



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

RAQUEL PEREIRA DE ARAÚJO

Novas classes de superfícies Weingarten generalizada

Goiânia
2023



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

Dissertação Tese Outro*: _____

*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

Exemplos: Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

2. Nome completo do autor

Raquel Pereira de Araújo

3. Título do trabalho

Novas classes de Superfícies Weingarten generalizada

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);

b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.

O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.



Documento assinado eletronicamente por **Raquel Pereira De Araújo, Discente**, em 12/09/2023, às 11:21, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Armando Mauro Vasquez Corro, Professor do Magistério Superior**, em 15/09/2023, às 13:38, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3995063** e o código CRC **EB7D5512**.

RAQUEL PEREIRA DE ARAÚJO

Novas classes de superfícies Weingarten generalizada

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Geometria.

Orientador: Prof. Dr. Armando Mauro Vasquez Corro

Goiânia
2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Araújo, Raquel Pereira de
Novas classes de superfícies Weingarten generalizada
[manuscrito] / Raquel Pereira de Araújo. - 2023.
LXVIII, 68 f.

Orientador: Prof. Dr. Armando Mauro Vasquez Corro.
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de
Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em
Matemática, Goiânia, 2023.

Bibliografia.

Inclui abreviaturas, gráfico, lista de figuras.

1. Congruência de esferas. 2. Função harmônica. 3. Função holomorfa. 4. Média do raio de curvatura hiperbólico. 5. Espaço hiperbólico. I. Corro, Armando Mauro Vasquez, orient. II. Título.

CDU 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE TESE

Ata nº **06** da sessão de Defesa de Tese de **Raquel Pereira de Araújo**, que confere o título de Doutora em Matemática, **na área de concentração de Geometria**.

Ao vigésimo quinto dia do mês de agosto do ano de dois mil e vinte e três, a partir das dez horas, via Web videoconferência, realizou-se a sessão pública de Defesa de Tese intitulada "**Novas classes de Superfícies Weingarten generalizada**." Os trabalhos foram instalados pelo Orientador e Presidente da banca, Professor Doutor **Armando Mauro Vasquez Corro - IME/UFG** com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor **Benedito Leandro Neto - IME/UFG** - membro titular interno, Professor Doutor **Marcelo Bezerra Barboza** - membro titular interno, Professor Doutor **Marco Antonio Lázaro Velásquez - UAmat/UFMG** membro titular externo, Professor Doutor **Fábio Reis dos Santos - DMat/UFPE**, membro titular externo e o **Luiz Carlos Barbosa da Silva. WIS. Israel**, membro titular externo. Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Tese, tendo sido a candidata **APROVADA** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor **Armando Mauro Vasquez Corro - IME/UFG**, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, ao vigésimo quinto dia do mês de agosto do ano de dois mil e vinte e três.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

Novas classes de Superfícies Weingarten generalizada



Documento assinado eletronicamente por **Marcelo Bezerra Barboza, Professor do Magistério Superior**, em 25/08/2023, às 12:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Fábio Reis dos santos, Usuário Externo**, em 25/08/2023, às 12:46, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Benedito Leandro Neto, Professor do Magistério Superior**, em 25/08/2023, às 13:34, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Armando Mauro Vasquez Corro, Professor do Magistério Superior**, em 25/08/2023, às 15:46, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Kaye Oliveira Da Silva, Coordenador de Pós-Graduação**, em 25/08/2023, às 19:07, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Marco Antonio Lázaro Velásquez, Usuário Externo**, em 25/08/2023, às 20:17, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3826388** e o código CRC **52D769C1**.

Referência: Processo nº 23070.034135/2023-45

SEI nº 3826388

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Raquel Pereira de Araújo

Graduada em Matemática na UEG - Universidade Estadual de Goiás. Durante o Mestrado, na UFG - Universidade Federal de Goiás, foi bolsista da CAPES e desenvolveu um trabalho teórico Superfícies Bi-Harmônicas tipo gráfico. Atualmente participa do grupo de pesquisa na área de Geometria na UFG.

Dedico este trabalho aos meus pais, amigos e familiares.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a minha família, por todo apoio e compreensão que mesmo em vários momentos de ausência nunca deixaram de me incentivar para eu poder concluir este ciclo.

Aos meus amigos e colegas de curso que me ajudaram nesta longa caminhada, sempre me apoiando, compartilhando conhecimento e dando suporte em momentos de dificuldade.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

À Universidade Federal de Goiás (UFG), ao Instituto de Matemática e Estatística (IME) e a todos os professores, que contribuíram para meu crescimento profissional e amadurecimento acadêmico.

Ao meu orientador, Armando, pela paciência, orientação e suporte durante toda a trajetória para que pudéssemos concluir este trabalho.

Por fim, agradeço a todos que de alguma forma me ajudaram na elaboração deste trabalho e conclusão deste ciclo.

"Educação não transforma o mundo. Educação muda as pessoas. Pessoas transformam o mundo."

Paulo Freire,
Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 2004..

Resumo

Araújo, R.. **Novas classes de superfícies Weingarten generalizada**. Goiânia, 2023. 68p. Tese de Doutorado Relatório de Graduação. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Neste trabalho definimos as superfícies com curvatura média radial do tipo harmônico duplo - superfícies CMRHD - no espaço hiperbólico. Estas superfícies abrangem as superfícies de Weingarten generalizada do tipo harmônico - superfícies WGH - e são definidas a partir de uma função real e duas funções harmônicas, assim obtemos famílias destas superfícies que dependem de duas funções holomorfas. Como aplicação exibimos uma parametrização para o caso rotacional. Também definimos as superfícies de Weingarten generalizada do tipo harmônico II - superfícies WGHII - apresentamos famílias destas superfícies que dependem de duas funções holomorfas e como aplicação exibimos uma parametrização para o caso rotacional e analisamos o comportamento da curva geratriz.

Palavras-chave

Congruência de esferas, função harmônica, função holomorfa, média do raio de curvatura hiperbólico, espaço hiperbólico

Abstract

Araújo, R.. **New classes of generalized Weingarten surfaces**. Goiânia, 2023. 68p. PhD. Thesis Relatório de Graduação. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

In this work, we define surfaces with double harmonic mean curvature of the radial type - CMRHD surfaces - in hyperbolic space. These surfaces encompass generalized Weingarten surfaces of harmonic type - WGH surfaces - and are defined based on one real function and two harmonic functions. We obtain families of these surfaces that depend on two holomorphic functions. As an application, we provide a parametrization for the rotational case. We also define generalized Weingarten surfaces of harmonic type II - WGHII surfaces - and present families of these surfaces that depend on two holomorphic functions. As an application, we provide a parametrization for the rotational case and analyze the behavior of the generatrix curve.

Keywords

Congruence of spheres, harmonic functions, holomorphic function, hyperbolic radial mean curvature, hyperbolic space.

Sumário

Lista de Figuras	14
1 Introdução	15
2 Preliminares	18
2.1 Funções holomorfas	18
2.2 Envoltória de congruência de Esferas	22
2.3 O espaço hiperbolico	25
3 Classe de Superfícies com curvatura média radial hiperbólica do tipo harmônico duplo	32
3.1 Superfícies CMRHD	32
3.1.1 Exemplo de Superfícies CMRHD	42
3.2 Surperfícies CMRHD de Rotação	46
3.2.1 Exemplo CMRHD - Superfícies de rotação	48
4 Superfícies de Weingarten generalizada do tipo harmônico II	54
4.1 Superfícies WGHII	54
4.1.1 Exemplo de superficies WGHII	61
4.1.2 WGHII - Superfícies de rotação	64
4.1.3 Exemplo WGHII - Superfícies de rotação	65
Referências Bibliográficas	67

Lista de Figuras

2.1	Congruência de esferas	23
3.1	$\ell(t) = t^3$	43
3.2	$\ell(t) = t^2$	43
3.3	$g(z) = \sinh z$	44
3.4	$g(z) = \cosh z$	45
3.5	$C(t) = 6te^{t^3-t} + (3t^2 - 1)^2 e^{t^3-t}$	45
3.6	$C(t) = -\frac{\ln(t) + t}{t^2}$	46
3.7	$\ell = mt + n$	48
3.8	Curva geratriz	49
3.9	Condição de regularidade	49
3.10	$\ell = \sqrt[3]{t}$ e $k > 0$	50
3.11	Curva geratriz	50
3.12	$\ell(t) = \sqrt[3]{t}$ e $k < 0$	51
3.13	Curva geratriz	51
3.14	Condição de regularidade	52
3.15	Condição de regularidade	52
3.16	$\ell(t) = t^2$	53
3.17	Curva geratriz	53
3.18	Condição de regularidade	53
4.1	Superfície WGHII para $f(z) = z^2$ e $g(z) = z$	62
4.2	Superfície WGHII para $f(z) = \sinh z$ e $g(z) = \cosh z$	62
4.3	Superfície WGHII para $f(z) = \sinh z$ e $g(z) = e^z$	62
4.4	Superfície WGHII para $f(z) = z$ e $g(z) = e^z$	63
4.5	$a > 0$ e Curva geratriz	65
4.6	Curva de regularidade para $a > 0$	65
4.7	$a = 0, b \neq 0$ e Curva geratriz	66

Introdução

Definimos uma superfície de Weingarten como uma superfície (de dimensão 2) onde existe uma relação entre suas curvaturas principais k_1 e k_2 dada por $W(k_1, k_2) \equiv 0$. Observemos que esta família de superfícies engloba casos clássicos, como as superfícies mínimas, onde $W(k_1, k_2) = k_1 + k_2$.

Desde o século XIX, a teoria das superfícies mínimas tem sido objeto de estudo com grandes avanços ocorrendo devido à conexão com a análise complexa. É possível construir uma grande variedade de superfícies a partir de um par de funções holomorfas usando a representação de Weierstrass [11]. Esta representação é aplicável a algumas classes de superfícies, incluindo certas classes de superfícies Weingarten (Ver: [22] e [23]).

Em analogia com a ideia de Weierstrass, R. Bryant [1] obteve uma representação tipo Weierstrass em termos de dados holomorfos para superfícies com curvatura média constante e igual a 1 no espaço hiperbólico. Depois disso, durante mais de duas décadas houve um significativo interesse na geometria das superfícies de curvatura média constante em \mathbb{H}^3 . Veja [2], [3], [12], [16], [20], [21].

Scheif [19] estudou as superfícies $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ que satisfazem a relação de Weingarten

$$(\mu^2 \pm \rho^2)K + \mu H + 1 = 0,$$

onde μ e ρ são funções harmônicas com respeito à forma quadrática $II + \mu III$, II e III são a segunda e terceira forma fundamentais de M . Estas superfícies ficaram conhecidas como *Superfícies Weingarten generalizadas*. Em [14], os autores estudam as *Superfícies lineares de Weingarten do tipo Bryant* em \mathbb{H}^3 . Estas superfícies satisfazem uma relação linear entre a curvatura média H e a curvatura Gaussiana K , dada por $2a(H - 1) + bK = 0$, para $a, b \in \mathbb{R}$, com $a + b \neq 0$.

Motivado pelos trabalhos de [14] e [19] Corro em [6] apresentou uma ampla classe de superfícies em \mathbb{H}^3 , as *Superfície Weingarten generalizada do tipo Bryant* (Superfícies - BGW). Ele exhibe uma maneira de parametrizar superfícies como envelopes de congruência de esferas na qual o outro envelope está contido em um plano e com fun-

ção raio associada a um sistema de tipo hidrodinâmico. Como aplicação, ele considera a imersão $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^3$ no modelo do semi-espaço positivo tal que a aplicação hiperbólica de Gauss G , chamada de *Transformação hiperbólica de Gauss*, define uma congruência de esferas onde $X(\Sigma)$ e $G(X(\Sigma))$ são envelopes da congruência de esferas e o raio de cada esfera define a função raio h . Então X é dita uma Superfícies - BGW, onde a curvatura média H e a curvatura Gaussiana K_I satisfazem a relação

$$2ach^{\frac{2(c-1)}{c}}(H-1) + (a+b - ach^{\frac{2(c-1)}{c}})K_I = 0$$

para $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a+b \neq 0$ e $c \neq 0$. Estas superfícies incluem as superfícies de Bryant e as superfícies flat no espaço hiperbólico.

Posteriormente, em [4] os autores estudaram as superfícies no espaço hiperbólico onde existe uma relação entre a curvatura média H e a curvatura intrínseca K_I , tal que

$$2(H-1)ce^{2\mu} + K_I(1 - ce^{2\mu}) = 0,$$

onde μ é uma função harmônica com respeito à forma quadrática $\sigma = -K_I I + 2(H-1)II$. Estas superfícies são chamadas de *Superfícies de Weingarten generalizada do tipo harmônico (Superfícies - WGH)*. Além disso, eles obtiveram uma representação tipo Weierstrass destas superfícies que dependem de três funções holomorfas. E como aplicação, classificaram as *Superfícies - WGH* de rotação.

Dias e Corro [8] obtiveram outra maneira de parametrizar hipersuperfícies de \mathbb{R}^{n+1} que são envelopes de congruência de esferas na qual o outro envelope está contido em um hiperplano. Eles também obtiveram uma caracterização para estas hipersuperfícies que localmente têm a aplicação normal de Gauss prescrita.

Em [13], os autores definem a raio de curvatura hiperbólica e a média dos raio de curvatura hiperbólica em \mathbb{H}^{n+1} , dados por

$$\tilde{R}_i = \frac{1}{1 - k_i} \quad e \quad \tilde{H}_R = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{R}_i.$$

onde k_1, k_2, \dots, k_n são as curvaturas principais da hipersuperfície.

O problema de Christoffel diz que dado um difeomorfismo $A : S^n \rightarrow S^n$ e uma função diferenciável $T : S^n \rightarrow \mathbb{R}$, então possível encontrar hipersuperfícies com aplicação de Gauss G e a função T prescrita como média dos raios de curvatura desta hipersuperfície, ou seja, $T = \tilde{H}_R$.

Neste trabalho, motivados por [4] e [13] definimos as *superfícies de curvatura média radial do tipo harmônico duplo (CMRHD)* em \mathbb{H}^3 , quando sua média dos raios de

curvatura é dada por

$$\tilde{H}_R = \frac{1}{2} (1 - C(\phi)e^{2\mu}),$$

onde ϕ e μ são funções harmônicas com respeito a forma quadrática $\sigma = -K_I I + 2(H-1)II$. Aqui I, II representam a primeira e segunda forma quadrática de M . Esta relação é equivalente a

$$2(H-1)C(\phi)e^{2\mu} + (1 - C(\phi)e^{2\mu})K_I = 0.$$

Usando congruência de esferas quando a função real C depende de uma função real ℓ , obtemos uma família de superfícies CMRHD que dependem de duas funções holomorfas. Além disso, classificamos as superfícies de rotação CMRHD. Assim concluímos que estas superfícies nos dão algumas soluções para o clássico problema de Christoffel.

Além disso, motivados por [4] e [8] definimos as *superfícies de Weingarten generalizada do tipo harmônica II (WGHII)* imersas em \mathbb{H}^3 , que satisfazem a relação entre a curvatura média H e a curvatura Gaussiana K_I

$$2(H+1)e^{2\mu} + K_I(1 + e^{2\mu}) = 0,$$

onde μ é uma função harmônica com respeito à terceira forma fundamental $III = \langle N_j, N_j \rangle$. Apresentamos uma representação de Weierstrass para esta superfícies que depende de duas funções holomorfas e como aplicação caracterizamos as superfícies WGHII de rotação.

A divisão deste trabalho está feita da seguinte forma: No Capítulo 2, apresentamos algumas propriedades, conceitos e definições, além de resultados de análise e geometria diferencial que serão usados ao longo do texto. No Capítulo 3, definimos as superfícies CMRHD. Elas são localmente parametrizadas como o envelope de uma congruência de esferas em que o outro envelope é um plano. Fornecemos uma representação de Weierstrass dependendo de duas funções holomorfas e uma função real C , além de exibirmos alguns exemplos. Também, mostramos condições para que tais superfícies sejam de rotação e exibimos exemplos de superfícies de rotação. No Capítulo 4, definimos as superfícies WGHII. Estas superfícies $\Sigma \subset \mathbb{H}^3$ são envelopes de uma congruência de esferas na qual o outro envelope está contido em um plano que é a fronteira ideal \mathbb{C}_∞ . Apresentamos uma parametrização local, dependendo de duas funções holomorfas, que nos permite obter superfícies com aplicação normal de Gauss prescrita. Como aplicação, exibimos as superfícies WGHII de rotação.

Preliminares

Neste capítulo, vamos apresentar alguns conceitos e definições que iremos utilizar ao longo deste trabalho. Maiores detalhes da demonstração poderão ser encontrados nas referências citadas ao longo do capítulo.

2.1 Funções holomorfas

Chama-se conjunto dos números complexos e denotamos por \mathbb{C} o conjunto dos pares ordenados de valores reais tal que,

$$z = u_1 + iu_2 \in \mathbb{C} \mapsto (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Denotemos $i = (0, 1)$. Logo todo, par ordenado de números reais $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ pode ser escrito na forma $z = u_1 + iu_2$ onde u_1 é a parte real e u_2 é a parte imaginária de z . Denotamos por $Re(z)$ e $Im(z)$, respectivamente.

Em [24] encontramos a seguinte definição.

Definição 2.1 *Seja uma função $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, onde U é um subconjunto aberto de \mathbb{C} . A função f diz-se uma função complexa de uma variável complexa.*

A função f é derivável no ponto $z = u_1 + iu_2 \in U$ quando

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = L.$$

Dizemos que o número $f'(z) = L$ é a derivada de f no ponto z . A função $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é analítica, ou holomorfa, quando possui derivada $f'(z)$ em todos os pontos do aberto U .

A seguir, para $i = 1, \dots, n$ utilizamos a notação $f_{,u_i}$ para a derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial u_i}$.

Em [15] encontramos a seguinte proposição que relaciona as funções holomorfas com as equações de Cauchy-Riemann.

Proposição 2.2 *Seja $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função de variável complexa. Então escrevendo $f(z) = f_1(u_1, u_2) + f_2(u_1, u_2)i$ com $z = u_1 + u_2i$, onde funções reais f_1 e f_2 têm derivadas parciais contínuas no aberto U dizemos que f é holomorfa se, e somente se, as equações de Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial f_1}{\partial u_1} = \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f_2}{\partial u_1} = -\frac{\partial f_1}{\partial u_2}$$

são satisfeitas no aberto U .

A função real $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^2 é dita harmônica se para todo $(u_1, u_2) \in U \subset \mathbb{R}^2$ temos

$$\Delta f(u_1, u_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2} = 0$$

É possível demonstrar que a parte real de uma função holomorfa é harmônica devido às equações de Cauchy-Riemann. Sob certas condições, o próximo teorema estabelece que a recíproca é verdadeira, cuja prova pode ser encontrada em [18].

Teorema 2.3 *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, com U aberto e simplesmente conexo, uma função harmônica. Então h é parte real de uma função holomorfa.*

A identificação de \mathbb{C} com o \mathbb{R}^2 induz um produto interno para funções holomorfas. Consideremos $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\langle f, g \rangle = f_1 g_1 + f_2 g_2,$$

onde $f = f_1 + if_2$ e $g = g_1 + ig_2$ são funções holomorfas. Além disso, a norma da função holomorfa f é dada por

$$|f| = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

A seguir demonstraremos algumas proposições de produto interno para funções holomorfas, veja [5]. Utilizaremos estas propriedades ao longo do nosso trabalho.

Proposição 2.4 Se $f, g, h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, com $z = u_1 + iu_2 \in \mathbb{C}$ são funções holomorfas, então:

1. $\langle f, g \rangle_{,u_1} = \langle f', g \rangle + \langle f, g' \rangle$,
2. $\langle f, g \rangle_{,u_2} = \langle if', g \rangle + \langle f, ig' \rangle$,
3. $f = \langle 1, f \rangle + i \langle i, f \rangle$,
4. $\langle f, gh \rangle = \langle f\bar{g}, h \rangle$,
5. $f = \langle 1, f \rangle - i \langle 1, if \rangle$,
6. $\bar{f} = \langle 1, f \rangle - i \langle i, f \rangle = \langle 1, f \rangle + i \langle 1, if \rangle$,
7. $\langle 1, f \rangle \langle i, f \rangle = \frac{1}{2} \langle i, f^2 \rangle$.

Prova. Sejam $f = f_1(u_1, u_2) + if_2(u_1, u_2)$, $g = g_1(u_1, u_2) + ig_2(u_1, u_2)$ e $h = h_1(u_1, u_2) + ih_2(u_1, u_2)$ funções holomorfas.

1. Assim pelas propriedades de produto interno e pela derivada do produto, temos:

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_{,u_1} &= [\langle f_1 + if_2, g_1 + ig_2 \rangle]_{,u_1} \\ &= [f_1 g_1 + f_2 g_2]_{,u_1} \\ &= f_1' g_1 + f_1 g_1' + f_2' g_2 + f_2 g_2' \\ &= \langle f', g \rangle + \langle f, g' \rangle. \end{aligned}$$

2. Derivamos $\langle f, g \rangle$ em relação a u_2 e utilizamos as equações de Cauchy-Riemann enunciadas em (3-58).

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_{,u_2} &= (f_1 g_1)_{,u_2} + (f_2 g_2)_{,u_2} \\ &= f_{1,u_2} g_1 + f_1 g_{1,u_2} + f_{2,u_2} g_2 + f_2 g_{2,u_2} \\ &= -f_{2,u_1} g_1 - f_1 g_{2,u_1} + f_{1,u_1} g_2 + f_2 g_{1,u_1} \\ &= \langle -f_{2,u_1} + if_{1,u_1}, g_1 + ig_2 \rangle + \langle f_1 + if_2, -g_{2,u_1} + ig_{1,u_1} \rangle \\ &= \langle if', g \rangle + \langle f, ig' \rangle. \end{aligned}$$

3. Reescrevendo o segundo membro da igualdade e utilizando as propriedades de produto interno, temos:

$$\begin{aligned} \langle 1, f \rangle + i \langle i, f \rangle &= \langle 1 + i0, f_1 + if_2 \rangle + i \langle 0 + i, f_1 + if_2 \rangle \\ &= f_1 + if_2 \\ &= f. \end{aligned}$$

4. Seja $\bar{g} = g_1 - ig_2$, isto é, o conjugado de g . Então:

$$\begin{aligned}
 \langle f, gh \rangle &= \langle f_1 + if_2, (g_1 + ig_2)(h_1 + ih_2) \rangle \\
 &= \langle f_1 + if_2, (g_1 h_1 - g_2 h_2) + i(g_1 h_2 + g_2 h_1) \rangle \\
 &= f_1(g_1 h_2 + g_2 h_1) + f_2(g_1 h_2 + g_2 h_1) \\
 &= (f_1 g_1 + f_2 g_2)h_1 + (f_2 g_1 + f_1 g_2)h_2 \\
 &= \langle (f_1 g_1 + f_2 g_2) + i(f_2 g_1 + f_1 g_2), h_1 + ih_2 \rangle \\
 &= \langle (f_1 + if_2)(g_1 - ig_2), h_1 + ih_2 \rangle \\
 &= \langle f\bar{g}, h \rangle.
 \end{aligned}$$

5. Reescrevendo o segundo membro da igualdade e utilizando as propriedades de produto interno, temos:

$$\begin{aligned}
 \langle 1, f \rangle - i \langle 1, if \rangle &= \langle 1 + i0, f_1 + if_2 \rangle - i \langle 1 + i0, i(f_1 + if_2) \rangle \\
 &= f_1 - i \langle 1 + i0, if_1 - f_2 \rangle \\
 &= f_1 - i \langle 1 + 0i, if_1 - f_2 \rangle \\
 &= f_1 - (-if_2) \\
 &= f_1 + if_2 \\
 &= f.
 \end{aligned}$$

6. De modo analogo ao item anterior, temos:

$$\begin{aligned}
 \langle 1, f \rangle - i \langle i, f \rangle &= \langle 1 + i0, f_1 + if_2 \rangle - i \langle 0 + i, f_1 + if_2 \rangle \\
 &= f_1 - if_2 \\
 &= \bar{f}.
 \end{aligned}$$

7. Pelas propriedades de produto interno, temos:

$$\begin{aligned}
 \langle 1, f \rangle \langle i, f \rangle &= \langle 1 + i0, f_1 + if_2 \rangle \langle i, f_1 + if_2 \rangle \\
 &= f_1 f_2 \\
 &= 2 \frac{f_1 f_2}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \langle 0 + i, (f_1^2 + f_2^2) + 2if_1 f_2 \rangle \\
 &= \frac{1}{2} \langle i, f^2 \rangle.
 \end{aligned}$$

□

Lema 2.5 *Sejam $f = f_1 + if_2$ e $g = g_1 + ig_2$ funções holomorfas com $z \in \mathbb{C}$, onde f é não identicamente nula. Então $\langle f, g \rangle = 0$ se, e somente se, $g = ikf$ onde $k \in \mathbb{R}$.*

Prova. Como $f \neq 0$ em todo ponto, sem perda de generalidade, consideremos $f_1 \neq 0$. Assim,

$$\langle f, g \rangle = f_1 g_1 + f_2 g_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad g_1 = -\frac{f_2 g_2}{f_1}.$$

Utilizando a igualdade acima e as propriedades de produto interno (2.4), obtemos

$$g = g_1 + ig_2 = -\frac{f_2 g_2}{f_1} + ig_2 = \frac{ig_2}{f_1} (f_1 + if_2) = i \frac{g_2}{f_1} f.$$

E como as funções f e g são holomorfas, então a função $\frac{g}{f}$ também é uma função holomorfa, assim pelas equações de Cauchy-Riemann obtemos

$$\left(\frac{g_2}{f_1} \right)_{,u_1} = 0_{,u_2} \quad \text{e} \quad \left(\frac{g_2}{f_1} \right)_{,u_2} = -0_{,u_1}.$$

Portanto, $\frac{g_2}{f_1} = k \in \mathbb{R}$ onde concluímos que $g = ikf$.

Reciprocamente, $g = ikf = ik(f_1 + if_2) = -kf_2 + ikf_1$ e, assim,

$$\langle f, g \rangle = -kf_1 f_2 + kf_1 f_2 = 0.$$

□

2.2 Envoltória de congruência de Esferas

Nesta seção, apresentamos as definições de congruência de esferas e envoltória de congruência de esferas.

Definição 2.6 *Uma congruência de esferas em \mathbb{R}^3 é uma família a 2-parâmetros de esferas, onde associamos uma função chamada de função raio, e os centros das esferas de congruência definem uma superfície regular $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$.*

Definição 2.7 *Um envelope de uma congruência de esferas é uma superfície $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ tal que cada $p \in \Sigma$ é tangente a uma esfera da congruência de esferas.*

Definição 2.8 *Seja uma superfície $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ com aplicação normal de Gauss N . Se X é uma parametrização local de Σ , então*

$$N_i = \sum_{j=1}^2 W_{ij}(u) X_{,j}, \quad 1 \leq i \leq 2,$$

onde $u = (u_1, u_2) \in U \subset \mathbb{R}^2$ e $W = (W_{ij})$ é chamada *Matriz de Weingarten*.

Seja $\Pi = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$ e $Y : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Pi$ uma parametrização ortogonal local de Π , ou seja, $g_{ij} = \langle Y_i, Y_j \rangle$, $1 \leq i, j \leq 2$, tal que

$$g_{ij} = g_{ji} = 0 \quad e \quad g_{ii} \neq 0, \quad 1 \leq i, j \leq 2.$$

Além disso,

$$Y_{,ij} = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k Y_{,k} \quad 1 \leq i, j \leq 2.$$

Utilizando o fato da métrica ser diagonal, temos

$$\Gamma_{ij}^i = \frac{g_{ii,j}}{2g_{ii}} \quad \forall i, j \quad e \quad \Gamma_{ij}^j = -\frac{g_{ii}}{g_{jj}} \Gamma_{ij}^i \quad 1 \leq i, j \leq 2. \quad (2-1)$$

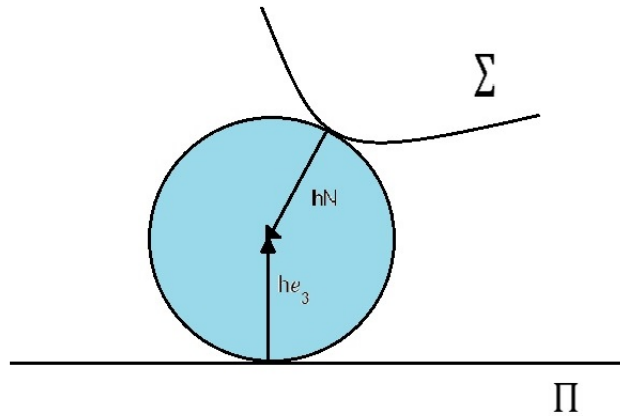


Figura 2.1: Congruência de esferas

Em [17], Machado e Riveiros, estendendo os resultados obtidos por Corro em [6], os autores apresentam uma caracterização para as hipersuperfícies que são envelope de uma congruência de esferas em \mathbb{R}^{n+1} .

Em geral, em relação a uma congruência de esferas, costumam existir duas superfícies, conhecidas como envoltórias. Para ser mais preciso, um ponto $p \in \mathbb{R}^3$ que pertence a envoltória Σ também pertence a alguma esfera da congruência e $T_p\Sigma = T_pS$. Assim, se a congruência de esferas tem duas envoltórias distintas então existe uma correspondência entre seus pontos.

Teorema 2.9 *Uma hipersuperfície Σ^n em \mathbb{R}^{n+1} , $n \geq 2$, é um envelope de congruência de esferas, em que o outro envelope está contido em um hiperplano*

$\Pi = \{(u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : u_{n+1} = 0\}$ então, existe uma parametrização local ortogonal de Π , $Y : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Pi$ e uma função diferenciável $h : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Sigma^n$, dada por

$$X(u) = Y(u) - \frac{2h(u)}{S} \left[\sum_{j=1}^n \frac{h_j}{L_{jj}} Y_j - e_{n+1} \right] \quad (2-2)$$

é a parametrização de Σ^n , com $e_{n+1} = (0, 0, \dots, 0, 1)$, $L_{ij} = \langle Y_i, Y_j \rangle$, $1 \leq i, j \leq n$, e

$$S = \sum_{j=1}^n \frac{(h_j)^2}{L_{jj}} + 1. \quad (2-3)$$

Além disso, a aplicação de Gauss é dada por

$$N(u) = e_{n+1} + \frac{2}{S} \left[\sum_{j=1}^n \frac{h_j}{L_{jj}} Y_j - e_{n+1} \right] \quad (2-4)$$

e a matriz de Weingarten é dada por

$$W = 2V(SI - 2hV)^{-1}, \quad (2-5)$$

onde a matriz $V = (V_{ij})$ é definida por

$$V_{ij} = \frac{1}{L_{jj}} \left(h_{,ij} - \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l h_{,l} \right), \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad (2-6)$$

sendo Γ_{ij}^l os símbolos de Christoffel da métrica L_{ij} e P a condição de regularidade dada por

$$P = \det(SI - 2hV) \neq 0. \quad (2-7)$$

Como consequência do teorema de caracterização para congruência de esferas, Machado e Riveiros em [17] apresentam o seguinte resultado.

Corolário 2.10 *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Sigma^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma parametrização de uma hipersuperfície Σ^n . Então as seguintes condições são equivalentes:*

- i) X está parametrizada por linhas de curvatura;
- ii) $V_{ij} = 0$ para $i \neq j$;
- iii) $N_{,j} = -k_j X_{,j}$,

onde $k_i = \frac{2V_{ii}}{2hV_{ii} - S}$, $1 \leq i \leq n$, são as curvaturas principais de X .

2.3 O espaço hiperbolico

Nesta seção apresentamos a definição do espaço hiperbólico utilizando o modelo do semi-espaço superior de \mathbb{R}^n .

Definição 2.11 *O semi-espaço superior pode ser descrito como o conjunto de pontos no espaço euclidiano de dimensão n com a coordenada x_n positiva, ou seja, é dado por:*

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n; x_n > 0)\}.$$

A variedade \mathbb{H}^n é chamado de o espaço hiperbólico de dimensão n .

Se introduzirmos a métrica de \mathbb{H}^n por:

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2}{x_n^2},$$

onde $\frac{1}{x_n^2}$ é o fator conforme a métrica euclidiana obtemos que \mathbb{H}^n tem curvatura seccional igual a -1 e que é uma variedade riemanniana completa. Ver: [9] e [10].

Ao longo deste trabalho consideramos o modelo do semi-espaço superior para $n = 3$.

Agora, consideremos imersão de uma variedade diferenciável Σ de dimensão n em uma variedade riemanniana $\bar{\Sigma}$ de dimensão $k = m + n$. Seja $x, y \in T_p\Sigma \subset T_p\bar{\Sigma}$, se x e y são vetores linearmente independentes indicaremos por $K(x, y)$ e $\bar{K}(x, y)$ as curvaturas seccionais de Σ e $\bar{\Sigma}$, respectivamente. O teorema a seguir relaciona as curvaturas seccionais da imersão Σ em $\bar{\Sigma}$. Para maiores detalhes da demonstração, veja [10].

Teorema 2.12 *Sejam $p \in \Sigma$ e x, y vetores ortonormais de $T_p\Sigma$. Então:*

$$K(x, y) - \bar{K}(x, y) = \langle \mathcal{B}(x, x), \mathcal{B}(y, y) \rangle - |\mathcal{B}(x, y)|^2 \quad (2-8)$$

onde $\mathcal{B}(x, y) = \bar{\nabla}_x \bar{Y} - \nabla_x Y$ é uma aplicação bilinear e simétrica.

Em [7] Corro, Pina e Souza relacionam a curvatura extrínseca de superfícies no espaço Euclidiano a qualquer métrica conforme à métrica do espaço \mathbb{R}^n . Nesse sentido, considerando a imersão da superfície Σ no espaço hiperbólico é possível mostrar que existe uma relação entre as matrizes de Weingarten de Σ em \mathbb{R}^n e em \mathbb{H}^n .

Lema 2.13 *Seja $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular. Considere a imersão $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^3$ dada por $X(u) = \sum_{j=1}^3 x_j(u) e_j$, onde $u = (u_1, u_2) \in U$ e $N(u) = \sum_{j=1}^3 N_j(u) e_j$ o vetor normal de Σ . Usando*

a conexão induzida pela métrica do espaço hiperbólico, a matriz de Weingarten de X em \mathbb{H}^3 é dada por

$$\tilde{W} = x_3 W - N_3 I, \quad (2-9)$$

onde W é a matriz de Weingarten em \mathbb{R}^3 e I é a matriz identidade.

A Transformação Hiperbólica de Gauss é uma função definida em uma superfície Σ imersa em \mathbb{H}^3 . Essa função é representada por $G : X(\Sigma) \rightarrow \mathbb{C}_\infty$, onde para qualquer ponto $p \in \Sigma$, a geodésica orientada que passa por $X(p)$ intercepta a fronteira ideal de \mathbb{C}_∞ no ponto $G(X(p))$.

Definimos uma Superfície de Riemann, como uma superfície em que a mudança de coordenadas é uma função holomorfa. Considere Σ uma superfície de Riemann conexa e orientável, e que $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^3$ seja uma imersão. A função G define uma congruência de esferas, na qual $X(\Sigma)$ e $G(X(\Sigma))$ são envoltórias dessa congruência. Além disso, o raio da esfera da congruência determina uma função h que chamamos de função raio.

Em [4], os autores caracterizam as envoltórias de congruência de esferas em \mathbb{H}^3 onde Σ é uma superfície de Riemann e as curvaturas média H e a Gaussiana K_I satisfazem a relação

$$2(H - 1)e^{2\mu} + K_I(1 - e^{2\mu}) = 0,$$

tal que μ é uma função harmônica com respeito a forma quadrática $\sigma = -K_I I + 2(H - 1)II$ e I, II são a primeira e segunda formas quadráticas de $X(\Sigma)$. A seguir, apresentamos este resultado e mais detalhes da demonstração podem ser visto na referência (Ver: [4]).

Teorema 2.14 *Seja Σ uma superfície de Riemann conexa e orientável. Então, $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^3$ é uma imersão se, e só se, existe uma função holomorfa $g : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ e uma função diferenciável $h : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_\infty^+$ tal que $X(\Sigma) \subset \mathbb{H}^3$ é localmente parametrizada por*

$$X(z) = (g, 0) - \frac{2h}{S} \left(\frac{g'}{\|g'\|^2} (h_{,1} + ih_{,2}), -1 \right), \quad (2-10)$$

onde $z = u_1 + iu_2 \in \mathbb{C}$ e $g'(z) \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}$,

$$S = \frac{(h_{,1})^2 + (h_{,2})^2}{\|g'\|^2} + 1. \quad (2-11)$$

O campo normal hiperbólico é dado por

$$\eta(z) = \frac{2h}{S} \left[e_3 + \frac{2}{S} \left(\frac{g'}{\|g'\|^2} (h_{,1} + ih_{,2}), -1 \right) \right]. \quad (2-12)$$

A matriz de Weingarten é

$$\tilde{W} = \frac{2}{P} [2hV + (S - 2htr(V))I] - I, \quad (2-13)$$

onde

$$P = -S^2 + 2S(1 - \gamma) + 4h^2 \det(V) \quad (2-14)$$

e

$$\gamma = \frac{h\Delta h}{\|g'\|^2} - S + 1. \quad (2-15)$$

Além disso a primeira e a segunda forma fundamentais são dadas por

$$\tilde{E} = \frac{\|g'\|^2}{4h^2} [-P + (1 - \gamma)(2S - 4hV_{11})], \quad (2-16)$$

$$\tilde{F} = -\frac{V_{12}\|g'\|^2}{4h^2} (1 - \gamma), \quad (2-17)$$

$$\tilde{G} = \frac{\|g'\|^2}{4h^2} [-P + (1 - \gamma)(2S - 4hV_{22})], \quad (2-18)$$

$$\tilde{e} = -\frac{\|g'\|^2}{4h^2} [P + 2\gamma(S - 2hV_{11})], \quad (2-19)$$

$$\tilde{f} = \frac{V_{12}\|g'\|^2}{h^2} \gamma, \quad (2-20)$$

$$\tilde{g} = -\frac{\|g'\|^2}{4h^2} [P + 2\gamma(S - 2hV_{22})]. \quad (2-21)$$

A curvatura Gaussiana K_I e a curvatura média H são dadas por

$$K_I = \frac{4}{P}\gamma, \quad H = \frac{2}{P}(\gamma - 1) + 1. \quad (2-22)$$

Utilizando os resultados do teorema anterior os autores mostraram em [4] que a métrica σ é conforme a métrica euclidiana. A seguir faremos um breve comentário da demonstração.

Proposição 2.15 *Seja Σ uma superfície de Riemann conexa e orientável, tal que a $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^3$ é parametrizada localmente pelo Teorema 2.14. Seja σ a métrica definida por*

$$\sigma = -K_I I + 2(H - 1)II$$

onde K_I é a curvatura Gaussiana, H é a curvatura média, I e II são a primeira e a segunda forma fundamental de X . Nestas condições, σ é conforme à métrica Euclidiana.

Prova. Utilizando as equações (2-22) obtemos as implicações

$$H = \frac{2}{P}(\gamma - 1) + 1 \Rightarrow 2(H - 1) = \frac{4\gamma}{P} - \frac{4}{P} \Rightarrow K_I - 2(H - 1) = \frac{4}{P} \quad (2-23)$$

e

$$\begin{aligned} 2(H - 1) &= \frac{4}{P}(\gamma - 1) \Rightarrow 2(H - 1)\gamma = \frac{4}{P}\gamma(\gamma - 1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2(H - 1)\gamma + K_I(1 - \gamma) = 0. \end{aligned} \quad (2-24)$$

Pelas equações (2-23), (2-24) e as equações da primeira e segunda forma obtidas no teorema anterior, temos que

$$\begin{aligned} \sigma(X_u, X_v) &= -K_I \tilde{F} + 2(H - 1)\tilde{f} \\ &= -K_I \left(-\frac{\|g'\|^2}{h^2} V_{12}(1 - \gamma) \right) + 2(H - 1) \left(\frac{\|g'\|^2}{h^2} V_{12}\gamma \right) \\ &= \frac{\|g'\|^2}{h^2} V_{12} [K_I(1 - \gamma) + 2(H - 1)\gamma] = 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\sigma(X_v, X_v) &= K_I \tilde{G} + 2(H-1)\tilde{g} \\
&= -K_I \left(\frac{\|g'\|^2}{h^2} [-P + (1-\gamma)(2S - 4hV_{22})] \right) + \\
&\quad + 2(h-1) \left(\frac{\|g'\|^2}{h^2} [-P + 2\gamma(S - 2hV_{22})] \right) \\
&= \frac{\|g'\|^2}{h^2} [P(K_I + 2(H-1)) + 2(S - 2hV_{22})(K_I(\gamma-1) + 2(H-1)\gamma)] \\
&= \frac{\|g'\|^2}{h^2}.
\end{aligned}$$

Analogamente, concluímos que $\sigma(X_u, X_u) = \frac{\|g'\|^2}{h^2}$. □

Duas superfícies estão associadas por uma congruência de esferas se existe uma relação entre seus pontos e estas são tangentes a uma mesma esfera da congruência. Quando $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ está associada a um plano por uma congruência de esferas podemos definir as curvaturas radiais r_i e as curvaturas médias radiais H_ρ associadas ao plano. Em [13], Espinar; Galvez e Lopez, propõe uma cuidadosa extensão do problema para o espaço hiperbólico. A seguir, enunciamos a definição da raio de curvatura hiperbólico e da média dos raios de curvatura hiperbólicos.

Definição 2.16 *Seja Σ uma hipersuperfície no espaço hiperbólico \mathbb{H}^{n+1} . Então, os raios de curvatura hiperbólico \tilde{R}_i e média dos raios de curvatura hiperbólico \tilde{H}_R são dadas por*

$$\tilde{R}_i = \frac{1}{1 - k_i} \quad e \quad \tilde{H}_R = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{R}_i,$$

onde k_1, k_2, \dots, k_n são as curvaturas principais de Σ .

Uma outra forma de parametrizar superfícies como envelope de congruência de esferas é apresentada por Dias e Corro em [8]. Eles consideram $p \in \Sigma$, $N(p)$ o vetor normal unitário de Σ , v um ponto fixo de \mathbb{R}^3 e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto escalar do espaço euclidiano e definem as *superfícies de Weingarten generalizadas tipo suporte distância (superfícies WGSD)* que satisfazem a relação $A + BH + CK = 0$, onde $A, B, C : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis que dependem da função suporte $\Psi_v = \langle p - v, N(p) \rangle$ e da função distância quadrática $\Lambda_v = \langle p - v, p - v \rangle$.

A classe das superfícies WGSD também podem ser definidas a partir das curvaturas radiais r_i e da curvatura média radial H_ρ associadas ao plano do envelope de con-

gruência, isto é,

$$2R + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{r_i} = -\frac{\Lambda}{\Psi} \quad e \quad 2H_p = -\frac{\Lambda}{\Psi}$$

onde R é o raio da congruência de esferas. Enunciaremos, a seguir, o teorema de caracterização proposto pelos autores. Mais detalhes da demonstração podem ser encontrados em [8].

Teorema 2.17 *Seja Σ uma hipersuperfície orientável de \mathbb{R}^{n+1} com curvatura de Gauss-Kronecker $K \neq 0$ e com aplicação normal de Gauss $N \neq -e_{n+1}$. Então, existe uma parametrização local ortogonal $Y : U \rightarrow \Pi$ do hiperplano Π e uma função diferenciável $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ tais que Σ pode ser localmente parametrizada por*

$$X(u) = \left(Q(u) - \frac{2R(u)}{T(u)} Y(u), -\frac{2R(u)}{T(u)} \right), \quad u \in U, \quad (2-25)$$

onde $L_{jj} = \langle Y_j, Y_j \rangle$, $T = 1 + |Y|^2$,

$$Q = \sum_{j=1}^n \frac{h_j}{L_{jj}} Y_j \quad e \quad R = \langle Q, Y \rangle - h. \quad (2-26)$$

Nestas coordenadas, a normal de Gauss N de Σ é dada por

$$N(u) = \frac{1}{1 + |Y|^2} \left(2Y(u), 1 - |Y|^2 \right) \quad u \in U. \quad (2-27)$$

Além disso, a matriz de Weingarten W de X é dada por

$$W = 2(TV - 2RI_n)^{-1}, \quad (2-28)$$

onde $V = (V_{ij})$ é dado por

$$V_{ij} = \frac{1}{L_{jj}} \left(h_{,ij} - \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l h_{,l} \right), \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (2-29)$$

e I_n é a matriz identidade $n \times n$. A condição de regularidade de X é dada por

$$P = \det(TV - 2RI_n) \neq 0. \quad (2-30)$$

Em coordenadas locais, as formas fundamentais I, II e III são dadas, respectiva-

mente, por

$$I : \langle X_i, X_j \rangle = \left(\sum_{k=1}^n V_{ik} V_{jk} L_{kk} \right) - \frac{2R}{T} (V_{ij} L_{jj} + V_{ji} L_{ii}) + \frac{4R^2}{T^2} L_{ij}, \quad (2-31)$$

$$II : -\langle X_i, N_j \rangle = \frac{2}{T^2} (2RL_{ij} - TV_{ij}L_{jj}), \quad (2-32)$$

$$III : \langle N_i, N_j \rangle = \frac{4}{T^2} L_{ij}. \quad (2-33)$$

Classe de Superfícies com curvatura média radial hiperbólica do tipo harmônico duplo

Neste capítulo, estudamos as imersões $X : \Sigma \longrightarrow \mathbb{H}^3$, onde Σ é uma superfície do envelope de congruência de esferas. Seja Σ a superfície que satisfaz as condições do Teorema 2.9 e para a qual existe uma relação entre a curvatura Gaussiana K_I e a curvatura média H tal que

$$2(H - 1)C(\phi)e^{2\mu} + (1 - C(\phi)e^{2\mu})K_I = 0, \quad (3-1)$$

onde $C : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função real e ϕ, μ são funções harmônicas. Chamamos estas superfícies de **Superfície com curvatura média radial do tipo harmônico duplo (Superfícies CMRHD)**

3.1 Superfícies CMRHD

Iniciamos esta seção dando uma definição equivalente à (3-1) para as superfícies CMRHD. Também enunciamos uma parametrização para estas superfícies e apresentamos alguns exemplos.

Definição 3.1 *Uma superfície $\Sigma \subset \mathbb{H}^{n+1}$, $n > 2$, é dita uma superfície com curvatura média radial do tipo harmônico duplo (superfícies CMRHD) se dada uma função $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a curvatura média radial é dada por*

$$\tilde{H}_R = \frac{1}{2}(1 - C(\phi)e^{2\mu}), \quad (3-2)$$

onde ϕ e μ são funções harmônicas. Se a função real C for constante temos uma WGH-Superfície.

No teorema seguinte vamos mostrar as condições para que as superfícies do envelope de congruência de esferas seja uma superfície CMRHD.

Teorema 3.2 *Seja Σ uma superfície da envoltória de congruência de esferas que satisfaz as condições do Teorema 2.14. Dada uma função real $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, então Σ é uma superfície CMRHD se e somente se*

$$h\Delta h - \|\nabla h\|^2 = C(\phi)e^{2(\mu + \ln|g'|)} \quad (3-3)$$

onde ϕ e μ são funções harmônicas, g é uma função holomorfa e h é uma função diferenciável.

Prova. Seja $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 2$. Pelo Corolário 2.10 temos que as curvaturas principais t_i de Σ são dadas por

$$t_i = \frac{2\sigma_i}{2h\sigma_i - S}, \quad (3-4)$$

onde σ_i são os autovalores da matriz V_{ij} . Agora considere a imersão $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^3$. Por (2-9) concluímos que

$$k_i = N_3 + X_3 t_i. \quad (3-5)$$

Utilizando as equações (2-2), (2-4) e substituindo a equação (3-4), temos

$$k_i = \left(1 - \frac{2}{S}\right) + \frac{2h}{S} \left(\frac{2\sigma_i}{2h\sigma_i - S}\right) = 1 + \frac{2}{2h\sigma_i - S}.$$

Seja $\Sigma \subseteq \mathbb{H}^3$, considere a função holomorfa $g : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ e $Y(z, 0) = (g(z), 0)$. Logo podemos determinar a curvatura radial média hiperbólica de Σ . Utilizando a equação acima e pela Definição 2.16, para $n = 2$ temos

$$R_i = \frac{1}{1 - k_i} = \frac{1}{1 - 1 - \frac{2}{2h\sigma_i - S}} = \frac{S}{2} - h\sigma_i \quad (3-6)$$

e

$$\begin{aligned} H_R &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^2 \left(\frac{S}{2} - h\sigma_i \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{S}{2} - h\sigma_1 \right) + \left(\frac{S}{2} - h\sigma_2 \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} (S - h(\sigma_1 + \sigma_2)) \\ &= \frac{1}{2} (S - h(\text{tr}(V_{ij}))). \end{aligned} \quad (3-7)$$

Usando (2-3) obtemos

$$S = \frac{(h_{,1})^2 + (h_{,2})^2}{(g_{,1})^2 + (g_{,2})^2} + 1 = \frac{\|\nabla h\|^2}{\|g'\|^2} + 1. \quad (3-8)$$

Utilizando as equações (2-6), conseguimos

$$\begin{aligned} \text{tr}(V_{ij}) &= \frac{1}{\|g'\|^2} (h_{,11} - (\Gamma_{11}^1 h_{,1} + \Gamma_{11}^2 h_{,2}) + h_{,22} - (\Gamma_{22}^1 h_{,1} + \Gamma_{22}^2 h_{,2})) \\ &= \frac{\Delta h}{\|g'\|^2}. \end{aligned} \quad (3-9)$$

Por (3-7), (3-8) e (3-9), temos

$$\tilde{H}_R = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\|\nabla h\|^2 - h\Delta h}{\|g'\|^2} \right). \quad (3-10)$$

Usando a Definição 3.1,

$$\frac{\|\nabla h\|^2 - h\Delta h}{\|g'\|^2} = -C(\phi)e^{2\mu} \quad (3-11)$$

e utilizando as propriedades de logaritmo natural,

$$\|\nabla h\|^2 - h\Delta h = -C(\phi)e^{2\mu} \|g'\|^2 = -C(\phi)e^{2(\mu + \ln \|g'\|)} \quad (3-12)$$

de onde segue o resultado. \square

Observação 3.3 *Note que*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-k_1} + \frac{1}{1-k_2} \right) &= \frac{1}{2} (1 - C(\phi)e^{2\mu}) \\ (2-2H) &= (1-2H+K) (1 - C(\phi)e^{2\mu}) \\ (2-2H) &= (1-2H+K_I+1) (1 - C(\phi)e^{2\mu}) \\ 0 &= 2(H-1)C(\phi)e^{2\mu} + K_I(1 - C(\phi)e^{2\mu}). \end{aligned}$$

Se $C(\phi) = c$, onde c é constante, neste caso temos as Superfícies Weingarten generalizada de tipo harmônico no espaço hiperbólico.

Se $C(\phi) = \phi$ então

$$2(H-1)\phi e^{2\mu} + (1-\phi e^{2\mu})K_I = 0.$$

Portanto, temos uma CMRHD-Superfície.

Nos lemas a seguir consideramos o par de funções holomorfas f, g e da função real ℓ .

Lema 3.4 *Seja $h = \ell(\phi)$, onde $\phi = \langle 1, f \rangle$ e f é uma função holomorfa. Então temos as seguintes equivalências*

$$h_{,1} = \ell'(\phi) \langle 1, f' \rangle, \quad (3-13)$$

$$h_{,2} = \ell'(\phi) \langle 1, if' \rangle, \quad (3-14)$$

$$h_{,11} = \ell''(\phi) \langle 1, f' \rangle^2 + \ell'(\phi) \langle 1, f'' \rangle, \quad (3-15)$$

$$h_{,12} = h_{,21} = \ell''(\phi) \langle 1, if' \rangle \langle 1, f' \rangle + \ell'(\phi) \langle 1, if'' \rangle, \quad (3-16)$$

$$h_{,22} = \ell''(\phi) \langle 1, if' \rangle^2 - \ell'(\phi) \langle 1, f'' \rangle, \quad (3-17)$$

$$h_{,1} + ih_{,2} = \ell' \bar{f}', \quad (3-18)$$

$$(h_{,11} - h_{,22}) + 2ih_{,12} = \ell''(\phi)(\bar{f}')^2 + \ell'(\phi)(\bar{f}'')^2. \quad (3-19)$$

Prova. As igualdades (3-14)-(3-18) são consequências diretas das propriedades de derivada para produto interno dadas pela Proposição 2.4.

Utilizando as derivadas de primeira ordem de h temos

$$h_{,1} + ih_{,2} = \ell'(\phi) (\langle 1, f' \rangle + i \langle 1, if' \rangle) = \ell' \bar{f}'.$$

E obtemos (3-19). Além disso, aplicando as derivadas de segunda ordem de h e as propriedade da Proposição 2.4, deduzimos que

$$\begin{aligned} (h_{,11} - h_{,22}) + 2ih_{,12} &= \ell''(\phi) (\langle 1, f' \rangle^2 - \langle 1, if' \rangle^2) + 2\ell'(\phi) \langle 1, f'' \rangle + \\ &+ 2i\ell''(\phi) \langle 1, if' \rangle \langle 1, f' \rangle + 2i\ell'(\phi) \langle 1, if'' \rangle \\ &= \ell''(\phi) (\langle 1, (f')^2 \rangle + i \langle 1, (f')^2 \rangle) + 2\ell'(\phi) (\langle 1, f'' \rangle + i \langle 1, if'' \rangle). \end{aligned}$$

Usando as identidades da Proposição 2.4 na igualdade acima, concluímos a demonstração. \square

Lema 3.5 *Considere as funções holomorfas $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tais que $z = u_1 + iu_2 \in \mathbb{C}$ e $g'(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$ e Σ é uma superfície de Riemann simplesmente conexa. Tome $h = \ell(\phi)$, onde $\phi = \langle 1, f \rangle$ e ℓ é uma função real. Então os coeficientes da matriz V_{ij} são dados por*

$$V_{11} = \frac{1}{\|g'\|^2} \left(\ell''(\Phi) \langle 1, f' \rangle^2 + \ell'(\Phi) \langle 1, \Omega \rangle \right), \quad (3-20)$$

$$V_{12} = V_{21} = \frac{1}{\|g'\|^2} \left(\ell''(\Phi) \left\langle 1, i \frac{(f')^2}{2} \right\rangle - \ell'(\Phi) \langle 1, i\Omega \rangle \right), \quad (3-21)$$

$$V_{22} = \frac{1}{\|g'\|^2} \left(\ell''(\Phi) \langle 1, if' \rangle^2 - \ell'(\Phi) \langle 1, \Omega \rangle \right). \quad (3-22)$$

onde $\Omega = f'' - \frac{g''}{g'} f'$. Além disso,

$$\text{tr}(V_{ij}) = \ell''(\Phi) \left(\frac{\|f'\|^2}{\|g'\|^2} \right)^2 \quad (3-23)$$

e

$$\begin{aligned} \det(V) &= \frac{\ell'(\Phi)}{\|g'\|^4} \left\{ \ell'(\Phi) \left(\|\bar{f}''\|^2 - \left\| \left(\frac{\bar{g}''}{\bar{g}'} \right) f' \right\|^2 \right) - \ell''(\Phi) \langle \bar{f}'', (\bar{f}')^2 \rangle \right. \\ &\quad \left. + \left\langle \left(\frac{\bar{g}''}{\bar{g}'} \right) f', \ell''(\Phi) (\bar{f}')^2 + \ell'(\Phi) (\bar{f}'')^2 \right\rangle \right\}. \end{aligned} \quad (3-24)$$

Prova. Por (4-7) os coeficientes da matriz (V_{ij}) são dados por

$$V_{11} = \frac{1}{g_{11}} \left(h_{,11} - \sum_{m=1}^2 \Gamma_{11}^m h_{,m} \right) = \frac{1}{\|g'\|^2} \left(h_{,11} - \left\langle \frac{\|g'\|_{,1}}{\|g'\|} + i \frac{\|g'\|_{,2}}{\|g'\|}, h_{,1} - ih_{,2} \right\rangle \right)$$

$$V_{12} = \frac{1}{g_{12}} \left(h_{,12} - \sum_{m=1}^2 \Gamma_{12}^m h_{,m} \right) = \frac{1}{\|g'\|^2} \left(h_{,12} - \left\langle \frac{\|g'\|_{,1}}{\|g'\|} + i \frac{\|g'\|_{,2}}{\|g'\|}, i(h_{,1} - ih_{,2}) \right\rangle \right)$$

$$V_{22} = \frac{1}{g_{22}} \left(h_{,22} - \sum_{m=1}^2 \Gamma_{22}^m h_{,m} \right) = \frac{1}{\|g'\|^2} \left(h_{,22} + \left\langle \frac{\|g'\|_{,1}}{\|g'\|} + i \frac{\|g'\|_{,2}}{\|g'\|}, h_{,1} - ih_{,2} \right\rangle \right)$$

Tomando

$$B = \left\langle \frac{\|g'\|_{,1}}{\|g'\|} + i \frac{\|g'\|_{,2}}{\|g'\|}, h_{,1} - ih_{,2} \right\rangle \quad e \quad D = \left\langle \frac{\|g'\|_{,1}}{\|g'\|} + i \frac{\|g'\|_{,2}}{\|g'\|}, i(h_{,1} - ih_{,2}) \right\rangle, \quad (3-25)$$

podemos reescrever os termos da matriz V_{ij} como

$$V_{11} = \frac{1}{\|g'\|^2} (h_{,11} - B), \quad V_{12} = \frac{1}{\|g'\|^2} (h_{,12} - D) \quad e \quad V_{22} = \frac{1}{\|g'\|^2} (h_{,22} + B). \quad (3-26)$$

Utilizando as propriedades da Proposição 2.4 e (3-19)

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{\|g'\|_{,1}}{\|g'\|} + i \frac{\|g'\|_{,2}}{\|g'\|}, h_{,1} - ih_{,2} \right\rangle &= \ell'(\Phi) \left\langle \frac{\langle g'', g' \rangle}{\|g'\|} + i \frac{\langle ig'', g' \rangle}{\|g'\|}, f' \right\rangle \\
 &= \ell'(\Phi) \left\langle \frac{\overline{g''} g'}{g' g'}, f' \right\rangle \\
 &= \ell'(\Phi) \left\langle 1, \frac{g''}{g'} f' \right\rangle
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 h_{,11} - B &= \ell''(\Phi) \langle 1, f' \rangle^2 + \ell'(\Phi) \langle 1, f'' \rangle - \ell'(\Phi) \left\langle 1, \frac{g''}{g'} f' \right\rangle \\
 &= \ell''(\Phi) \langle 1, f' \rangle^2 + \ell'(\Phi) \left(\langle 1, f'' \rangle - \left\langle 1, \frac{g''}{g'} f' \right\rangle \right), \quad (3-27)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h_{,12} - D &= \ell''(\Phi) \langle 1, if' \rangle \langle 1, f' \rangle + \ell'(\Phi) \langle 1, if'' \rangle - \ell'(\Phi) \left\langle 1, i \frac{g''}{g'} f' \right\rangle \\
 &= \ell''(\Phi) \left\langle 1, i \frac{(f')^2}{2} \right\rangle - \ell'(\Phi) \left(\left\langle 1, i \frac{g''}{g'} f' \right\rangle - \langle 1, if'' \rangle \right), \quad (3-28)
 \end{aligned}$$

$$h_{,22} + B = \ell''(\Phi) \langle 1, if' \rangle^2 - \ell'(\Phi) \left(\langle 1, f'' \rangle - \left\langle 1, \frac{g''}{g'} f' \right\rangle \right). \quad (3-29)$$

Finalmente, substituindo (3-27)-(3-29) em (3-26) obtemos (3-21)-(3-22).

Temos que (3-23) é consequência direta das equações (3-21) e (3-22). Para obter (3-24) considere as equações (3-26). Então

$$\begin{aligned}
 \det(V) &= \frac{1}{\|g'\|^4} [(h_{,11} - B)(h_{,22} + B) - (h_{,12} - D)^2] \\
 &= \frac{1}{\|g'\|^4} [h_{,11}h_{,22} - (h_{,12})^2 - \|B + iD\|^2 + \\
 &\quad + \langle B + iD, (h_{,11} - h_{,22}) + 2ih_{,12} \rangle]. \quad (3-30)
 \end{aligned}$$

Utilizando as derivadas de h dadas por (3-16)-(3-18) e (3-19), obtemos

$$\begin{aligned}
\det(h_{,ij}) &= \left(\ell''(\Phi) \langle 1, f' \rangle^2 + \ell'(\Phi) \langle 1, f'' \rangle \right) \left(\ell''(\Phi) \langle 1, if' \rangle^2 - \ell'(\Phi) \langle 1, f'' \rangle \right) \\
&- \left(\ell''(\Phi) \langle 1, if' \rangle \langle 1, f' \rangle + \ell'(\Phi) \langle 1, if'' \rangle \right)^2 \\
&= \ell''(\Phi)^2 \left\langle 1, i \frac{(f')^2}{2} \right\rangle^2 - \ell'(\Phi)^2 \langle 1, f'' \rangle^2 - \ell''(\Phi) \ell'(\Phi) \langle 1, f'' \rangle \langle 1, f' \rangle^2 + \\
&+ \ell''(\Phi) \ell'(\Phi) \langle 1, f'' \rangle \langle 1, if' \rangle^2 - \ell''(\Phi)^2 \left\langle 1, i \frac{(f')^2}{2} \right\rangle^2 - \\
&- 2\ell''(\Phi) \ell'(\Phi) \langle 1, f' \rangle \langle 1, if' \rangle \langle 1, if'' \rangle - \ell'(\Phi)^2 \langle 1, if'' \rangle^2.
\end{aligned}$$

Agora, pelas propriedades de produto interno para funções holomorfas dadas pela Proposição 2.4 temos

$$\begin{aligned}
\det(h_{,ij}) &= -\ell''(\Phi) \ell'(\Phi) \langle 1, f'' \rangle \left(\langle 1, f' \rangle^2 - \langle 1, if' \rangle^2 \right) \\
&- 2\ell''(\Phi) \ell'(\Phi) \left\langle 1, i \frac{(f')^2}{2} \right\rangle \langle 1, if'' \rangle - \ell'(\Phi)^2 \left(\langle 1, f'' \rangle^2 + \langle 1, if'' \rangle^2 \right) \\
&= -\ell''(\Phi) \ell'(\Phi) \langle 1, f'' \rangle \langle 1, (f')^2 \rangle - \ell''(\Phi) \ell'(\Phi) \langle 1, if'' \rangle \langle 1, i(f')^2 \rangle \\
&- \ell'(\Phi)^2 \|\overline{f''}\|^2 \\
&= -\ell''(\Phi) \ell'(\Phi) \langle \langle 1, f'' \rangle + i \langle 1, if'' \rangle, \langle 1, (f')^2 \rangle + i \langle 1, i(f')^2 \rangle \rangle - \ell'(\Phi)^2 \|\overline{f''}\|^2 \\
&= -\left(\ell''(\Phi) \ell'(\Phi) \left\langle \overline{f''}, \overline{(f')^2} \right\rangle + \ell'(\Phi)^2 \|\overline{f''}\|^2 \right). \tag{3-31}
\end{aligned}$$

Note que, por (3-25)

$$B + iD = \frac{\|g'\|_{,1} + i\|g'\|_{,2}}{\|g'\|} (\overline{h_{,1}} + ih_{,2})$$

e pela propriedade (2.4) e (3-14)-(3-15)

$$B + iD = \ell'(\Phi) \left(\frac{\overline{g''}}{g'} \right) f'. \tag{3-32}$$

Finalmente, utilizando (3-19), (3-31) e (3-32) em (3-30) temos

$$\begin{aligned}
\det(V) &= \frac{1}{\|g'\|^4} \left\{ -\left(\ell''(\Phi) \ell'(\Phi) \left\langle \overline{f''}, \overline{(f')^2} \right\rangle + \ell'(\Phi)^2 \|\overline{f''}\|^2 \right) - \ell'(\Phi)^2 \left\| \left(\frac{\overline{g''}}{g'} \right) f' \right\|^2 \right. \\
&+ \left. \left\langle \ell'(\Phi) \left(\frac{\overline{g''}}{g'} \right) f', \ell''(\Phi) \overline{(f')^2} + \ell'(\Phi) \overline{(f'')^2} \right\rangle \right\},
\end{aligned}$$

Portanto, obtemos (3-24). □

O seguinte teorema apresenta uma família superfícies CMRHD onde a função real C determinada pela equação (3-3) é prescrita.

Teorema 3.6 *Seja Σ uma superfície de Riemann conexa e orientada tal que sua parametrização $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^3$ satisfaz as condições do Teorema 2.14. Considere que f e g são funções holomorfas e $\ell : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função real. Então Σ é uma superfícies CMRHD parametrizada por*

$$X(z) = (g, 0) - \frac{2\ell}{S} \left[\frac{g' \ell' \bar{f}'}{\|g'\|^2}, -1 \right], \quad (3-33)$$

onde $C(t) = \ell \ell'' - (\ell')^2$, $\phi = \langle 1, f \rangle$, $\mu = \ln \left| \frac{f'}{g'} \right|$, $z = u_1 + iu_2 \in \mathbb{C}$, $g'(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, e

$$S = \frac{(\ell')^2 \|f'\|^2}{\|g'\|^2} + 1. \quad (3-34)$$

Além disso, o campo normal hiperbólico é dado por

$$\eta(z) = \frac{2}{S} \left(\frac{g' \ell \ell' \bar{f}'}{\|g'\|^2}, (\ell - 1) \right) \quad (3-35)$$

e a matriz de Weingarten é

$$\tilde{W} = \frac{2}{P} \left(2\ell \left(v - \ell'' \frac{\|f'\|^2}{\|g'\|^2} \right) + (\gamma + 1)I \right) - I \quad (3-36)$$

onde

$$P = -\frac{4\ell(\phi)}{\|g'\|^2} \left\| \ell'(\phi) \left[\overline{\left(\frac{g''}{g'} \right)} f' - \frac{\bar{f}''}{2} \right] - \frac{1}{2} \ell''(\phi) (\bar{f}')^2 \right\|^2 + (\gamma - 1)^2 \quad (3-37)$$

e

$$\gamma = \frac{h\Delta h}{\|g'\|^2} - S + 1. \quad (3-38)$$

Finalmente, os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais são dadas por

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= \frac{\|g'\|^2}{4\ell^2} (-P + 2(1 - \gamma)^2) - \\ &- \frac{(1 - \gamma)}{2\ell} (\ell''(\phi) \langle 1, (f')^2 \rangle + \ell'(\phi) \langle 1, \Omega \rangle), \end{aligned} \quad (3-39)$$

$$\tilde{F} = -\frac{(1-\gamma)}{\ell} \left(\ell''(\phi) \left\langle 1, i \frac{(f')^2}{2} \right\rangle - \ell'(\phi) \langle 1, i\Omega \rangle \right), \quad (3-40)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G} &= \frac{\|g'\|^2}{4\ell^2} (-P + 2(1-\gamma)^2) + \\ &+ \frac{(1-\gamma)}{2\ell} (\ell''(\phi) \langle 1, (f')^2 \rangle + \ell'(\phi) \langle 1, \Omega \rangle), \end{aligned} \quad (3-41)$$

$$\begin{aligned} \tilde{e} &= -\frac{\|g'\|^2}{4\ell^2} (P + 2\gamma(1-\gamma)) - \\ &- \frac{\gamma}{2\ell} (\ell''(\phi) \langle 1, (f')^2 \rangle + \ell'(\phi) \langle 1, \Omega \rangle), \end{aligned} \quad (3-42)$$

$$\tilde{f} = \frac{\gamma}{\ell} \left(\ell''(\phi) \left\langle 1, i \frac{(f')^2}{2} \right\rangle - \ell'(\phi) \langle 1, i\Omega \rangle \right) \quad (3-43)$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{g} &= -\frac{\|g'\|^2}{4\ell^2} (P + 2\gamma(1-\gamma)) + \\ &+ \frac{\gamma}{2\ell} (\ell''(\phi) \langle 1, (f')^2 \rangle + \ell'(\phi) \langle 1, \Omega \rangle). \end{aligned} \quad (3-44)$$

Prova. Considere $h(u) = \ell(\phi(u))$ tal que $\Delta\phi = 0$. Assim, pelas equações (3-14) e (3-15) concluímos que

$$\|\nabla h\|^2 = (\ell')^2 \|\nabla\phi\|^2 \quad (3-45)$$

e

$$h\Delta h = \ell\ell'' \|\nabla\phi\|^2. \quad (3-46)$$

Logo, por (3-3), (3-45) e (3-46)

$$(\ell\ell'' - (\ell')^2) \|\nabla\phi\|^2 = C(\phi) e^{2(\mu + \ln\|g'\|)}, \quad (3-47)$$

considerando $\phi = \langle 1, f \rangle$, onde f é uma função holomorfa, segue que Σ é uma superfície CMRHD.

Para determinar (3-33), (3-34) e (3-35) basta utilizar as equações (3-19) e (3-17) em (2-10), (2-11) e (2-12).

Agora, para calcular a matriz de Weingarten considere as equações (3-23) e (3-

34) em (2-13). Assim

$$\begin{aligned}\tilde{W} &= \frac{2}{P} \left(2\ell V + \left((\ell')^2 \frac{\|f'\|^2}{\|g'\|^2} + 1 - 2\ell\ell'' \frac{\|f'\|^2}{\|g'\|^2} \right) I \right) - I \\ &= \frac{2}{P} \left(2\ell V - (\ell\ell'' - (\ell')^2) \frac{\|f'\|^2}{\|g'\|^2} I - \ell\ell'' \frac{\|f'\|^2}{\|g'\|^2} I \right) + \left(\frac{2}{P} - 1 \right) .I\end{aligned}$$

Por (2-15) e (3-3), temos que $\gamma = C(\phi)e^{2\mu}$. Logo, obtemos (3-36).

Finalmente, por (2-14) e (3-26) temos

$$\begin{aligned}P &= -S^2 + 2S(1 - \gamma) + \frac{4h^2}{\|g'\|^4} (h_{,11}h_{,22} - (h_{,12})^2 - \|B + iD\|^2 + \\ &+ \langle B + iD, (h_{,11} - h_{,22}) + 2ih_{,12} \rangle).\end{aligned}$$

Podemos reescrever a equação acima por

$$P = -\frac{4h}{\|g'\|^2} \left\| (B + iD) - \frac{1}{2} (h_{,11} - h_{,22}) + 2ih_{,12} \right\|^2 + (\gamma - 1)^2. \quad (3-48)$$

Substituindo (3-32) e (3-19) em (3-48), deduzimos que

$$P = -\frac{4\ell(\phi)}{\|g'\|^2} \left\| \ell'(\phi) \overline{\left(\frac{g''}{g'} \right)} f' - \frac{1}{2} (\ell''(\phi)(\bar{f}')^2 + \ell'(\phi)\bar{f}'') \right\|^2 + (\gamma - 1)^2.$$

Agora, considere (3-21) e (3-22) então

$$V_{11} - V_{22} = \frac{1}{\|g'\|^2} (\ell''(\phi) \langle 1, (f')^2 \rangle + \ell'(\phi) \langle 1, \Omega \rangle). \quad (3-49)$$

Substituindo em (3-49) em (2-16)-(2-21), temos as expressões (3-39)-(3-44). \square

Corolário 3.7 *Seja $\Sigma \subset \mathbb{H}^3$ uma superfície CMRHD. Então Σ está parametrizada por linhas de curvatura se, e somente se, existem constantes $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{C}$ tal que*

$$\begin{cases} f(z) = z_0 + k_1 z \\ g(z) = z_1 + e^{\frac{k_2}{k_1} z} \end{cases} \quad (3-50)$$

onde z_0 e z_1 são constantes complexas, f e g são funções holomorfas.

Prova. As superfícies CMRHD satisfazem a relação (3-3), portanto está parametrizada por linhas de curvatura. E as curvas coordenadas são linhas de curvatura se, e só se, $V_{12} = 0$.

Utilizando (3-22) temos

$$V_{12} = 0 \Leftrightarrow \ell''(\phi) \langle 1, i(f')^2 \rangle - \ell'(\phi) \left(\left\langle 1, i \left(\frac{g''}{g'} f' - f'' \right) \right\rangle \right) = 0. \quad (3-51)$$

Uma solução para a equação acima é dada por

$$\begin{cases} f' = k_1, & \text{com } k_1 \in \mathbb{R}, \\ \frac{g''}{g'} f' - f'' = k_2, & \text{com } k_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Desta forma, $f = k_1 z + z_0$, $z_0 \in \mathbb{C}$ e $f'' = 0$. Logo,

$$\frac{g''}{g'} = \frac{k_2}{k_1} \Leftrightarrow k_2 g' - k_1 g'' = 0.$$

Resolvendo a equação diferencial acima em relação à variável complexa z obtemos (3-50). □

Corolário 3.8 *Seja Σ uma superfície CMRHD. Dizemos que Σ parametrizada por linhas de curvatura, então Σ é uma superfície CMRHD de rotação.*

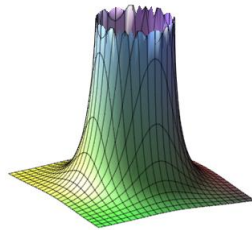
Prova. A demonstração é imediata pelo Corolário 3.7. □

Agora que temos as superfícies CMRHD bem definidas, apresentaremos alguns exemplos utilizando um par de funções holomorfas e uma função real. Antes disso, vejamos os seguintes Lemas.

3.1.1 Exemplo de Superfícies CMRHD

Considerando as funções holomorfas $g(z)$ e $f(z)$ obtemos as superfície CMRHD para as seguintes escolhas da função real ℓ

1. Seja as funções holomorfas $g(z) = z$ e $f(z) = z^2$. Consideremos a função real $\ell(t) = t^3$. Abaixo, apresento uma representação da superfície CMRHD vista em relação ao plano tridimensional, localizada no semi-espaço superior."

Figura 3.1: $\ell(t) = t^3$

Agora, apresentamos a mesma figura anterior, porém, desta vez, alteramos os parâmetros u_1 e u_2 e a observamos de diferentes ângulos.



2. No exemplo a seguir, continuamos a considerar as mesmas funções holomorfas $g(z) = z$ e $f(z) = z^2$, mas agora alteramos a função real para $\ell(t) = t^2$. Observamos a superfície CMRHD em relação ao plano tridimensional e, em seguida, a examinamos de diferentes ângulos.

Figura 3.2: $\ell(t) = t^2$

Observação 3.9

$\ell(t) = t^3$	$C(t) = -3t^4$	<i>CMRHD - Superfícies</i>
$\ell(t) = t^2$	$C(t) = -2t^2$	<i>CMRHD - Superfícies</i>

3. Considere a função holomorfa $f(z) = z$ e a função real $\ell(t) = t^2$. Geramos as superfícies CMRHD em relação ao plano tridimensional e, em seguida, as examinamos de diferentes ângulos para algumas escolhas da função holomorfa $g(z)$.

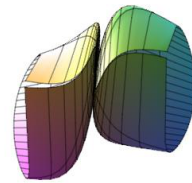
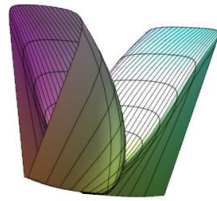
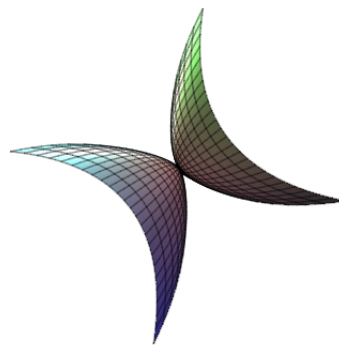


Figura 3.3: $g(z) = \sinh z$

4. Agora, visualizamos a superfície CMRHD considerando a função holomorfa $g(z) = \cosh(z)$.



A seguir, temos a mesma figura anterior, porém, agora vista de um ângulo diferente.

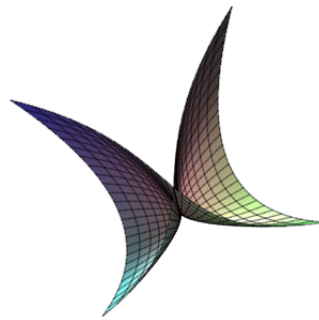


Figura 3.4: $g(z) = \cosh z$

5. Considere as funções holomorfas $f(z) = z^2$ e $g(z) = z^2$. Ao utilizar a função real $\ell(t) = e^{(t^3 - t)}$, obtivemos a seguinte superfície CMRHD, que foi inicialmente visualizada em relação ao semi espaço superior. Em seguida, realizamos alterações nos parâmetros e a observamos de diferentes ângulos.

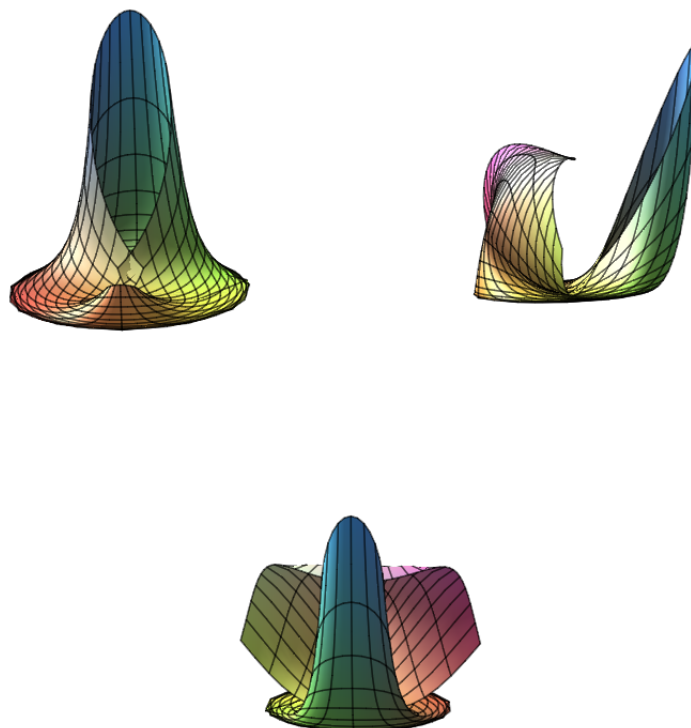
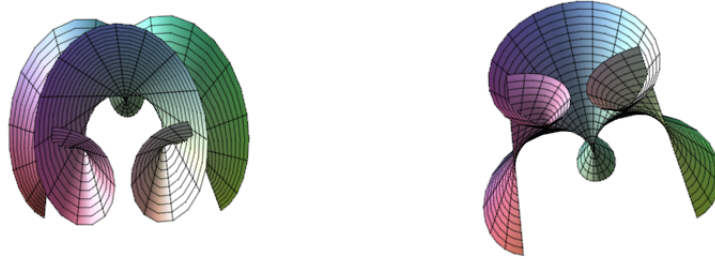


Figura 3.5: $C(t) = 6te^{t^3-t} + (3t^2 - 1)^2 e^{t^3-t}$

6. Considere as funções holomorfas $f(z) = e^z$ e $g(z) = z^2$. Utilizando a função real $\ell(t) = \ln(t)$, obtivemos a seguinte superfície CMRHD.



A seguir, estamos visualizando novamente a mesma superfície CMRHD anterior, mas desta vez em relação ao plano tridimensional no semi-espço superior, com a alteração dos parâmetros.

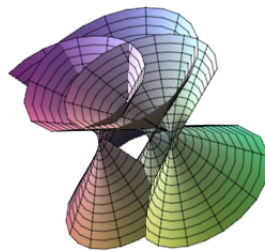


Figura 3.6: $C(t) = -\frac{\ln(t) + t}{t^2}$

3.2 Superfícies CMRHD de Rotação

Agora vamos estudar alguns exemplos de superfícies CMRHD de rotação.

Teorema 3.10 *Seja Σ uma superfície CMRHD parametrizada por (2-10). Então Σ é uma superfície CMRHD de rotação, se e somente se $g(z) = e^z$, $\phi = a_1 u_1 + b_1$, $\mu = a_2 u_1 + b_2$ e $h = J(a_1 u_1 + b_1)$, onde $J : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz*

$$(JJ'' - (J')^2) (a_1)^2 = C(a_1 u_1 + b_1) e^{2((a_2+1)u_1+b_2)}. \quad (3-52)$$

Prova. Uma superfície parametrizada por (2-10) é de rotação se, e somente se, $g(z) = e^z$ e $h_2 = 0$. Seja Σ uma superfície CMRHD de rotação, então podemos considerar $h =$

$J(a_1 u_1 + b_1)$, onde $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$. Assim, derivando h , temos

$$h_{,1} = J'(a_1 u_1 + b_1) a_1 \quad e \quad h_{,11} = J''(a_1 u_1 + b_1) (a_1)^2. \quad (3-53)$$

Note que, $h_{,2} = 0$ pois J assim como definimos só depende da variável u_1 . Assim, por (3-3)

$$(JJ'' - (J')^2)(a_1)^2 = C(\phi) e^{2\mu} \|g'\|^2. \quad (3-54)$$

Como $g(z) = e^z$, temos que $\phi = a_1 u_1 + b_1$ e $\mu = a_1 u_1 + b_1$ de onde segue o resultado. \square

Teorema 3.11 *Seja $\Sigma \subset \mathbb{H}^3$ uma superfície CMRHD tal que sua parametrização é dada por (3-33). Então Σ é uma superfície CMRHD de rotação se, e somente se, Σ está parametrizada por*

$$X(z) = (M(u_1) \cos u_2, M(u_1) \sin u_2, N(u_1)),$$

onde

$$M(u_1) = \left(1 - \frac{2k\ell(cu_1 + b)\ell'(cu_1 + b)c}{(\ell'(cu_1 + b))^2(c)^2 + k^2 e^{2ku_1}} \right) e^{ku_1} \quad (3-55)$$

e

$$N(u_1) = \frac{2\ell(cu_1 + b)k^2 e^{2ku_1}}{(\ell'(cu_1 + b))^2(c)^2}. \quad (3-56)$$

Além disso a condição de regularidade de M é dada por

$$2c\ell(cu_1 + b) \left(k\ell'(cu_1 + b) - \frac{c\ell''(cu_1 + b)}{2} \right) = [C(cu_1 + b)e^{2(a_2 u_1 + b_2)} - 1] k^2 e^{2ku_1}. \quad (3-57)$$

Prova. Como $g = e^{kz}$, podemos reescrever a equação (2-10) da seguinte forma

$$X(z) = \left[\left(1 - \frac{2khh_{,1}}{S\|g'\|^2} \right) e^{ku_1} \cos ku_2, \left(1 - \frac{2khh_{,1}}{S\|g'\|^2} \right) e^{ku_1} \sin ku_2, \frac{2h}{S} \right] \quad (3-58)$$

Pela equação (3-50) a função holomorfa f é dada por

$$f(z) = cz + z_0, \quad \text{onde } c \in \mathbb{R}.$$

Considerando $h = \ell(\langle 1, f \rangle)$ e utilizando a equação acima, temos

$$h = \ell(cu_1 + b). \quad (3-59)$$

Derivando h com relação à variável u_1

$$h_{,1} = \ell'(cu_1 + b)c. \quad (3-60)$$

Assim, por (2-11) temos

$$S \|g'\|^2 = (\ell'(cu_1 + b))^2 c^2 + k^2 e^{2ku_1}. \quad (3-61)$$

Utilizando as equações (3-59)-(3-61) em (3-58) concluímos as equações (3-55) e (3-56). Finalmente, para obtermos a condição de regularidade considere a equação (3-48). Como $g = e^{kz}$, $h_{,2} = 0$ e $f = cz + z_0$ obtemos

$$P = -\frac{4c^2 \ell(\phi)^2}{\|g'\|^4} \left(k\ell'(\phi) - \frac{c\ell''(\phi)}{2} \right)^2 + (C(\phi)e^{2\mu} - 1)^2, \quad (3-62)$$

Assim $P = 0$ se, e somente se, $2c\ell(\phi) \left(k\ell'(\phi) - \frac{c\ell''(\phi)}{2} \right) = (C(\phi)e^{2\mu} - 1)\|g'\|^2$. Utilizando $\phi = \langle 1, f \rangle$ e $\mu = a_2 u_1 + b_2$ temos o resultado. □

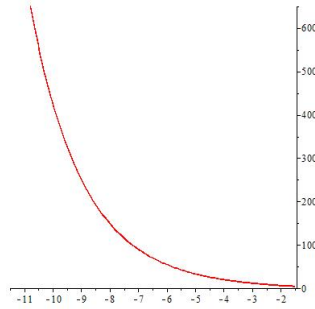
3.2.1 Exemplo CMRHD - Superfícies de rotação

Pelo Teorema 3.11, temos que as *superfícies CMRHD de rotação* ficam determinadas pela curva geratriz $\alpha(u_1) = (M(u_1), N(u_1))$ no plano $u_1 u_3$.

A seguir, obtemos alguns exemplos de *superfícies CMRHD de rotação* e analisamos o comportamento das curvas quando $u_1 \rightarrow \pm\infty$.



Figura 3.7: $\ell = mt + n$

Figura 3.8: *Curva geratriz*

Observação 3.12 *Se $k > 0$*

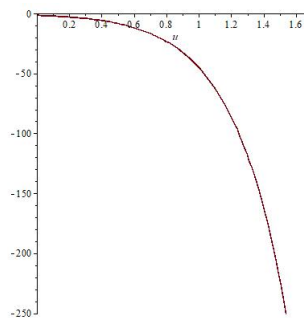
$$\lim_{u_1 \rightarrow +\infty} M(u_1) = -\infty, \quad \lim_{u_1 \rightarrow +\infty} N(u_1) = \infty,$$

$$\lim_{u_1 \rightarrow -\infty} M(u_1) = 0, \quad \lim_{u_1 \rightarrow -\infty} N(u_1) = 0.$$

Portanto a superfície tem um fim quando $u_1 \rightarrow \pm\infty$.

Se $k < 0$ a coordenada $x_3 < 0$. Portanto não determina uma curva no semi-espaço superior.

Para as constantes $m = 1$, $n = -1$, $c = 1$, $b = 1$, $a_2 = 1$ e $b_2 = 1$ o gráfico de (3-57) é dado por $p(u_1) = 2u - (e^{u+1} - 1)e^{2u}$ e não intercepta o eixo u_1 logo a superfície é completa. Note que neste exemplo $C(t) = -m^2$ e portanto temos uma WGH - superfície.

Figura 3.9: *Condição de regularidade*

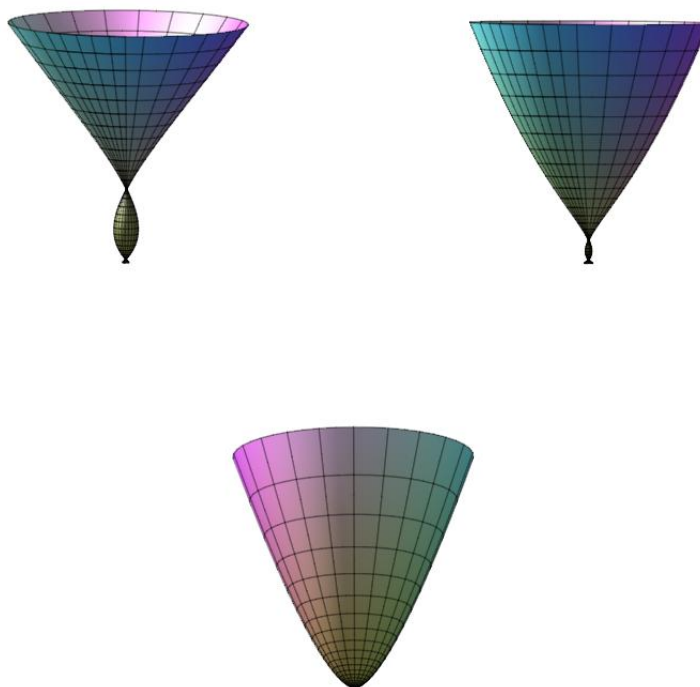


Figura 3.10: $\ell = \sqrt[3]{t}$ e $k > 0$

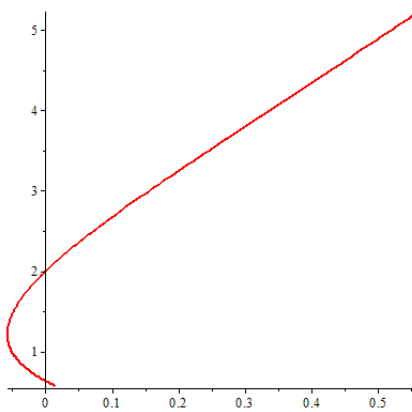


Figura 3.11: Curva geratriz

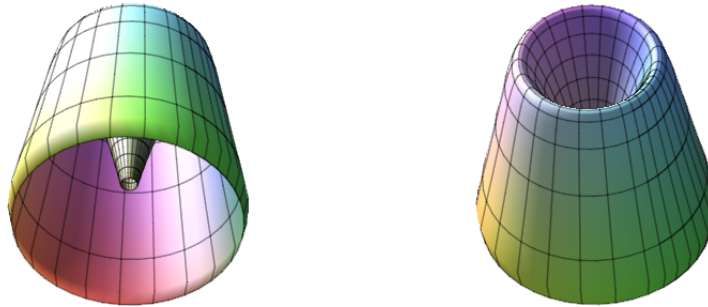


Figura 3.12: $\ell(t) = \sqrt[3]{t}$ e $k < 0$

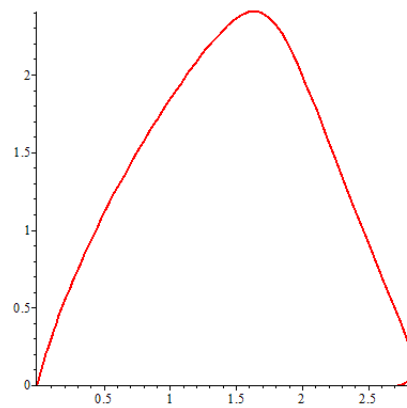


Figura 3.13: Curva geratriz

Observação 3.13 Se $k > 0$,

$$\lim_{u_1 \rightarrow +\infty} M(u_1) = \infty, \quad \lim_{u_1 \rightarrow +\infty} N(u_1) = \infty,$$

$$\lim_{u_1 \rightarrow -\infty} M(u_1) = 0, \quad \lim_{u_1 \rightarrow -\infty} N(u_1) = 0.$$

Portanto a superfície tem um fim quando $u_1 \rightarrow \pm\infty$.

Agora, analisando a condição de regularidade para $\ell(t) = \sqrt[3]{t}$ quando $k > 0$ temos que a curva $\rho(u_1) = \frac{9\sqrt[3]{u_1+1}e^{2u_1}u_1+3e^{3u_1+1}+9\sqrt[3]{u_1+1}e^{2u_1}+6u_1+4}{9(u_1+1)^{4/3}}$ apresenta raízes, portanto a superfície tem singularidades.

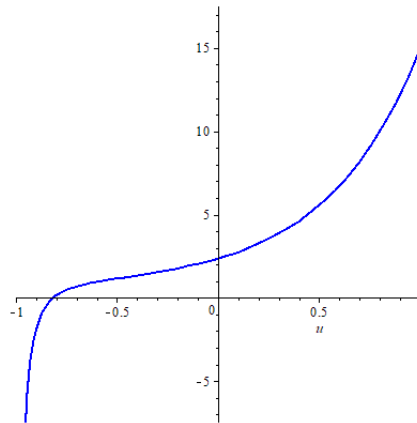


Figura 3.14: Condição de regularidade

Se $k < 0$ a curva de regularidade $p(u_1) = \frac{9\sqrt[3]{1+u_1}e^{-2u_1}u_1 + 3e^{1-u_1} + 9\sqrt[3]{1+u_1}e^{-2u_1} - 6u_1 - 8}{9(1+u_1)^{4/3}}$ dada por

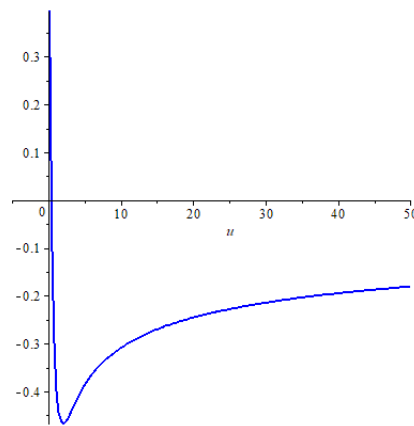


Figura 3.15: Condição de regularidade

tem uma raiz e portanto a CMRHD-superfície de rotação apresenta singularidades.

Para as constantes $k = 1$, $c = 1$, $b = 1$, $a_2 = 1$ e $b_2 = 1$ e $\ell(t) = t^2$, obtemos

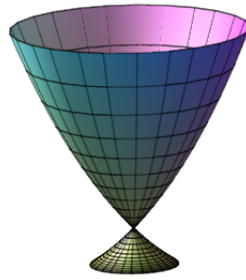
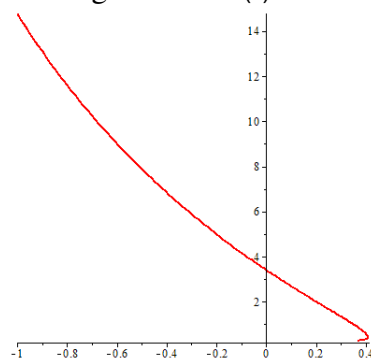
Figura 3.16: $\ell(t) = t^2$ 

Figura 3.17: Curva geratriz

Analisando o comportamento da curva quando $u_1 \rightarrow \pm\infty$, obtemos que ela tem um fim em 0. O gráfico de (3-57) dado por $\rho(u_1) = 2(u_1 + 1)^2(2u_1 + 1) + (2(u_1 + 1)e^{2u_1+1} + 1)e^{2u_1}$ intercepta o eixo u_1 logo a superfície não é completa.

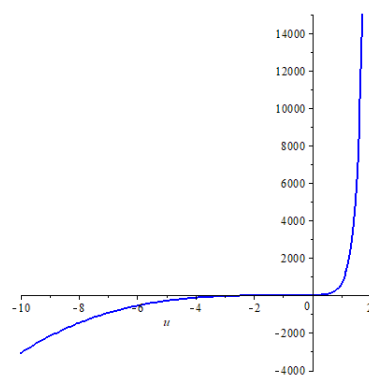


Figura 3.18: Condição de regularidade

Superfícies de Weingarten generalizada do tipo harmônico II

Neste capítulo, apresentaremos a definição das superfícies de Weingarten generalizadas do tipo harmônico II (superfície WGHII) imersas em \mathbb{H}^3 . Inicialmente, consideramos as superfícies como enunciadas no Teorema 2.17 e utilizando a métrica conforme temos a imersão $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^3$. Apresentamos uma parametrização local para estas superfícies, tomando a função raio conforme à métrica e considerando uma função harmônica. Como aplicação, classificamos as superfícies WGHII de rotação.

4.1 Superfícies WGHII

Iniciamos esta seção definindo as superfícies WGHII. Essas superfícies são localmente parametrizadas como o envelope de uma congruência de esferas em que o outro envelope está contido no plano.

Definição 4.1 *Seja a imersão de Σ em \mathbb{H}^3 , onde Σ é uma superfície do envelope de congruência de esferas. Dizemos que Σ é uma Superfície de Weingarten generalizada do tipo harmônico II (Superfícies - WGHII) se existe uma relação entre a curvatura média H e a curvatura Gaussiana K_I tal que*

$$2(H+1)e^{2\mu} + K_I(1+e^{2\mu}) = 0 \quad (4-1)$$

onde μ é uma função harmônica.

A partir desta definição enunciamos o seguinte teorema.

Teorema 4.2 *Seja Σ uma superfície de \mathbb{H}^3 satisfazendo as condições do Teorema 2.17, com $R > 0$. Se $Y(z) = g(z)$, onde g é uma função holomorfa e $\Delta h = 0$, então Σ é uma superfície WGHII, com $\mu = \ln |g(z)|$.*

Prova. Note que, sendo Σ uma superfície orientável de \mathbb{R}^3 como em (2-25), logo

$$X_3(u) = -\frac{2R}{T} \quad e \quad N_3(u) = \frac{2-T}{T}. \quad (4-2)$$

As curvaturas principais t_i em $U \subset \mathbb{R}^3$ são dadas por

$$t_i = \frac{2}{2R - T\sigma_i}, \quad (4-3)$$

onde σ_i são os autovalores da matriz V_{ij} . Agora, considere a imersão $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^3$, temos que

$$k_i = X_3 t_i + N_3. \quad (4-4)$$

Utilizando as equações (4-2) e (4-3) em (4-4), temos

$$k_i = -\frac{2R}{T} \left(\frac{2}{2R - T\sigma_i} \right) + \frac{2-T}{T} = -\left(\frac{2\sigma_i}{2R - T\sigma_i} + 1 \right)$$

Assim,

$$\sigma_i = -\frac{2R(k_i + 1)}{2 - T(k_i + 1)}. \quad (4-5)$$

Logo, o $Trac(V_{ij})$ é dado por

$$\begin{aligned} \sigma_1 + \sigma_2 &= -\left(\frac{2R(k_1 + 1)}{2 - T(k_1 + 1)} + \frac{2R(k_2 + 1)}{2 - T(k_2 + 1)} \right) \\ &= -4R \left(\frac{(k_1 + k_2) - Tk_1k_2 - T(k_1 + k_2) + 2 - T}{(2 - Tk_1 - T)(2 - Tk_2 - T)} \right). \end{aligned} \quad (4-6)$$

Se tomarmos a métrica conforme onde h é uma função harmônica e $T = 1 + e^{2\mu}$, tal que $\Delta\mu = 0$ temos (4-1). \square

Lema 4.3 Considere as funções holomorfas $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $z = u_1 + iu_2 \in \mathbb{C}$ e $g'(z) \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Tomando $h = \langle 1, f \rangle$, a matriz

$$V_{ij} = \frac{1}{g_{jj}} \left(h_{,ij} - \sum_{l=1}^2 \Gamma_{ij}^l h_{,l} \right), \quad 1 \leq i, j \leq 2 \quad (4-7)$$

com

$$\Gamma_{ii}^i = \frac{\|g'\|_{,i}}{\|g'\|} \quad e \quad \Gamma_{ij}^j = \frac{\|g'\|_{,j}}{\|g'\|} = -\Gamma_{ii}^j \quad 1 \leq i \neq j \leq 2, \quad (4-8)$$

é tal que

$$V_{11} = \frac{\langle 1, \zeta \rangle}{\|g'\|^2}, \quad V_{12} = -\frac{\langle i, \zeta \rangle}{\|g'\|^2}, \quad V_{22} = -\frac{\langle 1, \zeta \rangle}{\|g'\|^2},$$

onde $\zeta = f'' - \frac{g''}{g'} f'$. Além disso,

$$\text{Trac}(V) = 0 \quad e \quad \text{Det}(V) = \frac{-\|\zeta\|^2}{\|g'\|^4} \quad (4-9)$$

Prova. Como $h = \langle 1, f \rangle$, segue de (3–58) que $h_{,1} = \langle 1, f' \rangle$ e $h_{,2} = \langle 1, if' \rangle$, logo

$$h_{,11} = \langle 1, f'' \rangle, \quad h_{,12} = h_{,21} = \langle 1, if'' \rangle, \quad e \quad h_{,22} = -\langle 1, f'' \rangle.$$

Utilizando os símbolos de Christoffel dados por (4-8) e as equações acima, temos

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \Gamma_{11}^{\ell} h_{,\ell} &= \frac{\|g'\|_{,1}}{\|g'\|} \langle 1, f' \rangle - \frac{\|g'\|_{,2}}{\|g'\|} \langle 1, if' \rangle \\ &= \left\langle \frac{\|g'\|_{,1}}{\|g'\|} + i \frac{\|g'\|_{,2}}{\|g'\|}, \langle 1, f' \rangle + i \langle i, f' \rangle \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{2 \langle g'', g' \rangle}{\|g'\|} + i \frac{2 \langle ig'', g' \rangle}{\|g'\|}, f' \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{2 \langle 1, \overline{g''} g' \rangle + 2i \langle 1, \overline{g''} g' \rangle}{\|g'\|}, f' \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\overline{g''} g'}{g' g'}, f' \right\rangle \\ &= \left\langle 1, \frac{g''}{g'} f' \right\rangle. \end{aligned} \quad (4-10)$$

De modo análogo, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \Gamma_{22}^{\ell} h_{,\ell} &= -\frac{\|g'\|_{,1}}{\|g'\|} \langle 1, f' \rangle + \frac{\|g'\|_{,2}}{\|g'\|} \langle 1, if' \rangle \\ &= -\left(\frac{\|g'\|_{,1}}{\|g'\|} \langle 1, f' \rangle - \frac{\|g'\|_{,2}}{\|g'\|} \langle 1, if' \rangle \right) \\ &= -\left\langle 1, \frac{g''}{g'} f' \right\rangle \end{aligned} \quad (4-11)$$

e

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^2 \Gamma_{12}^{\ell} h_{,\ell} &= \frac{\|g'\|_{,2}}{\|g'\|} \langle 1, f' \rangle + \frac{\|g'\|_{,1}}{\|g'\|} \langle 1, if' \rangle \\
&= \left\langle \frac{\|g'\|_{,1}}{\|g'\|} + i \frac{\|g'\|_{,2}}{\|g'\|}, -\langle i, f' \rangle + i \langle 1, f' \rangle \right\rangle \\
&= \left\langle 1, i \frac{g''}{g'} f' \right\rangle.
\end{aligned} \tag{4-12}$$

Assim, por (4-7) os coeficientes da matriz (V_{ij}) são dados por

$$\begin{aligned}
V_{11} &= \frac{1}{g_{11}} \left(h_{,11} - \sum_{l=1}^2 \Gamma_{11}^l h_{,1} \right) \\
&= \frac{\langle 1, f'' \rangle - \left\langle 1, \frac{g''}{g'} f' \right\rangle}{\|g'\|^2},
\end{aligned} \tag{4-13}$$

$$\begin{aligned}
V_{12} &= V_{21} = \frac{1}{g_{12}} \left(h_{,12} - \sum_{l=1}^2 \Gamma_{12}^l h_{,1} \right) \\
&= \frac{\langle 1, if'' \rangle - \left\langle 1, i \frac{g''}{g'} f' \right\rangle}{\|g'\|^2},
\end{aligned} \tag{4-14}$$

$$\begin{aligned}
V_{22} &= \frac{1}{g_{22}} \left(h_{,22} - \sum_{l=1}^2 \Gamma_{22}^l h_{,1} \right) \\
&= \frac{-\langle 1, f'' \rangle + \left\langle 1, \frac{g''}{g'} f' \right\rangle}{\|g'\|^2}.
\end{aligned} \tag{4-15}$$

Pelas expressões acima também concluímos que

$$Trac(V) = V_{11} + V_{22} = 0 \tag{4-16}$$

e

$$\begin{aligned}
Det(V) &= V_{11} V_{22} - V_{12}^2 \\
&= \frac{1}{\|g'\|^4} (-\langle 1, \zeta \rangle^2 - \langle i, \zeta \rangle^2) \\
&= \frac{-1}{\|g'\|^4} (\langle \langle 1, \zeta \rangle + i \langle i, \zeta \rangle, \langle 1, \zeta \rangle + i \langle i, \zeta \rangle \rangle).
\end{aligned} \tag{4-17}$$

Utilizando as propriedades (2.4) concluímos o resultado. \square

Agora que temos as Superfícies - WGHII bem definidas podemos enunciar o seguinte teorema de caracterização.

Teorema 4.4 *Seja Σ uma superfície de \mathbb{H}^3 satisfazendo as condições do Teorema 2.17 com $R > 0$. Se $Y(z) = g(z)$ e $h(z) = \langle 1, f(z) \rangle$ então Σ é uma superfície WGHII, com $\mu = \ln |g(z)|$, parametrizada por*

$$X(z) = \left(\frac{\bar{f}'}{\bar{g}'} - \frac{2R}{T}g, -\frac{2R}{T} \right), \quad (4-18)$$

onde f, g são funções holomorfas, $z = u_1 + iu_2 \in \mathbb{C}$, $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ e $g'(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$,

$$T = 1 + |g|^2 \quad e \quad R = \left\langle 1, \frac{g\bar{f}'}{\bar{g}'} - f \right\rangle > 0. \quad (4-19)$$

Nestas coordenadas, a normal de Gauss η é dado por

$$\eta(z) = \frac{1}{T}(2g, 1 - |g|^2), \quad (4-20)$$

a matriz de Weingarten é

$$\tilde{W} = \frac{4R}{P} \left(\frac{2I(R-P)}{T} + \frac{\|\zeta\|^2}{\|g'\|^4} V^{-1} \right) + I \quad (4-21)$$

onde

$$P = - \left(T^2 \frac{\|\zeta\|^2}{\|g'\|^4} + 4R^2 \right). \quad (4-22)$$

Além disso, a primeira e a segunda forma fundamentais são dadas por

$$\tilde{E} = \frac{\|g'\|^2}{R^2} \left([2R - TV_{11}]R - \frac{P}{4} \right), \quad (4-23)$$

$$\tilde{F} = \frac{\|g'\|^2}{R} (R - TV_{12}), \quad (4-24)$$

$$\tilde{G} = \frac{\|g'\|^2}{R^2} \left([2R - TV_{22}]R - \frac{P}{4} \right). \quad (4-25)$$

Mais ainda,

$$\tilde{e} = \frac{\|g'\|^2}{2R^2} (2R - TV_{11}), \quad (4-26)$$

$$\tilde{f} = \frac{\|g'\|^2}{2R^2} TV_{12}, \quad (4-27)$$

$$\tilde{g} = \frac{\|g'\|^2}{2R^2} (2R - TV_{22}). \quad (4-28)$$

Prova. Pela conexão induzida pela métrica temos no Lema 2.13 que a matriz de Weingarten no espaço hiperbólico pode ser determinada por (2-9), onde W é a matriz de Weingarten em \mathbb{R}^3 dada por (2-28). Também temos que, $x_3 = -\frac{2R}{T}$ e $N_3 = \frac{2-T}{T}$ são obtidos respectivamente pelas equações (2-25)-(2-27). Assim a matriz de Weingarten no espaço hiperbólico pode ser escrita como

$$\tilde{W} = -\frac{2R}{T} (2(TV - 2RI)^{-1}) - \left(\frac{2-T}{T}\right) I.$$

Aplicando as propriedades de matrizes na equação acima obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{W} &= -\frac{4R}{T} \left(\frac{T \text{adj}(V) - 2RI}{\det(TV - 2RI)} \right) - \frac{2I}{T} + I \\ &= -\frac{4R}{T} \left(\frac{T \det(V) V^{-1} - 2RI}{P} \right) - \frac{2I}{T} + I \\ &= \frac{4R}{P} \left(\frac{2I(R - P)}{T} - \det(V) V^{-1} \right) + I. \end{aligned} \quad (4-29)$$

E pelo Lema 4.3, obtemos (4-21). Para determinar (4-22) temos de (2-30) que

$$\begin{aligned} P &= \det(TV - 2RI) \\ &= (TV_{11} - 2R)(TV_{22} - 2R) - T^2 V_{12} V_{21} \\ &= 4R^2 - 2TR \text{trac}(V) + T^2 \det(V). \end{aligned} \quad (4-30)$$

Novamente, aplicando o Lema 4.3 temos o resultado.

Usando (2-31) e (4-22), temos

$$\begin{aligned}
 \langle X_{,1}, X_{,1} \rangle &= (V_{11})^2 \|g'\|^2 + (V_{12})^2 \|g'\|^2 - \frac{4R}{T} V_{11} \|g'\|^2 + \frac{4R^2}{T^2} \|g'\|^2 \\
 &= \frac{\|g'\|^2}{T^2} \left([(V_{11})^2 + (V_{12})^2] T^2 - 4TRV_{11} + 4R^2 \right) \\
 &= \frac{\|g'\|^2}{T^2} (V_{11})^2 T^2 + T^2 V_{11} V_{22} + 4R^2 - P - 4TRV_{11} + 4R^2 \\
 &= \frac{\|g'\|^2}{T^2} (TV_{11}[T(V_{11} + V_{22}) - 4R] + 8R^2 - P) \\
 &= \frac{4\|g'\|^2}{T^2} \left([2R - TV_{11}]R - \frac{P}{4} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle X_{,1}, X_{,2} \rangle &= V_{11} V_{21} \|g'\|^2 + V_{12} V_{22} \|g'\|^2 - \frac{2R}{T} (V_{12} \|g'\|^2 + V_{21} \|g'\|^2) + \frac{4R^2}{T^2} L_{,12} \\
 &= V_{12}(V_{11} + V_{22}) \|g'\|^2 - \frac{4R}{T} V_{12} \|g'\|^2 \\
 &= -\frac{4R}{T} V_{12} \|g'\|^2
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \langle X_{,2}, X_{,2} \rangle &= (V_{21})^2 \|g'\|^2 + (V_{22})^2 \|g'\|^2 - \frac{4R}{T} V_{22} \|g'\|^2 + \frac{4R^2}{T^2} \|g'\|^2 \\
 &= \frac{\|g'\|^2}{T^2} \left([(V_{22})^2 + (V_{21})^2] T^2 - 4TRV_{22} + 4R^2 \right) \\
 &= \frac{\|g'\|^2}{T^2} (V_{22})^2 T^2 + T^2 V_{11} V_{22} + 4R^2 - P - 4TRV_{22} + 4R^2 \\
 &= \frac{\|g'\|^2}{T^2} (TV_{22}[T(V_{11} + V_{22}) - 4R] + 8R^2 - P) \\
 &= \frac{4\|g'\|^2}{T^2} \left([2R - TV_{22}]R - \frac{P}{4} \right).
 \end{aligned}$$

Portanto, os coeficientes da primeira forma fundamental são dados por

$$\tilde{E} = \frac{\langle X_{,1}, X_{,1} \rangle}{(x_3)^2}, \quad \tilde{F} = \frac{\langle X_{,1}, X_{,2} \rangle}{(x_3)^2} \quad e \quad \tilde{G} = \frac{\langle X_{,2}, X_{,2} \rangle}{(x_3)^2} \quad (4-31)$$

onde $x_3 = -\frac{2R}{T}$. Assim, obtemos (4-23)-(4-25). Por (2-32), vemos que

$$\begin{aligned} -\langle X_{,1}, N_{,1} \rangle &= \frac{2}{T^2} (2Rg_{11} - TV_{11}g_{11}) \\ &= \frac{2\|g'\|^2}{T^2} (2R - TV_{11}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\langle X_{,1}, N_{,2} \rangle &= \frac{2}{T^2} (2Rg_{12} - TV_{12}g_{22}) \\ &= \frac{2}{T^2} TV_{12} \|g'\|^2 \end{aligned}$$

e

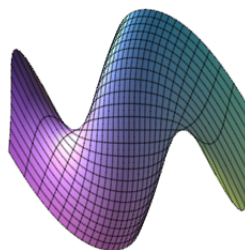
$$-\langle X_{,2}, N_{,2} \rangle = \frac{2\|g'\|^2}{T^2} (2R - TV_{22}).$$

Utilizando o fator conforme do espaço hiperbólico $\lambda = \frac{T^2}{4R^2}$ concluímos (4-26)-(4-28). \square

4.1.1 Exemplo de superfícies WGHII

Considerando os dados holomorfos $f(z)$ e $g(z)$ obtemos a superfície WGHII abaixo

1. Abaixo, temos uma superfície WGHII considerando as funções holomorfas $f(z) = z^2$ e $g(z) = z$, e estamos visualizando a superfície orientada em relação ao eixo u_3 .



2. A seguir, temos a superfície WGHII vista de dois ângulos diferentes.

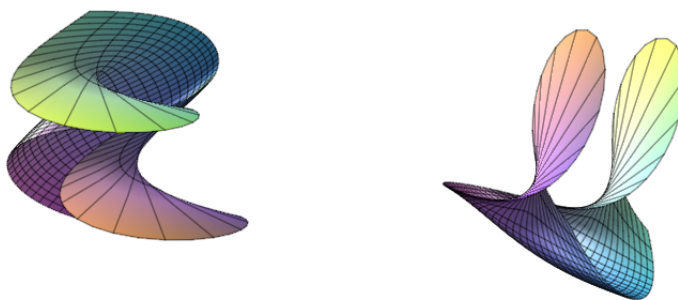


Figura 4.1: Superfície WGHII para $f(z) = z^2$ e $g(z) = z$

3. Neste exemplo, consideramos uma superfície WGHII com as funções holomorfas $f(z) = \sinh z$ e $g(z) = \cosh z$. Inicialmente, a superfície é visualizada com orientação em relação ao eixo u_3 e, em seguida, a observamos de um ângulo diferente.

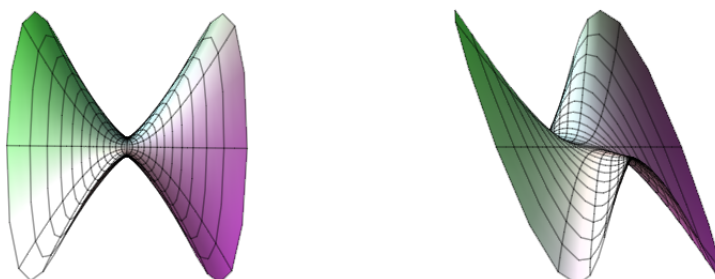


Figura 4.2: Superfície WGHII para $f(z) = \sinh z$ e $g(z) = \cosh z$

4. No próximo exemplo, temos uma Superfície WGHII com as funções holomorfas $f(z) = \sinh z$ e $g(z) = e^z$.

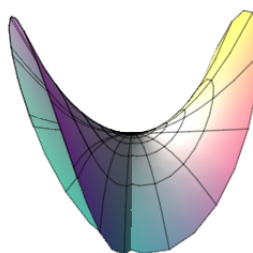
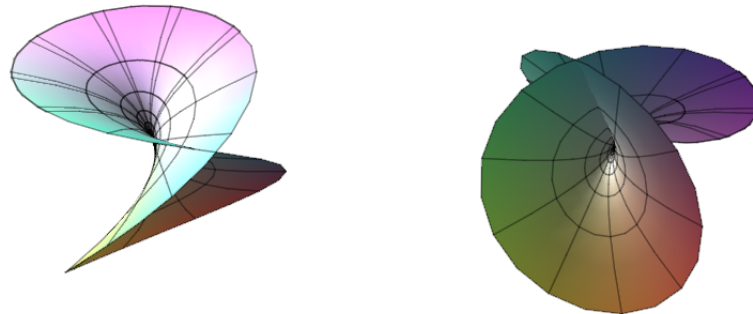
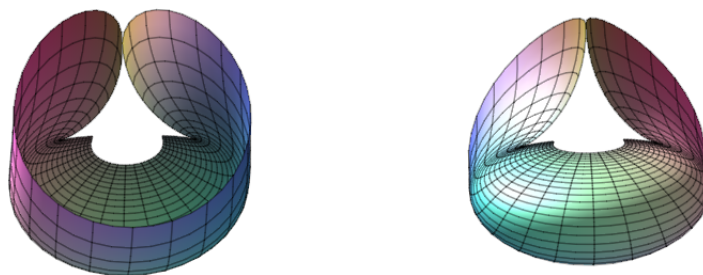


Figura 4.3: Superfície WGHII para $f(z) = \sinh z$ e $g(z) = e^z$

5. Observe a figura vista por ângulos diferentes.



6. Neste exemplo, apresentamos uma superfície WGHII com as funções holomorfas $f(z) = z$ e $g(z) = e^z$, visualizadas a partir de dois ângulos distintos."



7. A seguir, apresentamos a mesma superfície WGHII, porém com um aumento nos parâmetros u_1 e u_2 .

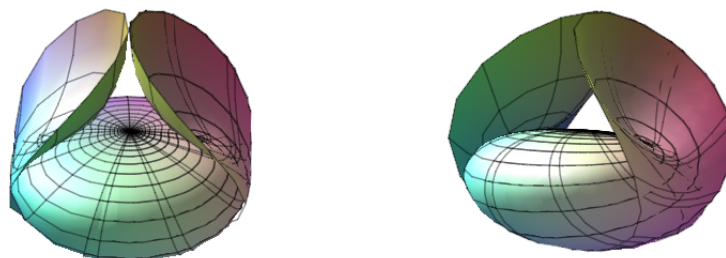


Figura 4.4: Superfície WGHII para $f(z) = z$ e $g(z) = e^z$

Observação 4.5 Note que, no caso acima, para imersão de Σ devemos tomar $f \neq g$. De fato, se $f = g$ temos

$$2\langle 1, f \rangle - 2\langle 1, f \rangle = 0,$$

assim $X(u) = (1, 1, 0)$ donde concluímos que $dX_q(u)$ não é injetiva.

4.1.2 WGHII - Superfícies de rotação

Teorema 4.6 Seja Σ uma superfície de \mathbb{H}^3 satisfazendo as condições do Teorema 4.4. Então Σ é uma superfície - WGHII de rotação se, e somente se, $g(z) = e^z$, $h = au_1 + b$ e X é dada por

$$X(u_1, u_2) = (M(u_1) \cos u_2, M(u_1) \sin u_2, N(u_1)); \quad (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$$

onde

$$M(u_1) = \left[\frac{a}{e^{u_1}} + 2 \frac{b + a(u_1 - 1)}{1 + e^{u_1}} \right] e^{u_1} \quad e \quad N(u_1) = 2 \frac{b + a(u_1 - 1)}{1 + e^{u_1}}. \quad (4-32)$$

Além disso, a condição de regularidade é dada por

$$\rho(u_1) = [a(1 - u_1) - b]^2 - (1 + e^{2u_1})^2 \frac{a^2}{e^{4u_1}} = 0. \quad (4-33)$$

Prova. Do Teorema 4.4 temos que Σ está localmente parametrizada por (4-18), com $T = 1 + \|g\|^2$ e $h = \langle 1, f \rangle$. Fazendo a mudança de parâmetros temos que $g(z) = e^z$, $h = au_1 + b$ e $f = az + z_0$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $z = u_1 + iu_2 \in \mathbb{C}$. Assim,

$$T = 1 + \|g\|^2 = 1 + \|e^{u_1}(\cos u_2 + i \sin u_2)\|^2 = 1 + e^{2u_1}, \quad f'(z) = a \quad e \quad g'(z) = e^z. \quad (4-34)$$

Substituindo as equações acima em (2.13) obtemos

$$\begin{aligned} R &= \left\langle \frac{a}{e^z}, e^z \right\rangle - (au_1 + b) \\ &= a - (au_1 + b) = a(1 - u_1) - b. \end{aligned} \quad (4-35)$$

Utilizando (4-34) - (4-35) em (4-18) e (4-22) temos o resultado. \square

Proposição 4.7 A curva geratriz $\alpha(u_1) = (M(u_1), N(u_1))$ de uma superfície WGHII de rotação satisfaz

Para $a > 0$,

$$\lim_{u_1 \rightarrow +\infty} M(u_1) = \infty, \quad \lim_{u_1 \rightarrow -\infty} M(u_1) = a, \quad \lim_{u_1 \rightarrow +\infty} N(u_1) = 0 \quad e \quad \lim_{u_1 \rightarrow -\infty} N(u_1) = -\infty.$$

Para $a = 0$ e $b \neq 0$,

$$\lim_{u_1 \rightarrow +\infty} M(u_1) = 2b, \quad \lim_{u_1 \rightarrow -\infty} M(u_1) = 0, \quad \lim_{u_1 \rightarrow +\infty} N(u_1) = 0 \quad e \quad \lim_{u_1 \rightarrow -\infty} N(u_1) = 2b.$$

4.1.3 Exemplo WGHII - Superfícies de rotação

Apresentaremos a seguir um exemplo para cada um dos dois tipos de superfícies WGHII de rotação.

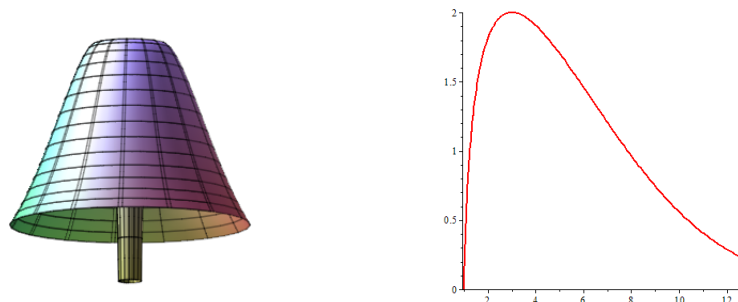


Figura 4.5: $a > 0$ e Curva geratriz

Considerando $a = 1$, $b = 1$ a curva de regularidade é dada por $\rho(u_1) = u_1^2(1 + e^{2u_1})^2 \frac{1}{e^{4u_1}}$.

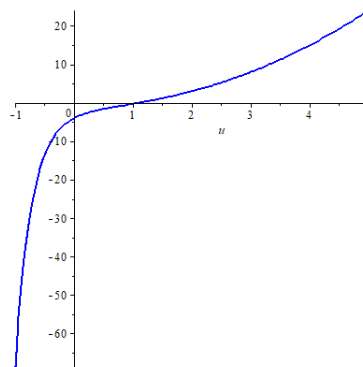


Figura 4.6: Curva de regularidade para $a > 0$

As raízes correspondem às singularidades presentes na curva geratriz $\alpha(u_1) = (M(u_1), N(u_1))$, gerando na superfície com uma singularidade conforme verificamos na Figura (4.5).

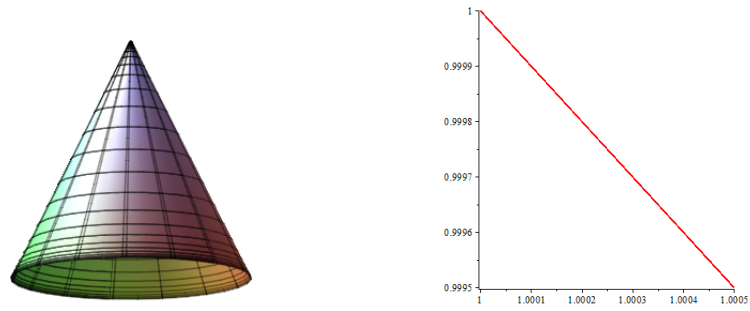


Figura 4.7: $a = 0$, $b \neq 0$ e Curva geratriz

Referências Bibliográficas

- [1] BRYANT, R. **Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space.** *Astérisque*, 154(155):321–347, 1987.
- [2] COLLIN, P.; HAUSWIRTH, L.; ROSENBERG, H. **The geometry of finite topology Bryant surfaces.** *Annals of mathematics*, 153(3):623–659, 2001.
- [3] CONTIN GÓES, C.; ELISA, M.; GALVÃO, E. **A Weierstrass type representation for surfaces in hyperbolic space with mean curvature one.** *Note di Matematica*, 18(1):43–61, 1998.
- [4] CORRO, A. M.; FERNANDES, K. V.; RIVEROS, C. M. **Generalized Weingarten surfaces of harmonic type in hyperbolic 3-space.** *Differential Geometry and its Applications*, 58:202–226, 2018.
- [5] CORRO, A. M.; RIVEIROS, C. M. **Surfaces with constant Chebyshev angle ii.** *Tokyo Journal of Mathematics*, 36(2):379–386, 2013.
- [6] CORRO, A. V. **Generalized Weingarten surfaces of Bryant type in hyperbolic 3-space.** *Mat. Contemp*, 30:71–89, 2006.
- [7] CORRO, A. V.; PINA, R.; SOUZA, M. **Surfaces of rotation with constant extrinsic curvature in a conformally flat 3-space.** *Results in Mathematics*, 60(1-4):225, 2011.
- [8] DIAS, D. G.; CORRO, A. M. **Classes of generalized Weingarten surfaces in the Euclidean 3-space.** *Advances in Geometry*, 16(1):45–55, 2016.
- [9] DO CARMO, M. P. **Geometria diferencial de curvas e superfícies.** *Coleção Textos Universitários*, Rio de Janeiro, SBM, 2008.
- [10] DO CARMO, M. P. **Geometria riemanniana.** *Projeto Euclides*, Rio de Janeiro, IMPA, 2008.
- [11] DO CARMO, M. P. **Pesquisa em geometria diferencial no Brasil.** *Matemática Universitária*, 26-27:1–27, 1999.

- [12] EARP, R. S.; TOUBIANA, E. **Meromorphic data for mean curvature one surfaces in hyperbolic three-space.** *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 56(1):27–64, 2004.
- [13] ESPINAR, J. M.; GÁLVEZ, J. A.; LÓPEZ, G. S. **Hypersurfaces in \mathbb{H}^{n+1} and conformally invariant equations: the generalized christoffel and nirenberg problems.** *Journal of the European Mathematical Society*, 11(4):903–939, 2009.
- [14] GÁLVEZ, J.; MARTÍNEZ, A.; MILÁN, F. **Complete linear Weingarten surfaces of Bryant type. a plateau problem at infinity.** *Transactions of the American Mathematical Society*, 356(9):3405–3428, 2004.
- [15] LIMA, E. L. **Curso de análise, vol. 2, projeto euclides.** *Rio de Janeiro: IMPA*, 2008.
- [16] LIMA, L. L.; ROITMAN, P. **Constant mean curvature one surfaces in hyperbolic 3-space using the bianchi-calò method.** *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, 74:19–24, 2002.
- [17] MACHADO, C. D.; RIVEROS, C. **Weingarten hypersurfaces of the spherical type in Euclidean spaces.** *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 61(2):213–236, 2020.
- [18] RUDIN, W. **Real and complex analysis.** *McGraw-Hill international editions*, 3a edição(235), 1921.
- [19] SCHIEF, W. **On Laplace–Darboux-type sequences of generalized Weingarten surfaces.** *Journal of Mathematical Physics*, 41(9):6566–6599, 2000.
- [20] SMALL, A. **Surfaces of constant mean curvature 1 in \mathbb{H}^3 and algebraic curves on a quadric.** *Proceedings of the American Mathematical Society*, 122(4):1211–1220, 1994.
- [21] UMEHARA, M.; YAMADA, K. **Complete surfaces of constant mean curvature-1 in the hyperbolic 3-space.** *Annals of mathematics*, 137(3):611–638, 1993.
- [22] WEINGARTEN, J. **Ueber eine Klasse auf einander abwickelbarer Flächen.** *J. Reine Angew. Math.*, 59:382–393, 1861.
- [23] WEINGARTEN, J. **Ueber die flächen deren normalen eine gegebene fläche berühren.** *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 62:61–63, 1863.
- [24] ÁVILA, G. **Cálculo 3, funções de várias variáveis.** *Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.*, 3a edição(pg 196), 1983.