



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS (UFG)  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA (IME)  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MIRIAM CRISTINA FERREIRA FURTADO

# Curvas Esféricas com Curvatura Proporcional a Função Altura

GOIÂNIA  
2024



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

## TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

### E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

#### 1. Identificação do material bibliográfico

Dissertação     Tese     Outro\*: \_\_\_\_\_

\*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

Exemplos: Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

#### 2. Nome completo do autor

Miriam Cristina Ferreira Furtado

#### 3. Título do trabalho

Curvas Esféricas com Curvatura Proporcional a Função Altura

#### 4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento  SIM     NÃO<sup>1</sup>

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

- a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
  - b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.
- O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

**Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.**



Documento assinado eletronicamente por **Bruno Rodrigues De Freitas, Professor do Magistério Superior**, em 02/10/2024, às 12:08, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Miriam Cristina Ferreira Furtado, Discente**, em 02/10/2024, às 12:39, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **4871423** e o código CRC **CBBC5D6B**.

---

MIRIAM CRISTINA FERREIRA FURTADO

# Curvas Esféricas com Curvatura Proporcional a Função Altura

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística (IME) da Universidade Federal de Goiás (UFG), como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística.

**Área de concentração:** Geometria.

**Orientador:** Prof. Bruno Rodrigues de Freitas

**Co-Orientador:** Prof. Hiuri Fellipe Santos dos Reis

GOIÂNIA  
2024

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Furtado, Miriam Cristina Ferreira  
Curvas Esféricas com Curvatura Proporcional a Função Altura  
[manuscrito] / Miriam Cristina Ferreira Furtado. - 2024.  
87 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Bruno Rodrigues De Freitas; co-orientador  
Dr. Hiuri Fellipe Santos Dos Reis.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto  
de Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em  
Matemática, Goiânia, 2024.  
Bibliografia.

1. Fluxo redutor de curvas. 2. Sóliton. 3. Superfície de rotação. 4.  
Esfera. I. De Freitas, Bruno Rodrigues, orient. II. Título.

CDU 515.1



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
**ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO**

Ata nº 10 da sessão de Defesa de Dissertação de **Miriam Cristina Ferreira Furtado**, que confere o título de Mestre em **Matemática**, na área de concentração em **Geometria**.

Aos **27/09/2024 (vigésimo sétimo dia do mês de setembro do ano de dois mil e vinte e quatro)**, a partir das **09h00**, via Web videoconferência, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada “**Curvas Esféricas com Curvatura Proporcional a Função Altura**”. Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor **Bruno Rodrigues de Freitas - IME/UFG** com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor **Hiuri Fellipe Santos dos Reis - IME/UFG**, membro titular interno; Professor Doutor **Benedito Leandro Neto - MAT/UnB**, membro titular externo; Professor Doutor **Valter Borges Sampaio Junior - MAT/UFPA**, membro titular externo. Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido a candidata **aprovada** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor **Bruno Rodrigues de Freitas - IME/UFG**, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos **vigésimo sétimo dia do mês de setembro do ano de dois mil e vinte e quatro**.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA



Documento assinado eletronicamente por **Hiuri Fellipe Santos Dos Reis, Professor do Magistério Superior**, em 21/10/2024, às 09:00, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Benedito Leandro Neto, Usuário Externo**, em 21/10/2024, às 10:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Valter Borges Sampaio Junior, Usuário Externo**, em 21/10/2024, às 13:33, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Bruno Rodrigues De Freitas, Professor do Magistério Superior**, em 21/10/2024, às 15:42, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **4913447** e o código CRC **17873C7C**.

---

**Referência:** Processo nº 23070.045994/2024-41

SEI nº 4913447

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

**Miriam Cristina Ferreira Furtado**

Aos meu pais, Vanderlei Divino Furtado e Jussânia Ferreira Justino.

---

## Agradecimentos

---

Agradeço a Deus, YHWH, por Sua terna misericórdia e graça. Ele, que desde o princípio possui em Suas mãos a fonte de toda sabedoria e conhecimento e tem sido meu guia e sustento ao longo desta jornada.

Agradeço profundamente aos meus pais, Vanderlei e Jussânia, por todo amor, compreensão e suporte incondicional. Agradeço também aos meus pastores Nilda Maria, Sheila Alves, Wanderlan, e a todos os irmãos da igreja Congregação dos Justos que contribuíram positivamente e ricamente para o meu crescimento. Tenho-os como uma verdadeira família. Meu agradecimento especial a Beonice, que me acolheu em sua casa, e aos meus irmãos Débora, Ezequiel e Ezafir, que estiveram comigo por um certo período dessa trajetória.

Aos colegas Artur Jorge, Júlio César e Karol Cintra, que tive a oportunidade de conhecer ao longo do curso e que me acompanharam nesta etapa. Quero expressar minha sincera gratidão pela valiosa contribuição de vocês. Um agradecimento especial ao meu amigo de longa data, Vicente Ferreira.

Às minhas amigas Ávila, Hadassa e Andryelle, que suportaram meus momentos de choro, me apoiaram e mantiveram suas orações ao meu favor, minha profunda gratidão. Aos demais amigos e companheiros que estiveram comigo, agradeço por todo o apoio emocional durante essa jornada.

Ao professor Benedito Leandro, por seu auxílio inestimável no estudo do primeiro artigo, a professora Adriana Cintra por todo apoio. Ao meu orientador Bruno Freitas e ao co-orientador Hiuri Fillipe, pela orientação e suporte necessários para a conclusão desta pesquisa. Por fim, agradeço a todos que, de alguma forma, contribuíram para esta jornada. Estou imensamente grata.

À CAPES, pelo suporte financeiro.

*Eu, o Senhor, no tempo certo farei acontecer.*

**Isaías,**  
*60:22.*

---

## Resumo

---

Furtado, M.C.F.. **Curvas Esféricas com Curvatura Proporcional a Função Altura**. GOIÂNIA, 2024. 87p. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Matemática, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Universidade Federal de Goiás (UFG).

No trabalho, analisamos o estudo de [17] sobre a caracterização das soluções sôliton do Fluxo Redutor de Curvas (FRC) em superfícies de revolução no espaço  $\mathbb{R}^3$ , demonstrando que tais soluções assintotam os paralelos que são geodésicas.

Além disso, abordaremos o trabalho realizado por [8] que caracteriza as soluções sôlitons na esfera unitária  $\mathbb{S}^2$ . Aplicaremos uma metodologia similar para descrever curvas cuja curvatura dependem da função altura.

### Palavras-chave

Fluxo Redutor de Curvas, Sôliton, Superfície de Rotação, Esfera.

---

## Abstract

---

Furtado, M.C.F.. **SPHERICAL CURVES WITH CURVATURE PROPORTIONAL TO HEIGHT FUNCTION**. GOIÂNIA, 2024. 87p. MSc. Dissertation. Programa de Pós-Graduação em Matemática, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Universidade Federal de Goiás (UFG).

In the work, we analyze the study by [17] on the characterization of soliton solutions of the Curve Shortening Flow (CSF) on revolution surfaces in the space  $\mathbb{R}^3$ , demonstrating that such solutions asymptote the parallels that are geodesics. Furthermore, we will address the work carried out by [8] that characterizes soliton solutions on the unitary sphere  $S^2$ . We will apply a similar methodology to describe curves with curvature depends on the height function.

### Keywords

Curve Shortening Flow, Soliton, Revolution Surface, Sphere.

---

# Sumário

---

Introdução	14
1 Preliminares	16
1.1 Geometria Diferencial de Superfícies	16
1.2 Fluxo Redutor de Curvas	18
1.3 Campo de Vetores em Variedades	20
2 Solução Sóliton Para o Fluxo Redutor de Curvas na Esfera	22
2.1 Caracterização dos Sólitons do FRC na Esfera	26
3 Fluxo Redutor de Curvas em Superfícies de Revolução	41
3.1 Toro $\mathbb{T}^2$	55
3.1.1 Isometrias em $\mathbb{T}^2$	57
4 Curvas Esféricas Com Curvatura Geodésica Proporcional À Função Altura	68
Referências Bibliográficas	85

---

## Introdução

---

Neste trabalho, estudaremos sobre o Fluxo Redutor de Curvas (FRC) em superfícies de revolução. Mostraremos a caracterização dos sólitons na esfera, isto é, curvas que são solução para o FRC que se movimentam por meio de isometrias, além de apresentar soluções de curvas cuja curvatura geodésica depende da função altura.

O FRC é uma equação de evolução que move uma curva na direção da normal, com velocidade igual à curvatura geodésica em cada ponto em uma variedade Riemanniana bidimensional. Este fluxo é um caso particular do Fluxo de Curvatura Média (FCM) no qual trocamos hipersuperfícies de uma variedade Riemanniana por curvas e a Curvatura Média pela Curvatura Geodésica.

Naturalmente, as curvas que são geodésicas de uma superfície são soluções triviais para o FRC, uma vez que elas não se movem (velocidade normal igual a zero), enquanto, para o FCM, as soluções triviais são as superfícies mínimas. O fluxo redutor de curva começou a ser estudado em ciências de materiais, aparecendo na modelagem de fenômenos físicos, como a propagação de chamas, além de ser utilizado no processamento de imagens e na criação de modelos digitais em 3D [19].

Os principais avanços ocorreram entre meados e fins da década de 1980, quando foi possível caracterizar o comportamento do fluxo em detalhes. Atualmente, esse estudo vem sendo aprofundado em diversas áreas do conhecimento, como topologia [2], [4], relatividade geral [16], e processamento de geometria digital [3], que são modelos e algoritmos matemáticos da ciência da computação.

Este trabalho consiste em quatro capítulos. No Capítulo 1, apresentaremos algumas definições e conceitos básicos que serão utilizados ao longo do texto. As Subseções 1.1 e 1.2 referem-se à Geometria Diferencial de Superfícies [6], [7], [8], [17] e [25]. A Subseção 1.3 trata do estudo de Campos de Vetores em Variedades [9] e [22].

No Capítulo 2, desenvolvemos os resultados de Tenenblat e dos Reis [8], que classificam as soluções sóliton do fluxo redutor de curvas na esfera, provando que uma curva em  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  é um sóliton do FRC se, e somente se, a curvatura geodésica é proporcional ao ângulo entre o vetor tangente  $T$  e um vetor fixo  $v \in \mathbb{R} \setminus 0$ .

Na Proposição 2.2, são definidas as funções  $\tau$ ,  $\nu$ ,  $\alpha$  e a curvatura geodésica  $\kappa_g = \langle T, \nu \rangle = a\tau$  em função de  $\tau$ , onde, a menos de isometria,  $\nu = a(0, 0, 1)$ , que descreve essa curvatura em termos de um sistema de equações diferenciais. Isso possibilitará a descrição de um campo  $\psi$  definido pelas equações desse sistema e, conseqüentemente, entender o comportamento desses sólitons na esfera através do retrato de fase do campo  $\psi$ . Em seguida, apresentaremos alguns lemas que são fundamentais para a demonstração do Teorema 2.13, o qual descreve o comportamento de cada curva. A seção será concluída com a ilustração desse teorema.

No Capítulo 3, serão apresentados os resultados desenvolvidos por [17] sobre o Fluxo Redutor de Curvas em Superfícies de Revolução, apresentando dois teoremas principais: o Teorema 3.1, que caracteriza os sólitons do FRC nessas superfícies, e o Teorema 3.5, que mostra que tais superfícies, onde as curvas parametrizadas pelo comprimento de arco  $X(u, v) = (\phi(u) \cos v, \phi(u) \sin v, \psi(u))$  são sólito para o FRC, que satisfazem

$$|\phi|, |\dot{\phi}| < \infty \text{ e } \|\kappa_g(s)\|^2 = \int_I \kappa_g(s)^2 < \infty,$$

terão seus extremos convergindo para os paralelos, que são geodésicas.

Além disso, apresentaremos uma aplicação desses resultados a um sistema de EDO do toro  $\mathbb{T}^2$ . Este é um caso interessante, pois não temos um sinal definido para a curvatura geodésica. Por fim, plotaremos algumas soluções numéricas nas quais se aplica o Teorema 3.5 e em outras que não se aplicam, a saber, o toro e o catenóide, respectivamente [17]. A análise foi conduzida com a ajuda do software Maple.

No Capítulo 4, apresentamos novos resultados obtidos ao estudar a caracterização dos sólitons na esfera, conforme apresentado em [8]. Consideramos a curvatura geodésica como  $\kappa_g = a\alpha$ , onde  $a > 0$  é uma constante e  $\alpha(s) = \langle X, e_3 \rangle$ , sendo  $X$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco sobre a superfície.

Com essa abordagem, construímos um campo sobre a esfera e analisamos o comportamento do retrato de fase. Utilizamos o conceito de campos em variedades [20], que nos permitiu estudar esse campo no espaço bidimensional, compreendendo assim o comportamento dessas trajetórias tanto no plano quanto na esfera. Essas análises foram realizadas com o auxílio dos softwares Maple e Mathematica. Finalmente, apresentamos uma proposição que descreve o comportamento das curvas cuja curvatura geodésica é proporcional à função altura  $\alpha$ .

---

# Preliminares

---

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e conceitos básicos que serão utilizados nos demais capítulos. Os conceitos apresentados nessa seção bem como as demonstrações podem ser encontradas em [6], [7], [8], [9], [12], [18], [20], [22] e [25].

## 1.1 Geometria Diferencial de Superfícies

Consideraremos o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$  o espaço ambiente. Seja  $M^2 \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície regular orientada e  $X$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco em  $M^2$ . Seja  $\eta$  o campo normal unitário de  $M^2$ ,  $T = X'$  e  $N = \eta \wedge T$ .

O referencial ortonormal  $\{T, N, \eta\}$  é denotado *Triedro de Darboux* satisfazendo as seguintes equações

$$T' = \kappa_g N + \kappa_n \eta, \quad N' = \kappa_g T + \tau \eta, \quad \eta' = -\kappa_n T - \tau N. \quad (1-1)$$

onde,  $\kappa_g$ ,  $\kappa_n$  e  $\tau$  são, a curvatura geodésica, a curvatura normal e a torção geodésica de  $X$ , respectivamente. Tais equações são chamadas de *Equações de Darboux*.

Seja  $Y(u, v)$  uma superfície de  $\mathbb{R}^3$ , uma curva regular  $\Phi(s) = Y(u(s), v(s))$  é uma *geodésica* de  $Y$  se, e somente se, satisfaz o sistema de equações diferenciais, veja [7], pag 304.

$$\begin{cases} u'' + \Gamma_{11}^1(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1(v')^2 = 0, \\ v'' + \Gamma_{11}^2(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2(v')^2 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

onde os símbolos de Christoffel são dados por

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) g^{kl}, \quad (2)$$

$i, j, k = \{1, 2\}$ ,  $x^1 = u$ ,  $x^2 = v$  e

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

é a primeira forma fundamental.

Seja  $M = \mathbb{S}^2$  a esfera unitária no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$ , dada por

$$\mathbb{S}^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, x \rangle = 1\},$$

com a métrica induzida de  $\mathbb{R}^3$ .

**Definição 1.1** *Seja  $X : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2$  uma curva parametrizada regular em  $\mathbb{S}^2$ . Dizemos que  $X$  é uma imersão diferenciável se  $X'(s) \neq 0$ , para todo  $s \in I$ .*

Iremos considerar  $X$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. O *campo tangente unitário* é definido por

$$T(s) = X'(s) = \frac{d}{ds}X(s),$$

e o *campo normal unitário* a  $X(s)$  no espaço tangente  $T_{X(s)}\mathbb{S}^2$  é definido por

$$N(s) = T(s) \wedge X(s).$$

**Definição 1.2** *O número real*

$$\kappa_g(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle \tag{1-2}$$

*é denominado a curvatura geodésica da curva  $X$  no instante  $s$ .*

Como o vetor posição é ortogonal a esfera  $\eta = X$ , ao longo da curva o conjunto  $\{T(s), N(s), X(s)\}$  corresponde com o triedro de Darboux (1-1) da curva  $X$ . Satisfazendo as equações

$$\begin{cases} T'(s) = \kappa_g(s)N(s) - X(s), \\ N'(s) = -\kappa_g(s)T(s), \\ X'(s) = T(s). \end{cases} \tag{1-3}$$

O Teorema seguinte garante que dada a curvatura geodésica, a menos de isometria sempre existirá uma curva parametrizada pelo comprimento de arco na esfera, ver [23].

**Teorema 1.3** (*Teorema Fundamental das Curvas na Esfera*) Dada uma função  $\kappa_g : I \rightarrow \mathbb{R}$ , existe uma curva parametrizada regular  $X : I \rightarrow \mathbb{S}^2$ , tal que  $s$  é o parâmetro por comprimento de arco e  $\kappa_g$  é a curvatura de  $X$ . Além disso, qualquer outra curva  $\tilde{X}$  satisfazendo as mesmas condições, difere de  $X$  por uma isometria de  $\mathbb{S}^2$ , isto é, existe uma transformação ortogonal  $A \in o(3)$ , tal que  $\tilde{X} = AX(s)$ .

O lema a seguir será fundamental na demonstração do Lema 2.10 e do Teorema 3.5.

**Lema 1.4** (*Barbalat*). Se a função diferenciável  $f(s)$  possui limite finito quando  $s \rightarrow \infty$ , e se  $f'(s)$  é uniformemente contínua, então  $f'(s) \rightarrow 0$ , quando  $s \rightarrow \infty$ .

Ver [24] Lema 4.2.

## 1.2 Fluxo Redutor de Curvas

O Fluxo Redutor de Curvas [10] estuda a evolução de uma curva em uma variedade, dependendo da curvatura geodésica em cada ponto.

**Definição 1.5** Seja  $\Phi : U \subset \mathbb{R} \rightarrow \Omega^2$  uma curva em uma variedade Riemanniana bidimensional  $\Omega^2$ . Uma família a um parâmetro de curvas  $\hat{\Phi}^t(\cdot) = \hat{\Phi}^t(\cdot, t)$  é uma solução para o Fluxo Redutor de Curvas com condição inicial  $\Phi$  se

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{\Phi}^t}{\partial t}(s) = \kappa_g^t(s) \eta^t(s), \\ \hat{\Phi}^0(s) = \Phi(s), \end{cases}$$

onde,  $\kappa_g^t$  e  $\eta^t$  representam a curvatura geodésica e o campo normal unitário de  $\hat{\Phi}^t$ , respectivamente.

Ou seja, a curvatura geodésica satisfaz,

$$\left\langle \frac{\partial \hat{\Phi}^t}{\partial t}, \eta^t \right\rangle = \kappa_g^t. \quad (1-4)$$

A curva  $\Phi$  é um sóliton do FRC quando a família de curvas  $\hat{\Phi}^t(\cdot) = \hat{\Phi}^t(\cdot, t)$  puder ser escrita como

$$\hat{\Phi}^t(s) = R^t(\Phi(s)), \quad (1-5)$$

onde,  $R^t(\cdot) = R^t(\cdot, t)$  é uma família a um parâmetro de isometrias de  $\Omega^2$  tal que  $R^0(\cdot) = Id$  é a aplicação identidade.

O fluxo redutor de curvas tem sido estudado em vários espaços diferentes. Por exemplo, em [5], foram classificadas as soluções sólitons do FRC no espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{R}_1^3$ , onde  $\mathbb{R}_1^3$  é o espaço tridimensional de Minkowski. Os autores mostraram que a curvatura geodésica é dada pelo produto interno entre seu campo vetorial tangente e um vetor fixo  $v \in \mathbb{R}_1^3$ , evidenciando que a curvatura geodésica em seus extremos converge para uma constante.

Tenenblat e dos Reis [8] classificaram as soluções sólitons do FRC na esfera, evidenciando que os extremos de tais soluções convergem para o equador da esfera, ortogonais a um vetor fixo  $v = \|v\|(0, 0, 1)$ . Um caso mais geral foi estudado por [17], que classificaram o comportamento qualitativo das soluções sólitons em superfícies de revolução, mostrando que os extremos de cada solução assintotizam o equador, que é uma geodésica.

Ao longo do fluxo, podem ocorrer singularidades. Uma importante classe de soluções para o FRC envolve isometrias e homotetias; essas soluções são chamadas de auto-similares. Duas delas bem conhecidas são a reta, que possui curvatura nula e não é afetada pelo fluxo, e o círculo, que encolhe homoteticamente em um ponto em tempo finito. Existem outras curvas, além do círculo, que encolhem homoteticamente ao longo do fluxo em tempo finito, classificadas por Abresh e Langer [1].

Outra solução é a curva de Grim Reaper, dada pelo gráfico da função

$$f(x) = -\ln \cos(x), \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

cujos vetor tangente unitário é dado por  $T(x) = (\cos x, \sin x)$  e o vetor normal  $\eta(x) = (-\sin x, \cos x)$ . Portanto, a curvatura geodésica, definida por [25] é dada por

$$\kappa_g(x) = \frac{f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sec(x)} = \cos(x),$$

satisfaz a identidade  $\kappa_g(x) = \langle T(x), v \rangle$ , onde  $v = (0, 1)$ .

De acordo com Giga [13], essa é a única curva no plano que envolve translações. Além disso, vários autores encontraram diversos comportamentos dessas soluções auto-similares, como encolhimento, expansão e rotação sob o fluxo. Em [14] e [15], Halldorsson estudou soluções auto-similares que combinam dois ou mais desses movimentos, completando assim a descrição de todas as soluções auto-similares nos planos euclidiano e de Minkowski. Para dimensões maiores no espaço euclidiano, os exemplos mais simples de soluções auto-similares são as esferas e os cilindros, que se qualificam como hipersuperfícies autocontráteis [23].

## 1.3 Campo de Vetores em Variedades

Essa seção pode ser estudada com detalhes em [20] e [22]. Seja  $M^m \subset \mathbb{R}^k$  uma variedade diferenciável. Um campo de vetores de classe  $C^r$  em  $M^m$  é uma aplicação de classe  $C^r$

$$X : M^m \rightarrow \mathbb{R}^k$$

que a cada ponto  $p \in M^m$  associa um vetor  $X(p) \in T_pM$ . Isto corresponde a uma aplicação  $C^r$   $X : M^m \rightarrow TM$  tal que  $\pi X$  é a identidade em  $M^m$ , onde  $\pi$  é a projeção natural de  $TM$  em  $M^m$ . Denotamos por  $\mathfrak{X}^r(M)$  o conjunto dos campos de vetores de classe  $C^r$  em  $M^m$ .

Uma curva integral de  $X \in \mathfrak{X}^r(M)$  passando por um ponto  $p \in M^m$  é uma aplicação diferenciável

$$\alpha : I \rightarrow M^m,$$

onde  $I$  é um intervalo contendo 0, tal que

$$\alpha(0) = p \quad \text{e} \quad \alpha'(t) = X(\alpha(t)),$$

para todo  $t \in I$ . A imagem de uma curva integral é chamada de órbita ou trajetória.

Seja  $N^n \subset \mathbb{R}^l$  uma variedade diferenciável. Se  $f : M^m \rightarrow N^n$  for um difeomorfismo de classe  $C^{r+1}$  e  $X \in \mathfrak{X}^r(M)$  então  $Y = f_*X$ , definido por

$$Y(q) = df_p \cdot X(p)$$

com  $q = f(p)$ , é um campo de classe  $C^r$  em  $N^n$  pois  $f_*X = df \circ X \circ f^{-1}$ .

Se  $\alpha : I \rightarrow M^m$  for uma curva integral de  $X$ , então

$$f \circ \alpha : I \rightarrow N^n$$

é uma curva integral de  $Y$ . Em particular,  $f$  leva trajetórias de  $X$  em trajetórias de  $Y$ . Assim se  $x : U \rightarrow U_0 \subset \mathbb{R}^m$  for uma carta local,  $Y = x_*X$  é um campo de classe  $C^r$  em  $U_0$ ; dizemos que  $Y$  é a expressão de  $X$  na carta local  $(x, U)$ .

**Exemplo 1.3.1** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação de classe  $C^\infty$  satisfazendo as*

seguintes condições:

$$f(t) > 0 \text{ para } t \neq 0,$$

$$f(t) = \frac{1}{t} \text{ para } t > 1,$$

$$f(0) = \frac{df}{dt}(0) = \dots = \frac{d^r f}{dt^r}(0) = \dots = 0.$$

Considere o campo vetorial  $\tilde{X}$  em  $\mathbb{R}^2$  definido por

$$\tilde{X}(r \cos \theta, r \sin \theta) = (rf(r) \cos \theta, rf(r) \sin \theta).$$

O campo vetorial  $\tilde{X}$  é radial e a origem é a única singularidade,  $d\tilde{X}(0) = 0$  e  $\|\tilde{X}(p)\| = 1$  se  $p \geq 1$ .

Seja  $p_N$  o polo norte,  $p_S$  o polo sul e  $\pi : \mathbb{S}^2 - \{p_N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  a projeção estereográfica. Definimos o campo  $X$  em  $\mathbb{S}^2$  por  $X(p) = d\pi_{\pi(p)}^{-1} \tilde{X}(\pi(p))$  se  $p \neq p_N$  e  $X(p_N) = 0$ . Note que  $X$  é  $C^\infty$  e possui dois pontos singulares  $p_N$  e  $p_S$ . Mostraremos que existe um campo vetorial  $C^r$  próximo a  $X$  tendo uma órbita fechada. Seja  $\tilde{Y}$  o campo vetorial em  $\mathbb{R}^2$  definido por

$$\tilde{Y}(r \cos \theta, r \sin \theta) = (rl(r) \cos \theta + rg(r) \sin \theta, -rg(r) \cos \theta + rl(r) \sin \theta),$$

onde  $l, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são aplicações de classe  $C^\infty$ . O círculo  $S_a$  com centro na origem e raio  $a$  é uma órbita fechada de  $\tilde{Y}$  desde que  $\tilde{Y}$  é tangente a  $S_a$  em cada ponto. Fora do disco de raio 1,  $\tilde{Y} = \tilde{X}$ . Assim,  $\tilde{Y}$  define um campo vetorial  $Y$  em  $\mathbb{S}^2$  que tem os polos nortes e sul como singularidades "atrativas" e uma órbita fechada "repulsiva"  $\gamma = \pi^{-1}(S_a)$ .

Para aprofundar o entendimento sobre a estabilidade de campos na esfera  $\mathbb{S}^2$ , consulte [21]. No capítulo 4, utilizaremos esses conceitos para analisar o retrato de fase do campo definido na esfera. Para isso, definiremos um campo no plano bidimensional, o que nos permitirá trabalhar com um número reduzido de variáveis. Após analisarmos o comportamento das trajetórias no retrato de fase do campo no plano, retornaremos à esfera, "transferindo" o comportamento das trajetórias em torno dos pontos singulares.

## Solução Sóliton Para o Fluxo Redutor de Curvas na Esfera

Neste capítulo apresentaremos resultados que podem ser encontrados no artigo [8]. Iremos caracterizar os sólitons do FRC na esfera como as curvas cuja curvatura é proporcional ao ângulo entre o vetor tangente e um vetor fixo de  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ .

Seja  $X : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ . Denote por  $T(s) = X'(s)$  o vetor tangente,  $N(s) = T(s) \wedge X(s)$  vetor unitário normal, e  $\kappa_g(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle$  a curvatura geodésica de  $X$ .

**Teorema 2.1** *Seja  $X : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco não geodésica. Então  $X$  é uma solução sóliton para o fluxo redutor de curvas se, e somente se, existe um vetor  $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  tal que*

$$\langle T, v \rangle = \kappa_g, \quad (2-1)$$

onde  $T$  é o vetor tangente e  $\kappa_g$  é a curvatura geodésica de  $X$ .

*Demonstração.* Suponha  $X(s)$  p.c.a. Se  $X$  é um sóliton do fluxo redutor de curvas na esfera, temos que (1-5)  $\hat{X}^t(s) = A(t)X(s)$ , onde  $A(t)$  é uma isometria. Considere  $A(t) = A_1(t)A_2(t)A_3(t)$ , tal que

$$A_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\xi_1(t)) & -\sin(\xi_1(t)) \\ 0 & \sin(\xi_1(t)) & \cos(\xi_1(t)) \end{pmatrix}, A_2(t) = \begin{pmatrix} \cos(\xi_2(t)) & 0 & \sin(\xi_2(t)) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\xi_2(t)) & 0 & \cos(\xi_2(t)) \end{pmatrix},$$

$$A_3(t) = \begin{pmatrix} \cos(\xi_3(t)) & -\sin(\xi_3(t)) & 0 \\ \sin(\xi_3(t)) & \cos(\xi_3(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e  $\xi_i : J \rightarrow \mathbb{R}$  são funções reais tais que  $\xi_i(0) = 0$  para todo  $i = 1, 2, 3$ . É claro que qualquer isometria de  $A(t)$  pode ser decomposta como  $A_1(t)A_2(t)A_3(t)$ . Isto segue

do fato de que qualquer triedro ortonormal pode ser construído como o produto de três rotações (Euler angles), uma rotação em volta de cada eixo.

Tomando a derivada de (1-5)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{X}}{\partial t}(s, t) &= A'(t)X(s) \\ &= (A'_1 A_2 A_3 + A_1 A'_2 A_3 + A_1 A_2 A'_3)(t)X(s).\end{aligned}$$

Em  $t = 0$  temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{X}}{\partial t}(s, 0) &= (A'_1(0) + A'_2(0) + A'_3(0))X(s) \\ &= \left[ \xi'_1(0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \xi'_2(0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \xi'_3(0) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] X(s) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\xi'_3(0) & \xi'_2(0) \\ \xi'_3(0) & 0 & -\xi'_1(0) \\ -\xi'_2(0) & \xi'_1(0) & 0 \end{pmatrix} X(s).\end{aligned}$$

Além disso, temos  $X(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s)) \in \mathbb{S}^2$ , logo,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{X}}{\partial t}(s, 0) &= \begin{pmatrix} 0 & -\xi'_3(0) & \xi'_2(0) \\ \xi'_3(0) & 0 & -\xi'_1(0) \\ -\xi'_2(0) & \xi'_1(0) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \\ x_3(s) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -x_2(s)\xi'_3(0) + x_3(s)\xi'_2(0) \\ x_1(s)\xi'_3(0) - x_3(s)\xi'_1(0) \\ -x_1(s)\xi'_2(0) + x_2(s)\xi'_1(0) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Como  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ ,  $x_1 x'_1 + x_2 x'_2 + x_3 x'_3 = 0$ ,

$$\hat{N}(s, 0) = N(s) = T(s) \wedge X(s) = (x'_2 x_3 - x_2 x'_3, -x_1 x_3 + x_1 x'_3, x'_1 x_2 - x_1 x'_2)(s)$$

e omitindo o  $s$ , temos

$$\begin{aligned}
& \left\langle \frac{\partial \hat{X}}{\partial t}(s, 0), \hat{N}(s, 0) \right\rangle \\
&= \left\langle (-x_2 \xi_3'(0) + x_3 \xi_2'(0), x_1 \xi_3'(0) - x_3 \xi_1'(0), -x_1 \xi_2'(0) + x_2 \xi_1'(0)), (N_1, N_2, N_3) \right\rangle \\
&= (-x_2 \xi_3'(0) + x_3 \xi_2'(0))N_1 + (x_1 \xi_3'(0) - x_3 \xi_1'(0))N_2 + (-x_1 \xi_2'(0) + x_2 \xi_1'(0))N_3 \\
&= (-x_2 \xi_3'(0) + x_3 \xi_2'(0))(x_2'x_3 - x_2x_3') + (x_1 \xi_3'(0) - x_3 \xi_1'(0))(-x_1x_3 + x_1x_3') \\
&\quad + (-x_1 \xi_2'(0) + x_2 \xi_1'(0))(x_1'x_2 - x_1x_2') \\
&= -x_2x_2'x_3\xi_3'(0) + x_2x_2x_3'\xi_3'(0) + x_3x_3x_2'\xi_2'(0) - x_2x_3x_3'\xi_2'(0) - x_1x_1'x_3\xi_3'(0) \\
&\quad + x_1x_1x_3'\xi_3'(0) + x_3x_3x_1'\xi_1'(0) - x_1x_3x_3'\xi_1'(0) - x_1x_1'x_2\xi_2'(0) + x_1x_1x_2'\xi_2'(0) \\
&\quad + x_2x_2x_1'\xi_1'(0) - x_1x_2x_2'\xi_1'(0) \\
&= \xi_1'(0)(x_3x_3x_1' - x_1x_3x_3' + x_2x_2x_1' - x_1x_2x_2') \\
&\quad + \xi_2'(0)(x_3x_3x_2' - x_2x_3x_3' - x_1x_1'x_2 + x_1x_1x_2') \\
&\quad + \xi_3'(0)(-x_2x_2'x_3 + x_2x_2x_3' - x_1x_1'x_3 + x_1x_1x_3') \\
&= \xi_1'(0)[x_1'(x_2^2 + x_3^2) - x_1(x_2x_2' + x_3x_3')] + \xi_2'(0)[x_2'(x_1^2 + x_3^2) - x_2(x_1x_1' + x_3x_3')] \\
&\quad \xi_3'(0)[x_3'(x_1^2 + x_2^2) - x_3(x_1x_1' + x_2x_2')] \\
&= \xi_1'(0)[x_1'(1 - x_1^2) - x_1(-x_1x_1')] + \xi_2'(0)[x_2'(1 - x_2^2) - x_2(-x_2x_2')] \\
&\quad + \xi_3'(0)[x_3'(1 - x_3^2) - x_3(-x_3x_3')] \\
&= \xi_1'(0)x_1' + \xi_2'(0)x_2' + \xi_3'(0)x_3' \\
&= \langle (\xi_1'(0), \xi_2'(0), \xi_3'(0)), (x_1', x_2', x_3') \rangle \\
&= \langle T, v \rangle = \kappa,
\end{aligned}$$

onde  $v = (\xi_1'(0), \xi_2'(0), \xi_3'(0))$ . Portanto, segue de (1-4) em  $t = 0$  que (2-1) é válido. Reciprocamente, seja  $X(s)$  uma curva em  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  p.c.a. tal que

$$\kappa_g = \langle T, v \rangle,$$

para algum vetor  $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . A menos de isometria, podemos considerar que  $v = a(0, 0, 1) = ae_3$ , para  $a > 0$ . Logo,

$$\kappa_g(s) = ax_3'(s), \text{ para todos } s \in I.$$

Defina  $\hat{X}^t(s) = A(t)X(s)$ , onde

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos(at) & -\sin(at) & 0 \\ \sin(at) & \cos(at) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2-2)$$

Nosso objetivo é demonstrar que  $\hat{X}^t$  é uma solução do fluxo redutor de curvas. Observe que  $\hat{\kappa}_g^t(s) = \kappa_g(s)$ , uma vez que isometrias preservam as curvaturas. Além disso, temos que

$$\hat{N}^t(s, 0) = N(s) = T(s) \wedge X(s) = \underbrace{(x'_2x_3 - x_2x'_3)}_{n_1}, \underbrace{(-x'_1x_3 + x_1x'_3)}_{n_2}, \underbrace{(x'_1x_2 - x_1x'_2)}_{n_3}$$

e  $\hat{N}^t(s) = A(t)N(s)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Dessa forma, omitindo o  $s$  nas contas, temos

$$\begin{aligned} \hat{N}(s) &= A(t)N(s) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(at) & -\sin(at) & 0 \\ \sin(at) & \cos(at) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \\ &= (\cos(at)n_1 - \sin(at)n_2, \sin(at)n_1 + \cos(at)n_2, n_3). \end{aligned}$$

Além disso,

$$X(s) = (x_1, x_2, x_3) \quad \text{e} \quad A'(t) = \begin{pmatrix} -a \sin at & -a \cos at & 0 \\ a \cos at & -a \sin at & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, derivando  $\hat{X}^t$ , obtemos

$$\frac{\partial \hat{X}}{\partial t}(s, t) = A'(t)X(s) = a(-\sin(at)x_1 - \cos(at)x_2, \cos(at)x_1 - \sin(at)x_2, 0).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial \hat{X}}{\partial t}(s, t), \hat{N}(s, t) \right\rangle &= a \left[ (-\sin(at)x_1 - \cos(at)x_2)(\cos(at)n_1 - \sin(at)n_2) \right. \\
&\quad \left. + (\cos(at)x_1 - \sin(at)x_2)(\sin(at)n_1 + \cos(at)n_2) \right] \\
&= a \left[ (-\sin(at)x_1 - \cos(at)x_2)(x'_2x_3 - x_2x'_3) \right. \\
&\quad \left. + (\cos(at)x_1 - \sin(at)x_2)(-x'_1x_3 + x_1x'_3) \right] \\
&= a [\sin^2(at)x_1(-x'_1x_3 + x_1x'_3) - \cos^2(at)x_2(x'_2x_3 - x_2x'_3) \\
&\quad + \cos^2(at)x_1(x'_1x_3 + x_1x'_3) - \sin^2(at)x_2(x'_2x_3 - x_2x'_3)] \\
&= a [x_1(-x'_1x_3 + x_1x'_3) - x_2(x'_2x_3 - x_2x'_3)] \\
&= a [x'_3(x_1^2 + x_2^2) - x_3(x_1x'_1 + x_2x'_2)] \\
&= a [x'_3(1 - x_3^2) - x_3(-x_3x'_3)] \\
&= ax'_3 = \kappa = \hat{\kappa}^t.
\end{aligned}$$

□

O valor de  $a$  representa a velocidade angular com que o sóliton do FRC na esfera está girando ao longo do fluxo.

Observe que o Teorema 2.1 é um caso particular do Teorema 3.1. De fato, dada uma curva na esfera unitária  $\mathbb{S}^2$ , parametrizada por

$$X(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u),$$

temos,  $T = X' = u'X_u + v'X_v$  o vetor tangente a curva, é dado por

$$T = (u' - \sin u \cos v - v' \cos u \sin v, -u' \sin u \sin v + v' \cos u \cos v, u' \cos u).$$

Assumindo  $X$  nas hipóteses do Teorema 2.1 e a menos de isometria tome  $v = a(0, 0, 1)$ , a partir de (2-1) temos que

$$\kappa_g = \langle T, v \rangle = a \cos uu' = a\phi u',$$

obtendo assim (3-11).

## 2.1 Caracterização dos Sólitons do FRC na Esfera

Todos os resultados dessa seção podem ser encontrados em [8]. No Teorema 2.1 vimos que as soluções sólitons não triviais para o FRC na esfera se restringe

em descrever todas as curvas não geodésicas que satisfazem (2-1) para algum  $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . O próximo resultado define (2-1) em termos de um sistema de equações diferenciais.

**Proposição 2.2** *Seja  $X : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco não geodésica e  $a > 0$ . Defina as funções*

$$\tau(s) = \langle T(s), e_3 \rangle \quad \nu(s) = \langle N(s), e_3 \rangle \quad \alpha(s) = \langle X(s), e_3 \rangle, \quad (2-3)$$

onde  $T$  e  $N$  são os campos unitários tangente e normal a  $X$ , respectivamente. Então

$$\kappa_g(s) = a\tau(s), \quad (2-4)$$

para todo  $s \in I$ , se, e somente se, as funções  $\tau, \nu$  e  $\alpha$  satisfazem o sistema

$$\begin{cases} \tau' = a\tau\nu - \alpha, \\ \nu' = -a\tau^2, \\ \alpha' = \tau, \end{cases} \quad (2-5)$$

com condição inicial  $(\tau(0), \nu(0), \alpha(0))$  satisfazendo  $\tau^2(0) + \nu^2(0) + \alpha^2(0) = 1$ .

*Demonstração.* Suponha  $\kappa_g(s) = a\tau(s)$ , para todo  $s \in I$ . Por uma aplicação direta das equações de Darboux (1-3), e derivando as funções (2-3) temos

$$\begin{aligned} \tau' &= \langle T', e_3 \rangle = \kappa_g \langle N, e_3 \rangle - \langle X, e_3 \rangle \\ \nu' &= \langle N', e_3 \rangle = -\kappa_g \langle T, e_3 \rangle \\ \alpha' &= \langle X', e_3 \rangle. \end{aligned}$$

Dessa forma, as funções (2-3) satisfazem,

$$\begin{cases} \tau'(s) = \kappa_g(s)\nu(s) - \alpha(s), \\ \nu'(s) = -\kappa_g(s)\tau(s), \\ \alpha'(s) = \tau(s). \end{cases} \quad (2-6)$$

Substituindo  $\kappa_g = a\tau$  no sistema, obtemos (2-5).

Reciprocamente, suponha as funções  $\tau, \nu$  e  $\alpha$  satisfazendo (2-5). Igualando com (2-6), temos

$$\begin{cases} a\tau\nu - \alpha = \kappa_g\nu - \alpha, \\ -a\tau^2 = -\kappa_g\tau, \end{cases}$$

equivalentemente,

$$(a\tau - \kappa_g)\nu = 0 \quad \text{e} \quad (a\tau - \kappa_g)\tau = 0.$$

Observe que, quando  $(a\tau - \kappa_g) \neq 0$ , temos  $\nu = 0$  e  $\tau = 0$  se anulando simultaneamente em  $\pm e_3 = (0, 0, \pm 1)$ , pois pela condição inicial teremos  $\alpha = \pm 1$ , caso contrário segue o resultado  $\kappa_g = a\tau$ .

□

A seguir estudaremos o comportamento dos sólitons do FRC na esfera usando a Proposição 2.2.

**Proposição 2.3** *Dada uma solução  $(\tau(s), \nu(s), \alpha(s))$  para o sistema (2-5) em um intervalo  $J$ , com  $a > 0$  e condição inicial  $(\tau(0), \nu(0), \alpha(0))$  satisfazendo  $\tau^2(0) + \nu^2(0) + \alpha^2(0) = 1$ , existe uma curva suave  $X : J \rightarrow \mathbb{S}^2$  parametrizada pelo comprimento de arco  $s$  tal que seus campos de vetores unitários tangente e normal  $T$  e  $N$  satisfazem (2-3).*

*Demonstração.* Como  $(\tau(s), \nu(s), \alpha(s))$  satisfaz (2-5), então

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(\tau^2(s) + \nu^2(s) + \alpha^2(s)) &= 2\tau(s)\tau'(s) + 2\nu(s)\nu'(s) + 2\alpha(s)\alpha'(s) \\ &= 2\tau(s)(a\tau(s)\nu(s) - \alpha(s)) + 2\nu(s)(-a\tau^2(s)) \\ &\quad + 2\alpha(s)\tau(s) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, pela condição inicial implica que  $\tau^2(s) + \nu^2(s) + \alpha^2(s) \equiv 1$  é constante para todo  $s$ .

□

Dessa forma, pelo Teorema 1.1 e por movimentos rígidos existe uma única curva  $X : J \rightarrow \mathbb{S}^2$  cuja curvatura é  $\kappa_g(s) = a\tau(s)$ ; i.e.,  $X(s), N(s), T(s)$  satisfazem as equações de Darboux.

Além disso, a curva  $X(s)$  é determinada unicamente pelas condições iniciais ortonormais  $T(0), N(0), X(0)$  que pode ser escolhido tal que

$$\tau(0)T(0) + \nu(0)N(0) + \alpha(0)X(0) = e_3.$$

Derivando a expressão  $\tau(s)T(s) + \nu(s)N(s) + \alpha(s)X(s)$ , usando (2-5) e assumindo

$\kappa_g = a\tau$ , temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}(\tau T + \nu N + \alpha X) &= \tau' T + \tau T' + \nu' N + \nu N' + \alpha' X + \alpha X' \\
&= (a\tau\nu - \alpha)T + \tau(\kappa_g N - X) + (-a\tau^2)N \\
&\quad + \nu(-\kappa_g T) + \tau X + \alpha T \\
&= a\tau\nu T + \tau\kappa_g N - a\tau^2 N - \nu\kappa_g T \\
&= 0,
\end{aligned}$$

para todo  $s$ . Assim,  $\tau(s)T(s) + \nu(s)N(s) + \alpha(s)X(s) \equiv e_3$  e portanto, (2-3) é satisfeito.

Iremos estudar o comportamento qualitativo das soluções sóliton do FRC na esfera e para isso considere a seguinte observação:

**Observação 2.1.1** *Seja  $X(s)$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ .*

- (i) *Seja  $\Gamma$  a geodésia de  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  ortogonal a  $e_3$ , chamado de equador.*
- (ii) *Seja  $H_n$  (resp.,  $H_s$ ) o hemisfério sem a fronteira delimitado por  $\Gamma$  que contém o ponto  $e_3$  (resp.,  $-e_3$ ), o qual é chamado de hemisfério norte (resp., hemisfério sul).*

*As funções  $\tau, \nu$ , e  $\alpha$ , definidas por (2-3), tem as seguintes interpretações geométricas:*

- (1) *As funções  $\tau, \nu$ , e  $\alpha$ , são os cossenos dos ângulos entre  $e_3$  e os vetores  $T, N$  e  $X$ , respectivamente. Uma vez que as funções são dadas por (2-3) implicará que cada uma é limitada por 1;*
- (2)  *$\alpha$  é a função altura (com sinal) em relação a  $e_3$ ;*
- (3)  *$X(s) \in \Gamma$  se, e somente se,  $\alpha(s) = 0$ ;*
- (4)  *$X(s) \in H_n$  (resp.,  $X(s) \in H_s$ ) se, e somente se,  $\alpha(s) > 0$  (resp.,  $\alpha(s) < 0$ );*
- (5) *Se  $X$  satisfaz (2-4), então  $|\kappa_g| \leq a$ .*

A partir de agora usaremos a notação da Proposição 2.2. Começando por definir os autovalores dos pontos críticos do campo de vetores sobre a esfera unitária definida por (2-5). Isto nos permite entender o comportamento das curvas integrais desse campo.

Introduziremos uma série de lemas que auxiliará na demonstração do principal Teorema 2.13 desta seção.

**Lema 2.4** *Seja  $a > 0$  uma constante e seja  $\psi : \mathbb{S}^2 \rightarrow T\mathbb{S}^2$  um campo definido na esfera unitária por*

$$\psi(\tau, \nu, \alpha) = (a\tau\nu - \alpha, -a\tau^2, \tau). \quad (2-7)$$

*Então os pontos singulares de  $\psi$  são  $\pm e_2 = (0, \pm 1, 0)$ , e os autovalores de  $d\psi_{e_2}$  (resp.,  $d\psi_{-e_2}$ ) são*

$$\lambda = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \quad (\text{resp.}, \lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}). \quad (2-8)$$

*Se  $0 < a < 2$  então os autovalores de  $\psi$  são números complexos, e se  $a \geq 2$ , então os autovalores são números reais.*

*Demonstração.* Os pontos singulares de  $\psi$  são  $\psi(\tau, \nu, \alpha) = (0, 0, 0)$ , i.e.,

$$\begin{cases} a\tau\nu - \alpha = 0, \\ \tau = 0, \end{cases}$$

ou seja,  $\tau = \alpha = 0$  e pela condição inicial  $\nu = \pm 1$ . Portanto, os pontos singulares de  $\psi$  são  $\pm e_2 = (0, \pm 1, 0)$ .

Além disso, a diferencial de  $\psi$  é dada por

$$d\psi = \begin{pmatrix} a\nu & a\tau & -1 \\ -2a\tau & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicando no ponto  $e_2$ , temos

$$d\psi_{e_2} = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto,  $\lambda$  é um autovalor de  $d\psi_{e_2}$  se existe  $v \in T_{e_2}\mathbb{S}^2 = \{v = (v_1, 0, v_3) : v_1, v_3 \in \mathbb{R}\}$  tal que  $d\psi_{e_2}(v) = \lambda v$ , i.e.,

$$d\psi_{e_2}(v) = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ v_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

isso implica que,

$$\begin{cases} av_1 - v_3 = \lambda v_1, & (i) \\ v_1 = \lambda v_3. & (ii) \end{cases}$$

Considerando  $v_3 \neq 0$ , caso contrário, pelo sistema acima teríamos  $v_3 = v_1 = 0$ . Substituindo a equação (ii) na equação (i), obtemos a seguinte equação:

$$\begin{aligned} a\lambda v_3 - v_3 &= \lambda^2 v_3 \\ \lambda^2 v_3 - a\lambda v_3 + v_3 &= 0 \\ (\lambda^2 - a\lambda + 1)v_3 &= 0. \end{aligned}$$

Ou seja,  $\lambda^2 - a\lambda + 1 = 0$ , onde concluímos que  $\lambda$  é

$$\lambda = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}.$$

De forma análoga se mostra para  $-e_2$ , onde

$$d\psi_{-e_2} = \begin{pmatrix} -a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto,  $\lambda$  é um autovalor de  $d\psi_{-e_2}$  se existe  $v \in T_{-e_2}\mathbb{S}^2 = \{v = (v_1, 0, v_3) : v_1, v_3 \in \mathbb{R}\}$  tal que

$$d\psi_{-e_2}(v) = \begin{pmatrix} -a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ v_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

semelhantemente, resolvendo o sistema obtido a partir da equação acima, teremos  $\lambda^2 + a\lambda + 1 = 0$ . Onde concluímos que  $\lambda$  é

$$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}.$$

□

Note que, quando  $0 < a < 2$ , os autovalores da diferencial do campo  $\psi$  nos pontos singulares são complexos. Assim, as curvas integrais se movimentam em forma espiral, indo de  $-e_2$  até  $e_2$  e intersectando a geodésica  $\Gamma$  (quando  $\alpha = 0$ ) infinitas vezes. Por outro lado, quando  $a \geq 2$ , os autovalores são números reais não nulos, e as curvas integrais saem de  $-e_2$  e chegam em  $e_2$  de maneira "bem comportada", desde que estejam suficientemente próximas desses pontos.

O retrato de fase do campo  $\psi$  (2-7) nos permitirá compreender melhor o comportamento dos sólitons.

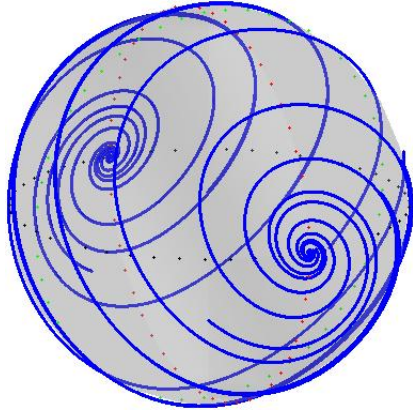


Figura 2.1:  $a < 2$

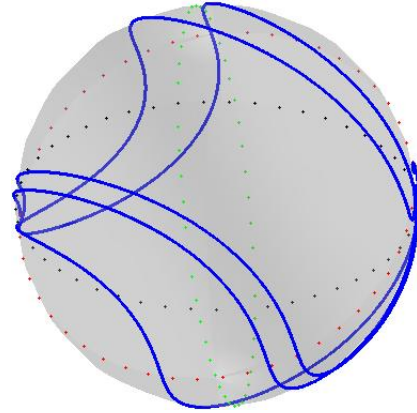


Figura 2.2:  $a \geq 2$

Nosso próximo lema descreve a geometria da curva  $X$  nos pontos críticos da função altura  $\alpha$ .

**Lema 2.5** *Seja  $X : J \rightarrow \mathbb{S}^2$  uma curva não geodésica nas condições da Proposição 2.2. Se  $s_0$  é um ponto crítico de  $\alpha(s)$ , então:*

- (1)  $X(s_0) \notin \Gamma$ ;
- (2)  $X(s_0) \in H_n$  (resp.,  $X(s_0) \in H_s$ ) se, e somente se,  $s_0$  é um ponto de máximo local (resp., mínimo) de  $\alpha$ ;
- (3)  $X(s_0) \in H_n$  (resp.,  $X(s_0) \in H_s$ ) se, e somente se, em uma vizinhança de  $X(s_0)$  a curva  $X$  está abaixo (resp., acima) do paralelo (círculo de  $\mathbb{S}^2$  ortogonal a  $e_3$ ) que passa por  $X(s_0)$ .

*Demonstração.* (1) Seja  $s_0$  ponto crítico de  $\alpha$  e suponha por absurdo que  $X(s_0) \in \Gamma$ . Então  $\alpha(s_0) = \alpha'(s_0) = 0$  e do sistema (2-5) temos  $\tau(s_0) = \alpha'(s_0) = 0$ , ou seja, da condição inicial  $\tau^2(s_0) + \nu^2(s_0) + \alpha^2(s_0) = 1$  temos  $\nu(s_0) = \pm 1$ . Com essa condição inicial, a única solução do sistema (2-6) é  $\alpha(s) = 0$  para todo  $s$ , pois observe que a geodésica  $\Gamma$  satisfaz  $\tau^2(s_0) + \nu^2(s_0) + \alpha^2(s_0) = 1$ ,  $\nu(s_0) = \pm 1$  e também o sistema (2-6). Portanto, pela unicidade temos  $X(s) \in \Gamma$  para todo  $s$ , absurdo!

(2) Assumindo  $s_0$  ponto crítico de  $\alpha$ , e usando o fato de que  $\alpha'(s) = \tau(s)$ , temos

$$\begin{aligned} \alpha''(s) = \tau'(s) &= a\tau(s)\nu(s) - \alpha(s) \\ &= a\alpha'(s)\nu(s) - \alpha(s). \end{aligned}$$

Considerando  $s = s_0$ , temos

$$\alpha''(s_0) = -\alpha(s_0).$$

Note que  $\alpha(s_0) \neq 0$ , pois caso contrário teríamos  $X(s_0) \in \Gamma$ . Então pela Observação 2.1.1 segue o resultado.

(3) Como  $\alpha$  é a função altura de  $X$  com respeito a  $e_3$  temos que  $X$  está abaixo (resp., acima) do paralelo que passa por  $X(s_0)$  se, e somente se,  $s_0$  é ponto de máximo local de  $\alpha$ . Portanto, o item (2) implica no item (3). □

Os dois lemas a seguir consideram os pontos críticos das funções  $\tau$  e  $\nu$  definido por (2-3).

**Lema 2.6** *Seja  $X : J \rightarrow \mathbb{S}^2$  uma curva não geodésica nas condições da Proposição 2.2. Se  $s_0$  é um ponto crítico de  $\tau(s) = \langle T(s), e_3 \rangle$ , então  $s_0$  é um ponto de mínimo local (resp., máximo local) de  $\tau$  se, e somente se,  $\tau(s_0) < 0$  (resp.,  $\tau(s_0) > 0$ ).*

*Demonstração.* Assumindo que  $s_0$  é ponto crítico de  $\tau$  e derivando  $\tau'(s) = a\tau(s)\nu(s) - \alpha(s)$  temos

$$\tau''(s) = a\tau'(s)\nu(s) + a\tau(s)\nu'(s) - \alpha'(s).$$

Aplicando em  $s = s_0$  e usando (2-5),

$$\begin{aligned} \tau''(s_0) &= a\tau(s_0)\nu'(s_0) - \alpha'(s_0) \\ &= a\tau(s_0)(-a\tau^2(s_0)) - \tau(s_0) \\ &= -\tau(s_0)(a\tau^2(s_0) + 1). \end{aligned}$$

Assim,  $(a\tau^2(s_0) + 1) > 0$ , logo se  $\tau''(s_0) = 0$ , temos que  $\tau(s_0) = 0$ , como  $\tau'(s_0) = 0$  do sistema (2-5) implica que  $0 = \alpha(s_0) = \alpha'(s_0)$  o que é uma contradição, pois  $X(s_0) \in \Gamma$  e pelo Lema 2.5 item (1) mostramos que para pontos críticos de  $\alpha$  tem se  $X(s_0) \notin \Gamma$ .

Logo,  $\tau''(s_0) \neq 0$ , portanto,  $\tau''(s_0) > 0$  (resp.,  $\tau''(s_0) < 0$ ) se, e somente se,  $\tau(s_0) < 0$  (resp.,  $\tau(s_0) > 0$ ). □

**Lema 2.7** *Seja  $X : J \rightarrow \mathbb{S}^2$  uma curva não geodésica nas condições da Proposição 2.2. Então  $\nu(s) = \langle N(s), e_3 \rangle$  é uma função não crescente. Além disso, se  $s_0$  é um ponto crítico de  $\nu$ , então  $s_0$  é um ponto de inflexão de  $\nu$ .*

*Demonstração.* De (2-5) temos  $\nu'(s) = -a\tau^2(s) = -a(\alpha'(s))^2 \leq 0$  para todo  $s$ , então  $\nu$  é uma função decrescente. Seja  $s_0$  ponto crítico de  $\nu$ . De (2-5), temos  $\tau(s_0) = 0$  e  $\alpha'(s_0) = 0$ . Além disso, as duas primeiras derivadas de  $\nu'(s) = -a\tau^2(s)$  em  $s = s_0$  são

$$\nu''(s_0) = -2a\tau(s_0)\tau'(s_0) = 0,$$

e

$$\begin{aligned}\nu'''(s) &= -2a(\tau'(s))^2 - 2a\tau(s)\tau''(s) \\ \nu'''(s_0) &= -2a(\tau'(s_0))^2 \\ &= -2a\alpha^2(s_0).\end{aligned}$$

Como  $\alpha'(s_0) = 0$ , segue do Lema 2.5 item 1) que  $X(s_0) \notin \Gamma$ ; isto é,  $\alpha(s_0) \neq 0$ . Portanto, temos  $\nu'(s_0) = \nu''(s_0) = 0$  e  $\nu'''(s_0) \neq 0$ , logo  $s_0$  é um ponto de inflexão de  $\nu$ .

□

Por substituição direta em (2-5) temos o seguinte:

**Observação 2.1.2** *Seja  $X : J \rightarrow \mathbb{S}^2$  uma curva não geodésica nas condições da Proposição 2.2. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (1)  $\tau(s_0) = 0$ ;
- (2)  $\nu'(s_0) = 0$ ;
- (3)  $\alpha'(s_0) = 0$ .

Dada as condições da Proposição 2.2 temos que a função  $\alpha$  não pode ser constante, pois supondo  $\alpha(s) = c$  para todo  $s \in (s_1, s_2)$ , temos  $\tau(s) = \alpha'(s) = 0$  e  $\kappa_g(s) = a\tau(s) = 0$ , para todo  $s \in (s_1, s_2)$ , no qual teríamos  $X(s)$  uma geodésica no intervalo  $(s_1, s_2)$ .

Um sólito nem sempre intersecta o equador duas vezes, mas quando isso acontece a curva tem um comportamento simples entre dois pontos consecutivos de intersecção, como mostraremos no seguinte lema.

**Lema 2.8** *Seja  $X : J \rightarrow \mathbb{S}^2$  uma curva não geodésica nas condições da Proposição 2.2. Então entre dois pontos consecutivos onde  $X$  intersecta o equador existe um único ponto crítico  $s_0$  da função altura  $\alpha(s)$ . Além disso,  $\kappa_g(s_0) = 0$ .*

*Demonstração.* Seja  $s_1 < s_2$  dois pontos onde  $X$  intersecta  $\Gamma$ . Pela Observação 2.1.1 item (3), temos que  $X(s) \in \Gamma$  se, e só se,  $\alpha(s) = 0$ , ou seja,  $\alpha(s_1) = \alpha(s_2) = 0$  e

$\alpha(s) \neq 0$  para todo  $s \in (s_1, s_2)$ . Então pelo Teorema de Rolle existe  $s_0 \in (s_1, s_2)$  tal que  $\alpha'(s_0) = 0$ .

Como  $\alpha$  não muda de sinal em  $(s_1, s_2)$ , segue do Lema 2.5 item (2) que o ponto crítico de  $\alpha$  em  $(s_1, s_2)$  é um máximo ou mínimo, dependendo se  $X((s_1, s_2))$  está contido em  $H_n$  ou  $H_s$ , respectivamente.

Suponha agora que existam dois pontos críticos de  $\alpha$  em  $(s_1, s_2)$ , sendo eles  $s_0$  e  $\hat{s}_0$ , como  $\alpha$  é não constante e positiva se  $X((s_1, s_2)) \in H_n$  (resp., negativa se  $X((s_1, s_2)) \in H_s$ ), então  $s_0$  e  $\hat{s}_0$  são pontos de máximo (resp., mínimo) em  $(s_1, s_2)$  e pela continuidade de  $\alpha$  existe um ponto  $s^* \in (s_0, \hat{s}_0)$  que é mínimo em  $H_n$  (resp., máximo em  $H_s$ ) contrariando o Lema 2.5 item (2). Portanto obtemos a unicidade do ponto crítico.

Além disso,  $\kappa_g(s_0) = a\tau(s_0) = a\alpha'(s_0) = 0$ .

□

**Lema 2.9** *Seja  $X : J \rightarrow \mathbb{S}^2$  uma curva não geodésica nas condições da Proposição 2.2. Se  $s_1 < s_2$  são dois pontos críticos de  $\alpha$ , tal que  $\nu(s_i) > 0$  (resp.,  $\nu(s_i) < 0$ ), para  $i = 1, 2$ , então  $|\alpha(s_1)| \leq |\alpha(s_2)|$  (resp.,  $|\alpha(s_1)| \geq |\alpha(s_2)|$ ).*

*Demonstração.* Defina  $f(s) = \sqrt{1 - \nu^2(s)}$ . Como  $\nu$  é uma função decrescente, segue que  $f$  é uma função crescente (resp. decrescente) no intervalo onde  $\nu$  é positiva (resp., negativa).

Além disso, como  $\tau^2(s) + \nu^2(s) + \alpha^2(s) = 1$ , segue que

$$\alpha^2(s) = 1 - \tau^2(s) - \nu^2(s),$$

da Observação 2.1.2 e tomando  $s = s_i$ , para  $i = 1, 2$ , temos

$$|\alpha(s_i)| = \sqrt{1 - \nu^2(s_i)} = f(s_i).$$

Portanto, se  $\nu(s_i) > 0$  (resp.,  $\nu(s_i) < 0$ ), temos

$$|\alpha(s_1)| = f(s_1) \leq f(s_2) = |\alpha(s_2)|, \quad (\text{resp., } |\alpha(s_1)| = f(s_1) \geq f(s_2) = |\alpha(s_2)|).$$

□

**Lema 2.10** *Seja  $X : J \rightarrow \mathbb{S}^2$  uma curva não geodésica nas condições da Proposição 2.2. Então  $X(s)$  é assintótica a  $\Gamma$  quando  $s \rightarrow \pm\infty$ .*

*Demonstração.* Segue da Observação 2.1.1 item (3) basta provar que  $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \alpha(s) = 0$ . Começaremos provando que

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \tau(s) = 0. \quad (2-9)$$

Como  $\nu$  é decrescente e limitada  $|\nu| \leq 1$ , temos que o limite de  $\nu$  existe. Além disso,

$$\begin{aligned} \nu' &= -a\tau^2, \\ \nu'' &= -2a\tau\tau', \\ |\nu''| &= |2a\tau(a\tau\nu - \alpha)| \\ &\leq 2a|\tau|(a|\tau\nu| + |\alpha|) \\ &\leq 2a(a+1). \end{aligned}$$

Ou seja,  $\nu'$  é diferenciável com derivada limitada, portanto,  $\nu'$  é uniformemente contínua, conseqüentemente pelo Lema de Barbalat 1.1,

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \nu'(s) = 0.$$

Como  $\nu'(s) = -a\tau^2(s)$ , temos que  $\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \tau(s) = 0$ .

Agora provaremos que

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \tau'(s) = 0. \quad (2-10)$$

Tomando a segunda derivada de  $\tau$  e usando (2-5), temos

$$\begin{aligned} \tau'' &= a\tau'\nu + a\tau\nu' - \alpha' \\ &= a^2\tau\nu^2 - a\alpha\nu - a^2\tau^3 - \tau, \\ |\tau''| &\leq a^2|\tau\nu^2| + a|\alpha\nu| + a^2|\tau^3| + |\tau| \\ &\leq 2a^2 + a + 1. \end{aligned}$$

Isso implica que  $\tau'$  é uniformemente contínua, então pelo Lema de Barbalat 1.1 obtemos (2-10).

Portanto, de (2-5), (2-9), (2-10) e como  $\nu$  é limitado, temos que

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \alpha(s) = \lim_{s \rightarrow \pm\infty} (a\tau(s)\nu(s) - \tau'(s)) = 0.$$

□

**Lema 2.11** *Seja  $X : J \rightarrow \mathbb{S}^2$  uma curva não geodésica nas condições da Proposição 2.2. Se existe  $s_0 \in \mathbb{R}$ , tal que  $X((s_0, +\infty)) \subset H_n$  (resp.,  $X((s_0, +\infty)) \subset H_s$ ). Então existe  $s_* > s_0$  tal que  $\alpha$  é decrescente (resp., crescente) em  $(s_*, +\infty)$ .*

*Demonstração.* Primeiro observe que existe no máximo um ponto crítico de  $\alpha$  em  $(s_*, +\infty)$ . De fato, suponha que existam dois pontos críticos  $s_1, s_2$  de  $\alpha$  em  $(s_*, +\infty)$ . Pelo Lema 2.5 item (2), estes dois são pontos de máximo (resp., mínimo), assim existe um ponto de mínimo (resp., máximo) de  $\alpha$  entre  $s_1$  e  $s_2$ , contradizendo o Lema 2.5, item (2).

Assim, existe um  $s_* \in (s_0, +\infty)$  tal que  $\alpha$  é estritamente monótona em  $(s_0, +\infty)$ . Como a função  $\alpha$  é positiva (resp., negativa) neste intervalo, o limite vai para zero quando  $s \rightarrow +\infty$ , temos que  $\alpha$  é decrescente (resp., crescente) neste intervalo. □

De forma análoga, temos o seguinte lema.

**Lema 2.12** *Seja  $X : J \rightarrow \mathbb{S}^2$  uma curva não geodésica nas condições da Proposição 2.2. Se existe  $s_0 \in \mathbb{R}$ , tal que  $X((-\infty, s_0)) \subset H_n$  (resp.,  $X((-\infty, s_0)) \subset H_s$ ). Então existe  $s_* < s_0$  tal que  $\alpha$  é crescente (resp., decrescente) em  $(-\infty, s_*)$ .*

O teorema a seguir descreve o comportamento qualitativo das soluções sóliton para o FRC, dependendo principalmente da norma do vetor  $v$ .

**Teorema 2.13** *Para cada  $v \in \mathbb{R}^3$  não nulo, existe uma família a dois parâmetro não trivial de sólitos do fluxo redutor de curvas na esfera  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2$ , definida em  $\mathbb{R}$ . Os dois fins de cada curva são assintóticas a mesma geodésica  $\Gamma$  ortogonal a  $v$ .*

*Além disso, considere a função altura  $\alpha(s) = \langle X(s), \frac{v}{\|v\|} \rangle$  e a função  $\nu(s) = \langle N(s), \frac{v}{\|v\|} \rangle$ :*

- *Assuma que  $X$  intersecta  $\Gamma$  em mais de um ponto. Então entre dois pontos consecutivos existe um único ponto crítico  $s_0$  de  $\alpha$  que é máximo local (resp., mínimo) se  $\alpha(s_0) > 0$  (resp.,  $\alpha(s_0) < 0$ );*
- *Se  $0 < \|v\| < 2$ , então  $X$  intersecta  $\Gamma$  em infinitos pontos. Além disso, a norma da função altura  $|\alpha|$  nos pontos críticos de  $\alpha$  forma uma sequência crescente quando  $\nu(s) > 0$  e decrescente quando  $\nu(s) < 0$ ;*
- *Se  $\|v\| \geq 2$ , Então  $X$  intersecta no máximo em um número finitos de pontos, e cada um dos fins de  $X$  converge para  $\Gamma$  sem se auto intersectar.*

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, assuma  $v = ae_3$ , onde  $a > 0$ . Sob as condições da Proposição 2.2, temos que  $\kappa_g(s) = a\tau(s)$  e as funções  $\tau, \nu, \alpha$  satisfazem (2-5).

Esse sistema define o campo

$$\psi(\tau, \nu, \alpha) = (a\tau\nu - \alpha, -a\tau^2, \tau),$$

sobre a esfera unitária, como no Lema 2.4. Considerando o retrato de fase de  $\psi$ , cada curva integral de  $\psi$  corresponde a um sóliton do FRC. Como consequência da Proposição 2.2 para cada  $a > 0$  temos uma família a dois-parâmetros dessas curvas  $X$ . Os dois parâmetros são dados pelas condições iniciais  $(\tau(0), \nu(0), \alpha(0))$  tal que  $\tau^2(0) + \nu^2(0) + \alpha^2(0) = 1$ .

Como a variedade em questão é compacta, o campo  $\psi$  é completo, o que implica que cada sóliton está definido para todo  $s \in \mathbb{R}$ . Em conjunto com o Teorema 1.1, existem as funções  $\tau, \nu$  e  $\alpha$ . Além disso, conforme o Lema 2.10, os extremos de  $X$  são assintóticos a  $\Gamma$  quando  $s \rightarrow \pm\infty$ .

Pelo Lema 2.8, entre dois pontos onde  $X$  intersecta  $\Gamma$  a função altura  $\alpha$  possui um único ponto crítico sendo de máximo local se estiver no hemisfério norte e de mínimo local se estiver no hemisfério sul.

Se  $0 < a < 2$ , pelo Lema 2.4  $X$  intersecta infinitas vezes  $\Gamma$ . Além disso, do Lema 2.9 a norma de  $\alpha$  nos pontos críticos de  $\alpha$  forma uma sequência estritamente crescente quando  $\nu$  é positivo e uma sequência estritamente decrescente quando  $\nu$  é negativo. Note que, por (2-5) implica que  $\nu$  é estritamente decrescente, e pelo Lema 2.10 temos

$$\lim_{s \rightarrow \pm\infty} \nu(s) = \mp 1,$$

portanto,  $\nu$  possui um, e somente um, zero.

Se  $a > 2$ , pelo Lema 2.4 implica que existem  $s_-, s_+ \in \mathbb{R}$  tal que  $\alpha$  tem no máximo um número finito de zeros nos intervalos  $(-\infty, s_-]$  e  $[s_+, +\infty)$ . Suponha que  $\alpha$  tenha uma infinidade de zeros em  $[s_-, s_+]$ , isto é, existem

$$s_- \leq s_1 < s_2 < \cdots < s_n < \cdots \leq s_+,$$

satisfazendo  $\alpha(s_n) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Segue do Lema 2.8, para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe  $s_n^*$ , tal que

$$s_n \leq s_n^* \leq s_{n+1} \quad e \quad \tau(s_n^*) = \alpha'(s_n^*) = 0.$$

Assim, temos as sequências crescentes  $(s_n)$  e  $(s_n^*)$  definidas no compacto  $[s_-, s_+]$ .

Desta forma, existe  $s_0 \in [s_-, s_+]$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n^* = s_0.$$

Pela continuidade de  $\alpha$  e  $\tau$ , implica que

$$\alpha(s_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha(s_n) = 0 \quad \tau(s_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau(s_n^*) = 0.$$

Portanto,  $\nu(s_0) = 1$ , o que é uma contradição. Assim, concluímos que  $\alpha$  zera no máximo em número finito de pontos de  $\mathbb{R}$ . Além disso, os Lemas 2.11 e 2.12, a função altura  $\alpha$  converge para zero de forma estritamente monótona, o que é equivalentemente dizer que os fins de  $X$  converge para o equador  $\Gamma$  sem se auto-intersectar quando  $s \rightarrow \pm\infty$ .

□

A seguir, ilustraremos o Teorema 2.13 com valores distintos da norma do vetor  $v$ . Para isso, apresentaremos um sistema de EDO sendo uma aplicação direta do Teorema 3.1 cuja solução pode ser encontrada em [8].

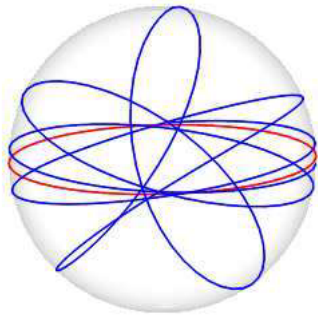
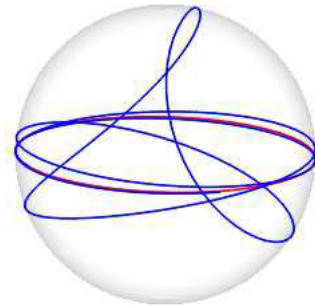
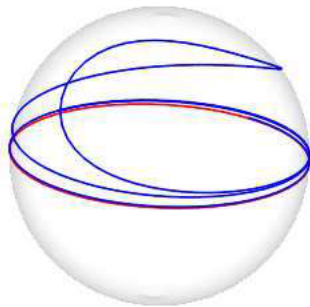
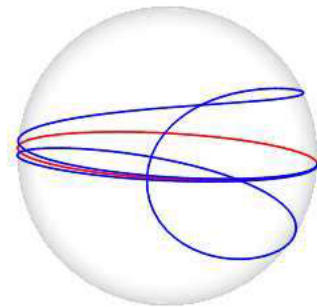
**Proposição 2.14** *Uma curva da esfera  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  parametrizada pelo comprimento de arco*

$$X(s) = (\sin u(s) \cos v(s), \sin u(s) \sin v(s), \cos u(s)) \quad (2-11)$$

*é um sólito do FRC da esfera satisfazendo (2-4) se, e somente se, as funções  $u$  e  $v$  satisfazem*

$$\begin{cases} u'' = v' \sin u (v' \cos u - au' \sin u), \\ v'' = u' (au' - 2v' \cot u). \end{cases} \quad (2-12)$$

Note que ambos os fins de cada curva sólito são assintóticas a geodésica  $\Gamma$  ortogonal ao vetor  $v = \|v\|(0, 0, 1)$ . As imagens foram produzidas por [8].

Figura 2.3:  $a = 0,5$ Figura 2.4:  $a = 1$ Figura 2.5:  $a = 2$ Figura 2.6:  $a = 3$

# Fluxo Redutor de Curvas em Superfícies de Revolução

Todos os resultados descritos nesse capítulo poderão ser encontradas em [17]. Mostraremos que para superfícies de revolução certas soluções sóliton para o FRC são assintóticas aos paralelos que são geodésicas.

Considere a curva geratriz  $\alpha(u) = (\phi(u), 0, \psi(u))$  parametrizada pelo comprimento de arco, tal que  $\phi(u) > 0$ . Seja  $\mathbb{M}^2$  uma superfície de revolução em  $\mathbb{R}^3$ , gerada pela rotação da curva geratriz em torno do eixo  $z$ , parametrizada por

$$X(u, v) = (\phi(u) \cos v, \phi(u) \sin v, \psi(u)), \quad (3-1)$$

onde,  $\phi$  e  $\psi$  são funções suaves, com  $u \in I \subseteq \mathbb{R}$  e  $0 < v < 2\pi$ .

O tensor métrico é dado por

$$g = du^2 + \phi^2(u)dv^2.$$

Considere o seguinte referencial ortonormal

$$\begin{aligned} e_1 &= (\dot{\phi} \cos v, \dot{\phi} \sin v, \dot{\psi}) \\ e_2 &= (-\sin v, \cos v, 0) \\ N &= (-\dot{\psi} \cos v, -\dot{\psi} \sin v, \dot{\phi}), \end{aligned} \quad (3-2)$$

onde  $N = e_1 \wedge e_2$ . Simplificando a notação usaremos

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{du}, \quad \dot{\psi} = \frac{d\psi}{du}, \quad \ddot{\phi} = \frac{d^2\phi}{du^2}, \quad \ddot{\psi} = \frac{d^2\psi}{du^2}.$$

Além disso, a derivada em relação aos parâmetros  $s$  ou  $t$  denotaremos por  $'$ . Por exemplo,

$$u'(s) = \frac{d}{ds}u(s) \quad \text{e} \quad \xi'(t) = \frac{d}{dt}\xi(t).$$

Como a curva geratriz é p.c.a. temos,  $(\dot{\phi})^2 + (\dot{\psi})^2 = 1$ . Derivando essa expressão obtemos  $\dot{\phi}\ddot{\phi} + \dot{\psi}\ddot{\psi} = 0$ . Usando este fato e escrevendo os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais nos termos (3-2), obtemos

$$\begin{aligned} X_u &= (\dot{\phi} \cos v, \dot{\phi} \sin v, \dot{\psi}) = e_1, & X_v &= (-\phi \sin v, \phi \cos v, 0) = \phi e_2, & (3-3) \\ X_{uu} &= (\ddot{\phi} \cos v, \ddot{\phi} \sin v, \ddot{\psi}) = -(\ddot{\phi}\dot{\psi} - \ddot{\psi}\dot{\phi})N, & X_{uv} &= \dot{\phi}e_2, & X_{vv} &= -\phi\dot{\phi}e_1 + \phi\dot{\psi}N. \end{aligned}$$

Considerando  $\mathbb{M}^2$  o espaço ambiente, seja  $\Phi(s) = X(u(s), v(s))$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, então

$$T = u'X_u + v'X_v = ue_1 + \phi v'e_2, \quad (3-4)$$

$$\eta = N \wedge T = -v'\phi e_1 + u'e_2, \quad (3-5)$$

onde  $T = \Phi'$  é o campo vetorial tangente unitário e  $\eta$  é o campo vetorial normal de  $\Phi$  com respeito a  $\mathbb{M}^2$ .

Note que os campos vetoriais  $\{T, \eta, N\}$  formam o triedro de Darboux (1-1) tal que

$$T' = \kappa_g \eta + \kappa_n N, \quad \eta' = -\kappa_g T + \tau N \quad \text{e} \quad N' = -\kappa_n T - \tau \eta, \quad (3-6)$$

onde  $\kappa_g$ ,  $\kappa_n$ , e  $\tau$  são a curvatura geodésica, a curvatura normal, e a torção geodésica de uma curva  $\Phi$ , respectivamente.

Além disso,  $T' = \Phi''$  e usando (3-2), teremos

$$\begin{aligned} T' &= u''X_u + v''X_v + 2u'v'X_{uv} + (u')^2X_{uu} + (v')^2X_{vv} \\ &= [u'' - (v')^2\phi\dot{\phi}]e_1 + [v''\phi + 2u'v'\dot{\phi}]e_2 + [-(u')^2(\ddot{\phi}\dot{\psi} - \dot{\phi}\ddot{\psi}) + (v')^2\phi\dot{\psi}]N. \end{aligned}$$

Da equação (3-6) obtemos,

$$\kappa_g = \langle T', \eta \rangle = (-u''v' + v''u')\phi + v'(1 + (u')^2)\dot{\phi}, \quad (3-7)$$

onde usamos que a curva  $\Phi$  é p.c.a, i.e.,

$$(u')^2 + (v')^2\phi^2 = 1. \quad (3-8)$$

Tomando a derivada de (3-8) em relação a  $s$ , temos

$$u'u'' + v'v''\phi^2 + u'(v')^2\phi\dot{\phi} = 0. \quad (3-9)$$

Uma curva  $\Phi(s) \in \mathbb{M}^2$  é uma rotação sóliton do FRC se satisfazer (1-4) e

(1-5) tal que

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos \xi(t) & -\sin \xi(t) & 0 \\ \sin \xi(t) & \cos \xi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3-10)$$

onde  $\xi$  é uma função suave e  $\xi(0) = 0$ . Essa última condição garante que  $\Phi(s)$  é a condição inicial do FRC.

O teorema a seguir caracteriza os sólitons nas superfícies de revolução.

**Teorema 3.1** *Seja  $\Phi : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}^2$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Então  $\Phi(s) = X(u(s), v(s))$  é um sóliton do FRC se, e somente se,*

$$\kappa_g = a\phi(s)u'(s), \quad (3-11)$$

onde,  $\kappa_g$  é a curvatura geodésica de  $\Phi$  e  $a$  é uma constante. Se  $a = 0$  temos uma geodésica.

*Demonstração.* Seja  $\Phi(s)$  p.c.a uma solução sóliton para o FRC em  $\mathbb{M}^2$ . Então de (1-4), temos

$$\left\langle \frac{\partial \Phi^0}{\partial t}, \eta \right\rangle = \kappa_g, \quad (3-12)$$

onde,  $\kappa_g$  é a curvatura geodésica e  $\eta = -v'\phi e_1 + u'e_2$  o campo normal unitário de  $\Phi$ . Além disso, por ser solução sóliton,  $\hat{\Phi}^t = \hat{R}^t(\Phi)$  (3-10), derivando em  $t$

$$\frac{\partial \Phi^t}{\partial t} = \frac{\partial R(t)\Phi}{\partial t},$$

onde,  $R(t)\Phi = (x \cos \xi(t) - y \sin \xi(t), x \sin \xi(t) + y \cos \xi(t), z)$ , assim

$$\frac{\partial R(t)}{\partial t} = \xi'(t)(-x \sin \xi(t) - y \cos \xi(t), x \cos \xi(t) - y \sin \xi(t), 0),$$

em  $t = 0$ , temos

$$\frac{\partial R(0)}{\partial t} = \xi'(0)(-y, x, 0).$$

Como  $x, y \in \mathbb{M}^2$ , temos

$$x = \phi(u) \cos v \text{ e } y = \phi(u) \sin v,$$

logo

$$\begin{aligned}\frac{\partial R(t)}{\partial t} &= \xi'(0)(-\phi(u) \sin v, \phi(u) \cos v, 0) \\ &= \xi'(0)\phi(u)(-\sin v, \cos v, 0) \\ &= \xi'(0)\phi(u)e_2.\end{aligned}$$

Denotando  $a = \xi'(0)$

$$\frac{\partial R(0)}{\partial t} = a\phi(u)e_2.$$

Substituindo em (3-12) concluímos a primeira parte da prova,

$$\kappa_g = \langle a\phi e_2, -v'\phi e_1 + u'e_2 \rangle = a\phi u'.$$

Reciprocamente, seja  $\Phi(s) = X(u(s), v(s))$  uma curva p.c.a em  $\mathbb{M}^2$  tal que

$$\kappa_g(s) = a\phi(s)u'(s).$$

Como  $\Phi(s)$  é uma curva em  $\mathbb{M}^2$  então as funções  $x(s), y(s), z(s)$  são dadas por (3-1) e o normal unitário  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$  de  $\Phi$  dadas por (3-5). Defina uma família a um parâmetro de curvas  $\hat{\Phi}^t(s) = \hat{R}(t)\Phi(s)$  onde  $\hat{\Phi}^0(s) = \Phi(s)$  e

$$\hat{R}(t) = \begin{pmatrix} \cos at & -\sin at & 0 \\ \sin at & \cos at & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vamos mostrar que  $\Phi^t(s)$  é uma solução para o FRC em  $\mathbb{M}^2$ .

Como  $\hat{R}(t)$  é uma isometria em  $\mathbb{M}^2$ , temos que  $\hat{\kappa}_g^t(s) = \kappa_g(s)$  para todo  $t$ , pois isometrias preservam curvaturas e

$$\begin{aligned}\hat{\eta}^t &= \hat{R}(t)\eta(s) \\ &= \begin{pmatrix} \cos at & -\sin at & 0 \\ \sin at & \cos at & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} \\ &= (\eta_1 \cos at - \eta_2 \sin at, \eta_1 \sin at + \eta_2 \cos at, \eta_3).\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\eta &= (v')\phi e_1 + u'e_2 \\ &= -v'\phi(\dot{\phi} \cos v, \dot{\phi} \sin v, \dot{\psi}) + u'(-\sin v, \cos v, 0) \\ &= \underbrace{(-v'\phi\dot{\phi} \cos v - u' \sin v)}_{\eta_1}, \underbrace{(-v'\phi\dot{\phi} \sin v + u' \cos v)}_{\eta_2}, \underbrace{-v'\phi\dot{\psi}}_{\eta_3}.\end{aligned}$$

Substituindo  $\eta_1, \eta_2$  e  $\eta_3$  em  $\hat{\eta}^t$  temos

$$\begin{aligned}\hat{\eta}^t &= [(-v'\phi\dot{\phi} \cos v - u' \sin v) \cos at - (-v'\phi\dot{\phi} \sin v + u' \cos v) \sin at, \\ &\quad (-v'\phi\dot{\phi} \cos v - u' \sin v) \sin at + (-v'\phi\dot{\phi} \sin v + u' \cos v) \cos at, -v'\phi\dot{\psi}] \\ &= (-v'\phi\dot{\phi} \cos v \cos at - u' \sin v \cos at + v'\phi\dot{\phi} \sin v \sin at - u' \cos v \sin at, \\ &\quad -v'\phi\dot{\phi} \cos v \sin at - u' \sin v \sin at - v'\phi\dot{\phi} \sin v \cos at + u' \cos v \cos at, -v'\phi\dot{\psi}).\end{aligned}$$

Usando as relações trigonométricas

$$\cos a \cos b = \cos(a + b) + \sin a \sin b,$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a,$$

obtemos,

$$\begin{aligned}\hat{\eta}^t &= [-v'\phi\dot{\psi} \cos(at + v) - v'\phi\dot{\psi} \sin at \sin v + v'\phi\dot{\psi} \sin at \sin v \\ &\quad -u'(\sin v \cos at + \cos v \sin at), -v'\phi\dot{\psi}(\cos v \sin at + \sin v \cos at) \\ &\quad -u'(\sin v \sin at) + u'(\cos(at + v) + \sin at \sin v), -v'\phi\dot{\psi}].\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\hat{\eta}^t = (-v'\phi\dot{\psi} \cos(at + v) - u' \sin(at + v), -v'\phi\dot{\psi} \sin(at + v) + u'(\cos(at + v), -v'\phi\dot{\psi}).$$

Além disso,  $\Phi(s) = (x(s), y(s), z(s)) = (\phi \cos v, \phi \sin v, \psi)$  e de (1-5) e usando as relações trigonométricas já explicitadas temos,

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}^t &= R(t)\Phi(s) = (x \cos at - y \sin at, x \sin at + y \cos at, z) \\ &= (\phi \cos v \cos at - \phi \sin v \sin at, \phi \cos v \sin at + \phi \sin v \cos at, \psi) \\ &= (\phi \cos(at + v), \phi \sin(at + v), \psi).\end{aligned}$$

Derivando,

$$\frac{\partial \hat{\Phi}^t}{\partial t}(s) = \frac{\partial R(t)}{\partial t} \Phi(s) = a\phi(-\sin(at+v), \cos(at+v), 0).$$

Assim, para que uma família seja solução sóliton deve satisfazer (1-4), logo

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \hat{\Phi}^t}{\partial t}, \eta^t \right\rangle &= \left\langle a\phi(-\sin(at+v), \cos(at+v), 0), (-v'\phi\dot{\phi}\cos(at+v) - u'\sin(at+v), \right. \\ &\quad \left. -v'\phi\dot{\phi}\sin(at+v) + u'(\cos(at+v), -v'\phi\dot{\psi})) \right\rangle \\ &= a\phi[v'\phi\dot{\phi}\sin(at+v)\cos(at+v) + u'\sin^2(at+v) \\ &\quad -v'\phi\dot{\phi}\sin(at+v)\cos(at+v) + u'\cos^2(at+v)] \\ &= a(\phi u') = \kappa_g = \kappa_g^t. \end{aligned}$$

□

A seguir, forneceremos um sistema de equações diferenciais das soluções sóliton para o FRC em  $\mathbb{M}^2$ .

**Proposição 3.2** *Seja  $\Phi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}^2 \subset \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco de uma superfície de revolução. Então  $\Phi(s) = X(u(s), v(s))$  é um sóliton do FRC se, e somente se,*

$$\begin{cases} u'' = -au'v'\phi^2 + (v')^2\phi\dot{\phi}; \\ v'' = a(u')^2 - \frac{2u'v'\dot{\phi}}{\phi}. \end{cases} \quad (3-13)$$

Além disso, se  $a = 0$  obtemos o sistema de EDO das geodésicas de  $\mathbb{M}^2$  (1).

*Demonstração.* Igualando as curvaturas (3-7) e (3-11) temos

$$(-u''v' + v''u')\phi + v'(1 + (u')^2)\dot{\phi} = a\phi u',$$

ou seja,

$$-(-u''v' + v''u') + au' - v'(1 + (u')^2)\frac{\dot{\phi}}{\phi} = 0. \quad (3-14)$$

Multiplicando a derivada (3-9) por  $u'$

$$(u')^2 u'' + u'v'v''\phi^2 + (u')^2(v')^2\phi\dot{\phi} = 0, \quad (i)$$

e (3-14) por  $-v'\phi^2$

$$v'\phi^2(-u''v' + v''u') - au'v'\phi^2 + (v')^2(1 + (u')^2)\dot{\phi}\phi = 0, \quad (ii)$$

igualando as equações (i) e (ii) e usando o fato de que a curva é p.c.a (3-8).

$$\begin{aligned} (u')^2u'' + u'v'v''\phi^2 + (u')^2(v')^2\phi\dot{\phi} &= v'\phi^2(-u''v' + v''u') - au'v'\phi^2 \\ &\quad + (v')^2(1 + (u')^2)\dot{\phi}\phi \\ &= -(v')^2u''\phi^2 + u'v'v''\phi^2 - au'v'\phi^2 \\ &\quad + (u')^2(v')^2\phi\dot{\phi} + (v')^2\phi\dot{\phi}. \end{aligned}$$

Assim  $(u')^2u'' + (v')^2u''\phi^2 = -au'v'\phi^2 + (v')^2\phi\dot{\phi}$ , logo,

$$\left((u')^2 + (v')^2\phi^2\right)u'' = -au'v'\phi^2 + (v')^2\phi\dot{\phi}.$$

Portanto,

$$u'' = -au'v'\phi^2 + (v')^2\phi\dot{\phi}.$$

Por outro lado, multiplicando a derivada (3-9) por  $v'$

$$u'u''v' + (v')^2v''\phi^2 + u'(v')^3\phi\dot{\phi} = 0 \quad (i)$$

e (3-14) por  $u'$

$$-u'(-u''v' + v''u') + a(u')^2 - u'v'(1 + (u')^2)\frac{\dot{\phi}}{\phi} = 0, \quad (ii)$$

igualando as equações (i) e (ii) e usando o fato de que a curva é p.c.a (3-8)

$$\begin{aligned} u'u''v' + (v')^2v''\phi^2 + u'(v')^3\phi\dot{\phi} &= -u'(-u''v' + v''u') + a(u')^2 - u'v'(1 + (u')^2)\frac{\dot{\phi}}{\phi} \\ u'u''v' + (v')^2v''\phi^2 + u'(v')^3\phi\dot{\phi} &= u'u''v' - (u')^2v'' + a(u')^2 - u'v'\frac{\dot{\phi}}{\phi} - (u')^3v'\frac{\dot{\phi}}{\phi} \\ (v')^2v''\phi^2 + (u')^2v'' &= a(u')^2 - u'v'\frac{\dot{\phi}}{\phi} - u'(u')^2v'\frac{\dot{\phi}}{\phi} - u'v'(v')^2\phi\dot{\phi} \\ \left[(v')^2\phi^2 + (u')^2\right]v'' &= a(u')^2 - u'v'\left[1 + (u')^2 + (v')^2\phi^2\right]\frac{\dot{\phi}}{\phi}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$v'' = a(u')^2 - 2u'v'\frac{\dot{\phi}}{\phi}.$$

□

Para provar o próximo resultado vamos definir a seguinte função auxiliar

$$\Lambda(s) = \frac{u'(s)}{\sqrt{1 - (u'(s))^2}}. \quad (3-15)$$

Como  $\Phi(s) = X(u(s), v(s))$  está parametrizada pelo comprimento de arco,  $\Lambda$  está bem definida, i.e.,  $1 - (u')^2 = (v')^2\phi^2 \geq 0$ . Além disso, como  $\phi > 0$ , então

$$1 - (u')^2 = 0 \Leftrightarrow v' = 0.$$

Assumiremos que o conjunto de parâmetros para os quais  $v' = 0$  é não denso. De fato, observe que em um aberto onde  $v' = 0$ , i.e.,  $v$  é constante, a curva  $\Phi$  no Toro  $\mathbb{T}^2$  é um meridiano, que por sua vez é uma geodésica. Deste modo, não iremos trabalhar com pontos isolados já que geodésicas são soluções triviais para o FRC, no qual não estamos interessados.

Portanto,  $1 - (u')^2 > 0$ , logo  $|u'| < 1$ , ou seja,  $u'$  é limitada.

**Teorema 3.3** *Seja  $\Phi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}^2 \subset \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco de uma superfície de revolução. Se  $\Phi(s) = X(u(s), v(s))$  é um sólito do FRC em  $\mathbb{M}^2$ , então,*

$$\kappa_g(s) = \pm\Lambda(s)\left(c + \int_I \kappa_g^2(s)\right), \quad (3-16)$$

onde  $c \in \mathbb{R}$ .

*Demonstração.* Podemos reescrever a derivada (3-9) isolando  $v''$

$$v'' = -\frac{u'(v')^2\phi\dot{\phi} - u'u''}{v'\phi^2} = \frac{-u'v'\dot{\phi}}{\phi} - \frac{u'u''}{v'\phi^2} = -\frac{u'v'\dot{\phi}}{\phi} - \frac{v'u'u''}{(v')^2\phi^2},$$

ou seja,

$$v'' = -\frac{\dot{\phi}}{\phi}u'v' - \frac{v'u'u''}{(v')^2\phi^2}.$$

Usando o fato de que a curva é p.c.a (3-8) temos

$$v'' = -\frac{\dot{\phi}}{\phi}u'v' - \frac{v'u'u''}{1 - (u')^2}. \quad (3-17)$$

Igualando (3-17) com a segunda equação de (3-13) temos

$$\begin{aligned} -\frac{\dot{\phi}}{\phi}u'v' - \frac{v'u'u''}{1-(u')^2} &= a(u')^2 - 2u'v'\frac{\dot{\phi}}{\phi}, \\ -\frac{\dot{\phi}}{\phi}u'v' &= -a(u')^2 - \frac{u'u''v'}{1-(u')^2}. \end{aligned}$$

Substituído a expressão acima em (3-17), obtemos

$$v'' = -a(u')^2 - 2\left(\frac{v'u'u''}{1-(u')^2}\right).$$

A última expressão pode ser reescrita como

$$v'' = \frac{[1-(u')^2](-a(u')^2) - 2u'u''v'}{1-(u')^2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{v''}{1-(u')^2} + \frac{2u'u''v'}{[1-(u')^2]^2} &= -\frac{a(u')^2}{1-(u')^2}, \\ \frac{v''[1-(u')^2] + 2u'u''v'}{[1-(u')^2]^2} &= -\frac{a(u')^2}{1-(u')^2}. \end{aligned}$$

Note que  $-v'[1-(u')^2]' = 2u'u''v'$ . Então,

$$\frac{v''[1-(u')^2] - v'[1-(u')^2]'}{[1-(u')^2]^2} = \frac{-a(u')^2}{1-(u')^2}.$$

Equivalentemente,

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{v'}{1-(u')^2} \right) = \frac{-a(u')^2}{1-(u')^2}. \quad (3-18)$$

Isolando  $v'$  de (3-8) temos

$$v' = \pm \frac{\sqrt{1-(u')^2}}{\phi}.$$

De (3-11) com a equação anterior

$$\kappa_g v' = \pm a u' \sqrt{1-(u')^2},$$

podendo ser reescrita como

$$v' = \pm \frac{a u' \sqrt{1-(u')^2}}{\kappa_g}.$$

Dividindo ambos os lados por  $1 - (u')^2$

$$\frac{v'}{1 - (u')^2} = \pm \frac{au'}{\kappa_g \sqrt{1 - (u')^2}},$$

derivando,

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{v'}{1 - (u')^2} \right) = \frac{d}{ds} \left( \pm \frac{au'}{\kappa_g \sqrt{1 - (u')^2}} \right),$$

e substituindo (3-18) na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{-a(u')^2}{1 - (u')^2} &= \frac{d}{ds} \left( \pm \frac{au'}{\kappa_g \sqrt{1 - (u')^2}} \right), \\ -a \left( \frac{u'}{\sqrt{1 - (u')^2}} \right)^2 &= \frac{d}{ds} \left( \pm \frac{au'}{\kappa_g \sqrt{1 - (u')^2}} \right). \end{aligned}$$

Considerando a função auxiliar  $\Lambda(s) = \frac{u'}{\sqrt{1 - (u')^2}}$  e substituindo na equação acima, temos  $-a\Lambda^2 = \frac{d}{ds} \left( \pm \frac{a}{\kappa_g} \Lambda \right)$ , logo

$$\Lambda^2 = \pm \frac{d}{ds} \left( \frac{\Lambda}{\kappa_g} \right). \quad (3-19)$$

Multiplicando  $\frac{\kappa_g^2}{\kappa_g^2}$  por  $\Lambda^2$ , temos  $\frac{\kappa_g^2 \Lambda^2}{\kappa_g^2} = \pm \frac{d}{ds} \left( \frac{\Lambda}{\kappa_g} \right)$ , assim,

$$\kappa_g^2 = \pm \frac{\frac{d}{ds} \left( \frac{\Lambda}{\kappa_g} \right)}{\left( \frac{\Lambda}{\kappa_g} \right)^2} = \mp \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{\left( \frac{\Lambda}{\kappa_g} \right)} \right) = \mp \frac{d}{ds} \left( \frac{\Lambda}{\kappa_g} \right)^{-1}.$$

Integrando ambos os lados, obtemos que

$$\int_I \kappa_g^2 = \mp \left( \left( \frac{\Lambda}{\kappa_g} \right)^{-1} + \bar{c} \right) = \pm \left( \frac{\kappa_g}{\Lambda} + \bar{c} \right).$$

Portanto,

$$\kappa_g = \pm \Lambda \left( c + \int_I \kappa_g^2 \right),$$

onde,  $c \in \mathbb{R}$ .

□

A seguir apresentaremos um lema, juntamente com o Lema 1.1 que será fundamental para a demonstração dos teoremas seguintes.

**Lema 3.4** *Seja  $\Phi$  uma curva simples e fechada em uma superfície  $\mathbb{M}^2$ . Seja  $\hat{\Phi}^t$  sua evolução pelo fluxo redutor de curvas. Denote por  $R_t$  a região delimitada por  $\hat{\Phi}^t$  e*

por  $A(t)$  a área de  $R_t$ . Suponha que  $R_t$  seja uma região simples. Então,

$$\frac{dA}{dt} = \iint_{R_t} K dA - 2\pi.$$

*Demonstração.* A primeira variação da área é expressa pela equação a seguir, conforme discutido em [26], Seção 2:

$$\frac{dA}{dt} = - \int_{R_t} \nu,$$

onde  $\nu$  é a velocidade do fluxo na direção da normal.

Como  $\hat{\Phi}^t$  é solução do FRC, temos

$$\nu = \left\langle \frac{\partial \hat{\Phi}^t}{\partial t}, \eta^t \right\rangle = \kappa_g^t.$$

Sendo  $R_t$  é uma região simples, pelo Teorema de Gauss-Bonnet, segue-se que

$$\frac{dA}{dt} = - \int_{R_t} \kappa_g^t ds = \iint_{R_t} K dA - 2\pi.$$

□

**Teorema 3.5** *Seja  $\Phi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}^2 \subset \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco de uma superfície de revolução. Se  $\Phi(s) = X(u(s), v(s))$  é um sólito do FRC em  $\mathbb{M}^2$  com curvatura geodésica total limitada, i.e.,*

$$\int_I \kappa_g^2(s) = \|\kappa_g(s)\|^2 < \infty,$$

e  $|\phi|, |\dot{\phi}| < \infty$ , então as duas extremidades da curva são assintóticas aos paralelos que são geodésicas.

*Demonstração.* Observe que a derivada de  $\Lambda$  é

$$\Lambda' = \frac{u''(\sqrt{1-(u')^2}) - u' \left( \frac{-u'u''}{\sqrt{1-(u')^2}} \right)}{1-(u')^2} = \frac{u''(1-(u')^2) + (u')^2 u''}{(1-(u')^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{u''}{(1-(u')^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Derivando a equação da curvatura geodésica (3-11), temos

$$\kappa_g' = a[\dot{\phi}(u')^2 + \phi u''].$$

Multiplicando a equação  $\kappa'_g$  por  $\frac{\Lambda}{\kappa_g}$  temos

$$\begin{aligned}
\frac{\Lambda}{\kappa_g} \kappa'_g &= \frac{au'}{(a\phi u')\sqrt{1-(u')^2}} [\dot{\phi}(u')^2 + \phi u''] \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-(u')^2}} \left[ \frac{\dot{\phi}}{\phi} (u')^2 + u'' \right] \\
&= \frac{\dot{\phi}(u')^2}{\phi\sqrt{1-(u')^2}} + \frac{u''}{\sqrt{1-(u')^2}} \\
&= \frac{\dot{\phi}(u')^2}{\phi\sqrt{1-(u')^2}} + \Lambda'[1-(u')^2]. \quad (i)
\end{aligned}$$

Por outro lado, de (3-19) obtemos

$$\begin{aligned}
\pm \frac{d}{ds} \left( \frac{\Lambda}{\kappa_g} \right) &= \Lambda^2 \\
\frac{\Lambda' \kappa_g - \Lambda \kappa'_g}{\kappa^2} &= \pm \Lambda^2 \\
\frac{\Lambda}{\kappa_g} \kappa'_g &= \Lambda' \pm \kappa_g \Lambda^2. \quad (ii)
\end{aligned}$$

Igualando as duas últimas equações (i) e (ii).

$$\begin{aligned}
\Lambda' \pm \kappa_g \Lambda^2 &= \frac{\dot{\phi}(u')^2}{\phi\sqrt{1-(u')^2}} + \Lambda'[1-(u')^2] \\
\pm \kappa_g \Lambda^2 &= \frac{\dot{\phi}(u')^2}{\phi\sqrt{1-(u')^2}} - \Lambda'(u')^2 \\
\Lambda'(u')^2 &= \frac{\dot{\phi}(u')^2}{\phi\sqrt{1-(u')^2}} \pm \kappa_g \Lambda^2 \\
\Lambda' &= \frac{\dot{\phi}}{\phi\sqrt{1-(u')^2}} \pm \frac{\kappa_g}{(u')^2} \Lambda^2.
\end{aligned}$$

Substituindo  $\Lambda$  do lado direito da equação, temos

$$\begin{aligned}
\Lambda' &= \pm \frac{\kappa_g}{(u')^2} \left( \frac{u'}{\sqrt{1-(u')^2}} \right)^2 + \frac{\dot{\phi}}{\phi\sqrt{1-(u')^2}} = \pm \frac{a\phi u'}{(u')^2} \left( \frac{(u')^2}{1-(u')^2} \right) + \frac{\dot{\phi}}{\phi\sqrt{1-(u')^2}} \\
&= \pm \frac{a\phi u'}{1-(u')^2} + \frac{\dot{\phi}}{\phi\sqrt{1-(u')^2}},
\end{aligned}$$

substituindo  $\Lambda'$ , temos

$$\begin{aligned}\frac{u''}{[1 - (u')^2]^{\frac{3}{2}}} &= \pm \frac{a\phi u'}{1 - (u')^2} + \frac{\dot{\phi}}{\phi\sqrt{1 - (u')^2}} \\ u'' &= \left( \pm \frac{a\phi u'}{\sqrt{1 - (u')^2}} + \frac{\dot{\phi}}{\phi} \right) (1 - (u')^2).\end{aligned}$$

Logo,

$$|u''| = \left| \left( \pm \frac{a\phi u'}{\sqrt{1 - (u')^2}} + \frac{\dot{\phi}}{\phi} \right) (1 - (u')^2) \right| \leq \left| \frac{a\phi u'}{\sqrt{1 - (u')^2}} \right| + \frac{|\dot{\phi}|}{\phi} \leq a\phi + \frac{|\dot{\phi}|}{\phi}.$$

isto é,

$$|u''| \leq a\phi + \frac{|\dot{\phi}|}{\phi}. \quad (3-20)$$

Defina

$$f(s) = \int_{s_0}^s \kappa_g^2.$$

Note que  $f' = \kappa_g^2 \geq 0$ , logo  $f$  é não decrescente, e como a curvatura geodésica total é limitada, i.é,  $f < \infty$  então o limite  $\lim_{s \rightarrow \infty} f(s)$  existe.

Mostraremos que  $f'$  é uniformemente contínua, ou seja, basta mostrar que  $f''$  é limitada. De fato, temos  $f'' = 2\kappa'_g \kappa_g$ , então

$$\begin{aligned}|f''| &= 2|a(\dot{\phi}(u')^2 + \phi u'')a\phi u'| \\ &= 2a^2\phi(|\dot{\phi}(u')^2 + \phi u''|)|u'| \\ &\leq 2a^2\phi(|\dot{\phi}(u')^2| + \phi|u''|) \\ &\leq 2a^2\phi(|\dot{\phi}| + \phi|u''|) \text{ de (3-20)} \\ &\leq 2a^2\phi(|\dot{\phi}| + |a|\phi^2 + |\dot{\phi}|) \\ &= 2a^2\phi(2|\dot{\phi}| + |a|\phi^2).\end{aligned}$$

Com isso, concluímos que  $|f''|$  é limitada, e portanto,  $f'$  é uniformemente contínua. Sob as condições da função  $f$  podemos aplicar o Lema de Barbalat 1.1, ou seja,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} f'(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \kappa_g(s)^2 = 0. \quad (3-21)$$

Mostrando assim que as extremidades de  $\Phi$  são assintóticas as geodésicas. Mostraremos agora que essas geodésicas são os paralelos. Denote por  $\theta$  o ângulo entre a

curva  $\Phi$  com o meridiano de  $X$ , i.e.,

$$\cos \theta = \frac{\langle X_u, T \rangle}{|X_u||T|},$$

onde,  $X_u = e_1$  e  $\Phi' = T = u'e_1 + v'e_2$  são vetores tangentes unitários. Logo,

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \langle e_1, u'e_1 + v'e_2 \rangle \\ \cos \theta &= u'. \end{aligned}$$

Utilizando a equação da geodésica (3-11) em conjunto com o limite (3-21), temos

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{s \rightarrow \infty} \kappa_g^2(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} (a\phi u')^2, \\ \lim_{s \rightarrow \infty} u' &= \lim_{s \rightarrow \infty} \cos \theta = 0. \end{aligned}$$

Isso mostra que as extremidades de  $\Phi$  são perpendiculares aos meridianos. Portanto,  $\Phi$  deve ser assintótica aos paralelos que são geodésicas.

□

**Corolário 3.6** *Seja  $\Phi$  um sóliton do FRC em  $\mathbb{M}^2$ , com  $\Phi$  integrável. Se  $\Phi$  é uma curva fechada e simples, então  $\Phi$  é um paralelo e geodésica.*

*Demonstração.* Seja  $h(u)$  uma função tal que  $h'(u) = \frac{dh(u)}{du} = \phi(u)$ . Suponha que a região  $R$  delimitada por  $\Phi$  seja simples.

Pelo Teorema de Gauss Bonnet podemos escrever

$$\int_{\partial R} \kappa_g ds + \iint_R K dA = 2\pi.$$

Da primeira variação da área (3.4) temos

$$\int_{\partial R} \kappa_g ds + \frac{dA}{dt} = 0.$$

Uma vez que isometrias preservam áreas, devemos ter  $A(t)$  constante, daí,

$$\int_{\partial R} \kappa_g ds = 0.$$

Pela equação da curvatura geodésica (3-11)

$$0 = \int_{\partial R} \kappa_g ds = a \int_{\partial R} \phi u' ds = ah(u) + c,$$

onde  $c \in \mathbb{R}$ . Ou seja,  $ah(u) + c = 0$ , derivando ambos os lados,

$$0 = a\phi u',$$

como  $\phi > 0$ . Logo,  $u' = 0$ . Portanto,  $\Phi$  deve ser um paralelo de  $\mathbb{M}^2$  e pelo Teorema 3.5 uma geodésica. □

### 3.1 Toro $\mathbb{T}^2$

Essa seção é uma aplicação dos resultados obtidos anteriormente. O Toro  $\mathbb{T}^2$  é uma superfície de revolução em  $\mathbb{R}^3$  obtida quando o círculo  $\alpha(u) = (R + r \cos u, 0, r \sin u)$  é a curva geratriz de raio  $r$  com centro  $(R, 0, 0)$  tal que  $R > r$ .

Seja a parametrização do Toro  $\mathbb{T}^2$  dada por

$$X(u, v) = ((R + r \cos u) \cos v, (R + r \cos u) \sin v, r \sin u), \quad (3-22)$$

onde  $0 \leq u, v \leq 2\pi$ . Logo,

$$\begin{aligned} X_u &= (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u); \\ X_v &= (-(R + r \cos u) \sin v, (R + r \cos u) \cos v, 0); \\ X_{uu} &= (-r \cos u \cos v, -r \cos u \sin v, -r \sin u); \\ X_{uv} &= (r \sin u \sin v, -r \sin u \cos v, 0); \\ X_{vv} &= (-(R + r \cos u) \cos v, -(R + r \cos u) \sin v, 0). \end{aligned}$$

Um campo unitário normal é dado por

$$\begin{aligned} N &= \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}, \\ N &= \frac{(-r(R + r \cos u)(\cos u \cos v, \sin v \cos u, \sin u \cos^2 v + \sin u \sin^2 v))}{\sqrt{r^2(R + r \cos u)^2}}, \\ N &= (-\cos u \cos v, -\sin v \cos u, -\sin u). \end{aligned}$$

Os coeficientes da Primeira Forma Fundamental são dados por

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle = r^2, \\ F &= \langle X_u, X_v \rangle = 0, \\ G &= \langle X_v, X_v \rangle = (R + r \cos u)^2. \end{aligned}$$

Os Coeficientes da Segunda Forma Fundamental são dados por

$$\begin{aligned} e &= \langle X_{uu}, N \rangle = r, \\ f &= \langle X_{uv}, N \rangle = 0, \\ g &= \langle X_{vv}, N \rangle = (R + \cos u) \cos u. \end{aligned}$$

O Tensor Métrico é dado por

$$\begin{aligned} g &= g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2 \\ &= E(u, v)du^2 + 2F(u, v)dudv + G(u, v)dv^2 \\ &= r^2du^2 + (R + r \cos u)^2dv^2. \end{aligned} \tag{3-23}$$

A Curvatura Gaussiana e Curvatura Média respectivamente,

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\cos u}{r(R + r \cos u)}, \tag{3-24}$$

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} \right) = \frac{R + 2 \cos u}{2r(R + r \cos u)}. \tag{3-25}$$

Os símbolos de Christoffel são [6],

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 r^2 = 0, \\ \Gamma_{11}^2 (R + r \cos u)^2 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 r^2 = 0, \\ \Gamma_{12}^2 (R + r \cos u)^2 = -r(R + r \cos u) \sin u, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 r^2 = r(R + r \cos u) \sin u, \\ \Gamma_{22}^2 (R + r \cos u)^2 = 0. \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0, \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{-r \sin u}{R + r \cos u}, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{(R + r \cos u) \sin u}{r}.\end{aligned}\tag{3-26}$$

Substituindo os símbolos de Christoffel no sistemas de Equações Diferenciais das Geodésicas (1), temos,

$$\begin{cases} u'' + \frac{(R + r \cos u) \sin u}{r} (v')^2 = 0, \\ v'' - \frac{2r \sin u}{R + r \cos u} u'v' = 0. \end{cases}\tag{3-27}$$

A seguir iremos investigar as isometrias de  $\mathbb{T}^2$  que pode ser encontrada em [17]. Além disso, todas as propriedades usadas nas demonstrações seguintes podem ser verificadas em [6], [7] e [24].

### 3.1.1 Isometrias em $\mathbb{T}^2$

Considere um campo tangente  $\zeta$  sobre  $\mathbb{T}^2$  que está parametrizado por (3-22), então

$$\zeta = \zeta^1(u, v)X_u(u, v) + \zeta^2(u, v)X_v(u, v),$$

onde  $\zeta^i$  são funções diferenciáveis  $i = \{1, 2\}$ . Suponha  $\zeta$  é um campo de Killing, isto é, um campo para a qual a derivada de Lie da métrica  $g$  se anula  $\mathcal{L}_\zeta g \equiv 0$ . A equação anterior é chamada de equação de Killing, veja [6] Cap 3, [11] Cap 4.

Em coordenadas a equação de Killing é dada por

$$\begin{aligned}
0 &= \mathcal{L}_\zeta g(X_u, X_v) \\
&= g(\nabla_{X_u} \zeta, X_v) + g(X_u, \nabla_{X_v} \zeta) \\
&= g(\nabla_{X_u} \zeta, X_v) + g(X_u, \nabla_{X_v} \zeta) + g(\nabla_\zeta X_u, X_v) - g(\nabla_\zeta X_u, X_v) \\
&\quad + g(X_v, \nabla_\zeta X_v) - g(X_v, \nabla_\zeta X_v) \\
&= g(\nabla_\zeta X_u, X_v) + g(X_v, \nabla_\zeta X_v) - g(\nabla_\zeta X_u, X_v) + g(\nabla_{X_u} \zeta, X_v) \\
&\quad - g(X_v, \nabla_\zeta X_v) + g(X_u, \nabla_{X_v} \zeta) \\
&= g(\nabla_\zeta X_u, X_v) + g(X_v, \nabla_\zeta X_v) - g(\nabla_\zeta X_u, X_v) - g(-\nabla_{X_u} \zeta, X_v) \\
&\quad - g(X_v, \nabla_\zeta X_v) - g(X_u, -\nabla_{X_v} \zeta) \\
&= g(\nabla_\zeta X_u, X_v) + g(X_v, \nabla_\zeta X_v) - g(\nabla_\zeta X_u - \nabla_{X_u} \zeta, X_v) \\
&\quad - g(\nabla_\zeta X_v - \nabla_{X_v} \zeta, X_u) \\
&= g(\nabla_\zeta X_u, X_v) + g(X_v, \nabla_\zeta X_v) - g([\zeta, X_u], X_v) - g([\zeta, X_v], X_u) \\
&= \zeta g(X_u, X_v) - g([\zeta, X_u], X_v) - g([\zeta, X_v], X_u)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$0 = \zeta g(X_u, X_v) - g([\zeta, X_u], X_v) - g([\zeta, X_v], X_u). \quad (3-28)$$

Denote  $\partial_1 = X_u$  e  $\partial_2 = X_v$ . Usando a propriedade (d), ver [6], Proposição 5.3, para cada parcela da equação acima temos

$$\begin{aligned}
\zeta g(X_u, X_v) &= \zeta^1 \partial_1 g(X_u, X_v) + \zeta^2 \partial_2 g(X_u, X_v) \\
&= \zeta^1 \partial_1 g(\partial_1, \partial_2) + \zeta^2 \partial_2 g(\partial_1, \partial_2) \\
&= (\zeta^1 \partial_1 + \zeta^2 \partial_2) g_{12},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
-g([\zeta, X_u], X_v) &= -g([\zeta^1 X_u + \zeta^2 X_v, X_u], X_v) \\
&= -g([\zeta^1 \partial_1 + \zeta^2 \partial_2, \partial_1], \partial_2) \\
&= -g([\zeta^1 \partial_1, \partial_1] + [\zeta^2 \partial_2, \partial_1], \partial_2) \\
&= -g([\zeta^1 \partial_1, \partial_1] + \zeta^2 \partial_1(1) \partial_1 - \partial_1(\zeta^2) \partial_1 \\
&\quad + (\zeta^2 [\partial_2, \partial_1] + \zeta^1 \partial_2(1) \partial_1 - \partial_1(\zeta^2) \partial_2), \partial_2) \\
&= -g(-\partial_1(\zeta^1) \partial_1 - \partial_1(\zeta^2) \partial_2, \partial_2) \\
&= -g(-\partial_1(\zeta^1) \partial_1, \partial_2) - g(-\partial_1(\zeta^2) \partial_2, \partial_2) \\
&= \partial_1(\zeta^1) g(\partial_1, \partial_2) + \partial_1(\zeta^2) g(\partial_2, \partial_2) \\
&= \partial_1(\zeta^1) g_{12} + \partial_1(\zeta^2) g_{22}.
\end{aligned}$$

De forma análoga se mostra que

$$-g([\zeta, X_v], X_u) = \partial_2(\zeta^1) g_{11} + \partial_2(\zeta^2) g_{12}.$$

Dessa forma, de (3-28) temos

$$(\zeta^1 \partial_1 + \zeta^2 \partial_2) g_{12} + \partial_1(\zeta^1) g_{12} + \partial_1(\zeta^2) g_{22} + \partial_2(\zeta^1) g_{11} + \partial_2(\zeta^2) g_{12} = 0,$$

podendo ser reescrito como

$$\sum_{k=1}^2 (\zeta^k \partial_k g_{ij} + \partial_i \zeta^k g_{jk} + \partial_j \zeta^k g_{ik}) = 0.$$

Usando a notação  $\partial_i(\cdot) = (\cdot)_{;i}$ , segue-se que

$$\sum_{k=1}^2 (\zeta^k g_{ij;k} + \zeta^k_{;i} g_{jk} + \zeta^k_{;j} g_{ik}) = 0, \quad (3-29)$$

no qual,

$$g_{11} = g(X_u, X_u); \quad g_{12} = g(X_u, X_v); \quad g_{22} = g(X_v, X_v).$$

A partir de (3-23), temos que

$$g_{11} = r^2, \quad g_{12} = 0 \quad \text{e} \quad g_{22} = (R + r \cos u)^2.$$

Então a equação de Killing (3-29) para  $i = 1$ ,  $j = 2$  obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^2 (\zeta^k g_{12;k} + \zeta_{;1}^k g_{2k} + \zeta_{;2}^k g_{ik}) = \sum_{k=1}^2 (\zeta_{;1}^k g_{2k} + \zeta_{;2}^k g_{ik}) \\ &= \frac{\partial \zeta^1}{\partial u} g_{21} + \frac{\partial \zeta^1}{\partial v} g_{11} + \frac{\partial \zeta^2}{\partial u} g_{22} + \frac{\partial \zeta^2}{\partial v} g_{22} \\ &= \frac{\partial \zeta^1}{\partial v} g_{11} + \frac{\partial \zeta^2}{\partial u} g_{22}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\partial \zeta^1}{\partial v} r^2 + \frac{\partial \zeta^2}{\partial u} (R + r \cos u)^2 = 0. \quad (3-30)$$

Fazendo  $i = j = 1$  na equação (3-29), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^2 (\zeta^k g_{11;k} + \zeta_{;1}^k g_{1k} + \zeta_{;1}^k g_{1k}) = \sum_{k=1}^2 (\zeta^k \frac{\partial g_{11}}{\partial k} + \frac{\partial \zeta^k}{\partial u} g_{1k} + \frac{\partial \zeta^k}{\partial u} g_{1k}) \\ &= \sum_{k=1}^2 (\zeta^k \frac{\partial g_{11}}{\partial k} + 2 \frac{\partial \zeta^k}{\partial u} g_{1k}) \\ &= \zeta^1 \frac{\partial g_{11}}{\partial 1} + 2 \frac{\partial \zeta^1}{\partial u} g_{11} + \zeta^2 \frac{\partial g_{11}}{\partial 2} + 2 \frac{\partial \zeta^2}{\partial u} g_{12} \\ &= \zeta^1 \frac{\partial g_{11}}{\partial u} + 2 \frac{\partial \zeta^1}{\partial u} g_{11} \\ &= \zeta^1 \frac{\partial r^2}{\partial u} + 2 \frac{\partial \zeta^1}{\partial u} g_{11} \\ &= 2 \frac{\partial \zeta^1}{\partial u} g_{11} \\ &= \frac{\partial \zeta^1}{\partial u} g_{11}. \end{aligned}$$

Daí,

$$\frac{\partial \zeta^1}{\partial u} = 0. \quad (3-31)$$

Para  $i = j = 2$ , temos

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^2 (\zeta^k g_{22;k} + \zeta_{;2}^k g_{2k} + \zeta_{;2}^k g_{2k}) \\ &= \zeta^1 \frac{\partial g_{22}}{\partial u} + \frac{\partial \zeta^1}{\partial v} g_{21} + \frac{\partial \zeta^1}{\partial v} g_{21} + \zeta^2 \frac{\partial g_{22}}{\partial v} + \frac{\partial \zeta^2}{\partial v} g_{22} + \frac{\partial \zeta^2}{\partial v} g_{22} \\ &= \zeta^1 \frac{\partial g_{22}}{\partial u} + \zeta^2 \frac{\partial g_{22}}{\partial v} + 2 \frac{\partial \zeta^2}{\partial v} g_{22} \\ &= \zeta^1 \frac{\partial (R + r \cos^2 u)^2}{\partial u} + \zeta^2 \frac{\partial (R + r \cos^2 u)^2}{\partial v} + 2 \frac{\partial \zeta^2}{\partial v} (R + r \cos^2 u)^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\zeta^1[2(R + r \cos u)(-r \sin u)] + 2\frac{\partial \zeta^2}{\partial v}(R + r \cos u)^2 = 0.$$

$$\zeta^1(r \sin u) = \frac{\partial \zeta^2}{\partial v}(R + r \cos u). \quad (3-32)$$

Assim teremos de (3-30), (3-31) e (3-32), respectivamente,

$$\begin{cases} \frac{\partial \zeta^1}{\partial v}r^2 + \frac{\partial \zeta^2}{\partial u}(R + r \cos u)^2 = 0, \\ \frac{\partial \zeta^1}{\partial u} = 0, \\ \zeta^1(r \sin u) = \frac{\partial \zeta^2}{\partial v}(R + r \cos u). \end{cases}$$

De (3-31) concluimos que  $\zeta^1$  não depende de  $u$ , apenas de  $v$ , logo,  $\zeta^1 = \omega(v)$ . Reescrevendo (3-30) e (3-32) obtemos

$$\frac{\partial \omega}{\partial v}r^2 + \frac{\partial \zeta^2}{\partial u}(R + r \cos u)^2 = 0, \quad (3-33)$$

$$\frac{\partial \zeta^2}{\partial v} = \frac{r \sin u}{(R + r \cos u)}\omega. \quad (3-34)$$

Integrando (3-34) em relação a  $v$  temos

$$\int \frac{\partial \zeta^2}{\partial v} dv = \int \frac{r \sin u}{(R + r \cos u)}\omega dv,$$

e assim,

$$\zeta^2 = \frac{r \sin u}{(R + r \cos u)} \int \omega dv.$$

Escrevendo a primitiva  $\int \omega dv = \Omega(v) + \sigma(u)$ , então

$$\zeta^2 = \frac{r \sin u}{(R + r \cos u)}\Omega(v) + \sigma(u). \quad (3-35)$$

Substituindo (3-35) em (3-33)

$$\omega'r^2 + \frac{\partial}{\partial u} \left[ \frac{r \sin u}{(R + r \cos u)}(\Omega(v) + \sigma(u)) \right] (R + r \cos u)^2 = 0,$$

ou seja,

$$\omega' r^2 + \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{r \sin u}{R + r \cos u} \Omega(v) \right) + \sigma'(u) \right] (R + r \cos u)^2 = 0.$$

Resolvendo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{r \sin u}{R + r \cos u} \right) &= \frac{(r \cos u)(R + r \cos u) - (r \sin u)(-r \sin u)}{(R + r \cos u)^2} \\ &= \frac{(r \cos u)(R + r \cos u) + r^2 \sin^2 u}{(R + r \cos u)^2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\omega' r^2 + \left[ \left( \frac{(r \cos u)(R + r \cos u) + r^2 \sin^2 u}{(R + r \cos u)^2} \right) \Omega(v) + \sigma'(u) \right] (R + r \cos u)^2 = 0,$$

logo,

$$\omega' r^2 + \left[ \left( (r \cos u)(R + r \cos u) + r^2 \sin^2 u \right) \Omega(v) \right] + \sigma'(u) (R + r \cos u)^2 = 0.$$

Derivando em  $v$

$$\omega'' r^2 + [(r \cos u)(R + r \cos u) + r^2 \sin^2 u] \Omega(v) = 0.$$

Derivando em  $u$

$$[r \sin u (R + r \cos u) + 2r^2 \sin u \cos u] \omega = 0.$$

Em particular, tome  $u = \frac{\pi}{2}$ . Assim, da equação acima teremos  $(rR)\omega = 0$  no qual  $\omega = 0$  e como  $\omega(v) = \zeta^1$ , temos

$$\zeta^1 = 0.$$

Isto é,  $\omega \equiv 0$ . Utilizando este fato em (3-35) concluímos que  $\frac{\partial \zeta^2}{\partial u} = 0$ . Logo,  $\partial \zeta^2 = \bar{\omega}(u)$  é uma função apenas de  $u$ . Voltando a equação (3-33) podemos afirmar que  $\frac{\partial \zeta^2}{\partial u} = 0$ , ou seja,

$$\zeta^2 = A,$$

onde  $A \in \mathbb{R}$  é uma constante. Portanto a única solução para (3-29) é dada pelo gerador de rotações em torno do eixo  $z$ , veja [11], 4.6.12, i.e.,

$$\zeta = 0X_u + AX_v.$$

Denotando por  $\{\partial_1, \partial_2, \partial_3\}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^3$  e

$$X(u, v) = \left( \underbrace{(R + r \cos u) \cos v}_x, \underbrace{(R + r \cos u) \sin v}_y, \underbrace{r \sin u}_z \right).$$

Lembre que  $X_u = 0$  e  $X_v = (-y, x, 0) = -y\partial_1 + x\partial_2$ , escrevendo o campo na base

$$\zeta = AX_v = A(-y\partial_1 + x\partial_2) = (-Ay, Ax, 0).$$

Desse modo, se  $\Psi^t$  é uma família a 1-parâmetro de isometrias de  $\mathbb{T}^2$  então

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \Psi^t(p) = \zeta(\Psi^t(p)); \\ \Psi^0(p) = p; \quad p \in \mathbb{T}^2. \end{cases}$$

Vamos encontrar as coordenadas de  $\Psi^t = (x(t), y(t), z(t))$  que satisfaçam o sistema acima. Então,

$$(x'(t), y'(t), z'(t)) = \frac{\partial \Psi^t}{\partial t} = \zeta(\Psi^t(p)) = (-Ay(t), Ax(t), 0).$$

Daí,

$$\begin{cases} x'(t) = -Ay(t), \\ y'(t) = Ax(t), \\ z'(t) = 0. \end{cases}$$

Omitindo o parâmetro  $t$ , chame

$$Y' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 0 & -A \\ A & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Os autovalores da matriz  $M$  são  $\lambda_1 = -iA$  e  $\lambda_2 = iA$  associados aos autovetores  $v_1 = (-i, 1)$  e  $v_2 = (i, 1)$ , respectivamente. Como os autovetores são L.I., uma solução geral para o sistema  $Y'(t) = MY(t)$  é dado por

$$Y(t) = c_i e^{Mt} v_i,$$

onde,  $c_i$  são constantes, para  $i = 1, 2$ . Assim,

$$\begin{cases} x = C \sin(At) + C_2 \cos(At), \\ y = C_2 \sin(At) - C \cos(At), \\ z = C_1. \end{cases}$$

Para mais detalhes sobre as soluções de equações diferenciais e exponenciais de matrizes, veja [22].

Aplicando o P.V.I, em  $t = 0$  e  $\psi^0 = (x(0), y(0), z(0)) = (x, y, z) = p$ , temos

$$\begin{cases} x = x \cos(At) - y \sin(At), \\ y = x \sin(At) + y \cos(At), \\ z = z. \end{cases}$$

Portanto,

$$\Psi^t(x, y, z) = (x \cos t - y \sin t, y \cos t + x \sin t, z),$$

onde

$$\left(R - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2 = r^2.$$

Além disso, dada uma curva parametrizada pelo comprimento de arco  $\Phi$  em  $\mathbb{T}^2$ , escrevendo  $\Phi(s) = (x(s), y(s), z(s))$ , temos

$$\Phi^t(s) = \Psi(\Phi(s)) = \begin{pmatrix} \cos \xi(t) & -\sin \xi(t) & 0 \\ \sin \xi(t) & \cos \xi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(s) \end{pmatrix}, \quad (3-36)$$

onde  $\xi$  é uma função diferenciável tal que  $\xi(0) = 0$ . Deste modo, concluímos que as isometrias de  $\mathbb{T}^2$  geradas por campos de Killing podem ser escritas na forma

$$\Gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos \xi(t) & -\sin \xi(t) & 0 \\ \sin \xi(t) & \cos \xi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3-37)$$

Este resultado mostra que o Teorema 3.5 descreve todas as soluções sóliton do FRC no toro.

A proposição a seguir fornece um sistema de EDO no qual as soluções são sólitons para o FRC no toro  $\mathbb{T}^2$ . Usando a Proposição 3.2 e  $\phi = (R + r \cos u)$ , podemos ver que:

**Proposição 3.7** *Seja  $\Phi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco em  $\mathbb{T}^2$ . Então  $\Phi(s) = X(u(s), v(s))$  é um sóliton do FRC em*

$\mathbb{T}^2$  se, e somente se,

$$\begin{cases} u'' + \frac{\sin u(R + r \cos u)}{r}(v')^2 = -a(R + r \cos u)^2 u'v', \\ v'' - \frac{2r \sin u}{(R + r \cos u)}u'v' = ar^2(u')^2. \end{cases}$$

Além disso, se  $a = 0$  obtemos o sistema de EDO das geodésicas de  $\mathbb{T}^2$  (3-27).

As figuras abaixo são algumas soluções numéricas do sistema obtido da Proposição 3.7 feitas em um programa matemático Maple.

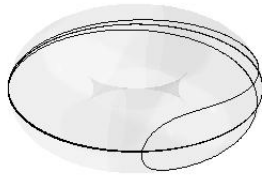


Figura 3.1: Condição inicial:  
 $u(0) = \frac{\pi}{4}$ ,  $v(0) = \frac{\pi}{4}$ ,  $u'(0) = 0$ ,  
 $v'(0) = 1$ ,  $\xi'(0) = \frac{1}{2}$ .

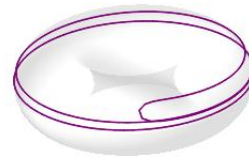


Figura 3.2: Condição inicial:  
 $u(0) = \frac{\pi}{4}$ ,  $v(0) = \frac{\pi}{4}$ ,  $u'(0) = 0$ ,  
 $v'(0) = 1$ ,  $\xi'(0) = 2$ .

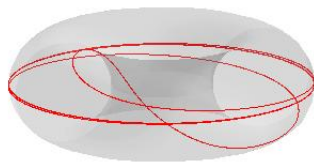


Figura 3.3: Condição inicial:  
 $u(0) = \pi$ ,  $v(0) = \frac{\pi}{4}$ ,  $u'(0) = 1$ ,  
 $v'(0) = 1$ ,  $\xi'(0) = \frac{1}{2}$ .

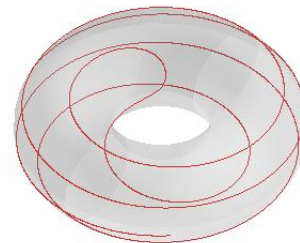


Figura 3.4: Condição inicial:  
 $u(0) = \pi$ ,  $v(0) = \frac{\pi}{4}$ ,  $u'(0) = 1$ ,  
 $v'(0) = 1$ ,  $\xi'(0) = 2$ .

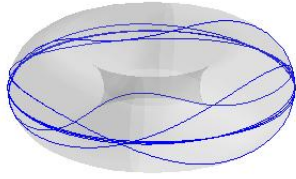


Figura 3.5: Condição inicial:  
 $u(0) = 0, v(0) = \pi, u'(0) = 1,$   
 $v'(0) = 1, \xi'(0) = -0, 1.$

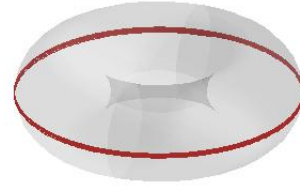


Figura 3.6: Condição inicial:  
 $u(0) = 0, v(0) = \pi, u'(0) = 1,$   
 $v'(0) = 1, \xi'(0) = 10.$

É de suma importância que as condições do Teorema 3.5 sejam satisfeitas em uma superfície de revolução. De fato, o Catenóide dado pela parametrização

$$X(u, v) = \left( \lambda \cosh\left(\frac{s}{\lambda}\right) \cos u, \lambda \cosh\left(\frac{s}{\lambda}\right) \sin u, s \right),$$

onde  $s = \lambda \ln\left(\frac{v + \sqrt{v^2 + \lambda^2}}{\lambda}\right)$ , e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . A catenária dada por

$$\alpha(v) = \left( \lambda \cosh\left(\frac{s}{\lambda}\right), 0, s \right),$$

é a curva geratriz do catenóide. Apesar de ser p.c.a, ela não satisfaz as condições de limitação, i.e., não temos  $|\phi|, |\dot{\phi}| < \infty$ . Ou seja, nesse caso não teremos necessariamente soluções que convergirão para o equador central. As soluções numéricas a seguir foram feitas pelos autores em [17].

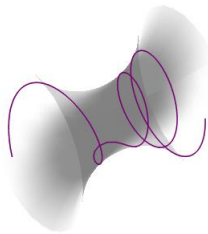


Figura 3.7: Condição inicial:  
 $u(0) = 1, v(0) = 1, u'(0) = 2,$   
 $v'(0) = 1, \xi'(0) = 1.$

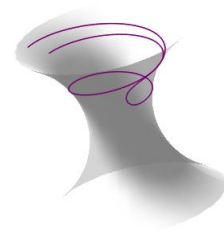


Figura 3.8: Condição inicial:  
 $u(0) = 2, v(0) = 1, u'(0) = -1,$   
 $v'(0) = 1, \xi'(0) = 1.$

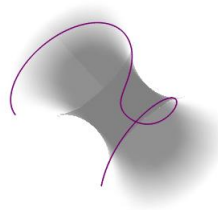


Figura 3.9: Condição inicial:  
 $u(0) = 0, v(0) = 0, u'(0) = \frac{1}{5},$   
 $v'(0) = \frac{9}{10}, \xi'(0) = \frac{1}{2}.$

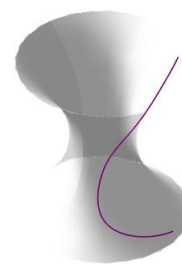


Figura 3.10: Condição inicial:  
 $u(0) = 4, v(0) = 0, u'(0) = \frac{1}{4},$   
 $v'(0) = \frac{55}{100}, \xi'(0) = \frac{1}{5}.$

---

# Curvas Esféricas Com Curvatura Geodésica Proporcional À Função Altura

---

Neste capítulo, vamos descrever as curvas da esfera cuja curvatura geodésica é proporcional a função altura. Este resultado representa uma contribuição original desta dissertação, na qual aplicamos técnicas semelhantes às desenvolvidas por Reis e Tenenblat [8] no Capítulo 2. Embora as técnicas utilizadas sejam inspiradas na metodologia precedente, a aplicação e os resultados aqui apresentados são novos e foram especificamente desenvolvidos para esta pesquisa.

Ou seja, construímos curvas sobre a esfera cuja a curvatura geodésica é equivalente a um sistema de EDO que depende da função altura. A partir desse sistema definimos um campo sobre a esfera e descrevemos o comportamento desse campo através do retrato de fase. Para o retrato de fase utilizamos o conceito da seção 1.3. A ideia de estudar os campos bidimensionais era fornecer respostas completas nos retratos de fase, assim como os autores fizeram em [8]. Fizemos isso porque não temos hiperbolicidade em todos os casos. O problema que surge aqui é o famoso problema de Sistema Dinâmicos, chamado centro-foco que consiste em determinar se um ponto singular com autovalores imaginários puros é do tipo centro-foco.

Por fim, construímos um sistema de segunda ordem que caracteriza essas curvas na esfera.

**Proposição 4.1** *Seja  $X : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2$  uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco não geodésica e  $a > 0$ . Defina as funções*

$$\tau(s) = \langle T(s), e_3 \rangle \quad \nu(s) = \langle N(s), e_3 \rangle \quad \alpha(s) = \langle X(s), e_3 \rangle, \quad (4-1)$$

onde  $T$  e  $N$  são os campos unitários tangente e normal a  $X$ , respectivamente. Então

$$\kappa_g(s) = a\alpha(s), \quad (4-2)$$

para todo  $s \in I$ , se, e somente se, as funções  $\tau, \nu$  e  $\alpha$  satisfazem o sistema

$$\begin{cases} \tau' = a\alpha\nu - \alpha, \\ \nu' = -a\alpha\tau, \\ \alpha' = \tau, \end{cases} \quad (4-3)$$

com condição inicial  $(\tau(0), \nu(0), \alpha(0))$  satisfazendo  $\tau^2(0) + \nu^2(0) + \alpha^2(0) = 1$ .

*Demonstração.* Suponha  $\kappa_g(s) = a\alpha(s)$ , para todo  $s \in I$ . Por uma aplicação direta das equações de Darboux (1-3), podemos verificar que essas funções (4-1) satisfazem as seguintes equações.

$$\begin{cases} \tau'(s) = \kappa_g(s)\nu(s) - \alpha(s), \\ \nu'(s) = -\kappa_g(s)\tau(s), \\ \alpha'(s) = \tau(s). \end{cases} \quad (4-4)$$

Substituindo  $\kappa_g = a\alpha$  no sistema, obtemos (4-3).

Reciprocamente, suponha as funções  $\tau, \nu$  e  $\alpha$  satisfazendo (4-3). Igualando com (4-4), temos

$$\begin{cases} a\alpha\nu - \alpha = \kappa_g\nu - \alpha, \\ -a\alpha\tau = -\kappa_g\tau, \end{cases}$$

equivalentemente,

$$(a\alpha - \kappa_g)\nu = 0 \quad \text{e} \quad (a\alpha - \kappa_g)\tau = 0.$$

Note que quando  $(a\alpha - \kappa_g) \neq 0$ , temos que  $\nu = 0$  e  $\tau = 0$  se anulará simultaneamente em  $\pm e_3 = (0, 0, \pm 1)$ , pois pela condição inicial teremos  $\alpha = \pm 1$ , caso contrário segue o resultado  $\kappa_g = a\alpha$ .

□

Observe que um exemplo trivial de curvas na esfera que dependem da função altura são os paralelos, uma vez que mantêm a altura constante, Figura 4.1.

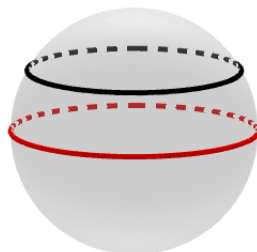


Figura 4.1: Paralelos da esfera unitária

A seguir, analisaremos o comportamento do campo na esfera, utilizando as condições estabelecidas na Proposição 4.1.

**Proposição 4.2** *Dada uma solução  $(\tau(s), \nu(s), \alpha(s))$  para o sistema (4-3) em um intervalo  $J$ , com  $a > 0$  e condição inicial  $(\tau(0), \nu(0), \alpha(0))$  satisfazendo  $\tau^2(0) + \nu^2(0) + \alpha^2(0) = 1$ , existe uma curva suave  $X : J \rightarrow \mathbb{S}^2$  parametrizada pelo comprimento de arco  $s$  tal que seus campos de vetores unitários tangente e normal  $T$  e  $N$  satisfazem (4-1).*

*Demonstração.* Como  $(\tau(s), \nu(s), \alpha(s))$  satisfaz (4-3), então

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(\tau^2(s) + \nu^2(s) + \alpha^2(s)) &= 2\tau(s)\tau'(s) + 2\nu(s)\nu'(s) + 2\alpha(s)\alpha'(s) \\ &= 2\tau(s)(a\tau(s)\nu(s) - \alpha(s)) + 2\nu(s)(-a\tau^2(s)) + 2\alpha(s)\tau(s) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, pela condição inicial implica que  $\tau^2(s) + \nu^2(s) + \alpha^2(s) \equiv 1$  é constante para todo  $s$ .

□

Dessa forma, usando o Teorema 1.1 e por movimentos rígidos existe uma única curva  $X : J \rightarrow \mathbb{S}^2$  cuja curvatura é  $\kappa_g(s) = a\alpha(s)$ ; i.e.,  $X(s), N(s), T(s)$  satisfazem as equações de Darboux.

Além disso, a curva  $X(s)$  é determinada unicamente pelas condições iniciais ortonormais  $T(0), N(0), X(0)$  que pode ser escolhido tal que

$$\tau(0)T(0) + \nu(0)N(0) + \alpha(0)X(0) = e_3.$$

Derivando a expressão  $\tau(s)T(s) + \nu(s)N(s) + \alpha(s)X(s)$ , usando (4-3) e assumindo  $\kappa_g = a\tau$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(\tau T + \nu N + \alpha X) &= \tau' T + \tau T' + \nu' N + \nu N' + \alpha' X + \alpha X' \\ &= a\alpha\nu T + \tau\kappa_g N - a\alpha\tau N - \nu\kappa_g T = 0, \end{aligned}$$

para todo  $s$ .

Assim,  $\tau(s)T(s) + \nu(s)N(s) + \alpha(s)X(s) \equiv e_3$  e portanto, (4-1) é satisfeito.

Iremos considerar a Observação 2.1.1, utilizando a notação da Proposição 4.1. Iniciaremos encontrando os autovalores do campo nos pontos singulares na esfera unitária, conforme especificado por (4-3). Isto nos permitirá entender o comportamento das curvas integrais desse campo.

**Lema 4.3** *Seja  $a > 0$  uma constante e seja  $\psi : \mathbb{S}^2 \rightarrow T\mathbb{S}^2$  um campo definido na esfera unitária por*

$$\psi(\tau, \nu, \alpha) = (a\alpha\nu - \alpha, -a\alpha\tau, \tau). \quad (4-5)$$

*Então os pontos singulares de  $\psi$  e os respectivos autovalores de  $d\psi$  em cada ponto singular são*

$$e_2 = (0, 1, 0), \quad \lambda = \pm\sqrt{a-1},$$

$$-e_2 = (0, -1, 0), \quad \lambda = \pm\sqrt{-a-1},$$

$$q_i = \left(0, \frac{1}{a}, \pm\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}\right), \quad \lambda = \pm\sqrt{-a^2+1}. \quad (4-6)$$

*Para  $i = 1, 2$  e  $a > 0$  teremos que os autovalores de  $d\psi$  poderão ser reais ou complexos com parte real nula.*

*Demonstração.* Os pontos singulares de  $\psi$  são  $\psi(\tau, \nu, \alpha) = (0, 0, 0)$ , i.e.,

$$\begin{cases} (a\nu - 1)\alpha = 0, \\ \tau = 0, \end{cases}$$

de  $(a\nu - 1)\alpha = 0$  temos

- $\alpha = 0$ ,

como  $\alpha = \tau = 0$  pela condição inicial teremos  $\nu = \pm 1$ , ou seja, os pontos singulares são

$$e_2 = (0, 1, 0) \quad \text{e} \quad -e_2 = (0, -1, 0).$$

- Se  $\alpha \neq 0$ ,

temos  $\nu = \frac{1}{a}$ , e  $0^2 + \frac{1}{a^2} + \alpha^2 = 1$ , logo,  $\alpha = \pm \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a}$ , então os pontos singulares são:

$$q_1 = \left(0, \frac{1}{a}, +\frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a}\right) \quad \text{e} \quad q_2 = \left(0, \frac{1}{a}, -\frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a}\right). \quad (4-7)$$

Além disso, a diferencial de  $\psi$  é dada por

$$d\psi = \begin{pmatrix} 0 & a\alpha & a\nu - 1 \\ -a\alpha & 0 & -a\tau \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicando no ponto  $e_2$ , temos

$$d\psi_{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a - 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto,  $\lambda$  é um autovalor de  $d\psi_{e_2}$  se existe  $v \in T_{e_2}\mathbb{S}^2 = \{v = (v_1, 0, v_3) : v_1, v_3 \in \mathbb{R}\}$  tal que  $d\psi_{e_2}(v) = \lambda v$ , i.e.,

$$d\psi_{e_2}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a - 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ v_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Isso implica que,

$$\begin{cases} (a - 1)v_3 = \lambda v_1, & (i) \\ v_1 = \lambda v_3. & (ii) \end{cases}$$

Tome  $v_3 \neq 0$ , pois caso contrário pelo sistema acima teríamos  $v_3 = v_1 = 0$ . Substituindo a equação (ii) do sistema na equação (i) obtemos

$$\begin{aligned}(a-1)v_3 &= \lambda^2 v_3 \\ \lambda^2 v_3 - (a-1)v_3 &= 0 \\ (\lambda^2 - a + 1)v_3 &= 0.\end{aligned}$$

Logo,  $\lambda^2 - a + 1 = 0$ . Resolvendo a equação obtemos

$$\lambda = \pm\sqrt{a-1}.$$

De forma análoga se mostra para  $-e_2$ .

$$d\psi_{-e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a-1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto,  $\lambda$  é um autovalor de  $d\psi_{-e_2}$  se existe  $v \in T_{-e_2}\mathbb{S}^2 = \{v = (v_1, 0, v_3) : v_1, v_3 \in \mathbb{R}\}$  tal que  $d\psi_{-e_2}(v) = \lambda v$ .

$$d\psi_{-e_2}(v) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a-1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ v_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Obtemos o sistema

$$\begin{cases} (-a-1)v_3 = \lambda v_1, & (i) \\ v_1 = \lambda v_3. & (ii) \end{cases}$$

De forma análoga tomaremos  $v_3 \neq 0$ . Substituindo a equação (ii) do sistema em (i) temos  $\lambda^2 - a + 1 = 0$ .

Logo,

$$\lambda = \pm\sqrt{-a-1}.$$

Aplicando a diferencial de  $\psi$  no ponto singular  $q_1 = (0, \frac{1}{a}, \frac{\sqrt{a^2-1}}{a})$ , temos

$$d\psi_{q_1} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{a^2-1} & 0 \\ -\sqrt{a^2-1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim,  $\lambda$  é autovalor de  $q_1$  se existe  $v \in T_{q_1}\mathbb{S}^2$  onde

$$\left\langle (v_1, v_2, v_3), \left(0, \frac{1}{a}, \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a}\right) \right\rangle = 0,$$

implicando,

$$v_2 = -\sqrt{a^2 - 1}v_3,$$

ou seja,  $v = (v_1, -\sqrt{a^2 - 1}v_3, v_3)$ . Dessa forma,  $\lambda$  é um autovalor de  $v$  se  $d\psi_{q_1}(v) = \lambda v$ , i.e.,

$$d\psi_{q_1}(v) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{a^2 - 1} & 0 \\ -\sqrt{a^2 - 1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ -\sqrt{a^2 - 1}v_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ -\sqrt{a^2 - 1}v_3 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{cases} -(a^2 - 1)v_3 = \lambda v_1, & (i) \\ -\sqrt{a^2 - 1}v_1 = -\sqrt{a^2 - 1}\lambda v_3, & (ii) \\ v_1 = \lambda v_3. & (iii) \end{cases}$$

Substituindo a equação (iii) em (i) temos

$$\begin{aligned} -(a^2 - 1)v_3 &= \lambda^2 v_3, \\ \lambda^2 v_3 + (a^2 - 1)v_3 &= 0, \\ (\lambda^2 + (a^2 - 1))v_3 &= 0. \end{aligned}$$

Tomando  $v_3 \neq 0$ , temos  $\lambda^2 + a^2 - 1 = 0$ . Portanto,

$$\lambda = \pm\sqrt{-a^2 + 1}.$$

De maneira análoga fazemos para  $q_2 = (0, \frac{1}{a}, -\frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a})$ . Portanto,

$$\lambda = \pm\sqrt{-a^2 + 1}.$$

□

Para o retrato de fase deste campo, usaremos o conceito da seção 1.3 sobre campos em variedades Riemannianas. Ou seja, vamos obter a expressão do campo de vetores  $\psi(\tau, \nu, \alpha) = (a\alpha\nu - \alpha, -a\alpha\tau, \tau)$  na carta para trabalharmos com um campo bidimensional. O nosso objetivo é induzir um campo  $f$  em  $\mathbb{R}^2$ , para isso tomamos um ponto  $q$  em  $\mathbb{R}^2$  e, através de uma transformação difeomórfica, associamos  $q$  a

um ponto na esfera  $\mathbb{S}^2$ . Em seguida, aplicamos o campo de vetores  $\psi$  nesse ponto da esfera e retornamos ao plano pela diferencial da transformação, i.e.,  $f = d\phi_p\psi(p)$ .

Em termos matemáticos, considere  $\phi(\tau, \alpha) = (\tau, \sqrt{1 - \alpha^2 - \tau^2}, \alpha)$  a aplicação que associa cada ponto do plano euclidiano à esfera unitária em uma vizinhança de  $e_2 = (0, 1, 0)$ . Observe ainda que a diferencial da aplicação  $\phi$  leva o espaço tangente de  $\mathbb{R}^2$  ao espaço tangente de  $\mathbb{S}^2$ . Aplicando o campo de vetores e tomando a diferencial da transformação, obtemos o campo na carta  $f(\tau, \alpha) = (-\alpha + a\alpha\sqrt{1 - \alpha^2 - \tau^2}, \tau)$ .

Os pontos singulares de  $f$  são

$$(0, 0), \quad p_1 = \left(0, \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a}\right) \quad \text{e} \quad p_2 = \left(0, -\frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a}\right). \quad (4-8)$$

De fato, tomando  $f(\tau, \alpha) = (0, 0)$ , então

$$\begin{aligned} -\alpha + a\alpha\sqrt{1 - \alpha^2 - \tau^2} &= 0, \\ \tau &= 0. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema temos,

$$\begin{aligned} -\alpha + a\alpha\sqrt{1 - \alpha^2} &= 0, \\ (a^2 - a^2\alpha^2 - 1)\alpha^2 &= 0. \end{aligned}$$

Para  $\alpha = 0$  temos o ponto  $(0, 0)$ . Para  $\alpha \neq 0$  temos  $(a^2 - a^2\alpha^2 - 1) = 0$ , portanto obtemos (4-8).

Observe que o ponto singular  $(0, 0)$  de  $f$  corresponde ao ponto singular  $e_2$  de  $\psi$ , enquanto que os pontos singulares  $p_i$  de  $f$  correspondem aos pontos  $q_i$  (4-7) de  $\psi$  para  $i = 1, 2$ , respectivamente. De fato, observe que a transformação  $\phi$  que associa um ponto do plano a um ponto da esfera leva os pontos singulares do campo  $f$  a pontos singulares do campo  $\psi$ .

$$\phi(0, 0) = (0, 1, 0) = e_2,$$

$$\phi(0, p_i) = \phi\left(0, \pm \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a}\right) = \left(0, \frac{1}{a}, \pm \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a}\right) = q_i.$$

para  $i = 1, 2$ .

Além disso, os autovalores de  $df$  em cada ponto singular  $(0, 0), p_1$  e  $p_2$  coincidem com os autovalores da diferencial de  $\psi$  na esfera, nos pontos  $e_2, q_1$  e  $q_2$ , respectivamente.

De fato, a matriz jacobiana é dada por

$$df(\tau, \alpha) = \begin{pmatrix} \frac{-a\tau\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2-\tau^2}} & -1 + a\sqrt{1-\alpha^2-\tau^2} - \frac{a\alpha^2}{\sqrt{1-\alpha^2-\tau^2}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicando no ponto singular  $(0, 0)$  temos

$$df(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 + a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\lambda$  é um autovalor de  $v$  se  $d\psi_{(0,0)}(v) = \lambda v$ , então

$$df_{(0,0)}(v) = \begin{pmatrix} 0 & -1 + a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Obtemos o sistema

$$\begin{cases} (-1 + a)v_2 = \lambda v_1, & (i) \\ v_1 = \lambda v_2. & (ii) \end{cases}$$

Substituindo a equação  $(ii)$  em  $(i)$  e tomando  $v_2 \neq 0$ , obtemos  $\lambda^2 + 1 - a = 0$ . Portanto o autovalor de  $df_{(0,0)}$  é

$$\lambda = \pm\sqrt{-1 + a},$$

correspondente ao autovalor de  $d\psi$  em  $e_2$ .

Para o ponto  $p_1 = (0, \frac{\sqrt{a^2-1}}{a})$  temos

$$df(0, \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}) = \begin{pmatrix} 0 & -a^2 + 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\lambda$  é um autovalor de  $v$  se  $d\psi_{p_1}(v) = \lambda v$ , então

$$df_{(0, \frac{\sqrt{a^2-1}}{a})}(v) = \begin{pmatrix} 0 & -a^2 + 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Obtemos o sistema

$$\begin{cases} (-a^2 + 1)v_2 = \lambda v_1, & (i) \\ v_1 = \lambda v_2. & (ii) \end{cases}$$

Substituindo a equação  $(ii)$  em  $(i)$  e tomando  $v_2 \neq 0$ , temos  $\lambda^2 + a^2 - 1 = 0$ . Portanto,

$$\lambda = \pm\sqrt{1 - a^2}.$$

correspondente ao autovalor  $d\psi$  em  $q_1$ .

De forma análoga se mostra que  $\lambda = \pm\sqrt{1-a^2}$  é um autovalor para  $df_{p_2}$  correspondente ao autovalor de  $d\psi$  em  $q_2$ .

Agora tome  $g(\tau, \alpha) = (-\alpha - a\alpha\sqrt{1-\alpha^2-\tau^2}, \tau)$  como sendo a expressão do campo  $\psi$  em torno do ponto  $-e_2 = (0, -1, 0)$  e  $\Phi(\tau, \alpha) = (\tau, -\sqrt{1-\alpha^2-\tau^2}, \alpha)$  a aplicação do plano euclidiano na esfera unitária tal que  $\Phi(0, 0) = (0, -1, 0)$ . Como a segunda entrada de  $\psi$  é sempre negativa, a carta  $g$  não mapeia os pontos  $q_1$  e  $q_2$  como no caso anterior.

De maneira semelhante, obtemos o ponto singular  $(0, 0)$ . Logo,

$$dg_{(0,0)}(v) = \begin{pmatrix} 0 & -1-a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Resolvendo o sistema obtido a partir da igualdade acima, obtemos a equação  $\lambda^2 - (-1-a) = 0$ . Portanto os autovalores de  $dg_{(0,0)}$  são

$$\lambda = \pm\sqrt{-1-a},$$

equivalentemente ao autovalor de  $d\psi$  em  $-e_2$ .

Dessa forma, concluímos que os autovalores correspondentes aos campos na carta  $f$  e  $g$  coincide com os autovalores da diferencial de  $\psi$  na esfera. Sendo assim, podemos analisar o comportamento das trajetórias no plano para cada intervalo de  $a$  que corresponderá com o mesmo comportamento na esfera.

Para  $0 < a < 1$  temos os pontos singulares  $(0, 0)$  de  $f$  e  $g$  e os autovalores são não-hiperbólicos  $\lambda = \pm\sqrt{a-1}$  e  $\lambda = \pm\sqrt{-a-1}$ , respectivamente, i.e., são complexos com parte real nula (imaginário puro). Dessa forma, as curvas integrais se movimentam em torno dos pontos singulares de maneira circular. Veja a Figura 4.2, a esquerda plotaremos o retrato do campo na carta e a direita do campo na esfera.

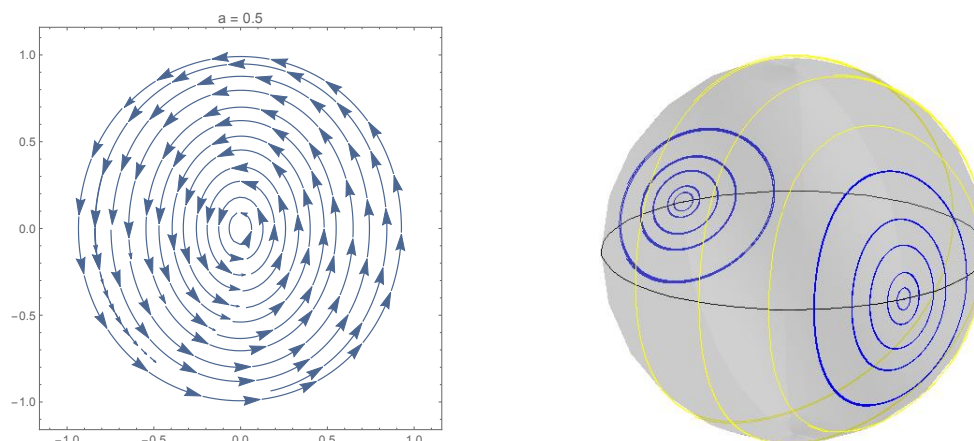


Figura 4.2:  $a < 1$ .

Para  $a = 1$ , temos novamente os pontos singulares  $(0, 0)$  de  $f$  e  $g$ , cujos autovalores são nulos  $\lambda = 0$  e imaginários puros  $\lambda = \pm\sqrt{-2}$ , respectivamente. Assim, ambos se movem em forma circular. Veja na Figura 4.3 o comportamento das curvas para a função  $g$  e na Figura 4.4 para a função  $f$  quando  $a = 1$ .

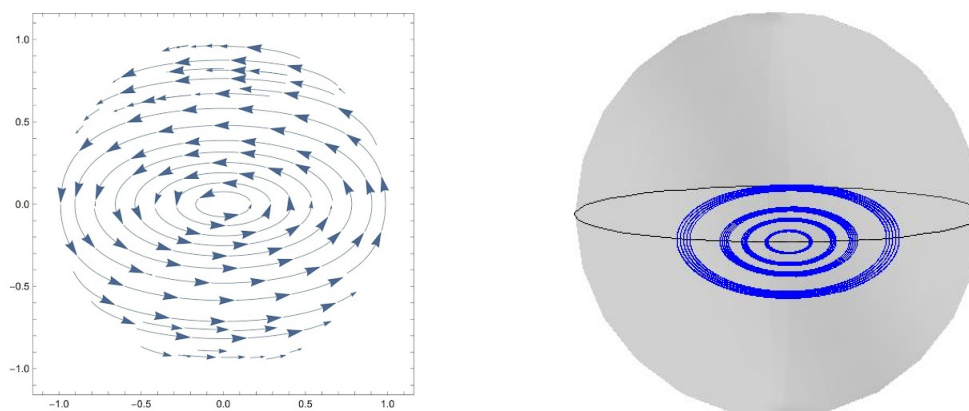


Figura 4.3:  $a = 1$  no campo  $g$ .

Observe que no campo  $g$  o movimento permanece padrão, enquanto que para  $f$  em  $a = 1$  temos que o movimento circular começa a apresentar uma dilatação. Veja 4.4.

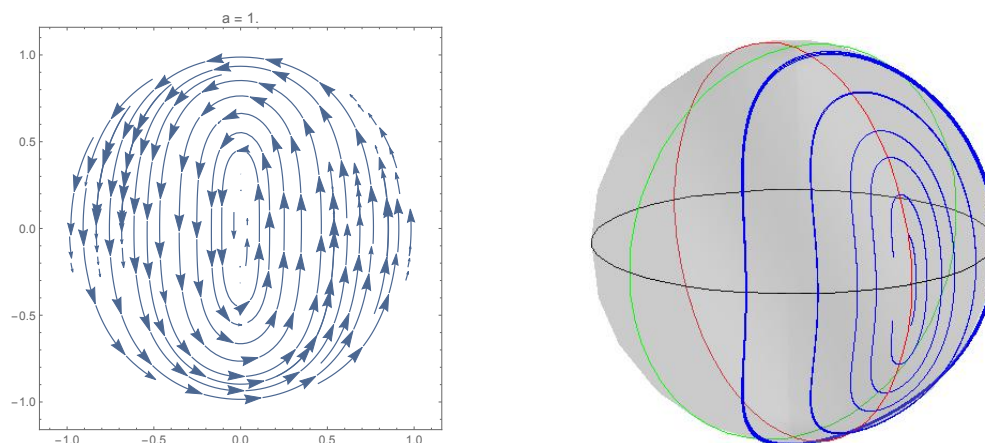


Figura 4.4:  $a = 1$  no campo  $f$ .

Essa dilatação decorre do fato de que para  $a > 1$  o campo  $f$  terá mais dois pontos singulares, a saber, os pontos  $p_i = (0, \pm \frac{\sqrt{a^2-1}}{a})$ ,  $i = 1, 2$ , para isso iremos analisar os autovalores de cada ponto singular quando  $a > 1$  em cada campo na carta.

Para o campo  $g$  no ponto  $(0, 0)$  teremos ainda autovalores imaginários puros e o comportamento segue inalterado. Por outro lado, os autovalores do campo  $f$  serão reais  $\lambda = \pm \sqrt{a-1}$  em  $(0, 0)$  com sinais opostos, portanto teremos um ponto de sela.

Para os pontos singulares  $p_1 = (0, \frac{\sqrt{a^2-1}}{a})$  e  $p_2 = (0, -\frac{\sqrt{a^2-1}}{a})$  os autovalores  $\lambda = \sqrt{1-a^2}$  e  $-\lambda = -\sqrt{1-a^2}$  são imaginários puros, ou seja, nos pontos  $p_1$  e  $p_2$  teremos movimentos circulares. Observe na Figura 4.5.

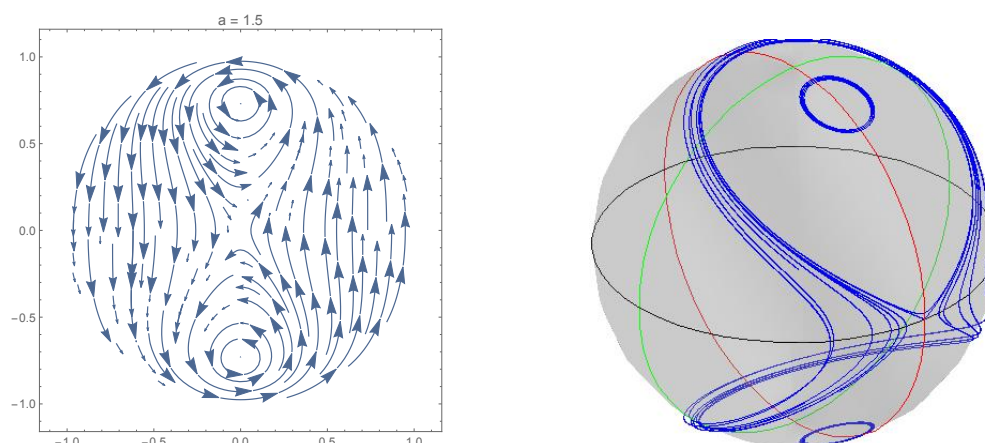


Figura 4.5:  $a > 1$  no campo  $f$ .

Note que quanto maior for o valor de  $a$  mais os pontos  $q_1$  e  $q_2$  se aproximam dos polos da esfera,

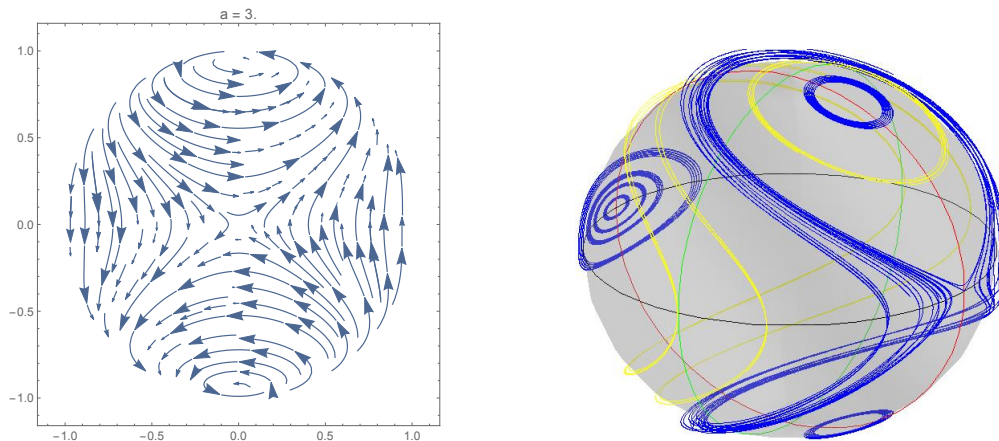


Figura 4.6:  $a > 1$ .

A proposição a seguir nos fornecerá o comportamento das curvas cuja curvatura geodésica é proporcional a função altura ( $\alpha$ ) sobre a esfera.

**Proposição 4.4** *Uma curva da esfera  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  parametrizada pelo comprimento de arco*

$$X(s) = (\sin u(s) \cos v(s), \sin u(s) \sin v(s), \cos u(s)), \quad (4-9)$$

tal que  $\kappa_g(s) = a\alpha(s)$  então, as funções  $u$  e  $v$  satisfazem

$$\begin{cases} u'' = av' \sin u \cos u + (v')^4 \sin^2 u \cos u - 2(u')^2(v')^2 \sin u \cos u, \\ v'' = -au' \cot u - u'(v')^3 \cos u - 2(v')^3 \cot u - (v')^3 u' \sin u \cos u. \end{cases} \quad (4-10)$$

*Demonstração.* Note que

$$\begin{aligned} X_u &= (\cos u \cos v, \cos u \sin v, -\sin u), \\ X_v &= (-\sin u \sin v, \sin u \cos v, 0). \end{aligned}$$

O campo tangente e o campo normal unitários é dado respectivamente, por

$$\begin{aligned} T &= u'X_u + v'X_v \\ &= (u' \cos u \cos v - v' \sin u \sin v, u' \cos u \sin v + v' \sin u \cos v, -u' \sin u), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N &= T \wedge X \\ &= (u' \sin v + v' \sin u \cos u \cos v, -u' \cos v + v' \sin u \sin v \cos u, -v' \sin^2 u). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T' = & (u'' \cos u \cos v - (u')^2 \sin u \cos v - 2u'v' \cos u \sin v - v'' \sin u \sin v - (v')^2 \sin u \cos v, \\
& u'' \cos u \sin v - (u')^2 \sin u \sin v + 2u'v' \cos u \cos v + v'' \sin u \cos v - (v')^2 \sin u \sin v, \\
& -u'' \sin u - (u')^2 \cos u).
\end{aligned}$$

Façamos  $N = (N_1, N_2, N_3)$  e  $T' = (T_1, T_2, T_3)$ . Logo,

$$\langle T', N \rangle = N_1 T_1 + N_2 T_2 + N_3 T_3.$$

Calculando cada parcela individualmente temos

$$\begin{aligned}
N_1 T_1 = & (u'' \cos u \cos v)(u' \sin v + v' \sin u \cos u \cos v) \\
& - ((u')^2 \sin u \cos v)(u' \sin v + v' \sin u \cos u \cos v) \\
& - (2u'v' \cos u \sin v)(u' \sin v + v' \sin u \cos u \cos v) \\
& - (v'' \sin u \sin v)(u' \sin v + v' \sin u \cos u \cos v) \\
& - ((v')^2 \sin u \cos v)(u' \sin v + v' \sin u \cos u \cos v),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_2 T_2 = & (u'' \cos u \sin v)(-u' \cos v + v' \sin u \sin v \cos u) \\
& - ((u')^2 \sin u \sin v)(-u' \cos v + v' \sin u \sin v \cos u) \\
& + (2u'v' \cos u \cos v)(-u' \cos v + v' \sin u \sin v \cos u) \\
& + (v'' \sin u \cos v)(-u' \cos v + v' \sin u \sin v \cos u) \\
& - ((v')^2 \sin u \sin v)(-u' \cos v + v' \sin u \sin v \cos u),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_3 T_3 = & (-u'' \sin u)(-v' \sin^2 u) - ((u')^2 \cos u)(-v' \sin^2 u) \\
= & u'' v' \sin^3 u + (u')^2 v' \cos u \sin^2 u.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^3 T_i N_i &= u'' u' \cos u \cos v \sin v + u'' v' \sin u \cos^2 u \cos^2 v \\
&- (u')^3 \sin u \cos v \sin v - (u')^2 v' \sin^2 u \cos u \cos^2 v \\
&- 2(u')^2 v' \cos u \sin^2 v - 2u'(v')^2 \cos^2 u \sin v \sin u \cos v \\
&- v'' u' \sin u \sin^2 v - v'' v' \sin^2 u \sin v \cos u \cos v \\
&- u'(v')^2 \sin u \cos v \sin v - (v')^3 \sin^2 u \cos u \cos^2 v \\
&- u'' u' \cos u \sin v \cos v + u'' v' \sin u \sin^2 v \cos^2 u \\
&+ (u')^3 \sin u \sin v \cos v - (u')^2 v' \sin^2 u \sin^2 v \cos u \\
&- 2(u')^2 v' \cos u \cos^2 v + 2u'(v')^2 \cos^2 u \sin u \sin v \cos v \\
&- v'' u' \sin u \cos^2 v + v'' v' \sin^2 u \sin v \cos u \cos v \\
&+ u'(v')^2 \sin u \sin v \cos v - (v')^3 \sin^2 u \sin^2 v \cos u \\
&+ u'' v' \sin^3 u + (u')^2 v' \cos u \sin^2 u.
\end{aligned}$$

Agrupando os termos e usando a relação trigonométrica  $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$  obtemos a curvatura geodésica definida por (1-2)

$$\kappa_g = \langle T', N \rangle = u'' v' \sin u - u' v'' \sin u - (v')^3 \cos u \sin u - 2(u')^2 v' \cos u, \quad (4-11)$$

por outro lado, temos (4-2), i.e.,

$$\kappa_g = a\alpha = a \langle X, e_3 \rangle = a \cos u, \quad (4-12)$$

igualando (4-11) e (4-12), temos

$$a \cos u = u'' v' \sin u - u' v'' \sin u - (v')^3 \cos u \sin u - 2(u')^2 v' \cos u,$$

logo,

$$u'' v' \sin u - u' v'' \sin u = a \cos u + (v')^3 \cos u \sin u - 2(u')^2 v' \cos u. \quad (4-13)$$

Derivando  $(u')^2 + (v')^2 \sin^2 u = 1$  temos

$$u' u'' + v' v'' \sin^2 u = -(v')^2 u' \sin u \cos u. \quad (4-14)$$

Façamos  $(v' \sin u)$ (4-11),  $u'$ (4-12) e somando temos

$$u'' = av' \sin u \cos u + (v')^4 \sin^2 u \cos u - 2(u')^2 (v')^2 \sin u \cos u.$$

Fazendo  $-u'$ (4-11),  $(v' \sin u)$ (4-12) e somando, obtemos

$$v'' = -av' \cot u - u'(v')^3 \cos u - 2(v')^3 \cot u - (v')^3 u' \sin u \cos u.$$

□

Vejamos o comportamento dessas curvas para  $a \leq 1$  e  $a > 1$  com condições iniciais diferentes nas Figuras a seguir.

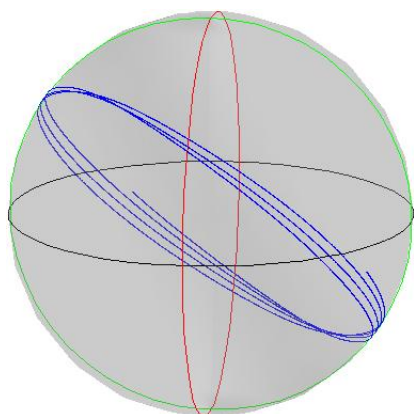


Figura 4.7: Condição inicial:  $a = 0,5$   
 $u(0) = \frac{\pi}{4}$ ,  $v(0) = \frac{\pi}{4}$ ,  $u'(0) = 0$ ,  
 $v'(0) = 1$ .

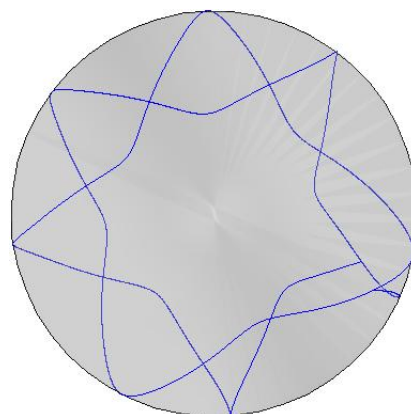


Figura 4.8: Condição inicial:  $a = 0,5$   
 $u(0) = \frac{\pi}{2}$ ,  $v(0) = \frac{\pi}{4}$ ,  $u'(0) = 0,5$ ,  
 $v'(0) = 1$ .

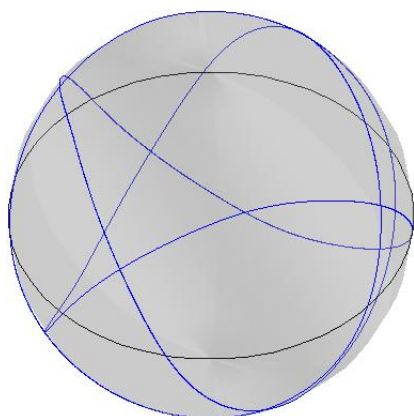


Figura 4.9: Condição inicial:  $a = 1$   
 $u(0) = \frac{\pi}{4}$ ,  $v(0) = \frac{\pi}{4}$ ,  $u'(0) = 0$ ,  
 $v'(0) = 1$ .

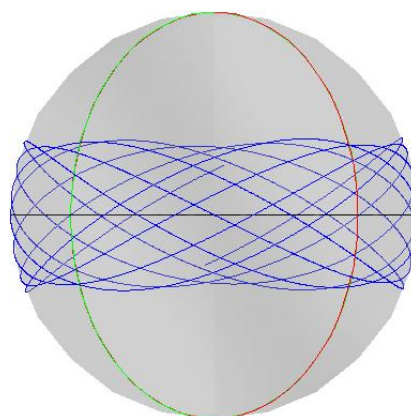


Figura 4.10: Condição inicial:  $a = 1$   
 $u(0) = \frac{\pi}{2}$ ,  $v(0) = \frac{\pi}{4}$ ,  $u'(0) = 0,5$ ,  
 $v'(0) = 1$ .

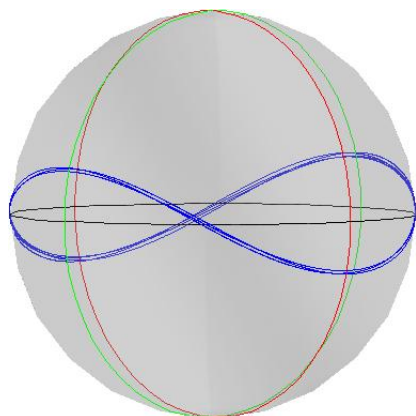


Figura 4.11: Condição inicial:  $a = 3$   
 $u(0) = \frac{\pi}{2}$ ,  $v(0) = \frac{\pi}{4}$ ,  $u'(0) = 0, 5$ ,  
 $v'(0) = 1$ .

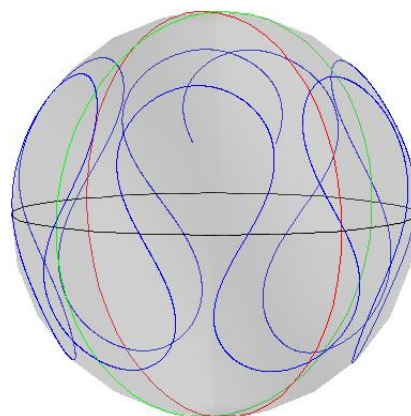


Figura 4.12: Condição inicial:  $a = 3$   
 $u(0) = \frac{\pi}{2}$ ,  $v(0) = \frac{\pi}{4}$ ,  $u'(0) = 0, 5$ ,  
 $v'(0) = 1$ .

É importante ressaltar que a variedade considerada é compacta, o que implica que o campo  $\Psi$  é completo. Assim, em conjunto com o Teorema Fundamental das Curvas na Esfera 1.1, podemos afirmar a existência das funções  $\tau, \nu$  e  $\alpha$ .

Problema futuro: Completar a análise do retrato de fase, assim como fizeram os autores [8].

Problema Centro-Foco: Aplicar a teoria de Lyapunov para determinar se um ponto singular é do tipo centro ou foco. Em termos gerais, identificar constantes que, se todas forem nulas, indicam que o ponto singular é do tipo centro. Para autovalores nulos, aplicar a teoria de Blow-Up. Estas abordagens são baseadas nas teorias de Sistemas Dinâmicos.

---

## Referências Bibliográficas

---

- [1] U. ABRESCH AND J. LANGER, *The normalized curve shortening flow and homothetic solutions*, *Journal of Differential Geometry*, 23 (1986), pp. 175–196.
- [2] S. B. ANGENENT, *Curve shortening and the topology of closed geodesics on surfaces*, *Annals of mathematics*, (2005), pp. 1187–1241.
- [3] F. CAO, *Geometric curve evolution and image processing*, Springer Science & Business Media, 2003.
- [4] T. H. COLDING, W. P. MINICOZZI II, AND E. K. PEDERSEN, *Mean curvature flow as a tool to study topology of 4-manifolds*, arXiv preprint arXiv:1208.5988, (2012).
- [5] F. N. DA SILVA AND K. TENENBLAT, *Soliton solutions to the curve shortening flow on the 2-dimensional hyperbolic space*, *Revista Matemática Iberoamericana*, 38 (2022), pp. 1763–1782.
- [6] M. P. DO CARMO, *Geometria Riemanniana*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, Brasil, 2 ed., 2005. Livro de Notas de Cursos do IMPA.
- [7] M. P. DO CARMO, *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, Brasil, 2 ed., 2006.
- [8] H. DOS REIS AND K. TENENBLAT, *Soliton solutions to the curve shortening flow on the sphere*, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 147 (2019), pp. 4955–4967.
- [9] F. DUMORTIER, J. LLIBRE, AND J. C. ARTÉS, *Qualitative theory of planar differential systems*, vol. 2, Springer, 2006.
- [10] C. EPSTEIN AND M. GAGE, *The curve shortening flow*, in *Wave Motion: Theory, Modelling, and Computation: Proceedings of a Conference in Honor of the 60th Birthday of Peter D. Lax*, Springer, 1987, pp. 15–59.

- [11] M. FECKO, *Differential Geometry and Lie Groups for Physicists*, Cambridge University Press, 2006.
- [12] M. E. GAGE, *Curve shortening on surfaces*, in *Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure*, vol. 23, 1990, pp. 229–256.
- [13] Y. GIGA, *Surface evolution equations: a level set method*, Hokkaido University technical report series in mathematics, 71 (2002), p. 1.
- [14] H. P. HALLDORSSON, *Self-similar solutions to the curve shortening flow*, *Transactions of the American Mathematical Society*, (2012), pp. 5285–5309.
- [15] H. P. HALLDORSSON, *Self-similar solutions to the mean curvature flow in the minkowski plane  $\mathbb{R}^{1,1}$* , *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, (2015), pp. 209–243.
- [16] G. HUISKEN AND S.-T. YAU, *Definition of center of mass for isolated physical systems and unique foliations by stable spheres with constant mean curvature*, *Inventiones mathematicae*, 124 (1996), pp. 281–311.
- [17] B. LEANDRO, R. NOVAIS, AND H. REIS, *Rotational solitons for the curve shortening flow on revolution surfaces*, *Results in Mathematics*, 79 (2024), p. 190.
- [18] J. M. LEE, *Introduction to Smooth Manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2nd ed., 2013.
- [19] W. W. MULLINS, *Theory of thermal grooving*, *Journal of Applied Physics*, 28 (1957), pp. 333–339.
- [20] J. PALIS AND W. DE MELO, *Introdução aos sistemas dinâmicos*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1978.
- [21] J. J. PALIS AND W. DE MELO, *Geometric theory of dynamical systems: an introduction*, Springer Science & Business Media, 2012.
- [22] L. PERKO, *Differential Equations and Dynamical Systems*, vol. 7, Springer Science & Business Media, 2013.
- [23] H. F. S. D. REIS, *Sobre o fluxo de curvatura média em formas espaciais*, PhD thesis, Universidade de Brasília, Instituto de Ciências Exatas, departamento de Matemática, Brasília, 2017. 82.
- [24] J.-J. E. SLOTTINE, *Applied nonlinear control*, Prentice - Hall, 2 (1991), pp. 1123–1131.

- 
- [25] K. TENENBLAT, *Introdução à Geometria Diferencial*, UnB, Brasília: Editora Blucher, 2 ed., 2008.
- [26] P. TOPPING, *Mean curvature flow and geometric inequalities*, J. Reine Angew. Math. Soc. 503, (1998), pp. 47–61.