.*

Prova. Derivando exteriormente a relação (1-31), obtemos

$$d\Omega_{ij} = -dK_p \omega_i \wedge \omega_j - K_p d\omega_i \wedge \omega_j + K_p \omega_i \wedge d\omega_j .$$

Por outro lado, a segunda identidade de Bianchi, temos

$$\begin{aligned}
d\Omega_{ij} &= -\sum_k \Omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \sum_k \omega_{ik} \wedge \Omega_{kj} \\
&= \sum_k (K_p \omega_i \wedge \omega_k) \wedge \omega_{kj} - \sum_k \omega_{ik} \wedge (K_p \omega_k \wedge \omega_j) \\
&= K_p \omega_i \wedge \sum_k \omega_k \wedge \omega_{kj} - K_p \left(\sum_k \omega_k \wedge \omega_{ki} \right) \wedge \omega_j \\
&= K_p \omega_i \wedge d\omega_j - K_p d\omega_i .
\end{aligned}$$

Para todo i, j, temos

$$\begin{aligned}
-dK_p \omega_i \wedge \omega_j - K_p d\omega_i \wedge \omega_j + K_p \omega_i \wedge d\omega_j &= d\Omega_{ij} \\
&= K_p \omega_i \wedge d\omega_j - K_p d\omega_i .
\end{aligned}$$

Logo,

$$dK_p \omega_i \wedge \omega_j = 0,$$

e portanto, $dK_p = 0$ em M. Como M é conexa, K_p não depende de p. □

Agora mencionaremos que, se M é orientada, a n-forma diferenciável $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n = \eta$ não depende da escolha do referencial $\{e_i\}$, contanto que tomemos sempre referenciais na orientação de M. Com feito, o valor de η nos vetores $v_i = \sum_j a_{ij} e_j$, $1 \leq i, j \leq n$, é dada por

$$\begin{aligned}(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n)\left(\sum_j a_{1j}e_j, \ldots, \sum_j a_{nj}e_j\right) &= det(a_{ij})\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n(e_1, \ldots, e_n)\\ &= det(a_{ij})\end{aligned}$$

que é igual ao volume do paralelepípedo formado pelos vetores orientados v_i. A forma η é portanto globalmente definida e é chamada de forma volume de M.

1.1.5 Tensores em Variedades Riemannianas

Seja M^n variedade Riemanniana. Um tensor de ordem r em M é uma correspondência F que a cada ponto $p \in M$ associa uma forma r-linear

$$F_p : \underbrace{T_pM \times \cdots \times T_pM}_{r} \to \mathbb{R}.$$

Um tensor F é diferenciável em $p \in M$ se escolhido um referencial $\{e_i\}$, $1 \leq i \leq n$, em uma vizinhança U de p, as funções $F_{i_1 i_2 \cdots i_r}$ dadas por

$$F_q(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}) = F_{i_1 i_2 \cdots i_r}(q), \qquad 1 \leq i_1, \ldots, i_r \leq n, \qquad q \in U,$$

são diferenciáveis em p. Observe que esta condição não depende da escolha do referencial $\{e_i\}$. F é diferenciável em M se é diferenciável para todo $p \in M$. As funções $F_{i_1 i_2 \cdots i_r}$ são chamadas de componentes do tensor no referencial $\{e_i\}$.

De agora em diante só consideraremos tensores diferenciáveis, por conveniência omitiremos o adjetivo diferenciável.

O tensor curvatura R em M que faz corresponder a cada $p \in M$ e cada conjunto de quatro vetores $X, Y, Z, T \in T_pM$ o valor

$$R_p(X, Y, Z, T) = \langle R_{ZT}X, Y\rangle,$$

é um tensor de ordem quatro e suas componentes em um referencial $\{e_i\}$ são dadas por

$$R_p(e_i, e_j, e_k, e_l) \quad = \quad R_{ijkl}.$$

Observe que toda k-forma diferencial ω em M é automaticamente um tensor de ordem k em M.

É possível definir a noção de tensor em uma variedade diferenciável sem estrutura Riemanniana mas, neste caso é necessário distinguir os tensores covariantes dos contravariantes (que poderíamos definir utilizando o dual de T_pM). No nosso caso é desnecessário, pois a métrica Riemanniana faz corresponder a cada campo diferenciável ω dada por

$$\omega_p(Y) \quad = \quad \langle X, Y\rangle_p, \qquad \text{para todo} \quad p \in M \quad \text{e todo} \quad Y \in T_pM.$$

Segundo a definição adotada, um campo diferenciável de vetores X é um tensor de ordem 1 que faz corresponder a todo $p \in M$ e todo $Y \in T_pM$ o valor $\langle X, Y\rangle_p$.

Em uma variedade Riemanniana, é possível estender a noção de diferencial covariante a tensores de ordem r. Seja F um tensor de ordem r em uma variedade Riemanniana M^n. Seja $p \in M$ e $\{e_i\}$ um referencial ortonormal em uma vizinhança U de p. A diferencial covariante ∇F é um tensor de ordem $r+1$ definido da seguinte maneira: as componentes

$$F_{i_1\cdots i_r;j} \quad = \quad \nabla F(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_r}, e_j), \qquad 1 \leq i_1, \ldots, i_r, j \leq n,$$

de ∇F no referencial $\{e_i\}$ são dadas por

$$\sum_j F_{i_1\cdots i_r;j}\omega_j = dF_{i_1\cdots i_r;j} + \sum_j F_{ji_2\cdots i_r}\omega_{ji_1} + \sum_j F_{i_1 j\cdots i_r}\omega_{ji_2} + \cdots + \sum_j F_{i_1\cdots i_{r-1}j}\omega_{ji_r}, \tag{1-33}$$

onde $F_{i_1\cdots i_r}$ indica as componentes de F no referencial $\{e_i\}$.
Observe que a definição acima não depende da escolha do referencial $\{e_i\}$. Sendo assim, como a fórmula obtida é frequetemente útil para o cálculo de ∇F, vamos explicitá-la

$$\begin{aligned} \nabla F(X_1, \ldots, X_r, Y) \quad &= \quad dF(X_1, \ldots, X_r)(Y) - F(\nabla_Y X_1, \ldots, X_r) - \\ &- \quad F(X_1, \nabla_Y X_2 \ldots, X_r) - \cdots - F(X_1, \ldots, \nabla_Y X_r). \end{aligned}$$

A noção de derivada covariante se obtém a partir da noção de derivada covariante da maneira usual. Mais explicitamente, defini-se a derivada covariante de um tensor F em relação a uma campo diferenciável de vetores X como sendo o tensor $\nabla_X F$ de mesma ordem que F dado por

$$\nabla_X F(X_1,\ldots,X_r) \quad = \quad \nabla F(X_1,\ldots,X_r,X).$$

A derivação covariante de tensores permite estender às variedades Riemannianas certos operadores diferenciais, como laplaciano, divergência, etc., de uso frequente no $\mathbb{R}^n$. Passaremos a expor alguns destes operadores.

Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em uma variedade Riemanniana M. O gradiente de f é um campo vetorial $\operatorname{grad} f$ em M definido por

$$\langle \operatorname{grad} f, X\rangle_p \quad = \quad df_p(X),$$

para todo $p \in M$ e todo $X \in T_pM$. Em outras palavras, $\operatorname{grad} f$ é o dual na métrica Riemanniana da forma df.

Considerando um referencial $\{e_i\}$ em um aberto $U \subset M$, podemos escrever, em U, $df = \sum_i f_i\omega_i$. A função f_i é chamada a derivada de f na direção e_i. É imediato que, em U,

$$\operatorname{grad} f = \sum_i f_i e_i.$$

A diferencial covariante de df é dado por

$$\nabla(df) = \sum_{i,j} f_{ij}\omega_i\omega_j,$$

onde,

$$\sum_j f_{ij}\omega_j \quad = \quad df_i + \sum_j f_j\omega_{ji}.$$

A forma bilinear $\nabla(df)$ é chamada o hessiano de f na métrica de M. O traço desta forma bilinear, isto é, a função em M dada por

$$\sum_i f_{ii} \quad = \quad \Delta f$$

é chamada o laplaciano de f. Observe que no caso em que $M = \mathbb{R}^n$, hessiano e laplaciano coincidem com os conceitos do $\mathbb{R}^n$. As funções em M para os quais $\Delta f = 0$ são chamadas harmônicas.

A partir de agora podemos falar em diferenciabilidade, derivação covariante, hessiano, laplaciano.

1.1.6 Imersões Riemannianas

Sejam M^n uma variedade Riemanniana e $x : M^n \to \overline{M}^{n+q}$ uma imersão de M em uma variedade Riemanniana $\overline{M}$. Diremos que x é uma imersão isométrica (ou Riemanniana) se

$$\langle v_1, v_2 \rangle_p = \langle dx(v_1), dx(v_2) \rangle_{x(p)},$$

para todo ponto $p \in M$ e todo par $v_1, v_2 \in T_pM$. Em outras palavras, x é isométrica se a métrica induzida coincide com a métrica original.

Dado um ponto $p \in M$, escolheremos uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $x|_U$ seja injetiva. Seja $V \subset \overline{M}$ uma vizinhança de $x(p)$ em $\overline{M}$ tal que $V \supset x(U)$ e que em V seja possível definir um referencial ortonormal adaptado a x $\{e_A\}$, $1 \leq A \leq n+q$, isto é, restritos a $x(U)$ os vetores $e_1, \ldots, e_n$ sejam tangentes a $x(U)$ e os vetores $e_{n+1}, \ldots, e_{n+q}$ sejam normais a $x(U)$. Faremos a convenção usual de identificar $U \subset M$ com $x(U) \subset \overline{M}$, e usaremos os seguintes domínios para os índices:

$$\begin{aligned} 1 \leq i, j, \ldots &\leq n, \\ n+1 \leq \alpha, \beta, \ldots &\leq n+q, \\ 1 \leq A, B, \ldots &\leq n+q. \end{aligned}$$

O espaço tangente $T_p\overline{M}$ de $\overline{M}$ em p se decompõe em uma soma direta $T_p\overline{M} = T_pM \oplus N_pM$, onde identificamos $dx_p(T_pM) \approx T_pM$ e denotamos por N_pM o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$. N_pM será chamado de espaço normal da imersão x em p. Um campo normal η é uma correspondência que a cada $p \in M$ associa um vetor $\eta(p) \in N_pM$ de tal modo que para todo referencial adaptado em uma vizinhança $V \subset \overline{M}$ de p em V, as funções η_α dadas por $\eta = \sum_\alpha \eta_\alpha e_\alpha$ sejam diferenciáveis em p.

Em V temos as formas ω_A, ω_{AB} que satisfazem as equações de estrutura

$$\begin{aligned} d\omega_A &= \sum_B \omega_B \wedge \omega_{BA}, \\ d\omega_{AB} &= \sum_C \omega_{AC} \wedge \omega_{CB} + \overline{\Omega}_{AB}, \qquad \overline{\Omega}_{AB} = -\frac{1}{2} \sum_{C,D} \overline{R}_{ABCD} \omega_C \wedge \omega_D. \end{aligned}$$

As restrições destas formas em $U \subset V$ satisfazem as mesmas equações de estrutura e, como o referencial é adaptado $\omega_\alpha = 0$. Decorre daí que

$$0 = d\omega_\alpha = \sum_i \omega_i \wedge \omega_{i\alpha},$$

e pelo Lema de Cartan,

$$\omega_{i\alpha} = \sum_j h^\alpha_{ij}\omega_j, \qquad h^\alpha_{ij} = h^\alpha_{ji}.$$

A forma quadrática $II^\alpha = \sum_{i,j} h^\alpha_{ij}\omega_i\omega_j$ é a segunda forma quadrática de x na direção e_α.

Seja η um campo unitário normal em M. É possível escolher a parte normal do referencial $\{e_\alpha\}$ em U de modo que $e_{n+1} = \eta$ em U. $II^\eta = II^{n+1}$ é então chamada segunda forma quadrática de x na direção η. Para mostrar que a definição não depende da escolha do referencial, seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco com $\alpha(0) = p$. Fazendo $\alpha'(0) = v$, e escolhendo a parte tangente do referencial de modo que $\alpha'(v) = e_1$, teremos

$$\begin{aligned} II^\eta_p(v) &= II^{n+1}_p(e_1) \\ &= \left(\sum_i \omega_{i,n+1}\omega_i\right)(e_1) \\ &= \sum_i \langle \overline{\nabla}_{e_1} e_i, e_{n+1}\rangle \omega_i(e_1) \\ &= \langle \overline{\nabla}_{e_1} e_1, \eta\rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_{\alpha'(0)} \alpha'(0), \eta\rangle, \end{aligned} \tag{1-34}$$

isto é, $II^\eta_p(v)$ é a componente segundo η do vetor curvatura geodésica em $\overline{M}$ de uma curva passando por p com vetor tangente v. Portanto, II^η não depende da escolha do referencial e está globalmente definida.

A transformação linear auto-adjunta em T_pM associada à forma quadrática II^η em T_pM será indicada por

$$-A^\eta_p : T_pM \to T_pM.$$

Como $\langle v, \eta\rangle = 0$, se $v \in T_pM$, teremos, usando (1-34),

$$\begin{aligned} \langle A^\eta_p(v), v\rangle &= -II^\eta_p(v) \\ &= \langle \overline{\nabla}_v \eta, v\rangle. \end{aligned}$$

Às vezes é conveniente usar a aplicação bilinear $B : T_pM \times T_pM \to N_pM$ dada por

$$\langle B_p(X,Y),\eta\rangle_p = -\langle A_p^{\eta}(X),Y\rangle_p, \qquad X,Y \in T_pM, \eta \in N_pM.$$

Em termos de um referencial local adaptado, B é dada por

$$B(X,Y) = \sum_{\alpha}\left(\sum_{i,j} h_{ij}^{\alpha}\omega_i(X)\omega_j(Y)\right)e_{\alpha},$$

o que mostra que B é uma aplicação bilinear simétrica. O traço de B em p, isto é,

$$\sum_{\alpha}\left(\sum_{i} h_{ii}^{\alpha}\right)e_{\alpha} = nH_p$$

dá origem a um vetor normal H_p chamado de vetor curvatura média em p. Uma imersão $x : M \to \overline{M}$ é mínima se $H \equiv 0$.

Separando as equações de estrutura nas partes tangenciais e normais, obtemos

$$d\omega_i = \sum_j \omega_j \wedge \omega_{ji} \quad \text{e} \quad d\omega_{\alpha} = \sum_{\beta} \omega_{\beta} \wedge \omega_{\beta\alpha} = 0, \tag{1-35}$$

$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \sum_{\alpha} \omega_{i\alpha} \wedge \omega_{\alpha j} + \overline{\Omega}_{ij}, \tag{1-36}$$

$$d\omega_{i\alpha} = \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_{j\alpha} + \sum_{\beta} \omega_{i\beta} \wedge \omega_{\beta\alpha} + \overline{\Omega}_{i\alpha}, \tag{1-37}$$

$$d\omega_{\alpha\beta} = \sum_i \omega_{\alpha i} \wedge \omega_{i\beta} + \sum_{\gamma} \omega_{\alpha\gamma} \wedge \omega_{\gamma\beta} + \overline{\Omega}_{\alpha\beta}. \tag{1-38}$$

As formas ω_{ij} só depende da métrica Riemanniana de M e da parte tangente do referencial $\{e_i\}$. Por outro lado, as formas $\omega_{\alpha\beta}$ determinam uma derivação covariante para campos de vetores normais, definida da maneira usual: Se $\{e_A\}$ é um referencial local adaptado, X é um campo de vetores tangentes a M e $\xi = \sum_{\alpha} \xi_{\alpha} e_{\alpha}$ é um campo de vetores normais a M, então o campo normal

$$\nabla_X^{\perp} = \sum_{\alpha}\left\{d\xi_{\alpha}(X) + \sum_{\beta}\omega_{\beta\alpha}(X)\xi_{\beta}\right\}e_{\alpha},$$

não depende do referencial escolhido. As formas $\omega_{\alpha\beta}$ são formas de conexão normal e $\nabla_X^{\perp}$ é a derivada covariante normal em relação ao campo tangente X.

Estendendo X e ξ a campos vetoriais de $\overline{M}$, podemos calcular $\overline{\nabla}_X\xi$, onde $\overline{\nabla}_X$ é a derivada covariante em $\overline{M}$, da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_X\xi &= \sum_A\left\{d\xi_A(X)+\sum_B\omega_{BA}(X)\xi_B\right\}e_A\\
&= \sum_\alpha\left\{d\xi_\alpha(X)+\sum_\beta\omega_{\beta\alpha}(X)\xi_\beta\right\}e_\alpha+\sum_i\left(\sum_\beta\omega_{\beta i}(X)\xi_\beta\right)e_i\\
&= \nabla_X^\perp\xi+\sum_i\left(\sum_\beta\omega_{\beta i}(X)\xi_\beta\right)e_i.
\end{aligned}$$

Portanto, $\nabla_X^\perp\xi$ é a componente normal de $\overline{\nabla}_X\xi$. Observe que $\overline{\nabla}_X\xi$ não depende das extensões consideradas. Só depende dos valores de X e ξ em M.

Analogamente se verifica que $\nabla_X Y$ é a componente tangente de $\overline{\nabla}_X Y$, onde X,Y são campos de vetores tangentes em M.

As formas $d\omega_{ij}-\sum_k\omega_{ik}\wedge\omega_{kj}=\Omega_{ij}$ são as formas de curvatura da métrica Riemanniana de M. As formas $d\omega_{\alpha\beta}-\sum_\gamma\omega_{\alpha\gamma}\wedge\omega_{\gamma\beta}=\Omega_{\alpha\beta}$ são as formas de curvatura normal da imersão. Elas determinam um operador de curvatura normal $(R_{XY}^\perp):N_pM\to N_pM$, para todo par de vetores $X,Y\in T_pM$.

Da equação (1-36) decorre que o tensor curvatura R_{ijkl} de M está relacionado com as componentes $\overline{R}_{ijkl}$ do tensor curvatura de $\overline{M}$ por

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\sum_{k,l}R_{ijkl}\omega_k\wedge\omega_l &= \Omega_{ij}\\
&= d\omega_{ij}-\sum_k\omega_{ik}\wedge\omega_{kj}\\
&= \sum_\alpha\omega_{i\alpha}\wedge\omega_{\alpha j}+\overline{\Omega}_{ij}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k,l}\left(\sum_\alpha(h_{il}^\alpha h_{jk}^\alpha-h_{ik}^\alpha h_{jl}^\alpha)\right)\omega_k\wedge\omega_l-\frac{1}{2}\sum_{k,l}\overline{R}_{ijkl}\omega_k\wedge\omega_l,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$R_{ijkl} = \overline{R}_{ijkl}-\sum_\alpha(h_{il}^\alpha h_{jk}^\alpha-h_{ik}^\alpha h_{jl}^\alpha), \tag{1-39}$$

que é chamada a equação de Gauss. Pela linearidade, temos que a equação de Gauss pode ser escrita como

$$\langle R_{XY}(Z),T\rangle = \langle \overline{R}_{XY}(Z),T\rangle - \{\langle B(X,T),B(Y,Z)\rangle - \langle B(X,Z),B(Y,T)\rangle\},$$

para todo $X,Y,Z,T \in T_pM$, ou seja, em termos de curvaturas seccionais

$$K(X,Y) = \overline{K}(X,Y) + \{\langle B(X,X),B(Y,Y)\rangle - (B(X,Y))^2\},$$

onde $K(X,Y)$ é a curvatura seccional do plano gerado por X e Y.

Analogamente da equação (1-38) decorre que

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\sum_{i,j} R_{\alpha\beta ij}\omega_i \wedge \omega_j &= \Omega_{\alpha\beta} \\
&= d\omega_{\alpha\beta} - \sum_{\gamma} \omega_{\alpha\gamma} \wedge \omega_{\gamma\beta} \\
&= \sum_k \omega_{\alpha k} \wedge \omega_{k\beta} + \overline{\Omega}_{\alpha\beta} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(\sum_k h^{\alpha}_{kj}h^{\beta}_{ki} - \sum_k h^{\alpha}_{ki}h^{\beta}_{kj}\right)\omega_i \wedge \omega_j - \frac{1}{2}\sum_{i,j}\overline{R}_{\alpha\beta ij}\omega_i \wedge \omega_j,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$R_{\alpha\beta ij} = \sum_{\alpha}(h^{\alpha}_{ik}h^{\beta}_{kj} - h^{\beta}_{ik}h^{\alpha}_{kj}) + \overline{R}_{\alpha\beta ij}, \tag{1-40}$$

que é chamada a equação de Ricci. Usando a linearidade, podemos escrever a equação de Ricci na forma

$$\begin{aligned}
\langle R^{\perp}_{XY}\xi,\eta\rangle &= \langle (A^{\xi}A^{\eta} - A^{\eta}A^{\xi})(X),Y\rangle + \langle \overline{R}_{XY}\xi,\eta\rangle \\
&= -\langle [A^{\xi},A^{\eta}]X,Y\rangle + \langle \overline{R}_{XY}\xi,\eta\rangle,
\end{aligned}$$

para todo $X,Y \in T_pM$ e todo $\xi,\eta \in N_pM$, onde indicamos $(A^{\xi}A^{\eta} - A^{\eta}A^{\xi}) = [A^{\xi},A^{\eta}]$. Observe que se $\overline{M}$ tem curvatura constante, $\overline{R}_{\alpha\beta ij} = 0$ para todo α,β,i,j donde $\langle \overline{R}_{XY}\xi,\eta\rangle = 0$. Portanto,

$$\langle R^{\perp}_{XY}\xi,\eta\rangle = -\langle [A^{\xi},A^{\eta}]X,Y\rangle.$$

Observe que $[A^{\xi}_p,A^{\eta}_p] = 0$, isto é, A^{ξ}_p e A^{η}_p comutam se e só se existe uma base em T_pM que diagonaliza simultaneamente A^{ξ}_p e A^{η}_p. Decorre daí a seguinte proposição.

Proposição 1.10 *Seja $x : M \to \overline{M}$ uma imersão isométrica em uma variedade Riemanniana $\overline{M}$ de curvatura constante. Então é possível diagonalizar simultaneamente todas as segundas formas quadráticas da imersão x em cada ponto $p \in M$ se e somente se a curvatura normal da imersão é identicamente zero.*

Uma imersão $x : M \to \overline{M}$ é geodésica em $p \in M$ se $II_p^\eta = 0$ para todo $\eta \in N_pM$. A imersão é totalmente geodésica se ela é geodésica em todo ponto $p \in M$. A razão desta terminologia é dada na proposição seguinte.

Proposição 1.11 *Uma imersão $x : M \to \overline{M}$ é geodésica em $p \in M$ se e somente se toda geodésica γ de M partindo de p é geodésica de $\overline{M}$ em p.*

Prova. Suponhamos que x é geodésica em p e parametrizemos γ pelo comprimento de arco s, com $\gamma(0) = p$. Seja $\{e_A\}$ um referencial adaptado em uma vizinhança de p de modo que $e_1 = \gamma'(s)$. Então, para todo $\eta \in N_pM$,

$$\begin{aligned} II_p^\eta(\gamma'(0)) &= \langle \overline{\nabla}_{\gamma'(0)}\gamma'(0), \eta\rangle \\ &= 0. \end{aligned} \tag{1-41}$$

Como γ é geodésica em M,

$$\begin{aligned} \langle \overline{\nabla}_{\gamma'(0)}\gamma'(0), e_i\rangle &= \omega_{ji}(\gamma'(0)) \\ &= \langle \nabla_{\gamma'(0)}\gamma'(0), e_i\rangle \\ &= 0, \end{aligned} \tag{1-42}$$

para todo $e_i \in T_pM$. Decorre de (1-41) e (1-42) que $\overline{\nabla}_{\gamma'(0)}\gamma'(s) = 0$ em p, isto é, γ é geodésica em $\overline{M}$ em p.
Reciprocamente, suponhamos que toda geodésica γ de M partindo de p é geodésica de $\overline{M}$ em p. Seja $v \in T_pM$ um vetor unitário e seja γ uma geodésica de M parametrizada pelo comprimento de arco tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$.
Como γ é geodésica de $\overline{M}$ em p, por (1-41), temos

$$II_p^\eta(v) = 0,$$

para todo $\eta \in N_pM$. Portanto, para todo $v \in T_pM$, $II_p^\eta = 0$, isto é, x é geodésica em p.

□

CAPÍTULO 2

Superfícies Mínimas com Curvatura Gaussiana não-negativa em Espaço de Curvatura Constante

Neste capítulo, provaremos alguns resultados sobre superfície mínimas compactas com curvatura Gaussiana não-negativa no espaço de curvatura constante. Maiores detalhes podem ser encontrados em [12].

Recordemos que se temos M uma variedade Riemanniana completa e de curvatura seccional constante c, então o recobrimento universal $\overline{M}$ de M, com a métrica do recobrimento, é isométrico a: H^n, se $c = -1$; ou $\mathbb{R}^n$, se $c = 0$; ou S^n, se $c = 1$.

Seja $y : M \to \overline{M}$ uma imersão isométrica mínima de uma variedade Riemanniana M orientada 2-dimensional em uma variedade Riemanniana $\overline{M}$ N-dimensional de curvatura constante c. Como vimos no capítulo anterior, considerando e_A, $1 \leq A, B, \ldots \leq N$, campos do referencial ortonormal local em $\overline{M}$, a conexão de Levi-Civita define a derivada covariante

$$De_A = \sum_B \omega_{AB} e_B, \qquad \omega_{AB} = -\omega_{BA}.$$

Se ω_B é o coreferencial do campo dual a e_A, as equações de estrutura do espaço são

$$\begin{aligned} d\omega_A &= \sum_B \omega_B \wedge \omega_{BA}, && (2\text{-}1) \\ d\omega_{AB} &= \sum_C \omega_{AC} \wedge \omega_{CB} - c\omega_A \wedge \omega_B. && (2\text{-}2) \end{aligned}$$

Adotaremos os seguintes índices:

$$\begin{aligned} 1 \leq i, j, \ldots \leq 2, \\ 3 \leq \alpha, \beta, \ldots \leq N, \\ 1 \leq A, B, \ldots \leq N. \end{aligned}$$

Para estudar a geometria da superfície imersa M restringimos os campos do referencial ortonormal sobre M tal que e_i são vetores tangentes de M e cada ponto destes domínios de definição, temos que, para todo α,

$$\omega_\alpha = 0.$$

Por (2-1) e o Lema de Cartan, temos

$$\omega_{i\alpha} = \sum_j h^\alpha_{ij}\omega_j, \qquad h^\alpha_{ij} = h^\alpha_{ji}. \tag{2-3}$$

A condição de que y é mínima é equivalente a

$$\sum_i h^\alpha_{ii} = 0.$$

Por (1-33) definimos as derivadas covariante $h^\alpha_{ij,k}$'s de h^α_{ij}'s por

$$\begin{aligned} Dh^\alpha_{ij} &= \sum_k h^\alpha_{ij,k}\omega_k \\ &= dh^\alpha_{ij} + \sum_s h^\alpha_{sj}\omega_{si} + \sum_s h^\alpha_{is}\omega_{sj} + \sum_\beta h^\beta_{ij}\omega_{\beta\alpha}. \end{aligned} \tag{2-4}$$

Derivando exteriormente (2-3), obtemos

$$d\omega_{i\alpha} = \sum_j dh^\alpha_{ij}\wedge\omega_j + \sum_j h^\alpha_{ij}d\omega_j.$$

Segue de (2-4) que

$$\begin{aligned} \sum_j dh^\alpha_{ij}\wedge\omega_j &= \sum_j\left(Dh^\alpha_{ij} - \sum_s h^\alpha_{sj}\omega_{si} - \sum_s h^\alpha_{is}\omega_{sj} - \sum_\beta h^\beta_{ij}\omega_{\beta\alpha}\right)\wedge\omega_j \\ &= \sum_j Dh^\alpha_{ij}\wedge\omega_j - \sum_j\sum_s h^\alpha_{sj}\omega_{si}\wedge\omega_j - \sum_j\sum_s h^\alpha_{is}\omega_{sj}\wedge\omega_j - \sum_j\sum_\beta h^\beta_{ij}\omega_{\beta\alpha}\wedge\omega_j \\ &= \sum_j Dh^\alpha_{ij}\wedge\omega_j - \sum_j\sum_s h^\alpha_{sj}\omega_{si}\wedge\omega_j - \sum_s h^\alpha_{is}\left(\sum_j\omega_j\wedge\omega_{js}\right) - \sum_j\sum_\beta h^\beta_{ij}\omega_{\beta\alpha}\wedge\omega_j \\ &= \sum_j Dh^\alpha_{ij}\wedge\omega_j + \sum_s\left(\sum_j h^\alpha_{sj}\omega_j\right)\wedge\omega_{is} - \sum_s h^\alpha_{is}d\omega_s + \sum_\beta\left(\sum_j h^\beta_{ij}\omega_j\right)\wedge\omega_{\beta\alpha} \\ &= \sum_j Dh^\alpha_{ij}\wedge\omega_j + \sum_s\omega_{s\alpha}\wedge\omega_{si} - \sum_s h^\alpha_{is}d\omega_s + \sum_\beta\omega_{i\beta}\wedge\omega_{\beta\alpha} \\ &= \sum_j Dh^\alpha_{ij}\wedge\omega_j + \sum_s\omega_{is}\wedge\omega_{s\alpha} - \sum_s h^\alpha_{is}d\omega_s + \sum_\beta\omega_{i\beta}\wedge\omega_{\beta\alpha}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} d\omega_{i\alpha} &= \sum_j dh^{\alpha}_{ij}\wedge\omega_j + \sum_j h^{\alpha}_{ij} d\omega_j \\ &= \sum_j Dh^{\alpha}_{ij}\wedge\omega_j + \sum_s \omega_{s\alpha}\wedge\omega_{si} - \sum_s h^{\alpha}_{is} d\omega_s + \sum_\beta \omega_{i\beta}\wedge\omega_{\beta\alpha} + \sum_j h^{\alpha}_{ij} d\omega_j \\ &= \sum_j Dh^{\alpha}_{ij}\wedge\omega_j + \sum_s \omega_{is}\wedge\omega_{s\alpha} + \sum_\beta \omega_{i\beta}\wedge\omega_{\beta\alpha} \\ &= \sum_j Dh^{\alpha}_{ij}\wedge\omega_j + \sum_C \omega_{iC}\wedge\omega_{C\alpha} \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$d\omega_{i\alpha} = \sum_C \omega_{iC}\wedge\omega_{C\alpha}.$$

Segue que

$$\sum_j Dh^{\alpha}_{ij}\wedge\omega_j + \sum_C \omega_{iC}\wedge\omega_{C\alpha} = d\omega_{i\alpha} = \sum_C \omega_{iC}\wedge\omega_{C\alpha}.$$

Portanto, $\sum_j Dh^{\alpha}_{ij}\wedge\omega_j = 0$ e então

$$h^{\alpha}_{ij,k} = h^{\alpha}_{ik,j}. \tag{2-5}$$

Como M minimalidade de dimensão 2, a equação (2-5) é equivalente a

$$h^{\alpha}_{11,2} = h^{\alpha}_{12,1}, \qquad h^{\alpha}_{12,2} = -h^{\alpha}_{11,1}. \tag{2-6}$$

Agora defina

$$\phi = \omega_1 + i\omega_2,$$

$$H^{(2)}_{\alpha} = h^{\alpha}_{11} + ih^{\alpha}_{12} \qquad \text{e} \qquad H^{(2)}_{\alpha,1} = h^{\alpha}_{11,1} + ih^{\alpha}_{12,1}.$$

Da equação (2-4) e usando (2-6), temos

$$\begin{aligned} Dh^{\alpha}_{11} + iDh^{\alpha}_{12} &= \sum_k h^{\alpha}_{11,k}\omega_k + i\left(\sum_s h^{\alpha}_{12,s}\omega_s\right) \\ &= h^{\alpha}_{11,1}\omega_1 + h^{\alpha}_{11,2}\omega_2 + i(h^{\alpha}_{12,1}\omega_1 + h^{\alpha}_{12,2}\omega_2) \\ &= (h^{\alpha}_{11,1} + ih^{\alpha}_{12,1})\omega_1 + (h^{\alpha}_{11,2} + ih^{\alpha}_{12,2})\omega_2 \\ &= H^{(2)}_{\alpha,1}\omega_1 + (h^{\alpha}_{12,2} - ih^{\alpha}_{11,1})\omega_2 \\ &= H^{(2)}_{\alpha,1}\omega_1 - iH^{(2)}_{\alpha,1}\omega_2 \\ &= H^{(2)}_{\alpha,1}(\omega_1 - i\omega_2) = H^{(2)}_{\alpha,1}\overline{\phi}, \end{aligned}$$

onde $\overline{\phi}$ é o conjugado de ϕ. Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}
Dh_{11}^{\alpha}+iDh_{12}^{\alpha} &= dh_{11}^{\alpha}+2\sum_{s}h_{s1}^{\alpha}\omega_{s1}+\sum_{\beta}h_{11}^{\beta}\omega_{\beta\alpha}+i\left(dh_{12}^{\alpha}+\sum_{l}h_{l2}^{\alpha}\omega_{l1}+\sum_{l}h_{1l}^{\alpha}\omega_{l2}+\sum_{\gamma}h_{12}^{\gamma}\omega_{\gamma\alpha}\right)\\
&= (dh_{11}^{\alpha}+idh_{12}^{\alpha})+2i(h_{11}^{\alpha}+ih_{12}^{\alpha})\omega_{12}+\sum_{\beta}(h_{11}^{\beta}+ih_{12}^{\beta})\omega_{\beta\alpha}\\
&= dH_{\alpha}^{(2)}+2iH_{\alpha}^{(2)}\omega_{12}+\sum_{\beta}H_{\beta}^{(2)}\omega_{\beta\alpha}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$dH_{\alpha}^{(2)}+2iH_{\alpha}^{(2)}\omega_{12}+\sum_{\beta}H_{\beta}^{(2)}\omega_{\beta\alpha} = H_{\alpha,1}^{(2)}\overline{\phi}. \tag{2-7}$$

Multiplicando a equação (2-7) por $2\sum_{\alpha}H_{\alpha}^{(2)}$, obtemos

$$d\sum_{\alpha}\left(H_{\alpha}^{(2)}\right)^{2}+4i\sum_{\alpha}\left(H_{\alpha}^{(2)}\right)^{2}\omega_{12}+2\sum_{\alpha,\beta}H_{\alpha}^{(2)}H_{\beta}^{(2)}\omega_{\beta\alpha} = 2\sum_{\alpha}H_{\alpha}^{(2)}H_{\alpha,1}^{(2)}\overline{\phi}.$$

Observe que, restringindo os índices $\beta<\alpha$, temos que $\sum_{\beta<\alpha}H_{\alpha}^{(2)}H_{\beta}^{(2)}\omega_{\beta\alpha}=0$. Portanto,

$$d\sum_{\alpha}\left(H_{\alpha}^{(2)}\right)^{2}+4i\sum_{\alpha}\left(H_{\alpha}^{(2)}\right)^{2}\omega_{12} = 2\sum_{\alpha}H_{\alpha}^{(2)}H_{\alpha,1}^{(2)}\overline{\phi}. \tag{2-8}$$

Pelas equações de estrutura de M, temos

$$\begin{aligned}
d\phi &= d(\omega_1+i\omega_2)=d\omega_1+id\omega_2\\
&= \sum_{k}\omega_k\wedge\omega_{k1}+i\sum_{j}\omega_j\wedge\omega_{j2}\\
&= \omega_2\wedge\omega_{21}+i\omega_1\wedge\omega_{12}\\
&= -(\omega_2+i\omega_1)\wedge\omega_{12}=-i\omega_{12}\wedge(\omega_1+i\omega_2)\\
&= -i\omega_{12}\wedge\phi
\end{aligned} \tag{2-9}$$

e

$$\begin{aligned}
d\omega_{12} &= -K\omega_1\wedge\omega_2=-(-i^2)K\omega_1\wedge\omega_2\\
&= -\frac{i}{2}K(-2i\omega_1\wedge\omega_2)\\
&= -\frac{i}{2}K(\omega_1+i\omega_2)\wedge(\omega_1-i\omega_2)\\
&= -\frac{i}{2}K\phi\wedge\overline{\phi}.
\end{aligned} \tag{2-10}$$

2.1 Espaço Osculador de Ordem Superior e n-ésima Formas Fundamentais

No estudo de superfícies mínimas com codimensão superior em um espaço de curvatura constante, o conceito de espaço osculador representa um papel importante.

Considere $x(s)$ uma curva suave C passando por $x \in M$ e parametrizada pelo comprimento de arco. Pela derivação covariante ao longo de C temos os campos vetoriais

$$\frac{Dx}{ds}, \frac{D^2x}{ds^2}, \ldots, \frac{D^nx}{ds^n}, \ldots. \tag{2-11}$$

Os n primeiros vetores em (2-11) em $s = 0$ são chamados geradores do espaço osculador de ordem n de $x(s)$ em $x = x(0)$. O n-ésimo espaço osculador $T_x^{(n)}$ de M em $x \in M$ é definido como sendo o espaço gerado por todos os espaços osculadores de ordem n em x das curvas suaves que passam por x e estão em M. Então, temos que $T_x^{(1)} = T_x \subset T_x^{(2)} \subset \cdots \subset T_x^{(n)} \subset \cdots$. Coloquemos

$$p_{-1}(x) = 0, \qquad p_0(x) = 2, \qquad p_a(x) \;=\; \dim T_x^{(a+1)} - \dim T_x^{(a)}, \tag{2-12}$$

onde $1 \leq a \leq n-1$. Então, temos

$$\dim T_x^{(n)} \;=\; \sum_{a=0}^{n-1} p_a(x), \qquad n \geq 1. \tag{2-13}$$

Um ponto $x \in M$ é dito ponto regular de ordem b, se $p_a(x)$ é constante para cada $a = 1, 2, \ldots, b-1$, em uma vizinhança de x.

Suponha agora que x é um ponto regular de ordem $n-1 \geq 2$. Sejam e_A campos do referencial ortonormal local, tal que $e_{\lambda_0}, e_{\lambda_1}, \ldots, e_{\lambda_b}$ gerem $T_x^{(b+1)}$ com $0 \leq b \leq n-2$. Teremos os seguintes domínios para os índices

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{a=-1}^{b-3} p_a(x) \leq \lambda_{b-2} \leq \sum_{a=0}^{b-2} p_a(x), \\ 1 + \sum_{a=-1}^{n-2} p_a(x) \leq \lambda_{n-1} \leq N. \end{aligned} \tag{2-14}$$

Como $n-1 \geq 2$, então $\lambda_b \geq 3$, logo $\omega_{\lambda_b} = 0$ com $1 \leq b \leq n-2$, temos, por $De_A = \sum_B \omega_{AB} e_B$,

$$\omega_{\lambda_{b-1}\lambda_{a+1}} = 0, \tag{2-15}$$

para $a = b, b+1, \ldots, n-2$ e $b = 1, 2, \ldots, n-2$. Pela derivação exterior de (2-15), para $1 \le b \le n-2$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= d\omega_{\lambda_{b-1}\lambda_{a+1}} \\ &= \sum_{\lambda_b} \omega_{\lambda_{b-1}\lambda_b} \wedge \omega_{\lambda_b\lambda_{a+1}} - c\omega_{\lambda_{b-1}} \wedge \omega_{\lambda_{a+1}}. \end{aligned}$$

Como $a = b, b+1, \ldots, n-2$, tome $a = b$,

$$\sum_{\lambda_b} \omega_{\lambda_{b-1}\lambda_b} \wedge \omega_{\lambda_b\lambda_{b+1}} - c\omega_{\lambda_{b-1}} \wedge \omega_{\lambda_{b+1}} = 0.$$

Portanto, como $\omega_{\lambda_b} = 0$ com $1 \le b \le n-2$,

$$\sum_{\lambda_b} \omega_{\lambda_{b-1}\lambda_b} \wedge \omega_{\lambda_b\lambda_{b+1}} = 0, \qquad b = 1, 2, \ldots, n-2,$$

onde os índices se estendem sobre o domínio para os índices de λ_b não no domínio de b. Isto nos permite introduzir por recorrência as quantidades $h^{\lambda_{b+1}}_{i_1 i_2 \cdots i_{b+2}}$ definidas pelas equações

$$\sum_{\lambda_b} h^{\lambda_b}_{i_1 i_2 \cdots i_{b+1}} \omega_{\lambda_b\lambda_{b+1}} = \sum_{i_{b+2}} h^{\lambda_{b+1}}_{i_1 i_2 \cdots i_{b+2}} \omega_{i_{b+2}}, \tag{2-16}$$

onde $h^{\lambda_{b+1}}_{i_1 i_2 \cdots i_{b+2}}$ são simétricos em relação aos índices $i_1, i_2, \cdots, i_{b+2}$. De fato, observe que

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\lambda_b} \omega_{\lambda_{b-1}\lambda_b} \wedge \omega_{\lambda_b\lambda_{b+1}} \\ &= \sum_{\lambda_b} \left(\sum_{i_{b+1}} h^{\lambda_b}_{i_1 i_2 \cdots i_{b+1}} \omega_{i_{b+1}} \right) \wedge \omega_{\lambda_b\lambda_{b+1}} \\ &= \sum_{i_{b+1}} \left(\omega_{i_{b+1}} \wedge \sum_{\lambda_b} h^{\lambda_b}_{i_1 i_2 \cdots i_{b+1}} \omega_{\lambda_b\lambda_{b+1}} \right). \end{aligned}$$

Pelo Lema de Cartan, obtemos a equação (2-16). Seja Ω_b um conjunto aberto de todos os pontos regulares de ordem b. Note que $\Omega_1 = M$ e

$$\Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \cdots \supset \Omega_{n-1}. \tag{2-17}$$

Definimos

$$(e_{\lambda_b}, D^b x) = \begin{cases} \sum\limits_{i_1,\ldots,i_b} h^{\lambda_{b-1}}_{i_1 \cdots i_b} \omega_{i_1} \cdots \omega_{i_b}, & \text{se} \quad a = b-1, \quad b \le n, \\ 0, \quad \text{se} \quad a \ge b, \quad n > b, \end{cases} \tag{2-18}$$

que são formas diferenciais de grau b e são ditos de b-ésima formas fundamentais de M em $\overline{M}$.

Pela minimalidade e (2-16), obtemos

$$\sum_j h^{\lambda_b}_{jji_3\cdots i_{b+1}} \quad = \quad 0, \qquad 1 \leq b \leq n-1, \tag{2-19}$$

desde que $h^{\lambda_b}_{i_1\cdots i_{b+1}}$ sejam simétricos em relação aos índices $i_1, \cdots, i_{b+1}$. O inteiro $p_a(x)$ é igual ao número de vetores linearmente independentes entre

$$\sum_{\lambda_a} h^{\lambda_a}_{i_1 i_2\cdots i_{a+1}} e_{\lambda_a}, \qquad i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_{a+1}. \tag{2-20}$$

Portanto, para cada ponto de Ω_a, temos

$$p_a(x) \leq 2, \qquad 1 \leq a \leq n-1. \tag{2-21}$$

Seja

$$H^{(b)}_\alpha \quad = \quad h^\alpha_{\underbrace{1\cdots 1}_{b}} + ih^\alpha_{\underbrace{1\cdots 1}_{b-1}2}, \qquad \alpha \geq \mu_{b-1}, \tag{2-22}$$

onde $\mu_{b-1} = \sum\limits_{a=0}^{b-2} p_a(x) + 1$. Novamente por (1-33) definimos as derivadas covariantes $h^\alpha_{i_1\cdots i_b,k}$'s de $h^\alpha_{i_1\cdots i_b}$'s, $\alpha \geq \mu_{b-1}$, por

$$\begin{aligned} Dh^\alpha_{i_1\cdots i_b} &= \textstyle\sum_k h_{i_1\cdots i_b,k}\omega_k \\ &= dh^\alpha_{i_1\cdots i_b} + \sum_s h^\alpha_{si_2\cdots i_b}\omega_{si_1} + \cdots + \sum_s h^\alpha_{i_1\cdots i_{b-1}s}\omega_{si_b} + \sum_{\beta\geq\mu_{b-1}} h^\beta_{i_1\cdots i_b}\omega_{\beta\alpha}. \end{aligned} \tag{2-23}$$

Então, temos

$$dH^{(b)}_\alpha + ibH^{(b)}_\alpha \omega_{12} + \sum_\beta H^{(b)}_\beta \omega_{\beta\alpha} \quad = \quad H^{(b)}_{\alpha,1}\omega_1 + H^{(b)}_{\alpha,2}\omega_2, \tag{2-24}$$

onde $H^{(b)}_{\alpha,1} = h^\alpha_{\underbrace{1\cdots 1}_{b},1} + ih^\alpha_{\underbrace{1\cdots 1}_{b-1}2,1}$ e $H^{(b)}_{\alpha,2} = h^\alpha_{\underbrace{1\cdots 1}_{b},2} + ih^\alpha_{\underbrace{1\cdots 1}_{b-1}2,2}$ com $\alpha \geq \mu_{b-1}$.

Lema 2.1 *Valem as seguintes relações:*

$$H^{(b)}_\alpha = H^{(b-1)}_{\alpha,1}, \qquad H^{(b)}_\alpha = iH^{(b-1)}_{\alpha,2}, \qquad \alpha \geq \mu_{b-1}, \qquad 3 \leq b \leq n. \tag{2-25}$$

Prova. Da equação (2-16), temos

$$
\begin{aligned}
\sum_{\lambda_{b-2}} H^{(b-1)}_{\lambda_{b-2}} \omega_{\lambda_{b-2}\lambda_{b-1}} &= \sum_{\lambda_{b-2}} \Big(h^{\lambda_{b-2}}_{\underbrace{1\cdots 1}_{b-1}} + i h^{\lambda_{b-2}}_{\underbrace{1\cdots 1}_{b-2}2} \Big) \omega_{\lambda_{b-2}\lambda_{b-1}} \\
&= \sum_{i_b=1}^{2} \Big(h^{\lambda_{b-1}}_{\underbrace{1\cdots 1}_{b-1} i_b} + i h^{\lambda_{b-1}}_{\underbrace{1\cdots 1}_{b-2} 2 i_b} \Big) \omega_{i_b} \\
&= \Big(h^{\lambda_{b-1}}_{\underbrace{1\cdots 1}_{b}} + i h^{\lambda_{b-1}}_{\underbrace{1\cdots 1}_{b-1}2} \Big) \omega_1 + \Big(h^{\lambda_{b-1}}_{\underbrace{1\cdots 1}_{b-1}2} + i h^{\lambda_{b-1}}_{\underbrace{1\cdots 1}_{b-2}22} \Big) \omega_2 \\
&= \Big(h^{\lambda_{b-1}}_{\underbrace{1\cdots 1}_{b}} + i h^{\lambda_{b-1}}_{\underbrace{1\cdots 1}_{b-1}2} \Big) \omega_1 + \Big(h^{\lambda_{b-1}}_{\underbrace{1\cdots 1}_{b-1}2} - i h^{\lambda_{b-1}}_{\underbrace{1\cdots 1}_{b}} \Big) \omega_2 \\
&= \Big(h^{\lambda_{b-1}}_{\underbrace{1\cdots 1}_{b}} + i h^{\lambda_{b-1}}_{\underbrace{1\cdots 1}_{b-1}2} \Big) \omega_1 - i \Big(h^{\lambda_{b-1}}_{\underbrace{1\cdots 1}_{b}} + i h^{\lambda_{b-1}}_{\underbrace{1\cdots 1}_{b-1}2} \Big) \omega_2 \\
&= \Big(h^{\lambda_{b-1}}_{\underbrace{1\cdots 1}_{b}} + i h^{\lambda_{b-1}}_{\underbrace{1\cdots 1}_{b-1}2} \Big) (\omega_1 - i\omega_2) \\
&= H^{(b)}_{\lambda_{b-1}} \overline{\phi}, \qquad 2 \le b \le n,
\end{aligned}
\tag{2-26}
$$

onde consideramos $H^{(1)}_1 = 1$ e $H^{(1)}_2 = i$. Uma vez que $H^{(b-1)}_{\lambda_{b-1}} = h^{\lambda_{b-1}}_{\underbrace{1\cdots 1}_{b}} + i h^{\lambda_{b-1}}_{\underbrace{1\cdots 1}_{b-1}2} = 0$, pela equação (2-18), obtemos

$$
\sum_k H^{(b-1)}_{\lambda_{b-1},k}\omega_k = \sum_{\lambda_{b-2}}^{(b-1)} \omega_{\lambda_{b-2}\lambda_{b-1}} \qquad \text{e} \qquad H^{(b-1)}_{\lambda_a,k} = 0, \quad \text{para} \quad a \ge b. \tag{2-27}
$$

De fato, observe que, pela equação (2-24) e pelo fato de $H^{(b-1)}_{\lambda_{b-1}} = 0$, para $a = b-1$ e $b \le n$, temos

$$
\begin{aligned}
H^{(b-1)}_{\lambda_{b-1},1}\omega_1 + H^{(b-1)}_{\lambda_{b-1},2}\omega_2 &= \sum_k H^{(b-1)}_{\lambda_{b-1},k}\omega_k \\
&= DH^{(b-1)}_{\lambda_{b-1}} \\
&= dH^{(b-1)}_{\lambda_{b-1}} + ibH^{(b-1)}_{\lambda_{b-1}}\omega_{12} + \sum_\beta H^{(b-1)}_\beta \omega_{\beta\lambda_{b-1}} \\
&= \sum_\beta H^{(b-1)}_\beta \omega_{\beta\lambda_{b-1}} \\
&= \sum_{\lambda_{b-2}} H^{(b-1)}_{\lambda_{b-2}} \omega_{\lambda_{b-2}\lambda_{b-1}}.
\end{aligned}
$$

Portanto, temos

$$\sum_k H^{(b-1)}_{\alpha,k}\omega_k = \sum_{\lambda_{b-2}} H^{(b-1)}_{\lambda_{b-2}}\omega_{\lambda_{b-2}\lambda_{b-1}},$$

que é a equação (2-27). Assim, das equações (2-26) e (2-27), temos

$$\begin{aligned}
H^{(b-1)}_{\lambda_{b-1},1}\omega_1 + H^{(b-1)}_{\lambda_{b-1},2}\omega_2 &= \sum_k H^{(b-1)}_{\lambda_{b-1},k}\omega_k \\
&= \sum_{\lambda_{b-2}} H^{(b-1)}_{\lambda_{b-2}}\omega_{\lambda_{b-2}\lambda_{b-1}} \\
&= H^{(b)}_{\lambda_{b-1}}\overline{\phi} \\
&= H^{(b)}_{\lambda_{b-1}}(\omega_1 - i\omega_2) \\
&= H^{(b)}_{\lambda_{b-1}}\omega_1 - iH^{(b)}_{\lambda_{b-1}}\omega_2.
\end{aligned}$$

Então,

$$H^{(b-1)}_{\lambda_{b-1},1} = H^{(b)}_{\lambda_{b-1}} \qquad \text{e} \qquad H^{(b-1)}_{\lambda_{b-1},2} = -iH^{(b)}_{\lambda_{b-1}}.$$

Decorre daí que

$$H^{(b)}_{\alpha} = H^{(b-1)}_{\alpha,1}, \qquad H^{(b)}_{\alpha} = iH^{(b-1)}_{\alpha,2}, \qquad \alpha \geq \mu_{b-1}, \qquad 3 \leq b \leq n,$$

que são as relações (2-25). □

Agora construiremos os invariantes escalares de uma imersão isométrica mínima. O vetor $E_1 = e_1 + ie_2$ está definido a menos da transformação $E_1 \to E_1^* = e^{i\tau}E_1$ onde τ é um número real. Sob tal mudança,

$$H^{(b)}_{\alpha} \to \left(H^{(b)}_{\alpha}\right)^* = e^{bi\tau}H^{(b)}_{\alpha}. \tag{2-28}$$

O sistema de vetores normais $\{e_\alpha\}$, $\alpha \in \mu_{b-1}$, está definido a menos da transformação

$$\tilde{e}_a = \sum_{\beta\in\mu_{b-1}} A_{\alpha\beta}e_\beta, \qquad \alpha \in \mu_{b-1}, \tag{2-29}$$

onde $(A_{\alpha\beta})$ é uma matriz ortogonal. Sob tal mudança, temos

$$\tilde{H}^{(b)}_{\alpha} = \sum_{\beta\in\mu_{b-1}} A_{\alpha\beta}H^{(b)}_{\beta}, \qquad \alpha \in \mu_{b-1},$$

e então

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in\mu_{b-1}}\left(\tilde{H}_{\alpha}^{(b)}\right)^2 &= \sum_{\alpha\in\mu_{b-1}}\sum_{\beta\in\mu_{b-1}}(A_{\alpha\beta})^2\left(H_{\beta}^{(b)}\right)^2\\ &= \sum_{\alpha\in\mu_{b-1}}(A_{\alpha\beta})^2\sum_{\beta\in\mu_{b-1}}\left(H_{\beta}^{(b)}\right)^2\\ &= \sum_{\beta\in\mu_{b-1}}\left(H_{\beta}^{(b)}\right)^2.\end{aligned}\tag{2-30}$$

Segue das equações (2-28) e (2-30) que o valor do campo escalar real,

$$f_{(b)} = \left(\sum_{\alpha\in\mu_{b-1}}\left(H_{\alpha}^{(b)}\right)^2\right)\left(\overline{\sum_{\alpha\in\mu_{b-1}}\left(H_{\alpha}^{(b)}\right)^2}\right),\tag{2-31}$$

está globalmente definido nos componentes conexos de Ω_{b-1}, independente da mudança do campo referencial. $f_{(2)}$ é uma função diferenciável globalmente definida em M.

Temos a seguinte decomposição de $f_{(b)}$ em Ω_{b-1}: Seja

$$\begin{aligned}K_{(b)} &= \sum_{\alpha\in\mu_{b-1}}\left((h^{\alpha}_{\underbrace{1\cdots1}_{b}})^2+(h^{\alpha}_{\underbrace{1\cdots1}_{b-1}2})^2\right) \quad \text{e}\\ N_{(b)} &= \sum_{\alpha\in\mu_{b-1}}(h^{\alpha}_{\underbrace{1\cdots1}_{b}})^2\sum_{\alpha\in\mu_{b-1}}(h^{\alpha}_{\underbrace{1\cdots1}_{b-1}2})^2-\left(\sum_{\alpha\in\mu_{b-1}}(h^{\alpha}_{\underbrace{1\cdots1}_{b}})(h^{\alpha}_{\underbrace{1\cdots1}_{b-1}2})\right)^2.\end{aligned}\tag{2-32}$$

Temos que

$$\begin{aligned}f_{(b)} &= \left(\sum_{\alpha}\left(H_{\alpha}^{(b)}\right)^2\right)\left(\overline{\sum_{\alpha}\left(H_{\alpha}^{(b)}\right)^2}\right)=\left|\sum_{\alpha}\left(H_{\alpha}^{(b)}\right)^2\right|^2=\left|\sum_{\alpha}(h^{\alpha}_{\underbrace{1\cdots1}_{b}}+ih^{\alpha}_{\underbrace{1\cdots1}_{b-1}2})^2\right|^2\\ &= \sum_{\alpha}\left\{[(h^{\alpha}_{\underbrace{1\cdots1}_{b}})^2-(h^{\alpha}_{\underbrace{1\cdots1}_{b-1}2})^2]^2+4[(h^{\alpha}_{\underbrace{1\cdots1}_{b}})(h^{\alpha}_{\underbrace{1\cdots1}_{b-1}2})]^2\right\}\\ &= \left\{\sum_{\alpha}[(h^{\alpha}_{\underbrace{1\cdots1}_{b}})^2+(h^{\alpha}_{\underbrace{1\cdots1}_{b-1}2})^2]\right\}^2-4\left\{\sum_{\alpha}(h^{\alpha}_{\underbrace{1\cdots1}_{b}})^2\sum_{\alpha}(h^{\alpha}_{\underbrace{1\cdots1}_{b-1}2})^2-\sum_{\alpha}(h^{\alpha}_{\underbrace{1\cdots1}_{b}}h^{\alpha}_{\underbrace{1\cdots1}_{b-1}2})^2\right\}\\ &= K_{(b)}^2-4N_{(b)}\geq 0, \qquad 2\leq b\leq n,\end{aligned}$$

onde $K_{(b)}$ e $N_{(b)}$ são também invariantes da imersão isométrica mínima x de M definida em Ω_{b-1}.

Quando a esfera S^2 é minimamente imersa em um espaço de curvatura constante, temos $f_{(b)} = 0$, $b = 2,3,\ldots$. Geometricamente, $f_{(b)} = 0$ significa que os vetores $\sum_{a=2b-1}^{2b} h^{\alpha}_{1\cdots1}e_{\alpha}$ e $\sum_{a=2b-1}^{2b} h^{\alpha}_{1\cdots12}e_{\alpha}$ no espaço osculador de b-ésima ordem são perpendiculares dois a dois e são de mesmo módulo. Por outro lado, $N_{(b)} = 0$ significa que os dois vetores são linearmente dependentes, pela igualdade de Cauchy-Schwartz. Além disso, para o significado geométrico de $K_{(b)}$ e $N_{(b)}$, temos o seguinte lema por T. Ōtsuki em [17].

Lema 2.2 (T. Ōtsuki) *Se $M = \Omega_b$ e $N_{(b)} > 0$ e $K_{(b+1)} = 0$ em M, então existe uma subvariedade totalmente geodésica $2b$-dimensional de $\overline{M}$ tal que M está contida na subvariedade.*
Se $M = \Omega_{(b-1)}$ e $N_{(b)} = 0$ e $K_{(b)} > 0$ em M, então existe uma subvariedade totalmente geodésica $(2b-1)$-dimensional de $\overline{M}$ tal que M está contida na subvariedade.

2.2 Laplaciano de $f_{(b)}$ e de $K_{(b)}$

Usaremos os operadores $\partial, \bar{\partial}$ relativos a uma estrutura complexa induzida por um sistema de coordenadas isotérmica em M e

$$d^c = i(\bar{\partial} - \partial). \tag{2-33}$$

Para uma função diferenciável f com valores reais, seu laplaciano Δf é definido por

$$dd^c f = \left(\frac{i}{2}\right)\Delta f \phi \wedge \bar{\phi}. \tag{2-34}$$

O seguinte lema é útil para o estudo da $f_{(b)}$.

Lema 2.3 *Seja M uma variedade Riemanniana orientada 2-dimensional. Seja H uma função diferenciável de valores complexos em M e $f = H\overline{H}$. Suponha que vale a igualdade*

$$dH + tiH\omega_{12} = \overline{A\phi}, \tag{2-35}$$

onde t é uma constante real e A é uma função diferenciável em M. Então, temos

$$\Delta f = 2tfK + 2A\overline{A}, \tag{2-36}$$

$$\Delta log f = 2tK, \quad se \quad f \neq 0, \tag{2-37}$$

onde K é a curvatura Gaussiana.

Prova. Derivando $f = H\overline{H}$ e usando (2-35), temos

$$\begin{aligned} df &= \overline{H}dH + Hd\overline{H} \\ &= \overline{H}(\overline{A\phi} - tiH\omega 12) + H(A\phi + ti\overline{H}\omega_{12}) \\ &= AH\phi + \overline{AH\phi} \end{aligned} \tag{2-38}$$

e por (2-33), temos

$$d^c f = i(\overline{AH\phi} - AH\phi). \tag{2-39}$$

Derivando exteriormente (2-35), temos

$$d\overline{A} \wedge \overline{\phi} - \overline{A} \wedge d\overline{\phi} = d(dH) + tidH \wedge \omega_{12} + tiH \wedge d\omega_{12}$$

Daí, pelas equações (2-9) e (2-10), obtemos

$$\begin{aligned} d\overline{A} \wedge \overline{\phi} &= tidH \wedge \omega_{12} + tiH \wedge \left(-\frac{i}{2}K\phi \wedge \overline{\phi}\right) + \overline{A} \wedge (-i\omega_{12} \wedge \overline{\phi}) \\ &= tidH \wedge \omega_{12} + \frac{t}{2}HK\phi \wedge \overline{\phi} + i\overline{A\phi} \wedge \omega_{12}. \end{aligned} \tag{2-40}$$

Observe que, das equações (2-35), (2-38) e (2-40), obtemos

$$\begin{aligned} d(\overline{AH}) \wedge \overline{\phi} &= \overline{A}d\overline{H} \wedge \overline{\phi} + \overline{H}d\overline{A} \wedge \overline{\phi} \\ &= \overline{A}(A\phi + ti\overline{H}\omega_{12}) \wedge \overline{\phi} + \overline{H}\left(tidH \wedge \omega_{12} + \frac{t}{2}HK\phi \wedge \overline{\phi} + i\overline{A\phi} \wedge \omega_{12}\right) \\ &= \overline{A}A\phi \wedge \overline{\phi} - ti\overline{AH\phi} \wedge \omega_{12} + ti\overline{H}dH \wedge \omega_{12} + \frac{t}{2}\overline{H}HK\phi \wedge \overline{\phi} + i\overline{HA\phi} \wedge \omega_{12} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} d(AH) \wedge \phi &= AdH \wedge \phi + HdA \wedge \phi \\ &= A(\overline{A\phi} - tiH\omega_{12}) \wedge \phi + H\left(-tid\overline{H} \wedge \omega_{12} + \frac{t}{2}\overline{H}K\overline{\phi} \wedge \phi - iA\phi \wedge \omega_{12}\right) \\ &= -\overline{A}A\phi \wedge \overline{\phi} + tiAH\phi \wedge \omega_{12} - tiHd\overline{H} \wedge \omega_{12} - \frac{t}{2}\overline{H}HK\phi \wedge \overline{\phi} - iHA\phi \wedge \omega_{12}. \end{aligned}$$

Subtraindo $d(AH) \wedge \phi$ de $d(\overline{AH}) \wedge \overline{\phi}$, obtemos

$$\begin{aligned} d(\overline{AH}) \wedge \overline{\phi} - d(AH) \wedge \phi &= 2A\overline{A}\phi \wedge \overline{\phi} - ti(\overline{AH\phi} + AH\phi) \wedge \omega_{12} + ti(\overline{H}dH + Hd\overline{H}) \wedge \omega_{12} + \\ &+ tH\overline{H}K\phi \wedge \overline{\phi} + i(\overline{HA\phi} + HA\phi) \wedge \omega_{12} \\ &= (tfK + 2A\overline{A})\phi \wedge \overline{\phi} + idf \wedge \omega_{12}. \end{aligned} \tag{2-41}$$

Derivando exteriormente (2-39) e usando (2-9) e (2-41), temos

$$\begin{aligned}
dd^c f &= id(\overline{AH\phi} - Ah\phi) \\
&= i(d(\overline{AH}) \wedge \overline{\phi} - \overline{AH} \wedge d\overline{\phi}) - i(d(AH) \wedge \phi - AH \wedge d\phi) \\
&= i[d(\overline{AH}) \wedge \overline{\phi} - d(AH) \wedge \phi] - i[\overline{AH} \wedge d\overline{\phi} - AH \wedge d\phi] \\
&= i[(tfK + 2A\overline{A})\phi \wedge \overline{\phi} + idf \wedge \omega_{12}] - i[\overline{AH} \wedge (i\omega_{12} \wedge \overline{\phi}) - AH \wedge (-i\omega_{12} \wedge \phi)] \\
&= i(tfK + 2A\overline{A})\phi \wedge \overline{\phi} - df \wedge \omega_{12} - (\overline{AH\phi} + AH\phi) \wedge \omega_{12} \\
&= i(tfK + 2A\overline{A})\phi \wedge \overline{\phi} - 2df \wedge \omega_{12}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, da equação (2-34), temos que $dd^c f = \left(\frac{i}{2}\right) \Delta f \phi \wedge \overline{\phi}$.
Logo, $-2df \wedge \omega_{12} = 0$ e $\frac{1}{2}\Delta f = tfK + 2A\overline{A}$. Portanto,

$$\Delta f = 2tfK + 2A\overline{A},$$

que é a igualdade (2-36).
De modo análogo, mostraremos a validade de (2-37). Primeiramente, observe que, se $f \neq 0$,

$$\begin{aligned}
d(\log f) &= d(\log H\overline{H}) = \frac{d(H\overline{H})}{H\overline{H}} \\
&= \frac{dH}{H} + \frac{d\overline{H}}{\overline{H}} = \frac{\overline{A\phi} - itH\omega_{12}}{H} + \frac{A\phi + it\overline{H}\omega_{12}}{\overline{H}} \\
&= \frac{\overline{A\phi}}{H} + \frac{A\phi}{\overline{H}}
\end{aligned}$$

e então

$$d^c(\log f) = i\left(\frac{\overline{A\phi}}{H} - \frac{A\phi}{\overline{H}}\right).$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned}
d\left(\frac{\overline{A}}{H}\right) \wedge \overline{\phi} &= \left(\frac{Hd\overline{A} - \overline{A}dH}{H^2}\right) \wedge \overline{\phi} \\
&= \frac{1}{H}\left(tidH \wedge \omega_{12} - i\overline{A}\omega_{12} \wedge \overline{\phi} + \frac{t}{2}HK\phi \wedge \overline{\phi}\right) - \frac{\overline{A}}{H^2}(\overline{A\phi} - tiH\omega_{12}) \wedge \overline{\phi} \\
&= i\frac{\overline{A\phi}}{H} \wedge \omega_{12} + \frac{t}{2}K\phi \wedge \overline{\phi}
\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
d\left(\frac{A}{\overline{H}}\right)\wedge\phi &= \left(\frac{\overline{H}dA-Ad\overline{H}}{\overline{H}^2}\right)\wedge\phi \\
&= \frac{1}{\overline{H}}\left(-tid\overline{H}\wedge\omega_{12}+iA\omega_{12}\wedge\phi+\frac{t}{2}\overline{H}K\overline{\phi}\wedge\phi\right)-\frac{A}{\overline{H}^2}(A\phi+ti\overline{H}\omega_{12})\wedge\phi \\
&= -i\frac{A\phi}{\overline{H}}\wedge\omega_{12}-\frac{t}{2}K\phi\wedge\overline{\phi}.
\end{aligned}
$$

Subtraindo $d\left(\frac{A}{H}\right)\wedge\phi$ e $d\left(\frac{A}{H}\right)\wedge\phi$, obtemos

$$
\begin{aligned}
d\left(\frac{\overline{A}}{H}\right)\wedge\overline{\phi}-d\left(\frac{A}{\overline{H}}\right)\wedge\phi &= \left(i\frac{\overline{A\phi}}{H}\wedge\omega_{12}+\frac{t}{2}K\phi\wedge\overline{\phi}\right)+\left(i\frac{A\phi}{\overline{H}}\wedge\omega_{12}+\frac{t}{2}K\phi\wedge\overline{\phi}\right) \\
&= id(\log f)\wedge\omega_{12}+tK\phi\wedge\overline{\phi}.
\end{aligned}
$$

Agora derivando exteriormente $d^c(\log f)$, temos que

$$
\begin{aligned}
dd^c(\log f) &= id\left(\frac{\overline{A\phi}}{H}-\frac{A\phi}{\overline{H}}\right) \\
&= i\left\{d\left(\frac{\overline{A}}{H}\right)\wedge\overline{\phi}-\frac{\overline{A}}{H}\wedge d\overline{\phi}\right\}-i\left\{d\left(\frac{A}{\overline{H}}\right)\wedge\phi-\frac{A}{\overline{H}}\wedge d\phi\right\} \\
&= i\left\{d\left(\frac{\overline{A}}{H}\right)\wedge\overline{\phi}-d\left(\frac{A}{\overline{H}}\right)\wedge\phi\right\}-i\left\{\frac{\overline{A}}{H}\wedge d\overline{\phi}-\frac{A}{\overline{H}}\wedge d\phi\right\} \\
&= i\left\{id(\log f)\wedge\omega_{12}+tK\phi\wedge\overline{\phi}+i\left(\frac{\overline{A\phi}}{H}+\frac{A\phi}{\overline{H}}\right)\wedge\omega_{12}\right\} \\
&= -2d(\log f)\wedge\omega_{12}+itK\phi\wedge\overline{\phi}.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, da equação (2-34), temos que $dd^c(\log f)f=\left(\frac{i}{2}\right)\Delta(\log f)\phi\wedge\overline{\phi}$, assim $-2d(\log f)\wedge\omega_{12}=0$ e $\frac{1}{2}\Delta(\log f)\phi\wedge\overline{\phi}=tK\phi\wedge\overline{\phi}$. Portanto,

$$
\Delta\log f \;=\; 2tK, \quad \text{se} \quad f\neq 0,
$$

que é a igualdade (2-37). □

Teorema 2.4 *Seja M uma superfície mínima em um espaço $\overline{M}$ de curvatura constante. Então, em uma vizinhança de um ponto regular de ordem $n-1 \geq 2$, temos*

$$\begin{aligned}
H^{(b)}_{\alpha,1} &= iH^{(b)}_{\alpha,2}, \quad para \quad \alpha \geq \mu_{b-1} \quad e \quad 2 \leq b \leq n; && \text{(2-42)}\\
\Delta f_{(b)} &= 4\{bf_{(b)}K + A_{(b)}\overline{A}_{(b)}\}; && \text{(2-43)}\\
\frac{1}{2}\Delta K_{(b)} &= -2\frac{N_{(b)}}{N_{(b-1)}}K_{(b-1)} + bKK_{(b)} + 2K_{(b+1)} + \\
&+ \ 2\sum_{\lambda_{b-1}}\left(H^{(b)}_{\lambda_{b-1},1}\overline{H^{(b)}_{\lambda_{b-1},1}}\right), \quad se \quad N_{(b-1)} \neq 0 \quad e \quad 2 \leq b \leq n-1. && \text{(2-44)}
\end{aligned}$$

Prova. A equação de Codazzi (2-6) implica (2-7). Provaremos por indução que

$$\left\{dH^{(b)}_{\alpha} + ibH^{(b)}_{\alpha}\omega_{12} + \sum_{\beta}H^{(b)}_{\beta}\omega_{\beta\alpha}\right\}\wedge\overline{\phi} = 0, \qquad \alpha,\beta \geq \mu_{b-1}. \tag{2-45}$$

Observando (2-24), assumimos que

$$H^{(b-1)}_{\alpha,1} = iH^{(b-1)}_{\alpha,2}, \qquad \alpha \geq \mu_{b-2}. \tag{2-46}$$

Então, vemos

$$dH^{(b-1)}_{\alpha} + i(b-1)H^{(b-1)}_{\alpha}\omega_{12} + \sum_{\beta\geq\mu_{b-2}}H^{(b-1)}_{\beta}\omega_{\beta\alpha} = H^{(b-1)}_{\alpha,1}\overline{\phi}, \tag{2-47}$$

onde $\alpha \geq \mu_{b-2}$ e $b \geq 3$. Colocamos

$$dH^{(b-1)}_{\alpha,1} + ibH^{(b-1)}_{\alpha,1}\omega_{12} + \sum_{\beta}H^{(b-1)}_{\beta,1}\omega_{\beta\alpha} = H^{(b-1)}_{\alpha,1,1}\omega_1 + H^{(b-1)}_{\alpha,1,2}\omega_2. \tag{2-48}$$

Derivando exteriormente (2-47), obtemos

$$\begin{aligned}
i(b-1)\left(dH^{(b-1)}_{\alpha}\wedge\omega_{12} + H^{(b-1)}_{\alpha}\wedge d\omega_{12}\right) + \sum_{\beta}\left(dH^{(b-1)}_{\beta}\wedge\omega_{\beta\alpha} + H^{(b-1)}_{\beta}\wedge d\omega_{\beta\alpha}\right) = \\
= dH^{(b-1)}_{\alpha,1}\wedge\overline{\phi} + H^{(b-1)}_{\alpha,1}\wedge d\overline{\phi}.
\end{aligned}$$

E pelas equações (2-2), (2-9), (2-10) e (2-47), temos que

$$\begin{aligned}
dH^{(b-1)}_{\alpha,1}\overline{\phi} + ibH^{(b-1)}_{\alpha,1}\omega_{12}\wedge\overline{\phi} + \sum_{\beta}H^{(b-1)}_{\beta,1}\omega_{\beta\alpha}\wedge\overline{\phi} &= -i(b-1)H^{(b-1)}_{\alpha}K\omega_1\wedge\omega_2 + \\
&+ \sum_{\beta}H^{(b-1)}_{\beta}\sum_{B}\omega_{\beta B}\wedge\omega_{B\alpha}.
\end{aligned}$$

Por (2-48), temos

$$\left(H^{(b-1)}_{\alpha,1,1}\wedge_1 + H^{(b-1)}_{\alpha,1,2}\omega_2\right)\wedge\overline{\phi} \;=\; -i(b-1)H^{(b-1)}_{\alpha}K\omega_1\wedge\omega_2 + \sum_{\beta}H^{(b-1)}_{\beta}\sum_{B}\omega_{\beta B}\wedge\omega_{B\alpha}.$$

Agora observe que $H^{(b-1)}_{\alpha,1,1} = h^{\alpha}_{\underbrace{1\cdots1}_{b-1},1,1} + ih^{\alpha}_{\underbrace{1\cdots1}_{b-2}2,1,1}$ e $H^{(b-1)}_{\alpha,1,2} = -h^{\alpha}_{\underbrace{1\cdots1}_{b-2}2,2,2} + ih^{\alpha}_{\underbrace{1\cdots1}_{b-1},2,2}$ e que

$$\left(H^{(b-1)}_{\alpha,1,1}\omega_1 + H^{(b-1)}_{\alpha,1,2}\omega_2\right)\wedge(\omega_1 - i\omega_2) \;=\; -i\left(H^{(b-1)}_{\alpha,1,1} - H^{(b-1)}_{\alpha,1,2}\right)\omega_1\wedge\omega_2.$$

Decorre que

$$\begin{aligned} -i\left(H^{(b-1)}_{\alpha,1,1} - H^{(b-1)}_{\alpha,1,2}\right)\omega_1\wedge\omega_2 &= -i\{(h^{\alpha}_{\underbrace{1\cdots1_{b-1}}},_{1,1} + h^{\alpha}_{\underbrace{1\cdots1}_{b-1},2,2}) + i(h^{\alpha}_{\underbrace{1\cdots1}_{b-2}2,1,1} + h^{\alpha}_{\underbrace{1\cdots1}_{b-2}2,2,2})\} \\ &= -i\Delta H^{(b-1)}_{\alpha}. \end{aligned}$$

Assim,

$$-i\Delta H^{(b-1)}_{\alpha}\omega_1\wedge\omega_2 \;=\; -i(b-1)H^{(b-1)}_{\alpha}K\omega_1\wedge\omega_2 + \sum_{\beta}H^{(b-1)}_{\beta}\sum_{B}\omega_{\beta B}\wedge\omega_{B\alpha}.$$

Portanto,

$$\Delta H^{(b-1)}_{\alpha}\omega_1\wedge\omega_2 \;=\; (b-1)H^{(b-1)}_{\alpha}K\omega_1\wedge\omega_2 + i\sum_{\beta}H^{(b-1)}_{\beta}\sum_{B}\omega_{\beta B}\wedge\omega_{B\alpha}, \quad (2\text{-}49)$$

onde $B\in\tilde{\lambda}_{b-3} = \left\{A; 1\le A\le \sum_{a=0}^{b-3}p_a(x)\right\}$ e

$$\Delta H^{(b-1)}_{\alpha} \;=\; (h^{\alpha}_{\underbrace{1\cdots1}_{b-1},1,1} + h^{\alpha}_{\underbrace{1\cdots1}_{b-1},2,2}) + i(h^{\alpha}_{\underbrace{1\cdots1}_{b-2}2,1,1} + h^{\alpha}_{\underbrace{1\cdots1}_{b-2}2,2,2}). \quad (2\text{-}50)$$

Como $\alpha,\beta\in\mu_{b-2} = \sum_{a=0}^{b-3}p_a(x)+1$ e $\Omega_1 = M\supset\Omega_2\supset\cdots\supset\Omega_n$, ainda

$$1+\sum_{a=-1}^{b-4}p_a(x)\le\lambda_{b-3}\le\sum_{a=0}^{b-3}p_a(x), \qquad b\ge 3,$$

e de (2-49) implica que $\Delta H_\alpha^{(b-1)} = 0$. Assim, pelo Lema 2.1 e (2-50), temos (2-45). A fórmula (2-45) é a equação de Codazzi de ordem superior. Esta fórmula implica

$$dH_\alpha^{(b)} + bi\sum_\alpha \left(H_\alpha^{(b)}\right)^2 \omega_{12} + \sum_\beta H_\beta^{(b)}\omega_{\beta\alpha} \;=\; H_{\alpha,1}^{(b)}\overline{\phi}, \qquad \beta \geq \mu_{b-1},$$

e assim temos

$$d\sum_\alpha \left(H_\alpha^{(b)}\right)^2 + 2bi\sum_\alpha \left(H_\alpha^{(b)}\right)^2 \omega_{12} \;=\; 2\sum_\alpha H_\alpha^{(b)} H_{\alpha,1}^{(b)}\overline{\phi}. \tag{2-51}$$

Chamaremos de

$$\overline{A} \;=\; 2\sum_\alpha H_\alpha^{(b)} H_{\alpha,1}^{(b)}, \tag{2-52}$$

assim de (2-51) e pelo Lema 2.3, temos

$$\begin{aligned} \Delta f_{(b)} &= 2(2bf_{(b)}K + 2A\overline{A}) \\ &= 4(bf_{(b)}K + A\overline{A}), \qquad 2 \leq b \leq n. \end{aligned} \tag{2-53}$$

Pelo Lema de T. Ōtsuki, estudaremos o caso de $N_{(b)} \neq 0$, para $2 \leq b \leq n-1$. Então, temos que $p_a(x) = 2$ para $1 \leq b \leq n-2$, $2b+1 \leq \lambda_b \leq 2b+2$, $2n-1 \leq \lambda_{n-1} \leq n$ e $\alpha \geq \mu_{b-1} = 2b-1$. Agora calculemos o termo $\sum_{A \leq 2b-4} \omega_{\beta A} \wedge \omega_{A\alpha}$ em (2-49). Para isto observe que $\tilde{\lambda}_{b-3} = \{A; 1 \leq A \leq 2b-4\}$ e $2b-5 \leq \lambda_{b-3} \leq 2b-4$. Da equação (2-26) com $2b-3 \leq \lambda_{b-2} \leq 2b-2$ e seus conjugados, temos que, para $\lambda_{b-2} = 2b-3$,

$$\begin{cases} H_{(2b-5)}^{(b-2)}\omega_{2b-5,2b-3} = H_{(2b-3)}^{(b-1)}\overline{\phi}, & \left(\text{multiplica por } \overline{H}_{(2b-4)}^{(b-2)}\right) \\ \overline{H}_{(2b-5)}^{(b-2)}\omega_{2b-5,2b-3} = \overline{H}_{(2b-3)}^{(b-1)}\phi & \left(\text{multiplica por } H_{(2b-4)}^{(b-2)}\right) \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} H_{(2b-4)}^{(b-2)}\omega_{2b-4,2b-3} = H_{(2b-3)}^{(b-1)}\overline{\phi}, & \left(\text{multiplica por } \overline{H}_{(2b-5)}^{(b-2)}\right) \\ \overline{H}_{(2b-4)}^{(b-2)}\omega_{2b-4,2b-3} = \overline{H}_{(2b-3)}^{(b-1)}\phi. & \left(\text{multiplica por } H_{(2b-5)}^{(b-2)}\right) \end{cases}$$

Então, temos

$$\begin{cases} \left(H^{(b-2)}_{(2b-5)}\overline{H}^{(b-2)}_{(2b-4)} - \overline{H}^{(b-2)}_{(2b-5)}H^{(b-2)}_{(2b-4)}\right)\omega_{2b-5,2b-3} = \overline{H}^{(b-2)}_{(2b-4)}H^{(b-1)}_{(2b-3)}\overline{\phi} - H^{(b-2)}_{(2b-4)}\overline{H}^{(b-1)}_{(2b-3)}\phi, \\ \left(H^{(b-2)}_{(2b-4)}\overline{H}^{(b-2)}_{(2b-5)} - \overline{H}^{(b-2)}_{(2b-4)}H^{(b-2)}_{(2b-5)}\right)\omega_{2b-4,2b-3} = \overline{H}^{(b-2)}_{(2b-5)}H^{(b-1)}_{(2b-3)}\overline{\phi} - H^{(b-2)}_{(2b-5)}\overline{H}^{(b-1)}_{(2b-3)}\phi. \end{cases}$$

Chamemos de

$$\begin{aligned} B_{(b-2)} &= H^{(b-2)}_{(2b-5)}\overline{H}^{(b-2)}_{(2b-4)} - \overline{H}^{(b-2)}_{(2b-5)}H^{(b-2)}_{(2b-4)} \\ &= -2i(h^{(2b-5)}_{\underbrace{1\cdots1}_{b-2}}h^{(2b-4)}_{\underbrace{1\cdots1}_{b-3}2} - h^{(2b-4)}_{\underbrace{1\cdots1}_{b-2}}h^{(2b-5)}_{\underbrace{1\cdots1}_{b-3}2}) \\ &= -2i\sqrt{N_{(b-2)}}. \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned} N_{(b-2)} &= \sum_{\alpha=2b-5}^{2b-4}(h^{(\alpha)}_{\underbrace{1\cdots1}_{b-2}})^2\sum_{\alpha=2b-5}^{2b-4}(h^{(\alpha)}_{\underbrace{1\cdots1}_{b-3}2})^2 - \left(\sum_{\alpha=2b-5}^{2b-4}h^{(\alpha)}_{\underbrace{1\cdots1}_{b-2}}h^{(\alpha)}_{\underbrace{1\cdots1}_{b-3}2}\right)^2 \\ &= (h^{(2b-5)}_{\underbrace{1\cdots1}_{b-2}}h^{(2b-4)}_{\underbrace{1\cdots1}_{b-3}2} - h^{(2b-4)}_{\underbrace{1\cdots1}_{b-2}}h^{(2b-5)}_{\underbrace{1\cdots1}_{b-3}2})^2 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{cases} B_{(b-2)}\omega_{2b-5,2b-3} = \overline{H}^{(b-2)}_{(2b-4)}H^{(b-1)}_{(2b-3)}\overline{\phi} - H^{(b-2)}_{(2b-4)}\overline{H}^{(b-1)}_{(2b-3)}\phi, \\ \overline{B}_{(b-2)}\omega_{2b-4,2b-3} = \overline{H}^{(b-2)}_{(2b-5)}H^{(b-1)}_{(2b-3)}\overline{\phi} - H^{(b-2)}_{(2b-5)}\overline{H}^{(b-1)}_{(2b-3)}\phi, \end{cases} \tag{2-54}$$

onde

$$\begin{cases} B_{(b-2)} = H^{(b-2)}_{(2b-5)}\overline{H}^{(b-2)}_{(2b-4)} - \overline{H}^{(b-2)}_{(2b-5)}H^{(b-2)}_{(2b-4)} = -2i\sqrt{N_{(b-2)}}, \\ \sqrt{N_{(b-2)}} = (h^{(2b-5)}_{\underbrace{1\cdots1}_{b-2}}h^{(2b-4)}_{\underbrace{1\cdots1}_{b-3}2} - h^{(2b-4)}_{\underbrace{1\cdots1}_{b-2}}h^{(2b-5)}_{\underbrace{1\cdots1}_{b-3}2}). \end{cases} \tag{2-55}$$

Agora, da equação (2-26) para $\lambda_{b-2} = 2b-2$, encontramos

$$\begin{cases} B_{(b-2)}\omega_{2b-5,2b-2} = \overline{H}^{(b-2)}_{(2b-4)}H^{(b-1)}_{(2b-2)}\overline{\phi} - H^{(b-2)}_{(2b-4)}\overline{H}^{(b-1)}_{(2b-2)}\phi, \\ \overline{B}_{(b-2)}\omega_{2b-4,2b-2} = \overline{H}^{(b-2)}_{(2b-5)}H^{(b-1)}_{(2b-2)}\overline{\phi} - H^{(b-2)}_{(2b-5)}\overline{H}^{(b-1)}_{(2b-2)}\phi. \end{cases} \tag{2-56}$$

Observe que, de (2-54) e (2-56), obtemos

$$\begin{cases} \omega_{2b-5,2b-3} = \dfrac{\overline{H}^{(b-2)}_{(2b-4)} H^{(b-1)}_{(2b-3)}}{B_{(b-2)}}\overline{\phi} - \dfrac{H^{(b-2)}_{(2b-4)}\overline{H}^{(b-1)}_{(2b-3)}}{B_{(b-2)}}\phi, \\ \\ \omega_{2b-4,2b-3} = \dfrac{\overline{H}^{(b-2)}_{(2b-5)} H^{(b-1)}_{(2b-3)}}{\overline{B}_{(b-2)}}\overline{\phi} - \dfrac{H^{(b-2)}_{(2b-5)}\overline{H}^{(b-1)}_{(2b-3)}}{\overline{B}_{(b-2)}}\phi, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \omega_{2b-5,2b-2} = \dfrac{\overline{H}^{(b-2)}_{(2b-4)} H^{(b-1)}_{(2b-2)}}{B_{(b-2)}}\overline{\phi} - \dfrac{H^{(b-2)}_{(2b-4)}\overline{H}^{(b-1)}_{(2b-2)}}{B_{(b-2)}}\phi, \\ \\ \omega_{2b-4,2b-2} = \dfrac{\overline{H}^{(b-2)}_{(2b-5)} H^{(b-1)}_{(2b-2)}}{\overline{B}_{(b-2)}}\overline{\phi} - \dfrac{H^{(b-2)}_{(2b-5)}\overline{H}^{(b-1)}_{(2b-2)}}{\overline{B}_{(b-2)}}\phi. \end{cases}$$

Fazendo o produto exterior das equações acima, temos

$$\begin{aligned} \omega_{2b-3,2b-5}\wedge\omega_{2b-2,2b-5} &= \omega_{2b-5,2b-3}\wedge\omega_{2b-5,2b-2} \\ &= \frac{\left|H^{(b-2)}_{(2b-4)}\right|^2}{B^2_{(b-2)}}\left(H^{(b-1)}_{(2b-2)}\overline{H}^{(b-1)}_{(2b-3)} - H^{(b-1)}_{(2b-3)}\overline{H}^{(b-1)}_{(2b-2)}\right)\overline{\phi}\wedge\phi \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \omega_{2b-3,2b-4}\wedge\omega_{2b-2,2b-4} &= \omega_{2b-4,2b-3}\wedge\omega_{2b-4,2b-2} \\ &= \frac{\left|H^{(b-2)}_{(2b-5)}\right|^2}{\overline{B}^2_{(b-2)}}\left(H^{(b-1)}_{(2b-2)}\overline{H}^{(b-1)}_{(2b-3)} - H^{(b-1)}_{(2b-3)}\overline{H}^{(b-1)}_{(2b-2)}\right)\overline{\phi}\wedge\phi. \end{aligned}$$

Assim

$$\sum_{A\leq 2b-4}\omega_{2b-3,A}\wedge\omega_{2b-2,A} = \left(\frac{\left|H^{(b-2)}_{(2b-5)}\right|^2}{\overline{B}^2_{(b-2)}} + \frac{\left|H^{(b-2)}_{(2b-4)}\right|^2}{B^2_{(b-2)}}\right)\overline{B}_{b-1}\overline{\phi}\wedge\phi,$$

onde $B_{(b-1)} = \overline{H}^{(b-1)}_{(2b-2)}H^{(b-1)}_{(2b-3)} - \overline{H}^{(b-1)}_{(2b-3)}H^{(b-1)}_{(2b-2)} = -2i\sqrt{N_{(b-1)}}$. Pela equação (2-55) segue que

$$
\begin{aligned}
\sum_{A\leq 2b-4}\omega_{(2b-3)A}\wedge\omega_{A(2b-2)} &= -\sum_{A\leq 2b-4}\omega_{(2b-3)A}\wedge\omega_{(2b-2)A}\\
&= -\left(\frac{\left|H^{(b-2)}_{(2b-5)}\right|^2}{\overline{B}^2_{(b-2)}}+\frac{\left|H^{(b-2)}_{(2b-4)}\right|^2}{B^2_{(b-2)}}\right)\overline{B}_{b-1}\overline{\phi}\wedge\phi\\
&= 4\left(\frac{\left|H^{(b-2)}_{(2b-5)}\right|^2(\overline{B}^2_{(b-2)})+\left|H^{(b-2)}_{(2b-4)}\right|^2(B^2_{(b-2)})}{16(N_{(b-2)})^2}\right)\sqrt{N_{(b-1)}}\omega_1\wedge\omega_2\\
&= -\frac{K_{(b-2)}}{N_{(b-2)}}\sqrt{N_{(b-1)}}\omega_1\wedge\omega_2, \qquad b\geq 3,
\end{aligned}
$$

onde $H_1^{(1)}=1$, $H_2^{(1)}=i$ segue que $N_{(1)}=1$ e $K_{(1)}=2$. Sendo assim, obtemos

$$
\sum_\alpha \overline{H}^{(b-1)}_\alpha\Delta H^{(b-1)}_\alpha = (b-1)KK_{(b-1)}-2\frac{K_{(b-2)}}{N_{(b-2)}}N_{(b-1)}. \tag{2-57}
$$

Por outro lado, em virtude de (2-47) e (2-48), temos

$$
\begin{aligned}
dK_{(b-1)} &= d\left(\sum_\alpha H^{(b-1)}_\alpha\overline{H}^{(b-1)}_\alpha\right)\\
&= \sum_\alpha\left(\overline{H}^{(b-1)}_\alpha dH^{(b-1)}_\alpha+H^{(b-1)}_\alpha d\overline{H}^{(b-1)}_\alpha\right)\\
&= \sum_\alpha\left(\overline{H}^{(b-1)}_\alpha H^{(b-1)}_{\alpha,1}\overline{\phi}+H^{(b-1)}_\alpha\overline{H}^{(b-1)}_{\alpha,1}\phi\right).
\end{aligned}
$$

Daí, temos que

$$
d^cK_{(b-1)} = i\sum_\alpha\left(\overline{H}^{(b-1)}_\alpha H^{(b-1)}_{\alpha,1}\overline{\phi}-H^{(b-1)}_\alpha\overline{H}^{(b-1)}_{\alpha,1}\phi\right).
$$

Derivando a expressão acima, obtemos

$$
\begin{aligned}
dd^cK_{(b-1)} &= id\sum_\alpha\left(\overline{H}^{(b-1)}_\alpha H^{(b-1)}_{\alpha,1}\overline{\phi}-H^{(b-1)}_\alpha\overline{H}^{(b-1)}_{\alpha,1}\phi\right)\\
&= i\sum_\alpha\left(\overline{H}^{(b-1)}_\alpha\Delta H^{(b-1)}_\alpha+2H^{(b-1)}_{\alpha,1}\overline{H}^{(b-1)}_{\alpha,1}\right)\phi\wedge\overline{\phi}.
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
dd^cK_{(b-1)} = \frac{i}{2}\Delta K\phi\wedge\overline{\phi}.
$$

Logo, pelo Lema 2.1 e (2-57), obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta K &= \sum_{\alpha}\left(\overline{H}_{\alpha}^{(b-1)}\Delta H_{\alpha}^{(b-1)} + 2H_{\alpha,1}^{(b-1)}\overline{H}_{\alpha,1}^{(b-1)}\right)\phi\wedge\overline{\phi} \\
&= (b-1)KK_{(b-1)} - 2\frac{K_{(b-2)}}{N_{(b-2)}}N_{(b-1)} + 2\sum_{\alpha}H_{\alpha,1}^{(b-1)}\overline{H}_{\alpha,1}^{(b-1)} \\
&= (b-1)KK_{(b-1)} - 2\frac{K_{(b-2)}}{N_{(b-2)}}N_{(b-1)} + 2K_{(b)} + 2\sum_{\lambda_{b-2}}H_{\lambda_{b-2},1}^{(b-1)}\overline{H}_{\lambda_{b-2},1}^{(b-1)}
\end{aligned}
$$

Portanto o Teorema está provado. □

CAPÍTULO 3

Superfícies Mínimas com Curvatura Constante

O objetivo deste capítulo é classificar as superfícies mínimas com curvatura Gaussiana constante K, nas formas espaciais 4-dimensionais sem alguma hipótese global, ou seja, classificar as imersões isométricas mínimas de $M^2(K)$ em $M^4(c)$, onde c é a curvatura seccional constante e denotemos por $M^2(K)$ uma superfície com curvatura Gaussiana constant K. Resultados parciais são também obtidos para a classificação de imersões mínimas de $M^2(K)$ em $M^5(c)$.

O principal resultado deste capítulo é o seguinte:

Teorema 3.1 *Seja $x : M^2(K) \to M^4(c)$ uma imersão isométrica mínima de $M^2(K)$ em $M^4(c)$. Se $K = c$, então x é totalmente geodésica. Caso contrário, ocorre somente os seguintes casos*
(a) $K = 0$, $c > 0$ e x é localmente um Toro de Clifford em uma subvariedade totalmente geodésica 3-dimensional $S^3(c)$ de $S^4(c)$, ou
(b) $K = c/3$, $c > 0$ e x é localmente uma superfície de Veronese em $S^4(c)$.

Como um corolário do Teorema acima, segue que não existe imersão isométrica mínima de superfície com curvatura Gaussiana negativa em $S^4(c)$ mesmo que localmente. Isto nos dá uma resposta parcial para o problema 101 proposto por S. T. Yau em [20] que é o seguinte: "Existe uma superfície mínima fechada em S^N com curvatura negativa?".

Nosso objetivo agora é provar o Teorema 3.1. A prova será feita em várias etapas. Inicialmente provaremos o seguinte lema.

Lema 3.2 *Considere $x : M^2(K) \to M^5(c)$ uma imersão isométrica mínima. Então, se $K = c$, x é totalmente geodésica.*

Prova. Sejam $x : M^2(K) \to M^5(c)$ uma imersão isométrica mínima de $M^2(K)$ em $M^5(c)$ e $e_1, \dots, e_5$ campos locais de um referencial ortonormal em $M^5(c)$ tal que, restrito a $M^2(K)$, e_1 e e_2 são tangentes a $M^2(K)$. Seja ω_i, $1 \le i, j \le 2$, e ω_α, $3 \le \alpha, \beta, \dots \le 5$, os campos do referencial dual de e_A, $1 \leq A, B, \ldots \leq 5$. As equações de estrutura de $M^5(c)$ são dadas por

$$
\begin{aligned}
d\omega_A &= \sum_B \omega_B \wedge \omega_{BA}, \qquad \omega_{AB} = -\omega_{BA} \\
d\omega_{AB} &= \sum_C \omega_{AC} \wedge \omega_{CB} - c\omega_A \wedge \omega_B.
\end{aligned}
$$

Restringindo esses referenciais a $M^2(K)$, temos

$$d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2, \qquad \omega_\alpha = 0, \qquad 3 \leq \alpha \leq 5$$

Derivando exteriormente ω_α obtemos

$$\omega_{i\alpha} = \sum_\alpha h^\alpha_{ij}\omega_j \qquad \text{e} \qquad h^\alpha_{ij} = h^\alpha_{ji},$$

onde os h^α_{ij}'s são as componentes da 2ª forma fundamental de x. Como a imersão x é mínima, temos $h^\alpha_{11} + h^\alpha_{22} = 0$, $3 \leq \alpha \leq 5$. Desta formulação, a equação de Gauss (1-39) é dada por

$$\sum_\alpha ((h^\alpha_{11})^2 + (h^\alpha_{12})^2) = c - K \geq 0. \tag{3-1}$$

Então, $K = c$ ocorre somente quando a imersão é totalmente geodésica. □

Observe que da equação de Gauss (3-1) temos que $c - K \geq 0$, como o caso em que $c = K$ foi provado no Lema acima, vemos que o caso $c < K$ não pode ocorrer. A partir de agora assumiremos $c > K$. Utilizaremos ainda a teoria desenvolvida no capítulo anterior, fazendo $b = 2$ nas expressões de $K_{(b)}$ e $N_{(b)}$. Então temos,

$$K_{(2)} = \sum_\alpha ((h^\alpha_{11})^2 + (h^\alpha_{12})^2), \tag{3-2}$$

$$N_{(2)} = \left| \sum_\alpha h^\alpha_{11} e_\alpha \wedge h^\alpha_{12} e_\alpha \right|^2. \tag{3-3}$$

A função não negativa $N_{(2)}$ em $M^2(K)$ é o quadrado da área do paralelogramo gerado por $h^\alpha_{11}e_\alpha$ e $h^\alpha_{12}e_\alpha$.

B. Y. Chen em [6], provou o seguinte resultado.

Proposição 3.3 (B. Y. Chen) *Se M é uma superfície mínima com curvatura Gaussiana constante no espaço forma 3-dimensional $M^3(c)$, então ou M é totalmente geodésica ou $c > 0$ e M é um aberto no Toro de Clifford.*

Utilizando a Proposição de Chen 3.3 e o Lema de $\bar{\text{O}}$tsuki 2.2 provaremos no próximo Lema que se $N_{(2)} = 0$, então $c > 0$ e $x(M^2(K))$ é um Toro de Clifford, ou seja, $K = 0$.

Lema 3.4 *Seja $x : M^2(K) \longrightarrow M^5(c)$ uma imersão isométrica mínima com $c > K$. Então, se $N_{(2)} = 0$ temos que $c > 0$ e $x(M^2(K))$ é um aberto no Toro de Clifford.*

Prova. Supondo que $N_{(2)} \equiv 0$, pelo Lema de $\bar{\text{O}}$tsuki, existe uma subvariedade totalmente geodésica 3-dimensional $M^3(c)$ de $M^5(c)$ tal que $x(M^2(K))$ está contido em $M^3(c)$ como uma superfície mínima, então pela Proposição acima, temos que $c > 0$ e $x(M^2(K))$ é um aberto no Toro de Clifford, isto é, a curvatura Gaussiana $K = 0$. $\square$

No caso em que $N_{(2)}$ não é identicamente nulo, o conjunto $\Omega_2 = \{p \in M^2(K) : N_{(2)} \neq 0\}$ é um aberto em $M^2(K)$. Desde que $\sum h_{11}^{\alpha} e_{\alpha}$ e $\sum h_{12}^{\alpha} e_{\alpha}$ são linearmente independente para cada ponto $x \in \Omega_2$, o segundo espaço osculador $T_x^{(2)}$ é gerado por estes vetores e e_i, $1 \leq i \leq 2$. Seja e_A campos do referencial ortonormal local tal que e_i, $1 \leq i \leq 2$, e e_{α}, $3 \leq \alpha \leq 4$, gera $T_x^{(2)}$, $x \in \Omega_2$. Então, em Ω_2, temos $\omega_{i5} = 0$.

Derivando exteriormente $\omega_{i5} = 0$ e pela equação de estrutura de $M^5(c)$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= d\omega_{i5} = \sum_{\beta=3}^{4} \omega_{i\beta} \wedge \omega_{\beta 5} \\ &= \omega_{i3} \wedge \omega_{35} + \omega_{i4} \wedge \omega_{45}. \end{aligned}$$

Assim aplicando o Lema de Cartan, definimos as quantidades h_{ijk}^5's das equações (2-16) por

$$\sum h_{ij}^{\alpha} \omega_{\alpha 5} = \sum h_{ijk}^5 \omega_k,$$

onde h_{ijk}^5's são simétricos nos índices i, j, k e são as componentes da terceira forma fundamental de $x|_{\Omega_2}$. Pela minimalidade de x e da equação (2-19) temos $\sum_k h_{iik}^5 = 0$.

Definimos a derivada covariante por

$$\begin{aligned} Dh_{ij}^{\alpha} &= \sum h_{ij,k}^{\alpha} \omega_k \\ &= dh_{ij}^{\alpha} + \sum_s h_{sj}^{\alpha} \omega_{si} + \sum_s h_{is}^{\alpha} \omega_{sj} + \sum_{\beta} h_{ij}^{\alpha} \omega_{\beta\alpha} \end{aligned} \tag{3-4}$$

Note que $h_{ijk}^5 = h_{ij,k}^5$. De fato, pela derivação covariante, com o domínio de i, j, k é $1 \leq i, j, k \leq 2$, temos

$$
\begin{aligned}
Dh^5_{ij} &= \sum h^5_{ij,k}\omega_k \\
&= dh^5_{ij} + \sum_s h^5_{sj}\omega_{si} + \sum_s h^5_{is}\omega_{sj} + \sum_\beta h^\beta_{ij}\omega_{\beta 5} \\
&= \sum_\beta h^\beta_{ij}\omega_{\beta 5} \\
&= \sum h^5_{ijk}\omega_k.
\end{aligned}
$$

Logo, $h^5_{ijk} = h^5_{ij,k}$.

Definimos ainda

$$K_{(3)} = (h^5_{111})^2 + (h^5_{112})^2,$$

que é um invariante em $x|_{\Omega_2}$ sob uma decomposição fixa do espaço normal, isto é, e_A é sempre considerado como um vetor normal ortogonal a $T^{(2)}_x$. Consideremos $f_{(2)} = K^2_{(2)} - 4N_{(2)}$ e $H^{(2)}_\alpha = h^\alpha_{11} + ih^\alpha_{12}$. Então, $f_{(2)} = \left|\sum_\alpha \left(H^{(2)}_\alpha\right)^2\right|^2$ e a equação de Codazzi implica

$$\left(d\sum\left(H^{(2)}_\alpha\right)^2 + 4i\left(\sum\left(H^{(2)}_\alpha\right)^2\right)\omega_{12}\right)\wedge(\omega_1 - i\omega_2) = 0. \tag{3-5}$$

Portanto, pelos Lema 2.3 e Teorema 2.4, temos que

$$\Delta\log f_{(2)} = 8K, \tag{3-6}$$

quando $f_{(2)} \neq 0$, e obtemos

$$\Delta f_{(2)} = 8Kf_{(2)} + \frac{|Df_{(2)}|^2}{f_{(2)}}. \tag{3-7}$$

Observe que, pela definição de $f_{(2)}$, derivando-a, obtemos

$$Df_{(2)} = 2\left\{\sum_\alpha\left(H^{(2)}_\alpha\right)^2\sum_\alpha\overline{H}^{(2)}_\alpha D\left(\sum_\alpha\overline{H}^{(2)}_\alpha\right) + \sum_\alpha\left(\overline{H}^{(2)}_\alpha\right)^2\sum_\alpha H^{(2)}_\alpha D\left(\sum_\alpha H^{(2)}_\alpha\right)\right\}.$$

Daí, como $\left|\sum_\alpha\left(H^{(2)}_\alpha\right)^2\right|^2 = \left|\sum_\alpha\left(\overline{H}^{(2)}_\alpha\right)^2\right|^2$, $\left|\sum_\alpha H^{(2)}_\alpha\right|^2 = \left|\sum_\alpha\overline{H}^{(2)}_\alpha\right|^2$ e

$$
\begin{aligned}
\left|D\sum_\alpha H_\alpha^{(2)}\right|^2 &= \left|D\sum_\alpha \left(\overline{H}_\alpha^{(2)}\right)\right|^2 \\
&= \left|\sum_\alpha \left(H_{\alpha,1}^{(2)}\omega_1 + H_{\alpha,2}^{(2)}\omega_2\right)\right|^2 \\
&= \left|\sum_\alpha H_{\alpha,1}^{(2)}\right|^2 + \left|\sum_\alpha H_{\alpha,2}^{(2)}\right|^2 \\
&= \left|\sum_\alpha H_{\alpha,1}^{(2)}\right|^2 + \left|-i\sum_\alpha H_{\alpha,1}^{(2)}\right|^2 = 2\left|\sum_\alpha H_{\alpha,1}^{(2)}\right|^2.
\end{aligned}
$$

Portanto, temos

$$
\begin{aligned}
|Df_{(2)}|^2 &= 4\left\{2\left|\sum_\alpha \left(H_\alpha^{(2)}\right)^2\right|^2 \cdot \left|\sum_\alpha H_\alpha^{(2)}\right|^2 \cdot 2\left|\sum_\alpha H_{\alpha,1}^{(2)}\right|^2\right\} \\
&= 16\left|\sum_\alpha \left(H_\alpha^{(2)}\right)^2\right|^2 \cdot \left|\sum_\alpha H_\alpha^{(2)}\right|^2 \cdot \left|\sum_\alpha H_{\alpha,1}^{(2)}\right|^2 \\
&= 4\cdot 4\left|\sum_\alpha \left(H_\alpha^{(2)}\right)^2\right|^2 \cdot \left|\sum_\alpha H_\alpha^{(2)} H_{\alpha,1}^{(2)}\right|^2 \\
&= 4A\overline{A}f_{(2)},
\end{aligned}
$$

onde $\overline{A} = \sum_\alpha H_\alpha^{(2)} H_{\alpha,1}^{(2)}$, isto é,

$$
4A\overline{A} = \frac{|Df_{(2)}|^2}{f_{(2)}}.
$$

Em geral, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4}\Delta K_{(2)} &= -\frac{N_{(2)}}{N_{(1)}}K_{(1)} + KK_{(2)} + K_{(3)} + \sum_{3\le\alpha\le 4}((h_{11,1}^\alpha)^2 + (h_{11,2}^\alpha)^2), \\
&= -2N_{(2)} + KK_{(2)} + K_{(3)} + \sum_{3\le\alpha\le 4}((h_{11,1}^\alpha)^2 + (h_{11,2}^\alpha)^2) \qquad (3\text{-}8)
\end{aligned}
$$

onde $N_{(1)} = 1$ e $K_{(1)} = 2$. Pelas equações (3-1), (3-2) e (3-8), obtemos

$$
|Dh_{11}^3|^2 + |Dh_{21}^4|^2 = 2N_{(2)} - K(c-K) - K_{(3)}. \qquad (3\text{-}9)
$$

Para provar o Teorema 3.1, assumimos que $K_{(3)} \equiv 0$. Então, pelo Lema de Ōtsuki, $x(M^2(K))$ está contida em uma subvariedade totalmente geodésica $M^4(c)$ de $M^5(c)$.

Lema 3.5 *Com a notação fixada anteriormente temos que a função* $f_{(2)}$ *satisfaz a seguinte equação*

$$|Df_{(2)}|^2 = 8(c-K)^{-1}f_{(2)}^3 - 16(c-2K)f_{(2)}^2 + 8(c-K)^2(c-3K)f_{(2)}. \quad (3\text{-}10)$$

Prova. De fato, se $f_{(2)} \equiv 0$, temos que (3-10) é trivial. Assumimos que $f_{(2)} \neq 0$, então existe um referencial ortonormal e_A tal que h_{ij}^{α}'s satisfazem $h_{12}^3 = h_{11}^4 = 0$ e $h_{11}^3 > h_{12}^4 > 0$ em um aberto Ω_2, ver em Wong [19]. Assim, com este referencial temos

$$\begin{aligned} K_{(2)} &= (h_{11}^3)^2 + (h_{12}^4)^2 = c - K = \text{constante} > 0, \\ N_{(2)} &= (h_{11}^3)^2(h_{12}^4)^2. \end{aligned} \quad (3\text{-}11)$$

Derivando (3-11), obtemos

$$\begin{aligned} DN_{(2)} &= D((h_{11}^3)^2(h_{12}^4)^2) \\ &= (h_{11}^3)^2 D(h_{12}^4)^2 + (h_{12}^4)^2 D(h_{11}^3)^2 \\ &= (h_{11}^3)^2 D((c-K) - (h_{11}^3)^2) + (h_{12}^4)^2 D(h_{11}^3)^2 \\ &= \{-(h_{11}^3)^2 + (h_{12}^4)^2\} D((h_{11}^3)^2) \\ &= 2(h_{11}^3)\{(h_{12}^4)^2 - (h_{11}^3)^2\} D(h_{11}^3) \end{aligned}$$

Observe que derivando (3-11), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= D((h_{11}^3)^2 + (h_{12}^4)^2) \\ &= 2h_{11}^3 Dh_{11}^3 + 2h_{12}^4 h_{12}^4 \end{aligned}$$

o que implica

$$|2h_{11}^3 Dh_{11}^3|^2 = |-2h_{12}^4 h_{12}^4|^2,$$

isto é,

$$|h_{12}^4|^2 = \frac{(h_{11}^3)^2}{(h_{12}^4)^2}|h_{11}^3|^2.$$

Substituindo em (3-9), obtemos

$$|Dh_{11}^3|^2 = \frac{(h_{12}^4)^2}{(h_{11}^3)^2 + (h_{12}^4)^2}(2N_{(2)} - K(c-K)).$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned}|DN_{(2)}|^2 &= 4(h^3_{11})^2((h^4_{12})^2-(h^3_{11})^2)^2|D(h^3_{11})|^2\\ &= 4\frac{(h^3_{11})^2 h^4_{12})^2}{(h^3_{11})^2+(h^4_{12})^2}\{((h^4_{12})^2+(h^3_{11})^2)^2-4(h^3_{11})^2(h^4_{12})^2\}(2N_{(2)}-K(c-K))\\ &= 4\frac{N_{(2)}}{c-K}(K^2_{(2)}-4N_{(2)})(2N_{(2)}-K(c-K)).\end{aligned}$$

Como $K_{(2)}$ é constante e pela definição de $f_{(2)}$, obtemos

$$\begin{aligned}|Df_{(2)}|^2 &= 16|DN_{(2)}|^2\\ &= 16\frac{4N_{(2)}}{c-K}(K^2_{(2)}-4N_{(2)})(2N_{(2)}-K(c-K))\\ &= 16\frac{4}{c-K}\cdot\frac{(c-K)^2-f_{(2)}}{4}\left\{2\frac{(c-K)^2-f_{(2)}}{4}-K(c-K)\right\}f_{(2)}\\ &= \frac{8}{c-K}f^3_{(2)}-16(c-2K)f^2_{(2)}+8(c-K)^2(c-3K)f_{(2)},\end{aligned}$$

que é a equação (3-10). □

Observe que analisamos o caso $N_{(2)}=0$ de uma imersão isométrica mínima. Passaremos a estudar o caso $N_{(2)}\neq 0$.

Lema 3.6 *Seja $x: M^2(K)\to M^4(c)$ uma imersão isométrica mínima com $N_{(2)}\neq 0$ em $M^2(K)$. Então, temos $K=c/3$ e $c>0$. Localmente x é uma superfície de Veronese em $S^4(c)$.*

Prova. Se $f_{(2)}\equiv 0$ em $M^2(K)$, então $\sum h^\alpha_{11}e_\alpha$ e $\sum h^\alpha_{12}e_\alpha$ são ortogonais e têm o mesmo comprimento não nulo. Normalizando estes vetores, adotamos estes como uma parte da base de $T^{(2)}_x$, $x\in M^2(K)$. Por estes novos campos do referencial, temos

$$h^3_{11}=h^4_{12}>0 \qquad \text{e} \qquad h^3_{12}=h^4_{11}=0.$$

A equação de Gauss implica

$$\sum_\alpha((h^\alpha_{11})^2+(h^\alpha_{12})^2)=(h^3_{11})^2+(h^4_{12})^2=\frac{c-K}{2}=\text{constante}>0.$$

Observe que $Dh^3_{11}=dh^3_{11}$ e que $2\omega_{12}=\omega_{34}$. De fato,

$$\begin{aligned}0 &= Dh^3_{12}=dh^3_{12}+\sum_{s=1}^2 h^3_{s2}\omega_{s1}+\sum_{s=1}^2 h^3_{1s}\omega_{s2}+\sum_\beta^4 h^\beta_{12}\omega_{\beta 3}\\ &= 2h^3_{11}\omega_{12}+h^4_{12}\omega_{43}=h^3_{11}(2\omega_{12}-\omega_{34}).\end{aligned}$$

Derivando exteriormente a equação $2\omega_{12} = \omega_{34}$, temos que

$$\begin{aligned}
2d\omega_{12} &= d\omega_{34} \\
&= \sum_{A=1}^{4} \omega_{3A} \wedge \omega_{A4} + \overline{\Omega}_{34} \\
&= \omega_{31} \wedge \omega_{14} + \omega_{32} \wedge \omega 24 \\
&= -(h_{11}^3 \omega_1 + h_{12}^3 \omega_2) \wedge (h_{11}^4 \omega_1 + h_{12}^4 \omega_2) \\
&= -2h_{11}^3 h_{12}^4 \omega_1 \wedge \omega_2.
\end{aligned}$$

Por outro lado, $d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2$. Portanto, temos que $K = h_{11}^3 h_{12}^4$. Como $h_{11}^3 = h_{12}^4 > 0$ implica que $K = (h_{11}^3)^2$ é positivo. Pela equação (3-9), temos

$$\begin{aligned}
0 &= |Dh_{11}^3|^2 + |Dh_{21}^4|^2 \\
&= 2N_{(2)} - K(c-K) \\
&= 2K^2 - K(c-K) \\
&= K(3K-c).
\end{aligned}$$

Como $K > 0$, então, temos que $K = c/3$ e $c > 0$. Observe que em [19], temos um teorema que diz: Em S^4 de curvatura escalar $c > 0$, existe somente um tipo de R-superfície de curvatura Gaussiana constante K. Para isso, $K = c/3$, e o círculo da curvatura (G) é de raio constante $(K)^{1/2}$ para toda superfície. Em $\mathbb{R}^4$, uma R-superfície tem curvatura negativa, que não pode ser constante. Assim, sabemos que esta tal imersão representa localmente uma superfície de Veronese.

Agora mostraremos que o caso $f_{(2)} \neq 0$ não pode ocorrer. Por (3-7) e (3-10), obtemos

$$\Delta f_{(2)} = 8(c-K)^{-1} f_{(2)}^2 - 8(2c-5K) f_{(2)} + 8(c-K)^2(c-3K). \tag{3-12}$$

Se tomarmos $f_{(2)} = \theta$, temos que as equações (3-10) e (3-12) são expressas da seguinte forma

$$\begin{aligned}
|D\theta|^2 &= 8(c-K)^{-1}\theta^3 - 16(c-2K)\theta^2 + 8(c-K)^2(c-3K)\theta, \\
\Delta\theta &= 8(c-K)^{-1}\theta^2 - 8(2c-5K)\theta + 8(c-K)^2(c-3K),
\end{aligned}$$

onde $|D\theta|^2 = f(\theta)$ e $\Delta\theta = \phi(\theta)$ são polinômios de θ com coeficientes constantes. Isto então, prova que θ tem que ser constante. Se θ não for constante, então existe coordenadas locais (θ,τ) em $M^2(K)$ tal que a primeira forma fundamental é

$$ds^2 = \frac{1}{f(\theta)}\left(d\theta^2 + exp\left(2\int \phi f^{-1} d\theta\right) d\tau^2\right),$$

onde esta equação denota diferenciação com respeito a θ (ver [11], p. 164). E a curvatura Gaussiana K satisfaz

$$fK + (\phi - f')\left(\phi - \frac{1}{2}f'\right) + f\left(\phi' - \frac{1}{2}f''\right) = 0. \tag{3-13}$$

Observe que o primeiro membro da equação (3-13) é um polinômio em θ dado por

$$\begin{aligned} 0 &= fK + (\phi - f')\left(\phi - \frac{1}{2}f'\right) + f\left(\phi' - \frac{1}{2}f''\right) \\ &= 8(c-K)^{-1}(8c-27K)\theta^3 - 16\{K(c-6K) + 8(c-K)(c-3K)\}\theta^2 + \\ &+ 8(c-K)^2(c-3K)(8c-3K), \end{aligned}$$

pois, temos

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= 24(c-K)^{-1}\theta^2 - 32(c-2K)\theta + 8(c-K)^2(c-3K), \\ f''(\theta) &= 48(c-K)^{-1}\theta_3 2(c-2K), \\ \phi'(\theta) &= 16(c-K)^{-1}\theta - 8(2c-5K). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \phi - f' &= -16(c-K)^{-1}\theta^2 + 8(2c-3K)\theta, \\ \phi - \frac{1}{2}f' &= -4(c-K)^{-1}\theta^2 + 8K\theta + 4(c-K)^2(c-3K), \\ \phi' - \frac{1}{2}f'' &= -8(c-K)^{-1}\theta + 8K. \end{aligned}$$

Segue que,

$$\begin{aligned} fK &= 8K(c-K)^{-1}\theta^3 - 16K(c-2K)\theta^2 + 8K(c-K)^2(c-3K)\theta, \\ (\phi - f')\left(\phi - \frac{1}{2}f'\right) &= 64(c-K)^{-2}\theta^4 - 32(c-K)^{-1}(2c+K)\theta^3 + \\ &+ 64\{2K(2c-3K) - (c-K)(c-3K)\}\theta^2 + 32(c-K)^2(c-3K)(2c-3K)\theta, \\ f\left(\phi' - \frac{1}{2}f''\right) &= -64(c-K)^{-2}\theta^4 + 64(c-K)^{-1}(2c-3K)\theta^3 + \\ &+ 64\{-2K(c-2K) - (c-K)(c-3K)\}\theta^2 + 64K(c-K)^2(c-3K)\theta. \end{aligned}$$

Desde que (3-13) seja um polinômio não trivial com coeficientes constantes, então θ deve ser constante. Portanto, $f_{(2)}$ é uma constante não nula, o que implica que $K = 0$ por (3-6), pois como $f_{(2)} = \text{constante} \neq 0$ e $\Delta \log f_{(2)} = 0$. E pela definição de $f_{(2)}$, temos que $f_{(2)} = c^2 - 4N_{(2)}$. Por outro lado, por (3-12), temos

$$
\begin{aligned}
0 &= \Delta f_{(2)} \\
&= 8(c-K)^{-1} f_{(2)}^2 - 8(2c-5K) f_{(2)} + 8(c-K)^2(c-3K) \\
&= 8c^{-1} f_{(2)}^2 - 16c f_{(2)} + 8c^3 \\
&= 8\left\{\frac{1}{c} f_{(2)}^2 - 2c f_{(2)} + c^3\right\} \\
&= 8(f_{(2)} - c^2)^2,
\end{aligned}
$$

o que implica que $f_{(2)} = c^2$. Segue que $N_{(2)} = 0$, que é absurdo, pois assumimos que $N_{(2)} \neq 0$. $\square$

Prova do Teorema 3.1.

Pela Proposição 3.3 se M é uma superfície mínima com curvatura Gaussiana constante no espaço forma 3-dimensional, então ou M é totalmente geodésica ou $c > 0$ e M é um aberto do Toro de Clifford. E pelo Lema 3.2, temos que se $K = c$, então x é totalmente geodésica. Já pelo Lema 3.4, temos que se $c > 0$ e $K > c$, então $x(M^2(0))$ está contida numa subvariedade totalmente geodésica 3-dimensional M^3 como parte do Toro de Clifford.

Quando $N_{(2)} \neq 0$ e $K_{(3)} \equiv 0$, aplicando o Lema 3.6 em Ω_2, desde que $f_{(2)} \equiv 0$ em Ω_2, $N_{(2)}$ é uma constante positiva em Ω_2. Desde que Ω_2 seja aberto e fechado, temos $\Omega_2 = M^2(K)$, pois $M^2(K)$ é conexo por definição. Portanto, temos que $x(M^2(K))$ é uma superfície de Veronese em $S^4(c)$.

Concluindo com a prova do Teorema 3.1, temos o seguinte corolário.

Corolário 3.7 *Não existe uma imersão isométrica mínima com curvatura Gaussiana constante negativa numa esfera unitária $S^4(1)$ mesmo que localmente.*

Referências Bibliográficas

[1] BARBOSA, J. L. M. **On minimal immersions of S^2 into S^{2m}**. Trans. Amer. Math. Soc., **210**, 75-106, 1975.

[2] BORUVKA, O. **Sur une classe de surfaces minima plongees dans un espace a cinq dimensions a courbure constante**. Publ. de la Fac. des Sci. de L'universite Massaryk, 3-8, 1929.

[3] BORUVKA, O. **Recherches sur la courbure des surfaces dan des espaces a n-dimensions a courbure constante**. Publ. de la Fac. des Sci. de L'universite Massaryk, 2-22, 1932.

[4] BORUVKA, O. **Sur les surfaces representees par les functions spheriques de premiere espece**. J. Math. Pure et Appl., 337-383, 1933.

[5] CALABI, E. **Minimal immersions of surfaces in Euclidean spheres**. J. Differential Geom., **1**, 111-125, 1967.

[6] CHEN, B. Y. **Minimal surfaces with constant Gauss curvature**. Proc. Amer. Math. Soc., **34**, 504-508, 1972.

[7] DOCARMO, M.; WALLACH, N. **Minimal immersions of spheres into spheres**. Ann. of Math. (2), **95**, 43-62, 1971.

[8] DOCARMO, M. P. **O Método do Referencial Móvel**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), R.J., 1976.

[9] DOCARMO, M. P. **Formas Diferenciais e Aplicações**. Monografias de Matemática, **37**, Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA),R.J., 1983.

[10] DOCARMO, M. P. **Geometria Riemanniana**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), R.J., 2008.

[11] EISENHART, L. P. **An introduction to differential geometry**. Princeton Univ. Press, Princeton., N.J., 1947.

[12] KENMOTSU, K. **On Compact Minimal Surfaces with non-negative Gaussian Curvature in a Space of Constant Curvature I**. Tohoku Math. J., **25**, 469-479, 1973.

[13] KENMOTSU, K. **On Compact Minimal Surfaces with non-negative Gaussian Curvature in a Space of Constant Curvature II**. Tohoku Math. J., **27**, 291-301, 1975.

[14] KENMOTSU, K. **On minimal immersions of R^2 into S^N**. J. Math. Soc. Japan, **28**, 182-191, 1976.

[15] KENMOTSU, K. **Minimal Surfaces with Constant Curvature in 4-dimensional Space Forms**. American Mathematical Society, vol. 89, **1**, 133-138, 1983.

[16] NARASHIMHAN, R. **Several complex variables**. The University of Chicago Press, Chicago and London, 1971.

[17] ŌTSUKI, T. **Minimal submanifolds with m-index 2 and generalized Veronese surfaces**. J. Math. Soc. Japan, **24**, 89-122., 1972.

[18] WALLACH, N. **Extension of locally defined minimal immersions of spheres into spheres**. Arch. Math., **21**, 210-213, 1970.

[19] WONG, Y. C. **Contributions to the theory of surfaces in a 4-space of constant curvature**. Trans. Amer. Math. Soc., **59**, 467-507, 1946.

[20] YAU, S. T. **Seminar on differential geometry**. Ann. of Math. Studies, **103**, Princenton Univ. Press, N.J., 1982.