

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Hipersuperfícies Conformemente Planas no Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^4$

por

Márcio Lemes de Sousa

Orientador: Prof. Dr. Romildo da Silva Pina

Dissertação de Mestrado em Matemática

Goiânia, Goiás

2008



Termo de Ciência e de Autorização para Disponibilizar as Teses e Dissertações Eletrônicas (TEDE) na Biblioteca Digital da UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás-UFG a disponibilizar gratuitamente através da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações - BDTD/UFG, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: ☒ **Dissertação** ☐ **Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor(a):	Márcio Lemes de Sousa		
CPF:		E-mail:	marcio_odegas@hotmail.com
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? ☒ Sim ☐ Não			
Vínculo Empregatício do autor	Universidade Estadual de Goiás		
Agência de fomento:	Coord. de Aperf. de Pessoal de Nível Superior	Sigla:	CAPES
País:	Brasil	UF:	GO
CNPJ:	00889834/0001-08		
Título:	Hipersuperfícies Conformemente Planas no Espaço Euclidiano R^4		
Palavras-chave: Hipersuperfície Conformemente Plana			
Título em outra língua: Conformally Flat Hypersurfaces in the Euclidean 4-Spaces R^4			
Palavras-chave em outra língua: Conformally Flat Hypersurface			
Área de concentração: Geometria e Topologia			
Data defesa: (28/03/2008)			
Programa de Pós-Graduação: Mestrado em Matemática			
Orientador(a):	Romildo da Silva Pina		
CPF:		E-mail:	romildo@mat.ufg.br
Co-orientador(a):	-----		
CPF:	-----	E-mail:	-----

3. Informações de acesso ao documento:

Liberção para disponibilização?¹ ☒ **total** ☐ **parcial**

Em caso de disponibilização parcial, assinale as permissões:

☐ Capítulos. Especifique: _____

☐ Outras restrições: _____

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O Sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Márcio Lemes de Sousa
Assinatura do(a) autor(a)

Data: 23/04/ 2008

¹ Em caso de restrição, esta poderá ser mantida por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Todo resumo e metadados ficarão sempre disponibilizados.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Hipersuperfícies Conformemente Planas no Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^4$

por

Márcio Lemes de Sousa

Área de Concentração : **Geometria e Topologia**

Orientador: **Prof. Dr. Romildo da Silva Pina**

Dissertação submetida à Banca Examinadora designada pelo Conselho Diretor do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Goiânia, Goiás

2008

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(GPT/BC/UFG)

Sousa, Márcio Lemes de.

**S725h Hipersuperfícies conformemente planas no espaço
Euclidiano R^4 / Márcio Lemos de Sousa. – 2008.
iii, 74 f.**

Orientador: Prof. Dr. Romildo da Silva Pina.

**Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás,
Instituto de Matemática e Estatística, 2008.**

Bibliografia: f. 73-74.

1. Hipersuperfícies conformemente planas 2. Geometria
diferencial 3. Geometria Riemanniana I. Pina, Romildo da Silva
I. Universidade Federal de Goiás. **Instituto de Matemática e
Estatística.** III. Título.

CDU: 514.76

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
COORDENAÇÃO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
MATEMÁTICA-MESTRADO

**“HIPERSUPERFÍCIES CONFORMEMENTE PLANAS
NO ESPAÇO EUCLIDIANO $\mathbb{R}^4$ ”**

por

Márcio Lemes de Sousa

Dissertação submetida à Banca Examinadora designada pelo Conselho Diretor do Instituto de Matemática e Estatística, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Goiânia, 28 de março de 2008.

Banca Examinadora:


Prof. Dr. Romildo da Silva Pina-IME/UFG
(Orientador)


Profa. Dra. Keti Tenenblat-UnB


Profa. Dra. Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues-IME/UFG

Dedico
à minha esposa Walquíria
e aos meus pais José e Abadia

Agradecimentos

À Deus, pela proteção durante este percurso da minha carreira estudantil, por ter me dado a oportunidade e a capacidade, pois sem ele nada disso seria possível. À ele toda honra e toda glória.

Ao Prof. Dr. Romildo da Silva Pina, pela amizade, paciência e dedicação que foram indispensáveis para a concretização desta dissertação.

À minha esposa Walquíria, pela amizade, compreensão e pelas constantes ajudas.

Aos professores Miguel Antônio de Camargo e Solange Gonzaga de Moura Teixeira, pela amizade e incentivo no decorrer de meus estudos.

Aos amigos, Sebastião Carvalho dos Santos e sua esposa Angelina Vieira dos Santos, seu filho Helder Carvalho dos Santos, por terem me acolhido em seu lar durante esta busca importante da minha vida.

Aos professores, Geci, João Carlos, Luciana e Marcelo, que me apoiaram nos momentos difíceis do curso de mestrado e elaboração desta dissertação.

À todos familiares e amigos, que apoiaram-me em mais um degrau de minha vida. Em especial, aos colegas de mestrado, que ajudaram-me nos momentos de dificuldades, não vou esquecer nenhum de vocês.

À CAPES, pela Bolsa de Estudos Concedida, sem a qual seria mais difícil a realização desta dissertação¹.

¹Este trabalho teve suporte financeiro da CAPES.

Sumário

Resumo	ii
Abstract	iii
Introdução	1
1 Preliminares	4
1.1 Variedades Riemannianas	4
1.2 Conexões Afins e Riemanniana	5
1.3 Curvaturas	8
1.4 Tensores em Variedades Riemannianas	9
1.5 Imersões Isométricas	11
2 Condições necessárias para a existência de hipersuperfícies conformemente planas no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^4$	15
3 Hipersuperfícies conformemente planas em $\mathbb{R}^4$, com três curvaturas principais distintas	30
3.1 Exemplos de hipersuperfícies conformemente planas em $\mathbb{R}^4$	30
3.2 A construção de uma família de hipersuperfícies conformemente planas . .	37
Conclusão	72
Referências Bibliográficas	73

Resumo

Neste trabalho desenvolvemos o artigo "Conformally Flat Hypersurfaces in Euclidean 4-space II", de Suyama, onde é apresentado um estudo sobre *hipersuperfícies conformemente planas* no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^4$. A partir de superfícies em $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{S}^3$, com curvatura gaussiana constante negativa ou positiva, construímos uma família de hipersuperfícies conformemente planas em $\mathbb{R}^4$, com três curvaturas principais distintas.

Abstract

In this work we develop the article "Conformally Flat Hypersurfaces in Euclidean 4-space II", of Suyama, where is presented the study on conformally flat hypersurfaces in the Euclidean 4-spaces $\mathbb{R}^4$. From a surface with constant Gaussian curvature positive or negative in either Euclidean 3-space $\mathbb{R}^3$ or the standard 3-sphere $\mathbb{S}^3$, we constructed a family of conformally flat hypersurfaces in $\mathbb{R}^4$, with three distinct principal curvatures.

Introdução

Um problema bastante estudado em Geometria é a classificação de hipersuperfícies conformemente planas no espaço Euclidiano. No desenvolvimento desta teoria, a dimensão da hipersuperfície desempenha um papel muito importante conforme descreveremos a seguir:

Considerando n a dimensão da hipersuperfície, temos que se $n = 2$ o problema está resolvido, pois, toda superfície pode ser parametrizada por parâmetros isotérmicos, mostrando assim que, toda superfície imersa em $\mathbb{R}^3$ é conformemente plana.

Quando $n \geq 4$, temos um resultado muito importante, conhecido como Teorema de Cartan-Schouten, (ver [6], [14]), que é o seguinte: Seja M^n uma hipersuperfície imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 4$, então M^n é conformemente plana com a métrica induzida se, e somente se, pelo menos $n - 1$ das curvaturas principais coincidem em cada ponto. Usando este resultado Kulkarni, Nishikawa e Maeda, deram em [11] e [13], uma classificação local para hipersuperfícies conformemente planas em $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 4$.

Em [1], Blair mostrou que o catenóide generalizado e os hiperplanos são as únicas hipersuperfícies mínimas e conformemente planas em $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 4$. Em [2], Carmo, Dajczer e Mercuri, apresentaram uma classificação topológica para hipersuperfícies conformemente planas, compactas e imersas em $\mathbb{R}^{n+1}$ com $n \geq 4$. Em [7], Ferrandez, Garay e Lucas, deram uma classificação das hipersuperfícies conformemente planas completas em $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 4$, usando a condição que o vetor curvatura média é um auto valor do operador Laplaciano de M^n . Observamos ainda que todos os trabalhos desenvolvidos sobre hipersuperfícies conformemente planas imersas em $\mathbb{R}^{n+1}$, com $n \geq 4$, são baseados no Teorema de Cartan-Schouten.

O caso $n = 3$ é mais delicado, pois neste caso, não vale o Teorema de Cartan-Schouten. Em [12], Lancaster construiu exemplos de hipersuperfícies conformemente planas em $\mathbb{R}^4$

com três curvaturas principais distintas. Em [7] Ferrandez, Garay e Lucas, considerando que o vetor curvatura média é um auto valor do operador Laplaciano, eles classificaram as hipersuperfícies conformemente planas completas em $\mathbb{R}^4$. Em [10], Hertrich–Jeromin construiu mais exemplos de hipersuperfícies conformemente planas em $\mathbb{R}^4$ com três curvaturas principais distintas e em [9] considerou o mesmo problema com duas curvaturas principais distintas. O caso $n = 3$ é muito diferente do caso $n \geq 4$, pois, para variedades Riemannianas de dimensão $n \geq 4$, temos que uma condição necessária e suficiente para que estas variedades sejam conformemente planas é que o tensor de Weyl seja nulo, e isto é equivalente a estudar uma equação diferencial não-linear de segunda ordem. Quando $n = 3$, o tensor de Weyl é nulo para qualquer variedade, e neste caso, um critério usado para uma hipersuperfície ser conformemente plana é que a derivada covariante do tensor de Schouten comuta, e esta condição é equivalente a estudar equações diferenciais não-lineares de terceira ordem, aumentando assim, o grau de dificuldade do problema. Cartan mostrou em [5] que as hipersuperfícies conformemente planas em $\mathbb{R}^4$ com três curvaturas principais distintas podem ser parametrizadas por linhas de curvatura onde a primeira e a segunda formas fundamentais são respectivamente, dadas por:

$$g = e^{P(x)} \{e^{2f(x)}(dx^1)^2 + e^{2h(x)}(dx^2)^2 + (dx^3)^2\} \quad (1)$$

e

$$s = e^{P(x)} \{\lambda(x)e^{2f(x)}(dx^1)^2 + \mu(x)e^{2h(x)}(dx^2)^2 + \nu(x)(dx^3)^2\}, \quad (2)$$

onde $P(x) = P(x^1, x^2, x^3)$, $f(x) = f(x^1, x^2, x^3)$, $h(x) = h(x^1, x^2, x^3)$ e $\lambda(x)$, $\mu(x)$ e $\nu(x)$ são as curvaturas principais das curvas x^1 , x^2 e x^3 respectivamente.

Em [15], Suyama construiu também novos exemplos de hipersuperfícies conformemente planas com três curvaturas principais distintas em $\mathbb{R}^4$, considerando casos particulares da métrica dada acima.

Utilizando a caracterização apresentada em (1) e (2) por Cartan, Hertrich–Jeromin mostrou que toda hipersuperfície conformemente plana em $\mathbb{R}^4$ com três curvaturas principais distintas admite uma parametrização por linhas de curvatura onde a primeira e a segunda formas fundamentais são dadas por:

$$g = e^{2P(x)} \{\cos^2 \varphi(x)(dx^1)^2 + \sin^2 \varphi(x)(dx^2)^2 + (dx^3)^2\} \quad (3)$$

$$s = e^{2P(x)} \{\lambda(x) \cos^2 \varphi(x)(dx^1)^2 + \mu(x) \sin^2 \varphi(x)(dx^2)^2 + \nu(x)(dx^3)^2\} \quad (4)$$

ou

$$g = e^{2P(x)} \{ \cosh^2 \varphi(x) (dx^1)^2 + \sinh^2 \varphi(x) (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \} \quad (5)$$

$$s = e^{2P(x)} \{ \lambda(x) \cosh^2 \varphi(x) (dx^1)^2 + \mu(x) \sinh^2 \varphi(x) (dx^2)^2 + \nu(x) (dx^3)^2 \} \quad (6)$$

onde $P(x) = P(x^1, x^2, x^3)$ e $\varphi(x) = \varphi(x^1, x^2, x^3)$, e $\lambda(x)$, $\mu(x)$ e $\nu(x)$ são as curvaturas principais das curvas x^1 , x^2 e x^3 , respectivamente.

Em [16], Suyama construiu uma família de novas hypersuperfícies conformemente planas com três curvaturas principais distintas, utilizando as expressões apresentadas por Hertrich-Jeromin. Considerando os resultados obtidos em [15] e [16], Suyama apresentou uma classificação para hypersuperfícies conformemente planas em $\mathbb{R}^4$, com três curvaturas principais distintas, no caso particular em que a função $P(x)$ dada em (3) e (5) depende apenas de x^3 .

Construímos nesta dissertação uma família de hypersuperfícies conformemente planas em $\mathbb{R}^4$, com três curvaturas principais distintas, e o nosso trabalho está dividido da seguinte forma: No capítulo 1, enunciamos vários resultados importantes de geometria Riemanniana, que foram fundamentais para a compreensão do trabalho. Para maiores detalhes ver [3], [4] e [17].

No capítulo 2, encontramos condições necessárias para a existência de hypersuperfícies conformemente planas em $\mathbb{R}^4$, e supondo que $P = P(x^3)$ temos que $\varphi(x) = A(x^1, x^2) + B(x^3)$. Usando o fato que o tensor de Schouten comuta mostramos que as funções A e B , dadas acima, devem satisfazer certas condições especiais.

No capítulo 3, inicialmente construímos um exemplo explícito de uma hypersuperfície conformemente plana em $\mathbb{R}^4$ com três curvaturas principais distintas. Este exemplo foi construído através de uma superfície em $\mathbb{R}^3$, com curvatura constante negativa, conhecida como hélice Dini. Em seguida, construímos uma família de hypersuperfícies conformemente planas a partir de superfícies com curvatura constante, negativa ou positiva, em $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{S}^3$.

Capítulo 1

Preliminares

Apresentaremos neste capítulo algumas definições e propriedades básicas de Geometria Riemanniana, que utilizaremos sem maiores detalhes no decorrer do nosso trabalho. As demonstrações e explicações mais precisas podem ser verificadas em [3], [4] e [17].

1.1 Variedades Riemannianas

Para esta seção já estamos considerando o conceito de variedade diferenciável.

Definição 1.1. *Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ no espaço tangente $T_p M$, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p , com $x(x_1, x_2, \dots, x_n) = q \in x(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx(0, \dots, 1, \dots, 0)$, então $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \rangle_q = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ é uma função diferenciável em U .*

As funções $g_{ij} = g_{ji}$ são chamadas *expressões da métrica Riemanniana no sistema de coordenadas* $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$. Uma variedade diferenciável com uma métrica Riemanniana chama-se *variedade Riemanniana*.

Considere $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores em M e $\mathfrak{D}(M)$ o conjunto das funções diferenciáveis em M .

Proposição 1.2. *Sejam X e Y campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável M . Então existe um único campo vetorial Z tal que, para todo $f \in \mathfrak{D}(M)$, $Zf = (XY - YX)f$.*

Este campo é chamado de colchete e é denotado por $[X, Y] = XY - YX$.

De agora em diante adotaremos $g(X, Y) = \langle X, Y \rangle$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Definição 1.3. *Duas métricas $\langle, \rangle$ e $\langle\langle, \rangle\rangle$ em uma variedade diferenciável M são conformes, se existe uma função diferenciável $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, positiva tal que $\forall p \in M$ e $u, v \in T_p M$ tem-se*

$$\langle u, v \rangle_p = f(p) \langle\langle u, v \rangle\rangle_p.$$

Definição 1.4. *Uma variedade Riemanniana (M^n, g) é conformemente flat, se para todo ponto existe uma vizinhança que é conforme a um conjunto aberto do espaço Euclidiano, ou seja, a métrica g é conforme a métrica Euclidiana.*

1.2 Conexões Afins e Riemanniana

Denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M e por $\mathfrak{D}(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M .

Definição 1.5. *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ$,
2. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ$,
3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_XY + X(f)Y$

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in \mathfrak{D}(M)$.

Proposição 1.6. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo da curva diferenciável $c : I \rightarrow M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c , denominado derivada covariante de V ao longo de c , tal que:*

$$a) \frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$$

$$b) \frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f \frac{DV}{dt}$$

onde W é um campo de vetores ao longo de c e f é uma função diferenciável em I .

c) Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathfrak{X}$, isto é, $V(t) = Y(c(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y$.

Escolhendo um sistema de coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$ em torno de p e escrevendo

$$X = \sum_i x_i X_i, \quad Y = \sum_j y_j Y_j,$$

onde $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, teremos

$$\nabla_X Y = \sum_{ij} x_i y_j \nabla_{X_i} X_j + \sum_{ij} x_i X_i(y_j) X_j.$$

Se fizermos $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$, concluímos que Γ_{ij}^k são funções diferenciáveis e que

$$\nabla_X Y = \sum_k \left(\sum_{ij} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k) \right) X_k,$$

o que mostra que $\nabla_X Y(p)$ depende de $x_i(p)$, $y_k(p)$ e das derivadas $X(y_k)(p)$ de y_k segundo X .

Definição 1.7. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Um campo vetorial ao longo de uma curva $c : I \rightarrow M$ é dito paralelo se $\frac{DV}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.*

As funções Γ_{ij}^k definidas em U são os coeficientes da conexão ∇ em U ou os *símbolos de Christoffel* da conexão. Os símbolos de Christoffel são dados por

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km}. \quad (1.1)$$

Esta é a expressão clássica dos símbolos de Christoffel da conexão Riemanniana em termos dos g_{ij} .

Definição 1.8. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e uma métrica Riemanniana $\langle, \rangle$. A conexão é dita compatível com a métrica $\langle, \rangle$, quando para toda curva diferenciável c e quaisquer pares de campos de vetores paralelos P e P' ao longo de c , tivermos $\langle P, P' \rangle = \text{cte}$.*

Proposição 1.9. *Seja M uma variedade Riemanniana. Uma conexão ∇ em M é compatível com a métrica se, e somente se, para todo par V e W de campos de vetores ao longo da curva diferenciável $c : I \rightarrow M$ tem-se*

$$\frac{d}{dt}\langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, t \in I. \quad (1.2)$$

Corolário 1.10. *Uma conexão ∇ em uma variedade Riemanniana M é compatível com a métrica se, e somente se,*

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M). \quad (1.3)$$

Definição 1.11. *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é dita simétrica quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \text{ para todo } X, Y \in \mathfrak{X}(M). \quad (1.4)$$

Em um sistema de coordenadas (U, x) , se ∇ é simétrica, temos para todo $i, j = 1, \dots, n$,

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0, \quad X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (1.5)$$

Sendo assim, $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, o que justifica o nome *simétrica*.

Teorema 1.12. (Levi-Civita). *Dada uma variedade Riemanniana (M, g) existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições:*

a) ∇ é simétrica.

b) ∇ é compatível com a métrica Riemanniana

Esta conexão é chamada de *conexão de Levi-Civita* ou *conexão Riemanniana*.

1.3 Curvaturas

Definição 1.13. A curvatura R de uma variedade Riemanniana (M, g) é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z,$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M .

Proposição 1.14. A curvatura R de uma variedade Riemanniana satisfaz:

a) R é bilinear em $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$.

b) Para todo par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, o operador curvatura $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ é linear.

A partir de agora denotaremos $\langle R(X, Y)Z, T \rangle$ por $R(X, Y, Z, T)$.

Em um sistema de coordenadas (U, x) em torno de $p \in M$, sendo $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, temos

$$R(X_i, X_j)X_k = \sum_l R_{ijk}^l X_l. \quad (1.6)$$

R_{ijk}^l são os coeficientes do operador curvatura R em (U, x) e em termos dos símbolos de Christoffel, são dados por

$$R_{ijk}^l = \sum_s \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^l - \sum_s \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^l + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^l - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{jk}^l. \quad (1.7)$$

Também denotaremos

$$\langle R(X_i, X_j)X_k, X_s \rangle = \sum_l R_{ijk}^l g_{ls} = R_{ijks} \quad (1.8)$$

Proposição 1.15. Seja $\sigma \subset T_p M$ um subespaço bi-dimensional do espaço tangente $T_p M$ e sejam $\{x, y\}$ uma base de σ . Então

$$K(x, y) = \frac{(x, y, x, y)}{|x \wedge y|^2} \quad (1.9)$$

não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$.

$K(x, y) = K(\sigma)$ é chamada de curvatura seccional de σ em p .

Seja $x = z_n$ um vetor unitário em $T_p M$; tomemos uma base ortonormal $\{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\}$ do hiperplano de $T_p M$ ortogonal a x e consideremos as seguintes médias:

$$Ric_p(x) = \frac{1}{n-1} \sum_i \langle R(x, z_i)x, z_i \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

$$K(p) = \frac{1}{n} \sum_j Ric_p(z_j) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{ij} \langle R(z_i, z_j)z_i, z_j \rangle, \quad j = 1, \dots, n.$$

Em um sistema de coordenadas locais

$$K(p) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,k=1}^n Ric(X_i, X_k)g^{ik}. \quad (1.10)$$

As expressões acima são combinações importantes da curvatura seccional, não dependem da base escolhida e são chamadas de *curvatura de Ricci* na direção x e *curvatura escalar* respectivamente.

1.4 Tensores em Variedades Riemannianas

Definição 1.16. *Um tensor de ordem r em uma variedade Riemanniana (M, g) é uma aplicação multilinear*

$$T : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_{r \text{ fatores}} \rightarrow \mathfrak{D}(M).$$

Exemplo 1.17. *O tensor curvatura $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{D}(M)$ definido por*

$$R(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle, \quad X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M),$$

é um tensor de ordem 4.

Exemplo 1.18. *O tensor métrico $g : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{D}(M)$ é um tensor de ordem 2 definido por*

$$g(X, Y) = \langle X, Y \rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Exemplo 1.19. *O tensor de Ricci é um tensor de ordem 2 definido por:*

$$Ric(X, Y) = \text{traço da aplicação } \{T(Z) = R(X, Y)Z\}.$$

Em um sistema de coordenadas locais, temos que:

$$Ric(X_i, X_k) = \sum_j R_{ijk}^j, \quad (1.11)$$

onde R_{ijk}^j foram dados em (1.7).

Exemplo 1.20. *O Tensor de Weyl é um tensor de ordem 4 definido por*

$$\begin{aligned} W(X, Y, Z, T) &= R(X, Y, Z, T) - \frac{1}{n-2} (Ric(X, Z)\langle Y, T \rangle \\ &+ Ric(Y, T)\langle X, Z \rangle - Ric(X, T)\langle Y, Z \rangle - Ric(Y, Z)\langle X, T \rangle) \\ &+ \frac{r}{(n-1)(n-2)} (\langle X, Z \rangle \langle Y, T \rangle - \langle X, T \rangle \langle Y, Z \rangle). \end{aligned}$$

Muitas vezes o campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ é identificado com o tensor $\mathcal{X} : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{D}(M)$ dado por $\mathcal{X}(Y) = \langle X, Y \rangle$, $\forall Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Definição 1.21. *Seja T um tensor de ordem r . A diferencial covariante ∇T de T é um tensor de ordem $(r+1)$ dado por*

$$\nabla T(Y_1, \dots, Y_r) = Z(T(Y_1, \dots, Y_r)) - T(\nabla_Z Y_1, \dots, Y_r) - \dots - T(Y_1, \dots, \nabla_Z Y_r). \quad (1.12)$$

Para cada $Z \in \mathfrak{X}(M)$, a derivada covariante $\nabla_Z T$ de T em relação a Z é um tensor de ordem r dado por

$$\nabla_Z T(Y_1, \dots, Y_r) = \nabla T(Y_1, \dots, Y_r, Z). \quad (1.13)$$

Exemplo 1.22. *O Tensor de Schouten é um tensor de ordem 2 definido por*

$$S(X, Y) = \frac{1}{n-2} \left(Ric(X, Y) - \frac{K}{2(n-1)} \langle X, Y \rangle \right)$$

onde n é a dimensão da variedade.

Exemplo 1.23. *O tensor de Bach é um tensor de ordem 3 definido por*

$$\hat{B}(X, Y, Z) = (\nabla_X S)(Y, Z) - (\nabla_Y S)(X, Z). \quad (1.14)$$

Em um sistema de coordenadas locais o tensor de Bach será denotado por

$$\hat{B}(X_i, X_j, X_k) = B_{ji}^k. \quad (1.15)$$

1.5 Imersões Isométricas

Sejam (M^n, g) e $(\overline{M}^{n+k}, \bar{g})$ variedades Riemannianas e considere a aplicação $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+k}$. Dizemos que f é uma imersão se f é diferenciável e $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} \overline{M}$ é injetiva para todo $p \in M$. Se $\overline{M}$ tem uma métrica Riemanniana, f induz uma métrica Riemanniana em M por $\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}$, $u, v \in T_p M$. A métrica de M é chamada a métrica induzida por f , e f é uma *imersão isométrica*.

Seja $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+m=k}$ uma imersão. Identificaremos U com $f(U)$ e cada vetor $v \in T_p M$, $q \in U$, com $df_q(v) \in T_{f(q)} \overline{M}$.

Para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p \overline{M}$ decompõe $T_p \overline{M}$ na soma direta

$$T_p \overline{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp,$$

onde $(T_p M)^\perp$ é o complemento ortogonal de $T_p M$ em $T_p \overline{M}$. A conexão Riemanniana de $\overline{M}$ será indicada por $\overline{\nabla}$. Se X e Y são campos locais de vetores em M , e $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ são extensões locais em $\overline{M}$, definimos

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^T.$$

Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\overline{X}, \overline{Y}$ são extensões de X e Y em $\overline{M}$, respectivamente,

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y$$

é um campo local em $\overline{M}$ normal a M , que não depende das extensões $\overline{X}$ e $\overline{Y}$.

Indicando por $\mathfrak{X}^\perp$ o espaço dos campos diferenciáveis de vetores normais à M , a aplicação B pode ser considerada como um tensor $B : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}^\perp(M) \rightarrow \mathfrak{D}(M)$ definido por

$$B(X, Y, N) = \langle B(X, Y), N \rangle.$$

Proposição 1.24. *Se $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$, a aplicação $B : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \rightarrow \mathfrak{X}(U)^\perp$ dada por*

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y,$$

é bilinear simétrica.

Agora podemos definir a segunda forma fundamental. Seja $p \in M$ e $N \in (T_p M)^\perp$. A aplicação $H_N : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$H_N(X, Y) = \langle B(X, Y), N \rangle, \quad X, Y \in T_p M,$$

é, pela Proposição 1.24, uma forma bilinear simétrica.

Definição 1.25. A forma quadrática II_N definida em $T_p M$ por

$$II_N(X) = H_N(X, X),$$

é chamada de segunda forma fundamental de f em p segundo o vetor normal N .

Observe que à aplicação bilinear H_N fica associada a uma aplicação linear auto-adjunta $S_N : T_p M \rightarrow T_p M$, por

$$\langle S_N X, Y \rangle = H_N(X, Y) = \langle B(X, Y), N \rangle.$$

Temos, à partir de alguns cálculos, que

$$S_N X = -(\bar{\nabla}_X N)^T.$$

Observação 1.26. Quando a codimensão de uma imersão é 1, isto é, $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}$; $f(M) \subset \bar{M}$, dizemos que M é uma hipersuperfície de $\bar{M}$.

Teorema 1.27. (Gauss). Sejam $p \in M$ e x, y vetores ortonormais de $T_p M$. Então

$$K(x, y) - \bar{K}(x, y) = \langle B(x, x), B(y, y) \rangle - |B(x, y)|^2. \quad (1.16)$$

Observação 1.28. No caso de hipersuperfície $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}$, a fórmula de Gauss (1.16) admite uma expressão mais simples. Sejam $p \in M$ e $N \in (T_p M)^\perp$. Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de $T_p M$ para a qual $S_N = S$ é diagonal, isto é, $S(e_i) = \lambda_i e_i$, $i = 1, \dots, n$, onde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são as curvaturas principais. Então $H(e_i, e_i) = \lambda_i$ e $H(e_i, e_j) = 0$, se $i \neq j$. Portanto a equação (1.16) se escreve

$$K(e_i, e_j) - \bar{K}(e_i, e_j) = \lambda_i \lambda_j. \quad (1.17)$$

A conexão normal $\nabla^\perp$ da imersão, é dada por

$$\nabla_X^\perp N = (\bar{\nabla}_X N)^N.$$

De maneira análoga ao caso do fibrado tangente, introduz-se a partir da $\nabla^\perp$ uma noção de curvatura no fibrado normal que é chamada curvatura normal $R^\perp$ da imersão definida por

$$R^\perp(X, Y)N = \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp N - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp N - \nabla_{[X, Y]}^\perp N. \quad (1.18)$$

Teorema 1.29. *Sejam $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$ e $\eta, \zeta \in \mathfrak{X}^\perp(M)$, temos:*

a) *Equação de Gauss*

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, T \rangle = \langle R(X, Y)Z, T \rangle - \langle B(Y, T), B(X, Z) \rangle + \langle B(X, T), B(Y, Z) \rangle;$$

b) *Equação de Ricci*

$$\langle \bar{R}(X, Y)\eta, \zeta \rangle - \langle R^\perp(X, Y)\eta, \zeta \rangle = \langle [S_\eta, S_\zeta]X, Y \rangle,$$

onde $[S_\eta, S_\zeta]$ indica o operador $S_\eta \circ S_\zeta - S_\zeta \circ S_\eta$.

Observação 1.30. *Dizemos que o fibrado normal de uma imersão é plano se $R^\perp = 0$. Admita que o espaço ambiente $\bar{M}$ tem curvatura seccional constante. Então a equação de Ricci se escreve*

$$\langle R^\perp(X, Y)\eta, \zeta \rangle = -\langle [S_\eta, S_\zeta]X, Y \rangle.$$

Teorema 1.31. (Equação de Codazzi) *A seguinte equação se verifica*

$$\langle \bar{R}(X, Y)Z, \eta \rangle = (\bar{\nabla}_Y B)(X, Z, \eta) - (\bar{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta).$$

Observação 1.32. *Se o espaço ambiente $\bar{M}$ tem curvatura seccional constante, a equação de Codazzi se reduz a:*

$$(\bar{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta) = (\bar{\nabla}_Y B)(X, Z, \eta).$$

Se, além disto, a codimensão da imersão é 1, $\nabla_X^\perp \eta = 0$, donde,

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X B(Y, Z, \eta) &= X \langle S_\eta(Y), Z \rangle - \langle S_\eta(\nabla_X Y), Z \rangle - \langle S_\eta(Y), \nabla_X Z \rangle \\ &= \langle \nabla_X(S_\eta(Y)), Z \rangle - \langle S_\eta(\nabla_X Y), Z \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, neste caso, a equação de Codazzi se escreve

$$\nabla_X(S_\eta(Y)) - \nabla_Y(S_\eta(X)) = S_\eta([X, Y]).$$

A importância das equações de Gauss, Codazzi e Ricci é que, no caso em que o espaço ambiente tem curvatura seccional constante, elas desempenham um papel análogo aos das equações de compatibilidade na teoria local das superfícies.

Enunciaremos em seguida o Teorema fundamental das superfícies, que será usado no capítulo 3.

Teorema 1.33. *Sejam E, F, G, e, f, g funções diferenciáveis definidas em um conjunto aberto $V \subset \mathbb{R}^2$, com $E > 0, G > 0$. Suponha que as funções dadas satisfaçam as equações de Gauss e Mainardi–Codazzi e que $EG - F^2 > 0$. Então, para todo $q \in V$ existe uma vizinhança $U \subset V$ de q e um difeomorfismo $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbf{x}(U) \subset \mathbb{R}^3$ tal que a superfície regular $\mathbf{x}(U) \subset \mathbb{R}^3$ tem E, F, G, e, f, g como coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais, respectivamente. Além disto, se U é conexo e se*

$$\tilde{\mathbf{x}} : U \rightarrow \tilde{\mathbf{x}}(U) \subset \mathbb{R}^3$$

é um outro difeomorfismo satisfazendo as mesmas condições, então existe uma translação T e uma transformação ortogonal própria ρ em $\mathbb{R}^3$ tal que $\tilde{\mathbf{x}} = T \circ \rho \circ \mathbf{x}$.

Observamos que este Teorema pode ser generalizado para dimensões superiores, no caso em que o espaço ambiente tem curvatura seccional constante, e neste caso as equações de compatibilidade são dadas pelas equações de Gauss, Codazzi e de Ricci. Para maiores detalhes ver [18].

Definição 1.34. *Uma hipersuperfície M é dita genérica quando todas as suas curvaturas principais são distintas.*

Capítulo 2

Condições necessárias para a existência de hipersuperfícies conformemente planas no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^4$

Cartan mostrou em [5] que uma hipersuperfície conformemente plana genérica em $\mathbb{R}^4$, pode ser parametrizada por linhas de curvatura, e que neste sistema de coordenadas (x^1, x^2, x^3) a primeira e a segunda formas fundamentais g e s , são representadas respectivamente por:

$$g = e^{P(x)} \{e^{2f(x)}(dx^1)^2 + e^{2h(x)}(dx^2)^2 + (dx^3)^2\}. \quad (2.1)$$

e

$$s = e^{P(x)} \{\lambda(x)e^{2f(x)}(dx^1)^2 + \mu(x)e^{2h(x)}(dx^2)^2 + \nu(x)(dx^3)^2\}. \quad (2.2)$$

onde $P(x) = P(x^1, x^2, x^3)$, $f(x) = f(x^1, x^2, x^3)$ e $h(x) = h(x^1, x^2, x^3)$, e $\lambda(x)$, $\mu(x)$ e $\nu(x)$ são as curvaturas principais das direções principais x^1 , x^2 e x^3 , respectivamente.

Utilizando o trabalho de Cartan, Hertrich-Jeromin em [10], mostrou que toda hipersuperfície conformemente plana genérica pode ser parametrizada por linhas de curvatura e que nestas coordenadas, a primeira e a segunda formas fundamentais, podem ser representadas por:

$$g = e^{2P(x)} \{\cos^2 \varphi(x)(dx^1)^2 + \sin^2 \varphi(x)(dx^2)^2 + (dx^3)^2\} \quad (2.3)$$

e

$$s = e^{2P(x)} \{ \lambda(x) \cos^2 \varphi(x) (dx^1)^2 + \mu(x) \sin^2 \varphi(x) (dx^2)^2 + \nu(x) (dx^3)^2 \} \quad (2.4)$$

ou

$$g = e^{2P(x)} \{ \cosh^2 \varphi(x) (dx^1)^2 + \sinh^2 \varphi(x) (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \} \quad (2.5)$$

e

$$s = e^{2P(x)} \{ \lambda(x) \cosh^2 \varphi(x) (dx^1)^2 + \mu(x) \sinh^2 \varphi(x) (dx^2)^2 + \nu(x) (dx^3)^2 \} \quad (2.6)$$

onde $P(x) = P(x^1, x^2, x^3)$, $\varphi(x) = \varphi(x^1, x^2, x^3)$ e $\lambda(x)$, $\mu(x)$ e $\nu(x)$ são as curvaturas principais das direções x^1 , x^2 e x^3 , respectivamente.

Neste capítulo encontraremos algumas condições necessárias para a existência de hiper-superfícies conformemente planas genéricas em $\mathbb{R}^4$. Finalmente, considerando $P = P(x^3)$, mostraremos que $\varphi(x^1, x^2, x^3) = A(x^1, x^2) + B(x^3)$ e que as funções A e B satisfazem condições especiais. Neste trabalho usamos as seguintes notações: x^i representa a i -ésima coordenada, f_i representa a derivada parcial da função f em relação a i -ésima coordenada e f_{ij} representa a derivada parcial de f em relação a i -ésima e a j -ésima coordenada respectivamente.

O fato da primeira forma fundamental em (2.1) ser diagonalizável, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.1. *Seja g uma métrica do tipo (2.1), então valem as seguintes equações:*

$$(P + f)_2(P + h)_1 - P_{12} = f_2 h_1, \quad (2.7)$$

$$P_2(P + h)_3 - P_{23} = f_{23} + f_2(f - h)_3, \quad (2.8)$$

$$P_1(P + f)_3 - P_{13} = h_{13} - h_1(f - h)_3. \quad (2.9)$$

Demonstração: Segue diretamente da equação de Gauss que

$$R_{1323} = R_{1232} = R_{2131} = 0.$$

Como g é diagonalizável temos pela equação (1.8) que

$$R_{1323} = R_{132}^3 g_{33},$$

e pela equação (1.7)

$$R_{132}^3 = \sum_{s=1}^3 \Gamma_{12}^s \Gamma_{3s}^3 - \sum_{s=1}^3 \Gamma_{32}^s \Gamma_{1s}^3 + \frac{\partial}{\partial x_3} \Gamma_{12}^3 - \frac{\partial}{\partial x_1} \Gamma_{32}^3.$$

Como a métrica g é diagonal temos que

$$\Gamma_{ij}^m = 0 \quad \forall i \neq j \neq k. \quad (2.10)$$

Sendo assim,

$$R_{132}^3 = \Gamma_{12}^1 \Gamma_{31}^3 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{32}^3 - \Gamma_{32}^3 \Gamma_{13}^3 - \frac{\partial}{\partial x_1} \Gamma_{32}^3. \quad (2.11)$$

Calculando os símbolos de Christoffel da equação (2.11), temos que:

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} g_{21} + \frac{\partial}{\partial x_2} g_{11} - \frac{\partial}{\partial x_1} g_{12} \right\} g^{11} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2} e^{2(P+f)} \right\} e^{-2(P+f)}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}^1 &= (P+f)_2. \\ \Gamma_{31}^3 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_3} g_{13} + \frac{\partial}{\partial x_1} g_{33} - \frac{\partial}{\partial x_3} g_{31} \right\} g^{33} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} e^{2P} \right\} e^{-2P} \end{aligned} \quad (2.12)$$

isto equivale a,

$$\begin{aligned} \Gamma_{31}^3 &= P_1. \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} g_{22} + \frac{\partial}{\partial x_2} g_{21} - \frac{\partial}{\partial x_2} g_{12} \right\} g^{22} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} e^{2(P+h)} \right\} e^{-2(P+h)} \end{aligned} \quad (2.13)$$

daí temos que,

$$\Gamma_{12}^2 = (P+h)_1. \quad (2.14)$$

Finalmente,

$$\Gamma_{32}^3 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_3} g_{23} + \frac{\partial}{\partial x_2} g_{33} - \frac{\partial}{\partial x_3} g_{32} \right\} g^{33} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2} e^{2P} \right\} e^{-2P}$$

ou seja,

$$\Gamma_{32}^3 = P_2. \quad (2.15)$$

Substituindo (2.12), (2.13), (2.14) e (2.15) em (2.11) temos

$$R_{132}^3 = (P+f)_2 P_1 + (P+h)_1 P_2 - P_2 P_1 - P_{12}. \quad (2.16)$$

Como $g_{33} \neq 0$ então $R_{132}^3 = 0$, que é equivalente a

$$(P + f)_2 P_1 + (P + h)_1 P_2 - P_2 P_1 - P_{12} = 0. \quad (2.17)$$

Somando $f_2 h_1$ nos dois lados da equação (2.17) e agrupando os termos convenientemente, obtemos a equação (2.7).

Da equação (1.8), temos

$$R_{1232} = R_{123}^2 g_{22},$$

e como

$$R_{123}^2 = \sum_{s=1}^3 \Gamma_{13}^s \Gamma_{2s}^2 - \sum_{s=1}^3 \Gamma_{23}^s \Gamma_{1s}^2 + \frac{\partial}{\partial x_2} \Gamma_{13}^2 - \frac{\partial}{\partial x_1} \Gamma_{23}^2,$$

segue por (2.10) que

$$R_{123}^2 = \Gamma_{13}^1 \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{13}^3 \Gamma_{23}^2 - \Gamma_{23}^2 \Gamma_{12}^2 - \frac{\partial}{\partial x_1} \Gamma_{23}^2. \quad (2.18)$$

De modo análogo aos casos anteriores temos que

$$\Gamma_{13}^1 = (P + f)_3 \text{ e } \Gamma_{23}^2 = (P + h)_3. \quad (2.19)$$

Substituindo as equações (2.13), (2.14) e (2.19) em (2.18), temos

$$R_{123}^2 = (P + f)_3 (P + h)_1 + P_1 (P + h)_3 - (P + h)_3 (P + h)_1 - (P + h)_{13}, \quad (2.20)$$

como $R_{123}^2 = 0$, e simplificando o segundo membro da equação (2.20), temos que

$$P_1 (P + f)_3 + h_1 (f - h)_3 - P_{13} - h_{13} = 0, \quad (2.21)$$

obtemos assim a equação (2.9).

Como

$$R_{2131} = R_{213}^1 g_{11}$$

e

$$R_{213}^1 = \sum_{s=1}^3 \Gamma_{23}^s \Gamma_{1s}^1 - \sum_{s=1}^3 \Gamma_{13}^s \Gamma_{2s}^1 + \frac{\partial}{\partial x_1} \Gamma_{23}^1 - \frac{\partial}{\partial x_2} \Gamma_{13}^1,$$

segue por (2.10), que

$$R_{213}^1 = \Gamma_{23}^2 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{23}^3 \Gamma_{13}^1 - \Gamma_{13}^1 \Gamma_{21}^1 - \frac{\partial}{\partial x_2} \Gamma_{13}^1. \quad (2.22)$$

Para obter a equação (2.8) basta substituir (2.12), (2.15) e (2.19) na equação (2.22) e usar o fato que $R_{213}^1 = 0$. $\square$

Utilizando as equações do Teorema (2.1) obtemos o seguinte resultado:

Teorema 2.2. *Existe uma função $\psi = \psi(x^1, x^2, x^3)$ satisfazendo as seguintes condições:*

$$\psi_{12} = (P + f)_2(P + h)_1 - P_{12} \quad (2.23)$$

$$\psi_{13} = (P + f)_3P_1 - P_{13} \quad (2.24)$$

$$\psi_{23} = (P + h)_3P_2 - P_{23}. \quad (2.25)$$

Além disso, a função ψ é determinada unicamente no seguinte sentido: se existe outra função $\bar{\psi}$ satisfazendo as mesmas equações, então $\bar{\psi}(x^1, x^2, x^3) = \psi(x^1, x^2, x^3) + A(x^1) + B(x^2) + C(x^3)$.

Demonstração: Usando (2.7), (2.8) e (2.9) mostraremos inicialmente que as seguintes equações são satisfeitas:

$$\{P + f\}_3P_1\}_2 = \{(P + h)_3P_2\}_1, \quad (2.26)$$

$$\{P_2(P + h)_3\}_1 = \{(P + f)_2(P + h)_1\}_3, \quad (2.27)$$

$$\{(P + h)_1(P + f)_2\}_3 = \{P_1(P + f)_3\}_2. \quad (2.28)$$

Temos que

$$\begin{aligned} \{(P + f)_3P_1\}_2 - \{(P + h)_3P_2\}_1 &= (P + f)_{23}P_1 + (P + f)_3P_{12} - (P + h)_{13}P_2 - (P + h)_3P_{12} \\ &= (P + f)_{23}P_1 - (P + h)_{13}P_2 + (f - h)_3P_{12} \\ &= (P_{23} + f_{23})P_1 - (P_{13} + h_{13})P_2 + (f - h)_3P_{12}. \end{aligned}$$

Isolando P_{23} e P_{13} nas equações (2.8) e (2.9), respectivamente, e substituindo na última igualdade da equação acima temos:

$$\begin{aligned} \{(P + f)_3P_1\}_2 - \{(P + h)_3P_2\}_1 &= (P_2(P + h)_3 - f_{23} - f_2(f - h)_3 + f_{23})P_1 \\ &\quad - (P_1(P + f)_3 - h_{13} + h_1(f - h)_3 + h_{13})P_2 + (f - h)_3P_{12} \\ &= P_1P_2(h - f)_3 - (f - h)_3(f_2P_1 + h_1P_2 - P_{12}) \\ &= (h - f)_3(P_1P_2 + f_2P_1 + h_1P_2 - P_{12}). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Por outro lado, de (2.7) temos:

$$P_1P_2 + h_1P_2 + f_2P_1 + f_2h_1 - P_{12} = f_2h_1,$$

que equivale a

$$P_1P_2 + h_1P_2 + f_2P_1 - P_{12} = 0, \quad (2.30)$$

e substituindo (2.30) em (2.29) obtemos (2.26). De modo análogo, prova-se que (2.27) e (2.28) são satisfeitas.

Agora demonstraremos que existe uma função $L = L(x^1, x^2, x^3)$ tal que

$$L_{12} = (P + f)_2(P + h)_1, L_{13} = (P + f)_3P_1 \text{ e } L_{23} = (P + h)_3P_2. \quad (2.31)$$

Utilizando a comutatividade das derivadas mistas, segue por (2.26), (2.27) e (2.28) que existem funções $K = K(x^1, x^2, x^3)$, $\bar{K} = \bar{K}(x^1, x^2, x^3)$ e $\hat{K} = \hat{K}(x^1, x^2, x^3)$ tal que

$$\begin{aligned} K_1 &= (P + f)_3P_1, & K_2 &= (P + h)_3P_2, & \bar{K}_1 &= (P + f)_2(P + h)_1, \\ \bar{K}_3 &= P_2(P + h)_3, & \hat{K}_3 &= P_1(P + f)_3, & \hat{K}_2 &= (P + h)_1(P + f)_2. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Segue de (2.32) que $K_1 = \hat{K}_3$, $K_2 = \bar{K}_3$, $\bar{K}_1 = \hat{K}_2$. Sendo assim, existem funções $L = L(x^1, x^2, x^3)$, $\bar{L} = \bar{L}(x^1, x^2, x^3)$ e $\hat{L} = \hat{L}(x^1, x^2, x^3)$ tal que

$$L_1 = \hat{K}, \quad L_3 = K, \quad \bar{L}_2 = \bar{K}, \quad \bar{L}_3 = K, \quad \hat{L}_1 = \hat{K}, \quad \hat{L}_2 = \bar{K}.$$

Portanto, temos $L_1 = \hat{L}_1 = \hat{K}$, $L_3 = \bar{L}_3 = K$ e $\bar{L}_2 = \hat{L}_2 = \bar{K}$, que equivale a, $(L - \hat{L})_1 = 0$, $(L - \bar{L})_3 = 0$ e $(\bar{L} - \hat{L})_2 = 0$. Então podemos concluir que

$$L - \hat{L} = U(x^2, x^3), \quad L - \bar{L} = V(x^1, x^2) \text{ e } \bar{L} - \hat{L} = W(x^1, x^3), \quad (2.33)$$

segue de (2.33) que

$$W(x^1, x^3) = \bar{L} - \hat{L} = (L - \hat{L}) - (L - \bar{L}) = U(x^2, x^3) - V(x^1, x^2). \quad (2.34)$$

De (2.34) temos que: $W_{13} = 0$, $U_{23} = 0$ e $V_{12} = 0$, ou seja

$$U(x^2, x^3) = X(x^2) + Y(x^3), V(x^1, x^2) = Z(x^1) + X(x^2) \text{ e } W(x^1, x^3) = Y(x^3) - Z(x^1).$$

Deste modo, podemos concluir que as funções L , $\bar{L}$ e $\hat{L}$ são iguais a menos de funções de variáveis separadas, e satisfaz a afirmação (2.31).

Para concluirmos a demonstração deste Teorema basta definir $\psi = L - P$. □

Uma consequência imediata dos Teoremas (2.1) e (2.2) é o seguinte:

Corolário 2.3. *Considerando a função $\psi(x^1, x^2, x^3)$ dada no Teorema (2.2), então temos as seguintes equações:*

$$\psi_{12} = f_2 h_1, \psi_{13} = h_{13} - h_1(f - h)_3 \text{ e } \psi_{23} = f_{23} + f_2(f - h)_3. \quad (2.35)$$

A prova segue diretamente das equações (2.23), (2.24) e (2.25) e das (2.7), (2.8) e (2.9).

Aplicando o Corolário (2.3) para a métrica dada em (2.3) obtemos em seguida uma condição de integrabilidade para φ . Neste caso vamos ter que:

$$\cos^2 \varphi(x) = e^{2f(x)} \quad (0 < e^{2f(x)} \leq 1), \text{ que é equivalente a, } f(x) = \ln(\cos \varphi(x))$$

e

$$\sin^2 \varphi(x) = e^{2h(x)} \quad (0 < e^{h(x)} \leq 1), \text{ ou seja, } h(x) = \ln(\sin \varphi(x)),$$

e daí chegamos nos seguintes resultados:

$$\psi_{12} = -\varphi_1 \varphi_2, \quad \psi_{13} = \varphi_{13} \cot \varphi, \quad \psi_{23} = -\varphi_{23} \tan \varphi. \quad (2.36)$$

Derivando a segunda equação de (2.36) em relação a x^2 temos:

$$\psi_{123} = \varphi_{123} \cot \varphi - \varphi_{13} \varphi_2 \csc^2 \varphi. \quad (2.37)$$

Agora derivando a terceira equação de (2.36) em relação a x^1 temos:

$$\psi_{123} = -\varphi_{123} \tan \varphi - \varphi_{23} \varphi_1 \sec^2 \varphi. \quad (2.38)$$

Subtraindo (2.38) de (2.37) e isolando φ_{123} , chegamos na condição de integrabilidade de φ dada por:

$$\varphi_{123} = -\varphi_1 \varphi_{23} \tan \varphi + \varphi_2 \varphi_{13} \cot \varphi. \quad (2.39)$$

No caso da métrica (2.5), temos:

$$\cosh^2 \varphi(x) = e^{2f(x)} \quad (e^{2f(x)} \geq 1), \text{ que é equivalente a, } f(x) = \ln(\cosh \varphi(x))$$

e

$$\sinh^2 \varphi(x) = e^{2h(x)}, \text{ isto é, } h(x) = \ln(\sinh \varphi(x)),$$

daí chegamos nos seguintes resultados:

$$\psi_{12} = \varphi_1 \varphi_2, \quad \psi_{13} = \varphi_{13} \coth \varphi, \quad \psi_{23} = \varphi_{23} \tanh \varphi. \quad (2.40)$$

Usando o mesmo procedimento acima, temos que a condição de integrabilidade para φ é dada por

$$\varphi_{123} = \varphi_1 \varphi_{23} \tanh \varphi + \varphi_2 \varphi_{13} \coth \varphi. \quad (2.41)$$

Em seguida, estudaremos hipersuperfícies conformemente planas genéricas em $\mathbb{R}^4$ com a primeira forma fundamental dada por:

$$g = e^{2P(x^3)} \{ \cos^2 \varphi(x) (dx^1)^2 + \sin^2 \varphi(x) (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \}, \quad (2.42)$$

com a hipótese que $\varphi_i \neq 0$ (para $i = 1, 2, 3$) se verifica.

Um resultado importante que temos, é que uma hipersuperfície M é conformemente plana se, e somente se, o tensor de Schouten é um tensor do tipo Codazzi, que equivale a dizer que o tensor de Bach é nulo, para melhores detalhes ver [15]. Como a métrica $\bar{g} = e^{2f(x)} (dx^1)^2 + e^{2h(x)} (dx^2)^2 + (dx^3)^2$ é conformemente plana, então pela equação (1.15) $B_{ji}^k = 0$, em particular, temos:

$$B_{23}^3 = 0 \quad B_{31}^3 = 0 \quad B_{23}^2 = 0. \quad (2.43)$$

Nosso objetivo agora é encontrar condições necessárias para a existência de hipersuperfícies conformemente planas em $\mathbb{R}^4$, no caso particular em que $P(x) = P(x^3)$. Em seguida, explicitaremos as equações (2.43), pois elas nos darão condições necessárias importantes para a existência de hipersuperfícies conformemente planas no caso particular que vamos tratar. Como a métrica $\bar{g}$ é diagonal, temos que $g(X_i, X_j) = 0$, se $i \neq j$, e pela equação (1.14) temos:

$$\begin{aligned} B_{23}^3 &= (\nabla_{X_3} S)(X_2, X_3) - (\nabla_{X_2} S)(X_3, X_3) = \nabla_{X_3} (Ric(X_2, X_3)) \\ &- \nabla_{X_3} \left(\frac{K}{4} g(X_2, X_3) \right) - \nabla_{X_2} (Ric(X_3, X_3)) + \nabla_{X_2} \left(\frac{K}{4} g(X_3, X_3) \right). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Como $g(X_i, X_j) = 0$, se $i \neq j$, e $g(X_3, X_3) = 1$ a equação (2.44) passa a ser dada por

$$\begin{aligned} B_{23}^3 &= X_3 (Ric(X_2, X_3)) - Ric(\nabla_{X_3} X_2, X_3) - Ric(X_2, \nabla_{X_3} X_3) \\ &- X_2 (Ric(X_3, X_3)) + Ric(\nabla_{X_2} X_3, X_3) + Ric(X_3, \nabla_{X_2} X_3) + \frac{X_2(K)}{4}. \end{aligned}$$

Usando que, $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$, ($\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$) e que um tensor de ordem dois é uma aplicação bilinear, temos que

$$\begin{aligned} B_{23}^3 = X_3(Ric(X_2, X_3)) & - \sum_{l=1}^3 \Gamma_{32}^l Ric(X_l, X_3) - \sum_{l=1}^3 \Gamma_{33}^l Ric(X_2, X_l) - X_2(Ric(X_3, X_3)) \\ & + \sum_{l=1}^3 \Gamma_{23}^l Ric(X_l, X_3) + \sum_{l=1}^3 \Gamma_{23}^l Ric(X_3, X_l) + \frac{X_2(K)}{4}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} B_{23}^3 = X_3(Ric(X_2, X_3)) & - \sum_{l=1}^3 \Gamma_{33}^l Ric(X_2, X_l) - X_2(Ric(X_3, X_3)) \\ & + \sum_{l=1}^3 \Gamma_{23}^l Ric(X_3, X_l) + \frac{X_2(K)}{4}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Calculando os símbolos de Christoffel da métrica $\bar{g}$ temos que:

$$\Gamma_{33}^m = \Gamma_{12}^3 = \Gamma_{23}^3 = 0, \quad (m = 1, 2, 3) \text{ e } \Gamma_{23}^2 = h_3. \quad (2.46)$$

Substituindo (2.46) em (2.45), temos que

$$B_{23}^3 = X_3(Ric(X_2, X_3)) - X_2(Ric(X_3, X_3)) + h_3 Ric(X_3, X_2) + \frac{X_2(K)}{4},$$

e pela definição de tensor de Ricci (ver (1.11)), temos que

$$Ric(X_2, X_3) = \sum_{j=1}^3 R_{2j3}^j.$$

Como

$$R_{213}^1 = \sum_{l=1}^3 \Gamma_{23}^l \Gamma_{1l}^1 + \sum_{l=1}^3 \Gamma_{13}^l \Gamma_{2l}^1 + \frac{\partial}{\partial x_1} \Gamma_{23}^1 - \frac{\partial}{\partial x_2} \Gamma_{13}^1,$$

segue que

$$R_{213}^1 = f_2 h_3 - f_2 f_3 - f_{23}. \quad (2.47)$$

Usando o mesmo procedimento, temos

$$R_{223}^2 = \sum_{l=1}^3 \Gamma_{23}^l \Gamma_{2l}^2 - \sum_{l=1}^3 \Gamma_{23}^l \Gamma_{2l}^2 + \frac{\partial}{\partial x_2} \Gamma_{23}^2 - \frac{\partial}{\partial x_2} \Gamma_{23}^2 = 0 \quad (2.48)$$

e

$$R_{233}^3 = \sum_{l=1}^3 \Gamma_{23}^l \Gamma_{3l}^3 - \sum_{l=1}^3 \Gamma_{33}^l \Gamma_{2l}^3 + \frac{\partial}{\partial x_3} \Gamma_{23}^3 - \frac{\partial}{\partial x_2} \Gamma_{33}^3 = 0. \quad (2.49)$$

Portanto

$$Ric(X_2, X_3) = f_2 h_3 - f_2 f_3 - f_{23}. \quad (2.50)$$

De maneira análoga temos

$$Ric(X_3, X_3) = -f_{33} - (f_3)^2 - h_{33} - (h_3)^2 \quad (2.51)$$

e

$$Ric(X_3, X_2) = -f_{23} - f_2 f_3 + f_2 h_3. \quad (2.52)$$

Pela equação (1.10) a curvatura escalar é dada por

$$K = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,k=1}^3 Ric(X_i, X_k) g^{ik},$$

ou seja,

$$K = Ric(X_1, X_1) g^{11} + Ric(X_2, X_2) g^{22} + Ric(X_3, X_3) g^{33}. \quad (2.53)$$

De modo análogo aos casos anteriores temos que:

$$\begin{aligned} Ric(X_1, X_1) &= -(f_{22} + (f_2)^2 - f_2 h_2) e^{2f-2h} \\ &\quad - (h_{11} + (h_1)^2 - f_1 h_1) - e^{2f} (f_{33} + (f_3)^2 + f_3 h_3) \end{aligned} \quad (2.54)$$

e

$$\begin{aligned} Ric(X_2, X_2) &= -f_{22} - (f_2)^2 \\ &\quad - e^{2h-2f} (h_{11} + (h_1)^2 - f_1 h_1) + e^{2h} (-f_3 h_3 - h_{33} - (h_3)^2). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Substituindo (2.51), (2.54) e (2.55) em (2.53) temos

$$\begin{aligned} K &= -2(f_{22} + (f_2)^2 - f_2 h_2) e^{-2h} - 2(h_{11} + (h_1)^2 - f_1 h_1) \\ &\quad - 2f_3 h_3 - 2f_{33} - 2(f_3)^2 - 2h_{33} - 2h_3. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Pelas equações (2.50), (2.51), (2.52) e (2.56), dizer que $B_{23}^3 = 0$, equivale a

$$\begin{aligned} &\{e^{-2h} (f_{22} + (f_2)^2 - f_2 h_2)\}_2 + \{e^{-2f} (h_{11} + (h_1)^2 - f_1 h_1)\}_2 \\ &\quad - \{f_{33} + (f_3)^2 + h_{33} + (h_3)^2 - f_3 h_3\}_2 \\ &= -2\{f_{23} + f_2 f_3 - f_2 h_3\}_3 - 2\{f_{23} + f_2 f_3 - f_2 h_3\} h_3. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Analogamente, mostra-se $B_{31}^3 = 0$, é equivalente a

$$\begin{aligned} & \{e^{-2h}(f_{22} + (f_2)^2 - f_2 h_2)\}_1 + \{e^{-2f}(h_{11} + (h_1)^2 - f_1 h_1)\}_1 \\ & - \{f_{33} + (f_3)^2 + h_{33} + (h_3)^2 - f_3 h_3\}_1 \\ & = -2\{h_{13} + h_1 h_3 - f_3 h_1\}_3 - 2\{h_{13} + h_1 h_3 - f_3 h_1\}f_3, \end{aligned} \quad (2.58)$$

e que $B_{23}^2 = 0$, é equivalente a

$$\begin{aligned} & e^{-2h}\{f_{22} + (f_2)^2 - f_2 h_2\}_3 + \{e^{-2f}(h_{11} + (h_1)^2 - f_1 h_1)\}_3 \\ & + \{f_3 h_3 + h_{33} + (h_3)^2 - f_{33} - (f_3)^2\}_3 \\ & = 2e^{-2h}\{f_{23} + f_2 f_3 - f_2 h_3\}_2 - 2e^{-2h}\{f_{23} + f_2 f_3 - f_2 h_3\}h_2 \\ & + 2e^{-2f}\{h_{13} + h_1 h_3 - f_3 h_1\}h_1 \\ & - 2e^{-2f}\{h_{11} + (h_1)^2 - f_1 h_1\}h_3 + 2\{f_{33} + (f_3)^2 - f_3 h_3\}h_3. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Se considerarmos a métrica $\bar{g} = \cos^2 \varphi(x)(dx^1)^2 + \sin^2 \varphi(x)(dx^2)^2 + (dx^3)^2$, temos que as três equações acima passam a ser dadas por:

$$\begin{aligned} & 2 \cos 2\varphi \varphi_2 (\varphi_{22} - \varphi_{11}) + \sin 2\varphi (\varphi_{112} - \varphi_{222}) - \sin 2\varphi \varphi_{233} \\ & = -2 \cos 2\varphi \varphi_3 \varphi_{23} + 2\varphi_3 \varphi_{23} - 2\varphi_2 \varphi_{33}, \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$\begin{aligned} & 2 \cos 2\varphi \varphi_1 (\varphi_{22} - \varphi_{11}) + \sin 2\varphi (\varphi_{111} - \varphi_{122}) + \sin 2\varphi \varphi_{133} \\ & = 2 \cos 2\varphi \varphi_3 \varphi_{13} + 2\varphi_3 \varphi_{13} - 2\varphi_1 \varphi_{33}, \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} & \sin 2\varphi (\varphi_{113} + \varphi_{223} + \varphi_{333}) - 2 \cos 2\varphi (\varphi_3 \varphi_{33} + \varphi_1 \varphi_{13} + \varphi_2 \varphi_{23}) \\ & = 2\varphi_1 \varphi_{13} - 2\varphi_2 \varphi_{23} - 2\varphi_3 (\varphi_{11} - \varphi_{22}). \end{aligned} \quad (2.62)$$

Considerando $P = P(x^3)$, mostraremos em seguida o seguinte resultado.

Proposição 2.4. *Considerando g a métrica dada em (2.3), onde P é função apenas de x^3 então temos que*

$$\varphi(x^1, x^2, x^3) = A(x^1, x^2) + B(x^3)$$

Demonstração: Provar a afirmação acima é equivalente a provar que $\varphi_{13} = \varphi_{23} = 0$. Como por hipótese $P = P(x^3)$, então de (2.24) e (2.25) temos que

$$\psi_{13} = \psi_{23} = 0$$

por (2.36), isto é equivalente a

$$\varphi_{13} \cot \varphi = 0 \text{ e } -\varphi_{23} \tan \varphi = 0.$$

Logo temos que,

$$\varphi_{13} = \varphi_{23} = 0.$$

□

O próximo resultado nos fornece uma condição necessária importante para existência de hipersuperfícies conformemente planas em $\mathbb{R}^4$.

Proposição 2.5. *Considerando a métrica g dada em (2.42) e suponha que a função φ dada por*

$$\varphi(x^1, x^2, x^3) = A(x^1, x^2) + B(x^3) \quad (2.63)$$

satisfaz, $B_3 \neq 0$, $A_1 \neq 0$ e $A_2 \neq 0$.

Então, temos que:

(I) A função $A(x^1, x^2)$ satisfaz a equação de Sine-Gordon:

$$A_{11} - A_{22} = \frac{E^2}{2} \sin(2A)$$

(II) A função $B(x^3)$ é uma função amplitude de Jacobi (uma função elíptica), satisfazendo:

$$B_3 = \sqrt{G^2 - E^2 \sin^2 B(x^3)}$$

onde E e G são constantes positivas.

Demonstração: Provaremos primeiramente que a função $A(x^1, x^2)$ satisfaz a equação de Sine-Gordon

$$A_{11} - A_{22} = \frac{E^2}{2} \sin(2A - 2F) \quad (2.64)$$

onde E e F são constantes.

Pelas equações (2.60), (2.61) e (2.63) temos que

$$2 \cos 2\varphi A_2(A_{22} - A_{11}) + \sin 2\varphi(A_{112} - A_{222}) = -2A_2 B_{33}, \quad (2.65)$$

$$2 \cos 2\varphi A_1(A_{22} - A_{11}) + \sin 2\varphi(A_{111} - A_{122}) = -2A_1 B_{33}. \quad (2.66)$$

dividindo (2.65) por A_2 e (2.66) por A_1 , temos que

$$\frac{(A_{11} - A_{22})_1}{A_1} = \frac{(A_{11} - A_{22})_2}{A_2}.$$

Definimos uma função $C(x^1, x^2)$ por

$$2C(x^1, x^2) = -\frac{(A_{11} - A_{22})_1}{A_1} \quad (2.67)$$

onde consideramos $A_1 \neq 0$ e $A_2 \neq 0$. Definimos agora as funções $D(x^1, x^2)$ e $\zeta(x^1, x^2)$ por

$$D(x^1, x^2) = A_{11} - A_{22}, \quad (2.68)$$

$$\sqrt{C^2(x^1, x^2) + D^2(x^1, x^2)} \cos \zeta(x^1, x^2) = C(x^1, x^2), \quad (2.69)$$

$$\sqrt{C^2(x^1, x^2) + D^2(x^1, x^2)} \sin \zeta(x^1, x^2) = D(x^1, x^2). \quad (2.70)$$

Isolando B_{33} em (2.65) (ou (2.66)) e substituindo (2.67) e (2.68), temos

$$\begin{aligned} B_{33} &= C \sin 2\varphi + D \cos 2\varphi = \sqrt{C^2 + D^2} \cos \zeta \sin 2\varphi + \sqrt{C^2 + D^2} \sin \zeta \cos 2\varphi \\ &= \sqrt{C^2 + D^2} \sin(2\varphi + \zeta) = \sqrt{C^2 + D^2} \sin(2(A + B) + \zeta) \\ &= \sqrt{C^2 + D^2} \sin(2A + \zeta) \cos 2B + \sqrt{C^2 + D^2} \cos(2A + \zeta) \sin 2B. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Como $B = B(x^3)$, então pela equação (2.71) as funções

$$\overline{C} = \left(\sqrt{C^2 + D^2} \sin(2A + \zeta) \right) (x^1, x^2) \text{ e } \overline{D} = \left(\sqrt{C^2 + D^2} \cos(2A + \zeta) \right) (x^1, x^2)$$

são constantes. Portanto, as funções $(\sqrt{C^2 + D^2})(x^1, x^2)$ e $(2A + \zeta)(x^1, x^2)$ também são constantes. Então temos

$$B_{33} = \overline{C} \cos 2B + \overline{D} \sin 2B. \quad (2.72)$$

Por outro lado, da equação (2.62), temos

$$\sin 2\varphi B_{333} = 2B_3(\cos 2\varphi B_{33} - A_{11} + A_{22}). \quad (2.73)$$

Da equação (2.72), temos

$$B_{333} = -2B_3\overline{C} \sin 2B + 2B_3\overline{D} \cos 2B. \quad (2.74)$$

Substituindo (2.72) e (2.74) em (2.73), temos

$$2B_3 \sin 2\varphi(-\overline{C} \sin 2B + \overline{D} \cos 2B) = 2B_3 \{ \cos 2\varphi(\overline{C} \cos 2B + \overline{D} \sin 2B) - A_{11} + A_{22} \},$$

por hipótese $B_3 \neq 0$, então

$$\sin 2\varphi(-\overline{C} \sin 2B + \overline{D} \cos 2B) = \cos 2\varphi(\overline{C} \cos 2B + \overline{D} \sin 2B) - A_{11} + A_{22},$$

isolando $A_{11} - A_{22}$, obtemos

$$A_{11} - A_{22} = \overline{C}(\sin 2\varphi \sin 2B + \cos 2\varphi \cos 2B) + \overline{D}(\cos 2\varphi \sin 2B - \sin 2\varphi \cos 2B),$$

ou seja,

$$A_{11} - A_{22} = \overline{C} \cos 2(\varphi - B) - \overline{D} \sin 2(\varphi - B).$$

Por (2.63) temos que

$$A_{11} - A_{22} = \overline{C} \cos 2A - \overline{D} \sin 2A. \quad (2.75)$$

Tomanos uma constante F , tal que $\sqrt{C^2 + D^2} \sin 2F = -\overline{C}$ e $\sqrt{C^2 + D^2} \cos 2F = -\overline{D}$ e definimos $E^2 = 2\sqrt{C^2 + D^2}$, substituindo estas expressões em (2.75), obtemos

$$A_{11} - A_{22} = \frac{E^2}{2}(-\sin 2F \cos 2A + \cos 2F \sin 2A)$$

ou seja,

$$A_{11} - A_{22} = \frac{E^2}{2} \sin (2A - 2F), \quad (2.76)$$

como $\varphi = A + B = (A - F) + (B + F)$, para concluir a demonstração de (I), basta substituir A no lugar de $A - F$ na equação (2.76) .

A função $B(x^3)$ é determinada pela seguinte equação:

$$B_3(x^3) = \sqrt{G^2 - E^2(\sin (B(x^3) + F))^2} \quad (2.77)$$

onde E e F são as mesmas constantes dadas acima e G é outra constante.

De fato, da equação (2.72), temos que

$$\begin{aligned}
 \{(B_3)^2\}_3 &= 2B_3B_{33} = 2B_3 \{\overline{C} \cos 2B + \overline{D} \sin 2B\} \\
 &= -2B_3 \left\{ \sqrt{C^2 + D^2} \sin 2F \cos 2B + \sqrt{C^2 + D^2} \cos 2F \sin 2B \right\} \\
 &= -2B_3 \left\{ \sqrt{C^2 + D^2} \sin 2B + 2F \right\}.
 \end{aligned}$$

Pondo $E^2 = 2\sqrt{C^2 + D^2}$, temos

$$\{(B_3)^2\}_3 = -B_3 E^2 \sin(2B + 2F). \quad (2.78)$$

Integrando (2.78) em relação a x^3 , obtemos

$$(B_3)^2 = c + \frac{E^2}{2} \cos(2B + 2F) \quad (2.79)$$

com c constante.

Portanto, fazendo $G^2 = c + \sqrt{C^2 + D^2}$ e substituindo em (2.79), temos

$$(B_2)^2 = G^2 - \frac{E^2}{2} + \frac{E^2}{2} \cos(2B + 2F) = G^2 - \frac{E^2}{2} (1 - \cos(2B + 2F)) \frac{E^2}{2}, \quad (2.80)$$

substituindo a relação trigonométrica

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

na última igualdade da equação (2.80), obtemos

$$(B_3)^2 = G^2 - E^2 \sin^2(B + F). \quad (2.81)$$

Para concluir a demonstração da Proposição, basta trocar $B + F$ por B na equação (2.81). $\square$

Capítulo 3

Hipersuperfícies conformemente planas em $\mathbb{R}^4$, com três curvaturas principais distintas

3.1 Exemplos de hipersuperfícies conformemente planas em $\mathbb{R}^4$

O objetivo desta seção é construir um exemplo de uma hipersuperfície conformemente plana genérica em $\mathbb{R}^4$. Este exemplo é construído a partir de uma superfície em $\mathbb{R}^3$ com curvatura constante negativa.

Exemplo 3.1. Considerando uma constante $\sigma \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e uma função $u(x^1, x^2) = \frac{(x^2 - x^1 \sin \sigma)}{\cos \sigma}$, defina a seguinte aplicação:

$$\mathbf{f}(x^1, x^2) = (\cosh u)^{-1}(-\cos \sigma \sin x^1, \cos \sigma \cos x^1, x^2 \cosh u - \cos \sigma \sinh u). \quad (3.1)$$

A superfície gerada por $\mathbf{f}$ é conhecida como hélice de Dini e tem curvatura -1 (ver [10]). Se $\sigma = 0$ a hélice é exatamente a pseudo-esfera.

O vetor normal unitário $\mathbf{N}(x^1, x^2)$ é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{N} = & (\cosh u)^{-1}(-\cos \sigma \sin x^1 \sinh u + \sin \sigma \cos x^1 \cosh u, \\ & \cos \sigma \cos x^1 \sinh u + \sin \sigma \sin x^1 \cosh u, \cos \sigma). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Definimos as funções $l(x^3)$ e $m(x^3)$ por

$$l(x^3) = -\tan B(x^3), \quad m_3(x^3) = \frac{\sqrt{1-G^2}}{(\cos B(x^3))^2}$$

sendo $B(x^3)$ a função dada na Proposição (2.5) satisfazendo $G^2 < E^2 = 1$ e $B(0) = 0$.

Então, a aplicação $\mathbf{p}(x^1, x^2, x^3)$ em $\mathbb{R}^4$ dada por

$$\mathbf{p}(x^1, x^2, x^3) = (\mathbf{f}(x^1, x^2), 0) + (l(x^3)\mathbf{N}(x^1, x^2), m(x^3)) \quad (3.3)$$

define uma hipersuperfície conformemente plana genérica.

De fato: Por cálculos diretos obtemos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= (\cosh u)^{-2}(-\cos \sigma \cos x^1 \cosh u - \sin \sigma \sin x^1 \sinh u, \\ &\quad -\cos \sigma \sin x^1 \cosh u + \sin \sigma \cos x^1 \sinh u, \sin \sigma) \end{aligned} \quad (3.4)$$

e

$$\mathbf{f}_2 = \sinh u (\cosh u)^{-2}(\sin x^1, -\cos x^1, \sinh u). \quad (3.5)$$

Logo temos que $\|\mathbf{f}_1\|^2 = \frac{1}{\cosh^2 u}$ e $\|\mathbf{f}_2\|^2 = \left(\frac{\sinh u}{\cosh u}\right)^2$, onde estamos supondo $u > 0$. A função $A(x^1, x^2)$ será definida para a hélice de Dini pelas relações abaixo:

$$\|\mathbf{f}_1\| = \cos A = \frac{1}{\cosh u} \quad e \quad \|\mathbf{f}_2\| = \sin A = \frac{\sinh u}{\cosh u}. \quad (3.6)$$

Calculando $\mathbf{N}_1$ e $\mathbf{N}_2$, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_1 &= \frac{\sinh u}{\cosh^2 u}(-\cos \sigma \cos x^1 \cosh u - \sin \sigma \sin x^1 \sinh u, \\ &\quad -\cos \sigma \sin x^1 \cosh u + \sin \sigma \cos x^1 \sinh u, \sin \sigma) \end{aligned}$$

e

$$\mathbf{N}_2 = -(\cosh u)^{-2}(\sin x^1, -\cos x^1, \sinh u) = -(\sinh u)^{-1} \sinh u (\cosh u)^{-2}(\sin x^1, -\cos x^1, \sinh u).$$

Pelas equações (3.4) e (3.5)

$$\mathbf{N}_1 = \sinh u \mathbf{f}_1 \quad e \quad \mathbf{N}_2 = -(\sinh u)^{-1} \mathbf{f}_2. \quad (3.7)$$

Para a aplicação $\mathbf{p}(x^1, x^2, x^3)$, temos

$$\mathbf{p}_1 = (\mathbf{f}_1, 0) + (l\mathbf{N}_1, 0) = (\mathbf{f}_1, 0) + (l \sinh u \mathbf{f}_1, 0) = (1 + l \sinh u)(\mathbf{f}_1, 0),$$

$$\mathbf{p}_2 = (\mathbf{f}_2, 0) + (l\mathbf{N}_2, 0) = (\mathbf{f}_2, 0) + (l(-\sinh u)^{-1}\mathbf{f}_2, 0) = (1 - l(\sinh u)^{-1})(\mathbf{f}_2, 0)$$

e

$$\mathbf{p}_3 = (l_3\mathbf{N}, m_3).$$

Sendo assim,

$$\|\mathbf{p}_1\|^2 = (1 + l \sinh u)^2 \|\mathbf{f}_1\|^2 = \frac{(1 + l \sinh u)^2}{\cosh^2 u},$$

$$\|\mathbf{p}_2\|^2 = (1 - l(\sinh u)^{-1})^2 \|\mathbf{f}_2\|^2 = (1 - l(\sinh u)^{-1})^2 \left(\frac{\sinh u}{\cosh u} \right)^2 = \frac{(\sinh u - l)^2}{\cosh^2 u}$$

e

$$\|\mathbf{p}_3\|^2 = (l_3)^2 \|\mathbf{N}\|^2 + (m_3)^2 = (l_3)^2 + (m_3)^2.$$

(Se tomarmos l_3 com $l(0) = 0$, então as funções $(1 + l \sinh u)$ e $(\sinh u - l)$ são positivas em torno de $x^3 = 0$.)

Queremos que as funções $(l(x^3), m(x^3))$ satisfaça as equações

$$\cos(A + B) = \frac{\|\mathbf{p}_1\|}{\sqrt{(l_3)^2 + (m_3)^2}}, \quad \sin(A + B) = \frac{\|\mathbf{p}_2\|}{\sqrt{(l_3)^2 + (m_3)^2}}. \quad (3.8)$$

De fato, se existe tais funções, como $\langle \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j \rangle = 0$ se $i \neq j$, então a métrica g induzida de $\mathbf{p}$ é

$$g = ((l_3)^2 + (m_3)^2) \{ \cos^2(A + B)(dx^1)^2 + \sin^2(A + B)(dx^2)^2 + (dx^3)^2 \}.$$

Por outro lado se, $l(x^3) = \tan B(x^3)$ e $m_3(x^3) = \frac{\sqrt{1 - G^2}}{(\cos(B(x^3)))^2}$, isto implica, $l_3 = -B_3 \sec^3 B$, logo

$$(l_3)^2 + (m_3)^2 = (B_3)^2 \sec^4 B + \sec^4 B(1 - G^2), \quad (3.9)$$

pela Proposição (2.5) e usando $E^2 = 1$, temos

$$(B_3)^2 = G^2 - \sin^2 B. \quad (3.10)$$

Substituindo (3.10) em (3.9), temos que

$$\begin{aligned}
 (l_3)^2 + (m_3)^2 &= \sec^4 B (G^2 - \sin^2 B) + \sec^4 B (1 - G^2) \\
 &= \sec^4 B (1 - \sin^2 B) = \sec^4 B \cos^2 B \\
 &= \sec^2 B = 1 + \tan^2 B = 1 + l^2.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Logo

$$g = (1 + l^2) \{ \cos^2(A + B)(dx^1)^2 + \sin^2(A + B)(dx^2)^2 + (dx^3)^2 \}, \tag{3.12}$$

onde $(1 + l^2)$ depende apenas de x^3 , e a métrica g é conformemente plana.

Suponhamos que as funções $l(x^3)$ e $m(x^3)$ satisfazem as equações (3.8), então

$$\begin{cases} \cos A \cos B - \sin A \sin B = \frac{\|\mathbf{p}_1\|}{\sqrt{(l_3)^2 + (m_3)^2}} \\ \sin A \cos B + \cos A \sin B = \frac{\|\mathbf{p}_2\|}{\sqrt{(l_3)^2 + (m_3)^2}} \end{cases}$$

resolvendo o sistema acima, temos

$$\cos B = \frac{1}{\sqrt{(l_3)^2 + (m_3)^2}} \quad e \quad \sin B = -\frac{l}{\sqrt{(l_3)^2 + (m_3)^2}}.$$

Portanto,

$$l(x^3) = -\tan B(x^3).$$

Neste caso, $l_3 = -\frac{B_3}{(\cos B)^2}$, e pela Proposição (2.5) (no caso $E^2 = 1$), temos

$$(l_3)^2 = \frac{G^2 - \sin^2 B}{(\cos B)^4}.$$

Além disso, de $(1 + l^2) = ((l_3)^2 + (m_3)^2)$, obtemos

$$\begin{aligned}
 (m_3)^2 &= 1 + l^2 - (l_3)^2 = 1 + l^2 - \frac{G^2 - \sin^2 B}{(\cos B)^4} = 1 + \frac{\sin^2 B}{\cos^2 B} - \frac{G^2 - \sin^2 B}{\cos^4 B} \\
 &= \frac{\cos^4 B + \cos^2 B \sin^2 B - G^2 + \sin^2 B}{\cos^4 B} = \frac{1 - G^2}{\cos^4 B}.
 \end{aligned}$$

Logo $G^2 < 1$ e $m_3 = \frac{\sqrt{1 - G^2}}{\cos^2 B}$. Reciprocamente, quando temos $l = -\tan B$ e $m_3 = \frac{\sqrt{1 - G^2}}{\cos^2 B}$, a equação (3.8) é satisfeita.

Provaremos agora que as curvas coordenadas de $\mathbf{p}$ são linhas de curvatura. O vetor normal unitário de $\mathbf{p}$ é dado por

$$\mathbf{N}^*(x^1, x^2, x^3) = \frac{1}{\sqrt{1+l^2}}(m_3\mathbf{N}, -l_3).$$

Então,

$$\mathbf{N}^*_1 = \frac{1}{\sqrt{1+l^2}}(m_3\mathbf{N}_1, 0) = \frac{1}{\sqrt{1+l^2}}(m_3 \sinh u \mathbf{f}_1, 0) = \frac{m_3 \sinh u}{\sqrt{1+l^2}}(\mathbf{f}_1, 0). \quad (3.13)$$

Observe que

$$1+l^2 = (l_3)^2 + (m_3)^2 = \frac{1-G^2}{(\cos B)^4} + \frac{G^2 - \sin^2 B}{(\cos B)^4} = \frac{1}{(\cos B)^2}, \quad (3.14)$$

e como $m_3 = \frac{\sqrt{1-G^2}}{(\cos B)^2}$, substituindo m_3 e a equação (3.14) em (3.13), temos

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^*_1 &= \frac{\sqrt{1-G^2}}{(\cos B)^2} \cos B \sinh u (\mathbf{f}_1, 0) = \frac{\sqrt{1-G^2}}{\cos B} \sinh u (\mathbf{f}_1, 0) \\ &= \frac{\sqrt{1-G^2}}{\cos B} \sinh u \frac{1+l \sinh u}{1+l \sinh u} (\mathbf{f}_1, 0) = \frac{\sqrt{1-G^2} \sinh u}{\cos B + l \cos B \sinh u} (1+l \sinh u) (\mathbf{f}_1, 0) \\ &= \frac{\sqrt{1-G^2} \sinh u}{\cos B - \cos B \tan B \sinh u} \mathbf{p}_1 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathbf{N}^*_1 = \frac{\sqrt{1-G^2} \sinh u}{\cos B - \sin B \sinh u} \mathbf{p}_1. \quad (3.15)$$

Usando o mesmo raciocínio temos

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^*_2 &= \frac{1}{\sqrt{1+l^2}}(m_3\mathbf{N}_2, 0) = \frac{1}{\sqrt{1+l^2}}(-m_3(\sinh u)^{-1}\mathbf{f}_2, 0) = -\frac{m_3}{\sqrt{1+l^2}}\frac{1}{\sinh u}(\mathbf{f}_2, 0) \\ &= -\frac{\sqrt{1-G^2}}{\cos B \sinh u}(\mathbf{f}_2, 0) = -\frac{\sqrt{1-G^2}}{\cos B \sinh u} \frac{1-l(\sinh u)^{-1}}{1-l(\sinh u)^{-1}}(\mathbf{f}_2, 0) \\ &= -\frac{\sqrt{1-G^2}}{\cos B \sinh u + \cos B \tan B} (1-l(\sinh u)^{-1})(\mathbf{f}_2, 0) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathbf{N}^*_2 = -\frac{\sqrt{1-G^2}}{\sin B + \cos B \sinh u} \mathbf{p}_2. \quad (3.16)$$

Como $\frac{1}{\sqrt{1+l^2}} = \cos B$, $m_3 = \frac{\sqrt{1-G^2}}{(\cos B)^2}$ e $l_3 = \frac{\sqrt{G^2 - \sin^2 B}}{(\cos B)^2}$, então $\mathbf{N}^*$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$\mathbf{N}^* = \left(\frac{\sqrt{1-G^2}}{\cos B} \mathbf{N}, \frac{\sqrt{G^2 - \sin^2 B}}{\cos B} \right),$$

assim

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^*_3 &= \left(\frac{\sqrt{1-G^2} \mathbf{N} B_3 \sin B}{(\cos B)^2}, \frac{-\frac{B_3 \sin B \cos B}{\sqrt{G^2 - \sin^2 B}} \cos B - \sqrt{G^2 - \sin^2 B} (-B_3 \sin B)}{(\cos B)^2} \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{1-G^2} \mathbf{N} B_3 \sin B}{(\cos B)^2}, \frac{-B_3 \sin B \cos^2 B + (G^2 - \sin^2 B) B_3 \sin B}{\sqrt{G^2 - \sin^2 B} (\cos B)^2} \right) \\ &= \left(-\sqrt{1-G^2} \sin B \mathbf{N} l_3, -\frac{(1-G^2) \sin B}{(\cos B)^2} \right) = -\sqrt{1-G^2} \sin B \left(\mathbf{N} l_3, \frac{\sqrt{1-G^2}}{(\cos B)^2} \right) \\ &= -\sqrt{1-G^2} \sin B (\mathbf{N} l_3, m_3) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathbf{N}^*_3 = -\sin B \sqrt{1-G^2} \mathbf{p}_3. \quad (3.17)$$

Observe que $N_i = dN(e_i) = -\lambda_i e_i$ ($i = 1, 2, 3$), onde e_i é uma base do espaço tangente e λ_i são as curvaturas principais correspondentes as curvas x^i . Pelas equações (3.15), (3.16) e (3.17) as curvaturas principais são:

$$\lambda_1 = -\frac{\sqrt{1-G^2} \sinh u}{\cos B - \sin B \sinh u}, \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{1-G^2}}{\sin B + \cos B \sinh u}, \quad \lambda_3 = \sin B \sqrt{1-G^2}.$$

Agora, mostraremos que as curvaturas principais são distintas. Suponhamos que duas delas sejam iguais. Se $\lambda_1 = \lambda_2$ teríamos que

$$-\frac{\sinh u}{\cos B - \sin B \sinh B} = \frac{1}{\sin B + \cos B \sinh u}$$

isto é equivalente a,

$$-\sinh u (\sin B + \cos B \sinh u) = \cos B - \sin B \sinh u$$

ou seja,

$$\cos B (\sinh^2 u + 1) = 0$$

mas $\cos B \neq 0$, pois $l(x^3) = -\tan B$, logo $\sinh^2 u + 1 = 0$, absurdo, pois $\sinh^2 u + 1 = \cosh^2 u \neq 0$. Logo $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Se $\lambda_1 = \lambda_3$ teríamos que

$$-\frac{\sinh u}{\cos B - \sin B \sinh B} = \sin B$$

isto é equivalente a,

$$-\sinh u = \sin B \cos B - \sin^2 B \sinh u,$$

logo

$$\cos^2 B \sinh u = -\sin B \cos B$$

ou seja,

$$\sinh u = -\tan B.$$

Como $u = u(x^1, x^2)$ e $B = B(x^3)$, então

$$\sinh u = -\tan B = k \quad (k \text{ constante}).$$

Daí temos,

$$(\sinh u)_2 = u_2 \cosh u = 0,$$

como $\cosh u \neq 0$ então $u_2 = 0$, ou seja, $\frac{1}{\cos \sigma} = 0$, que é uma contradição. Logo $\lambda_1 \neq \lambda_3$.

Se $\lambda_2 = \lambda_3$ teríamos que

$$\sin B = \frac{1}{\sin B + \cos B \sinh u}$$

que é equivalente a,

$$\sin^2 B + \sin B \cos B \sinh u = 1$$

assim,

$$\sin B \cos B \sinh u = \cos^2 B$$

ou seja,

$$\sinh u = \cot B,$$

que implica em $\lambda_2 \neq \lambda_3$.

Portanto as curvaturas principais são distintas, completando assim a construção do exemplo. $\square$

3.2 A construção de uma família de hipersuperfícies conformemente planas

Nosso objetivo agora é estender os resultados obtidos no exemplo (3.1) para superfícies com curvatura constante negativa em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{S}^3$. Nesta direção, construiremos em seguida uma nova família de hipersuperfícies conformemente planas genéricas com a métrica (2.42), que serão construídas a partir de superfícies com curvatura constante negativa em $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{S}^3$ com a métrica $\widehat{g} = \cos^2 A(dx^1)^2 + \sin^2 A(dx^2)^2$. Construiremos também uma nova família de hipersuperfícies conformemente planas genéricas com a métrica $g = e^{2P(x^3)}\{\cosh^2 \varphi(x)(dx^1)^2 + \sinh^2 \varphi(x)(dx^2)^2 + (dx^3)^2\}$, que serão construídas a partir de superfícies com curvatura constante positiva em $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{S}^3$ com a métrica $\widehat{g} = \cosh^2 A(dx^1)^2 + \sinh^2 A(dx^2)^2$. Mostraremos inicialmente o seguinte resultado:

Teorema 3.2. *Seja $\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^4$ uma superfície imersa em $\mathbb{R}^4$. Suponhamos que existe uma base ortonormal $\{\mathbf{N}, \overline{\mathbf{N}}\}$ do fibrado normal de $\mathbf{f}$ satisfazendo as seguintes condições:*

$$\mathbf{N}_1 = k_1(x^1, x^2)\mathbf{f}_1, \quad \mathbf{N}_2 = k_2(x^1, x^2)\mathbf{f}_2 \quad (3.18)$$

$$\overline{\mathbf{N}}_1 = \overline{k}_1(x^1, x^2)\mathbf{f}_1, \quad \overline{\mathbf{N}}_2 = \overline{k}_2(x^1, x^2)\mathbf{f}_2 \quad (3.19)$$

onde k_i e $\overline{k}_i$ denotam as curvaturas principais de $\mathbf{f}$. Além disso, suponhamos que, a partir da superfície $\mathbf{f}$ e de duas funções $l(x^3)$ e $m(x^3)$ com $m(0) = l(0) = 0$ a hipersuperfície $\mathbf{p}: (x^1, x^2, x^3) \mapsto \mathbf{p}(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^4$ é definida da seguinte forma:

$$\mathbf{p}(x^1, x^2, x^3) = \mathbf{f}(x^1, x^2) + l(x^3)\mathbf{N}(x^1, x^2) + m(x^3)\overline{\mathbf{N}}(x^1, x^2). \quad (3.20)$$

Então, temos o seguinte fato: Se $(l(x^3), m(x^3))$ não é uma reta em $\mathbb{R}^2$ e a primeira forma fundamental de $\mathbf{p}$ é representada em termos das funções $A(x^1, x^2)$ e $B(x^3)$ ($B(0) = 0$) dadas na Proposição (2.5) por

$$e^{2P(x^3)}\{\cos^2(A+B)(dx^1)^2 + \sin^2(A+B)(dx^2)^2 + (dx^3)^2\}, \quad (3.21)$$

então a superfície $\mathbf{f}$ mencionada acima está contida no hiperplano $\mathbb{R}^3$ ou na esfera padrão $\mathbb{S}^3$ em $\mathbb{R}^4$.

Demonstração: Considere primeiramente $\mathbf{p}(x^1, x^2, 0)$. Então, $\mathbf{p}_1(x^1, x^2, 0) = \mathbf{f}_1$ e $\mathbf{p}_2(x^1, x^2, 0) = \mathbf{f}_2$, e a primeira forma fundamental da função $\mathbf{f}$ é

$$e^{2P(0)}\{\cos^2 A(dx^1)^2 + \sin^2 A(dx^2)^2\}.$$

Podemos substituir $e^{2P(0)}\mathbf{f}(x^1, x^2)$ por $\mathbf{f}(x^1, x^2)$, desde que, supomos $e^{P(0)} = 1$ e $(l_3^2 + m_3^2)(0) = 1$.

Prosseguindo, pelas equações (3.18), (3.19) e (3.20) temos:

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{f}_1 + l\mathbf{N}_1 + m\bar{\mathbf{N}}_1 = (1 + lk_1 + m\bar{k}_1)\mathbf{f}_1 \quad (3.22)$$

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{f}_2 + l\mathbf{N}_2 + m\bar{\mathbf{N}}_2 = (1 + lk_2 + m\bar{k}_2)\mathbf{f}_2 \quad (3.23)$$

$$\mathbf{p}_3 = l_3\mathbf{N} + m_3\bar{\mathbf{N}}. \quad (3.24)$$

Pelas equações (3.22), (3.23) e (3.24) temos:

$$\|\mathbf{p}_1\|^2 = (1 + lk_1 + m\bar{k}_1)^2 \|\mathbf{f}_1\|^2 = (1 + lk_1 + m\bar{k}_1)^2 \cos^2 A, \quad (3.25)$$

$$\|\mathbf{p}_2\|^2 = (1 + lk_2 + m\bar{k}_2)^2 \|\mathbf{f}_2\|^2 = (1 + lk_2 + m\bar{k}_2)^2 \sin^2 A, \quad (3.26)$$

$$\|\mathbf{p}_3\|^2 = l_3^2 \|\mathbf{N}\|^2 + m_3^2 \|\bar{\mathbf{N}}\|^2 = l_3^2 + m_3^2. \quad (3.27)$$

Suponhamos $\cos A \geq 0$, $\sin A \geq 0$, $(1 + lk_1 + m\bar{k}_1) \geq 0$ e $1 + lk_2 + m\bar{k}_2 \geq 0$. Pelas equações (3.21), (3.25), (3.26) e (3.27), temos

$$\begin{cases} \cos(A + B) = \frac{1 + lk_1 + m\bar{k}_1}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}} \cos A \\ \sin(A + B) = \frac{1 + lk_2 + m\bar{k}_2}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}} \sin A \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, temos:

$$\begin{aligned} \cos B - \frac{1}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}} &= \frac{l}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}}(k_1 \cos^2 A + k_2 \sin^2 A) \\ &+ \frac{m}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}}(\bar{k}_1 \cos^2 A + \bar{k}_2 \sin^2 A) \end{aligned} \quad (3.28)$$

e

$$\sin B = \sin A \cos A \left\{ \frac{l}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}}(k_2 - k_1) + \frac{m}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}}(\bar{k}_2 - \bar{k}_1) \right\}. \quad (3.29)$$

Nas equações (3.28) e (3.29) as funções do lado esquerdo e as funções $\frac{l}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}}$, $\frac{m}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}}$ dependem apenas de x^3 e além disso $(l(x^3), m(x^3))$ não é uma reta, então existem constantes C_1, C_2, C_3 e C_4 , tal que

$$(k_1 \cos^2 A + k_2 \sin^2 A) = C_1, \quad (\bar{k}_1 \cos^2 A + \bar{k}_2 \sin^2 A) = C_2, \quad (3.30)$$

$$\sin A \cos A(k_2 - k_1) = C_3, \quad \sin A \cos A(\bar{k}_2 - \bar{k}_1) = C_4. \quad (3.31)$$

Multiplicando a primeira equação de (3.30) por $\cos A$ e a primeira equação (3.31) por $\sin A$, e subtraindo-as obtemos:

$$k_1 = C_1 - C_3 \tan A. \quad (3.32)$$

Usando o mesmo raciocínio, multiplicando a primeira equação de (3.30) por $\sin A$ e a primeira equação de (3.31) por $\cos A$ e somando-as obtemos:

$$k_2 = C_1 + C_3 \cot A. \quad (3.33)$$

Fazendo o mesmo para as segundas equações de (3.30) e (3.31), temos

$$\bar{k}_1 = C_2 - C_4 \tan A, \quad \bar{k}_2 = C_2 + C_4 \cot A. \quad (3.34)$$

Substituindo (3.32), (3.33) e (3.34) em (3.18) e (3.19), temos que:

$$\mathbf{N}_1 = (C_1 - C_3 \tan A)\mathbf{f}_1, \quad \mathbf{N}_2 = (C_1 + C_3 \cot A)\mathbf{f}_2, \quad (3.35)$$

$$\bar{\mathbf{N}}_1 = (C_2 - C_4 \tan A)\mathbf{f}_1, \quad \bar{\mathbf{N}}_2 = (C_2 + C_4 \cot A)\mathbf{f}_2. \quad (3.36)$$

Pelas equações (3.35) e (3.36), para $i = 1, 2$

$$(C_4\mathbf{N} - C_3\bar{\mathbf{N}})_i = (C_1C_4 - C_2C_3)\mathbf{f}_i. \quad (3.37)$$

Na equação (3.37), se $(C_1C_4 - C_2C_3) = 0$, então a superfície $\mathbf{f}$ está contida em $\mathbb{R}^3$, ortogonal ao vetor constante $(C_4\mathbf{N} - C_3\bar{\mathbf{N}})$.

Finalmente, estudamos o caso $(C_1C_4 - C_2C_3) \neq 0$. Sem perda de generalidade, suponha $(C_1C_4 - C_2C_3) = 1$. Pela equação (3.37) existe um vetor constante $\mathbf{a}$ tal que $C_4\mathbf{N} - C_3\bar{\mathbf{N}} = \mathbf{a} + \mathbf{f}$. Quando diferenciamos ambos os lados de

$$\langle (C_4\mathbf{N} - C_3\bar{\mathbf{N}}), \mathbf{f} \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{f} \rangle + \langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle$$

com respeito a x^i ($i = 1, 2$) temos

$$\langle \mathbf{f}_i, \mathbf{f} \rangle + \langle (C_4\mathbf{N} - C_3\bar{\mathbf{N}}), \mathbf{f}_i \rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{f}_i \rangle + 2\langle \mathbf{f}_i, \mathbf{f} \rangle.$$

Como $\mathbf{N}$ e $\bar{\mathbf{N}}$ são normais a $\mathbf{f}$, temos que $\langle \mathbf{a} + \mathbf{f}, \mathbf{f}_i \rangle = 0$. Logo $\langle \mathbf{a} + \mathbf{f}, \mathbf{a} + \mathbf{f} \rangle$ é constante. Portanto, a superfície $\mathbf{f}$ está na esfera padrão $\mathbb{S}^3$ com centro $-\mathbf{a}$. $\square$

Em seguida, estudaremos o problema de existência de superfícies em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{S}^3$, satisfazendo as seguintes condições:

(I) A superfície tem uma métrica $\hat{g} = \cos^2 A(dx^1)^2 + \sin^2 A(dx^2)^2$.

(II) Existe uma base ortonormal, para o fibrado normal satisfazendo as condições (3.35) e (3.36).

Além disso, quando uma superfície em $\mathbb{R}^4$, está contida em $\mathbb{R}^3$, tomamos como um dos campos de vetores normais um vetor constante ortogonal a $\mathbb{R}^3$, enquanto a superfície está contida em $\mathbb{S}^3$ tomamos como um dos campos de vetores normais, o vetor posição satisfazendo as condições da Proposição (2.5) em cada ponto. Será denotado por $\mathbb{S}^3(1)$ a esfera padrão com raio 1.

Lema 3.3. *Para qualquer função $A(x^1, x^2)$ satisfazendo as condições da Proposição (2.5), considere $\hat{g} = \cos^2 A(dx^1)^2 + \sin^2 A(dx^2)^2$ e $\hat{s} = E \sin A \cos A \{(dx^1)^2 - (dx^2)^2\}$, formas quadráticas em $\mathbb{R}^3$. Então existe uma imersão $\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ admitindo $\hat{g}$ e $\hat{s}$ como a primeira e segunda formas fundamentais.*

Demonstração: Pelo Teorema (1.33), para mostrar que existe a imersão em $\mathbb{R}^3$ tendo $\hat{g}$ e $\hat{s}$ como a primeira e a segunda formas fundamentais, basta mostrar que as funções dadas em $\hat{g}$ e $\hat{s}$ satisfazem as equações de Gauss e Mainardi–Codazzi, que são dadas, respectivamente, como segue:

$$(\Gamma_{12}^2)_1 - (\Gamma_{11}^2)_2 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 = -\bar{E}K, \quad (3.38)$$

onde $\bar{E} = \hat{g}_{11}$ e K é a curvatura Gaussiana,

$$e_2 = \frac{\bar{E}_2}{2} \left(\frac{e}{\bar{E}} + \frac{g}{\bar{G}} \right) \quad (3.39)$$

e

$$g_1 = \frac{\bar{G}_1}{2} \left(\frac{e}{\bar{E}} + \frac{g}{\bar{G}} \right), \quad (3.40)$$

onde $\bar{E} = \hat{g}_{11} = \cos^2 A$, $\bar{G} = \hat{g}_{22} = \sin^2 A$, $e = \hat{s}_{11} = E \sin A \cos A$ e $g = \hat{s}_{22} = -E \sin A \cos A$.

Por um cálculo direto temos que os símbolos de Christoffel são:

$$\Gamma_{11}^1 = -A_1 \frac{\sin A}{\cos A}, \Gamma_{12}^1 = -A_2 \frac{\sin A}{\cos A}, \Gamma_{12}^2 = A_1 \frac{\cos A}{\sin A}, \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = A_2 \frac{\cos A}{\sin A}. \quad (3.41)$$

Agora calcularemos a curvatura Gaussiana. Como $\widehat{g}_{ij} = 0$ para $i \neq j$, a curvatura Gaussiana é dada por:

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{\overline{E}_2}{\sqrt{EG}} \right)_2 + \left(\frac{\overline{G}_1}{\sqrt{EG}} \right)_1 \right\},$$

então,

$$K = -\frac{1}{2 \sin A \cos A} \left\{ \left(-A_2 \frac{2 \sin A \cos A}{\sin A \cos A} \right)_2 + \left(A_1 \frac{2 \sin A \cos A}{\sin A \cos A} \right)_1 \right\}$$

ou seja,

$$K = \frac{A_{22} - A_{11}}{\sin A \cos A}. \quad (3.42)$$

Como a função $A(x^1, x^2)$ satisfaz Sine-Gordon temos que $K = -E^2$.

Substituindo as equações (3.41) no lado da equação (3.38), obtemos:

$$\begin{aligned} (\Gamma_{12}^2)_1 &- (\Gamma_{11}^2)_2 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 = (A_{11} - A_{22}) \cot A \\ &- (A_1^2 - A_2^2) \csc^2 A - A_2^2 + (A_1^2 - A_2^2) \cot^2 A + A_1^2 \\ &= (A_{11} - A_{22}) \cot A = -\cos^2 A \frac{A_{22} - A_{11}}{\sin A \cos A} = -\overline{E}K, \end{aligned} \quad (3.43)$$

mostrando assim que a equação de Gauss está satisfeita.

Em seguida, mostraremos que vale as equações de Mainardi-Codazzi. Considerando o lado direito da equação (3.39), obtemos:

$$\frac{\overline{\overline{E}}_2}{2} \left(\frac{e}{\overline{E}} + \frac{g}{\overline{G}} \right) = -A_2 \sin A \cos A \left(E \frac{\sin A}{\cos A} - E \frac{\cos A}{\sin A} \right) = -A_2 E (\sin^2 A - \cos^2 A) = e_2. \quad (3.44)$$

Calculando o lado direito da equação (3.40), obtemos:

$$\frac{\overline{\overline{G}}_1}{2} \left(\frac{e}{\overline{E}} + \frac{g}{\overline{G}} \right) = A_1 \sin A \cos A \left(E \frac{\sin A}{\cos A} - E \frac{\cos A}{\sin A} \right) = A_1 E (\sin^2 A - \cos^2 A) = g_1. \quad (3.45)$$

Das equações (3.43), (3.44) e (3.45) concluimos o Lema. $\square$

Observação 3.4. *O Lema (3.3), também é válido para uma superfície em $\mathbb{S}^3$, basta substituir a segunda forma fundamental por:*

$$\widehat{s} = \sqrt{E^2 + 1} \sin A \cos A \{ (dx^1)^2 - (dx^2)^2 \}.$$

Utilizando o Lema (3.3) provaremos o seguinte resultado.

Teorema 3.5. *Sejam $A(x^1, x^2)$ e $B(x^3)$ funções satisfazendo a Proposição (2.5). Seja $\mathbf{f}$ uma superfície com curvatura constante negativa em $\mathbb{R}^3$ determinada no Lema (3.3), onde a primeira e a segunda formas fundamentais são:*

$$\hat{g} = \cos^2 A (dx^1)^2 + \sin^2 A (dx^2)^2, \quad \hat{s} = E \sin A \cos A \{ (dx^1)^2 - (dx^2)^2 \}.$$

Então, a aplicação $\mathbf{p}(x^1, x^2, x^3)$ em $\mathbb{R}^4$, gerada pela imersão $\mathbf{f}$ e a função $B(x^3)$ dada por (3.20), define uma hipersuperfície conformemente plana genérica se, e somente se, a constante G^2 satisfaz $E^2 > G^2$. Além disso, a hipersuperfície $\mathbf{p}$ está parametrizada por linhas de curvatura.

Demonstração: Seja $\mathbf{N}(x^1, x^2)$ um vetor normal unitário de $\mathbf{f}$ em $\mathbb{R}^3$. Então, a função $\mathbf{p}(x^1, x^2, x^3)$ dada por (3.20) é determinada por

$$\mathbf{p}(x^1, x^2, x^3) = (\mathbf{f}(x^1, x^2) + l(x^3)\mathbf{N}(x^1, x^2), m(x^3)),$$

como $s_{ij} = 0$, se $i \neq j$ na segunda forma fundamental, temos

$$\mathbf{N}_1 = -\lambda_1 \mathbf{f}_1, \quad \mathbf{N}_2 = -\lambda_2 \mathbf{f}_2$$

onde λ_i ($i = 1, 2$) são as curvaturas principais de $\mathbf{f}$. Como a primeira e a segunda formas fundamentais de $\mathbf{f}$ são diagonalizáveis, temos:

$$\lambda_i = \frac{s_{ii}}{g_{ii}}, \quad (i = 1, 2)$$

onde g_{ii} e s_{ii} são os coeficientes da primeira e da segunda formas fundamentais, respectivamente. Então

$$\lambda_1 = \frac{E \sin A \cos A}{\cos^2 A} = E \tan A,$$

$$\lambda_2 = -\frac{E \sin A \cos A}{\sin^2 A} = -E \cot A.$$

Logo $\mathbf{N}_1 = -E \tan A \mathbf{f}_1$ e $\mathbf{N}_2 = E \cot A \mathbf{f}_2$. Usando o mesmo raciocínio do Exemplo (3.3), temos:

$$\mathbf{p}_1 = (\mathbf{f}_1 + l\mathbf{N}_1, 0) = (1 - lE \tan A)(\mathbf{f}_1, 0),$$

$$\mathbf{p}_2 = (\mathbf{f}_2 + l\mathbf{N}_2, 0) = (1 + lE \cot A)(\mathbf{f}_2, 0)$$

e

$$\mathbf{p}_3 = (l_3 \mathbf{N}, m_3),$$

daí temos:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}_1\|^2 &= (1 - El \tan A) \cos^2 A, \\ \|\mathbf{p}_2\|^2 &= (1 + lE \cot A) \sin^2 A \end{aligned}$$

e

$$\|\mathbf{p}_3\|^2 = l_3^2 + m_3^2.$$

Queremos encontrar as funções $(l(x^3), m(x^3))$ tal que

$$\cos(A + B) = \frac{\|\mathbf{p}_1\|}{l_3^2 + m_3^2}, \quad \sin(A + B) = \frac{\|\mathbf{p}_2\|}{l_3^2 + m_3^2}.$$

Assim,

$$\begin{cases} \cos A \cos B - \sin A \sin B = \frac{(1 - lE \tan A) \cos A}{\sqrt{m_3^2 + m_3^2}} \\ \sin A \cos B + \sin B \cos A = \frac{(1 + lE \cot A) \sin A}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}} \end{cases}$$

resolvendo o sistema temos

$$\cos B = \frac{1}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}}, \quad \sin B = \frac{lE}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}}. \quad (3.46)$$

Se existem tais funções $l(x^3)$ e $m(x^3)$ satisfazendo (3.46), então a aplicação $\mathbf{p}$ define uma hipersuperfície conformemente plana.

Das equações (3.46), temos

$$l(x^3)E = \tan B(x^3), \quad l_3^2 + m_3^2 = \frac{1}{\cos^2 B}. \quad (3.47)$$

Da Proposição (2.5), temos que $B_3 = \sqrt{G^2 - E^2 \sin^2 B}$, então

$$l_3 = \frac{B_3}{E \cos^2 B} = \frac{\sqrt{G^2 - E^2 \sin^2 B}}{E \cos^2 B},$$

daí,

$$m_3^2 = \frac{1}{\cos^2 B} - \frac{G^2 - E^2 \sin^2 B}{E^2 \cos^4 B} = \frac{E^2 - G^2}{E^2 \cos^4 B}. \quad (3.48)$$

Das equações (3.47) e (3.48), as funções l e m são respectivamente determinadas por

$$l(x^3) = \frac{\tan B(x^3)}{E}, \quad m_3(x^3) = \frac{\sqrt{E^2 - G^2}}{E \cos^2 B(x^3)}. \quad (3.49)$$

Logo l e m existem se, e somente se, $E^2 \geq G^2$.

Provaremos que as curvas coordenadas de $\mathbf{p}$ são linhas de curvatura. O vetor normal unitário de $\mathbf{p}$ é dado por:

$$\mathbf{N}^* = \frac{1}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}}(m_3 \mathbf{N}, -l_3),$$

como $l_3 = \frac{\sqrt{G^2 - E^2 \sin^2 B}}{E \cos^2 B}$ e $m_3 = \frac{\sqrt{E^2 - G^2}}{E \cos^2 B}$, e observemos que $l_3^2 + m_3^2 = \frac{1}{\cos^2 B}$, então

$$\mathbf{N}^* = \cos B \left(\frac{\sqrt{E^2 - G^2}}{E \cos^2 B} \mathbf{N}, -\frac{\sqrt{G^2 - E^2 \sin^2 B}}{E \cos^2 B} \right) = \left(\frac{\sqrt{E^2 - G^2}}{E \cos B} \mathbf{N}, -\frac{\sqrt{G^2 - E^2 \sin^2 B}}{E \cos B} \right)$$

daí temos,

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^*_{\mathbf{1}} &= \left(\frac{\sqrt{E^2 - G^2}}{E \cos B} \mathbf{N}_{\mathbf{1}}, 0 \right) = - \left(\frac{\sqrt{E^2 - G^2}}{E \cos B} E \tan A \mathbf{f}_1, 0 \right) \\ &= - \left(\frac{\sqrt{E^2 - G^2}}{\cos B} \tan A \right) (\mathbf{f}_1, 0) = - \left(\frac{\sqrt{E^2 - G^2}}{\cos B} \tan A \right) \left(\frac{1 - lE \tan A}{1 - lE \tan A} \right) (\mathbf{f}_1, 0) \\ &= - \left(\frac{\sqrt{E^2 - G^2} \tan A}{\cos B(1 - \tan B \tan A)} \right) (1 - lE \tan A)(\mathbf{f}_1, 0) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathbf{N}^*_{\mathbf{1}} = \left(\frac{\sqrt{E^2 - G^2} \tan A}{\cos B - \sin B \tan A} \right) \mathbf{p}_1,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^*_{\mathbf{2}} &= \left(\frac{\sqrt{E^2 - G^2}}{E \cos B} \mathbf{N}_{\mathbf{2}}, 0 \right) = \left(\frac{\sqrt{E^2 - G^2}}{E \cos B} E \cot A \mathbf{f}_2, 0 \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{E^2 - G^2}}{\cos B} \cot A \right) (\mathbf{f}_2, 0) = \left(\frac{\sqrt{E^2 - G^2}}{\cos B} \cot A \right) \left(\frac{1 + lE \cot A}{1 + lE \cot A} \right) (\mathbf{f}_2, 0) \\ &= \left(\frac{\sqrt{E^2 - G^2} \cot A}{\cos B(1 + \tan B \cot A)} \right) (1 + lE \cot A)(\mathbf{f}_2, 0) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathbf{N}^*_{\mathbf{2}} = \left(\frac{\sqrt{E^2 - G^2} \cot A}{\cos B + \sin B \cot A} \right) \mathbf{p}_2$$

e

$$\mathbf{N}^*_3 = \left(\frac{\sqrt{E^2 - G^2} E \sin B B_3 \mathbf{N}}{E^2 \cos^2 B}, -\frac{\frac{-E^2 \sin B \cos^2 B B_3}{\sqrt{G^2 - E^2 \sin^2 B}} + \sqrt{G^2 - E^2 \sin^2 B} E \sin B B_3}{E^2 \cos^2 B} \right),$$

como $B_3 = \sqrt{G^2 - E^2 \sin^2 B}$, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^*_3 &= \left(\sqrt{E^2 - G^2} \sin B \frac{\sqrt{G^2 - E^2 \sin^2 B}}{E \cos^2 B} \mathbf{N}, \frac{E^2 \sin B \cos^2 B - (G^2 - E^2 \sin^2 B) \sin B}{E \cos^2 B} \right) \\ &= \left(\sqrt{E^2 - G^2} \sin B \frac{\sqrt{G^2 - E^2 \sin^2 B}}{E \cos^2 B} \mathbf{N}, \sin B \frac{E^2 - G^2}{E \cos^2 B} \right) \\ &= \left(\sqrt{E^2 - G^2} \sin B \frac{\sqrt{G^2 - E^2 \sin^2 B}}{E \cos^2 B} \mathbf{N}, \sqrt{E^2 - G^2} \sin B \frac{\sqrt{E^2 - G^2}}{E \cos^2 B} \right) \\ &= (\sqrt{G^2 - E^2} \sin B)(l_3 \mathbf{N}, m_3) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathbf{N}^*_3 = (\sqrt{E^2 - G^2} \sin B) \mathbf{p}_3.$$

Portanto as curvaturas principais correspondentes as curvas x^1, x^2 e x^3 , são respectivamente,

$$\lambda = -\frac{\sqrt{E^2 - G^2} \tan A}{\cos B - \sin B \tan A}, \quad \mu = \frac{\sqrt{E^2 - G^2} \cot A}{\cos B + \sin B \cot A}, \quad \nu = \sqrt{E^2 - G^2} \sin B.$$

Observe que, se $E^2 = G^2$, temos $\lambda = \mu = \nu = 0$, ou seja, a hipersuperfície não é genérica. Agora, se $E^2 > G^2$, mostraremos que a hipersuperfície é genérica. Suponhamos que duas das curvaturas principais sejam iguais, ou seja, se $\lambda = \mu$ teríamos que

$$-\frac{\tan A}{\cos B - \sin B \tan A} = \frac{\cot A}{\cos B + \sin B \cot A}$$

que é equivalente a,

$$-\tan A(\cos B + \sin B \cot A) = \cot A(\cos B - \sin B \tan A)$$

ou seja,

$$\cos B(\tan A + \cot A) = 0.$$

Como $l = \frac{\tan B}{E}$, para a existência de l , $\cos B \neq 0$, logo $\tan A + \cot A = 0$, o que é um absurdo, pois $\tan A + \cot A = \frac{1}{\sin A \cos A} \neq 0$. Logo $\lambda \neq \mu$.

Se $\lambda = \nu$ teríamos que

$$-\frac{\tan A}{\cos B - \sin B \tan A} = \sin B,$$

que é equivalente a,

$$-\tan A = \sin B(\cos B - \sin B \tan A)$$

ou seja,

$$\tan A = -\tan B.$$

Como $A = A(x^1, x^2)$ e $B = B(x^3)$, temos

$$\tan A = -\tan B = K$$

sendo K uma constante. Então $(\tan B)_3 = \frac{1}{\cos^2 B} B_3 = 0$, mas $\frac{1}{\cos^2 B} \neq 0$, logo $B_3 = 0$, que é um absurdo, pois $B_3 \neq 0$, pela Proposição (2.5). Logo $\lambda \neq \nu$.

Se $\mu = \nu$ teríamos

$$\frac{\cot A}{\cos B + \sin B \cot A} = \sin B$$

isto é equivalente a,

$$\cot A = \sin B(\cos B + \sin B \cot A)$$

ou seja,

$$\cot A = \tan B.$$

Pelo mesmo raciocínio do item anterior, temos que $\lambda \neq \nu$.

Portanto as curvaturas principais são distintas, isto completa a demonstração do Teorema. $\square$

Teorema 3.6. *Sejam $A(x^1, x^2)$ e $B(x^3)$ funções satisfazendo as condições da Proposição (2.5) e f uma superfície com curvatura constante negativa em $\mathbb{S}^3(1)$ determinada para a*

função $A(x^1, x^2)$, e $\hat{g}$ e $\hat{s}$ a primeira e segunda formas fundamentais de $\mathbf{f}$ respectivamente dadas por:

$$\hat{g} = \cos^2 A (dx^1)^2 + \sin^2 A (dx^2)^2, \quad \hat{s} = \sqrt{E^2 + 1} \sin A \cos A \{(dx^1)^2 - (dx^2)^2\}.$$

Então, a aplicação $\mathbf{p}(x^1, x^2, x^3)$ em $\mathbb{R}^4$, gerada por $\mathbf{f}$ e por $B(x^3)$ do mesmo modo de (3.20), define uma hipersuperfície conformemente plana genérica, se, e somente se, a constante G^2 satisfaz $E^2 + 1 > G^2$. Além disso, a hipersuperfície $\mathbf{p}$ está parametrizada por linhas de curvatura.

Demonstração: Por hipótese $\mathbf{f}(x^1, x^2)$ está contida em $\mathbb{S}^3(1)$, seja $\mathbf{N}$ um vetor normal unitário de $\mathbf{f}$ em $\mathbb{S}^3(1)$. Temos também que $\mathbf{f}(x^1, x^2)$ é outro campo normal unitário de $\mathbf{f}$ em $\mathbb{R}^4$ e a função $\mathbf{p}$ será determinada por:

$$\mathbf{p}(x^1, x^2, x^3) = (1 + l(x^3))\mathbf{f}(x^1, x^2) + m(x^3)\mathbf{N}(x^1, x^2). \quad (3.50)$$

Como $s_{ij} = 0$, se $i \neq j$, na segunda forma fundamental, temos que

$$\mathbf{N}_1 = -\lambda_1 \mathbf{f}_1, \quad \mathbf{N}_2 = -\lambda_2 \mathbf{f}_2,$$

onde λ_i ($i = 1, 2$), são as curvaturas principais de $\mathbf{f}$. Como a primeira e a segunda formas fundamentais são diagonalizáveis, temos

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\sqrt{E^2 + 1} \sin A \cos A}{\cos^2 A} = \sqrt{E^2 + 1} \tan A, \\ \lambda_2 &= -\frac{\sqrt{E^2 + 1} \sin A \cos A}{\sin^2 A} = -\sqrt{E^2 + 1} \cot A. \end{aligned}$$

Logo

$$\mathbf{N}_1 = -\sqrt{E^2 + 1} \tan A \mathbf{f}_1 \quad \mathbf{N}_2 = \sqrt{E^2 + 1} \cot A \mathbf{f}_2. \quad (3.51)$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= (1 + l)\mathbf{f}_1 + m\mathbf{N}_1 = \left(\frac{(1 + l) \cos A - \sqrt{E^2 + 1} m \sin A}{\cos A} \right) \mathbf{f}_1, \\ \mathbf{p}_2 &= (1 + l)\mathbf{f}_2 + m\mathbf{N}_2 = \left(\frac{(1 + l) \sin A + \sqrt{E^2 + 1} m \cos A}{\sin A} \right) \mathbf{f}_2 \end{aligned}$$

e

$$\mathbf{p}_3 = (l_3 \mathbf{f} + m_3 \mathbf{N}).$$

Pela primeira forma $\widehat{g}$, temos

$$\|\mathbf{p}_1\|^2 = \left(\frac{(1+l) \cos A - \sqrt{E^2+1} m \sin A}{\cos A} \right)^2 \cos^2 A = ((1+l) \cos A - \sqrt{E^2+1} m \sin A)^2$$

e

$$\|\mathbf{p}_2\|^2 = \left(\frac{(1+l) \sin A + \sqrt{E^2+1} m \cos A}{\sin A} \right)^2 \sin^2 A = ((1+l) \sin A + \sqrt{E^2+1} m \cos A)^2.$$

Usando o mesmo raciocínio do Teorema (3.2), temos:

$$\begin{cases} \cos(A+B) = \frac{(1+l) \cos A - \sqrt{E^2+1} m \sin A}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}} \\ \sin(A+B) = \frac{(1+l) \sin A + \sqrt{E^2+1} m \cos A}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}} \end{cases}$$

resolvendo o sistema, obtemos

$$\cos B = \frac{1+l}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}}, \quad \sin B = \frac{\sqrt{E^2+1} m}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}}. \quad (3.52)$$

Se existe as funções $l(x^3)$ e $m(x^3)$ satisfazendo as equações (3.52), então a aplicação $\mathbf{p}$ define uma hipersuperfície conformemente plana.

Por simplicidade, denotemos $\bar{l} = (1+l)$, $C(x^3) = \sqrt{(l_3^2 + m_3^2)(x^3)}$. Então, da equação (3.52), temos

$$m = \frac{\bar{l} \tan B}{\sqrt{E^2+1}}, \quad \bar{l}^2 + (E^2+1)m^2 = C^2. \quad (3.53)$$

Quando, substituimos m da primeira equação de (3.53) e $m_3 = \frac{\bar{l}_3 \sin B \cos B + \bar{l} B_3}{\sqrt{E^2+1} \cos^2 B}$ na segunda equação de (3.53), obtemos:

$$\bar{l}^2 + (E^2+1) \frac{\bar{l}^2 \sin^2 B}{(E^2+1) \cos^2 B} = \bar{l}_3^2 + \frac{(\bar{l}_3 \sin B \cos B + \bar{l} B_3)^2}{(E^2+1) \cos^4 B}$$

isto implica,

$$\cos^2 B (E^2 \cos^2 B + 1) \left(\frac{\bar{l}_3}{\bar{l}} \right)^2 + 2B_3 \sin B \cos B \left(\frac{\bar{l}_3}{\bar{l}} \right) + \{B_3^2 - (E^2 + 1) \cos^2 B\} = 0. \quad (3.54)$$

Como $(B_3)^2 = G^2 - E^2 \sin^2 B$, temos que o discriminante de $\left(\frac{\bar{l}_3}{\bar{l}} \right)$ da equação quadrática (3.54),

$$\frac{D}{4} = (E^2 + 1)(E^2 + 1 - G^2) \cos^4 B.$$

Logo $\frac{\bar{l}_3}{\bar{l}}$ é uma função real se, e somente se, $E^2 + 1 \geq G^2$. Assim se $E^2 + 1 > G^2$, temos duas funções $l(x^3)$ com a condição $l(0) = m(0) = 0$. (Aqui, assumimos $B(0) = 0$). Além disso, se $l(x^3)$ é determinada, então $m(x^3)$ também é determinada.

Se $E^2 + 1 = G^2$, então todas as curvaturas principais são constantes igual a $\lambda = \mu = \nu = -1$.

Mostraremos que as curvas coordenadas de $\mathbf{p}$ são linhas de curvatura. O vetor normal unitário de $\mathbf{p}$ é dado por:

$$\mathbf{N}^* = \frac{1}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}} (m_3 \mathbf{f} - l_3 \mathbf{N}),$$

então temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^*_{*1} &= \frac{1}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}} (m_3 \mathbf{f}_1 - l_3 \mathbf{N}_1) = \frac{1}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}} (m_3 + l_3 \sqrt{E^2 + 1} \tan A) \mathbf{f}_1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}} (m_3 + l_3 \sqrt{E^2 + 1} \tan A) \frac{(1 + l) - \sqrt{E^2 + 1} m \tan A}{(1 + l) - \sqrt{E^2 + 1} m \tan A} \mathbf{f}_1, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathbf{N}^*_{*1} = \frac{m_3 + l_3 \sqrt{E^2 + 1} \tan A}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2} ((1 + l) - \sqrt{E^2 + 1} m \tan A)} \mathbf{p}_1,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^*_{*2} &= \frac{1}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}} (m_3 \mathbf{f}_2 - l_3 \mathbf{N}_2) = \frac{1}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}} (m_3 - l_3 \sqrt{E^2 + 1} \cot A) \mathbf{f}_2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}} (m_3 - l_3 \sqrt{E^2 + 1} \cot A) \frac{(1 + l) + \sqrt{E^2 + 1} m \cot A}{(1 + l) + \sqrt{E^2 + 1} m \cot A} \mathbf{f}_2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathbf{N}^*_2 = \frac{m_3 - l_3\sqrt{E^2 + 1} \cot A}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}((1 + l) + \sqrt{E^2 + 1}m \cot A)} \mathbf{p}_2$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^*_3 &= \frac{(m_{33}\mathbf{f} - l_{33}\mathbf{N})\sqrt{l_3^2 + m_3^2} - (m_3\mathbf{f} - l_3\mathbf{N})\frac{(l_3l_{33} + m_3m_{33})}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}}}{l_3^2 + m_3^2} \\ &= \frac{1}{(l_3^2 + m_3^2)^{3/2}}((m_{33}\mathbf{f} - l_{33}\mathbf{N}) - (m_3\mathbf{f} - l_3\mathbf{N})(l_3l_{33} + m_3m_{33})) \\ &= \frac{1}{(l_3^2 + m_3^2)^{3/2}}((l_3m_{33} - m_3l_{33})(l_3\mathbf{f} + m_3\mathbf{N})) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathbf{N}_3 = \frac{l_3m_{33} - m_3l_{33}}{(l_3^2 + m_3^2)^{3/2}} \mathbf{p}_3.$$

Logo as curvaturas principais correspondentes as curvas x^1, x^2 e x^3 são, respectivamente

$$\lambda = -\frac{m_3 + l_3\sqrt{E^2 + 1} \tan A}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}((1 + l) - \sqrt{E^2 + 1}m \tan A)}, \quad \mu = -\frac{m_3 - l_3\sqrt{E^2 + 1} \cot A}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}((1 + l) + \sqrt{E^2 + 1}m \cot A)}$$

e

$$\nu = -\frac{l_3m_{33} - m_3l_{33}}{(l_3^2 + m_3^2)^{3/2}}.$$

Analogamente ao Teorema (3.5), mostra-se que as curvaturas principais são distintas. $\square$

Nosso objetivo agora é construir Hipersuperfícies conformemente planas genéricas em $\mathbb{R}^4$ com a primeira forma fundamental

$$g = e^{2P(x^3)}\{\cosh^2 \varphi(x)(dx^1)^2 + \sinh^2 \varphi(x)(dx^2)^2 + (dx^3)^2\}. \quad (3.55)$$

Pelo que já foi visto acima, a condição para a métrica $\tilde{g} = \cosh^2 \varphi(x)(dx^1)^2 + \sinh^2 \varphi(x)(dx^2)^2 + (dx^3)^2$ ser conformemente plana, equivale a dizer que o tensor de Bach seja nulo. Então considerando a métrica $\tilde{g}$ dada acima nas equações (2.57), (2.58) e (2.59), obtemos:

$$\begin{aligned} &\varphi_2\varphi_{33} + 2\varphi_3\varphi_{23} \sinh^2 \varphi - \varphi_{233} \sinh \varphi \cosh \varphi \\ &= \varphi_2(\varphi_{11} + \varphi_{22})(\sinh^2 \varphi + \cosh^2 \varphi) - (\varphi_{11} + \varphi_{22})_2 \sinh \varphi \cosh \varphi, \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} & \varphi_1\varphi_{33} - 2\varphi_3\varphi_{13}\cosh^2\varphi + \varphi_{133}\sinh\varphi\cosh\varphi \\ = & \varphi_1(\varphi_{11} + \varphi_{22})(\sinh^2\varphi + \cosh^2\varphi) - (\varphi_{11} + \varphi_{22})_1\sinh\varphi\cosh\varphi, \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} & 2\varphi_1\varphi_{13}\cosh^2\varphi - 2\varphi_2\varphi_{23}\sinh^2\varphi + \varphi_{223}\sinh\varphi\cosh\varphi - \varphi_3(\varphi_{11} + \varphi_{22}) \\ = & -\varphi_3\varphi_{33}(\sinh^2\varphi + \cosh^2\varphi) + (\varphi_{113} - \varphi_{223} + \varphi_{333})\sinh\varphi\cosh\varphi \end{aligned} \quad (3.58)$$

Proposição 3.7. *Seja g a métrica dada em (3.55). Suponhamos que a função φ é representada como*

$$\varphi(x^1, x^2, x^3) = A(x^1, x^2) + B(x^3),$$

onde as funções A e B satisfazem $B_3 \neq 0$, $A_1 \neq 0$ e $A_2 \neq 0$. Então, as funções $A(x^1, x^2)$ e $B(x^3)$ são respectivamente determinadas pelas equações, nos seguintes 3 casos.

$$(I) \quad A_{11} + A_{22} = -\frac{1}{2}E\sinh 2A, \quad (B_3)^2 = \frac{1}{2}(E\cosh 2B + G)$$

$$(II) \quad A_{11} + A_{22} = E\cosh 2A, \quad (B_3)^2 = E\sinh 2B + G$$

$$(III) \quad A_{11} + A_{22} = Ee^{-2A}, \quad (B_3)^2 = Ee^{2B} + G$$

Demonstração: Usando as equações (3.56) e (3.57), temos

$$A_2B_{33} = A_2(A_{11} + A_{22})(\sinh^2\varphi + \cosh^2\varphi) - (A_{11} + A_{22})_2\sinh\varphi\cosh\varphi, \quad (3.59)$$

$$A_1B_{33} = A_1(A_{11} + A_{22})(\sinh^2\varphi + \cosh^2\varphi) - (A_{11} + A_{22})_1\sinh\varphi\cosh\varphi. \quad (3.60)$$

Como $\sinh 2\varphi = \frac{\sinh\varphi\cosh\varphi}{2}$ e $\cosh 2\varphi = \sinh^2\varphi + \cosh^2\varphi$, e isolando $\frac{(A_{11} + A_{22})_i}{A_i}$ ($i = 1, 2$), em (3.59) e (3.60), temos:

$$\frac{(A_{11} + A_{22})_i}{A_i} = \frac{-2B_{33} + 2(A_{11} + A_{22})\cosh 2\varphi}{\sinh 2\varphi}. \quad (3.61)$$

Logo definimos $C(x^1, x^2)$ por

$$2C(x^1, x^2) = -\frac{(A_{11} + A_{22})_1}{A_1}. \quad (3.62)$$

Em seguida definimos $D(x^1, x^2)$ e $\zeta(x^1, x^2)$ por:

$$D(x^1, x^2) = A_{11} + A_{22} \quad (3.63)$$

$$\sqrt{C^2 - D^2}(x^1, x^2)\cosh\zeta(x^1, x^2) = C(x^1, x^2) \quad (3.64)$$

$$\sqrt{C^2 - D^2}(x^1, x^2)\sinh\zeta(x^1, x^2) = D(x^1, x^2). \quad (3.65)$$

Isolando B_{33} em (3.61) e substituindo (3.62) e (3.63), temos

$$\begin{aligned}
 B_{33} &= D \cosh 2\varphi + C \sinh 2\varphi \\
 &= \sqrt{C^2 - D^2} \sinh \zeta \cosh 2\varphi + \sqrt{C^2 - D^2} \cosh \zeta \sinh 2\varphi \\
 &= \sqrt{C^2 - D^2} \sinh (2\varphi + \zeta) \\
 &= \sqrt{C^2 - D^2} \sinh (2A + \zeta) \cosh 2B + \sqrt{C^2 - D^2} \cosh (2A + \zeta) \sinh 2B. \quad (3.66)
 \end{aligned}$$

Como $B = B(x^3)$, temos que $\overline{C} = \sqrt{C^2 - D^2} \sinh (2A + \zeta)$ e $\overline{D} = \sqrt{C^2 - D^2} \cosh (2A + \zeta)$ são funções constantes, deste modo, as funções $(C^2 - D^2)$ e $(2A + \zeta)$ também são constantes. Então

$$B_{33} = \overline{C} \cosh 2B + \overline{D} \sinh 2B. \quad (3.67)$$

Por outro lado de (3.58)

$$A_{11} + A_{22} = B_{33} \cosh 2\varphi - \frac{B_{333}}{2B_3} \sinh 2\varphi. \quad (3.68)$$

De (3.67), obtemos

$$B_{333} = 2B_3 \overline{C} \sinh 2B + 2B_3 \overline{D} \cosh 2B. \quad (3.69)$$

Substituindo (3.69) e (3.67) em (3.68), temos

$$\begin{aligned}
 A_{11} + A_{22} &= (\overline{C} \cosh 2B + \overline{D} \sinh 2B) \cosh 2\varphi - (\overline{C} \sinh 2B + \overline{D} \cosh 2B) \sinh 2\varphi \\
 &= \overline{C} (\cosh 2B \cosh 2\varphi - \sinh 2B \sinh 2\varphi) + \overline{D} (\sinh 2B \cosh 2\varphi - \cosh 2B \sinh 2\varphi) \\
 &= \overline{C} \cosh (2\varphi - 2B) - \overline{D} \sinh (2\varphi - 2B)
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$A_{11} + A_{22} = \overline{C} \cosh 2A - \overline{D} \sinh 2A, \quad (3.70)$$

como $\overline{C} = \sqrt{C^2 - D^2} \sinh 2F$ e $\overline{D} = \sqrt{C^2 - D^2} \cosh 2F$, definiremos $\sqrt{C^2 - D^2} = \frac{E}{2}$ e substituindo em (3.70) temos que:

$$A_{11} + A_{22} = \frac{E}{2} (\sinh 2F \cosh 2A - \frac{E}{2} \cosh 2F \sinh 2A) = -\frac{E}{2} \sinh (2A - 2F).$$

Por outro lado de (3.67), temos que:

$$\begin{aligned}
 \{(B_3)^2\}_3 &= 2B_3 B_{33} = 2B_3 \{\overline{C} \cosh 2B + \overline{D} \sinh 2B\} \\
 &= 2B_3 \frac{E}{2} \{\sinh 2F \cosh 2B + \cosh 2F \sinh 2B\} \\
 &= B_3 E \sinh (2F + 2B) \quad (3.71)
 \end{aligned}$$

integrando (3.71), obtemos:

$$(B_3)^2 = c + \frac{E}{2} \cosh(2B + 2F),$$

fazendo $c = \frac{G}{2}$, temos:

$$(B_3)^2 = \frac{1}{2} (E \cosh(2B + 2F) + G).$$

Por um argumento análogo à Proposição (2.5), concluímos a prova de (I).

Procedendo de modo análogo à demonstração de (I), só que, redefinindo ζ por:

$$\sqrt{D^2 - C^2} \sinh \zeta = C(x^1, x^2) \quad (3.72)$$

$$\sqrt{D^2 - C^2} \cosh \zeta = D(x^1, x^2), \quad (3.73)$$

e isolando B_{33} em (3.61) e substituindo (3.62) e (3.63), temos que

$$\begin{aligned} B_{33} &= D \cosh 2\varphi + C \sinh 2\varphi \\ &= \sqrt{D^2 - C^2} \cosh \zeta \cosh 2\varphi + \sqrt{D^2 - C^2} \sinh \zeta \sinh 2\varphi \\ &= \sqrt{D^2 - C^2} \cosh(2\varphi + \zeta) \\ &= \sqrt{D^2 - C^2} \cosh(2A + \zeta) \cosh 2B + \sqrt{D^2 - C^2} \sinh(2A + \zeta) \sinh 2B. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Analogamente, $\overline{C} = \sqrt{D^2 - C^2} \cosh(2A + \zeta)$ e $\overline{D} = \sqrt{D^2 - C^2} \sinh(2A + \zeta)$. Substituindo $\overline{C}$ e $\overline{D}$ em (3.74), obtemos:

$$B_{33} = \overline{C} \cosh 2B + \overline{D} \sinh 2B \quad (3.75)$$

e

$$B_{333} = 2B_3 \overline{C} \sinh 2B + 2B_3 \overline{D} \cosh 2B, \quad (3.76)$$

substituindo (3.75) e (3.76) em (3.68), temos que

$$\begin{aligned} A_{11} + A_{22} &= (\overline{C} \cosh 2B + \overline{D} \sinh 2B) \cosh 2\varphi - (\overline{C} \sinh 2B + \overline{D} \cosh 2B) \sinh 2\varphi \\ &= \overline{C}(\cosh 2B \cosh 2\varphi - \sinh 2B \sinh 2\varphi) - \overline{D}(\cosh 2B \sinh 2\varphi - \sinh 2B \cosh 2\varphi) \\ &= \overline{C} \cosh(2\varphi - 2B) - \overline{D} \sinh(2\varphi - 2B) \end{aligned}$$

ou seja,

$$A_{11} + A_{22} = \overline{C} \cosh 2A - \overline{D} \sinh 2A \quad (3.77)$$

como $\overline{C} = \sqrt{D^2 - C^2} \cosh 2F$ e $\overline{D} = \sqrt{D^2 - C^2} \sinh 2F$ e definimos $\sqrt{D^2 - C^2} = E$, temos:

$$A_{11} + A_{22} = E \cosh(2A - 2F).$$

Por outro lado de (3.67), temos

$$\begin{aligned} \{(B_3)^2\}_3 &= 2B_3 B_{33} = 2B_3 \{\overline{C} \cosh 2B + \overline{D} \sinh 2B\} \\ &= 2B_3 E \{\cosh 2F \cosh 2B + \sinh 2F \sinh 2B\} \\ &= 2B_3 E \sinh(2F + 2B) \end{aligned} \quad (3.78)$$

integrando (3.78), obtemos

$$(B_3)^2 = G + E \sinh(2B + 2F)$$

o que completa a prova de (II).

Agora para demonstrar (III), iremos redefinir a função ζ da seguinte maneira:

$$C(x^1, x^2) = e^{\zeta(x^1, x^2)} = D(x^1, x^2), \quad (3.79)$$

como já vimos que $B_{33} = D \cosh 2\varphi + C \sinh 2\varphi$, então substituindo (3.79) em B_{33} , temos

$$B_{33} = e^\zeta \left(\frac{e^{2\varphi} + e^{-2\varphi}}{2} \right) + e^\zeta \left(\frac{e^{2\varphi} - e^{-2\varphi}}{2} \right) = e^{\zeta+2A} e^{2B}.$$

Como $B = B(x^3)$ então $e^{\zeta+2A}$ é constante e chamaremos de E . Então

$$B_{33} = E e^{2B}, \quad (3.80)$$

por (3.80), temos que

$$B_{333} = 2E B_3 e^{2B}. \quad (3.81)$$

Substituindo (3.79) e (3.80) em (3.68), obtemos:

$$A_{11} + A_{22} = E e^{2B} \left(\frac{e^{2\varphi} + e^{-2\varphi}}{2} \right) - E e^{2B} \left(\frac{e^{2\varphi} - e^{-2\varphi}}{2} \right) = E e^{2B} e^{-2\varphi}$$

ou seja,

$$A_{11} + A_{22} = E e^{-2A}.$$

Por outro lado, temos que

$$(B_3)^2_3 = 2B_3B_{33} = 2EB_3e^{2B}. \quad (3.82)$$

Integrando (3.82), obtemos

$$(B_3)^2 = Ee^{2B} + G$$

o que completa a demonstração. $\square$

Quando substituimos a métrica (3.21) do Teorema (3.2) pela métrica

$$e^{2P(x^3)}\{\cosh^2(A+B)(dx^1)^2 + \sinh^2(A+B)(dx^2)^2 + (dx^3)^2\}, \quad (3.83)$$

onde as funções $A(x^1, x^2)$ e $B(x^3)$ são as funções determinadas pela Proposição (3.7), a afirmação do Teorema (3.2) é também verdadeira neste caso. Além disso, as equações (3.35) e (3.36) para uma base ortonormal $\{\mathbf{N}, \bar{\mathbf{N}}\}$ que apareciam na prova do Teorema (3.2) são substituídas pelas seguintes equações:

$$\mathbf{N}_1 = (C_1 + C_3 \tanh A)\mathbf{f}_1, \quad \mathbf{N}_2 = (C_1 + C_3 \coth A)\mathbf{f}_2, \quad (3.84)$$

$$\bar{\mathbf{N}}_1 = (C_2 + C_4 \tanh A)\mathbf{f}_1, \quad \bar{\mathbf{N}}_2 = (C_2 + C_4 \coth A)\mathbf{f}_2 \quad (3.85)$$

onde C_1, C_2, C_3 e C_4 são constantes numéricas.

De maneira análoga ao Lema (3.3) obtemos o seguinte resultado.

Lema 3.8. *Sejam $A(x^1, x^2)$ uma função satisfazendo as condições da Proposição (3.7-(I)), e $\hat{g} = \cosh^2 A(dx^1)^2 + \sinh^2 A(dx^2)^2$ e $\hat{s} = -\sqrt{E} \sinh A \cosh A\{(dx^1)^2 + (dx^2)^2\}$ formas quadráticas em $\mathbb{R}^3$. Então existe uma superfície $\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ admitindo $\hat{g}$ e $\hat{s}$ como a primeira e segunda formas fundamentais.*

Demonstração: Pelo Teorema (1.33), para mostrar que existe uma superfície $\mathbf{f}$ em $\mathbb{R}^3$ tendo $\hat{g}$ e $\hat{s}$ como a primeira e segunda formas fundamentais, de modo análogo ao Lema (3.3), basta mostrar que as funções dadas em $\hat{g}$ e $\hat{s}$ satisfazem as equações de Gauss e Mainardi–Codazzi, que foram dadas nas equações (3.38), (3.39) e (3.40), onde $\bar{E} = \cosh^2 A$, $\bar{G} = \sinh^2 A$, $e = g = -\sqrt{E} \sinh A \cosh A$.

Por um cálculo direto temos que os símbolos de Christoffel são:

$$\Gamma_{11}^1 = A_1 \frac{\sinh A}{\cosh A}, \Gamma_{12}^1 = A_2 \frac{\sinh A}{\cosh A}, \Gamma_{12}^2 = A_1 \frac{\cosh A}{\sinh A}, \Gamma_{22}^2 = -\Gamma_{11}^2 = A_2 \frac{\cosh A}{\sinh A}. \quad (3.86)$$

Agora calcularemos a curvatura Gaussiana. Pelo fato $\hat{g}_{ij} = 0$ para $i \neq j$, a curvatura Gaussiana é dada por:

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{\bar{E}_2}{\sqrt{EG}} \right)_2 + \left(\frac{\bar{G}_1}{\sqrt{EG}} \right)_1 \right\},$$

então

$$K = -\frac{A_{11} + A_{22}}{\sinh A \cosh A} = E. \quad (3.87)$$

Substituindo as equações (3.86) no lado da equação (3.38), obtemos:

$$\begin{aligned} (\Gamma_{12}^2)_1 - (\Gamma_{11}^2)_2 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 &= (A_{11} + A_{22}) \frac{\cosh A}{\sinh A} \\ &- (A_1^2 + A_2^2) \frac{1}{\sinh^2 A} - A_2^2 + (A_1^2 + A_2^2) \frac{\cosh^2 A}{\sinh^2 A} - A_1^2 \\ &= (A_{11} - A_{22}) \cot A = \cosh^2 A \frac{A_{11} + A_{22}}{\sinh A \cosh A} = -\bar{E}K, \end{aligned} \quad (3.88)$$

mostrando assim que a equação de Gauss está satisfeita.

Em seguida, mostraremos que vale as equações de Mainardi–Codazzi. Considerando o lado direito da equação (3.39), obtemos:

$$\frac{\bar{E}_2}{2} \left(\frac{e}{\bar{E}} + \frac{g}{\bar{G}} \right) = -A_2 \sqrt{E} (\sinh^2 A + \cosh^2 A) = e_2. \quad (3.89)$$

Calculando o lado direito da equação (3.40), obtemos:

$$\frac{\bar{G}_1}{2} \left(\frac{e}{\bar{E}} + \frac{g}{\bar{G}} \right) = -A_1 \sqrt{E} (\sinh^2 A + \cosh^2 A) = g_1. \quad (3.90)$$

Das equações (3.88), (3.89) e (3.90), mostramos o Lema. $\square$

Observação 3.9. *O Lema (3.8), também é válido para uma superfície em $\mathbb{S}^3$, basta substituir a segunda forma por:*

$$\hat{s} = -\sqrt{E-1} \sinh A \cosh A \{ (dx^1)^2 + (dx^2)^2 \}.$$

Utilizando o Lema (3.8) provaremos o seguinte resultado.

Teorema 3.10. *Sejam $A(x^1, x^2)$ e $B(x^3)$ funções satisfazendo a condição (I) com a constante $E > 0$, da Proposição (3.7). Seja $\mathbf{f}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície com curvatura*

constante positiva em $\mathbb{R}^3$ determinada pela função A obtida no Lema (3.8) e $\widehat{g}$ e $\widehat{s}$ a primeira e segunda formas fundamentais dadas por

$$\widehat{g} = \cosh^2 A (dx^1)^2 + \sinh^2 A (dx^2)^2, \quad \widehat{s} = -\sqrt{E} \sinh A \cosh A \{(dx^1)^2 + (dx^2)^2\}.$$

Então a aplicação $\mathbf{p}(x^1, x^2, x^3)$ em $\mathbb{R}^4$, gerada por $\mathbf{f}$ e $B(x^3)$, define uma hipersuperfície conformemente plana genérica se, e somente se, a constante G satisfaz $E > G$.

Além disso, a hipersuperfície $\mathbf{p}$ está parametrizada por linhas de curvatura.

Demonstração: Seja $\mathbf{N}$ um vetor normal unitário a $\mathbf{f}$ em $\mathbb{R}^3$. Então, de (3.20) a aplicação $\mathbf{p}(x^1, x^2, x^3)$ é determinada por

$$\mathbf{p}(x^1, x^2, x^3) = (\mathbf{f}(x^1, x^2) + l(x^3)\mathbf{N}(x^1, x^2), m(x^3)).$$

Como a primeira e a segunda formas fundamentais são diagonalizáveis, temos

$$\lambda_i = \frac{s_{ii}}{g_{ii}} \quad (i = 1, 2)$$

onde λ_i são as curvaturas principais e g_{ii} e s_{ii} são os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais de $\mathbf{f}$, respectivamente. Então, temos

$$\lambda_1 = -\sqrt{E} \tanh A$$

e

$$\lambda_2 = -\sqrt{E} \coth A.$$

Logo $\mathbf{N}_1 = \sqrt{E} \tanh A \mathbf{f}_1$ e $\mathbf{N}_2 = \sqrt{E} \coth A \mathbf{f}_2$. Daí temos

$$\mathbf{p}_1 = (1 + \sqrt{E}l \tanh A)(\mathbf{f}_1, 0),$$

$$\mathbf{p}_2 = (1 + \sqrt{E}l \coth A)(\mathbf{f}_2, 0),$$

e

$$\mathbf{p}_3 = (l_3 \mathbf{N}, m_3),$$

assim, temos

$$\|\mathbf{p}_1\|^2 = (1 + \sqrt{E}l \tanh A)^2 \cosh^2 A,$$

$$\| \mathbf{p}_2 \|^2 = (1 + \sqrt{E}l \coth A)^2 \sinh^2 A,$$

e

$$\| \mathbf{p}_3 \|^2 = l_3^2 + m_3^2.$$

Temos que a hipersuperfície $\mathbf{p}$ é conformemente plana, se e somente se, existem funções $l(x^3)$ e $m(x^3)$, satisfazendo:

$$\cosh(A + B) = \frac{\| \mathbf{p}_1 \|}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}}, \quad \sinh(A + B) = \frac{\| \mathbf{p}_2 \|}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}}.$$

Resolvendo o sistema temos,

$$\cosh B = \frac{1}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}}, \quad \sinh B = \frac{\sqrt{E}l}{l_3^2 + m_3^2},$$

daí temos

$$l = \frac{\tanh B}{\sqrt{E}}, \quad l_3^2 + m_3^2 = 1 - El^2,$$

como $l_3 = \frac{B_3}{\sqrt{E} \cosh^2 B}$ e pela Proposição (3.7- I), temos que

$$\begin{aligned} m_3^2 &= 1 - \frac{E \sinh^2 B}{E \cosh^2 B} - \frac{E \cosh 2B + G}{2E \cosh^4 B} \\ &= \frac{2E \cosh^4 B - 2E \sinh^2 B \cosh^2 B - E \cosh 2B - G}{2E \cosh^4 B} \\ &= \frac{2E \cosh^2 B - E(\cosh^2 B + \sinh^2 B) - G}{2E \cosh^4 B} \\ &= \frac{E - G}{2E \cosh^4 B}. \end{aligned} \tag{3.91}$$

De (3.91), temos que $m(x^3)$ existe se, e somente se, $E \geq G$.

Em seguida, provaremos que as curvas coordenadas de $\mathbf{p}$ são linhas de curvaturas. O vetor normal unitário a $\mathbf{p}$ é dado por:

$$\mathbf{N}^* = \frac{1}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}}(m_3 \mathbf{N}, -l_3),$$

como $l_3 = \frac{\sqrt{E \cosh 2B + G}}{\sqrt{2E} \cosh^2 B}$ e $m_3 = \frac{\sqrt{E - G}}{\sqrt{2E} \cosh^2 B}$, observemos que $l_3^2 + m_3^2 = \frac{1}{\cosh^2 B}$, então

$$\mathbf{N}^* = \cosh B \left(\frac{\sqrt{E - G}}{\sqrt{2E} \cosh^2 B} \mathbf{N}, -\frac{\sqrt{E \cosh 2B + G}}{\sqrt{2E} \cosh^2 B} \right) = \left(\frac{\sqrt{E - G}}{\sqrt{2E} \cosh B} \mathbf{N}, -\frac{\sqrt{E \cosh 2B + G}}{\sqrt{2E} \cosh B} \right)$$

daí temos,

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}^*_1 &= \left(\frac{\sqrt{E-G}}{\sqrt{2E} \cosh B} \mathbf{N}_1, 0 \right) = \left(\frac{\sqrt{E-G}}{\sqrt{2E} \cosh B} \sqrt{E} \tanh A \mathbf{f}_1, 0 \right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{E-G}}{\sqrt{2} \cosh B} \tanh A \right) (\mathbf{f}_1, 0) = \left(\frac{\sqrt{E-G}}{\sqrt{2} \cosh B} \tanh A \right) \left(\frac{1 + \sqrt{E}l \tanh A}{1 + \sqrt{E}l \tanh A} \right) (\mathbf{f}_1, 0) \\
&= \left(\frac{\sqrt{E-G} \tanh A}{\sqrt{2} \cosh B (1 + \tanh B \tanh A)} \right) (1 + \sqrt{E}l \tanh A) (\mathbf{f}_1, 0)
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathbf{N}^*_1 = \left(\frac{\sqrt{E-G} \tanh A}{\sqrt{2}(\cosh B + \sinh B \tanh A)} \right) \mathbf{p}_1,$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}^*_2 &= \left(\frac{\sqrt{E-G}}{\sqrt{2E} \cosh B} \mathbf{N}_2, 0 \right) = \left(\frac{\sqrt{E-G}}{\sqrt{2E} \cosh B} \sqrt{E} \coth A \mathbf{f}_2, 0 \right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{E-G}}{\sqrt{2} \cosh B} \coth A \right) (\mathbf{f}_2, 0) = \left(\frac{\sqrt{E-G}}{\sqrt{2} \cosh B} \coth A \right) \left(\frac{1 + \sqrt{E}l \coth A}{1 + \sqrt{E}l \coth A} \right) (\mathbf{f}_2, 0) \\
&= \left(\frac{\sqrt{E-G} \coth A}{\sqrt{2} \cosh B (1 + \tanh B \coth A)} \right) (1 + \sqrt{E}l \coth A) (\mathbf{f}_2, 0)
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathbf{N}^*_2 = \left(\frac{\sqrt{E-G} \coth A}{\sqrt{2}(\cosh B + \sinh B \coth A)} \right) \mathbf{p}_2$$

e

$$\mathbf{N}^*_3 = \left(-\frac{\sqrt{E-G}\sqrt{2E} \sinh B B_3 \mathbf{N}}{2E \cosh^2 B}, -\frac{\frac{E \sinh 2B \cosh B \sqrt{2E} B_3}{\sqrt{E} \cosh 2B + G} - \sqrt{E} \cosh 2B + G \sqrt{2E} \sinh B B_3}{2E \cosh^2 B} \right).$$

Pela Proposição (3.7-I), $B_3 = \sqrt{\frac{1}{2}(E \cosh 2B + G)}$, temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}^*_3 &= \left(\frac{\sqrt{E-G} \sinh B}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{E \cosh 2B + G}}{\sqrt{2E} \cosh^2 B} \mathbf{N}, -\frac{\sqrt{E-G} \sinh B}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{E-G}}{\sqrt{2E} \cosh^2 B} \right) \\
&= -\left(\frac{\sqrt{E-G} \sinh B}{\sqrt{2}} \right) (l_3 \mathbf{N}, m_3)
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathbf{N}^*_3 = -\left(\frac{\sqrt{E-G} \sinh B}{\sqrt{2}} \right) \mathbf{p}_3.$$

Portanto as curvaturas principais correspondentes as curvas x^1, x^2 e x^3 , são respectivamente,

$$\lambda = -\frac{\sqrt{E-G}\tanh A}{\sqrt{2}(\cosh B + \sinh B \tanh A)}, \mu = -\frac{\sqrt{E-G}\coth A}{\sqrt{2}(\cosh B + \sinh B \coth A)}, \nu = \frac{\sqrt{E-G}\sinh B}{\sqrt{2}}.$$

Observe que, se $E = G$, temos $\lambda = \mu = \nu = 0$, ou seja, a hipersuperfície não é genérica. Agora se $E > G$, mostraremos que a hipersuperfície é genérica. De fato.

Se $\lambda = \mu$ teríamos que

$$\frac{\tanh A}{\cosh B + \sinh B \tanh A} = \frac{\coth A}{\cosh B + \sinh B \coth A}$$

que é equivalente a,

$$\tanh A(\cosh B + \sinh B \coth A) = \coth A(\cosh B + \sinh B \tanh A)$$

ou seja,

$$\cosh B(\tanh A - \coth A) = 0.$$

Como $\cosh B \neq 0$, então $\tanh A - \coth A = 0$, o que é um absurdo pois, $\tanh A - \coth A = -\frac{1}{\sinh A \cosh A} \neq 0$. Logo $\lambda \neq \mu$.

Se $\lambda = \nu$ teríamos que

$$\frac{\tanh A}{\cosh B + \sinh B \tanh A} = -\sinh B$$

que é equivalente a,

$$\tanh A = -\sinh B(\cosh B + \sinh B \tanh A)$$

ou seja,

$$\tanh A = -\tanh B.$$

Como $A = A(x^1, x^2)$ e $B = B(x^3)$, temos

$$\tanh A = -\tanh B = K,$$

sendo K uma constante. Então $(\tanh B)_3 = \frac{1}{\cosh^2 B}B_3 = 0$, mas $\frac{1}{\cosh^2 B} \neq 0$, então $B_3 = 0$, que é um absurdo pois, $B_3 \neq 0$, pela Proposição (3.7). Logo $\lambda \neq \nu$.

Se $\mu = \nu$ teríamos que

$$\frac{\coth A}{\cosh B + \sinh B \coth A} = -\sinh B$$

que é equivalente a

$$\coth A = -\sinh B(\cosh B + \sinh B \coth A)$$

ou seja,

$$\coth A = -\tanh B.$$

Pelo mesmo raciocínio do item anterior chegaríamos a um absurdo. Logo $\lambda \neq \nu$.

Portanto as curvaturas principais são distintas, o que completa a demonstração do Teorema. $\square$

Utilizando a observação (3.9), provaremos o seguinte resultado.

Teorema 3.11. *Sejam $A(x^1, x^2)$ e $B(x^3)$ funções satisfazendo (I) na Proposição (3.7), $E > 1$. Seja $\mathbf{f}$ uma superfície com curvatura constante positiva em $\mathbb{S}^3(1)$ determinada pela função A , $\hat{g}$ e $\hat{s}$ a primeira e a segunda formas fundamentais de $\mathbf{f}$, dadas por:*

$$\hat{g} = \cosh^2 A(dx^1)^2 + \sinh^2 A(dx^2)^2, \quad \hat{s} = -\sqrt{E-1} \sinh A \cosh A \{(dx^1)^2 + (dx^2)^2\}.$$

Então a aplicação $\mathbf{p}(x^1, x^2, x^3)$ em $\mathbb{R}^4$, gerada por $\mathbf{f}$ e $B(x^3)$, define uma hiperfuperfície conformemente plana genérica se, e somente se, a constante G satisfaz $E > G + 2$.

Além disso, as curvas coordenadas de $\mathbf{p}$ são linhas de curvatura.

Demonstração: Como $\mathbf{f}$ está contida em $\mathbb{S}^3(1)$, seja $\mathbf{N}$ um vetor normal unitário de $\mathbf{f}$ em $\mathbb{S}^3(1)$. Visto que $\mathbf{f}(x^1, x^2)$ é outro vetor normal unitário de $\mathbf{f}$ em $\mathbb{R}^4$, então a função $\mathbf{p}$ é determinada por:

$$\mathbf{p}(x^1, x^2, x^3) = (1 + l(x^3))\mathbf{f}(x^1, x^2) + m(x^3)\mathbf{N}(x^1, x^2). \quad (3.92)$$

Da segunda forma fundamental, temos que $s_{ij} = 0$ se $i \neq j$, daí,

$$\mathbf{N}_1 = -\lambda_1 \mathbf{f}_1, \quad \mathbf{N}_2 = -\lambda_2 \mathbf{f}_2$$

onde λ_i ($i = 1, 2$), são as curvaturas principais. Como a primeira e a segunda formas fundamentais são diagonalizáveis, temos

$$\lambda_1 = \frac{s_{11}}{g_{11}} = -\frac{\sqrt{E-1} \sinh A \cosh A}{\cosh^2 A} = -\sqrt{E-1} \tanh A,$$

$$\lambda_2 = \frac{s_{22}}{g_{22}} = -\frac{\sqrt{E-1} \sinh A \cosh A}{\sinh^2 A} = -\sqrt{E-1} \coth A.$$

Logo

$$\mathbf{N}_1 = \sqrt{E-1} \tanh A \mathbf{f}_1 \quad \mathbf{N}_2 = \sqrt{E-1} \coth A \mathbf{f}_2. \quad (3.93)$$

Por outro lado, temos

$$\mathbf{p}_1 = (1+l)\mathbf{f}_1 + m\mathbf{N}_1 = \left(\frac{(1+l) \cosh A + \sqrt{E-1}m \sinh A}{\cosh A} \right) \mathbf{f}_1,$$

$$\mathbf{p}_2 = (1+l)\mathbf{f}_2 + m\mathbf{N}_2 = \left(\frac{(1+l) \sinh A + \sqrt{E-1}m \cosh A}{\sinh A} \right) \mathbf{f}_2$$

e

$$\mathbf{p}_3 = (l_3\mathbf{f} + m_3\mathbf{N}).$$

Pela primeira forma $\hat{g}$, temos

$$\|\mathbf{p}_1\|^2 = \left(\frac{(1+l) \cosh A + \sqrt{E-1}m \sinh A}{\cosh A} \right)^2 \cosh^2 A = ((1+l) \cosh A + \sqrt{E-1}m \sinh A)^2$$

e

$$\|\mathbf{p}_2\|^2 = \left(\frac{(1+l) \sinh A + \sqrt{E-1}m \cosh A}{\sinh A} \right)^2 \sinh^2 A = ((1+l) \sinh A + \sqrt{E-1}m \cosh A)^2.$$

Temos que a hipersuperfície $\mathbf{p}$ é conformemente plana se, e somente se, existem funções $l(x^3)$ e $m(x^3)$ satisfazendo:

$$\begin{cases} \cosh(A+B) = \frac{(1+l) \cosh A + \sqrt{E-1}m \sinh A}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}} \\ \sinh(A+B) = \frac{(1+l) \sinh A + \sqrt{E-1}m \cosh A}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}}. \end{cases}$$

resolvendo o sistema temos

$$\cosh B = \frac{1+l}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}}, \quad \sinh B = \frac{\sqrt{E-1}m}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}}. \quad (3.94)$$

Se existem as funções $l(x^3)$ e $m(x^3)$ satisfazendo as equações (3.94), então a aplicação $\mathbf{p}$ define uma hipersuperfície conformemente plana.

Denotemos $\bar{l} = (1 + l)$, $C(x^3) = \sqrt{(\bar{l}_3^2 + m_3^2)(x^3)}$. Então, da equação (3.94), temos

$$m = \frac{\bar{l} \tanh B}{\sqrt{E-1}}, \quad \bar{l}^2 - (E-1)m^2 = C^2. \quad (3.95)$$

Quando substituirmos m descrito na primeira equação de (3.95) e $m_3 = \frac{\bar{l}_3 \sinh B \cosh B + \bar{l} B_3}{\sqrt{E-1} \cosh^2 B}$, na segunda equação de (3.95), obtemos:

$$\bar{l}^2 - (E-1) \frac{\bar{l}^2 \sinh^2 B}{(E-1) \cosh^2 B} = \bar{l}_3^2 + \frac{(\bar{l}_3 \sinh B \cosh B + \bar{l} B_3)^2}{(E-1) \cosh^4 B}$$

que é equivalente a,

$$\begin{aligned} \cosh^2 B (E \cosh^2 B - 1) \left(\frac{\bar{l}_3}{\bar{l}} \right)^2 &+ 2B_3 \sinh B \cosh B \left(\frac{\bar{l}_3}{\bar{l}} \right) \\ &+ \{B_3^2 - (E-1) \cosh^2 B\} = 0. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Como da Proposição (3.7 - I), $(B_3)^2 = \frac{1}{2} (E \cosh 2B + G)$, temos que o discriminante da equação quadrática (3.96) na variável $\left(\frac{\bar{l}_3}{\bar{l}} \right)$ é dado por:

$$\frac{D}{4} = \frac{1}{2} (E-1)(E-G-2) \cosh^4 B.$$

Logo $\frac{\bar{l}_3}{\bar{l}}$ é uma função real se, e somente se, $E \geq G+2$ (pois, por hipótese $E > 1$). Assim se $E^2 + 1 > G^2$, temos duas funções $l(x^3)$ com a condição $l(0) = m(0) = 0$. (Aqui, assumimos $B(0) = 0$). Além disso, se $l(x^3)$ é determinada, então $m(x^3)$ também é determinada.

Se $E = G+2$, então todas as curvaturas principais são constantes igual a $\lambda = \mu = \nu = 1$.

Em seguida, mostraremos que as curvas coordenadas $\mathbf{p}$ são linhas de curvaturas. O vetor normal unitário a $\mathbf{p}$ é dado por

$$\mathbf{N}^* = \frac{1}{\sqrt{\bar{l}_3^2 + m_3^2}} (m_3 \mathbf{f} - \bar{l}_3 \mathbf{N}).$$

Assim temos:

$$\begin{aligned}\mathbf{N}^*_1 &= \frac{1}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}}(m_3 \mathbf{f}_1 - l_3 \mathbf{N}_1) = \frac{1}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}}(m_3 - l_3 \sqrt{E-1} \tanh A) \mathbf{f}_1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}}(m_3 - l_3 \sqrt{E-1} \tanh A) \frac{(1+l) + \sqrt{E-1} m \tanh A}{(1+l) + \sqrt{E-1} m \tanh A} \mathbf{f}_1,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathbf{N}^*_1 = \frac{m_3 + l_3 \sqrt{E-1} \tanh A}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}((1+l) + \sqrt{E-1} m \tanh A)} \mathbf{p}_1,$$

$$\begin{aligned}\mathbf{N}^*_2 &= \frac{1}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}}(m_3 \mathbf{f}_2 - l_3 \mathbf{N}_2) = \frac{1}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}}(m_3 - l_3 \sqrt{E-1} \coth A) \mathbf{f}_2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}}(m_3 - l_3 \sqrt{E-1} \coth A) \frac{(1+l) + \sqrt{E-1} m \coth A}{(1+l) + \sqrt{E-1} m \coth A} \mathbf{f}_2,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathbf{N}^*_2 = \frac{m_3 - l_3 \sqrt{E-1} \coth A}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}((1+l) + \sqrt{E-1} m \coth A)} \mathbf{p}_2$$

e

$$\begin{aligned}\mathbf{N}^*_3 &= \frac{(m_{33} \mathbf{f} - l_{33} \mathbf{N}) \sqrt{l_3^2 + m_3^2} - (m_3 \mathbf{f} - l_3 \mathbf{N}) \frac{(l_3 l_{33} + m_3 m_{33})}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}}}{l_3^2 + m_3^2} \\ &= \frac{1}{(l_3^2 + m_3^2)^{3/2}}((m_{33} \mathbf{f} - l_{33} \mathbf{N}) - (m_3 \mathbf{f} - l_3 \mathbf{N})(l_3 l_{33} + m_3 m_{33})) \\ &= \frac{1}{(l_3^2 + m_3^2)^{3/2}}((l_3 m_{33} - m_3 l_{33})(l_3 \mathbf{f} + m_3 \mathbf{N}))\end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathbf{N}^*_3 = \frac{l_3 m_{33} - m_3 l_{33}}{(l_3^2 + m_3^2)^{3/2}} \mathbf{p}_3.$$

Portanto, as curvaturas principais correspondentes as curvas x^1 , x^2 e x^3 , são, respectivamente:

$$\lambda = -\frac{m_3 + l_3 \sqrt{E-1} \tanh A}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}((1+l) + \sqrt{E-1} m \tanh A)}, \quad \mu = -\frac{m_3 - l_3 \sqrt{E-1} \coth A}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}((1+l) + \sqrt{E-1} m \coth A)}$$

e

$$\nu = -\frac{l_3 m_{33} - m_3 l_{33}}{(l_3^2 + m_3^2)^{3/2}}.$$

De maneira análoga ao Teorema (3.10), mostra-se que as curvaturas principais são distintas.

□

Lema 3.12. *Sejam $A(x^1, x^2)$ uma função satisfazendo as condições da Proposição (3.7-III), e $\hat{g} = \cosh^2 A(dx^1)^2 + \sinh^2 A(dx^2)^2$ e $\hat{s} = \sqrt{E}e^{-A}\{\cosh A(dx^1)^2 - \sinh A(dx^2)^2\}$ formas quadráticas em $\mathbb{R}^3$. Então existe uma superfície $\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ admitindo $\hat{g}$ e $\hat{s}$ como a primeira e segunda formas fundamentais.*

Demonstração: De maneira análoga ao Lemas (3.3) e (3.8) basta mostrar que as funções dadas $\hat{g}$ e $\hat{s}$ satisfazem as equações de Gauss e Mainardi–Codazzi.

Por um cálculo direto temos que os símbolos de Christoffel são:

$$\Gamma_{11}^1 = -A_1 \frac{\sin A}{\cos A}, \Gamma_{12}^1 = -A_2 \frac{\sin A}{\cos A}, \Gamma_{12}^2 = A_1 \frac{\cos A}{\sin A}, \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = A_2 \frac{\cos A}{\sin A}. \quad (3.97)$$

Como a curvatura Gaussiana neste caso depende apenas da primeira forma fundamental, como foi visto nos Lemas (3.3) e (3.8), e como a primeira forma fundamental deste Lema é igual a primeira forma fundamental do Lema (3.8), então a curvatura Gaussiana é dada por:

$$K = -\frac{A_{11} + A_{22}}{\sinh A \cosh A} = \frac{4E}{e^{4A} - 1}. \quad (3.98)$$

Substituindo as equações (3.97) no lado da equação (3.38), obtemos:

$$\begin{aligned} (\Gamma_{12}^2)_1 &= (\Gamma_{11}^2)_2 + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 = (A_{11} + A_{22}) \frac{\cosh A}{\sinh A} \\ &- (A_1^2 + A_2^2) \frac{1}{\sinh^2 A} - A_2^2 + (A_1^2 + A_2^2) \frac{\cosh^2 A}{\sinh^2 A} - A_1^2 \\ &= (A_{11} - A_{22}) \cot A = \cosh^2 A \frac{A_{11} + A_{22}}{\sinh A \cosh A} = -\bar{E}K, \end{aligned} \quad (3.99)$$

mostrando assim que a equação de Gauss está satisfeita.

Em seguida, mostraremos que valem as equações de Mainardi–Codazzi. Considerando o lado direito da equação (3.39), obtemos:

$$\frac{\bar{E}_2}{2} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right) = A_2 \sqrt{E} e^{-A} (\sin A - \cos^2 A) = e_2. \quad (3.100)$$

Calculando o lado direito da equação (3.40), obtemos:

$$\frac{\overline{G}_1}{2} \left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G} \right) = A_1 \sqrt{E} e^{-A} (\sinh A - \cos A) = g_1. \quad (3.101)$$

Das equações (3.99), (3.100) e (3.101) mostramos o Lema. $\square$

Utilizando o Lema (3.12), temos o seguinte resultado.

Teorema 3.13. *Sejam $A(x^1, x^2)$ e $B(x^3)$ funções satisfazendo a Proposição (3.7 - III), $E > 0$. Seja $\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície determinada por A , $\hat{g}$ e $\hat{s}$ a primeira e a segunda formas fundamentais dadas por:*

$$\hat{g} = \cosh^2 A (dx^1)^2 + \sinh^2 A (dx^2)^2, \quad \hat{s} = \sqrt{E} e^{-A} \{ \cosh A (dx^1)^2 - \sinh A (dx^2)^2 \}.$$

Então a aplicação $\mathbf{p}(x^1, x^2, x^3)$ em $\mathbb{R}^4$, gerada por $\mathbf{f}$ e $B(x^3)$, define uma hipersuperfície conformemente plana genérica se, e somente se, a constante G satisfaz $G < 0$ e $Ee^{2B} + G > 0$.

Além disso, a hipersuperfície $\mathbf{p}$ está parametrizada por linhas de curvatura.

Seja $\mathbf{N}$ um vetor normal unitário a $\mathbf{f}$ em $\mathbb{R}^3$. Então, a aplicação $\mathbf{p}(x^1, x^2, x^3)$ é determinada por

$$\mathbf{p}(x^1, x^2, x^3) = (\mathbf{f}(x^1, x^2) + l(x^3)\mathbf{N}(x^1, x^2), m(x^3)).$$

Como a primeira e a segunda formas fundamentais são diagonalizáveis, temos

$$\lambda_i = \frac{s_{ii}}{g_{ii}} \quad (i = 1, 2)$$

onde λ_i são as curvaturas principais, s_{ii} e g_{ii} são os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais, respectivamente. Então, temos que

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{E} e^{-A}}{\cosh A}$$

e

$$\lambda_2 = -\frac{\sqrt{E} e^{-A}}{\sinh A}.$$

Logo $\mathbf{N}_1 = -\frac{\sqrt{E} e^{-A}}{\cosh A} \mathbf{f}_1$ e $\mathbf{N}_2 = \frac{\sqrt{E} e^{-A}}{\sinh A} \mathbf{f}_2$. Daí temos

$$\mathbf{p}_1 = (\mathbf{f}_1 + l\mathbf{N}_1, 0) = \left(1 - \frac{le^{-A}\sqrt{E}}{\cosh A} \right) (\mathbf{f}_1, 0),$$

$$\mathbf{p}_2 = (\mathbf{f}_2 + l\mathbf{N}_2, 0) = \left(1 + \frac{le^{-A}\sqrt{E}}{\sinh A}\right) (\mathbf{f}_2, 0),$$

e

$$\mathbf{p}_3 = (l_3\mathbf{N}, m_3),$$

daí temos

$$\|\mathbf{p}_1\|^2 = \left(\frac{\cosh A - le^{-A}\sqrt{E}}{\cosh A}\right)^2 \cosh^2 A = (\cosh A - le^{-A}\sqrt{E})^2,$$

$$\|\mathbf{p}_2\|^2 = \left(\frac{\sinh A + le^{-A}\sqrt{E}}{\sinh A}\right)^2 \sinh^2 A = (\sinh A + le^{-A}\sqrt{E})^2,$$

e

$$\|\mathbf{p}_3\|^2 = l_3^2 + m_3^2.$$

Temos que a hipersuperfície $\mathbf{p}$ é conformemente plana se, e somente se, existem funções $l(x^3)$ e $m(x^3)$, satisfazendo:

$$\cosh(A + B) = \frac{\|\mathbf{p}_1\|}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}}, \quad \sinh(A + B) = \frac{\|\mathbf{p}_2\|}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}}.$$

Resolvendo o sistema temos,

$$\cosh B = \frac{1 - \sqrt{E}l}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}}, \quad \sinh B = \frac{\sqrt{E}l}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}},$$

daí temos

$$\tanh B = \frac{\sqrt{E}l}{1 - \sqrt{E}l}, \quad l_3^2 + m_3^2 = 1 - 2\sqrt{E}l. \quad (3.102)$$

Da primeira equação de (3.102), temos

$$(e^B - e^{-B})(1 - \sqrt{E}l) = (e^B + e^{-B})\sqrt{E}l$$

ou seja,

$$l = \frac{1 - e^{-2B}}{2\sqrt{E}}, \quad (3.103)$$

da equação (3.103), obtemos:

$$l_3 = \frac{e^{-2B}B_3}{\sqrt{E}}. \quad (3.104)$$

Como $(B_3)^2 = Ee^{2B} + G$, pela Proposição (3.7 - III), e substituindo a equação (3.104) na segunda equação (3.102), temos que:

$$\begin{aligned} m_3^2 &= 1 - 2\sqrt{E}l - \frac{B_3^2 e^{-4B}}{E} \\ &= 1 - (1 - e^{-2B}) - \frac{(Ee^{2B} + G)e^{-4B}}{E} \end{aligned}$$

ou seja,

$$m_3^2 = -\frac{Ge^{-4B}}{E}. \quad (3.105)$$

De (3.105), temos que, $m(x^3)$ existe se, e somente se, $G \leq 0$ e l_3 existe se, e somente se, $Ee^{2B} + G \geq 0$, mas da Proposição (3.7 - III) $B_3 \neq 0$, logo l_3 existe se, e somente se, $Ee^{2B} + G > 0$.

Em seguida, provaremos que as curvas coordenadas de $\mathbf{p}$ são linhas de curvaturas. O vetor normal unitário a $\mathbf{p}$ é dado por:

$$\mathbf{N}^* = \frac{1}{\sqrt{l_3^2 + m_3^2}}(m_3 \mathbf{N}, -l_3),$$

como $l_3 = \frac{e^{-2B}\sqrt{Ee^{2B} + G}}{\sqrt{E}}$ e $m_3 = \frac{e^{-2B}\sqrt{-G}}{\sqrt{E}}$, e observemos que $l_3^2 + m_3^2 = e^{-2B}$, então

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^* &= \frac{1}{\sqrt{e^{-2B}}} \left(\frac{e^{-2B}\sqrt{-G}}{\sqrt{E}} \mathbf{N}, -\frac{e^{-2B}\sqrt{Ee^{2B} + G}}{\sqrt{E}} \right) \\ &= e^B \left(\frac{e^{-2B}\sqrt{-G}}{\sqrt{E}} \mathbf{N}, -\frac{e^{-2B}\sqrt{Ee^{2B} + G}}{\sqrt{E}} \right) \\ &= \frac{e^{-B}}{\sqrt{E}} \left(\sqrt{-G} \mathbf{N}, \sqrt{Ee^{2B} + G} \right), \end{aligned}$$

daí temos,

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^*_{\mathbf{1}} &= \frac{e^{-B}}{\sqrt{E}} \left(\sqrt{-G} \mathbf{N}_1, 0 \right) = \frac{e^{-B}}{\sqrt{E}} \left(-\sqrt{-G} \frac{\sqrt{E}e^{-A}}{\cosh A} \mathbf{f}_1, 0 \right) \\ &= e^{-B} \left(-\frac{\sqrt{-G}e^{-A}}{\cosh A} \right) (\mathbf{f}_1, 0) = - \left(\frac{\sqrt{-G}e^{-(A+B)}}{\cosh A} \right) \left(\frac{\frac{\cosh A - le^{-A}\sqrt{E}}{\cosh A}}{\frac{\cosh A - le^{-A}\sqrt{E}}{\cosh A}} \right) (\mathbf{f}_1, 0) \\ &= - \left(\frac{\sqrt{-G}e^{-(A+B)}}{\cosh A - le^{-A}\sqrt{E}} \right) \left(\frac{\cosh A - le^{-A}\sqrt{E}}{\cosh A} \right) (\mathbf{f}_1, 0) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}^*_1 &= - \left(\frac{\sqrt{-G}e^{-(A+B)}}{\cosh A - le^{-A}\sqrt{E}} \right) \mathbf{p}_1, \\
\mathbf{N}^*_2 &= \frac{e^{-B}}{\sqrt{E}} \left(\sqrt{-G}\mathbf{N}_2, 0 \right) = \frac{e^{-B}}{\sqrt{E}} \left(\sqrt{-G} \frac{\sqrt{E}e^{-A}}{\sinh A} \mathbf{f}_2, 0 \right) \\
&= e^{-B} \left(\frac{\sqrt{-G}e^{-A}}{\sinh A} \right) (\mathbf{f}_2, 0) = \left(\frac{\sqrt{-G}e^{-(A+B)}}{\sinh A} \right) \left(\frac{\frac{\sinh A + le^{-A}\sqrt{E}}{\sinh A}}{\frac{\sinh A + le^{-A}\sqrt{E}}{\sinh A}} \right) (\mathbf{f}_2, 0) \\
&= \left(\frac{\sqrt{-G}e^{-(A+B)}}{\sinh A + le^{-A}\sqrt{E}} \right) \left(\frac{\sinh A + le^{-A}\sqrt{E}}{\sinh A} \right) (\mathbf{f}_2, 0)
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathbf{N}^*_2 = \left(\frac{\sqrt{-G}e^{-(A+B)}}{\sinh A + le^{-A}\sqrt{E}} \right) \mathbf{p}_2$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}^*_3 &= \frac{1}{\sqrt{E}} \left(-B_3e^{-B}\sqrt{-G}\mathbf{N}, -B_3e^{-B}\sqrt{Ee^{2B} + G} + \frac{B_3e^{-B}Ee^{2B}}{\sqrt{Ee^{2B} + G}} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{E}} \left(-B_3e^{-B}\sqrt{-G}\mathbf{N}, \frac{-B_3e^{-B}(Ee^{2B} + G) + B_3e^{-B}Ee^{2B}}{\sqrt{Ee^{2B} + G}} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{E}} \left(-B_3e^{-B}\sqrt{-G}\mathbf{N}, -\frac{B_3e^{-B}G}{\sqrt{Ee^{2B} + G}} \right) \\
&= \left(-\frac{B_3e^{-B}\sqrt{-G}}{\sqrt{E}}\mathbf{N}, -\frac{e^{-B}G}{\sqrt{E}} \right) \\
&= -e^B\sqrt{-G} \left(\frac{B_3e^{-2B}}{\sqrt{E}}\mathbf{N}, \frac{e^{-2B}\sqrt{-G}}{\sqrt{E}} \right) \\
&= -e^B\sqrt{-G}(l_3\mathbf{N}, m_3)
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathbf{N}^*_3 = -e^B\sqrt{-G} \mathbf{p}_3.$$

Portanto as curvaturas principais correspondentes as curvas x^1, x^2 e x^3 , são respectivamente,

$$\lambda = \frac{\sqrt{-G}e^{-(A+B)}}{\cosh A - le^{-A}\sqrt{E}}, \quad \mu = -\frac{\sqrt{-G}e^{-(A+B)}}{\sinh A + le^{-A}\sqrt{E}}, \quad \nu = e^B\sqrt{-G}.$$

Observe que, se $G = 0$, temos $\lambda = \mu = \nu = 0$, ou seja, a hipersuperfície não é genérica. Agora se $G < 0$, mostraremos que a hipersuperfície é genérica. De fato.

Se $\lambda = \mu$ teríamos que

$$\frac{1}{\cosh A - le^{-A}\sqrt{E}} = -\frac{1}{\sinh A + le^{-A}\sqrt{E}}$$

que é equivalente a,

$$\cosh A - le^{-A}\sqrt{E} = -(\sinh A + le^{-A}\sqrt{E})$$

ou seja,

$$e^A = 0,$$

que é uma contradição. Logo $\lambda \neq \mu$.

Se $\lambda = \nu$ teríamos que

$$\frac{e^{-(A+B)}}{\cosh A - le^{-A}\sqrt{E}} = e^B$$

que é equivalente a,

$$e^{2B+A}\left(\frac{e^A + e^{-A}}{2} - le^{-A}\sqrt{E}\right) = 1$$

que é equivalente a,

$$e^{2B}(e^{2A} + 1 - 2l\sqrt{E}) = 2$$

pela equação (3.103), temos,

$$e^{2B}(e^{2A} + e^{-2B}) = 2,$$

ou seja,

$$e^{2(A+B)} = 1.$$

Portanto $A + B = 0$, como $A = A(x^1, x^2)$, e $B(x^3)$, então $A = -B = K$ (K constante), que é uma contradição, pois pela Proposição (3.7) $B_3 \neq 0$, $A_1 \neq 0$ e $A_2 \neq 0$. Logo $\lambda \neq \nu$.

Se $\mu = \nu$ teríamos que

$$\frac{e^{-(A+B)}}{\sinh A + le^{-A}\sqrt{E}} = -e^B$$

que é equivalente a,

$$e^{2B+A} \left(\frac{e^A - e^{-A}}{2} + l e^{-A} \sqrt{E} \right) = -1$$

logo,

$$e^{2B}(e^{2A} - e^{-2B}) = -2$$

ou seja,

$$e^{2(A+B)} = -1$$

que é uma contradição, logo $\lambda \neq \nu$.

Portanto as curvaturas principais são distintas, isto completa a demonstração do Teorema. $\square$

Observação 3.14. *No Teorema acima, a superfície utilizada na construção da hipersuperfície $\mathbf{p}$ não tem curvatura Gaussiana constante.*

Observação 3.15. *Observemos que, no caso (II) da Proposição (3.7) não é possível construir nenhuma superfície, pois considerando a função A do tipo (II) da Proposição (3.7), não satisfaz as equações de codazzi.*

Conclusão

Nesta dissertação construímos uma família de hipersuperfícies conformemente planas em $\mathbb{R}^4$, com três curvaturas principais distintas. Observamos que o problema de classificar as hipersuperfícies conformemente planas no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^4$, não está completamente resolvido, e por isso está sendo estudado por vários pesquisadores nos dias atuais.

Referências Bibliográficas

- [1] BLAIR D. - *A generalization of the catenoid*, Canad. J. Math., 27 (1975), 2311–236;
- [2] CARMO M. P., DAJCZER M. e MERCURI F. - *Compact conformally flat hypersurfaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 288 (1985), 189–203;
- [3] CARMO M. P. - *Geometria diferencial de curvas e superfícies*, Sociedade Brasileira de matemática, Rio de Janeiro 2005;
- [4] CARMO M. P. - *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro (1988);
- [5] CARTAN E. - *La déformation des hypersurfaces dans l'espace conforme à $n \geq 5$ dimensions*, in Oeuvres complètes III, 1, 211–286;
- [6] CARTAN E. - *La déformation des hypersurfaces dans l'espace conforme réel à $n \geq 5$ dimensions*, Bull. Soc. Math. France, 45 (1917), 57–121;
- [7] FERRANDEZ A., GARAY O. J. e LUCAS P. - *On a certain class of conformally flat Euclidean hypersurfaces*, Proc. Conference on Global Analysis and Global Differential Geometry, Lecture Notes in Math., vol. 1481, Springer–Verlag, Berlin and New York, 1990, pp. 48–54;
- [8] GARAY O. J., *A classification of certain 3-dimensional conformally flat Euclidean hypersurfaces*, Pacific Journal of Math., vol. 162, 1 (1994), 13–25;
- [9] HETRICH-JEROMIN - *Conformally Flat Hypersurfaces Of $\mathbb{R}^4$* , Acta Math. Hungar., 89 (4) (2000), 347–354;

-
- [10] HETRICH-JEROMIN - *On conformally flat hypersurfaces and Guichard's nets*, Beitr. Alg. Geom., 35 (1994), 315–331;
- [11] KULKARNI R. S., - *Conformally flat manifolds*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 69 (1972), 2675–2676;
- [12] LANCASTER G. M., - *Canonical metrics for certain conformally Euclidean spaces of three dimension and codimension one*, Duke Math. J., 40 (1973), 1–8;
- [13] NISHIKAWA S. e MAEDA Y., *Conformally flat hypersurfaces in a conformally flat manifold*, Tôhoku Math. J., 26 (1974), 159–168;
- [14] SCHOUTEN J. A., - *Über die Konforme Abbildung n -dimensionaler Mannigfaltigkeiten mit quadratischer M a β bestimmung auf eine Mannigfaltigkeit mit euklidischer M a β bestimmung*, Math. Z., 11 (1921), 58–88;
- [15] SUYAMA Y., - *Conformally flat hypersurfaces in Euclidean 4-space*, Nagoya Math. J., 158 (2000), 1–42;
- [16] SUYAMA Y., - *Conformally flat hypersurfaces in Euclidean 4-space II*, Osaka Math. J., 42 (2005), 573–598;
- [17] TENENBLAT K., - *Introdução à Geometria Diferencial*, Universidade de Brasília, Brasília 1988.
- [18] TENENBLAT K., - *On isometric immersions of riemannian manifolds*, Boletim da Soc. Bras. de Mat., vol. 2 (1971)15-22.