

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Classificação das Superfícies de Revolução Tipo Delaunay Completas

por

Luiz Gustavo Alves de Souza

Orientador: Prof. Dr. Romildo da Silva Pina

Dissertação de Mestrado em Matemática

Goiânia, Goiás

2008



Termo de Ciência e de Autorização para Disponibilizar as Teses e Dissertações Eletrônicas (TEDE) na Biblioteca Digital da UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás-UFG a disponibilizar gratuitamente através da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações - BDTD/UFG, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Dissertação** **Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor(a):	Luiz Gustavo Alves de Souza		
CPF:		E-mail:	lgmatufg@hotmail.com
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? <input checked="" type="checkbox"/> Sim <input type="checkbox"/> Não			
Vínculo Empregatício do autor	Não possui		
Agência de fomento:	Coord. de Aperf. de Pessoal de Nível Superior	Sigla:	CAPES
País:	Brasil	UF:	GO
CNPJ:	00889834/0001-08		
Título:	Classificação das Superfícies de Revolução Tipo Delaunay Completas		
Palavras-chave:	Superfícies de Revolução Tipo Delaunay		
Título em outra língua:	Classification of Surfaces of Revolution Type Complete Delaunay		
Palavras-chave em outra língua:	Surfaces of Revolution Type Delaunay		
Área de concentração:	Geometria e Topologia		
Data defesa:	(30/05/2008)		
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado em Matemática		
Orientador(a):	Romildo da Silva Pina		
CPF:		E-mail:	romildo@mat.ufg.br
Co-orientador(a):	-----		
CPF:	-----	E-mail:	-----

3. Informações de acesso ao documento:

Liberação para disponibilização?¹ total parcial

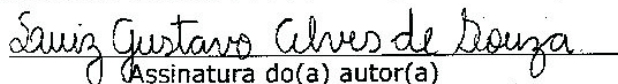
Em caso de disponibilização parcial, assinale as permissões:

Capítulos. Especifique: _____

Outras restrições: _____

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O Sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.


Assinatura do(a) autor(a)

Data: 11/06/ 2008

¹ Em caso de restrição, esta poderá ser mantida por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Todo resumo e metadados ficarão sempre disponibilizados.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Classificação das Superfícies de Revolução Tipo Delaunay Completas

por

Luiz Gustavo Alves de Souza

Área de Concentração : **Geometria e Topologia**

Orientador: **Prof. Dr. Romildo da Silva Pina**

Dissertação submetida à Banca Examinadora designada pelo Conselho Diretor do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Goiânia, Goiás

2008

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(GPT/BC/UFG)

Souza, Luiz Gustavo Alves de.

S729c Classificação das superfícies de revolução tipo Delaunay completas [manuscrito] / Luiz Gustavo Alves de Souza. – 2008. 67 f. : il., figs.

Orientador: Prof. Dr. Romildo da Silva Pina.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, 2008.

Bibliografia: f. 66-67.

1. Superfícies de curvatura média constante 2. Delaunay, Superfície de – Classificação 3. Weingarten, Superfícies especiais de 4. Função elíptica – Classificação 5. Geometria diferencial I. Pina, Romildo da Silva I. Universidade Federal de Goiás.

Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDU: 514.752.6

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
COORDENAÇÃO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
MATEMÁTICA-MESTRADO

**“CLASSIFICAÇÃO DAS SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO TIPO
DELAUNAY COMPLETAS”**

por

Luiz Gustavo Alves de Souza

Dissertação submetida à Banca Examinadora designada pelo Conselho Diretor do Instituto de Matemática e Estatística, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Goiânia, 30 de maio de 2008.

Banca Examinadora:


Prof. Dr. Romildo da Silva Pina-IME/UFG
(Orientador)


Prof. Dr. Carlos Rodrigues da Silva-UFMT


Prof. Dr. Marcelo Almeida de Souza-IME/UFG

À minha noiva Daniella
Aos meus pais Jorge e Otenevira

Agradecimentos

Ao criador por ter tido a coragem de entregar seu único filho por amor à espécie humana e por Ele ter aceitado esta missão tão dura e árdua. Sempre devemos louvar e agradecer a Deus e compreender que não somos deste mundo.

Ao Prof. Dr. Romildo da Silva Pina, pela amizade, paciência e dedicação que foram indispensáveis para a concretização desta dissertação.

Aos meus pais, Jorge Luiz de Souza e Otenevira Alves de Souza que sempre acreditaram em meu potencial.

À minha noiva Daniella Artiaga que tanto me ensina por sua maneira de ser.

Às minhas irmãs Narliane Alves de Souza e Jacimara Alves de Souza, que tanto aprendi e aprendo com suas personalidades.

Aos fundadores das Casas de Estudantes Universitários que tanto lutaram pela causa estudante.

Ao professor José Hilário da Cruz, pela atenção e paciência durante a construção deste trabalho.

Aos colegas João Lopes Cardoso Filho, Vitor Braga, Gleisson Santana, Alexsander Sampaio Tibério e principalmente a Márcio Lemes que sempre auxiliaram nos momentos difíceis.

Enfim, a todos, que contribuíram de maneira direta ou indireta para a realização deste trabalho.

Sumário

Resumo	2
Abstract	3
Introdução	4
1 Preliminares	6
1.1 Superfícies Regulares	6
1.2 Superfícies Completas	18
1.3 Princípio do Máximo para Superfícies Especiais Weingarten	19
2 Superfícies de Rotação com Curvatura Média Constante	21
2.1 As Roulettes das cônicas	23
2.1.1 A roulette da parábola	23
2.1.2 Roulettes em relação a uma reta	29
2.1.3 A Ondulária	32
2.1.4 A Nodária	36
2.1.5 A Curvatura Média do Catenóide, Ondulóide e do Nodóide	40
2.1.6 Superfícies de Rotação com Curvatura Média Constante	42
3 Classificação das Superfícies de Rotação Completas Tipo Delaunay	47
3.1 Condições para Existência de Superfícies de Rotação Tipo Delaunay	47
3.2 Superfícies de Rotação Tipo Delaunay	58
Conclusão	65
Referências Bibliográficas	66

Resumo

Nesta dissertação estudamos os artigos *The Surfaces of Delaunay*, de Eells, James, e *Classification des Surfaces de Type Delaunay*, de Ricardo Sa Earp e Eric Toubiana. Baseado no primeiro trabalho classificamos as superfícies de rotação de curvatura média constante conhecidas como superfícies de Delaunay. Utilizando o segundo trabalho apresentamos um estudo sobre superfícies especiais de Weingarten, cuja curvatura média e Gaussiana satisfazem a relação $H = f(H^2 - K)$, onde f uma função elíptica de classe C^1 . Classificamos as superfícies de rotação completas, satisfazendo à relação de Weingarten. Elas são conhecidas como superfícies Tipo Delaunay.

Abstract

In this dissertation we have studied the articles *The Surfaces of Delaunay*, by James Eells, and *Classification des Surfaces de Type Delaunay*, by Ricardo Sa Earp and Eric Toubiana. Based on the first work we have classified the surfaces of revolution of constant mean curvature known as surfaces of Delaunay. By using the second one we have looked at special surfaces of Weingarten, whose mean and gaussian curvatures satisfies the relation $H = f(H^2 - K)$, where f is an elliptic function of class C^1 . We have classified the complete surfaces of revolution, that satisfies the Weingarten relation. They are known as surfaces of Delaunay Type.

Introdução

Superfícies de rotação em \mathbb{R}^3 são as superfícies que são invariantes por rotações em \mathbb{R}^3 , ou seja, por rotações em relação a uma dada reta. Seu estudo se reduz ao estudo da curva geratriz, isto é, a curva descrita pela intersecção da superfície com um plano que contenha o eixo de rotação.

Em 1827, o matemático alemão Gauss definiu a curvatura Gaussiana K , de uma superfície de \mathbb{R}^3 , por $K = \lambda_1 \lambda_2$, onde λ_1 e λ_2 são as curvaturas principais da superfície.

Depois de alguns anos, em 1831, a matemática francesa Sophie Germain introduziu a definição de curvatura Média H , por $H = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$, ao estudar um problema relacionado com vibrações de uma membrana.

A curvatura Gaussiana teve maior influência no meio matemático, enquanto a curvatura média ficou esquecida, voltando à tona em 1951, com Hopf, despertando uma quantidade considerável de geômetras para o estudo da mesma, principalmente das superfícies com curvatura média constante ($H - cmc$).

Os exemplos mais simples de superfície $H - cmc$ são o plano ($H = 0$), a esfera de raio r em \mathbb{R}^3 ($H = \pm \frac{1}{r}$), e o cilindro circular reto de raio r ($H = \frac{1}{2r}$).

O primeiro matemático a encontrar superfícies $H - cmc$ ($H \neq 0$), além dos acima citados, foi o francês C. Delaunay, em 1841, o mesmo mostrou que a curva plana descrita por um dos focos de uma cônica, quando esta rola sobre uma reta, sem deslizar, gera uma superfície de revolução $H - cmc$, além disso, mostrou que toda superfície de revolução $H - cmc$ é obtida dessa maneira. Estas superfícies são chamadas de Catenóide (considerando a parábola), Ondulóide (considerando a elipse) e Nodóide (considerando a hipérbole). As superfícies de curvatura média constante, $H - cmc$, também englobam as superfícies

mínimas, $H = 0$.

Mais de um século depois, N. Kapouleas [?] em (1990), construiu outros exemplos de superfícies propriamente mergulhadas, de topologia finita e de curvatura média constante.

Em [?] os autores estudaram uma superfície M , retirando a hipótese de curvatura média constante $H - cmc$ e colocando uma relação entre a curvatura média $H = H(N)$ e a curvatura de Gauss K satisfazendo a forma:

$$H = f(H^2 - K),$$

onde f é uma função de classe C^1 no intervalo $[0, \infty)$. Além disso, f tem que verificar a relação:

$$\forall t \in [0, \infty), 4t(f'(t))^2 < 1.$$

Neste caso, diremos que f é uma função elíptica e M é chamada superfície especial caso, verifique às relações acima.

Quando $f(0) \neq 0$, a teoria de superfícies especiais possuem princípios e propriedades equivalentes à teoria de superfícies com curvatura média constante não nula, e diremos que M é uma superfície especial tipo curvatura média constante ou simplesmente que M é uma superfície especial. Mais ainda, se M é uma superfície de revolução completa diremos que M é uma superfície do tipo Delaunay.

Nosso trabalho foi dividido nas seguintes etapas.

No Capítulo 1, apresentamos os principais resultados sobre curvas e superfícies que serão usados nos demais capítulos. Estudamos a primeira e segunda forma fundamental de uma dada superfície, terminando este capítulo com o cálculo das curvaturas principais, curvatura média e gaussiana de uma dada superfície de revolução.

No Capítulo 2, estudamos superfície de revolução com curvatura média constante e nosso principal objetivo foi classificar as superfícies de Delaunay.

Com o Capítulo 3, encerramos nosso trabalho fazendo um estudo detalhado de superfícies especiais de Weingarten completas de revolução tipo curvatura média constante, mostrando resultados gerais de existência e unicidade de superfícies tipo Delaunay. No Teorema 3.1 provamos a existência de uma tal superfície, onde a curva que gera a superfície é uma curva periódica de período $2x_0$. Finalmente no Teorema 3.2 provamos que toda superfície de revolução completa tipo Delaunay é do tipo da obtida no Teorema 3.1.

Capítulo 1

Preliminares

Apresentaremos neste capítulo algumas definições e propriedades de Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies, as quais utilizaremos sem maiores detalhes no decorrer de nosso trabalho. As demonstrações e explicações podem ser encontradas em [?], [?] e [?].

1.1 Superfícies Regulares

Nesta seção introduzimos a noção de uma superfície regular em \mathbb{R}^3 . Podemos dizer que uma superfície regular em \mathbb{R}^3 é obtida tomando pedaços do plano, deformando-os e colando-os entre si, de tal modo que a figura resultante não apresente pontas, arestas ou auto-intersecções e que tenha sentido falar em plano tangente nos pontos desta superfície. A idéia é definir um conjunto que seja, em certo sentido, bi-dimensional e que seja também suficientemente suave de forma que as noções usuais do Cálculo possam ser estendidas a um tal conjunto.

Definição 1.1. *Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular se, para cada $P \in S$, existe uma vizinhança V de P em \mathbb{R}^3 e uma aplicação $X : U \rightarrow V \cap S$, de um aberto U de \mathbb{R}^2 sobre $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ tal que*

1. *X é diferenciável. Isto significa que se escrevemos*

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U,$$

as funções $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens em U .

2. X é um homeomorfismo. Como X é contínua pela Condição 1, isto significa que X tem inversa $X^{-1} : V \cap S \rightarrow U$ que é contínua.
3. Para todo $q \in U$, a diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva.

A aplicação X é chamada uma parametrização ou um sistema de coordenadas locais numa vizinhança de P . A vizinhança $V \cap S$ de P em S é chamada uma vizinhança coordenada.

A definição acima merece alguns comentários. Primeiramente porque definimos uma superfície como um subconjunto S de \mathbb{R}^3 , e não como uma aplicação. Conseguimos isso cobrindo S com traços de parametrizações satisfazendo às Condições 1, 2 e 3.

A Condição 1 é bastante natural se esperamos fazer alguma geometria diferencial sobre S . A injetividade na Condição 2 tem por objetivo excluir a possibilidade de auto-intersecções em superfícies regulares. A continuidade da inversa na Condição 2 tem um propósito mais sutil. No momento, diremos apenas que esta condição é essencial para provar que certos objetos definidos em termos de uma parametrização não dependem desta parametrização, mas apenas do próprio conjunto S . Finalmente, a Condição 3 garante a existência de um plano tangente em todos os pontos de S .

Em seguida apresentaremos alguns exemplos de superfícies regulares.

Exemplo 1.1. O cilindro circular reto de equação $x^2 + y^2 = r^2$ é uma superfície regular que pode ser parametrizado por $X(u, v) = (r \cos u, r \sin u, v)$, com $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ e $r > 0$.

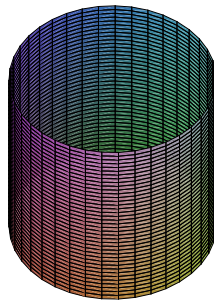


Figura 1.1: Parte de um cilindro

Exemplo 1.2. A esfera S^2 é uma superfície regular, onde

$$X(u, v) = (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v),$$

com $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ é uma parametrização que cobre S^2 menos um meridiano.

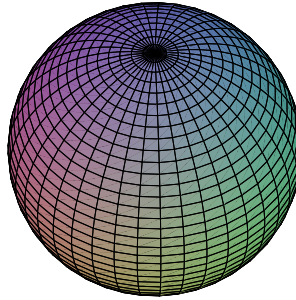


Figura 1.2: Esfera

Exemplo 1.3. Seja $\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$, $u \in I \subset \mathbb{R}$ uma curva regular tal que $g'(u) \neq 0$ para todo u do intervalo I . Então a superfície obtida pela rotação de $\alpha(u)$ em torno do eixo z é uma superfície regular parametrizada por $X(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$, $v \in \mathbb{R}$.

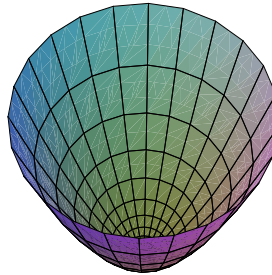


Figura 1.3: Superfície rotacionada

Exemplo 1.4. Considere a hélice dada por $\alpha(u) = (\cos u, \sin u, au)$. Por cada ponto da hélice, trace uma reta paralela ao plano xy e que intercepta o eixo Oz . A superfície gerada por essas retas é chamada de helicóide. Uma parametrização do helicóide é dada por:

$$X(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au), \quad 0 < u < 2\pi, \quad -\infty < v < \infty.$$

X aplica uma faixa aberta de largura 2π do plano uv sobre a parte do helicóide que corresponde a uma rotação de 2π ao longo da hélice.

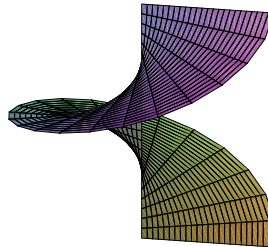


Figura 1.4: helicóide

Exemplo 1.5. Consideramos superfícies obtidas pela rotação do ângulo v em torno do eixo z seguida da elevação de δv da curva $(2 + \cos u, 0, \sin u)$. Uma parametrização para tal superfície é $X(u, v) = ((2 + \cos u) \cos v, (2 + \cos u) \sin v, \sin u + \delta v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, onde δ é um número real. Observamos que se $\delta = 0$, a parametrização $X(u, v)$ descreve o toro obtido pela rotação do círculo no plano xOz de raio 1 e centro $(0, 2, 0)$.

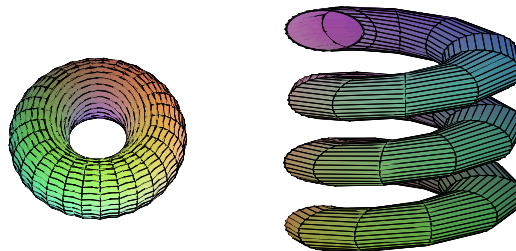


Figura 1.5: toro e hélice de um toro

Até aqui, tratamos as superfícies sob o ponto de vista da diferenciabilidade. Agora começaremos o estudo de outras estruturas geométricas associadas a uma superfície. Talvez a mais importante delas seja a primeira forma fundamental, que passamos a descrever agora.

O produto interno natural em \mathbb{R}^3 , induz em cada plano tangente $T_p S$, de uma superfície regular S , um produto interno, que indicaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$. Se $w_1, w_2 \in T_p S \subset \mathbb{R}^3$, então $\langle w_1, w_2 \rangle_p$ é igual ao produto interno de w_1 e w_2 , como vetores em \mathbb{R}^3 . A esse produto interno, que é uma forma bilinear simétrica (isto é, $\langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle w_2, w_1 \rangle_p$ e $\langle w_1, w_2 \rangle_p$ é linear em w_1 e w_2), corresponde uma forma quadrática $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = |w|^2 \geq 0. \quad (1.1)$$

Definição 1.2. A forma quadrática I_p em $T_p S$ definida por (1.1), é chamada a primeira forma fundamental da superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ em $p \in S$.

Deste modo, a primeira forma fundamental é meramente a expressão de como a superfície S herda o produto interno natural do \mathbb{R}^3 . Geometricamente, como veremos em breve, a primeira forma fundamental nos possibilita fazer medidas sobre a superfície (comprimentos de curvas, ângulos de vetores tangentes, áreas de regiões), sem fazer menção ao espaço ambiente \mathbb{R}^3 , onde está a superfície.

Vamos agora expressar a primeira forma fundamental na base X_u, X_v associada a uma parametrização $X(u, v)$ em p . Como um vetor tangente $w \in T_p S$ é o vetor tangente a uma curva parametrizada $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, com $p = \alpha(0) = X(u_0, v_0)$, obtemos

$$\begin{aligned} I_p(\alpha'(0)) &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_p \\ &= \langle X_u u' + X_v v', X_u u' + X_v v' \rangle_p \\ &= \langle X_u, X_u \rangle_p (u')^2 + 2 \langle X_u, X_v \rangle_p u' v' + \langle X_v, X_v \rangle_p (v')^2 \\ &= E(u')^2 + 2F u' v' + G(v')^2, \end{aligned}$$

onde os valores das funções envolvidas são calculados em $t = 0$, e

$$\begin{aligned} E(u_0, v_0) &= \langle X_u, X_u \rangle_p \\ F(u_0, v_0) &= \langle X_u, X_v \rangle_p \\ G(u_0, v_0) &= \langle X_v, X_v \rangle_p, \end{aligned}$$

são os coeficientes da primeira forma fundamental na base X_u, X_v de $T_p S$.

Fazendo p variar na vizinhança coordenada correspondente a (X_u, X_v) , obtemos funções $E(u, v), F(u, v), G(u, v)$, que são diferenciáveis nessa vizinhança.

De agora em diante, omitiremos o índice p na indicação do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ ou da forma quadrática I_p , quando for claro pelo contexto a que ponto nos referimos.

Para ilustrarmos o que falamos acima considere o seguinte exemplo.

Exemplo 1.6. *Sejam $V = \{(\theta, \varphi); 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi\}$ e $X : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por*

$$X(\theta, \varphi) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta).$$

Observamos que

$$\begin{aligned} X_\theta(\theta, \varphi) &= (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta), \\ X_\varphi(\theta, \varphi) &= (-\sin \theta \sin \varphi, \sin \theta \cos \varphi, 0). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} E(\theta, \varphi) &= \langle X_\theta, X_\theta \rangle = 1 \\ F(\theta, \varphi) &= \langle X_\theta, X_\varphi \rangle = 0 \\ G(\theta, \varphi) &= \langle X_\varphi, X_\varphi \rangle = \sin^2(\theta). \end{aligned}$$

Portanto, se w é um vetor tangente à esfera unitária em um ponto $X(\theta, \varphi)$, dado na base associada a $X(\theta, \varphi)$ por

$$w = aX_\theta + bX_\varphi,$$

então o quadrado do módulo de w é dado por

$$|w|^2 = I(w) = Ea^2 + 2Fab + Gb^2 = a^2 + b^2 \sin^2 \theta.$$

Agora iremos discutir em que sentido, e quando, é possível orientar uma superfície. Intuitivamente, como cada ponto p de uma superfície regular S tem um plano tangente $T_p S$, a escolha de uma orientação de $T_p S$ induz uma orientação numa vizinhança de p , isto é, a noção de movimento positivo ao longo de curvas fechadas suficientemente pequenas em torno de cada ponto da vizinhança. Caso seja possível fazer essa escolha para cada $p \in S$ de forma que na interseção de quaisquer duas vizinhanças as orientações coincidam, então dizemos que S é orientável. Caso contrário, dizemos que S é não-orientável.

Vamos precisar essas idéias. Fixada uma parametrização $X(u, v)$ de uma vizinhança de um ponto p de uma superfície regular S , determinamos uma orientação do plano

tangente $T_p S$, a saber, a orientação associada à base ordenada X_u, X_v . Se p pertence a uma vizinhança coordenada de uma outra parametrização $\bar{X}(\bar{u}, \bar{v})$, a nova base $\bar{X}_{\bar{u}}, \bar{X}_{\bar{v}}$ é expressa em termos da primeira por

$$\begin{aligned}\bar{X}_{\bar{u}} &= X_u \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + X_v \frac{\partial v}{\partial \bar{u}}, \\ \bar{X}_{\bar{v}} &= X_u \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} + X_v \frac{\partial v}{\partial \bar{v}},\end{aligned}$$

onde $u = u(\bar{u}, \bar{v})$ e $v = v(\bar{u}, \bar{v})$ são as expressões da mudança de coordenadas. As bases X_u, X_v e $\bar{X}_{\bar{u}}, \bar{X}_{\bar{v}}$ determinam, portanto, a mesma orientação de $T_p S$ se, e somente se, o Jacobiano

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}$$

da mudança de coordenadas é positivo.

Definição 1.3. *Uma superfície regular S é orientável, se for possível cobri-la com uma família de vizinhanças coordenadas, de tal modo que se um ponto $p \in S$ pertence a duas vizinhanças dessa família, então a mudança de coordenadas tem Jacobiano positivo em p . A escolha de uma tal família é chamada uma orientação de S , e S , neste caso, diz-se orientada. Se uma tal escolha não é possível, a superfície é não-orientável. Se S é orientada, uma parametrização (local) X é compatível com a orientação de S se, juntando X à família de parametrizações dada pela orientação, obtém-se ainda uma (logo, a mesma) orientação de S .*

Convém chamar de campo diferenciável de vetores normais em um aberto $U \subset S$, a uma aplicação diferenciável $N : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, que associa a cada $q \in U$ um vetor normal unitário $N(q) \in \mathbb{R}^3$ a S em q .

Proposição 1.1. *Uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é orientável se, e somente se, existe um campo diferenciável $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ de vetores normais em S .*

Proposição 1.2. *Se uma superfície regular é dada por $S = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; f(x, y, z) = a$, onde $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável e a é um valor regular de f , então S é orientável.*

Orientação certamente não é uma propriedade local de uma superfície regular. Localmente, toda superfície regular é difeomorfa a um conjunto aberto do plano e, portanto, orientável. Orientação é uma propriedade global, no sentido de envolver toda a superfície.

A aplicação utilizada na definição seguinte mostra que conseguimos relacionar vetores de um plano tangente com vetores de outro plano tangente. Todos os detalhes poderão ser encontrados em [?], (pág 158 à 165). Em seguida definiremos a aplicação normal de Gauss:

Definição 1.4. A aplicação de Gauss $N : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow S^2$ em relação a uma dada parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ num ponto p é definida por

$$N(u, v) = \frac{X_u(u, v) \wedge X_v(u, v)}{|X_u(u, v) \wedge X_v(u, v)|} = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}.$$

O fato de $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S^2$ ser uma aplicação linear auto-adjunta nos permite associar a dN_p uma forma quadrática Q em $T_p S$, dada por $Q(v) = \langle dN_p(v), v \rangle$, $v \in T_p S$. Para obter uma interpretação geométrica desta forma quadrática, precisamos de algumas definições. Por motivos que se tornarão claros depois, usaremos a forma quadrática $-Q$.

Definição 1.5. A forma quadrática II_p , definida em $T_p S$ por $II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$ é chamada a segunda forma fundamental de S em p .

Definição 1.6. Seja C uma curva regular em S passando por $p \in S$, k a curvatura de C em p , e $\cos \theta = \langle n, N \rangle$, onde n é o vetor normal a C e N é o vetor normal a S em p . O número $k_n = k \cos \theta$ é chamado a curvatura normal de $C \subset S$ em p .

Noutras palavras, k_n é o comprimento da projeção do vetor kn sobre a normal à superfície em p , com um sinal dado pela orientação N de S em p . A curvatura normal de C não depende da orientação de C , mas troca de sinal com uma mudança de orientação da superfície.

Para dar uma interpretação da segunda forma fundamental II_p , considere uma curva regular $C \subset S$ parametrizada por $\alpha(s)$, onde s é o comprimento de arco de C , com $\alpha(0) = p$. Se indicarmos por $N(s)$ a restrição do vetor normal N à curva $\alpha(s)$, teremos $\langle N(s), \alpha'(s) \rangle = 0$, donde

$$\langle N(s), \alpha''(s) \rangle = -\langle N'(s), \alpha'(s) \rangle.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 II_p(\alpha'(0)) &= -\langle dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle \\
 &= -\langle N'(0), \alpha'(0) \rangle \\
 &= \langle N(0), \alpha''(0) \rangle \\
 &= \langle N, kn \rangle_p \\
 &= k_n(p).
 \end{aligned}$$

Em outras palavras, o valor da segunda forma fundamental II_p num vetor unitário $v \in T_pS$ é igual à curvatura normal de uma curva regular passando por p e tangente a v . Em particular, obtivemos o seguinte resultado.

Proposição 1.3. (Meusnier) *Todas as curvas de uma superfície S que têm, num ponto $p \in S$, a mesma reta tangente têm, neste ponto, a mesma curvatura normal.*

Voltemos à aplicação linear dN_p . A cada $p \in S$ existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de T_pS , tal que $dN_p(e_1) = -\lambda_1 e_1$, $dN_p(e_2) = -\lambda_2 e_2$. Além disso, λ_1 e λ_2 ($\lambda_1 \geq \lambda_2$) são o máximo e o mínimo da segunda forma fundamental II_p restrita ao círculo unitário de T_pS . Isto é, são os valores extremos da curvatura normal em p . Com isso,

Definição 1.7. *O máximo da curvatura normal λ_1 e o mínimo da curvatura normal λ_2 , são chamados curvaturas principais em p ; as direções correspondentes, isto é, as direções dadas pelos auto-vetores e_1 e e_2 são chamadas direções principais em p .*

O conhecimento das curvaturas principais em p permite calcular facilmente a curvatura normal segundo uma direção dada de T_pS . Com efeito, se $v \in T_pS$ e $|v| = 1$, como e_1 e e_2 formam uma base ortonormal de T_pS , temos

$$v = e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta,$$

onde θ é o ângulo de e_1 a v na orientação de T_pS . A curvatura normal k_n na direção de v é dada por

$$\begin{aligned}
 k_n &= II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle \\
 &= -\langle dN_p(e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta), (e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta) \rangle \\
 &= \langle e_1 \lambda_1 \cos \theta + e_2 \lambda_2 \sin \theta, e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta \rangle \\
 &= \lambda_1 \cos^2 \theta + \lambda_2 \sin^2 \theta.
 \end{aligned}$$

Esta última expressão é conhecida classicamente sob o nome de Fórmula de Euler. Em verdade, ela é simplesmente a expressão da Segunda Forma Fundamental na base e_1, e_2 .

Seja $X(u, v)$ uma parametrização em um ponto $p \in S$ de uma superfície S , e seja $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ uma curva parametrizada em S , com $\alpha_0 = p$. Para simplificar a notação, convencionaremos que todas as funções que aparecem abaixo indicam seus valores no ponto p .

O vetor tangente a $\alpha(t)$ em p é $\alpha'(t) = X_u u'(t) + X_v v'(t)$ e

$$dN(\alpha'(t)) = N'(u(t), v(t)) = N_u u' + N_v v'.$$

Como N_u e N_v pertencem a $T_p S$, podemos escrever

$$\begin{aligned} N_u &= a_{11} X_u + a_{21} X_v \\ N_v &= a_{12} X_u + a_{22} X_v, \end{aligned}$$

e portanto,

$$dN(\alpha') = (a_{11} u' + a_{12} v') X_u + (a_{21} u' + a_{22} v') X_v.$$

Logo, a expressão da Segunda Forma Fundamental na base X_u, X_v é dada por

$$\begin{aligned} II_p(\alpha') &= -\langle dN(\alpha'), \alpha' \rangle \\ &= \langle N_u u' + N_v v', X_u u' + X_v v' \rangle \\ &= e(u')^2 + 2f u' v' + g(v')^2 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} e &= \langle X_{uu}, N \rangle = -\langle X_u, N_u \rangle \\ f &= \langle X_{uv}, N \rangle = -\langle X_u, N_v \rangle \\ g &= \langle X_{vv}, N \rangle = \langle X_v, N_v \rangle, \end{aligned}$$

são os coeficientes da Segunda Forma Fundamental.

Sem mais comentários podemos enunciar a seguinte definição que será de grande valia para a próxima seção.

Definição 1.8. *Seja $p \in S$ e seja $dN_p : T_p S \longrightarrow T_p S$ a diferencial da aplicação de Gauss. O determinante de dN_p é chamado a curvatura Gaussiana K de S em p . O negativo da metade do traço de dN_p é chamado a curvatura média de S em p . Em termos das curvaturas principais λ_1 e λ_2 , podemos escrever*

$$K = \lambda_1 \lambda_2 \text{ e } H = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2).$$

Em um sistema de coordenadas $X(u, v)$, e a curvatura média H e a curvatura Gaussiana K são dadas por:

$$H = \frac{gE - 2fF + eG}{2(EG - F^2)} \quad (1.2)$$

e

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad (1.3)$$

onde

$$\begin{cases} E &= \langle X_u, X_u \rangle \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle, \end{cases} \quad (1.4)$$

são os coeficientes da Primeira Forma Fundamental.

Exemplo 1.7. *As curvaturas média e gaussiana do cilindro circular reto, com parametrização dada por $X(u, v) = (r \cos u, r \sin u, v)$ são $H = -\frac{1}{2r}$ e $K = 0$.*

Encerraremos esta seção com um exemplo onde iremos calcular as curvaturas principais, curvatura média e curvatura Gaussiana de uma superfície de rotação. Para efeito de contas iremos considerar o eixo z como o eixo de rotação, embora na próxima seção o eixo de rotação considerado é o x .

Exemplo 1.8. Superfícies de Rotação: *Considere a superfície de rotação parametrizada por:*

$$X(u, v) = (\varphi(v) \cos u, \varphi(v) \sin u, \psi(v)), \quad 0 < u < 2\pi, \quad a < v < b, \quad \varphi(v) > 0.$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental são dados por

$$E = \varphi^2, \quad F = 0, \quad G = (\varphi')^2 + (\psi')^2.$$

Convém supor que a curva geratriz é parametrizada pelo comprimento de arco, isto é, que

$$(\varphi')^2 + (\psi')^2 = G = 1.$$

O cálculo dos coeficientes da Segunda Forma Fundamental é simples e fornece

$$e = -\varphi\psi', \quad f = 0, \quad g = \psi'\varphi'' - \psi''\varphi'.$$

Logo,

$$K = -\frac{\psi'(\psi'\varphi'' - \psi''\varphi')}{\varphi}.$$

Convém exibir ainda uma outra expressão para a curvatura Gaussiana. Diferenciando $(\varphi')^2 + (\psi')^2 = 1$, obtemos $\varphi'\varphi'' = -\psi'\psi''$. Assim,

$$K = -\frac{\psi'(\psi'\varphi'' - \psi''\varphi')}{\varphi} = -\frac{(\psi')^2\varphi'' + (\varphi')^2\psi''}{\varphi} = \frac{\varphi''}{\varphi}. \quad (1.5)$$

A equação (1.5) é uma expressão conveniente para a curvatura Gaussiana de uma superfície de rotação. Ela pode ser usada, por exemplo, para determinar as superfícies de rotação com curvatura Gaussiana constante.

Para o cálculo das curvaturas principais, faremos primeiro uma observação geral: se a parametrização de uma superfície regular é tal que $F = f = 0$, então as curvaturas principais são dadas por $\frac{e}{E}$ e $\frac{g}{G}$. De fato, nesse caso, a curvatura Gaussiana e a curvatura média são dadas por

$$K = \frac{eg}{EG}, \quad H = \frac{1}{2} \frac{eG + gE}{EG}.$$

Nossa afirmação decorre imediatamente do fato de K ser o produto e $2H$ a soma das curvaturas principais.

Assim, as curvaturas principais de uma superfície de rotação são dadas por

$$\lambda_1 = \frac{e}{E} = -\frac{\psi'\varphi}{\varphi^2} = -\frac{\psi'}{\varphi}$$

e

$$\lambda_2 = \frac{g}{G} = \psi'\varphi'' - \psi''\varphi',$$

daí, a curvatura média de uma tal superfície é

$$H = \frac{1 - \psi' + \varphi(\psi'\varphi'' - \psi''\varphi')}{2\varphi}.$$

1.2 Superfícies Completas

O objetivo desta seção é introduzir o conceito de superfícies completas.

Definição 1.9. *Uma superfície regular (conexa) S é chamada estendível, se existe uma superfície regular (conexa) \bar{S} , tal que $S \subset \bar{S}$ como um subconjunto próprio. Se não existe uma tal \bar{S} , S é chamada não-estendível.*

Infelizmente, a classe de superfícies não-estendíveis é muito grande para permitir resultados interessantes. Uma hipótese mais adequada é dada pela

Definição 1.10. *Uma superfície regular S é denominada completa quando para qualquer ponto $P \in \mathbb{R}$, qualquer geodésica parametrizada $\gamma : [0, \epsilon) \rightarrow S$ de S , começando em $P = \gamma_0$, pode ser estendida numa geodésica parametrizada $\bar{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow S$, definida sobre toda a reta real \mathbb{R} .*

O plano é evidentemente uma superfície completa. O cone menos o vértice não é uma superfície completa, pois quando estendemos suficientemente uma geratriz (que é uma geodésica) atingimos o vértice, que não pertence à superfície. A esfera é uma superfície completa, pois as geodésicas parametrizadas (cujos traços são os grandes círculos da esfera) podem ser definidas para qualquer valor real. O cilindro também é uma superfície completa pois as suas geodésicas são círculos, retas e hélices, que estão definidas para todos os valores reais.

Por outro lado, uma superfície $S - P$, obtida ao removermos um ponto P de uma superfície completa S , não é completa. De fato, alguma geodésica γ de S deve passar por P . Tomando um ponto Q , próximo a P em γ , existe uma geodésica parametrizada de $S - P$ que começa em Q e não pode ser estendida até P . Assim, uma esfera menos um ponto e um cilindro menos um ponto não são superfícies completas.

Proposição 1.4. *Uma superfície completa S é não-estendível.*

1.3 Princípio do Máximo para Superfícies Especiais Weingarten

O Princípio do Máximo para superfícies com curvatura média constante foi generalizado em [?] para para Superfícies Especiais Weingarten, conforme descreveremos a seguir:

Teorema 1.1. *Suponha M_1 e M_2 superfícies de classe C^2 em \mathbb{R}^3 , dadas como gráficos de funções $u, v : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Suponha que o plano tangente de ambas M_1 e M_2 encontrem-se no ponto (x, y, z) , isto é, $T_{xyz}M_1 = T_{xyz}M_2$ para $z = u(x, y) = v(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$. Seja $H(N_1)$ e $H(N_2)$ as funções curvatura de u e v com respeito aos normais unitários N_1 e N_2 que coincidem em (x, y, z) . Seja K_i , a curvatura Gaussiana de M_i , $i = 1, 2$. Suponha que M_i satisfaz*

$$H(N_i) = f((H_i)^2 - K_i), \quad i = 1, 2,$$

para f satisfazendo

$$4t(f'(t))^2 < 1.$$

Se $u \leq v$ próximo de (x, y) então $M_1 = M_2$ próximo de (x, y, z) , isto é $u = v$ na vizinhança de (x, y) .

A demonstração deste resultado é encontrada em [?].

No Capítulo 3 precisaremos garantir a existência de solução local de uma equação diferencial de segunda ordem. Para isto consideremos o conceito de função *lipschitziana*, a seguir.

Uma aplicação $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ chama-se *lipschitziana* em Ω relativamente à segunda variável ou, simplesmente, *lipschitziana*, se existe uma constante K tal que:

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq K|x - y|,$$

para todo $(t, x), (t, y) \in \Omega$; K chama-se constante de *Lipschitz* de f .

A aplicação f diz-se localmente *lipschitziana* em Ω , se cada (t_0, x_0) tem uma vizinhança $V = V(t_0, x_0)$ tal que $f|_V$ é *lipschitziana* em V .

Lembremos a seguir o Lema da Contração e, principalmente, um corolário deste que será usado na demonstração do Teorema de Picard.

Lema 1.1. (*Lema de Contração*) Sejam (X, d) um espaço métrico completo e $F : X \rightarrow X$ uma contração, isto é, $d(F(x), F(y)) \leq Kd(x, y)$, $0 \leq K < 1$. Existe um único ponto fixo P , por F , isto é $F(P) = P$. Mais ainda, P é um atrator de F , isto é, $F^n(x) \rightarrow P$ quando $n \rightarrow \infty$, para todo $x \in X$. $F^n(x)$ é definido por $F(F^{n-1}(x))$.

Corolário 1.1. Seja X um espaço métrico completo. Se $F : X \rightarrow X$ é contínua e, para algum m , F^m é uma contração, então existe um único ponto P fixo por F . Mais ainda, P é um atrator de F .

Teorema 1.2. Seja f contínua e lipschitziana em $\Omega = I_a \times B_b$, onde $I_a = \{t; |t - T_0| \leq a\}$, $B_b = \{x; |x - x_0| \leq b\}$. Se $|f| \leq M$ em Ω , existe uma única solução da equação diferencial

$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

em $I_\alpha = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$.

Capítulo 2

Superfícies de Rotação com Curvatura Média Constante

Superfícies de rotação são as superfícies que são invariantes por uma família à um parâmetro de rotações em \mathbb{R}^3 , ou seja, por rotações em relação a uma dada reta. Seu estudo se reduz ao estudo da curva geratriz, isto é, a curva descrita pela intersecção da superfície com um plano que contenha o eixo de rotação.

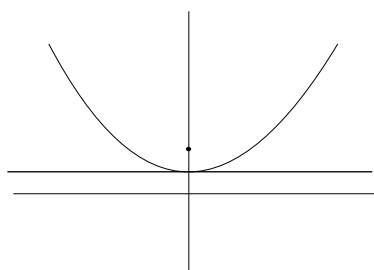


Figura 2.1: Superfície de rotação com geratriz α

Em 1827 o matemático alemão Gauss definiu a curvatura Gaussiana K , de uma superfície de \mathbb{R}^3 , por $K = \lambda_1 \lambda_2$, onde λ_1 e λ_2 são as curvaturas principais da superfície.

Depois de alguns anos, em 1831, a matemática francesa Sophie Germain introduziu a definição de curvatura Média H , por $H = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$, ao estudar um problema relacionado com vibrações de uma membrana.

A curvatura Gaussiana teve maior influência no meio matemático, enquanto a cur-

vatura média ficou esquecida, voltando com grande força em 1951, com Hopf, despertando uma quantidade considerável de geômetras para o estudo da mesma, principalmente das superfícies com curvatura média constante ($H - cmc$).

Os exemplos mais simples de superfícies $H - cmc$ são o plano ($H = 0$), a esfera de raio r em \mathbb{R}^3 ($H = \frac{1}{r}$) e o cilindro circular reto de raio r ($H = \frac{1}{2r}$).

O primeiro matemático a encontrar superfícies $H - cmc$ ($H \neq 0$), além dos acima citados, foi o francês C. Delaunay. Em 1841, ele mostrou que a curva plana descrita por um dos focos de uma cônica quando esta rola sobre uma reta, sem deslizar, gera uma superfície de rotação $H - cmc$. Além disso, mostrou que toda superfície de rotação $H - cmc$ é obtida dessa maneira. Estas superfícies obtidas pelas roulettes (definiremos a seguir) de uma cônica são chamadas de Catenóide (considerando a parábola), Ondulóide (considerando a elipse), e Nodóide (considerando a hipérbole). As superfícies de curvatura média constante, $H - cmc$, também englobam as superfícies mínimas, $H = 0$.

O Teorema de C. Delaunay caracteriza as superfícies de rotação $H - cmc$. Para isso ele utiliza o conceito de **Roulettes de uma cônica**.

Definição 2.1. *Roulette é a curva descrita pelo foco de uma cônica quando esta rola sobre uma reta tangente sem deslizar.*

O objetivo principal deste capítulo é provar o seguinte teorema:

Teorema 2.1. *(Delaunay) Uma superfície rotacional de curvatura média constante é obtida pela rotação da roulette de uma cônica.*

A demonstração apresentada se baseia no artigo de Eells [?] e segue as seguintes etapas:

- 1º) descrever as roulettes das cônicas;
- 2º) calcular as curvaturas médias das superfícies obtidas pela rotação destas curvas;
- 3º) via expressão da curvatura média, demonstrar que a curva geratriz de uma superfície de rotação de curvatura média constante não-nula satisfaz às equações das roulettes da elipse ou da hipérbole.

2.1 As Roulettes das cônicas

Começaremos obtendo a roulette da parábola por ser uma figura de fácil manipulação e visão geométrica.

2.1.1 A roulette da parábola

Uma parábola de foco F e reta diretriz r é o conjunto de pontos $K \in \mathbb{R}^2$ tais que $dist(K, F) = dist(K, r)$. O ponto V , da parábola com a menor distância a r é denominado o vértice da parábola. V está na reta perpendicular a r que contém o foco F da parábola, pois a reta que é perpendicular a r e passa por F é a que dá a menor distância entre F e a diretriz e portanto, a menor distância entre a parábola e a diretriz.

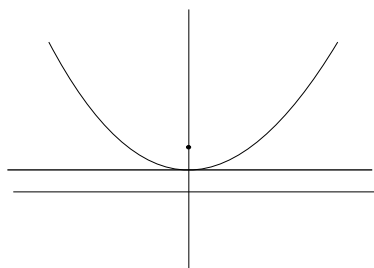


Figura 2.2: Parábola com foco $F = (0, c)$

Tomando o sistema de coordenadas cartesianas (x, y) , em que $V = (0, 0)$ e o eixo x é paralelo à reta diretriz, sejam $F = (0, c)$ o foco e $y = -c$ a reta diretriz. A equação da parábola é:

$$y = \frac{x^2}{4c}. \quad (2.1)$$

Definição 2.2. *A roulette do foco F em relação a uma reta tangente à parábola é a trajetória que F descreve enquanto a parábola rola sobre esta reta sem deslizar.*

O objetivo desta seção é mostrar que esta roulette é uma catenária. Para tal vamos mostrar dois Lemas que mostram uma relação surpreendente entre a reta tangente num dado ponto, o eixo x e a reta que passa pelo foco da parábola interceptando a reta tangente no eixo x .

Lema 2.1. *Sejam t a reta tangente à parábola $y = \frac{x^2}{4c}$, em um ponto $K = \left(x_0, \frac{(x_0)^2}{4c}\right)$, e P o ponto de intersecção de t com o eixo x . Então $P = \left(\frac{x_0}{2}, 0\right)$.*

Demonstração: A equação de t é $y = \frac{x_0}{2c}x - \frac{(x_0)^2}{4c}$. Logo, para $y = 0$, temos $P = \left(\frac{x_0}{2}, 0\right)$. \square

Para determinar a coordenada y da roulette, encontraremos um ponto P' de t tal que $P'F$ seja perpendicular a t .

Lema 2.2. *Com a notação do Lema 2.1, FP é perpendicular à reta t .*

Demonstração: Sejam m o coeficiente angular da reta que passa por $F = (0, c)$ e $P = \left(\frac{x_0}{2}, 0\right)$, e m' o coeficiente angular de t . Basta mostrar que $m.m' = -1$. Como $m = -\frac{2c}{x_0}$ e $m' = \frac{x_0}{2c}$, segue, $m.m' = -\frac{2c}{x_0} \cdot \frac{x_0}{2c} = -1$. Logo FP é perpendicular à t . \square

A Figura (2.3) representa dois instantes diferentes em que a parábola rola sem deslizar sobre o eixo x , que é a reta tangente do vértice.

- O primeiro instante representa o momento inicial do movimento em que a parábola é tangente ao eixo x em $V = (0, 0)$ e o foco está em $F = (0, c)$ e está representada também a reta tangente t em K .

- O segundo instante representa o momento em que a parábola rolou até o ponto K , agora representado por \tilde{K} , é tangente ao eixo x .

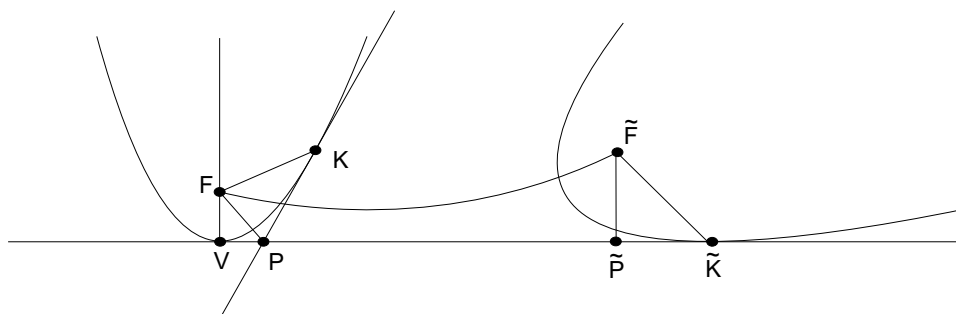


Figura 2.3: Parábola rolando

No próximo lema encontraremos as equações para as coordenadas da roulette da parábola.

Lema 2.3. *Uma parametrização em coordenadas cartesianas da roulette da parábola de equação $y = \frac{x^2}{4c}$ é*

$$\beta(x) = \left(\int_0^x \sqrt{1 + \frac{r^2}{4c^2}} dr - \frac{x}{2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{4c^2}}, c \sqrt{1 + \frac{x^2}{4c^2}} \right). \quad (2.2)$$

Demonstração: A parábola de equação $y = \frac{x^2}{4c}$ pode ser parametrizada por $\alpha(x) = \left(x, \frac{x^2}{4c} \right)$. Pelo Lema (2.2), temos que $P = \left(\frac{x}{2}, 0 \right)$. Logo $|PF| = \sqrt{c^2 + \frac{x^2}{4}} = c \sqrt{1 + \frac{x^2}{4c^2}}$. Analisando o instante em que o ponto $K = \left(x, \frac{x^2}{4c} \right)$ é tangente ao eixo x , as coordenadas do foco (agora representado por \tilde{F}) são dadas por $(|V\tilde{P}|, |\tilde{P}\tilde{F}|) = (|V\tilde{P}|, |PF|)$. Ora, usando a Figura (2.3) temos,

$$|V\tilde{P}| = |V\tilde{K}| - |\tilde{P}\tilde{K}|,$$

onde $|V\tilde{K}|$ é o comprimento do arco da parábola de 0 até x . Ou seja

$$|V\tilde{K}| = \int_0^x |\alpha'(r)| dr = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{r^2}{4c^2}} dr.$$

Por outro lado,

$$|PK| = \sqrt{\left(x - \frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{4c}\right)^2} = \frac{x}{2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{4c^2}}.$$

Logo,

$$|V\tilde{P}| = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{r^2}{4c^2}} dr - \frac{x}{2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{4c^2}}.$$

□

Lema 2.4. *Seja $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ a reparametrização por comprimento de arco da roulette da parábola, dada por $\beta(x) = (\bar{x}(x), \bar{y}(x))$, do Lema (2.3). Então*

$$\frac{d\bar{x}}{ds} = \frac{c}{\bar{y}(s)}. \quad (2.3)$$

Demonstração: Como

$$\bar{x}(x) = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{r^2}{4c^2}} dr - \frac{x}{2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{4c^2}}$$

e

$$\bar{y}(x) = c \sqrt{1 + \frac{x^2}{4c^2}},$$

calculando a derivada de $\bar{x}(x)$ e de $\bar{y}(x)$, temos

$$\bar{x}'(x) = \left(1 + \frac{x^2}{4c^2}\right)^{1/2} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x^2}{4c^2}\right)^{1/2} - \frac{2x^2}{16c^2} \left(1 + \frac{x^2}{4c^2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x^2}{4c^2}\right)^{-1/2}$$

e

$$\bar{y}'(x) = c \frac{2x}{8c^2} \left(1 + \frac{x^2}{4c^2}\right)^{-1/2} = \frac{x}{4c} \left(1 + \frac{x^2}{4c^2}\right)^{-1/2}.$$

Logo,

$$\bar{x}'(x)^2 + \bar{y}'(x)^2 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{x^2}{4c^2}\right)^{-1} + \frac{x^2}{16c^2} \left(1 + \frac{x^2}{4c^2}\right)^{-1} = \frac{1}{4}.$$

Como o parâmetro comprimento de arco s de β é dado por

$$s(x) = \int_0^x |\beta'(r)| dr = \int_0^x \sqrt{\bar{x}'(r)^2 + \bar{y}'(r)^2} dr,$$

temos

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{\bar{x}'(x)^2 + \bar{y}'(x)^2}.$$

Logo,

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{\bar{x}'(x(s))^2 + \bar{y}'(x(s))^2}} = 2.$$

Assim, usando a regra da cadeia, obtemos

$$\frac{d\bar{x}}{ds} = \frac{d\bar{x}}{dx} \frac{dx}{ds} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x(s)^2}{4c^2}\right)^{-1/2} \cdot 2 = \frac{c}{\bar{y}(x(s))} = \frac{c}{\bar{y}(s)}. \quad \square$$

A seguir, veremos um resultado que nos diz qual é a roulette de uma parábola.

Proposição 2.1. *A roulette da parábola de equação $y = \frac{x^2}{4c}$ é a catenária de equação $y = c \cosh\left(\frac{x}{c}\right)$.*

Demonstração: Pela equação (2.3) $\frac{d\bar{x}}{ds} = \frac{c}{\bar{y}(s)}$. Como $\beta(x(s)) = \beta(s)$ é regular, temos que a roulette da parábola é (localmente) o gráfico de uma função $(x, y(x))$. Além disso, $\frac{ds}{dx} = \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{1/2} \neq 0$, portanto,

$$\frac{dx}{ds} = \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{-1/2}.$$

Usando (2.3) obtemos,

$$\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{-1/2} = \frac{c}{y}. \quad (2.4)$$

Daí,

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{y^2}{c^2},$$

logo,

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y^2 - c^2}{c^2}},$$

ou seja,

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - c^2}} = \frac{1}{c} \int dx,$$

que é igual a

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - c^2}} = \frac{x}{c} + d.$$

Fazendo $y = c \cosh v$, temos que $dy = c \sinh v \, dv$. Assim,

$$\int \frac{c \sinh v}{\sqrt{c^2 \cosh^2 v - c^2}} dv = \frac{x}{c} + d$$

$$\Leftrightarrow v = \frac{x}{c} + d.$$

Como $\frac{y}{c} = \cosh v$, temos que $v = \operatorname{arccosh}\left(\frac{y}{c}\right)$. Logo,

$$\operatorname{arccosh}\left(\frac{y}{c}\right) = \frac{x}{c} + d.$$

Daí,

$$\frac{y}{c} = \cosh\left(\frac{x}{c} + d\right).$$

Logo,

$$y(x) = c \cosh \left(\pm \frac{x}{c} + d \right)$$

Considerando $y(0) = c$, resulta que

$$c = y(0) = c \cosh \left(\frac{0}{c} + d \right),$$

que implica em

$$1 = \cosh d,$$

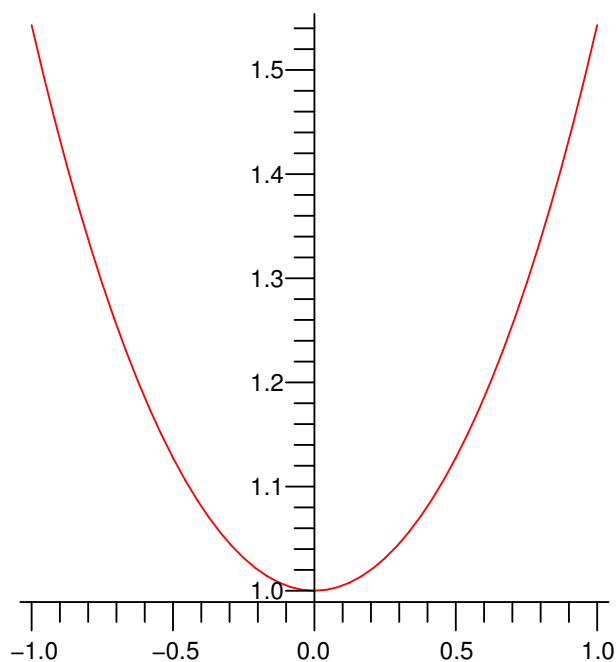
portanto

$$d = 0.$$

Como a função $y = \cosh$ é uma par, obtemos

$$y(x) = c \cosh \left(\pm \frac{x}{c} \right) = c \cosh \left(\frac{x}{c} \right).$$

□

Figura 2.4: catenária, $c=1$

2.1.2 Roulettes em relação a uma reta

A subseção anterior é a motivação desta subseção. Determinaremos propriedades úteis das roulettes em relação a uma reta as quais serão de fundamental importância para as próximas seções.

Definição 2.3. *A roulette de um ponto F associado a curva C em relação a uma reta tangente à C é a trajetória descrita por F enquanto C rola sobre esta reta tangente sem deslizar.*

A próxima proposição será de fundamental importância para demonstração dos próximos resultados.

Proposição 2.2. *Seja C uma curva regular com curvatura que não se anula e F um ponto que não pertence a C , com β a roulette de F associado a C em relação a uma reta*

tangente à C e \tilde{F} um ponto de β , \tilde{K} o ponto de contato de C com o eixo x (nesse instante). Então a roulette de F em relação à reta tangente de C é uma curva regular. Além disso, a reta normal a roulette em \tilde{F} passa por \tilde{K} ; ou seja, o segmento $\tilde{F}\tilde{K}$ é perpendicular à reta tangente à roulette em \tilde{F} .

Demonstração: Consideramos a roulette de $F = (x_0, y_0)$ associada à curva C parametrizada por $\alpha(\bar{s})$, onde \bar{s} é o parâmetro comprimento de arco da curva C .

A Figura 2.5 representa dois instantes diferentes.

- No primeiro instante, antes de C começar a rolar, estão indicados o ponto $F = (x_0, y_0)$, a reta t tangente a C em $K = \alpha(\bar{s})$, o ponto $P \in t$, tal que $FP \perp t$ e os vetores tangente e normal à C ($\alpha'(\bar{s}) = \alpha'$ e $n(\bar{s}) = n$).
- O segundo momento representa o instante em que C rolou sobre o eixo x , sem deslizar, até o ponto K (agora representado por \tilde{K}) ser tangente ao eixo x .

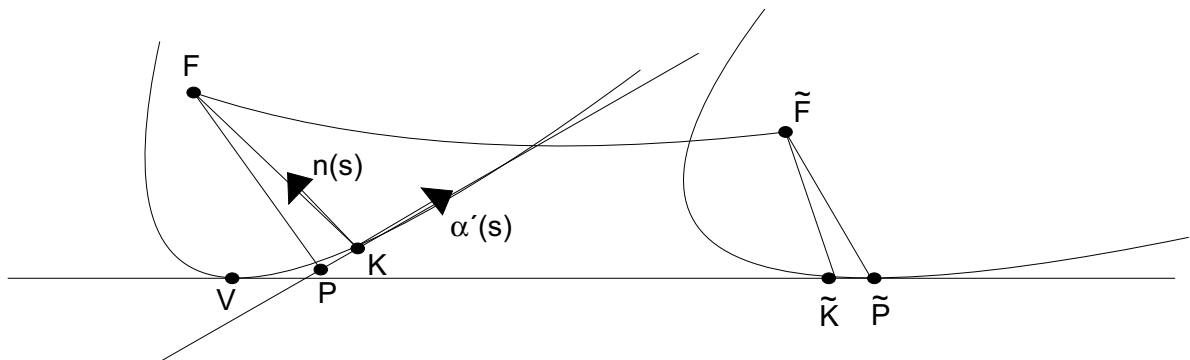


Figura 2.5: Uma roulette

Esta demonstração será feita em três etapas:

- 1) determinaremos o vetor \overrightarrow{FK} ;
- 2) determinaremos uma parametrização $\beta(\bar{s})$ para a roulette;
- 3) calcularemos $\left\langle \overrightarrow{\tilde{F}\tilde{K}}, \overline{\alpha'}(\bar{s}) \right\rangle$, concluindo a demonstração.

Suponhamos C orientada, de tal modo que o vetor normal unitário $n(\bar{s})$ em $K = \alpha(\bar{s})$ aponte para “dentro” (veja figura (2.5)).

$$\text{Temos } \overrightarrow{FK} = \left\langle \overrightarrow{FK}, \alpha' \right\rangle \alpha' + \left\langle \overrightarrow{FK}, n \right\rangle n = |PK|\alpha' - |PF|n.$$

No segundo instante, C rolou até K ser tangente ao eixo x (K agora representado por \tilde{K}). Nesse instante os vetores $(1, 0)$ e $(0, 1)$ desempenham o papel de vetores tangente e normal, respectivamente, à C em \tilde{K} e

$$\overrightarrow{\tilde{F}\tilde{K}} = \left(\langle \overrightarrow{FK}, \alpha' \rangle, \langle \overrightarrow{FK}, n \rangle \right) = (|PK|, |PF|).$$

As coordenadas de $\tilde{F} = (\tilde{x}, \tilde{y})$ são dadas por

$$\begin{cases} \tilde{x} &= |V\tilde{K}| - |\tilde{P}\tilde{K}| = |V\tilde{K}| - |PK| \\ \tilde{y} &= |\tilde{P}\tilde{F}| = |PF|, \end{cases} \quad (2.5)$$

onde $|V\tilde{K}|$ é igual ao comprimento de arco de C entre $V = \alpha(0)$ e $K = \alpha(\bar{s})$. Logo $|V\tilde{K}| = \bar{s}$, pois \bar{s} é o parâmetro comprimento de arco de C . Como

$$|PK| = \langle \overrightarrow{FK}, \alpha' \rangle$$

e

$$|PF| = -\langle \overrightarrow{FK}, n \rangle,$$

uma parametrização da roulette de F é

$$\beta(\bar{s}) = (\bar{s} - \langle \overrightarrow{FK}, \alpha' \rangle, -\langle \overrightarrow{FK}, n \rangle). \quad (2.6)$$

O vetor $\overrightarrow{FK} = \alpha(\bar{s}) - F$, daí, $\frac{d}{d\bar{s}}\overrightarrow{FK} = \alpha'$. Assim o vetor tangente de $\beta(\bar{s})$ é

$$\begin{aligned} \beta'(\bar{s}) &= \left(1 - \frac{d}{d\bar{s}} \langle \overrightarrow{FK}, \alpha' \rangle, -\frac{d}{d\bar{s}} \langle \overrightarrow{FK}, n \rangle \right) \\ &= \left(1 - \left(\left\langle \frac{d}{d\bar{s}} \overrightarrow{FK}, \alpha' \right\rangle + \langle \overrightarrow{FK}, \alpha'' \rangle \right), -\left\langle \frac{d}{d\bar{s}} \overrightarrow{FK}, n \right\rangle + \langle \overrightarrow{FK}, n' \rangle \right) \\ &= \left(1 - \left(\langle \alpha', \alpha' \rangle + \langle \overrightarrow{FK}, \alpha'' \rangle \right), -\langle \alpha', n \rangle + \langle \overrightarrow{FK}, n' \rangle \right) \\ &= \left(-\langle \overrightarrow{FK}, \alpha'' \rangle, -\langle \overrightarrow{FK}, n' \rangle \right) \\ &= \kappa \left(-\langle \overrightarrow{FK}, n \rangle, \langle \overrightarrow{FK}, \alpha' \rangle \right) \\ &= \kappa(\pm|PF|, \pm|PK|), \end{aligned}$$

pois pela fórmula de Frenet, $\alpha'' = \kappa n$ e $n' = -\kappa \alpha'$, onde κ é a curvatura de C em $\alpha(\bar{s})$.

Portanto,

$$\langle \overrightarrow{\tilde{F}\tilde{K}}, \overrightarrow{F'}(\bar{s}) \rangle = \kappa(-|PK| \cdot |PF| + |(-PF)|(-|PK|)) = 0,$$

o que conclui a demonstração. A afirmação de que a roulette é uma curva regular é resultado imediato da equação $\beta'(s) = \kappa(-|PF|, -|PK|)$, pois $\kappa \neq 0$. \square

Observação 2.1: Na demonstração da Proposição 2.2, para deduzirmos uma equação para $\beta(\bar{s})$ utilizamos a hipótese de que a reta t , tangente à C , tem inclinação positiva (figura 2.5). No entanto, se t tivesse inclinação negativa, com a mesma escolha de orientação em C , obteríamos a mesma parametrização $\beta(\bar{s})$ para a roulette.

Observação 2.2: A Proposição 2.2 foi demonstrada sob a hipótese de que a curvatura de C não se anula, o que garante que a trajetória de F é uma curva regular.

Corolário 2.1. *Seja $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ a reparametrização de $\beta(\bar{s})$ pelo parâmetro comprimento de arco s . Então, com a mesma notação da Proposição 2.2,*

$$|\tilde{F}\tilde{K}| = \pm|\tilde{P}\tilde{F}| \left(\frac{dx}{ds}\right)^{-1} = \pm y(s) \left(\frac{dx}{ds}\right)^{-1}, \quad (2.7)$$

onde \tilde{K} é o ponto de contato de C com o eixo x .

Demonstração: Com efeito, como visto na proposição anterior, $\beta'(\bar{s}) = \kappa(-|PF|, -|PK|) = -\kappa(|PF|, |PK|)$, logo

$$|\beta'(\bar{s})| = |\kappa|\sqrt{|PF|^2 + |PK|^2} = |\kappa||FK|.$$

Por hipótese, $\kappa \neq 0$, daí

$$\frac{\beta'(\bar{s})}{|\beta'(\bar{s})|} = \pm \left(\frac{|PF|}{|FK|}, \frac{|PK|}{|FK|} \right).$$

Como $\gamma'(s) = (x(s), y(s))$ é a reparametrização pelo comprimento, então

$$\frac{dx}{ds} = \pm \frac{|PF|}{|FK|} = \pm \frac{y(s)}{|FK|}.$$

\square

2.1.3 A Ondulária

Nesta seção faremos um estudo da ondulária. A Proposição (2.4) é a parte central e aqui alguns resultados serão admitidos e usados sem prova, bem como alguns cálculos serão omitidos.

A elipse de focos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$ é o conjunto dos pontos $K \in \mathbb{R}^2$ tais que a soma dos comprimentos dos raios focais é constante, ou seja

$|F_1K| + |F_2K| = 2a > 0$, onde $a > c$ é o comprimento do semi-eixo maior, e $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ o comprimento do semi-eixo menor.

Sabemos que, $\alpha(t) = (a \cos(t), b \sin(t))$, $t \in \mathbb{R}$ é a curva cujo traço é a elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e sua curvatura é $K(t) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t))^{3/2}}$. Por esta afirmação e pela Proposição (2.2) segue imediatamente que

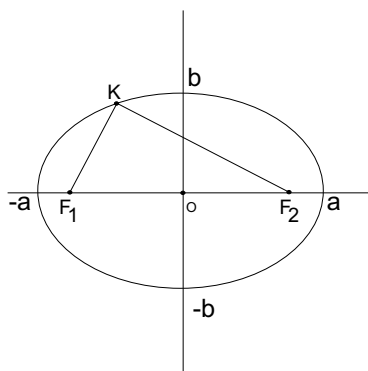


Figura 2.6: elipse

Proposição 2.3. *A roulette de um dos focos de uma elipse (ondulária) em relação a uma reta tangente é uma curva regular.*

Analogamente ao caso da parábola, faremos uso de propriedades da tangente t , para deduzir uma equação para a ondulária.

Proposição 2.4. *Seja $\beta(s) = (x(s), y(s))$ a parametrização da ondulária pelo comprimento de arco. Então a função coordenada $x(s)$ satisfaz*

$$\frac{dx}{ds} = \pm \frac{y(s)^2 + b^2}{2ay(s)}, \quad (2.8)$$

sendo “ a ” o semi-eixo maior e “ b ” o semi-eixo menor da elipse.

Demonstração: Vamos considerar a elipse de centro O e semi-eixos maior e menor dados por a e b . Consideramos ainda o círculo de centro O e raio a . Relativamente à elipse e o círculo, temos

-
- 1) O ângulo formado pelos raios focais e a tangente t são iguais (figura 2.7);
 - 2) Os pontos P_1 e P_2 de intersecção de t com o círculo de centro O e raio a , são tais que $P_1F_1 \perp t$ e $P_2F_2 \perp t$;
 - 3) $|P_1F_1| \cdot |P_2F_2| = b^2$.

As duas últimas propriedades são menos conhecidas, por isso as admitiremos. Na figura 2.8, consideramos a trajetória do foco F_2 da elipse enquanto ela rola sem deslizar sobre o eixo x .

Os triângulos F_1P_1K e F_2P_2K são semelhantes. Logo

$$\frac{|P_1F_1|}{|P_2F_2|} = \frac{|F_1K|}{|F_2K|}. \quad (2.9)$$

Manipulando (2.9), e usando 3) temos

$$\frac{|P_1F_1|}{|P_2F_2|} = \frac{|P_1F_1| \cdot |P_2F_2|}{(|P_2F_2|)^2} = \frac{b^2}{(|P_2F_2|)^2}.$$

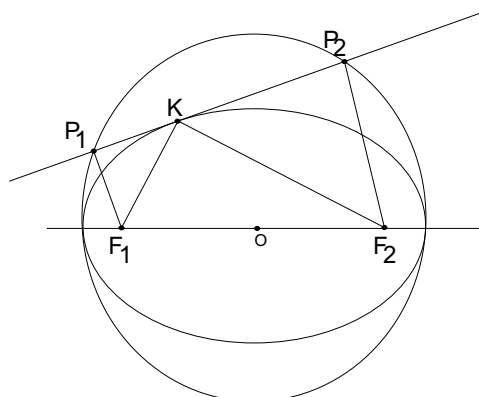


Figura 2.7: Segmentos ortogonais na elipse

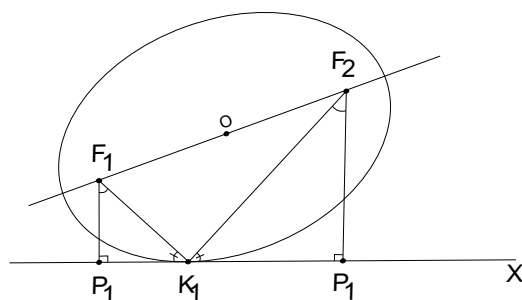


Figura 2.8: Elipse rolando

Além disso,

$$\frac{|F_1K|}{|F_2K|} = \frac{|F_1K| + |F_2K|}{|F_2K|} - \frac{|F_2K|}{|F_2K|} = \frac{2a}{|F_2K|} - 1,$$

e, portanto,

$$\frac{b^2}{(|P_2F_2|)^2} = \frac{2a}{|F_2K|} - 1. \quad (2.10)$$

Pela Proposição 2.3 a roulette de uma elipse é uma curva regular e portanto admite parametrização pelo comprimento de arco. O segmento $|P_2F_2|$ é a coordenada y da roulette da elipse e pelo Corolário 2.1,

$$|F_2K| = \pm y(s) \left(\frac{dx}{ds} \right)^{-1}$$

que, ao ser substituída em (2.10), dá

$$\frac{b^2}{y^2(s)} = \pm \frac{2a}{y(s)} \left(\frac{dx}{ds} \right)^{-1}, \quad (2.11)$$

sendo s o parâmetro comprimento de arco da roulette. Então

$$\frac{dx}{ds} = \pm \frac{y(s)^2 + b^2}{2ay(s)},$$

o que demonstra a proposição. Esta última equação possui solução em termos de funções elípticas.

Observação 2.3: Considerações sobre a equação $\frac{dx}{ds} = \pm \frac{y(s)^2 + b^2}{2ay(s)}$.

a) no caso em que $a = b$ a elipse é um círculo de raio a e focos $F_1 = F_2$ e a roulette se reduz a uma reta da forma $y = a$;

b) no caso limite $b = 0$ isto é,

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{dx}{ds} = \pm \frac{y(s)}{2a}$$

a elipse degenera-se em um segmento de reta de comprimento $2a$, e F_2 em um dos extremos do segmento. Nesse caso, a roulette é constituída por semi-círculos de raio $2a$.

2.1.4 A Nodária

Por fim faremos estudo da nodária, e neste caso a Proposição 2.6 é o ponto central desta seção. Também, aqui não apresentaremos todas as contas e alguns resultados serão aceitos.

Definição 2.4. A Hipérbole de focos F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos K do plano tais que

$$|F_1K| - |F_2K| = \pm 2a; \quad (2.12)$$

em que $a < c$. Sendo a o semi-eixo transverso e $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ o semi-eixo conjugado. Os segmentos $|F_1K|$ e $|F_2K|$ são denominados raios focais.

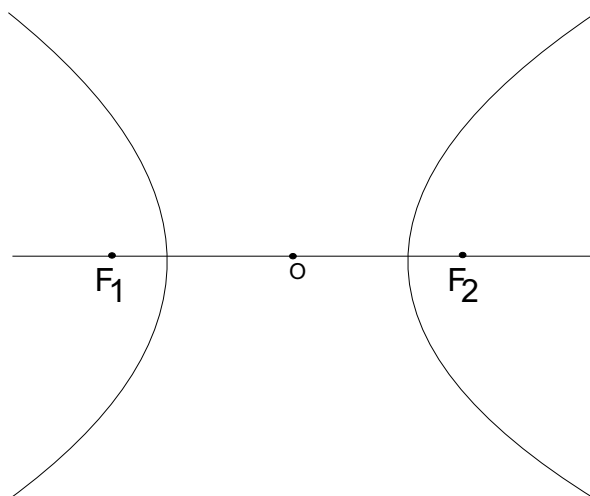


Figura 2.9: Hipérbole de focos F_1 , F_2 , centrada na origem

Pela Proposição (2.2) temos que:

Proposição 2.5. *A roulette de um dos focos de uma hipérbole (nodária) em relação a uma reta tangente é uma curva regular.*

Analogamente aos casos da parábola e da elipse, faremos uso de propriedades da tangente t , para deduzir uma equação para a nodária.

Proposição 2.6. *Seja $\beta(s) = (x(s), y(s))$ a parametrização da nodária pelo comprimento de arco. Então*

$$\frac{dx}{ds} = \pm \frac{y(s)^2 - b^2}{2ay(s)}, \quad (2.13)$$

sendo a e b os semi-eixos transverso e conjugado da hipérbole.

Demonstração: Em relação a hipérbole de semi-eixos a e b , centro O e focos F_1 e F_2 temos:

1) seja t a reta tangente à hipérbole em K , então t é a bissetriz do ângulo determinado pelos raios focais.

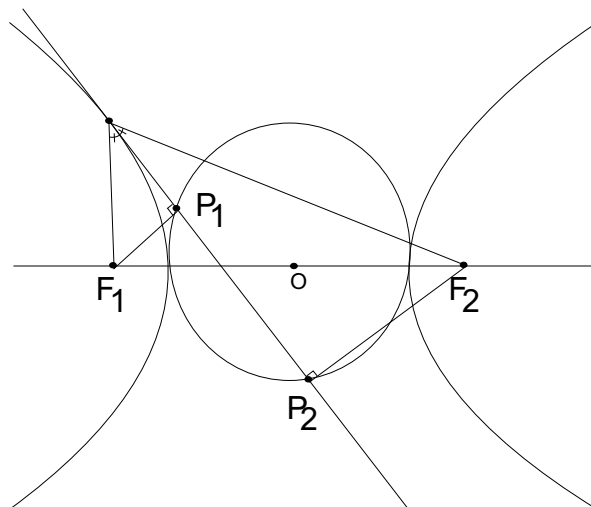


Figura 2.10: Segmentos ortogonais na hipérbole

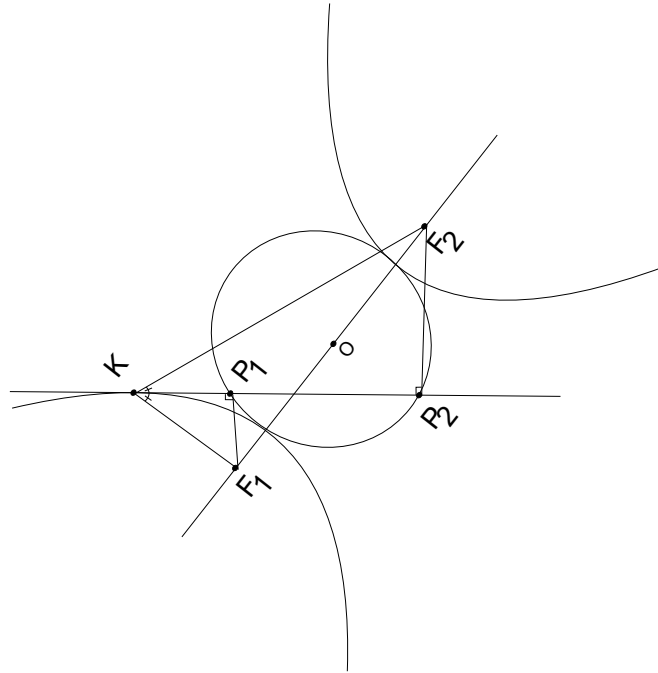


Figura 2.11: Hipérbole rolando

2) t intercepta o círculo de raio a e centro O , em pontos P_1 e P_2 tais que $P_1F_1 \perp t$ e $P_2F_2 \perp t$;

$$3) |P_1F_1| \cdot |P_2F_2| = b^2.$$

Na figura (2.11), consideramos a trajetória do foco F_2 enquanto a hipérbole rola sobre o eixo x .

Como $P_2\widehat{K}P_1 = P_1\widehat{K}F_2$ e $F_1\widehat{P_1}K = K\widehat{P_2}F_2 = \frac{\pi}{2}$, observamos que os triângulos F_1KP_1 e F_2KP_2 são semelhantes (três ângulos iguais), logo

$$\frac{|P_1F_1|}{|P_2F_2|} = \frac{|F_1K|}{|F_2K|}. \quad (2.14)$$

Manipulando (2.14) temos,

$$\frac{|P_1F_1|}{|P_2F_2|} = \frac{|P_1F_1| \cdot |P_2F_2|}{|P_2F_2|^2} = \frac{b^2}{|P_2F_2|^2}.$$

Além disso,

$$\frac{|F_1K|}{|F_2K|} = \frac{|F_1K| - |F_2K|}{|F_2K|} + \frac{|F_2K|}{|F_2K|} = \pm \frac{2a}{|F_2K|} + 1.$$

Portanto

$$\frac{b^2}{|P_2F_2|^2} = \pm \frac{2a}{|F_2K|} + 1. \quad (2.15)$$

Pela Proposição 2.5 a roulette da hipérbole é uma curva regular. Pelo Corolário 2.1 $|F_2K| = \pm y(s) \left(\frac{dx}{ds}\right)^{-1}$ que, ao ser substituída em (2.15), mostra que a equação da roulette de F_2 satisfaz

$$\frac{b^2}{y^2(s)} = \pm \frac{2a}{y(s)} \frac{dx}{ds} + 1, \quad (2.16)$$

sendo s o parâmetro comprimento de arco da roulette.

Então,

$$\frac{dx}{ds} = \pm \frac{y^2(s) - b^2}{2ay(s)},$$

o que demonstra a proposição. □

Novamente, a equação anterior possui solução em termos de funções elípticas.

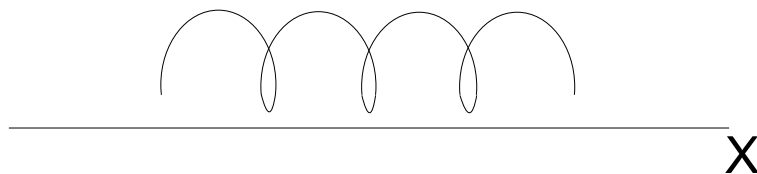


Figura 2.12: Nodária

2.1.5 A Curvatura Média do Catenóide, Ondulóide e do Nodóide

Nesta seção realizaremos o cálculo das curvaturas médias das superfícies obtidas pela rotação das roulettes: a catenária, a ondulária e a nodária, que originam o catenóide, o ondulóide e o nodóide, respectivamente. Em seguida, na próxima seção iremos fazer a volta do Teorema de Delaunay assim mostraremos o objetivo deste capítulo.

No Capítulo 1, observamos que uma superfície de rotação pode ser parametrizada por $X(u, v) = (x(u), y(u)\cos v, y(u)\sin v)$, e que a expressão da curvatura média é dada por

$$H = \frac{x''(u)y'(u) - x'(u)y''(u)}{[x'(u)^2 + y'(u)^2]^{3/2}} - \frac{x'(u)}{y(u)[x'(u)^2 + y'(u)^2]^{1/2}}$$

ou

$$H = x''(s)y'(s) - x'(s)y''(s) - \frac{x'(s)}{y(s)}, \quad (2.17)$$

se a curva geratriz da superfície está parametrizada pelo comprimento de arco.

Lema 2.5. *Se a curva geratriz de uma superfície de rotação com eixo de rotação x está parametrizada pelo comprimento de arco s e $x'(s) = f(y(s))$, então*

$$H = -\frac{1}{2} \left(f'(y) + \frac{f(y)}{y} \right). \quad (2.18)$$

Demonstração: Se $x'(s)$ é como acima, então

$$y'(s) = \pm(1 - f^2(y))^{1/2}$$

o que nos dá,

$$y'' = \pm(1 - f^2(z))^{-1/2} f f' y' = -f(y) f'(y),$$

enquanto que

$$x'' = f'(y) y'$$

nos dá

$$x'' y' = f'(y) (y')^2 = f'(y) (1 - f^2(y)).$$

Então, pela equação (2.17),

$$H = -\frac{1}{2} \left(f^2(y) f'(y) + f'(y) (1 - f^2(y)) + \frac{f(y)}{y} \right) = -\frac{1}{2} \left(f'(y) + \frac{f(y)}{y} \right). \quad \square$$

Pela equação (2.3) $\frac{d\bar{x}}{ds} = \frac{c}{y}$, por (2.9) $\frac{dx}{ds} = \pm \frac{y^2 + b^2}{2ay}$, de (2.14) $\frac{dx}{ds} = \pm \frac{y^2 - b^2}{2ay}$ e por (2.19) calculamos H das superfícies obtidas pela rotação das roulettes das cônicas, respectivamente:

***Catenóide** Se $f(\bar{y}) = \frac{c}{\bar{y}}$, então

$$H = -\frac{1}{2} \left(-\frac{c}{y^2} + \frac{c}{y^2} \right) = 0.$$

Pelos cálculos acima, a curvatura média do catenóide é $H = 0$, portanto o catenóide é uma superfície mínima observando que a única superfície mínima de rotação (Teorema de

Catalan).

***Ondulóide, Cilindro e Esfera** Se $f(y) = \pm \frac{y^2 + b^2}{2ay}$, então

$$H = -\frac{1}{2} \left(\pm \frac{4ay^2 - (y^2 + b^2)2a}{4a^2y^2} \pm \frac{y^2 + b^2}{2ay^2} \right) = \pm \frac{1}{2a}.$$

***Nodóide** Se $f(y) = \pm \frac{y^2 - b^2}{2ay}$,

$$H = -\frac{1}{2} \left(\pm \frac{4ay^2 - (y^2 - b^2)2a}{4a^2y^2} \pm \frac{y^2 - b^2}{2ay^2} \right) = \pm \frac{1}{2a}.$$

2.1.6 Superfícies de Rotação com Curvatura Média Constante

Nesta seção vamos estudar uma superfície rotacional S de curvatura média diferente de zero e verificar que esta superfície satisfaz as mesmas condições do Ondulóide e Nodóide.

Pelo que vimos anteriormente, se uma superfície rotacional S com curva geratriz parametrizada pelo comprimento de arco $(x(s), y(s), 0)$ satisfaz

$$\frac{dx}{ds} = \pm \frac{y(s)^2 \pm b^2}{2ay(s)},$$

para constantes a e b , então a curvatura média de S é não nula.

Proposição 2.7. *Uma superfície rotacional S possui curvatura média constante $H \neq 0$ se, e somente se, a curva geratriz de S satisfaz*

$$y^2 \pm 2ay \frac{dx}{ds} \pm b^2 = 0, \quad (2.19)$$

onde a e b são constantes.

Demonstração: Como S é uma superfície parametrizada regular podemos supor que localmente a sua curva geratriz é o gráfico de uma função, isto é, sua curva geratriz pode ser parametrizada por $(x, \tilde{y}(x), 0)$. Logo,

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{y}''(x)}{(1 + \tilde{y}'^2)^{3/2}} - \frac{1}{\tilde{y}(x)(1 + \tilde{y}'(x)^2)^{1/2}} \right). \quad (2.20)$$

Como S é de curvatura média constante, escrevemos $H = \frac{1}{2a} > 0$. Logo

$$\left(\frac{\tilde{y}''(x)}{(1 + \tilde{y}'(x)^2)^{3/2}} - \frac{1}{\tilde{y}(x)(1 + \tilde{y}'(x)^2)^{1/2}} \right) = \frac{1}{a}$$

equivalentemente

$$a \frac{\tilde{y}''(x) - (1 + \tilde{y}'(x)^2)}{\tilde{y}(x)(1 + \tilde{y}'(x)^2)^{3/2}} = 1,$$

ou seja,

$$a \frac{\tilde{y}''(x) - (1 + \tilde{y}'(x)^2)}{(1 + \tilde{y}'(x)^2)^{3/2}} - \tilde{y}(x) = 0.$$

Multiplicando ambos os membros desta última expressão por $2\tilde{y}'(x)$, obtemos

$$2a\tilde{y}'(x) \frac{\tilde{y}''(x) - (1 + \tilde{y}'(x)^2)}{(1 + \tilde{y}'(x)^2)^{3/2}} - 2\tilde{y}'(x)\tilde{y}(x) = 0. \quad (2.21)$$

A expressão (2.21), pode ser integrada em x . E assim,

$$-\frac{2a\tilde{y}(x)}{(1 + \tilde{y}'(x)^2)^{1/2}} - \tilde{y}(x)^2 = \pm b^2, \quad (2.22)$$

sendo b^2 uma constante. Agora, reparametrizando pelo comprimento de arco $s = \int_0^x \sqrt{1 + \tilde{y}'(t)^2} dt$, obtemos

$$-2ay(s) \frac{dx}{ds} - y(s)^2 = \pm b^2, \quad (2.23)$$

pois $\frac{dx}{ds} = (1 + \tilde{y}'(x)^2)^{-1/2}$. Isolando $\frac{dx}{ds}$ em (2.23), resulta em

$$\frac{dx}{ds} = \frac{y(s)^2 \pm b^2}{2ay(s)}.$$

Considerando também o caso $a < 0$, obtemos

$$\frac{dx}{ds} = \pm \frac{y(s)^2 \pm b^2}{2ay(s)}.$$

Considerando, também, o caso em que $H = 0$, e já tomando a curva geratriz da superfície parametrizada pelo comprimento de arco, obtemos

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{y}''(x)}{(1 + \tilde{y}'(x)^2)^{3/2}} - \frac{1}{\tilde{y}(x)(1 + \tilde{y}'(x)^2)^{1/2}} \right).$$

Fazendo $H = 0$ em (2.20), obtemos

$$\frac{\tilde{y}''(x)}{1 + \tilde{y}'(x)^2} = \frac{1}{\tilde{y}(x)}.$$

Definindo $u(x) = \tilde{y}'(x)$, obtemos $\tilde{y}''(x) = \frac{du}{dx} = \frac{du}{d\tilde{y}}\tilde{y}'(x) = \frac{du}{d\tilde{y}}u$. Substituindo este resultado na última equação, obtemos

$$\frac{\frac{du}{d\tilde{y}}u}{1 + \tilde{u}^2} = \frac{1}{\tilde{y}},$$

que possui $y = c(1 + u^2)$ como solução, onde $c \neq 0$ é uma constante. Daí $\tilde{y}' = \sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^2 - 1}$, cuja solução é $y = c \cosh\left(\frac{x}{c} + \tilde{c}\right)$, ou seja, a catenária. Reciprocamente, se a curva geratriz de uma superfície rotacional S satisfaz (2.20), ou é uma catenária, pelos cálculos da seção anterior concluímos que S possui curvatura média constante. \square

Teorema 2.2. (Delaunay) *Uma superfície rotacional de curvatura média constante é obtida pela rotação da roulette de uma cônica.*

Demonstração: Pela Proposição (2.7) a curva geratriz de S satisfaz

$$y^2 \pm 2ay \frac{dx}{ds} \pm b^2 = 0, \quad (*)$$

onde a e b são constantes. As superfícies rotacionais cujas geratrizes satisfazem (*) são as geradas pelas roulettes das cônicas como visto nas Proposições 2.1, 2.4, 2.6. Concluindo assim a prova do Teorema de Delaunay. \square

As superfícies rotacionais de curvatura média constante não nula são ditas Superfícies de Delaunay.

Figura 2.13: As roulettes de Delaunay

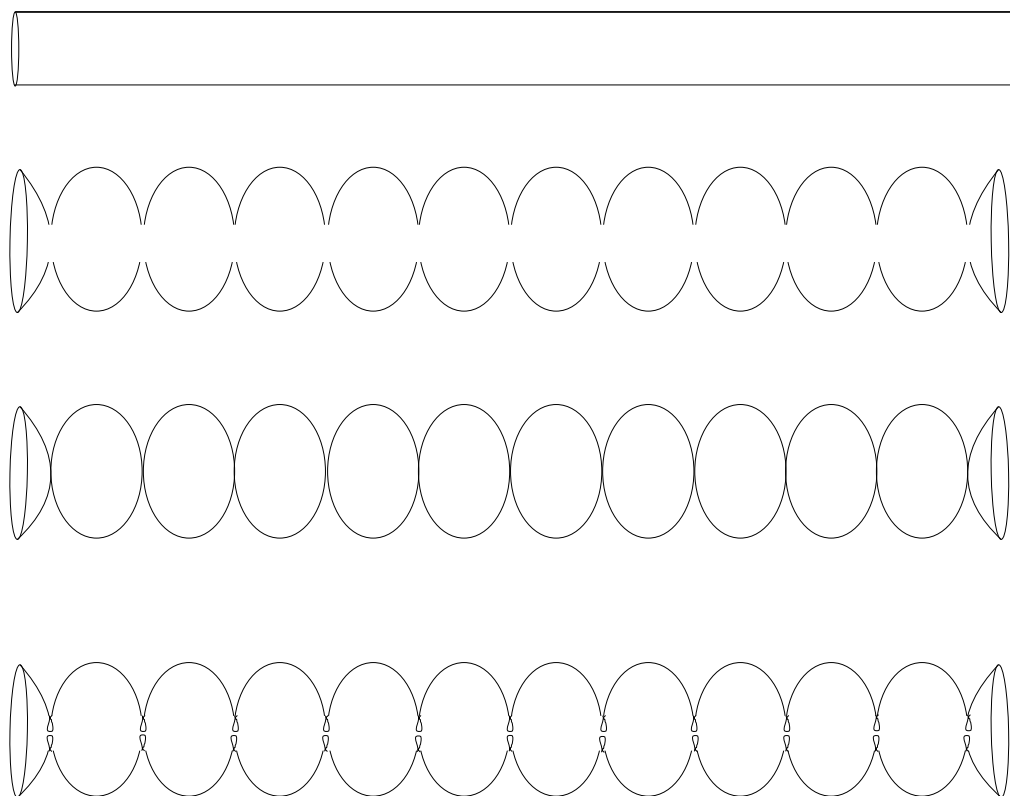


Figura 2.14: As superfícies de Delaunay com $H \neq 0$

Capítulo 3

Classificação das Superfícies de Rotação Completas Tipo Delaunay

3.1 Condições para Existência de Superfícies de Rotação Tipo Delaunay

No século passado, mais precisamente no ano de (1841), C. Delaunay [?] descobriu e classificou as superfícies de rotação com curvatura média constante. Mais de um século depois, (1990) N. Kapouleas [?] construiu outros exemplos de superfícies propriamente mergulhadas, de topologia finita e de curvatura média constante. Ricardo e Toubiana consideraram superfícies M de classe $C^2 \subset \mathbb{R}^3$ orientáveis por um campo de vetores normais unitários N em que a curvatura média $H = H(N)$ e a curvatura de Gauss K satisfazem uma relação da forma:

$$H = f(H^2 - K), \quad (3.1)$$

onde f é uma função de classe C^1 no intervalo $[0, \infty)$. Supomos ainda que f verifica a relação:

$$\forall t \in [0, \infty), \quad 4t(f'(t))^2 < 1. \quad (3.2)$$

Neste caso, diremos que f é uma função elíptica. Se uma superfície M satisfaz a relação (3.1), onde f é uma função elíptica, diremos que M é uma superfície especial. Além disso, diremos que M está dentro da classe de f .

Quando $f(0) \neq 0$ a teoria de superfícies especiais possuem princípios e propriedades equivalentes à teoria de superfícies com curvatura média constante não nula. Por exemplo, as superfícies especiais satisfazem o seguinte princípio do máximo (ver [?]). Consideremos duas superfícies M_1 e M_2 tangentes num ponto interior P com M_1 acima de M_2 numa vizinhança de P . Supomos que M_1 e M_2 verificam a mesma relação 3.1 em relação a mesma função elíptica f , e com a mesma orientação normal N , nestas condições as superfícies são iguais numa vizinhança de P .

Quando $f(0) \neq 0$ diremos que M é uma superfície especial tipo curvatura média constante ou simplesmente que M é uma superfície especial. Mais ainda, se M é uma superfície de rotação completa diremos que M é uma superfície do tipo Delaunay.

As superfícies especiais completas de rotação verificando

$$2aH + K = b, \text{ com } a, b > 0,$$

foram tratadas em [?]. Podemos enunciar teoremas do tipo Hopf [?], ou Alexandrov [?], para as superfícies especiais. Se M é uma superfície especial compacta sem bordo imersa em \mathbb{R}^3 do mesmo tipo topológico que a esfera, então M é necessariamente a esfera de raio $\frac{1}{|f(0)|}$, ver [?]. Ainda mais, Meeks mostra que a única superfície especial compacta e mergulhada é a esfera na classe de f , considerando a esfera de raio $\frac{1}{|f(0)|}$. Existe outro resultado falando de superfícies especiais que é análogo ao resultado de uma superfície com curvatura média constante.

Se M é uma superfície especial completa com curvatura de Gauss identicamente nula, M terá que ser um cilindro reto.

Neste capítulo faremos o estudo detalhado das superfícies Tipo Delaunay.

Nosso objetivo é mostrar que existe uma única superfície de rotação Tipo Delaunay. No Teorema 3.1 provaremos a existência de uma superfície de rotação completa Tipo Delaunay, onde a curva que gera a superfície é uma curva periódica. Finalmente no Teorema 3.2 provaremos que toda superfície de rotação completa tipo Delaunay é do tipo da obtida no Teorema 3.1.

Todas as superfícies consideráveis serão em cada caso conexas e de classe C^2 . Lembremos que suporemos sempre que a função f é elíptica, ou seja que f verifica a desigualdade

(3.2), igualmente $f(0) \neq 0$, o caso $f(0) = 0$ já foi tratado pelos autores em [?](ver também [?]). Igualmente todas as superfícies de rotação terão sempre eixo x como central.

Consideremos inicialmente a seguinte definição:

Definição 3.1. Chamaremos F a função definida por:

$$F(\alpha, \beta, \delta) = \frac{\delta}{2(1 + \beta^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2\alpha(1 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}} - f \left(\left(\frac{\delta}{2(1 + \beta^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2\alpha(1 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}} \right)^2 \right),$$

onde $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ e $\delta \in \mathbb{R}$.

Observamos que como f é elíptica, para todo $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 \in \mathbb{R}$, $\delta_0 \in \mathbb{R}$ temos $\frac{\partial F}{\partial \delta}(\alpha_0, \beta_0, \delta_0) > 0$. De fato,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \delta} &= \frac{1}{2C^{\frac{3}{2}}} - f' \left(\frac{\delta}{2C^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2\alpha C^{\frac{1}{2}}} \right)^2 \cdot 2 \left(\frac{\delta}{2C^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2\alpha C^{\frac{1}{2}}} \right) \frac{1}{2(1 + \beta^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{2(1 + \beta^2)^{\frac{3}{2}}} (1 - f'(t^2)2t) > 0, \end{aligned}$$

onde $C = 1 + \beta^2$ e $t = \frac{\delta}{2(1 + \beta^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2\alpha(1 + \beta^2)^{\frac{1}{2}}}$.

Em consequência, F é estritamente crescente com respeito a terceira variável.

Para fixar as notações provaremos o seguinte Lema.

Lema 3.1. Seja $y : (a, b) \rightarrow (0, \infty)$ uma função estritamente positiva de classe C^2 . Seja M a superfície obtida pela rotação do gráfico de y com respeito ao eixo x . Sejam λ_1 , λ_2 e H respectivamente as curvaturas principais e a curvatura média de M calculada com respeito ao campo de vetores normal N de M apontado na direção oposta ao eixo de rotação, o eixo dos x (chamaremos este campo de campo normal exterior). Nestas condições temos:

$$\lambda_1 = \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ e } \lambda_2 = \frac{-\cos(\theta)}{y} = \frac{-1}{y(1 + (y')^2)^{\frac{1}{2}}},$$

onde θ é o ângulo que faz o eixo x com a tangente do gráfico de y , $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Em consequência M é uma superfície especial (isto é, satisfaz $H(N) = f(H^2 - K)$) se, e

somente se, y verifica a equação diferencial.

$$\frac{y''}{2(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2y(1+(y')^2)^{\frac{1}{2}}} = f \left(\left(\frac{y''}{2(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2y(1+(y')^2)^{\frac{1}{2}}} \right)^2 \right), \quad (3.3)$$

ou seja $F(y, y', y'') = 0$.

O *Lema 3.1* é uma simples consequência das propriedades de superfície de rotação.

Demonstração: Seja $\psi(x, \theta) = (x, y(x) \cos(\theta), y(x) \sin(\theta))$, $a < x < b$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, uma parametrização do gráfico de y em torno do eixo x . Nestas condições temos:

$$\psi_x = (1, y'(x) \cos(\theta), y'(x) \sin(\theta)),$$

$$\psi_\theta = (0, -y(x) \sin(\theta), y(x) \cos(\theta)),$$

$$\psi_{xx} = (0, y'(x) \cos(\theta), y''(x) \sin(\theta)),$$

$$\psi_{\theta\theta} = (0, -y'(x) \cos(\theta), -y(x) \sin(\theta)),$$

$$\psi_{x\theta} = (0, -y'(x) \sin(\theta), y'(x) \cos(\theta)).$$

Como

$$\sqrt{EG - F^2} = |\psi_x \wedge \psi_\theta|; \quad E = \langle \psi_x, \psi_x \rangle;$$

$$F = \langle \psi_x, \psi_\theta \rangle; \quad G = \langle \psi_\theta, \psi_\theta \rangle;$$

$$e = \frac{(\psi_x, \psi_\theta, \psi_{xx})}{|\psi_x \wedge \psi_\theta|}; \quad f = \frac{(\psi_x, \psi_\theta, \psi_{x\theta})}{|\psi_x \wedge \psi_\theta|} \quad e \quad g = \frac{(\psi_x, \psi_\theta, \psi_{\theta\theta})}{|\psi_x \wedge \psi_\theta|},$$

com $(\psi_x, \psi_\theta, \psi_{x\theta})$ representando o determinante, segue que:

$$e = -\frac{y''}{(1+(y')^2)^{\frac{1}{2}}}; \quad f = 0; \quad g = \frac{y}{(1+(y')^2)^{\frac{1}{2}}};$$

$$E = 1 + (y')^2; \quad F = 0 \quad e \quad G = y^2.$$

Ora, como M é uma superfície de rotação temos que:

$$\lambda_1 = \frac{e}{E} = \frac{y''}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}} \quad e$$

$$\lambda_2 = \frac{g}{G} = \frac{-\cos(\theta)}{y} = \frac{-1}{y(1+(y')^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Para mostrarmos que y satisfaz a equação (3.3) basta substituir λ_1 e λ_2 em $H = f(H^2 - K)$.

Observação 1: No *Lema 3.1*, λ_1 é uma das curvaturas principais da superfície de rotação M , é igualmente a curvatura do gráfico de y , ou seja a curva que descreve M . Por convenção ao longo deste trabalho, se M é uma superfície de rotação, λ_1 será sempre a curvatura da curva que descreve M e λ_2 a outra curvatura principal de M . Além disso as curvaturas principais serão sempre calculadas com a mesma orientação normal que foi adotada no *Lema 3.1*, a menos que seja mencionado o contrário.

Corolário 3.1. *Nas hipóteses do Lema 3.1, se o gráfico de y possui um ponto horizontal, ou seja, se existe $x_0 \in \mathbb{R}$, tal que $y'(x_0) = 0$, o gráfico de y é simétrico com respeito ao reta vertical $x = x_0$. Em consequência a superfície de rotação M gerada pelo gráfico de y é simétrico com respeito ao plano vertical $x = x_0$.*

Demonstração: O Teorema da Função Implícita e a observação seguinte à *Definição 3.1* mostram que próximo de x_0 a equação 3.3 é equivalente a dizer que y é solução de uma equação diferencial de segunda ordem. De fato, $F(y(x_0), y'(x_0), y''(x_0)) = 0$ e F é crescente com respeito a terceira variável, logo existe uma vizinhança U do ponto $(y(x_0), 0)$ em \mathbb{R}^2 , de uma vizinhança V de $y''(x_0)$ em \mathbb{R} e de uma única função h de classe C^1 de U em V verificando:

$$h(y(x_0), 0) = y''(x_0) \text{ e } \forall (\alpha, \beta) \in U, \forall \delta \in V, F(\alpha, \beta, \delta) = 0 \Leftrightarrow \delta = h(\alpha, \beta).$$

Consideremos a equação diferencial

$$y'' = h(y, y'), \text{ com } y(x_0) = \tau \text{ e } y'(x_0) = 0. \quad (3.4)$$

Concluimos observando que a função $z(x) = y(2x_0 - x)$ é solução da mesma equação diferencial com as mesmas condições iniciais. De fato, $z(x_0) = y(2x_0 - x_0) = y(x_0)$; $z'(x_0) = -y'(2x_0 - x_0) = -y'(x_0) = 0$; $z''(x_0) = y''(2x_0 - x_0) = y''(x_0) = h(y, y')$. Por fim é so notar que $z(x)$ satisfaz a equação (3.3).

O seguinte resultado, caracteriza a esfera de raio $\frac{1}{|f(0)|}$ como sendo a única superfície especial (relativamente à f) de rotação com um ponto umbílico.

Lema 3.2. *Consideremos uma superfície especial de rotação M , se M possui um ponto umbílico então M é obrigatoriamente parte de uma esfera de raio $\frac{1}{|f(0)|}$. Em consequência, se M não é uma superfície esférica, a função $(\lambda_1 - \lambda_2)$ não é nula e tem um sinal constante em M .*

Demonstração: Suponhamos para começar que M possui um ponto umbílico P fora do eixo de rotação, isto é, o eixo x . Seja γ a curva plana que gera M e passa por P . Notamos que a tangente de γ em P não é ortogonal ao eixo de rotação caso contrário, a curvatura principal $\lambda_2(P)$ de M em P será nula e do fato que P é um ponto umbílico a outra curvatura principal $\lambda_1(P)$ será igualmente nula. Daí $f(0) = 0$, o que contradiz a hipótese $f(0) \neq 0$.

Deduzimos disto que próximo de P a curva γ é o gráfico de uma função y de x e para uma translação podemos supor que P é um ponto de abscissa 0, ou seja $P = (0, y(0))$. Como no *Corolário 3.1*, e utilizando o Teorema da Função Implícita, podemos mostrar que, próximo de $x = 0$, y é a solução de uma equação diferencial de segunda ordem, $\varphi'' = h(\varphi, \varphi')$, com as condições iniciais $\varphi(0) = y(0)$ e $\varphi'(0) = y'(0)$. Além disso, a hipótese $\lambda_1(P) = \lambda_2(P)$ implica que o centro de curvatura Q de γ em P se encontra no eixo dos x , tal que a distância de P a Q é igual ao raio de curvatura de γ em P , que é $\frac{1}{|\lambda_1(P)|}$. Finalmente, do fato que M é uma superfície especial e que P é um ponto umbílico deduzimos que:

$$\lambda_1(P) = \lambda_2(P) = f(0).$$

Isto nos permite concluir que a função $z(x)$ cuja gráfico é a semi-circunferência ortogonal ao eixo x de centro Q e raio $r = \frac{1}{|\lambda_1(P)|} = \frac{1}{|f(0)|}$ é solução da mesma equação diferencial y com as mesmas condições iniciais no ponto $x = 0$, sendo assim M é esférica.

Supomos agora que M possui um ponto umbílico P no eixo dos x . Chamaremos de novo γ a curva plana que gera M passando por P . Como supomos M de classe C^2 , γ terá que ser perpendicular ao eixo x no ponto P . O mesmo tipo de raciocínio aplicado anteriormente mostra então que M é esférica.

Observação: O *Lema 3.2* mostra que se M é uma superfície especial de rotação não esférica então M não possui pontos umbílicos. Em consequência, se γ é a curva plana que

gera M , todo ponto de γ terá seu centro fora do eixo x .

Lema 3.3. *Seja M uma superfície especial de rotação não-esférica gerada pelo gráfico de uma função y de classe C^2 definida em um intervalo (a, b) , $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Sejam λ_1 e λ_2 as curvaturas principais de M calculadas com respeito ao campo normal exterior, ou seja, no sentido oposto ao eixo de rotação. Então temos que:*

$$\forall x \in (a, b), \lambda_2'(x) = \frac{y'}{y}(\lambda_1 - \lambda_2).$$

Em consequência, se y' possui um sinal constante então as funções λ_1 e λ_2 são estritamente monótonas no intervalo (a, b) com sentido de crescimento oposto.

Demonstração: Como

$$\lambda_2 = \frac{-1}{y(1 + (y')^2)^{\frac{1}{2}}}, \text{ segue que}$$

$$\lambda_2'(x) = \frac{y'(1 + (y')^2)^{\frac{1}{2}}}{y^2(1 + (y')^2)} + \frac{2yy'y''}{2(1 + (y')^2)^{\frac{1}{2}}(y^2(1 + (y')^2))},$$

ou seja,

$$\lambda_2'(x) = \frac{y'}{y} \left(\frac{1}{y(1 + (y')^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}} \right),$$

o que implica em

$$\lambda_2'(x) = \frac{y'}{y} \left(\frac{1}{y(1 + (y')^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = \frac{y'}{y}(\lambda_1 - \lambda_2).$$

O único ponto não trivial à mostrar é que $\lambda_1(x)$ e $\lambda_2(x)$ são igualmente monótonas com sentido de crescimento oposto. Para isso é suficiente mostrar que $\lambda_1'(x)$ possui sinal oposto ao de $\lambda_2'(x)$ para todo x em (a, b) . Utilizando o fato que M é uma superfície especial temos que:

$$\forall x \in (a, b), \frac{\lambda_1(x)}{2} + \frac{\lambda_2(x)}{2} = f \left(\left(\frac{\lambda_1(x)}{2} - \frac{\lambda_2(x)}{2} \right)^2 \right).$$

Derivando a última igualdade obtemos:

$$\frac{\lambda_1'(x)}{2} + \frac{\lambda_2'(x)}{2} = f' \left(\left(\frac{\lambda_1(x)}{2} - \frac{\lambda_2(x)}{2} \right)^2 \right) 2 \left(\frac{\lambda_1'(x)}{2} - \frac{\lambda_2'(x)}{2} \right) \left(\frac{\lambda_1'(x)}{2} - \frac{\lambda_2'(x)}{2} \right),$$

logo, temos que:

$$\left| \frac{\lambda'_1(x)}{2} + \frac{\lambda'_2(x)}{2} \right| = \left| f' \left(\left(\frac{\lambda_1(x)}{2} - \frac{\lambda_2(x)}{2} \right)^2 \right) 2 \left(\frac{\lambda'_1(x)}{2} - \frac{\lambda'_2(x)}{2} \right) \left(\frac{\lambda_1(x)}{2} - \frac{\lambda_2(x)}{2} \right) \right|.$$

Como f é elíptica temos:

$$\left| \left(\frac{\lambda'_1(x)}{2} + \frac{\lambda'_2(x)}{2} \right) \right| < \left| \left(\frac{\lambda'_1(x)}{2} - \frac{\lambda'_2(x)}{2} \right) \right|,$$

logo,

$$|\lambda'_1(x) + \lambda'_2(x)| < |\lambda'_1(x) - \lambda'_2(x)|. \text{ Portanto, } \lambda'_1(x) \text{ tem sinal oposto ao de } \lambda'_2(x).$$

Podemos agora enunciar as condições necessárias para a existência de superfícies especiais.

Proposição 3.1. *Suponha que existe uma superfície especial M completa de rotação e mergulhada tal que a curva geratriz γ possui um mínimo local em um ponto $(0, \tau)$, $\tau > 0$. Nestas condições a curva γ é um gráfico que está acima do eixo de rotação. Além disso, f e τ verificam necessariamente:*

$$(a) \quad -\frac{1}{2\tau} - f \left(\left(\frac{1}{2\tau} \right)^2 \right) \leq 0;$$

$$(b) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} (t - f(t^2)) > \frac{1}{\tau};$$

$$(c) \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} (t - f(t^2)) < 0;$$

(d) $f(0) < 0$, e a relação (a) é uma igualdade se, e somente se, M é o cilindro especial da classe.

Demonstração: Suponhamos que uma tal superfície M existe. Chamaremos γ a curva plana que gera M . Por hipótese γ tem um mínimo local no ponto $(0, \tau)$ com $\tau > 0$. Vamos começar mostrando que γ é um gráfico. Supomos o contrário, γ possui um ponto P_1 onde a tangente é vertical, ou seja perpendicular ao eixo dos x . Como γ é simétrica com respeito a reta $x = 0$ (ver *Corolário 3.1*), podemos supor que x_1 abscissa de P_1 é positiva, $x_1 > 0$. Suporemos igualmente que P_1 é um primeiro ponto vertical de abscissa

positiva. Observemos que se γ possuísse um outro ponto horizontal (x_0, y_0) , $x_0 > 0$, entre o mínimo $P = (0, \tau)$ e o ponto P_1 , a curva γ será igualmente simétrica com respeito a reta vertical $x = x_0$ (Ver *Corolário 3.1*). Desse fato γ seria um gráfico no eixo dos x e não teria ponto vertical, o que contradiz a existência de P_1 . Deduzimos então que entre os ponto P e P_1 , γ é o gráfico de uma função estritamente crescente e convexa.

Observamos igualmente que no ponto P_1 a curvatura principal λ_2 de M correspondente a direção perpendicular à γ é nula visto que a tangente de γ neste ponto é ortogonal ao eixo dos x (ver *Lema 3.1*). As duas observações precedentes mostraram que no ponto P_1 a curvatura λ_1 de γ é estritamente positiva visto que temos em cada ponto de γ

$$\left(\frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_2}{2}\right) = f\left(\left(\frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_2}{2}\right)^2\right),$$

com $f(0) \neq 0$.

Desse fato, a curva γ é tangente de um lado da reta $x = x_1$. Observamos que γ não pode mais interceptar o eixo $x = 0$ depois de P_1 . Com efeito, supomos por outro lado que esta intersecção se desse com um ângulo reto, γ seria uma curva de Jordan mergulhada gerando uma superfície especial compacta e mergulhada de grau 1 o que, como mostra o Princípio do Máximo isto é absurdo. Por outro lado, se esta intersecção não se faz com um ângulo reto, γ não seria mergulhada (visto que γ é simétrica com respeito ao eixo $x = 0$), que mostra a afirmação. Além disso γ não pode ter ponto horizontal depois P_1 entre os sentidos $x = x_1$ e $x = 0$, caso contrário, γ seria simétrico com respeito a vertical passando por este novo ponto e não será então mergulhada. Sai dessas observações que a única possibilidade é que γ possui outro ponto vertical P_2 depois de P_1 com $x_2 < x_1$, onde x_2 é a abscissa de P_2 . Supomos que P_2 é o primeiro ponto vertical de γ depois de P_1 . A curva γ será, entre esses dois pontos, o gráfico de uma função estritamente monótona ainda assim o *Lema 3.3* mostra que entre esses dois pontos a curvatura principal λ_2 é uma função estritamente monótona. Chegaríamos assim a uma contradição visto que, como já observamos a curvatura λ_2 é nula em cada ponto vertical.

Mostramos então que γ não possui ponto vertical e desse fato é o gráfico de uma função y . Nos resta observar que o caso seguinte é igualmente impossível:

$$\lim_{x \rightarrow X} y(x) = +\infty,$$

com $0 < X \leq +\infty$. Caso contrário, teríamos

$$\lim_{x \rightarrow X} \lambda_1(x) = \lim_{x \rightarrow X} \lambda_2(x) = 0,$$

assim $f(0) = 0$, o que é falso. Por consequência, γ é um gráfico que está acima do eixo de rotação.

Mostraremos agora as relações (a) – (d). A curva γ é um gráfico de uma função $y(x)$ de classe C^2 definida em \mathbb{R} verificando $F(y, y', y'') = 0$ (ver *Lema 3.1*). Em particular para $x = 0$ teremos:

$$F(\tau, 0, y''(0)) = 0.$$

Relembremos que como $x = 0$ é um mínimo local de y , a curvatura de γ perto de $x = 0$ é direcionada para cima, ou seja que $y''(x) \geq 0$ para x perto de zero. Utilizando o fato que $F(\alpha, \beta, \delta)$ é uma função estritamente crescente com respeito a última variável δ , deduzimos que $F(\tau, 0, 0) \leq 0$, ou seja

$$-\frac{1}{2\tau} - f\left(\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2\right) \leq 0,$$

o que mostra (a). Mostraremos a desigualdade (b). Conservando τ e observando que a igualdade $F(\tau, 0, y''(0)) = 0$ é equivalente a:

$$\frac{y''(0)}{2} + \frac{1}{2\tau} - f\left(\left(\frac{y''(0)}{2} + \frac{1}{2\tau}\right)^2\right) = \frac{1}{\tau},$$

ou seja, $\frac{1}{\tau} = t_0 - f(t_0^2)$, onde $t_0 = \frac{y''(0)}{2} + \frac{1}{2\tau}$. Desta maneira temos $t_0 > 0$ e utilizando o fato que a função $h_1(t) = t - f(t^2)$ é estritamente crescente (visto que f é elíptica) obtemos:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (t - f(t^2)) > \frac{1}{\tau},$$

e (b) está demonstrado. Temos ainda que

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (t - f(t^2)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (-t - f(t^2)),$$

e utilizando o fato que a função $h_1(t) = t + f(t^2)$ é estritamente crescente concluímos:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (t - f(t^2)) < -\frac{1}{2\tau} - f\left(\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2\right) < 0,$$

onde temos a desigualdade (c).

Mostraremos a última desigualdade (d). Para isto observamos que γ tem necessariamente um ponto de inflexão Q depois do mínimo P . No ponto Q temos $\lambda_1(x) = 0$ e assim

$$\frac{\lambda_2}{2} - f\left(\left(\frac{\lambda_2}{2}\right)^2\right) = 0,$$

com $\lambda_2 < 0$.

Utilizando o fato que a função $h_1(t) = t - f(t^2)$ é estritamente crescente concluímos $f(0) < 0$. Supomos para terminar que o mínimo local τ de γ satisfaça a igualdade:

$$-\frac{1}{2\tau} - f\left(\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2\right) = 0. \quad (3.5)$$

Neste caso a função constante $\varphi(x) = \tau$ é solução da equação (3.3) e deduzimos que o cilindro C de raio τ em torno do eixo dos x é uma superfície especial (com respeito a f). Desse fato as funções y e φ satisfazem a mesma equação diferencial com as mesmas condições iniciais no ponto $x = 0$. Concluímos que estas funções são iguais perto de $x = 0$ e para uma vizinhança temos, $M = C$. De maneira inversa se M é cilindro mostramos como anteriormente que seu raio r , tem que satisfazer a igualdade (3.5). Concluímos aí que o mínimo local τ de M satisfaz (3.5) se, e somente se, M é um cilindro. \square

Observação 3: Consideremos uma função elíptica f verificando:

$$f(0) < 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow -\infty} (t - f(t^2)) < 0.$$

Neste caso do fato que a função $h_1(t) = t - f(t^2)$ é estritamente crescente e além disso:

$$h_1(0) = -f(0) > 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow -\infty} (h_1(t)) < 0,$$

concluímos que existe um único real positivo r , $r > 0$, verificando $h_1\left(-\frac{1}{2r}\right) = 0$, ou seja,

$$-\frac{1}{2r} - f\left(\left(\frac{1}{2r}\right)^2\right) = 0.$$

Desse fato não existe além de um único cilindro reto especial e seu raio é inteiramente determinado pela igualdade anterior. Isto mostra, usando a *Proposição 3.1*, que existe uma superfície especial completa de rotação, mergulhada, gerada por uma curva que possui um mínimo local se, e somente se, existe um cilindro reto especial. Além disso, utilizando o fato que a função h_1 é estritamente crescente, não importando qual mínimo local τ de uma tal superfície satisfazendo a desigualdade $\tau \leq r$, com igualdade se, e somente se, esta superfície é um cilindro de raio r .

Podemos agora mostrar a existência de ondulóides especiais sob certas condições sobre f .

3.2 Superfícies de Rotação Tipo Delaunay

Teorema 3.1. (*Existência de ondulóides especiais*) *Seja f uma função elíptica satisfazendo:*

$$f(0) < 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow -\infty} (t - f(t^2)) < 0.$$

Seja $\tau > 0$ um número real verificando:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (t - f(t^2)) > \frac{1}{\tau} \text{ e } -\frac{1}{2\tau} - f\left(\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2\right) < 0.$$

Nestas condições, existe uma única superfície especial de rotação O_τ , completa e mergulhada, tal que a curva geratriz γ_τ é o gráfico de uma função y_τ de classe C^2 definida em \mathbb{R} , com um mínimo τ em 0. Além disso, γ_τ é uma curva geometricamente análoga aos ondulóides de Delaunay, mais precisamente existe um real $T_\tau > 0$ tal que:

- a) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_\tau(x + T_\tau) = y_\tau(x)$;
- b) γ_τ é simétrica com respeito as retas $x = 0$ e $x = \frac{T_\tau}{2}$;
- c) entre 0 e $\frac{T_\tau}{2}$ a função y_τ é estritamente crescente com um máximo R_τ em $\frac{T_\tau}{2}$;
- d) entre 0 e $\frac{T_\tau}{2}$ a curva γ_τ tem um único ponto de inflexão x_τ ;

e) o ponto de inflexão x_τ e o máximo R_τ verificam:

$$0 < y_\tau(x_\tau) < r \quad e \quad r < R_\tau < -\frac{1}{f(0)},$$

onde, r é o raio do único cilindro especial e $-\frac{1}{f(0)}$ é o raio da única esfera especial relativamente a f .

Demonstração: Iremos construir a curva γ_τ . As condições em τ implicam a desigualdade seguinte

$$F(\tau, 0, 0) = -\frac{1}{2\tau} - f\left(\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2\right) < 0.$$

Além disso,

$$\lim_{\delta \rightarrow +\infty} F(\tau, 0, \delta) = \lim_{\delta \rightarrow +\infty} \left(\frac{\delta}{2} - \frac{1}{2\tau} - f\left(\left(\frac{\delta}{2} - \frac{1}{2\tau}\right)^2\right) \right)$$

ou seja,

$$\lim_{\delta \rightarrow +\infty} F(\tau, 0, \delta) = -\frac{1}{\tau} + \lim_{\delta \rightarrow +\infty} (t - f(t^2)) > -\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau} = 0,$$

onde colocamos $t = \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2\tau}$. Deduzimos que existe um único real positivo, $\tau'' > 0$, verificando:

$$F(\tau, 0, \tau'') = 0.$$

Podemos então aplicar o Teorema da Função Implícita e obter assim a existência de uma vizinhança U do ponto $(\tau, 0)$ em \mathbb{R}^2 , de uma vizinhança V de τ'' em \mathbb{R} e de uma única função h de classe C^1 em U em V verificando:

$$h(\tau, 0) = \tau'' \quad e \quad \forall (\alpha, \beta) \in U, \quad \forall \delta \in V, \quad F(\alpha, \beta, \delta) = 0 \Leftrightarrow \delta = h(\alpha, \beta).$$

Consideremos a equação diferencial

$$y'' = h(y, y'), \quad \text{com } y(0) = \tau \quad e \quad y'(0) = 0. \quad (3.6)$$

O Teorema de Picard afirma que existe uma única solução y_τ desta equação, ela é definida num intervalo da forma $(-x_1, x_1)$, com $x_1 > 0$. Observemos que $(0, \tau)$ é um mínimo local de y_τ visto que $y''_\tau(0) = \tau'' > 0$. Além disso, pelo *Corolário 3.1* temos que

y_τ é simétrico com respeito a reta $x = 0$. Iremos agora prolongar y_τ depois de x_1 , por simetria prolongaremos da mesma forma antes de $-x_1$.

Supomos que a derivada y'_τ se anula entre 0 e x_1 e chamaremos x_0 o primeiro zero de y'_τ . Desse fato, γ_τ , o gráfico de y_τ , é simétrico com respeito a reta $x = x_0$ e utilizando a primeira simetria o gráfico de y_τ pode ser prolongado numa curva completa usando a translação horizontal do vetor $(2x_0, 0)$. A função y_τ pode ser então expandida na reta \mathbb{R} toda numa função periódica de período $(2x_0)$. Observamos, além disso, que entre 0 e x_0 a derivada y'_τ é estritamente positiva, assim y_τ tem um máximo em $x = x_0$. Observamos igualmente que γ_τ terá que possuir necessariamente um ponto de inflexão entre 0 e x_0 , e como a função y_τ é monótona neste intervalo, a curvatura λ_1 de y_τ é estritamente monótona (ver *Lema 3.3*). Concluimos daí que γ_τ tem um único ponto de inflexão entre 0 e x_0 e assim, fazendo $T_\tau = 2x_0$, a curva y_τ possui todas as propriedades de (a) – (d) indicadas no enunciado do *Teorema 3.1*, com exceção das desigualdades (e) a respeito do máximo R_τ e do ponto de inflexão x_τ de y_τ que mostraremos no fim da demonstração.

É suficiente então mostrar que y'_τ possui um zero num outro ponto que não seja o zero. Para isso suponhamos que $y'_\tau(x) > 0$ para todo x entre 0 e x_1 . Suponhamos, além disso, que $y''_\tau(x) > 0$ entre 0 e x_1 . Nesse caso y_τ e y'_τ são estritamente crescente, positivos, e possuindo então um limite positivo em x_1 que chamaremos respectivamente y_1 e y'_1 . Como y_τ é solução de (3.6), ela verificará igualmente a igualdade equivalente:

$$\frac{1}{2(1 + (y'_\tau)^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{y''_\tau}{2(1 + (y'_\tau)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2y_\tau(1 + (y'_\tau)^2)^{\frac{1}{2}}} - f \left(\left(\frac{y''_\tau}{2(1 + (y'_\tau)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2y_\tau(1 + (y'_\tau)^2)^{\frac{1}{2}}} \right)^2 \right),$$

ou seja, $\frac{1}{2(1 + (y'_\tau)^2)^{\frac{1}{2}}} = h_1(t)$, colocando $t = \frac{y''_\tau}{2(1 + (y'_\tau)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2y_\tau(1 + (y'_\tau)^2)^{\frac{1}{2}}}$ e $h_1(t) = t - f(t^2)$. Utilizando o fato que t é positivo e que $h_1(t)$ é uma função crescente obtemos:

$$\forall x \in (0, x_1), \frac{1}{2(1 + (y'_\tau)^2)^{\frac{1}{2}}} > h_1(0) = -f(0) > 0.$$

Deduzimos que os limites de y_τ e y'_τ em x_1 são finitos. Observamos que por continuidade, e do fato que F é crescente com respeito a última variável, esses limites verifi-

cam:

$$F(y_1, y_1', 0) = -\frac{1}{2y_1(1 + (y_1')^2)^{\frac{1}{2}}} - f\left(\left(\frac{1}{2y_1(1 + (y_1')^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2\right) \leq 0.$$

Temos ainda,

$$\lim_{\delta \rightarrow +\infty} F(y_1, y_1', \delta) = \lim_{\delta \rightarrow +\infty} (t - f(t^2)) + \lim_{x \rightarrow x_1} \lambda_2(x).$$

Como a função y_τ é crescente, a curvatura principal $\lambda_2(x)$ é estritamente crescente (ver *Lema 3.3*) e concluímos usando as hipóteses sobre τ que

$$\lim_{\delta \rightarrow +\infty} F(y_1, y_1', \delta) > 0.$$

Deduzimos do que passou, que existe um único real positivo $y_1'' \geq 0$, verificando $F(y_1, y_1', y_1'') = 0$ e como anteriormente utilizando o Teorema da Função Implícita podemos estender y_τ além de x_1 , até um real x_2 , com $x_1 < x_2$.

Observemos agora que não podemos estender y_τ em $(0, \infty)$ com as derivadas y_τ' e y_τ'' estritamente positivas, caso contrário teríamos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y_\tau(x)) = +\infty.$$

Desse fato as curvaturas principais λ_1 e λ_2 da superfície especial O_τ gerada pela revolução do gráfico de y_τ tenderá a zero e f satisfará $f(0) = 0$, o que é falso.

Se y_τ' é estritamente positivo percorrendo a extensão de y_τ , os resultados anteriores nos mostram que devemos ter um ponto x_τ , $x_\tau > x_1$ onde a segunda derivada se anula, $y_\tau''(x_\tau) = 0$. Desse fato a curvatura λ_1 de γ_τ se anula também. Observamos que temos:

$$\forall x \in (0, x_\tau), y_\tau'(x) > 0 \text{ e } \lambda_1(x) > 0 > \lambda_2(x).$$

Deste fato, o *Lema 3.3* permite concluir que a curvatura $\lambda_1(x)$ é uma função estritamente decrescente enquanto que $y_\tau'(x)$ é estritamente positivo. Deduzimos então que depois de $x = x_\tau$ a curvatura $\lambda_1(x)$ é estritamente negativa da mesma forma que para a função $y_\tau''(x)$. Com os mesmos argumentos utilizados anteriormente mostraremos que y_τ

pode ser estendida sobre \mathbb{R} . Além disso, utilizando o fato que $\lambda_1(x)$ é estritamente decrescente, enquanto que $y'_\tau(x)$ é positivo, podemos mostrar que $y'_\tau(x)$ terá de ter um outro zero. Por consequência concluímos como no começo que γ_τ , o gráfico de y_τ , possui as propriedades (a)-(d) enunciadas. Agora só resta mostrar as desigualdades (e) considerando o ponto de inflexão $y_\tau(x_\tau)$ e o máximo R_τ de y_τ .

No ponto $x = x_\tau$ temos $\lambda_1 = 0$, a função y_τ verificará então:

$$-\frac{1}{2y_\tau(1+(y'_\tau)^2)^{\frac{1}{2}}}(x_\tau) - f\left(\left(\frac{1}{2y_\tau(1+(y'_\tau)^2)^{\frac{1}{2}}}\right)^2(x_\tau)\right) = 0.$$

Além disso,

$$h_2\left(\frac{1}{2y_\tau(1+(y'_\tau)^2)^{\frac{1}{2}}}(x_\tau)\right) = 0,$$

com

$$h_2(t) = t + f(t^2).$$

Como a função $h_2(t)$ é estritamente crescente e $h_2\left(\frac{1}{2r}\right) = 0$, concluímos que

$$\frac{1}{2r} = \frac{1}{2y_\tau(1+(y'_\tau)^2)^{\frac{1}{2}}}(x_\tau), \text{ e assim:}$$

$$y_\tau(x_\tau) < r.$$

No ponto de máximo, ou seja para $x = \frac{T}{2}$, temos $F\left(R_\tau, 0, y''_\tau\left(\frac{T}{2}\right)\right) = 0$. Temos ainda $y''_\tau\left(\frac{T}{2}\right) < 0$, e deduzimos que $F(R_\tau, 0, 0) > 0$, ou seja $h_2\left(\frac{1}{2R_\tau}\right) < 0$.

Como anteriormente, do fato que a função h_2 é estritamente crescente e que $h_2\left(\frac{1}{2r}\right) = 0$, concluímos:

$$r < R_\tau.$$

Supomos para terminar que temos:

$$-\frac{1}{f(0)} \leq R_\tau,$$

ou seja,

$$-f(0) \geq \frac{1}{y_\tau(1+(y'_\tau)^2)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{T_\tau}{2}\right).$$

Observemos que temos no ponto $x = 0$:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{y_\tau(1 + (y'_\tau)^2)^{\frac{1}{2}}}(0) > -f(0),$$

visto que,

$$\frac{1}{\tau} \geq \frac{1}{2\tau} - f\left(\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2\right) > -f(0).$$

Desse fato por continuidade existe um real $x_0 \in \left(0, \frac{T_\tau}{2}\right)$ tal que:

$$\frac{1}{y_\tau(1 + (y'_\tau)^2)^{\frac{1}{2}}}(x_0) = -f(0).$$

Observemos para concluir que a função $W(a, b) = a + b - f((a - b)^2)$ é estritamente crescente com respeito as duas variáveis a e b , visto que f é uma função elíptica. Observemos que temos:

$$W\left(-\frac{1}{2y_\tau(1 + (y'_\tau)^2)^{\frac{1}{2}}}(x_0), -\frac{1}{2y_\tau(1 + (y'_\tau)^2)^{\frac{1}{2}}}(x_0)\right) = 0.$$

Deduzimos necessariamente que:

$$\frac{y''_\tau}{y_\tau(1 + (y'_\tau)^2)^{\frac{3}{2}}}(x_0) = -f(0),$$

e deste fato $(x_0, y_\tau(x_0))$ é um ponto umbílico de O_τ o que é um absurdo, visto que O_τ não é esférico (ver *Lema 3.2*). Agora mostraremos a propriedade (e).

A unicidade de O_τ provém da unicidade de soluções de equações diferenciais com as condições iniciais dadas. \square

Finalmente podemos enunciar um resultado de classificação para as superfícies especiais Tipo Delaunay.

Teorema 3.2. (Classificação dos ondulóides especiais) *Seja f uma função elíptica e seja M uma superfície especial completa, mergulhada e de rotação não-esférica. Nessas condições, M é necessariamente um dos ondulóides especiais O_τ dadas pelo Teorema 3.1.*

Demonstração: Seja γ a curva plana que gera M . Observamos que γ não pode cortar o eixo de rotação, o eixo dos x . Com efeito, esta intersecção deveria ser ortogonal visto que

M é de classe C^2 , mais neste caso o princípio do máximo a respeito das superfícies especiais mostram que M é esférica, o que é falso. Podemos então supor que γ se encontra no semi-plano $(x, y), y > 0$. Observemos que usando a *Proposição 3.1* e o *Teorema 3.1* é suficiente mostrar que γ possui um mínimo local. Supomos o contrário. Os mesmos argumentos utilizados na *Proposição 3.1* mostrariam que γ possuem um arco que é um gráfico e que converge decrescentemente a uma direção horizontal. Este arco terá então que possuir pontos onde a curvatura λ_1 é positiva. Pelo *Lema 3.3* temos que λ_1 é crescente neste arco, o que contradiz o fato que este arco assintota uma direção, concluindo a prova. \square

Conclusão

Nesta dissertação, observamos que para provar a existência e unicidade de uma superfície completa Tipo Delaunay foi necessário entender o Teorema de Delaunay, vários conceitos que envolvem o estudo de curvas em \mathbb{R}^3 e superfícies de rotação.

Nosso principal resultado foi conseguir provar a existência de uma superfície de rotação que satisfizesse uma relação entre curvatura média $H = H(N)$ e a curvatura Gaussiana K da seguinte forma:

$$H = f(H^2 - K),$$

onde f é uma função de classe C^1 no intervalo $[0, \infty)$ e, além disso, vamos supor igualmente que f verifica a relação:

$$\forall t \in [0, \infty), 4t(f'(t))^2 < 1.$$

A construção de superfícies no Espaço Euclidiano satisfazendo certas propriedades especiais é de grande interesse para o desenvolvimento da geometria e continua sendo estudado por vários pesquisadores nos dias atuais.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Alexandrov, - *Uniqueness theorem for surfaces in the large*, Amer.Math.Soc. Transl.Ser. 2, vol.21, Amer.Math.Soc., Providence, RI, (1962), 341–344;
- [2] Carmo M. P. - *Geometria diferencial de curvas e superfícies*, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro (2005);
- [3] Carmo M. P. - *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro (1988);
- [4] C. Delaunay, - *Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante*, J.Math.Pures Appl. (1) **6**,(1841), 309–320;
- [5] Eells, James, - *The Surfaces of Delaunay*, The Mathematical Intelligencer,(1987), 53–57;
- [6] F.Braga Brito and R.Sa Earp, - *On the structure of certain Weingarten surfaces with boundary a circle*, Ann.Fac.Sci.Toulouse 2 **6**,(1997), 243–256;
- [7] H.Hopf, - *Differential Geometry in the Large*, Lecture Notes in Math., vol.1000, Springer-Verlag, New York (1983);
- [8] H.Rosenberg and R.Sa Earp , *The geometry of properly embedded special surfaces in \mathbb{R}^3 ; e.g. surfaces satisfying $aH + bK = 1$, where a and b are positive*, Duke Math.J, **73** (1994), 291–306;
- [9] N.Kapouleas, - *Complete constant mean curvature surfaces in Euclidean three space*, Ann.of Math., **131**, (1990), 239–330;

-
- [10] N.Korevaar, R.Kusner, and B.Solomon - *The structure of complete embedded surfaces with constant mean curvature*, J.Differential Geom.**30**, (1989), 465–503;
- [11] R.Bryant, - *Complex analysis and a class of Weingarten surfaces*, preprint.;
- [12] R.Sa Earp and E. Toubiana, *A note on special surfaces in \mathbb{R}^3* , Mat. Contemp., **4** (1993), 108–118;
- [13] R.Sa Earp and E. Toubiana, *CLASSIFICATION DES SURFACES DE TYPE DELAUNAY*, American Journal of Mathematics, **121** (1999), 671–700;
- [14] R.Sa Earp and E. Toubiana, *Sur les surfaces de Weingarten spéciales de type minimal*, Bol. Sociedade Brasileira de Matemática., **26** (1995), 129–148;
- [15] SOTOMAYOR, J., - *Lições de equações diferenciais ordinárias*, Impa, Rio de Janeiro (1979).
- [16] TENENBLAT, K., - *Introdução à Geometria Diferencial*, Universidade de Brasília, Brasília (1988).
- [17] W.H.Meeks, - *The topology and geometry of embedded surfaces of constant mean curvature*, J.Differential Geom., **16** (1988), 539–552;
- [18] W.Y.Hsiang and W.C.Yu., - *A generalisation of a Theorem of Delaunay*, J.Differential Geom., **16** (1981), 161–177;