

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ARIANNY GRASIELLY BAIÃO MALAQUIAS

**O Método do Averaging via Grau de
Brouwer para determinar o número de
ciclos limites de um centro
4-dimensional em sistemas de controle.**

Goiânia
2010

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Dissertação** **Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):	ARIANNY GRASIELLY BAIÃO MALAQUIAS			
E-mail:	ariannybaiao@gmail.com			
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página?	<input type="checkbox"/> Sim	<input checked="" type="checkbox"/> Não		
Vínculo empregatício do autor				
Agência de fomento:	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico	Sigla:	CNPq	
País:	Brasil	UF:Go	CNPJ:	
Título:	O Método do Averaging via Grau de Brouwer para determinar o número de ciclos limites de um centro 4- dimensional em sistemas de controle.			
Palavras-chave:	Ciclos Limites, Método de Averaging e Grau de Brouwer			
Título em outra língua:	Bifurcation of Limit Cycles from a 4-Dimensional Center in Control System			
Palavras-chave em outra língua:	Limit Cycles, Averaging Method and Brouwer Degree			
Área de concentração:	Geometria e Topologia			
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	30/03/2010			
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado em Matemática			
Orientador (a):	Prof. Dr. João Carlos da Rocha Medrado			
E-mail:				
Co-orientador (a):*	Prof ^a . Dr. ^a Marina Tuyako Mizukoshi			
E-mail:				

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Liberção para disponibilização?¹ total parcial

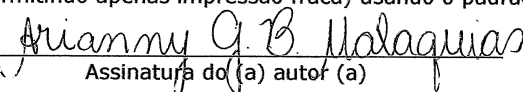
Em caso de disponibilização parcial, assinale as permissões:

Capítulos. Especifique: _____

Outras restrições: _____

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O Sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.


 Assinatura do(a) autor(a)

Data: 02, 03, 2011

¹ Em caso de restrição, esta poderá ser mantida por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Todo resumo e metadados ficarão sempre disponibilizados.

ARIANNY GRASIELLY BAIÃO MALAQUIAS

O Método do Averaging via Grau de Brouwer para determinar o número de ciclos limites de um centro 4-dimensional em sistemas de controle.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria e Topologia.

Orientador: Prof. João Carlos da Rocha Medrado

Co-Orientadora: Profa. Marina Tuyako Mizukoshi

Goiânia
2010

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
GPT/BC/UFG**

M237m Malaquias, Arianny Grasielly Baião.
O método do averaging via grau de Brouwer para determinar o número de ciclos limites de um centro 4-dimensional em sistemas de controle [manuscrito] / Arianny Grasielly Baião Malaquias. - 2010.
xv, 57 f.

Orientador: Prof. Dr. João Carlos da Rocha Medrado;
Co-orientadora: Prof^a. Dr^a. Marina Tuyako Mizukoshi.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás,
Instituto de Matemática e Estatística, 2010.

Bibliografia.

1. Equações diferenciais - Ciclos Limites. 2. Método de Averaging. 3. Grau de Brouwer.. I. Título.

CDU: 519.635

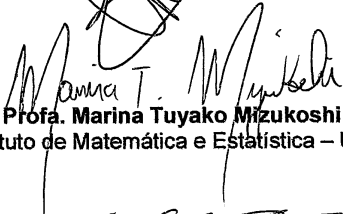
ARIANNY GRASIELLY BAIÃO MALAQUIAS

O Método do Averaging via Grau de
Brouwer para determinar o número de
ciclos limites de um centro
4-dimensional em sistemas de controle.


Dissertação defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 30 de março de 2010, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



Prof. Dr. João Carlos da Rocha Medrado
Instituto de Matemática e Estatística – UFG
Presidente da Banca



Profa. Marina Tuyako Mizukoshi
Instituto de Matemática e Estatística – UFG



Prof. Dr. Cláudio Aguinaldo Buzzi
Universidade Estadual de São Paulo – SJRP

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Arianny Grasielly Baião Malaquias

Bacharel em Matemática pela UFG - Universidade Federal de Goiás. Durante sua graduação, foi bolsista do CNPq em um trabalho de iniciação científica no departamento de Matemática e Estatística. Durante o Mestrado, na UFG - Universidade de Federal de Goiás, foi bolsista do CNPq.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por ter me dado forças e me abençoado em mais esta etapa da minha vida.

Agradeço a meu orientador, João Carlos, pela paciência e pelo incentivo nos momentos difíceis. Sou eternamente grata a professora Marina Mizukoshi pelo seu apoio, sua dedicação e orientação que tanto me ajudaram na minha graduação e mestrado. Agradeço-a também, pela sua amizade e por seus conselhos sempre sábios e sinceros que vou levar comigo pro resto da vida.

Agradeço a toda a minha família, que sempre esteve do meu lado me apoiando. Em especial, agradeço a infinita compreensão, o carinho e a confiança de minha mãe e minha irmã que são dois presentes de Deus da minha vida.

Agradeço a meu amor, João Gabriel, por toda a sua compreensão, seu amor e sua dedicação que foram decisivos nesse projeto.

Agradeço a todos os meus colegas de mestrado pela amizade. Especialmente a minhas amigas Lidiane e Adriana com quem dividi muitas alegrias e aflições.

Enfim, agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Malaquias, A. G. B.. **O Método do Averaging via Grau de Brouwer para determinar o número de ciclos limites de um centro 4-dimensional em sistemas de controle.** Goiânia, 2010. 60p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Nesta dissertação, estudaremos o Método do Averaging via Grau de Brouwer para determinar o número de ciclos limites que podem bifurcar de uma singularidade do tipo centro de um sistema de equações diferenciais. Além disso, mostramos através de exemplos concretos que esta cota superior pode ser realizada.

Palavras-chave

ciclos limite, método do averaging, grau de brouwer.

Abstract

Malaquias, A. G. B.. . Goiânia, 2010. 60p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

In this work, we studying the Averaging Method via Brouwer Degree for upper bound the number of limit cycle that can bifurcate from a center type singularity of a diferencial equation system. After that, we give concrete examples this upper bound can be realized.

Keywords

limit cycles, averaging method, Brouwer degree.

Sumário

1	Introdução	10
2	Preliminares	13
3	Método do Averaging de Primeira Ordem	16
3.1	O Grau de Brouwer	18
3.2	Teorema de Averaging de Primeira Ordem	32
4	Bifurcação de ciclos limites de um centro 4-dimensional em sistemas de controle	38
5	Considerações Finais	59
	Referências Bibliográficas	60

Introdução

Em 1900, na Conferência Internacional de Matemática de Paris, o matemático alemão David Hilbert enunciou 23 problemas, no intuito de apontar temas promissores para a investigação em matemática no século XX. Dentre estes, destacamos o XVI problema de Hilbert que apesar de intensamente investigado, ainda permanece sem solução. Este problema pode ser dividido em duas partes. A primeira parte é objeto de estudo da Geometria Algébrica, e a segunda parte se refere à determinação do número máximo de ciclos limites de um sistema diferencial polinomial. Ciclos limites são órbitas periódicas isoladas dentro de um conjunto de órbitas periódicas.

Neste trabalho, temos por objetivo principal estudar os ciclos limites de um sistema de controle 4-dimensional dado por

$$\dot{x} = A_0x + \varepsilon F(x) \quad (1-1)$$

onde $\varepsilon > 0$ é um parâmetro real suficientemente pequeno, $F(x) = Ax + \varphi(k^T x)b$ com $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, $k, b \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$, $x \in \mathbb{R}^4$ φ é uma a função linear por partes e

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Uma motivação para o estudo de ciclos limites são, por exemplo, problemas envolvendo Mecânica Celeste e controle populacional como em sistemas do tipo Lotka-Volterra. Quando o sistema for autônomo uma ferramenta para se estudar os ciclos limites é a aplicação de Poincaré.

Notemos que, o sistema (1-1) é linear por partes e seu campo de vetores é apenas contínuo nos pontos onde φ está definida. Estamos interessados em estudar os

ciclos limites de (1-1) que bifurcam das órbitas periódicas do sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ \dot{x}_3 = -x_4 \\ \dot{x}_4 = x_3 \end{cases} \quad (1-2)$$

Sistemas de equações diferenciais lineares por partes como (1-1) são amplamente usados para descrever circuitos elétricos. Um estudo de formas canônicas para sistemas de equações diferenciais lineares por partes contínuos, que descrevem algum circuito elétrico utilizando resultados da Teoria de Controle pode ser visto em ([4]). Usando a terminologia de [4] o sistema (1-1) pertence a uma classe de circuitos 4-dimensionais lineares por partes, contínuos com três zonas, isso significa que, o plano de fase de (1-1) pode ser dividido em três regiões tal que, este sistema restrito a cada uma dessas regiões é linear. Como $A_0x + \varepsilon F(-x) = A_0x + \varepsilon F(x)$ podemos concluir que (1-1) é simétrico. Porém, devido a forma específica da matriz A_0 temos que o sistema (1-1) não é observável (veja [4]) e por isso, não podemos aplicar o método descrito em [4] para estudar os ciclos limites do sistema (1-1).

Os ciclos limites de (1-1) também podem ser estudados utilizando o método de Lyapunov-Schmidt para obter as funções de bifurcações de (1-1) e a partir delas fazer uma análise detalhada sobre as bifurcações ressonantes das órbitas periódicas de (1-2). Veja detalhes em [6].

Neste trabalho, para estudar os ciclos limites de (1-1) que bifurcam de (1-2), utilizaremos o Método do Averaging via Grau de Brouwer [2]. Uma vantagem deste método para o caso do sistema de controle (1-1) é que as contas envolvidas ficam mais simples do que usando o método descrito em [6].

Primeiramente, no Capítulo 2 enunciaremos alguns resultados de Análise e de Equações Diferenciais Ordinárias que serão muito importantes para o estudo dos capítulos posteriores.

No Capítulo 3, segundo o trabalho de Buicã e Libre [3] estudaremos o Método de Averaging de Primeira Ordem. Este Método será utilizado para estudar os ciclos limites do sistema (1-1) que bifurcam a partir de órbitas periódicas do sistema de equações diferenciais.

Com esse intuito, na Seção 3.1 definiremos Grau de Brouwer [7], [1], [8] e apresentaremos algumas propriedades, que serão fundamentais na demonstração do Método do Averaging de Primeira Ordem. A Seção 3.2 é dedicada a demonstração do Método.

No Capítulo 4, norteados por [2] faremos uma mudança de variáveis conveniente que transformará o sistema (1-1) em um sistema do tipo $\dot{x} = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon)$.

Posteriormente, utilizando o Método do Averaging de Primeira Ordem mostraremos que existe um limite superior para o número de ciclos limites de $(1-1)$ quando é feita uma expansão de primeira ordem na função deslocamento com relação a um parâmetro $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Mais ainda, mostraremos que este limite superior é de 3 ciclos limites e daremos um exemplo em que essa cota superior é realizada, ou seja, que sob certas condições existem exatamente 3 ciclos limites.

Preliminares

Primeiramente vamos definir alguns conceitos importantes que iremos utilizar no decorrer do texto.

Vamos considerar Ω um subconjunto aberto e limitado do \mathbb{R}^n , $\overline{\Omega}$ o seu fecho, $\partial\Omega$ a fronteira de Ω , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $S = \{x \in \Omega : J_f(x) = 0\}$, onde $J_f(x)$ denota o determinante da matriz Jacobiana de h calculada em x . Denotaremos por $C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ o conjunto das funções k -vezes continuamente diferenciáveis em $\overline{\Omega}$, por $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ as funções contínuas de $\overline{\Omega}$ em \mathbb{R}^n e por $\rho\{b, f(\partial\Omega)\} > 0$ a distância do ponto b ao conjunto $f(\partial\Omega)$. Para o espaço $C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ vamos considerar a seguinte norma

$$\|f\|_k = \max_{0 \leq j \leq k} \sup_{x \in \Omega} \|D^{(j)}f(x)\|$$

onde $D^{(j)}f(x)$ é a diferencial de ordem j da função f em relação a x .

Teorema 2.1 (*Existência e Unicidade de Soluções*) *Considere o Problema de Valor Inicial*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, \varepsilon) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

onde $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $t_0 \leq t \leq t_0 + T$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $D = \{x : |x - x_n| < d\}$. *Suponha que*

- (a) $f(t, x, \varepsilon)$ é contínua com respeito a t, x, ε em $G = [t_0, t_0 + T] \times D \times (0, \varepsilon_0]$;
- (b) $f(t, x, \varepsilon)$ é Lipschitz em x . Então, o Problema de Valor Inicial possui uma única solução para $t_0 \leq t \leq t_0 + \inf\left(T, \frac{d}{M}\right)$, $M = \sup_G \|f\|$.

Dado o sistema de equações diferenciais

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = P(x, y) \quad \text{e} \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \quad (2-1)$$

onde $x, y, t \in \mathbb{R}$, P e Q são funções C^1 . Então a existência e a unicidade de soluções é garantida pelo Teorema 2.1. Tendo por finalidade o estudo de ciclos limites, a seguir apresentaremos resultados que os caracterizam.

Definição 2.2 Se a solução $x = f(t)$, $y = g(t)$ do sistema (2-1) é uma função periódica de período $T > 0$, então o conjunto destas soluções no plano de fase (x, y) dado por $\gamma = \{(x, y) : x = f(t), y = g(t)\}$ é uma órbita fechada de (2-1).

Definição 2.3 Se para alguma vizinhança suficientemente pequena externa (interna) de uma órbita periódica γ não existir outras órbitas periódicas, então γ é chamada de ciclo limite externo (interno).

A seguir definimos a homotopia entre as funções f e g . De maneira informal, isto significa que o gráfico de f é continuamente deformado para o da g .

Definição 2.4 Sejam f e g aplicações contínuas de $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. Diz-se que f é homotópica a g se, e somente se, existir um aplicação contínua $H : \overline{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que, $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$, $\forall x \in \Omega$.

A aplicação H é chamada de homotopia entre f e g .

Exemplo 1 Seja $Y \subset \mathbb{R}^n$. Dadas as aplicações contínuas f e g de $\Omega \rightarrow Y$, se o segmento $[f(x), g(x)]$ estiver contido em Y para todo x em Ω , então f é homotópica a g . Defina,

$$H(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$$

Note que, H é contínua, $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$, $\forall x \in \Omega$. Segue que H é uma homotopia de f em g .

Os próximos resultados serão importantes na demonstração de algumas propriedades do Grau de Brouwer. O teorema a seguir nos diz que toda função contínua definida em um intervalo fechado e limitado pode ser uniformemente aproximada por polinômios.

Teorema 2.5 (Teorema da Aproximação de Weierstrass)

Dada uma função contínua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ existe uma sequência de polinômios p_n tais que $p_n \rightarrow f$ uniformemente em $[a, b]$.

Teorema 2.6 (Teorema de Sard) Seja Ω um aberto do \mathbb{R}^n , f uma função de classe $C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e $S = \{x \in \Omega : J_f(x) = 0\}$. Então $f(S)$ é um conjunto de medida nula.

A seguir apresentaremos o Teorema da Preparação de Malgrange que será utilizado para obter o número máximo de zeros de funções do tipo $f(z, \epsilon) = z^2 - \epsilon^2 + \epsilon^3 r(z, \epsilon)$.

Teorema 2.7 (Teorema da Preparação de Malgrange) Suponha que $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ é um aberto com $(0, 0)$ pertencente a U e $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ satisfaz

$$f(x, 0) = x^k g(x)$$

para algum inteiro $k \geq 1$ onde g é C^∞ na vizinhança de $x = 0$, e $g(0) \neq 0$. Então existe uma função q definida numa vizinhança V de $(0,0)$ e $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ e funções C^∞ $a_0(\varepsilon), a_1(\varepsilon), \dots, a_{k-1}(\varepsilon)$ em uma vizinhança da origem e \mathbb{R}^n tal que $q(0,0) \neq 0$, $a_0(0) = a_1(0) = \dots = a_{k-1}(0) = 0$ e

$$q(x, \varepsilon)f(x, \varepsilon) = x^k + \sum_{i=0}^{k-1} a_i(\varepsilon)x^i, \quad (x, \varepsilon) \in V$$

Método do Averaging de Primeira Ordem

Considere os seguintes problemas: encontrar soluções T -periódicas para um sistema diferencial cujo campo de vetores depende somente de um parâmetro ε suficientemente pequeno e o problema de quantificar o número de ciclos limites que podem bifurcar de uma singularidade do tipo centro e que podem ser detectadas pelo método. As respostas para estes problemas podem ser encontradas utilizando o Método do Averaging no sistema dado. Em poucas palavras podemos dizer que o Método do Averaging relaciona quantitativamente as soluções de um sistema diferencial não-autônomo com as soluções do seu respectivo sistema diferencial na forma padrão do Averaging, o qual é não-autônomo.

Uma idéia intuitiva deste Método foi dada por Lagrange e Laplace na segunda metade do século XVIII, quando estes estudavam o problema de perturbação no movimento de dois corpos no sistema solar. Posteriormente, Poincaré também estudando sobre Mecânica Celeste justificou vários fatos do Método utilizado por Lagrange, que hoje é conhecido como Método do Averaging, e relacionou o método com o conceito de séries assintóticas. A partir daí, o Método do Averaging tem sido estudado por muitos ramos da Análise e possui várias aplicações em problemas físicos e de astronomia que envolvam a teoria da perturbação de equações diferenciais ordinárias.

Mais detalhes sobre o Método do Averaging e sua história podem ser encontrados em [9].

Sejam D um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n , $H: \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $R: \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$ funções contínuas e T -periódicas na primeira variável.

Neste trabalho estudaremos o Método do Averaging via Grau de Brouwer apenas para equações na forma padrão

$$\dot{x} = \varepsilon H(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon) \quad (3-1)$$

e utilizaremos o Método do Averaging para encontrar solução T -periódicas para equações (3-1).

No caso de equações na forma padrão (3-1), denotamos o Método do Averaging

por Método do Averaging de Primeira ordem. Se a equação na forma padrão for

$$\dot{x} = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x) + \varepsilon^3 R(t, x, \varepsilon) \quad (3-2)$$

utilizaremos o Método do Averaging de Segunda Ordem, e assim sucessivamente. Ou seja, a Ordem do Método do Averaging depende da ordem da expansão de Taylor com resto de Lagrange com respeito a $\varepsilon = 0$ feito no sistema perturbado (veja mais em [9] e [10]).

Nosso objetivo neste capítulo será demonstrar o Método de Averaging de Primeira Ordem (ver Teorema 3.1). Inicialmente apresentaremos este Método e na seção 3.1, discutiremos alguns resultados da Teoria do Grau de Brouwer, que serão essenciais pra demonstração do teorema.

Teorema 3.1 (*Método do Averaging de Primeira Ordem*) *Considere o seguinte sistema diferencial*

$$\dot{x}(t) = \varepsilon H(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon) \quad (3-3)$$

onde $H : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $R : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$ são funções contínuas, T -periódicas na primeira variável, e D é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n . Definimos $h : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ como

$$h(z) = \int_0^T H(s, z) ds, \quad (3-4)$$

satisfazendo as seguintes condições:

- (i) H e R são localmente Lipschitzianas com respeito a x ;
- (ii) Se $a \in D$ com $h(a) = 0$, então existe uma vizinhança V de a tal que $h(z) \neq 0$, para $\forall z \in \bar{V} \setminus \{a\}$ e $d(h, V, 0) \neq 0$.

onde $d(h, V, 0)$ é o grau de Brouwer da função h com relação a V no ponto 0 (ver seção 3.1). Então, para $|\varepsilon| > 0$ suficientemente pequeno, existe uma solução isolada T -periódica $\varphi(\cdot, \varepsilon)$ do sistema (3-3) tal que $\varphi(\cdot, \varepsilon) \rightarrow a$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Sejam $D_x H$ a matriz Jacobiana de H com respeito as componentes de x , $D_x^2 H$ a matriz hessiana de H com respeito a x e $J_h(a)$ o determinante da matriz Jacobiana de h calculada em a .

Em [10] página 158, Teorema 11.5 é apresentado outra versão para o Teorema do Averaging de Primeira Ordem. A diferença é que no Teorema 3.1 enunciado acima exigimos apenas que H seja continua enquanto na outra versão há a exigência que H seja diferenciável, ou seja, o Teorema 3.1 tem hipóteses mais fracas que a versão clássica deste teorema apresentada em [10].

Como o fato da continuidade da função H ser crucial na demonstração do Teorema 11.5 de [10], teremos que recorrer a outro método para demonstrar o Teorema 3.1. Utilizaremos a Teoria do Grau de Brouwer para demonstrá-lo. Teoria esta que apresentaremos na próxima seção.

3.1 O Grau de Brouwer

Muitos problemas em análise podem ser reduzidos ao estudo dos conjuntos soluções de uma equação da forma $f(x) = p$ num espaço apropriado. A Teoria do Grau tem se mostrado uma ferramenta importante para estudar o conjunto das soluções dessas equações e para obter informações sobre a existência e o número de soluções. Esta teoria pode ser usada no estudo de equações diferenciais ordinárias e parciais. Como, por exemplo, em equações diferenciais ordinárias ela tem sido utilizada na teoria de bifurcações para estudo de ciclos limites e na verificação de existência de soluções periódicas.

O conceito de Grau em espaços de dimensão finita foi desenvolvida primeiramente por Brouwer em 1912. Esta teoria foi denominada grau de Brouwer e estuda as propriedades do grau em espaços de dimensão finita.

O grau de funções em espaços normados de dimensão infinita foi definido por Leray e Schauder em um artigo publicado em 1934 e por isso, este grau foi denominado de Grau de Leray-Schauder.

Como neste trabalho estamos estudando a teoria para funções definidas em \mathbb{R}^n que é um espaço de dimensão finita, a teoria do grau de Brouwer será fundamental para o desenvolvimento dos resultados que serão apresentados aqui.

Assim sendo, a seguir definiremos o Grau de Brouwer e discutiremos algumas de suas principais propriedades que resultarão em algumas consequências imediatas necessárias para a demonstração do Teorema 3.1.

Sejam Ω um subconjunto aberto e limitado do \mathbb{R}^n , $\bar{\Omega}$ o seu fecho, $\partial\Omega$ a fronteira de Ω , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $S = \{x \in \Omega : J_f(x) = 0\}$, onde $J_f(x)$ denota o determinante da matriz Jacobiana de f calculada em x .

Denotaremos por $C^k(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ o conjunto das funções k -vezes continuamente diferenciáveis em $\bar{\Omega}$, por $C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ as funções contínuas de $\bar{\Omega}$ em \mathbb{R}^n e por $\rho\{b, f(\partial\Omega)\} > 0$ a distância do ponto b ao conjunto $f(\partial\Omega)$.

Para o espaço $C^k(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ vamos considerar a seguinte norma

$$\|f\|_k = \max_{0 \leq j \leq k} \sup_{x \in \Omega} \|D^{(j)}f(x)\|$$

onde $D^{(j)}f(x)$ é a diferencial de ordem j da função f em relação a x .

Definição 3.2 *Sejam $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua. Se $p \notin f(S)$ e $p \notin f(\partial\Omega)$, então definimos o Grau de Brouwer da aplicação f em Ω no ponto p , como sendo o número inteiro*

$$d(f, \Omega, p) = \sum_{\xi_i \in f^{-1}(p)} \text{sgn} J_f(\xi_i), 1 \leq i \leq k$$

onde sgn é a função sinal, definida por

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

Exemplo 2 *Considere a aplicação $f : \left(0, \frac{5\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \text{sen}(x)$ com $p = \frac{\pi}{4}$. Como $\Omega = \left(0, \frac{5\pi}{2}\right)$, $p = \left(\frac{\pi}{4}\right)$ e $d\left(f, \left(0, \frac{5\pi}{2}\right), \frac{\pi}{4}\right)$ devemos verificar que $p \notin f(S) \cup f\left(\partial\left(0, \frac{5\pi}{2}\right)\right)$.*

$$S = \left\{x \in \left(0, \frac{5\pi}{2}\right) : \cos(x) = 0\right\} = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\} \Rightarrow f(S) = \{-1, 1\}$$

e como $f\left(\partial\left(0, \frac{5\pi}{2}\right)\right) = \{0, 1\}$, concluímos que $p = \frac{\pi}{4} \notin f(S) \cup f\left(\partial\left(0, \frac{5\pi}{2}\right)\right) = \{-1, 0, 1\}$. Assim,

$$f^{-1}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$$

e pela definição,

$$d\left(f, \left(0, \frac{5\pi}{2}\right), \frac{\pi}{4}\right) = \sum_{\xi_i \in f^{-1}\left(\frac{\pi}{4}\right)} \text{sgn} J_f(\xi_i)$$

Logo,

$$d\left(f, \left(0, \frac{5\pi}{2}\right), \frac{\pi}{4}\right) = \text{sgn}(f'(\xi_1)) + \text{sgn}(f'(\xi_2)) + \text{sgn}(f'(\xi_3))$$

consequentemente,

$$d\left(f, \left(0, \frac{5\pi}{2}\right), \frac{\pi}{4}\right) = 1 + (-1) + 1$$

Portanto,

$$d\left(f, \left(0, \frac{5\pi}{2}\right), \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

Sob as mesmas hipóteses da definição 3.2 podemos calcular o grau de Brouwer através de integrais como mostra o próximo Teorema.

Seja $K : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ um função contínua. Definimos como suporte da função K o conjunto

$$\overline{\{x \in \mathbb{R}^n : K(x) \neq 0\}}$$

e denotamos por $\text{supp}K$ o suporte desta função.

Denotaremos por $B_r(y)$ a bola aberta de centro y e raio r .

Teorema 3.3 *Sejam Ω um subconjunto aberto do \mathbb{R}^n , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 , $p \notin f(S) \cup f(\partial\Omega)$ e $J_f(p) \neq 0$. Seja $f_\varepsilon : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ um função contínua tal que*

$$\text{supp}f_\varepsilon \subset B_\varepsilon(p) \quad e \quad \int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x)dx = 1.$$

Então existe $\varepsilon_0 > 0$ dependendo de p e de f , tal que

$$d(f, \Omega, p) = \int_{\Omega} f_\varepsilon(f(x))J_f(x)dx, \forall 0 < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Demonstração. De fato, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, considere $f_\varepsilon \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tal que $\text{supp}f_\varepsilon \subset B_\varepsilon(p)$ e $\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x)dx = 1$.

Seja $f^{-1}(\{p\}) = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k\}$ como $p \notin f(S)$ temos $J_f(\xi_i) \neq 0$ para todo $i \in \{1, 2, 3, \dots, k\}$. Logo pelo Teorema da Função Inversa, existe para cada $i = 1, \dots, k$ uma vizinhança U_i de ξ_i e $f(U_i)$ de p tal que $f|_{U_i} : U_i \rightarrow f(U_i)$ com $i \in \{1, 2, 3, \dots, k\}$ é um difeomorfismo. Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno existem vizinhanças $B_\varepsilon(p)$ de p e U_i de ξ_i com $i \in \{1, 2, 3, \dots, k\}$ tais que

$$f|_{U_i} : U_i \rightarrow B_\varepsilon(p)$$

também seja um difeomorfismo.

Defina,

$$I_\varepsilon = \int_{\Omega} f_\varepsilon(f(x))J_f(x)dx.$$

Como $\Omega = \cup U_i, \forall i \in \{1, \dots, k\}$ temos,

$$I_\varepsilon = \int_{\{x \in \Omega : |f(x) - p| < \varepsilon\}} f_\varepsilon(f(x))J_f(x)dx.$$

Fixe ε suficientemente pequeno, e considere as vizinhanças U_i de ξ_i , desta forma I_ε é dado por

$$I_\varepsilon = \sum_{i=1}^k \int_{U_i} f_\varepsilon(f(x))J_f(x)dx.$$

Como $f(U_i) = B_\varepsilon(p)$ temos que $U_i = f^{-1}(B_\varepsilon(p))$ então,

$$I_\varepsilon = \sum_{i=1}^k \int_{f^{-1}(B_\varepsilon(p))} f_\varepsilon(f(x))J_f(x)dx.$$

Como $B_\varepsilon(p)$ é um aberto do \mathbb{R}^n e $f^{-1} : B_\varepsilon(p) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 , pelo Teorema de

Mudança de Variáveis para integral obtemos

$$I_{\varepsilon} = \sum_{i=1}^k \int_{B_{\varepsilon}(p)} f_{\varepsilon}(f(x)(f^{-1}(x))) J_f(f^{-1}(x)) |J_{f^{-1}}(x)| dx,$$

equivalentemente,

$$I_{\varepsilon} = \sum_{i=1}^k \int_{B_{\varepsilon}(p)} f_{\varepsilon}(x) J_f(f^{-1}(x)) |J_{f^{-1}}(x)| dx, \quad (3-5)$$

Como $f(f^{-1}(x)) = x$ temos,

$$|J_{f^{-1}}(x)| = \frac{1}{|J_f(f^{-1}(x))|} \quad (3-6)$$

De (3-5) e (3-6) obtemos

$$I_{\varepsilon} = \sum_{i=1}^k \int_{B_{\varepsilon}(p)} f_{\varepsilon}(x) J_f(f^{-1}(x)) \frac{1}{|J_f(f^{-1}(x))|} dx$$

Note que

$$\frac{J_f(f^{-1}(x))}{|J_f(f^{-1}(x))|} = \begin{cases} 1 & , se J_f(f^{-1}(x)) > 0 \\ -1 & , se J_f(f^{-1}(x)) < 0 \end{cases}$$

e portanto

$$\frac{J_f(f^{-1}(x))}{|J_f(f^{-1}(x))|} = \text{sgn}[J_f(f^{-1}(x))]$$

Consequentemente,

$$I_{\varepsilon} = \sum_{i=1}^k \int_{B_{\varepsilon}(p)} f_{\varepsilon}(x) \text{sgn}[J_f(f^{-1}(x))] dx$$

Como $\text{sgn}[J_f(f^{-1}(x))] = \text{sgn}J_f(\xi_i), \forall x \in B_{\varepsilon}(p)$, segue que

$$I_{\varepsilon} = \sum_{i=1}^k \int_{B_{\varepsilon}(p)} f_{\varepsilon}(x) \text{sgn}[J_f(\xi_i)] dx.$$

Assim,

$$I_{\varepsilon} = \sum_{i=1}^k \text{sgn}[J_f(\xi_i)] \int_{B_{\varepsilon}(p)} f_{\varepsilon}(x) dx$$

Sendo $\text{supp}f_{\varepsilon} \subset B_{\varepsilon}(p)$ e

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_{\varepsilon}(x) dx = 1$$

temos

$$I_{\varepsilon} = \sum_{i=1}^k \text{sgn}[J_f(\xi_i)]$$

e, portanto

$$I_\varepsilon = d(f, \Omega, p).$$

O número I_ε é denominado a Forma Integral do Grau de Brouwer de f com relação a Ω no ponto p . \square

Observação 3.4 Se $d(f, \Omega, p) \neq 0$, existe $x_0 \in \Omega$ tal que $f(x_0) = p$.

De fato, se $p \notin f(\partial\Omega)$ temos

$$d(f, \Omega, p) = \sum_{\xi \in f^{-1}(\{p\})} \text{sgn}(J_f(\xi_i)) = \int_{\{x \in \Omega: |f(x)-p| < \varepsilon\}} J_\varepsilon(f(x)) J_f(x) dx.$$

Por hipótese, $d(f, \Omega, p) \neq 0$, logo

$$\int_{\{x \in \Omega: |f(x)-p| < \varepsilon\}} J_\varepsilon(f(x)) J_f(x) dx \neq 0.$$

Segue que $\{x \in \Omega : |f(x) - p| < \varepsilon\} \neq \emptyset$. Consequentemente, existe $x_\varepsilon \in \Omega$ tal que $|f(x_\varepsilon) - p| < \varepsilon$. Como $\overline{\Omega}$ é limitado, fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$ temos que, $f(x_0) - p = 0$ e portanto $f(x_0) = p$.

O Lema a seguir será utilizado na prova do Teorema 3.7, mas sua demonstração será omitida neste trabalho por usar resultados que não fazem parte do objetivo deste trabalho. Para ver a demonstração do Lema veja [1]

Lema 3.5 Seja $H(x, t)$ uma homotopia em $C^2(\overline{\Omega} \times [0, 1], \mathbb{R}^n)$, com $p \notin H(\partial\overline{\Omega} \times [0, 1])$.

Então

$$d(H(\cdot, t), \Omega, p) = \text{constante}, \quad \forall t \in [0, 1]$$

Observação 3.6 $C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ é denso em $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$

Veja detalhes em [5].

Teorema 3.7 Sejam $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $p \notin f(\partial\Omega)$ e $r = \rho\{p, f(\partial\Omega)\} > 0$. Então fixando

$$U = \{g \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) : \|f - g\| < \frac{r}{2}\}$$

tem-se

$$d(g_1, \Omega, p) = d(g_2, \Omega, p), \quad \forall g_1, g_2 \in U$$

Demonstração. Defina a homotopia

$$\begin{aligned} H : \overline{\Omega} \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, t) &\mapsto H(x, t) = t g_1(x) + (1 - t) g_2(x) \end{aligned}$$

Como $g \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ temos que, $H \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. Para usarmos o Lema anterior precisamos provar que $p \notin H(\partial\overline{\Omega} \times [0, 1])$.

De fato, seja $x \in \overline{\Omega}$, para cada $t \in [0, 1]$ temos

$$\begin{aligned} |H(x, t) - f(x)| &= |tg_1(x) + (1-t)g_2(x) - tf(x) - (1-t)f(x)| \\ &= |t(g_1(x) - f(x)) + (1-t)(g_2(x) - f(x))|. \end{aligned}$$

Portanto,

$$|H(x, t) - f(x)| \leq t|(g_1(x) - f(x))| + (1-t)|(g_2(x) - f(x))|, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Por hipótese,

$$|g_1(x) - f(x)| \leq \|g_1 - f\|_\infty \quad e \quad |g_2(x) - f(x)| \leq \|g_2 - f\|_\infty.$$

Logo,

$$|H(x, t) - f(x)| < t\|g_1 - f\|_\infty + (1-t)\|g_2 - f\|_\infty.$$

Como $g_1, g_2 \in U$,

$$|H(x, t) - f(x)| < t\frac{r}{2} + (1-t)\frac{r}{2}.$$

Assim,

$$|H(x, t) - f(x)| < \frac{r}{2},$$

e, conseqüentemente,

$$p \notin H(\partial\overline{\Omega} \times [0, 1])$$

Caso contrário, existiria $x_0 \in \partial\overline{\Omega}$ e $t_0 \in [0, 1]$ tais que $H(x_0, t_0) = p$, e com isso

$$|H(x_0, t_0) - f(x_0)| < \frac{r}{2}$$

o que implicaria

$$|p - f(x_0)| < \frac{r}{2}$$

o que é um absurdo, pois sendo $r = \rho\{p, f(\partial\overline{\Omega})\}$, temos $|p - f(x_0)| \geq r$. Dessa forma, $p \notin H(\partial\overline{\Omega} \times [0, 1])$. Pelo Lema 3.5,

$$d(H(\cdot, t), \Omega, p) \equiv \text{constante}, \quad \forall t \in [0, 1]$$

logo,

$$d(H(\cdot, 0), \Omega, p) = d(H(\cdot, 1), \Omega, p)$$

isto é,

$$d(g_2, \Omega, p) = d(g_1, \Omega, p)$$

□

Como consequência do Teorema 3.7 podemos definir o Grau de Brouwer para funções que são apenas contínuas.

Definição 3.8 Definimos o grau topológico de Brouwer para $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ com $p \notin f(\partial\Omega)$, como sendo

$$d(f, \Omega, p) = d(g, \Omega, p), \quad \forall g \in U$$

Um primeiro resultado que segue da definição 3.8 é o seguinte

Lema 3.9 Seja $f \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e $p \notin f(\partial\Omega)$. Então,

$$d(f, \Omega, p) = d(f - p, \Omega, 0)$$

Demonstração.

Pela definição de grau topológico para funções contínuas temos

$$d(f, \Omega, p) = d(g, \Omega, p), \quad \forall g \in U \quad (3-7)$$

Fixando $g \in U$, temos

$$f(x) = p \Rightarrow (f - p)(x) = 0, \quad \forall x \in \overline{\Omega}$$

e

$$\|g - f\|_\infty < \frac{r}{2}, \quad \text{onde } r = \rho\{0, (f - p)(\partial\Omega)\},$$

pois

$$\begin{aligned} r &= \rho\{0, (f - p)(\partial\Omega)\} = \inf\{|0 - (f - p)(x)| : x \in \partial\Omega\} = \inf\{|p - (f)(x)| : x \in \partial\Omega\} \\ &= \rho\{p, (f)(\partial\Omega)\}. \end{aligned}$$

Como

$$\|g - p + p - f\|_\infty < \frac{r}{2}$$

segue que

$$\|(g - p) - (f - p)\|_\infty < \frac{r}{2}.$$

Portanto,

$$d(f - p, \Omega, 0) = d(g - p, \Omega, 0). \quad (3-8)$$

e $p \notin g(\partial\Omega), \forall g \in U$. Considere agora $p_1 \notin g(S)$ que está na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^n \setminus g(\partial\Omega)$ que contém p . Assim

$$d(g, \Omega, p) = d(g, \Omega, p_1) = d(g - p_1, \Omega, 0) \quad (3-9)$$

Para p_1 suficientemente próximo de p , temos

$$\|(g - p) - (g - p_1)\|_\infty = \|p_1 - p\| < \varepsilon < \frac{1}{2}\rho\{0, (g - f)(\partial\Omega)\}$$

donde

$$d(g - p, \Omega, 0) = d(g - p_1, \Omega, 0) \quad (3-10)$$

De (3-7)-(3-10) concluímos:

$$d(f, \Omega, p) = d(g, \Omega, p) = d(g, \Omega, p_1) = d(g - p_1, \Omega, 0) = d(g - p, \Omega, 0) = d((f - p), \Omega, 0)$$

□

Agora, veremos algumas das principais propriedades do Grau de Brouwer.

Proposição 3.10 (Continuidade) *Sejam $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ e $p \notin f(\partial\Omega)$. Existe uma vizinhança V de f na topologia $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, tal que para $\forall g \in V$ temos:*

(i) $p \notin g(\partial\Omega)$,

(ii) $d(f, \Omega, p) = d(g, \Omega, p)$.

Demonstração. Sejam $r = \rho\{p, f(\partial\Omega)\} > 0$ e $V = \{H \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) : \|f - H\|_\infty < \frac{r}{4}\}$.

Afirmção 1: Se $H \in V$ então $p \notin H(\partial\Omega)$. Com efeito, seja $x \in \overline{\Omega}$ então

$$|p - H(x)| = |p - f(x) + f(x) - H(x)|$$

o que implica

$$|p - H(x)| \leq |p - f(x)| + |f(x) - H(x)| \quad (3-11)$$

Como $r = \rho\{p, f(\partial\Omega)\} > 0$ então $|p - f(x)| \geq r, \forall x \in \partial\Omega$. Sendo $\|f - H\|_\infty = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |f(x) - H(x)|$, deduzimos que

$$|f(x) - H(x)| \geq \|f - H\|_\infty < \frac{r}{4}, \forall x \in \overline{\Omega}$$

De (3-11), temos

$$|p - H(x)| \geq r - \frac{r}{4}.$$

logo,

$$|p - H(x)| \geq \frac{3r}{4}, \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Portanto $p \notin H(\partial\Omega)$. Agora vamos demonstrar o item (ii). Fixe $g \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ satisfazendo $\|f - g\|_\infty < \frac{r}{8}$. Da definição 3.8

$$d(f, \Omega, p) = d(g, \Omega, p). \quad (3-12)$$

Defina para $H \in V$ o número $r' = \rho\{p, H(\partial\Omega)\}$. Como $p \notin H(\partial\Omega)$ e $|p - H(x)| \geq \frac{3r}{4}, \forall x \in \partial\Omega$ temos que $r' \geq \frac{3r}{4}$. Queremos mostrar que

$$\|g - H\|_\infty < \frac{r'}{2}.$$

De fato, para $x \in \overline{\Omega}$ temos

$$|g(x) - H(x)| = |g(x) - f(x) + f(x) - H(x)| \leq |g(x) - f(x)| + |H(x) - f(x)|.$$

Como por hipótese $\forall x \in \overline{\Omega}$,

$$|g(x) - f(x)| \leq \|g - f\|_\infty \quad e \quad |g(x) - H(x)| \leq \|g - f\|_\infty$$

obtemos,

$$|g(x) - H(x)| \leq \|g - f\|_\infty + \|H - f\|_\infty.$$

Assim,

$$|g(x) - H(x)| < \frac{r}{8} + \frac{r}{4} = \frac{3r}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3r}{4} < \frac{r'}{2}.$$

Portanto

$$|g(x) - H(x)| < \frac{r'}{2}.$$

Como o conjunto $\{|g(x) - H(x)| : x \in \overline{\Omega}\}$ é limitado superiormente, pelo postulado de Dedekind, o mesmo possui supremo. Assim,

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} |g(x) - H(x)| < \frac{r'}{2}$$

e com isso,

$$\|g - H\|_\infty < \frac{r'}{2}.$$

Usando novamente a definição de grau topológico de Brouwer para funções contínuas temos

$$d(H, \Omega, p) = d(g, \Omega, p) \quad (3-13)$$

De (3-12) e (3-13) concluimos

$$d(f, \Omega, p) = d(g, \Omega, p), \forall H \in V$$

□

Proposição 3.11 (Invariância do Grau por Homotopia) *Sejam $H \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ uma homotopia e $p \notin H(\partial\Omega \times [0, 1])$. Então,*

$$d(H(\cdot, t), \Omega, p) \equiv \text{constante}, \forall t \in [0, 1]$$

Demonstração. Fixe $\tau \in [0, 1]$. Como H é contínua, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$t \in [0, 1], |t - \tau| < \delta \Rightarrow \|H(\cdot, t) - H(\cdot, \tau)\|_\infty < \varepsilon.$$

Pela Proposição 3.10 temos que a aplicação $t \mapsto d(H(\cdot, t), \Omega, p)$ é localmente constante. Sendo $[0, 1]$ um conjunto compacto e conexo, segue que a aplicação $t \mapsto d(H(\cdot, t), \Omega, p)$ é constante, isto é,

$$d(H(\cdot, t), \Omega, p) \equiv \text{constante}, \forall t \in [0, 1]$$

□

Proposição 3.12 (O grau é constante em componentes conexas) *Se p_1 e p_2 estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$, tem-se que*

$$d(f, \Omega, p_1) = d(f, \Omega, p_2)$$

Demonstração. Sejam p_1 e p_2 pontos de $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$. Como a componente conexa que contém p_1 e p_2 é um aberto em \mathbb{R}^n , pois $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ é um aberto, a mesma é conexa por caminhos, e com isso existe

$$\begin{aligned} q: [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto q(t) \in C_{p_1, p_2} \end{aligned}$$

com $q(0) = p_1$ e $q(1) = p_2$ onde C_{p_1, p_2} é a componente conexa que contém p_1 e p_2 . Note que $q([0, 1]) \subset C_{p_1, p_2}$ é um compacto em \mathbb{R}^n . Assim, existem $\varepsilon > 0$ e $\{x_1, x_2, \dots, x_s\}$ tais que

$$q([0, 1]) \subset \bigcup_{i=1}^s B_\varepsilon(x_i) \text{ e } B_\varepsilon(x_i) \cap B_\varepsilon(x_{i+1}) \neq \emptyset, \text{ com } i = 1, 2, 3, \dots, s-1.$$

Considere $B_\varepsilon(x_1)$ com $x_1 = p_1$ e $x_2 = p_2$. Se $x \notin f(\partial\Omega)$, temos que $d(f, \Omega, x)$ está bem definido e pelo Lema 3.9 temos

$$d(f, \Omega, p_1) = d(f - p_1, \Omega, 0).$$

Além disso,

$$|(f - p_1) - (f - x)| = |p_1 - x| < \varepsilon$$

Para ε suficientemente pequeno, temos

$$d(f, \Omega, 0) = d(f - x, \Omega, 0), \forall x \in B_\varepsilon(p_1)$$

e assim

$$d(f, \Omega, p_1) = d(f, \Omega, x), \forall x \in B_\varepsilon(x).$$

Procedendo com esse raciocínio temos

$$d(f, \Omega, x_i) = d(f, \Omega, y), \forall y \in B_\varepsilon(x_i), \text{ com } i = 1, 2, 3, \dots, s.$$

Como $B_\varepsilon(x_i) \cap B_\varepsilon(x_{i+1}) \neq \emptyset$ concluímos que

$$d(f, \Omega, p_1) = d(f, \Omega, p_2)$$

□

Proposição 3.13 (Existência de solução) Se $d(f, \Omega, p) \neq 0$ então, existe $x_0 \in \Omega$ tal que $f(x_0) = p$.

Demonstração. Sejam $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $p \notin f(\partial\Omega)$, e $r = \rho\{p, f(\partial\Omega)\} > 0$. Como $C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ é denso em $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ pelo Teorema da Aproximação de Weierstrass (ver Teorema 2.5), existe $g \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, com $\|g - f\|_\infty < \frac{r}{2}$, tal que

$$d(f, \Omega, p) = d(g, \Omega, p).$$

Escolhendo $p_1 \in C_p \setminus g(S)$ suficientemente próximo de p , onde C_p é a componente conexa de p em $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ temos

$$d(g, \Omega, p) = d(g, \Omega, p_1)$$

Por hipótese $d(f, \Omega, p) \neq 0$ logo, $d(g, \Omega, p_1) \neq 0$. Então pela observação 3.4 que existe $x_0 \in \Omega$ tal que $g(x_0) = p_1$.

Afirmção: $p \in f(\overline{\Omega})$

De fato, suponhamos, por contradição, que $p \notin f(\overline{\Omega})$ com $\rho\{p, f(\overline{\Omega})\} > 0$. Fixe $\delta > 0$ e considere o seguinte conjunto $(f(\overline{\Omega}))_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho\{x, f(\overline{\Omega})\} < \delta\}$, que é uma delta vizinhança de $f(\overline{\Omega})$, onde

$$0 < \delta < \frac{1}{2}\rho\{p, \partial(f(\overline{\Omega}))\}.$$

Fixando g de maneira que $\|g - f\|_\infty < \delta$ temos que

$$|g(x) - f(x)| \leq \|g - f\|_\infty < \varepsilon < \delta, \text{ onde } 0 < \varepsilon < \frac{r}{2}.$$

Assim

$$\rho\{g(x), f(\overline{\Omega})\} < \varepsilon < \delta,$$

o que implica

$$g(x) \in (f(\overline{\Omega}))_\delta, \forall x \in \overline{\Omega}$$

logo, $g(\overline{\Omega}) \subset (f(\overline{\Omega}))_\delta$. Então, $g(\overline{\Omega}) \cap \{p\} = \emptyset$, que é um absurdo, pois $p \in g(\overline{\Omega})$. Portanto, $p \in f(\overline{\Omega})$ e existe $x_0 \in \Omega$ tal que $f(x_0) = p$. \square

Proposição 3.14 (Excisão) *Seja $K \subset \overline{\Omega}$ um compacto e $p \notin f(K) \cup f(\partial\Omega)$. Então,*

$$d(f, \Omega, p) = d(f, \Omega \setminus K, p)$$

Demonstração. Pela definição 3.2, o grau topológico de Brouwer de f com relação a Ω no ponto p está bem definido, pois $p \notin f(\partial\Omega)$. Para que faça sentido a igualdade

$$d(f, \Omega, p) = d(f, \Omega \setminus K, p),$$

devemos mostrar que

$$p \notin f(\partial(\Omega \setminus K)).$$

Afirmção 1:

$$p \notin f(\partial(\Omega \setminus K)) \subseteq f(\partial\Omega \cup \partial K)$$

De fato, suponhamos, por contradição, que $p \in f(\partial\Omega \cup \partial K)$ então existe $x_0 \in \partial\Omega \cup \partial K$ tal que

$$f(x_0) = p, \text{ com } x_0 \in \partial\Omega, \text{ isto é, } p \in f(\partial\Omega)$$

ou

$$f(x_0) = p, \text{ com } x_0 \in \partial K, \text{ isto é, } p \in f(\partial K),$$

que é um absurdo pois por hipótese $p \notin f(\partial\Omega) \cup \partial K$. Portanto $p \notin f(\partial(\Omega \setminus K))$.

Fixe $g \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ com

$$\|g - f\|_\infty \leq \frac{1}{2} \min\{\rho\{p, f(\partial\Omega)\}, \rho\{p, f(\partial K)\}\}$$

Então,

$$d(f, \Omega, p) = d(g, \Omega, p) \quad e \quad d(f, \Omega \setminus K, p) = d(g, \Omega \setminus K, p).$$

Afirmção 2:

$$p \notin g(K)$$

De fato, suponhamos que $p \notin g(K)$ e $\|g - f\|_\infty \leq \frac{1}{2}\rho\{p, f(K)\}$ então existe $x_0 \in K$ tal que $g(x_0) = p$. Assim,

$$|p - f(x_0)| = |g(x_0) - f(x_0)| \leq \|g - f\|_\infty < \frac{1}{2}\rho\{p, f(K)\}.$$

Como $\rho\{p, f(K)\} = \inf\{|p - f(y)| : y \in K\}$ temos

$$\rho\{p, f(K)\} \leq |p - f(x_0)|.$$

Logo,

$$\rho\{p, f(K)\} < \frac{1}{2}\rho\{p, f(K)\},$$

que é um absurdo. Portanto, $p \notin g(K)$.

Afirmção 3:

$$p \notin g(\partial\Omega)$$

Com efeito, suponhamos, por absurdo, que $p \in g(\partial\Omega)$ então, deve existir $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $g(x_0) = p$. Como $\|g - f\|_\infty < \frac{1}{2}\rho\{p, f(\partial\Omega)\}$, temos

$$|g(x_0) - f(x_0)| \leq \|g - f\|_\infty < \frac{1}{2}\rho\{p, f(\partial\Omega)\},$$

isto é,

$$|p - f(x_0)| < \frac{1}{2}\rho\{p, f(\partial\Omega)\}.$$

Portanto,

$$\rho\{p, f(\partial\Omega)\} < \frac{1}{2}\rho\{p, f(\partial\Omega)\},$$

o que é um absurdo. Com isso, mostramos que $p \notin g(\partial\Omega)$.

Afirmção 4:

$$p \notin g(\partial(\Omega \setminus K))$$

Suponhamos que $p \in g(\partial(\Omega \setminus K)) \subseteq g(\partial\Omega \cup \partial K)$ então

$$g(x_0) = p \text{ com } x_0 \in \partial\Omega, \text{ isto é, } p \in g(\partial\Omega)$$

ou

$$g(x_0) = p \text{ com } x_0 \in \partial K, \text{ isto é, } p \in g(\partial K),$$

o que é um absurdo, pois já foi mostrado que $p \notin g(\partial\Omega) \cup g(\partial K)$. Portanto, $p \notin g(\partial(\Omega \setminus K))$.

Pelas afirmações acima temos $\{p\} \cap g(K) = \emptyset$, $\{p\} \cap g(\partial\Omega) = \emptyset$ e $\{p\} \cap g(\partial(\Omega \setminus K)) = \emptyset$. Logo, $\rho\{p, g(K)\} > 0$, $\rho\{p, g(\partial\Omega)\} > 0$ e $\rho\{p, g(\partial\Omega \cup \partial K)\} > 0$. Considerando

$$\alpha = \frac{1}{2} \inf\{\rho\{p, g(K)\}, \rho\{p, g(\partial\Omega)\}, \rho\{p, g(\partial\Omega \cup \partial K)\}\}$$

pelo Teorema de Sard (ver Teorema 2.6), existe $c \in B_\alpha(p)$ tal que

$$\forall x \in g^{-1}(\{c\}) \text{ tem-se } J_g(x) \neq 0.$$

Caso contrário, $\forall c \in B_\alpha(p)$, existe $x_0 \in g^{-1}(\{c\})$ com $J_g(x_0) = 0$ implicando que $x_0 \in S$. Logo,

$$g(x_0) = c \Rightarrow c \in g(S) \Rightarrow g(S) \supseteq B_\alpha(p)$$

assim,

$$0 = m(g(S)) \geq m(B_\alpha(p)) = \text{Vol}(B_\alpha(p)) > 0,$$

o que é um absurdo. Note que, $c \notin g(K)$ implica que não existe $x_0 \in K$ tal que $g(x_0) = c$, e como $g^{-1}(\{c\}) \subset \Omega$ temos $g(x) = c$ implica $g^{-1}(\{c\}) \subset \Omega \setminus K$. Pela escolha de α temos que $c \notin g(K)$, p e c estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^n \setminus g(\partial\Omega)$ e de $\mathbb{R}^n \setminus g(\partial(\Omega \setminus K))$, respectivamente. Pela Proposição 3.12 temos,

$$d(g, \Omega, p) = d(g, \Omega, c) \quad e \quad d(g, \Omega \setminus K, p) = d(g, \Omega \setminus K, c)$$

Como $C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ é denso em $C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $p \notin g(K) \cup g(\partial\Omega)$ e $J_g(c) \neq 0$ pela definição 3.2 temos

$$d(g, \Omega, c) = \sum_{\xi \in g^{-1}(\{c\})} \text{sgn} J_g(\xi_i) = \sum_{\xi \in g^{-1}(\{c\}) \cap (\Omega \setminus K)} \text{sgn} J_g(\xi_i)$$

o que implica

$$d(g, \Omega, c) = \sum_{\xi_i \in \Omega \setminus K} \text{sgn} J_g(\xi_i),$$

isto é,

$$d(g, \Omega \setminus K, c).$$

Portanto,

$$d(f, \Omega, p) = d(g, \Omega, c) = d(g, \Omega \setminus K, c) = d(g, \Omega \setminus K, p) = d(f, \Omega \setminus K, p).$$

Donde concluimos que

$$d(f, \Omega, p) = d(f, \Omega \setminus K, p)$$

□

Depois de discutirmos todos esses resultados sobre a Teoria do Grau de Brouwer vamos utilizá-los na próxima seção pra demonstrar o Teorema de Averaging de Primeira Ordem que é o principal resultado teórico deste capítulo.

3.2 Teorema de Averaging de Primeira Ordem

Inicialmente, provaremos um Lema e em seguida faremos algumas observações sobre a Teoria do Grau de Brouwer estudada na seção anterior que serão importantes na demonstração do resultado.

Lema 3.15 *Seja D um subconjunto aberto do \mathbb{R}^n . Considere as funções contínuas $f_i : \bar{D} \rightarrow \mathbf{R}^n$, para $i = 0, 1, \dots, k$, e $f, g, r : \bar{D} \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbf{R}^n$, dadas por*

$$g(\cdot, \varepsilon) = f_0(\cdot) + \varepsilon f_1(\cdot) + \varepsilon^2 f_2(\cdot) + \dots + \varepsilon^k f_k(\cdot), \quad (3-14)$$

$$f(\cdot, \varepsilon) = g(\cdot, \varepsilon) + \varepsilon^{k+1} r(\cdot, \varepsilon). \quad (3-15)$$

Suponha que

$$g(z, \varepsilon) \neq 0, \forall z \in \partial D, \varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \setminus \{0\} \quad (3-16)$$

Então, para $|\varepsilon| > 0$ suficientemente pequeno, $d(f(\cdot, \varepsilon), V, 0)$ está bem definido e

$$d(f(\cdot, \varepsilon), V, 0) = d(g(\cdot, \varepsilon), V, 0)$$

Demonstração. Para cada $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \setminus \{0\}$ consideremos a homotopia contínua

$$H_t(\cdot, \varepsilon) = g(\cdot, \varepsilon) + t(f(\cdot, \varepsilon) - g(\cdot, \varepsilon)), \text{ para } 0 \leq t \leq 1.$$

Pela invariância da homotopia do grau de Brouwer (ver Proposição 3.11), tudo que temos que mostrar é que, quando ε é suficientemente pequeno, $0 \notin H_t(\partial V, \varepsilon)$, $\forall 0 < t \leq 1$. Suponhamos, por contradição que, para algum $t_0 \in (0, 1]$ e algum $x_0 \in \partial V$, $H_{t_0}(x_0, \varepsilon) = 0$. Pela continuidade de r , sabemos que existe $M > 0$ tal que $|r(z, \varepsilon)| \leq M$ para todo $z \in \bar{V}$ e

todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Então

$$\begin{aligned}
H_t(x_0, \varepsilon) &= 0 \\
\Rightarrow g(x_0, \varepsilon) + t_0(f(x_0, \varepsilon) - g(x_0, \varepsilon)) &= 0 \\
\Rightarrow g(x_0, \varepsilon) + t_0\varepsilon^{k+1}r(x_0, \varepsilon) &= 0 \\
\Rightarrow g(x_0, \varepsilon) &= -t_0\varepsilon^{k+1}r(x_0, \varepsilon) \\
\Rightarrow |g(x_0, \varepsilon)| &\leq \varepsilon^{k+1}|r(x_0, \varepsilon)| \\
\Rightarrow |g(x_0, \varepsilon)| &\leq M\varepsilon^{k+1}
\end{aligned}$$

o que não é verdadeiro para ε suficientemente pequeno, pois $|g(x_0, \varepsilon)| = |f_0(x_0) + \varepsilon f_1(x_0) + \varepsilon^2 f_2(x_0) + \dots + \varepsilon^k f_k(x_0)| \neq 0$. \square

Observação 3.16 Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 com $f(a) = 0$, onde D é um subconjunto aberto do \mathbb{R}^n e $a \in D$. Se $J_f(a) \neq 0$, pelo Teorema da Função Implícita existe uma vizinhança V de a tal que $f(a) \neq 0, \forall z \in \bar{V} \setminus \{a\}$. Então $d(f, V, 0) \in \{-1, 1\}$.

Exemplo 3 O grau de Brouwer da função $f_0(z) = z^2$ é igual a 0 em qualquer vizinhança da origem. De fato, a função f_0 tem um único zero $a = 0$ e temos que $f_0'(0) = 0$. Como $J_f(0) = 0$ não podemos aplicar o Grau de Brouwer diretamente a função f . Assim, para calcularmos o grau de Brouwer da função f_0 considere $\lambda > 0$ arbitrário, o intervalo $V = (-2\lambda, 2\lambda)$ e a função $g(z) = z^2 - \lambda^2$. Note que, g tem dois zeros em V que são λ e $-\lambda$. O sinal do jacobiano é negativo em $-\lambda$ e positivo em λ . Assim, $g^{-1}(0) = \{x \in V : g(x) = 0\} = \{\xi_1 = \lambda, \xi_2 = -\lambda\}$ e portanto

$$d(g, V, 0) = \sum_{\xi_i \in g^{-1}(0)} J_g(\xi_i) = g'(\lambda) + g'(-\lambda) = 1 + (-1) = 0.$$

Pelo Lema 3.15, temos que $d(f_0, V, 0) = d(g, V, 0) = 0$.

Observação 3.17 Queremos descrever um método para usar o Lema 3.15, isto é, encontrar zeros de uma conveniente função $f : D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$. Seja D um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n , f, g e r como no Lema 3.15 e $r : D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua.

Passo 1: Primeiramente obtenha todos os zeros de f_0 . Dado $a \in D$ tal que $f_0(a) = 0$, se existir uma vizinhança V de a tal que $d(f_0, V, 0) \neq 0$, então para $|\varepsilon|$ suficientemente pequeno $f(\cdot, \varepsilon)$ terá no mínimo um zero em V .

Passo 2: Se o grau de Brouwer de f_0 é zero em uma pequena vizinhança de a ou se ele não pode ser computado (isto inclui o caso em que $f_0 \equiv 0$), então será necessário estudar $f_0 + \varepsilon f_1$ em alguma pequena vizinhança de a com ε suficientemente pequeno.

Suponha que exista um zero, $a_{1\varepsilon}$, de $f_0 + \varepsilon f_1$ em uma vizinhança do subconjunto aberto V de \mathbb{R}^n tal que $a_{1\varepsilon} \in V$ para cada $\varepsilon \neq 0$ suficientemente pequeno e que

$$d(f_0 + \varepsilon f_1, V, 0) \neq 0 \quad (3-17)$$

Nestas condições segue do Lema 3.15, que $f(\cdot, \varepsilon)$ tem ao menos um zero em V . Note que, existe a possibilidade de existir outros zeros de $f_0 + \varepsilon f_1$ na mesma vizinhança de a , juntamente com $a_{1\varepsilon}$.

Se a condição (3-17) não for satisfeita para $f_0 + \varepsilon f_1$, então proceder o Passo 2 para a função $f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2$, e assim por diante.

Exemplo 4 Vamos ilustrar a observação 3.17 para a função contínua $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(z, \varepsilon) = z^2 - \varepsilon^2 + \varepsilon^3 r(z, \varepsilon)$. Usando a notação do Lema 3.15, temos que

$$f_0(z) = z^2, \quad f_1(z) = 0 \quad f_2(z) = -1.$$

Como vimos no Exemplo 3, numa vizinhança do 0, $d(f, \Omega, 0) = 0$, onde Ω é uma vizinhança de 0. Assim, aplicamos o Passo 2 para $g(z) = (f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2)(z) = z^2 - \varepsilon^2$. A função $g(z)$ tem dois zeros, $-\varepsilon$ e ε . Fixando $\varepsilon_0 > 0$ e considerando os intervalos abertos $V = (0, \varepsilon_0)$ e $U = (-\varepsilon, 0)$. Pelo Exemplo 3 $d(f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2, V, 0) \neq 0$ para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ e a mesma condição é satisfeita para U ao invés de V . Então pelo Lema 3.15 e pela Observação 3.17, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, $f(\cdot, \varepsilon)$ tem pelo menos um zero em U e outro em V .

Suponhamos que $r \in C^\infty$ e $f_0(z) = z^2$ usaremos o Teorema da Preparação de Malgrange, para estimar o número de zeros que $f(\cdot, \varepsilon)$ pode admitir. Como a função f é de classe C^∞ e tomando $g(z) = 1$ as condições do Teorema 2.7 são satisfeitas com $f(z, 0) = z^2 g(z)$. Então pelo Teorema 2.7 existe uma função q tal que

$$q(z, \varepsilon) f(z, \varepsilon) = z^2 + \sum_{i=0}^1 a_i(\varepsilon) z^i = z^2 + a_0(\varepsilon) + a_1(\varepsilon) z$$

em uma vizinhança da origem. Como $q(z, \varepsilon) f(z, \varepsilon)$ é um função polinomial do segundo grau, ela admite no máximo dois zeros e portanto f admite no máximo dois zeros. Logo, pelo exemplo 4 e pelo Teorema da Preparação de Malgrange (ver Teorema 2.7) f possui exatamente dois zeros.

Lema 3.18 Suponha que as hipóteses do Lema 3.15 são satisfeitas, $k = 0$ e que, para $a \in D$ com $f_0(a) = 0$ existe uma vizinhança V de a tal que $f_0(z) \neq 0, \forall z \in \bar{V} \setminus \{a\}$ e $d(f_0, V, 0) \neq 0$.

Demonstração. Como $f_0(z) \neq 0, \forall z \in \bar{V} \setminus \{a\}$, pela Observação 3.16 temos que $d(f_0, V, 0) \neq 0$. Logo, da definição do Grau de Brouwer temos que $0 \notin f_0(\partial\Omega) \cup f(V)$. Segue da propriedade de Excisão do Grau de Brouwer (Proposição 3.14) que, para toda vizinhança $V_\mu \subset V$ de a o $d(f_0, V, 0) = d(f_0, V_\mu, 0) \neq 0$. Sem perda de generalidade podemos escolher V_μ , tal que, $V_\mu \rightarrow \{a\}$ quando $\mu \rightarrow 0$. Portanto, para ε suficientemente pequeno $f(\cdot, \varepsilon)$ tem pelo menos um zero, $a_\varepsilon \in V_\mu$ e podemos escolher a_ε tal que $a_\varepsilon \rightarrow a$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Neste caso dizemos que pelo menos um ramo de zeros bifurcam de a . Além disso, se $J_{f_0} \neq 0$, pelo Teorema da Função Implícita, este ramo é único. \square

Antes de provar o Teorema 3.1, vamos justificar a seguinte afirmação:

Afirmção5: *O problema de encontrar soluções T -periódicas para algum sistema diferencial é equivalente a encontrar os zeros de alguma função de dimensão finita correspondente.*

Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, o sistema,

$$\dot{x} = F(t, x, \varepsilon), \quad (3-18)$$

onde $F : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua, T -periódica na primeira variável, ($F(t+T, x, \varepsilon) = F(t, x, \varepsilon)$, $T > 0$) localmente Lipschitz na segunda variável. Para cada $z \in D$ denotaremos por $x(\cdot, z, \varepsilon) : [0, t_z] \rightarrow \mathbb{R}^n$ a solução de (4-61) com $x(0, z, \varepsilon) = z$. Suponhamos que $t_z > T, \forall z \in D$. Seja $f : D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por

$$f(z, \varepsilon) = \int_0^T F(t, x(t, z, \varepsilon), \varepsilon) dt$$

Então para todo $(z_\varepsilon, \varepsilon)$, tal que $f(z_\varepsilon, \varepsilon) = 0$ é solução periódica de (3-18). Reciprocamente, toda solução T -periódica z_ε em $t = 0$ de (3-18) satisfaz $f(z_\varepsilon, \varepsilon) = 0$.

Observação 3.19 *Para aplicar o Lema 3.15 utiliza-se a fórmula de Mc-Laurin a $f(z, \varepsilon)$. Seja $f : D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k tal que*

$$f(z, \varepsilon) = g(z, \varepsilon) + \varepsilon^{k+1} r(z, \varepsilon). \quad (3-19)$$

onde

$$g(z, \varepsilon) = f(z, 0) + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(z, 0) + \dots + \varepsilon^k \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial \varepsilon^k}(z, 0) \quad (3-20)$$

A função r está bem definida e é contínua exceto em $\varepsilon = 0$. Para verificarmos que f é contínua em $D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f)$ basta provar que r é limitada em algum conjunto da forma $K \times [-\varepsilon_f, \varepsilon_f]$ onde $K \subset D$ é um subconjunto compacto de D . A continuidade de r é uma condição necessária no Lema 3.15 e, de agora em diante ao invés de escrevermos a fórmula (3-19) com a função r dada explicitamente usaremos os símbolos de Landau,

isto é (3-19) será reescrito como

$$f(z, \varepsilon) = g(z, \varepsilon) + \varepsilon^{k+1}O(1).$$

para o domínio $K \times [-\varepsilon_f, \varepsilon_f]$.

Agora iremos demonstrar o Teorema 3.1.

Demonstração do Teorema 3.1 Sejam $t \in [0, T]$, $z \in \bar{V}$ e $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$. Como $\dot{x}(t) = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon)$, com $x(0, z, \varepsilon)$, tem-se

$$x(t, z, \varepsilon) = z + \varepsilon \int_0^t F_1(s, x(s, z, \varepsilon)) ds + \varepsilon^2 \int_0^t R(s, x(s, z, \varepsilon), \varepsilon) ds. \quad (3-21)$$

Denotaremos por

$$r(z, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T [F_1(s, x(s, z, \varepsilon)) - F_1(s, z)] ds + \int_0^T R(s, x(s, z, \varepsilon), \varepsilon) ds. \quad (3-22)$$

Seja $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $x(0) = x(T)$ um solução da equação $\dot{x} = F(t, x, \varepsilon)$ então $x(T, z, \varepsilon) - x(0, z, \varepsilon) = f(z, \varepsilon)$. Logo,

$$\begin{aligned} f(z, \varepsilon) &= \varepsilon \int_0^T F_1(s, x(s, z, \varepsilon)) ds + \varepsilon^2 \int_0^T R(s, x(s, z, \varepsilon), \varepsilon) ds \\ &= \varepsilon \int_0^T [F_1(s, x(s, z, \varepsilon)) - F_1(s, z)] ds + \varepsilon \int_0^T F_1(s, z) ds + \varepsilon^2 \int_0^T R(s, x(s, z, \varepsilon), \varepsilon) ds \end{aligned}$$

Sendo $f_1(z) = \int_0^T F_1(s, z) ds$, temos

$$f(z, \varepsilon) - \varepsilon f_1(z) = \varepsilon \int_0^T [F_1(s, x(s, z, \varepsilon)) - F_1(s, z)] ds + \varepsilon^2 \int_0^T R(s, x(s, z, \varepsilon), \varepsilon) ds.$$

Pela continuidade da função R ,

$$f(z, \varepsilon) - \varepsilon f_1(z) = \varepsilon \int_0^T [F_1(s, x(s, z, \varepsilon)) - F_1(s, z)] ds + \varepsilon^2 O(1).$$

Como F_1 é Lipschitz com respeito a x sobre $[0, T] \times K$, então existe uma constante $L_K > 0$, tal que

$$|F_1(s, x(s, z, \varepsilon)) - F_1(s, z)| \leq L_K |x(s, z, \varepsilon) - z|.$$

Pelo Teorema de Existência e Unicidade de Soluções 2.1 temos que $t_z > h_z$ e $h_z = \inf(T, \frac{b}{M(\varepsilon)})$ onde $M(\varepsilon) \geq |\varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon)|$, para todo $t \in [0, T]$, para cada x com $|x - z| \leq b$ e para todo $z \in \bar{V}$. Quando $|\varepsilon|$ é suficientemente pequeno, $M(\varepsilon)$ pode ser

arbitrariamente grande, tal que, $h_z = T$ para todo $z \in \bar{V}$. Então,

$$|F_1(s, x(s, z, \varepsilon)) - F_1(s, z)| \leq L_K b = O(1) = \varepsilon^2 O(1) \quad (3-23)$$

Portanto,

$$f(z, \varepsilon) = \varepsilon f_1(z) + \varepsilon^2 O(1).$$

Usando o Lema 3.15 temos que a hipótese (ii) asseguram a existência de z_ε tal que $f(z_\varepsilon) = 0$ e $z_\varepsilon \rightarrow a$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Então $\varphi(\cdot, \varepsilon) = x(\cdot, z_\varepsilon, \varepsilon)$ é uma solução periódica de (3-3) e $\varphi(\cdot, \varepsilon) \rightarrow a$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. \square

Bifurcação de ciclos limites de um centro 4-dimensional em sistemas de controle

Dado o sistema

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + \varepsilon F(x(t)), \quad (4-1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$, $|\varepsilon| \neq 0$ suficientemente pequeno e $F(x) = Ax + \varphi(k^T x)b$ estudaremos a existência de ciclos limites.

Ao longo do capítulo, consideremos

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dada por

$$F(x) = Ax + \varphi(k^T x)b$$

com $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, $k, b \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ e $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função linear por partes tal que

$$\varphi(x) = \begin{cases} -1, & \text{para } x \in (-\infty, -1) \\ x, & \text{para } x \in [-1, 1] \\ 1, & \text{para } x \in (1, +\infty) \end{cases}. \quad (4-2)$$

Os vetores de \mathbb{R}^4 são vetores colunas, e k^T denota o vetor transposto. O sistema (4-1) é dito de controle devido a definição da função φ .

Primeiramente consideremos o caso particular em que $\varepsilon = 0$ em (4-1), então ele será reduzido ao sistema

$$\dot{x}_1 = -x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1, \quad \dot{x}_3 = -x_4, \quad \dot{x}_4 = x_3. \quad (4-3)$$

Note que, a origem é o único ponto singular do sistema linear (4-3). Os autovalores associados ao polinômio característico de (4-3) no zero são i e $-i$, portanto

a origem é um centro global para (4-3), isto é, todas as órbitas periódicas tem o mesmo período.

Vimos na Afirmação 5 que um ciclo limite de algum sistema corresponde a um zero isolado da sua função deslocamento. Esse resultado será de suma importância para alcançarmos nosso objetivo principal nesse trabalho que é determinar a quantidade de ciclos limites de (4-1) que bifurcam das órbitas periódicas de (4-3), ou seja, se encontrarmos os zeros da expansão de Taylor de primeira ordem da função deslocamento do sistema (4-1) com respeito a um parâmetro ε suficientemente pequeno poderemos determinar a quantidade de ciclos limites deste. A prova deste resultado é baseado no Método de Averaging de Primeira Ordem discutido no capítulo anterior.

Note que o sistema (4-1) não está no padrão do que é apresentado no teorema 3.1. Sendo assim primeiramente faremos a mudança $x = Jy$ para utilizarmos o resultado desejado e além disso, reduziremos o número de parâmetros de sistema.

Denotamos por $e_i, i = 1, \dots, 4$ os vetores da base canônica do \mathbb{R}^4 .

Lema 4.1 *Por uma mudança linear de variáveis, e eventualmente uma permutação das variáveis, o sistema (1-1) pode ser transformado no sistema*

$$\dot{x} = A_0x + \varepsilon \bar{A}x + \varepsilon \varphi(x_1) \bar{b}, \quad (4-4)$$

onde $\bar{A} \in M_4(\mathbb{R})$ é uma matriz arbitrária e $\bar{b} = e_1$ ou e_3 .

Demonstração.

Considere a mudança de variáveis $x = Jy$ em (4-1), onde J é uma matriz invertível e $F(x) = Ax + \varphi(k^T x)b$. Logo,

$$y' = J^{-1}A_0Jy + \varepsilon J^{-1}AJy + \varepsilon \varphi(k^T Jy)J^{-1}b,$$

Comparando as expressões (4-4) e (4-1), devemos obter J tal que

$$J^{-1}A_0J = A_0 \quad (4-5)$$

$$J^{-1}b = \bar{b} \quad (4-6)$$

$$k^T J = e_1^T \quad (4-7)$$

Seja $J = (z_{ij})$, $i, j = 1, 2, 3, 4$. Logo, da condição (4-5), temos

$$J = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} \\ -z_{12} & z_{11} & -z_{14} & z_{13} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} & z_{34} \\ -z_{32} & z_{31} & -z_{34} & z_{33} \end{pmatrix}$$

Tomando $\bar{b} = e_1$, em (4-6), temos

$$z_{11} = b_1, \quad z_{12} = -b_2, \quad z_{31} = b_3, \quad z_{32} = -b_4, \quad (4-8)$$

e se $\bar{b} = e_3$,

$$z_{13} = b_1, \quad z_{14} = -b_2, \quad z_{33} = b_3, \quad z_{34} = -b_4 \quad (4-9)$$

Para $k^T \in \mathbb{M}_4(\mathbb{R})$ substituindo a matriz J em (4-7), obtemos

$$\begin{aligned} k_1 z_{11} + k_2 z_{12} + k_3 z_{13} + k_4 z_{14} &= 1 \\ -k_1 z_{12} + k_2 z_{11} - k_3 z_{14} + k_4 z_{13} &= 0 \\ k_1 z_{31} + k_2 z_{32} + k_3 z_{33} + k_4 z_{34} &= 0 \\ -k_1 z_{32} + k_2 z_{31} - k_3 z_{34} + k_4 z_{33} &= 0 \end{aligned} \quad (4-10)$$

Essas relações junto com (4-8) formam um sistema algébrico linear de 4 equações e 2 incógnitas z_{13} e z_{33} dado por

$$k_1 b_1 - k_2 b_2 + k_3 z_{13} + k_4 z_{14} = 1 \quad (4-11)$$

$$k_1 b_2 + k_2 b_1 + k_4 z_{13} - k_3 z_{14} = 0 \quad (4-12)$$

$$k_1 b_3 - k_2 b_4 + k_3 z_{33} + k_4 z_{34} = 0 \quad (4-13)$$

$$k_1 b_4 + k_2 b_3 + k_4 z_{33} - k_3 z_{34} = 0 \quad (4-14)$$

Queremos determinar em quais condições o sistema acima possui solução. Então, multiplicando (4-11) por k_3 e (4-12) por k_4 e somando as duas equações resultantes e multiplicando também (4-11) por k_4 e somando com (4-12) multiplicada por $-k_3$, obteremos

$$(k_3^2 + k_4^2)z_{13} = k_3 - (k_3 k_1 - k_4 k_2)b_1 + (k_3 k_2 - k_4 k_1)b_2$$

$$(k_4^2 + k_3^2)z_{14} = k_4 + (k_2 k_3 - k_1 k_4)b_1 + (k_2 k_4 + k_1 k_3 - 3)b_2$$

Multiplicando (4-13) por k_3 e (4-14) por k_4 e somando as duas equações obtidas depois dessas manipulações algébricas, teremos

$$(k_3^2 + k_4^2)z_{33} = -(k_3 k_1 + k_4 k_2)b_3 + (k_3 k_2 - k_4 k_1)b_4$$

e multiplicando (4-13) por k_4 e somando com (4-14) multiplicada por $-k_3$, encontraremos

$$(k_3^2 + k_4^2)z_{34} = -(k_1 k_4 + k_2 k_3)b_3 + (k_2 k_4 - k_1 k_3)b_4$$

Portanto, se $k_3^2 + k_4^2 \neq 0$ poderemos encontrar uma única solução para o sistema

(4-11)-(4-14) e obtemos

$$J = \begin{pmatrix} b_1 & -b_2 & \frac{k_3 - (k_3k_1 - k_4k_2)b_1 + (k_3k_2 - k_4k_1)b_2}{k_3^2 + k_4^2} & \frac{k_4 + (k_2k_3 - k_1k_4)b_1 + (k_2k_4 + k_1k_3)b_2}{k_3^2 + k_4^2} \\ b_2 & b_1 & \frac{-k_4 - (k_2k_3 - k_1k_4)b_1 - (k_2k_4 + k_1k_3)b_2}{k_3^2 + k_4^2} & \frac{k_3 - (k_3k_1 - k_4k_2)b_1 + (k_3k_2 - k_4k_1)b_2}{k_3^2 + k_4^2} \\ b_3 & -b_4 & \frac{-(k_3k_1 + k_4k_2)b_3 + (k_3k_2 - k_4k_1)b_4}{k_3^2 + k_4^2} & \frac{-(k_1k_4 + k_2k_3)b_3 + (k_2k_4 - k_1k_3)b_4}{k_3^2 + k_4^2} \\ b_4 & b_3 & \frac{(k_1k_4 + k_2k_3)b_3 - (k_2k_4 - k_1k_3)b_4}{k_3^2 + k_4^2} & \frac{-(k_3k_1 + k_4k_2)b_3 + (k_3k_2 - k_4k_1)b_4}{k_3^2 + k_4^2} \end{pmatrix}$$

Com o auxílio do software matemático Maple obtemos o determinante da matriz J acima que é

$$\frac{(b_3^2 + b_4^2)}{k_3^2 + k_4^2}$$

De modo análogo, quando $k_3^2 + k_4^2 = 0$ podemos encontrar uma única solução para o sistema formado por (4-9) e (4-10). Logo, encontramos uma matriz J cujo determinante é

$$\frac{(b_3^2 + b_4^2)}{k_1^2 + k_2^2}$$

Como $k, b \in \mathbf{R}^4 \setminus \{0\}$ então se $k_3^2 + k_4^2 = 0$ teremos $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$. Assim, a matriz J é invertível se, e somente se $b_3^2 + b_4^2 \neq 0$. Se esse não for o caso, devemos ter $b_1^2 + b_2^2 \neq 0$. E permutando x_1 com x_3 , e x_2 com x_4 em (4-4) teremos o caso estudado anteriormente. \square

No próximo Lema faremos uma mudança de variável em (4-4) para obtermos um sistema equivalente na forma padrão do averaging.

Lema 4.2 *Fazendo a mudança de variáveis*

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta, \quad x_3 = \rho \cos(\theta + s), \quad x_4 = \rho \sin(\theta + s)$$

no sistema (4-4) podemos reescrevê-lo como

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon H_1(\theta, r, \rho, s) + \varepsilon^2 O(1) \\ \frac{d\rho}{d\theta} &= \varepsilon H_2(\theta, r, \rho, s) + \varepsilon^2 O(1) \\ \frac{ds}{d\theta} &= \varepsilon H_3(\theta, r, \rho, s) + \varepsilon^2 O(1) \end{aligned} \tag{4-15}$$

onde,

$$H_1 = \cos \theta F_1 + \sin \theta F_2$$

$$H_2 = \cos(\theta + s)F_3 + \sin(\theta + s)F_4$$

$$H_3 = \frac{1}{r}[\cos\theta F_2 - \frac{1}{r}\sin\theta F_1] - \frac{1}{\rho}\cos(\theta + s)F_4 + \frac{1}{\rho}\sin(\theta + s)F_3$$

e para todo $i = 1, \dots, 4$.

$$F_i = r[a_{i1}\cos\theta + a_{i2}\sin\theta] + a_{i3}\rho\cos(\theta + s) + \varphi(r\cos\theta)b_i.$$

Suponhamos que ε seja suficientemente pequeno, n arbitrariamente grande e $D_n = (\frac{1}{n}, n) \times (1/n, n) \times \mathbb{R}^n$. Então o campo vetorial do sistema (4-15) está bem definido e é contínuo em $\mathbb{R} \times D_n \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f)$. Além disso, ele é 2π -periódico com respeito a θ e localmente Lipschitz com respeito a (r, ρ, s) .

Demonstração.

O sistema (4-4) é dado por

$$\dot{x}_1 = -x_2 + \varepsilon \sum_{j=1}^4 a_{1j}x_j + \varepsilon\varphi(x_1)b_1 \quad (4-16)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + \varepsilon \sum_{j=1}^4 a_{2j}x_j + \varepsilon\varphi(x_1)b_2 \quad (4-17)$$

$$\dot{x}_3 = -x_4 + \varepsilon \sum_{j=1}^4 a_{3j}x_j + \varepsilon\varphi(x_1)b_3 \quad (4-18)$$

$$\dot{x}_4 = x_3 + \varepsilon \sum_{j=1}^4 a_{4j}x_j + \varepsilon\varphi(x_1)b_4 \quad (4-19)$$

onde

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

$$b_2 = b_4 = 0; b_1, b_3 \in \{0, 1\} \text{ com } b_1 b_3 = 0 \text{ e } b_1^2 + b_3^2 \neq 0$$

Substituindo $x_1 = r\cos\theta, x_2 = r\sin\theta, x_3 = \rho\cos(\theta + s)$ e $x_4 = \rho\sin(\theta + s)$ nas equações (4-16) e (4-17), temos

$$\begin{aligned} r\dot{\cos}\theta - r\dot{\sin}\theta \dot{\theta} &= -r\dot{\sin}\theta + \varepsilon[r(a_{11}\cos\theta + a_{12}\sin\theta)] \\ &= +\varepsilon[\rho(a_{13}\cos(\theta + s) + a_{14}\sin(\theta + s))] + \varepsilon\varphi(r\cos\theta)b_1 \end{aligned} \quad (4-20)$$

e

$$\begin{aligned} \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta \dot{\theta} &= r\cos\theta + \varepsilon[r(a_{21}\cos\theta + a_{22}\sin\theta)] \\ &= +\varepsilon[\rho(a_{23}\cos(\theta + s) + a_{24}\sin(\theta + s))] + \varepsilon\varphi(r\cos\theta)b_2 \end{aligned} \quad (4-21)$$

respectivamente.

Fazendo manipulações algébricas, obtemos

$$\dot{r} = \varepsilon(\cos\theta F_1 + \sin\theta F_2)$$

onde para $i = 1, 2, 3, 4$,

$$F_i = r[a_{i1}\cos\theta + a_{i2}\sin\theta] + a_{i3}\rho\cos(\theta + s) + \varphi(r\cos\theta)b_i$$

Fazendo

$$H_1 = \cos\theta F_1 + \sin\theta F_2,$$

temos

$$\dot{r} = \varepsilon H_1(\theta, r, \rho, s), \quad (4-22)$$

Analogamente, encontraremos $\dot{\theta}(t)$ a partir de (4-20) e (4-21), donde obtemos

$$\dot{\theta} = 1 + \frac{\varepsilon}{r}(\cos\theta F_2 - \sin\theta F_1) \quad (4-23)$$

Utilizando as mesmas mudanças de variáveis feitas para as equações (4-16) e (4-17) nas (4-18) e (4-19) obtemos:

$$\dot{\rho} = \varepsilon H_2(\theta, r, \rho, s) \quad (4-24)$$

$$\dot{s} = \varepsilon H_3(\theta, r, \rho, s) \quad (4-25)$$

onde,

$$H_2 = \cos(\theta + s)F_3 + \sin(\theta + s)F_4$$

e

$$H_3 = -\frac{1}{r}\cos\theta F_2 + \frac{1}{r}\sin\theta F_1 - \frac{1}{\rho}\sin(\theta + s)F_3 + \frac{1}{\rho}\cos(\theta + s)F_4.$$

Note que para $|\varepsilon|$ suficientemente pequeno e $r \in (\frac{1}{n}, n)$ com n arbitrariamente grande, $\dot{\theta}(t) > 0$ para cada t . Logo, considerando as equações $\frac{r}{\theta}$, $\frac{\dot{\rho}}{\theta}$ e $\frac{\dot{s}}{\theta}$, podemos eliminar a variável t do sistema (4-23)-(4-24) considerando θ como a nova variável independente.

Fazendo uma expansão com respeito ao parâmetro ε suficientemente pequeno, temos

$$\begin{aligned}\frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon H_1(\theta, r, \rho, s) + \varepsilon^2 O(1) \\ \frac{d\rho}{d\theta} &= \varepsilon H_2(\theta, r, \rho, s) + \varepsilon^2 O(1) \\ \frac{ds}{d\theta} &= \varepsilon H_3(\theta, r, \rho, s) + \varepsilon^2 O(1)\end{aligned}\tag{4-26}$$

Observando as funções do lado direito desse novo sistema, vemos que elas estão bem definidas, são contínuas em $\mathbb{R} \times D_n \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f)$, pois H_i é contínua em $\mathbb{R} \times D_n$. Como com respeito a θ , H_i é uma função que depende apenas das funções $\sin\theta$ e $\cos\theta$ que são 2π -periódicas temos que H_i também é 2π periódica em θ para cada i . Além disso, $r, \rho \in (\frac{1}{n}, n)$ para n suficientemente grande então as funções $\frac{1}{r}$ e $\frac{1}{\rho}$ são contínuas e como as outras funções que compõe as funções H_i que dependem de r, ρ e s são elementares e, portanto contínuas, concluímos que H_i é localmente Lipschitz como respeito a (r, ρ, s) . \square

Note que, com a mudança de variáveis feita no Lema 4.2 o sistema está no padrão do teorema 3.1. Porém, para utilizarmos este resultado ao sistema (4), primeiramente precisamos encontrar a função (3-4) correspondente. O método do averaging de primeira ordem visto no Capítulo 2 nos permitirá estimar a quantidade de ciclos limites do sistema (4-1) que bifurcam de (4-3).

Sejam $h : D_n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $h = (h_1, h_2, h_3)^T$. Para cada $i = 1, 2, 3$ definimos

$$h_i(r, \rho, s) = \int_0^{2\pi} H_i(\theta, r, \rho, s) d\theta$$

onde H_i é como no lema 4.2.

E, para cada $r > 0$ considere

$$I_1(r) = \int_0^{2\pi} \varphi(r \cos\theta) \cos\theta d\theta\tag{4-27}$$

$$I_2(r) = \int_0^{2\pi} \varphi(r \cos\theta) \sin\theta d\theta\tag{4-28}$$

onde φ é uma função linear definida por (4-2).

Mostraremos que $I_2(r) \equiv 0, \forall r > 0$ e que

$$I_1(r) = \begin{cases} r\pi, & \text{se } 0 \leq r \leq 1 \\ 2\frac{\sqrt{r^2-1}}{r} + r\pi - 2r \arctan \sqrt{r^2-1}, & \text{se } r > 1. \end{cases}\tag{4-29}$$

Se $0 < r \leq 1$, então $|r \sin\theta| \leq 1, \forall \theta \in [0, 2\pi)$. Logo, pela definição da função φ , temos $\varphi(r \cos\theta) = r \cos\theta$, assim de (4-27) e (4-28) temos que

$$I_1(r) = \int_0^{2\pi} r \cos^2 \theta d\theta = r\pi \quad (4-30)$$

$$I_2(r) = \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta = 0 \quad (4-31)$$

Para $r > 1$ fixemos $\theta_c \in (0, \frac{\pi}{2})$ tal que $\cos \theta_c = \frac{1}{r}$. Então analisemos os seguintes casos:

- (1) Se $0 < \theta < \theta_c$, ou seja, θ pertence a Região I da Figura 4.1 então, $\frac{1}{r} < \cos \theta < 1$ o que implica $1 < r \cos \theta < r$ e pela definição da função φ temos que $\varphi(r \cos \theta) = 1$;
- (2) Se $\theta_c < \theta < \pi - \theta_c$, ou seja, θ pertence a Região II da Figura 4.1 então, $-1 < r \cos \theta < 1$ logo, $\varphi(r \cos \theta) = r \cos \theta$;
- (3) Se $\pi - \theta_c < \theta < \pi + \theta_c$, ou seja, θ pertence a Região III da Figura 4.1 então, $r \cos \theta < -1$ logo, $\varphi(r \cos \theta) = -1$;
- (4) Se $\pi + \theta_c < \theta < 2\pi - \theta_c$, ou seja, θ pertence a Região IV da Figura 4.1 então, $-1 < r \cos \theta < 1$ e $\varphi(r \cos \theta) = r \cos \theta$;
- (5) Se $2\pi - \theta_c < \theta < 2\pi$, então θ pertence a Região V da Figura 4.1 e $1 < r \cos \theta < r$ logo, $\varphi(r \cos \theta) = 1$.

Pelos itens (1) ao (5) podemos calcular (4-27) e (4-28)

$$I_1(r) = \int_0^{\theta_c} \cos \theta d\theta + r \int_{\theta_c}^{\pi - \theta_c} \cos^2 \theta d\theta - \int_{\pi - \theta_c}^{\pi + \theta_c} \cos \theta d\theta + r \int_{\pi + \theta_c}^{2\pi - \theta_c} \cos^2 \theta d\theta + \int_{2\pi - \theta_c}^{2\pi} \cos \theta d\theta$$

e

$$I_2(r) = \int_0^{\theta_c} \sin \theta d\theta + r \int_{\theta_c}^{\pi - \theta_c} \sin \theta \cos \theta d\theta - \int_{\pi - \theta_c}^{\pi + \theta_c} \sin \theta d\theta + r \int_{\pi + \theta_c}^{2\pi - \theta_c} \sin \theta \cos \theta d\theta + \int_{2\pi - \theta_c}^{2\pi} \sin \theta d\theta,$$

respectivamente. Concluímos que $I_1(r) = 2\sin \theta_c + r\pi - 2r\theta_c$ e $I_2(r) = 0$, quando $\theta_c \in (0, \frac{\pi}{2})$ com

$$\cos \theta_c = \frac{1}{r}$$

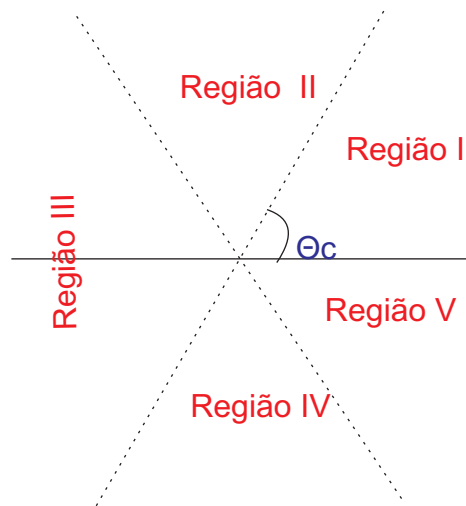


Figura 4.1

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\theta_c &= \frac{\sqrt{r^2 - 1}}{r} \\ \theta_c &= \arctan \sqrt{r^2 - 1}\end{aligned}$$

Logo, como $I_2(r) = 0$ e a expressão de $I_1(r)$ é dada por (4-29), temos

$$\begin{aligned}h_1(r, \rho, s) &= \int_0^{2\pi} H_1(\theta, r, \rho, s) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \cos\theta [r(a_{11}\cos\theta + a_{12}\operatorname{sen}\theta) + \rho(a_{13}\cos(\theta + s) + a_{14}\operatorname{sen}(\theta + s))] d\theta \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \cos\theta \varphi(r\cos\theta) b_1 d\theta + r \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta [a_{21}\cos\theta + a_{22}\operatorname{sen}\theta] d\theta \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta [\rho(a_{23}\cos(\theta + s) + a_{24}\operatorname{sen}(\theta + s)) + \varphi(r\cos\theta) b_2] d\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= ra_{11} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta + a_{12}r \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta + a_{13}\rho \int_0^{2\pi} \cos(\theta + s) d\theta \\
&\quad + a_{14}\rho \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin(\theta + s) d\theta + b_1 \int_0^{2\pi} \varphi(r \cos \theta) \cos \theta d\theta \\
&\quad + a_{21}r \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta + a_{22}r \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta + a_{23}\rho \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos(\theta + s) d\theta \\
&\quad + a_{24}\rho \int_0^{2\pi} \sin \theta \sin(\theta + s) d\theta + b_2 \int_0^{2\pi} \varphi(r \cos \theta) \sin \theta d\theta \\
&= ra_{11}\pi + a_{13}\rho\pi \cos s + a_{14}\rho\pi \sin s + b_1 I_1(r) + a_{21}r\pi - a_{23}\rho \sin(s) \\
&\quad + a_{24}\rho\pi \cos s \\
&= c_1 r + (c_2 \cos s - c_3 \sin s)\rho + b_1 I_1(r) \tag{4-32}
\end{aligned}$$

onde,

$$c_1 = (a_{11} + 2a_{22})\pi$$

$$c_2 = (a_{13} + a_{24})\pi$$

$$c_3 = (a_{14} - a_{23})\pi$$

Procedendo analogamente obtemos as seguintes expressões para h_2 e h_3 ,

$$\begin{aligned}
h_2 &= (c_5 \cos s + c_6 \sin s)r + c_7 \rho + b_3 \cos s I_1(r) \\
h_3 &= c_4 + (c_2 \sin s - c_3 \cos s) \frac{\rho}{r} + (c_5 \sin s - c_6 \cos s) \frac{r}{\rho} + b_3 \sin s \frac{I_1(r)}{\rho} \tag{4-33}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
c_4 &= (a_{21} - a_{12} - a_{43} + a_{34})\pi & c_5 &= (a_{31} + a_{42})\pi \\
c_6 &= (a_{41} + a_{32})\pi & c_7 &= (a_{33} + a_{44})\pi
\end{aligned}$$

Se no sistema (4-4) para cada constante $(r^*, \rho^*, s^*) \in D_n$ associarmos um órbita periódica do sistema (4-3) então

$$\begin{aligned}
r^* &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\
\rho^* &= \sqrt{x_3^2 + x_4^2} \\
s^* &= \arctan \frac{x_4}{x_3} - \arctan \frac{x_2}{x_1},
\end{aligned}$$

são integrais primeira deste sistema.

Proposição 4.3 *Para cada órbita periódica do sistema 4, cada zero simples de $h \in D_n$ é um ciclo limites do sistema 4-4.*

Demonstração. Seja $h = (h_1, h_2, h_3)$ dada por (4-32) e (4-33). Observe que pelo Lema 4.2 temos que o sistema (4) está bem definido e é contínuo em $\mathbb{R} \times D_n \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f)$. Também, é 2π -periódico com respeito a θ e localmente Lipschitz com respeito a (r, ρ, s) , que são as hipóteses do Teorema 3.1. Logo, pela observação 3.16, temos que para $|\varepsilon|$ suficientemente pequeno e para cada zero (r^*, ρ^*, s^*) de h , $d(h, D_n, (r^*, \rho^*, s^*)) \neq 0$. Concluimos pelo Teorema 3.1 que existe uma solução 2π -periódica $\varphi(\cdot, \varepsilon)$ de tal que $\varphi(\cdot, \varepsilon) \rightarrow (r^*, \rho^*, s^*)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Como cada solução 2π -periódica de (4) corresponde a um ciclo limite de (4-4) o resultado segue. \square

Para encontrar os zeros da função $h \in D_n$ é suficiente olhar para $h \in (0, \infty) \times (0, \infty) \times [0, \pi)$, isto se deve ao fato de n poder ser escolhido arbitrariamente grande e h ter se tornado uma função 2π periódica em s depois da mudança de variáveis feitas no Lema 4.2.

As seguintes notações serão importantes

$$d(s) = b_3 \cos(s)(c_2 \cos(s) + \sin s) - b_1 c_7 \quad (4-34)$$

$$k_1(s) = (-c_1 b_3 + c_5 b_1) \cos(s) + c_6 b_1 \sin(s) \quad (4-35)$$

$$k_2(s) = -c_2 c_5 \cos^2 s - (c_2 c_6 + c_3 c_5) \cos(s) \sin(s) - c_3 c_6 \sin^2 s + c_1 c_7 \quad (4-36)$$

$$f(s) = c_4 d(s) k_1(s) + (c_2 \sin(s) - c_3 \cos(s)) k_1^2(s) + (c_5 \sin(s) - c_6 \cos(s)) d^2(s) + b_3 \sin(s) d(s) k_2(s) \quad (4-37)$$

Proposição 4.4 *Seja $h : (0, \infty) \times (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ a função cujas componentes são dadas por (4-32) e (4-33), onde $c_i = 1, \dots, 7$ são parâmetros reais arbitrários, $b_1, b_3 \in \{0, 1\}$ com $b_1 b_3 = 0$ e $b_1^2 + b_3^2 \neq 0$. A função I_1 é dada por (4-28). Então,*

(i) *h é de classe C^1 ;*

(ii) *o número máximo de zeros isolados de h em $(0, \infty) \times (0, \infty) \times [0, 2\pi)$ é três.*

Além disso, para os seguintes valores de coeficientes,

$$\begin{aligned} c_1 = c_2 = -2 & & c_3 = c_5 = b_2 = b_3 = b_4 = 0 \\ c_4 = \frac{21}{10} & & c_6 = b_1 = 1 \\ c_7 = -1 & & \end{aligned}$$

h tem exatamente três zeros simples.

Temos que $I_1(r)$ é contínua e derivável. Logo, por (4-28), temos que

$$I_1'(r) = \begin{cases} \pi, & \text{se } 0 \leq r \leq 1; \\ \frac{2}{r^2\sqrt{r^2-1}} + \pi - 2 \arctan \sqrt{r^2-1} - \frac{2}{\sqrt{r^2-1}}, & \text{se } r > 1. \end{cases}$$

que também é contínua. Então, $I_1(r)$ é C^1 . Note que, a função h é a composta de funções elementares, ou seja, aquelas que obtém-se mediante um número finito de operações de funções como por exemplo, as funções constantes, exponencial, logarítmicas, etc. Como funções elementares são de classe C^1 e $I_1(r)$ é de classe C^1 , então h é de classe C^1 em $(0, \infty)$. Assim, a conclusão (i) é verdadeira.

Para demonstrar o item (ii) da Proposição 4.4 necessitaremos de alguns Lemas que veremos a seguir.

Para estudar os zeros de h precisamos estudar os zeros de f .

Lema 4.5 A função $f : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ dada pela fórmula (4-37) possui no máximo seis zeros isolados e eles são encontrados em pares da forma (s^*, ξ^*) , onde $\xi^* = s^* + \pi \pmod{2\pi}$. Além disso, quando $b_1 = 0$ e $b_3 = 1$ dois desses zeros são $s^* = \frac{\pi}{2}$ e $\xi^* = \frac{3\pi}{2}$.

Demonstração. Queremos estudar a equação

$$f(s) = 0 \tag{4-38}$$

Fazendo $\cos(s) = x$ e $\sin(s) = \sqrt{1-x^2}$ em (4-38) temos,

$$0 = c_4 d(s) k_1(s) + (c_2 \sqrt{1-x^2} - c_3 x) k_1^2(s) + (c_5 \sqrt{1-x^2} - c_6 x) d^2(s) + b - 3\sqrt{1-x^2} d(s) k_2(s)$$

Substituindo os valores de $k_1(s)$, $d(s)$ e $k_2(s)$ e usando a hipótese que $b_1 b_3 = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 = & [(-c_3^2 c_6 + c_1 c_7 c_3) b_3^2 + (-c_4 c_7 c_5 + 2c_2 c_5 c_6 - c_6^2 c_3 - c_6 c_7^2) b_1^2] x \\ & + [(-c_4 c_2 c_1 - c_3 c_1^2 + c_6 c_3^2 - c_2^2 c_6 - c_1 c_7 c_3) b_3^2 + (-2c_2 c_5 c_6 - c_3 c_5^2 + c_6^2 c_3) b_1^2] x^3 \\ & + [(c_2 c_6^2 - c_4 c_6 c_7 + c_5 c_7^2) b_1^2] \sqrt{1-x^2} \\ & + [(c_1 c_2^2 + c_1 c_2 c_7 - c_1 c_3 c_4 - 2c_2 c_3 c_6) b_3^2 + (c_2 c_5^2 - 2c_3 c_5 c_6 - c_2 c_6^2) b_1^2] x^2 \sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

Sejam

$$C_1 = b_1^2 (2c_2 c_5 c_6 - c_3 c_6^2 - c_4 c_5 c_7 - c_6 c_7^2) + b_3^2 (c_1 c_3 c_7 - c_2^2 c_6)$$

$$C_3 = b_1(c_3c_6^2 - c_3c_5^2 - 2c_2c_5c_6) + b_3(c_3^2c_6 - c_1^2c_3 - c_1c_2c_4 - c_2^2c_6 - c_1c_3c_7)$$

$$D_0 = b_1^2(c_2c_6^2 - c_4c_6c_7 + c_5c_7^2)$$

$$D_2 = b_1^2(c_2c_5^2 - 2c_3c_5c_6 - c_2c_6^2) + b_3^2(c_1^2c_2 + c_1c_2c_2 - c_1c_2c_4 - 2c_2c_3c_6).$$

Então, obtemos a seguinte expressão equivalente a (4-37)

$$C_1x + C_3x^3 + (D_0 + D_2x^2)\sqrt{1-x^2} = 0 \quad (4-39)$$

Quando consideramos o caso $\text{sen } s = -\sqrt{1-x^2}$, fazendo cálculos análogos aos anteriores teremos que a equação (4-38) é equivalente a

$$C_1x + C_3x^3 - (D_0 + D_2x^2)\sqrt{1-x^2} = 0 \quad (4-40)$$

Queremos encontrar $x \in [-1, 1]$ que seja solução de (4-39) e (4-40). Ou seja, queremos que

$$(C_1x + C_3x^3)^2 - (D_0 + D_2x^2)^2(1-x^2) = 0 \quad (4-41)$$

desenvolvendo o lado esquerdo da equação acima, vem

$$-D_0^2 + (C_1^2 + D_0^2 - 2D_0D_2)x^2 + (2D_0D_2 - D_2^2 + 2C_1C_3)x^4 + (C_3^2 + 2C_1C_3 + D_2)x^6 = 0 \quad (4-42)$$

A equação (4-42) tem no máximo 6 raízes no intervalo $[-1, 1]$. Então (4-37) tem no máximo seis s -soluções em $[0, 2\pi)$.

Observe que para todo $s \in [0, 2\pi)$, temos

(1)

$$\begin{aligned} d(s + \pi) &= b_3 \cos(s + \pi)(c_2 \cos(s + \pi) + c_3 \text{sen}(s + \pi)) - b_1 c_7 \\ &= -b_3 \cos(s)(-c_2 \cos(s) - c_3 \text{sen}(s)) - b_1 c_7 \\ &= b_3 \cos(s)(c_2 \cos(s) + c_3 \text{sen}(s)) - b_1 c_7 \\ &= d(s) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} k_1(s + \pi) &= (-c_1 b_3 + c_5 b_1) \cos(s + \pi) + c_6 b_1 \text{sen}(s + \pi) \\ &= -(-c_1 b_3 + c_5 b_1) \cos(s) - c_6 b_1 \text{sen}(s) \\ &= -k_1(s) \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
k_2(s + \pi) &= -c_2c_5\cos^2(s + \pi) - (c_2c_6 + c - 3c_5)\cos(s + \pi)\sin(s + \pi) - c_3c_6\sin^2(s + \pi) + c_1c_7 \\
&= -c_2c_5\cos^2(s) - (c_2c_6 + c - 3c_5)\cos(s)\sin(s) - c_3c_6\sin^2(s) + c_1c_7 \\
&= k_2(s)
\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
f(s + \pi) &= c_4d(s + \pi)k_1(s + \pi) + (c_2\sin(s + \pi) - c_3\cos(s + \pi))k_1^2(s + \pi) + (c_5\sin(s + \pi) \\
&\quad - c_6\cos(s + \pi))d^2(s + \pi) + b_3\sin(s + \pi)d(s + \pi)k_2(s + \pi) \\
&= -c_4d(s)k_1(s) + (-c_2\sin(s) + c_3\cos(s))k_1^2(s) + (-c_5\sin(s) + c_6\cos(s))d^2(s) \\
&\quad - b_3\sin(s)d(s)k_2(s) \\
&= -f(s)
\end{aligned}$$

Dessa forma, se s^* é zero de f , então $s^* + \pi$ também é um zero de f .

Se $b_1 = 0$ e $b_3 = 1$ então $D_0 = 0$ e (4-42) se reduz a

$$C_1^2x^2 + (-D_2^2 + 2C_1C_3)x^4 + (C_3^2 + 2C_1C_3 + D_2)x^6 = 0$$

onde $x = 0$ é uma de suas raízes. Como $0 = x = \cos(s)$, segue que $s^* = \frac{\pi}{2}$ e $\xi^* = \frac{3\pi}{2}$ são soluções de (4-38) neste caso.

□

O resultado a seguir será bastante útil para os resultados posteriores.

Lema 4.6 *Considere a equação*

$$I_1(r) = cr, \quad r > 0 \tag{4-43}$$

com I_1 dado por (4-28) e c um parâmetro real. Então estudaremos a solubilidade de (4-43) nas seguintes situações

(a) Se $0 < c < \pi$ então (4-43) tem uma única solução $r^* > 1$;

(b) Se $c = \pi$ então (4-43) tem o intervalo $(0, 1]$ como seu conjunto solução;

(c) Se $c \leq 0$ ou $c > \pi$ então (4-43) não tem solução.

Demonstração. Se $r \in (0, 1]$ então, por (4-28) $I_1(r) = r\pi$ e portanto (b) é satisfeita.

Agora para $r > 1$ vimos anteriormente que a equação (4-43) pode ser escrita como

$$\frac{2\sqrt{r^2-1}}{r} + r\pi - 2r\arctan\sqrt{r^2-1} = cr$$

Seja $u = \sqrt{r^2-1}$,

$$\arctan u = \frac{u}{u^2+1} + \frac{\pi-c}{2}, u > 0$$

Estudando os gráficos de $\arctan u$ e $\frac{u}{u^2+1} + \frac{\pi-c}{2}$, veja Figura 4.2, no intervalo $(0, \infty)$, podemos ver que eles se interceptam se, e somente se, $0 < \frac{(\pi-c)}{2} < \frac{\pi}{2}$, isto é, $0 < c < \pi$. Neste caso o ponto de intersecção é único. E se $c \leq 0$ ou $c > \pi$, (4-43) não tem solução. \square

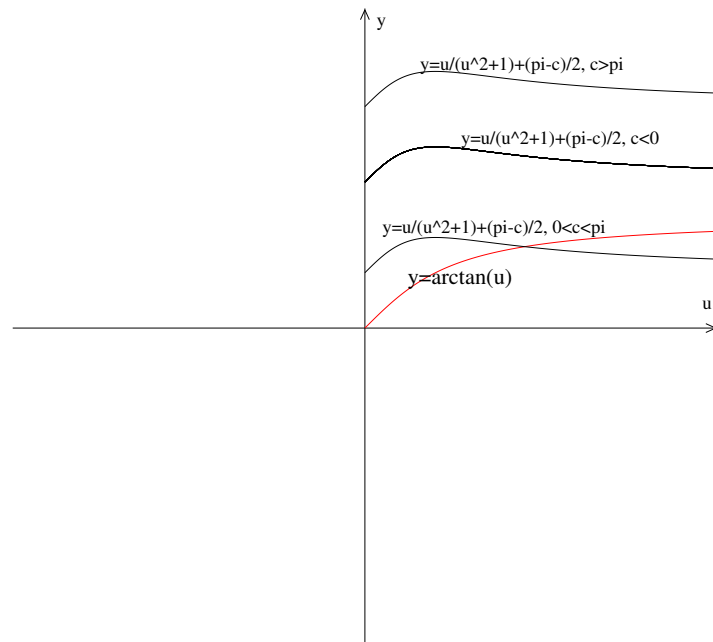


Figura 4.2

Nos próximos três lemas estudaremos os zeros de h . Será conveniente denotar o sistema algébrico não-linear que obtemos de $h = (h_1, h_2, h_3) = 0$, como

$$h_1(r, s, \rho) = 0 \quad (4-44)$$

$$h_2(r, s, \rho) = 0 \quad (4-45)$$

$$h_3(r, s, \rho) = 0 \quad (4-46)$$

Lema 4.7 A função h tem no máximo três zeros isolados $(r^*, s^*, \rho^*) \in (0, \infty) \times (0, \infty) \times [0, 2\pi)$ com $d(s^*) \neq 0$. Quando $b_1 = 0, b_3 = 1, c_1 \neq 0$ então h tem no máximo dois zeros, e quando $b_1 = 0, b_3 = 1, c_1 = 0$ então h não possui nenhum zero.

Demonstração.

Por (4-44),(4-32), temos

$$0 = h_1(r, \rho, s) = c_1 r + (c_2 \cos(s) + c_3 \sin(s))\rho + b_1 I_1(r) \quad (4-47)$$

E de (4-45) e (4-33), temos

$$0 = h_2(r, \rho, s) = (c_5 \cos(s) + c_6 \sin(s))r + c_7 \rho + b_3 \cos(s) I_1(r) \quad (4-48)$$

Fazendo manipulações algébrica em (4-47) e (4-48), obtemos

$$\rho = \frac{k_1(s)r}{d(s)} \quad (4-49)$$

e,

$$I_1(r) = \frac{k_2(s)r}{d(s)} \quad (4-50)$$

Substituindo (4-49) e (4-50) em h_3 , temos a seguinte expressão

$$h_3 = c_4 k_1(s) d(s) + (c_2 \sin(s) - c_3 \cos(s)) k_1^2(s) + (c_5 \sin(s) - c_6 \cos(s)) d^2(s) + b_3 \sin(s) k_2(s) d(s) \quad (4-51)$$

Note que, neste caso $h_3(s)$ é igual a $f(s)$ e (4-46) é equivalente a $f(s) = 0$. Fixemos s^* , uma solução da equação $f(s) = 0$. Queremos estudar a solubilidade de (4-50) com respeito a $r > 0$. Pelo lema 4.6 existe uma solução isolada $r > 0$ de (4-50) se, e somente se,

$$0 < \frac{k_2(s^*)}{d(s^*)} < \pi \quad (4-52)$$

e neste caso a solução é única. Então para um r^* fixado correspondente a s^* . Se

$$\frac{k_1(s^*)}{d(s^*)} > 0 \quad (4-53)$$

podemos determinar univocamente $\rho^* > 0$ na equação (4-49).

Provaremos que a condição (4-53) será satisfeita somente para no máximo a metade da quantidade de zeros de $f(s)$.

De fato, pelas observações (1) e (2) feitas na demonstração do Lema 4.6 temos que $k_1(s + \pi) = -k_1(s)$ e $d(s + \pi) = d(s)$. Vimos que os zeros de f aparecem em pares, s^* junto com os de $s^* + \pi$. Como $k_1(s^*) = 0$ não satisfaz (4-53) então, se $k_1(s^*) > 0$ e

$d(s^*) > 0$ ou $k_1(s^*) < 0$ e $d(s^*) < 0$, temos que s^* satisfaz (4-53), mas se $k_1(s^*)$ e $d(s^*)$ tiverem sinais opostos então, a última desigualdade será satisfeita para $s^* + \pi$. Logo, s^* e $s^* + \pi$ não são raízes simultâneas de h . Segue que, a função h tem no máximo 3 zeros em $(r^*, \rho^*, s^*) \in (0, \infty) \times (0, \infty) \times [0, 2\pi)$ com $d(s^*) \neq 0$.

Se tomamos $b_1 = 0$ e $b_3 = 1$ em (4-45) então $k_1 = -c_1 \cos(s)$. Se $c_1 \neq 0$, pelo Lema 4.5 segue que dois dos zeros de f são $s^* = \frac{\pi}{2}$ e $s^* = \frac{3\pi}{2}$, mas $k_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = k_1\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ contradizendo (4-53). Temos os outros 4 zeros de f como candidatos a 3 dos zeros de h , mas os zeros de f só aparecem aos pares, então neste caso h tem no máximo dois zeros.

Se $c_1 = 0$, então $k_1(s) = 0, \forall s$ o que contradiz (4-53). Portanto, h não possui singularidades. □

Lema 4.8 Quando $b_1 = 1, b_3 = 0, c_7 = 0$, a função h tem no máximo dois zeros isolados.

Demonstração. Para $b_1 = 1, b_3 = 0, c_7 = 0$ em 4-38 temos $d(s) = 0, \forall s \in [0, 2\pi)$. Assim, não podemos aplicar o Lema 4.7. Utilizando as equações (4-44) até (4-46) juntamente com as hipóteses de que $b_1 = 1, b_3 = 0$ e $c_7 = 0$, temos

$$0 = c_1 r + q(s)\rho + I_1(r) \quad (4-54)$$

$$0 = c_4 r \rho + p_1(s)\rho^2 + (c_5 \sin(s) - c_6 \cos(s))r^2 \quad (4-55)$$

$$0 = p_2(s)r \quad (4-56)$$

Sejam

$$q(s) = c_2 \cos(s) + c_3 \sin(s),$$

$$p_1(s) = (c_2 \sin(s) - c_3 \cos(s)),$$

e

$$p_2(s) = (c_5 \sin(s) - c_6 \cos(s)).$$

Então, obtemos

$$\frac{I_1(r)}{r} = -c_1 - q(s)\frac{\rho}{r} \quad (4-57)$$

$$p_1(s)\left(\frac{\rho}{r}\right)^2 + c_4\left(\frac{\rho}{r}\right) + p_2(s) = 0 \quad (4-58)$$

$$0 = c_5 \cos(s) + c_6 \sin(s) = k_1(s) \quad (4-59)$$

Para um s fixo, (4-58) é uma equação do segundo grau em $\frac{\rho}{r}$ e neste caso possui no máximo duas raízes em $\left(\frac{\rho}{r}\right)$.

Se fixamos s e $\frac{\rho}{r}$, a equação (4-57) é equivalente a $I_1(r) = cr$, onde c é $-c_1 - q(s)\frac{\rho}{r}$. Então, pelo Lema 4.6 temos que (4-57) tem no máximo uma solução.

O sistema formado por (4-57), (4-58) e (4-59) não possui solução quando $k_1(s) = 0, \forall s \in [0, 2\pi)$ isto porque neste caso todos os pontos de $[0, 2\pi)$ são soluções de (4-59) e, assim não é possível obter zeros isolados para h .

Se $k_1(s) \neq 0, \forall s \in [0, 2\pi)$ então, denotaremos por s^* e $\xi = s^* + \pi$ as soluções de $k_1(s)$. Substituindo s^* e ξ^* em (4-58) e fazendo algumas simplificações, obtemos

$$p_1(s^*) \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 + c_4 \left(\frac{\rho}{r}\right) + p_2(s^*) = 0 \quad (4-60)$$

e

$$p_1(s^*) \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 - c_4 \left(\frac{\rho}{r}\right) + p_2(s^*) = 0, \quad (4-61)$$

respectivamente. Essas duas equações não podem ter simultaneamente mais que duas soluções positivas em $\left(\frac{\rho}{r}\right)$. Portanto, h tem no máximo dois zeros isolados.

□

Lema 4.9 Quando $b_1 = 0$ e $b_3 = 1$ a função h pode ter no máximo dois zeros isolados $(r^*, \rho^*, s^*) \in (0, \infty) \times (0, \infty) \times [0, 2\pi)$ com $d(s^*) = 0$. Além disso, $c_1 = 0$ ou h tem no máximo um zero isolado.

Demonstração.

Se $b_1 = 0$ no sistema (4-57)-(4-59), temos

$$0 = c_1 r + q(s)\rho \quad (4-62)$$

$$0 = \tilde{q}(s)r + c_7 \rho + \cos(s)I_1(r) \quad (4-63)$$

$$0 = c_4 \rho r + p_1(s)\rho^2 + p_2(s)r^2 + \sin(s)I_1(r)r \quad (4-64)$$

Tomamos

$$q(s) = c_2 \cos(s) + c_3 \sin(s)$$

e

$$\tilde{q}(s) = c_5 \cos(s) + c_6 \sin(s),$$

então

$$q(s) \left(\frac{\rho}{r}\right) = -c_1 \quad (4-65)$$

$$\cos(s) \frac{I_1(r)}{r} = -\tilde{q}(s) - c_7 \frac{\rho}{r} \quad (4-66)$$

Neste caso, por (4-34) $d(s) = \cos(s) q(s)$. Assim, $d(s) = 0$ se, e somente se $\cos(s) = 0$ ou $q(s) = 0$.

Primeiramente, suponhamos $q(s) = 0$ e $\cos(s) \neq 0$. Então, por (4-65) e (4-66), temos

$$c_1 = 0 \quad (4-67)$$

$$\frac{I_1(r)}{r} = (-\tilde{q}(s) - c_7 \frac{\rho}{r}) \frac{1}{\cos(s)} \quad (4-68)$$

$$0 = p_1(s) \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 + c_4 \left(\frac{\rho}{r}\right) + p_2(s) + \text{sen}(s) \frac{I_1(r)}{r} \quad (4-69)$$

Substituindo (4-68) em (4-69), obtemos

$$0 = \cos(s) p_1(s) \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 + p_3(s) \frac{\rho}{r} - c_6 \quad (4-70)$$

onde $p_3(s) = c_4 \cos(s) - c_7 \text{sen}(s)$.

Fixado s em (4-70), então esta equação possui no máximo duas raízes isoladas. Agora, fixando s^* e $\frac{\rho}{r}$ em (4-68), obtemos $I_1(r) = kr$, onde $k = (-\tilde{q}(s) - c_7 \frac{\rho}{r}) \frac{1}{\cos(s)}$ é uma constante e pelo Lema 4.6 possui no máximo um zero isolado. Portanto, no caso em que $q(s) = 0$ e $\cos(s) = 0$ temos que h possui no máximo dois zeros isolados.

Suponhamos agora que $\cos(s) = 0$ e $q(s) \neq 0$. Como $\cos(s) = 0$ e $s \in [0, 2\pi)$, temos que $s^* = \frac{\pi}{2}$ e $s^* = \frac{3\pi}{2}$ são soluções de $d(s) = 0$. Substituindo esses valores em (4-67), (4-68) e (4-70), obtemos

$$c_3 \frac{\rho}{r} = -c_1 \quad c_7 \frac{\rho}{r} = -c_6$$

e

$$c_3 \frac{\rho}{r} = c_1 \quad c_7 \frac{\rho}{r} = c_6$$

respectivamente. Para cada sistema temos no máximo um valor isolado para $\frac{\rho}{r}$, mas como um sistema é o inverso aditivo do outro, somente um deles é positivo. Assim, h tem no máximo um zero com $s^* = \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$ e neste caso, $c_1 \neq 0$ é uma condição necessária para a existência de tal zero. \square

Teorema 4.10 *Existe uma cota superior para o número de ciclos limites do sistema (4-1) que bifurcam das órbitas periódicas do sistema (4-3), até a expansão de primeira ordem da função deslocamento de (4-1) com respeito a um parâmetro ε suficientemente*

pequeno. Além disso, sob certas condições o sistema (4-1) atinge essa conta superior de ciclos limites.

Demonstração. A prova do Teorema 4.10 segue dos Lemas 4.7, 4.8 e 4.9, onde foram considerados os seguintes casos

- I)** Se $b_1 = 1, b_3 = 0$ e $c_7 \neq 0$, então $d(s) = c_7 \neq 0$ para todo $s \in [0, 2\pi)$. Utilizando o lema 4.7 concluímos que neste caso h tem no máximo três zeros isolados.
- II)** Se $b_1 = 1, b_3 = 0$ e $c_7 = 0$ então aplicamos o lema 4.8 e concluímos que h deve ter no máximo dois zeros isolados.
- III)** Se $b_1 = 0$ e $b_3 = 1$, então pelos lemas 4.7 e 4.9 concluímos que h tem no máximo dois zeros isolados.

Assim concluímos que h pode ter no máximo três zeros isolados em D_n .

Para os valores concretos dos coeficientes dados na hipótese da Proposição 4.4, as componentes de h são

$$h_1 = 2r - 2\rho \cos(s) + I_1(r) \quad (4-71)$$

$$h_2 = r \sin(s) - \rho \quad (4-72)$$

$$h_3 = \frac{21}{10} - 2 \sin(s) \frac{\rho}{r} - \cos(s) \frac{r}{\rho} \quad (4-73)$$

e as funções auxiliares (4-34), (4-35), (4-36) e (4-37) são neste caso

$$d(s) = 1 \quad (4-74)$$

$$k_1(s) = \sin(s) \quad (4-75)$$

$$k_2(s) = 2 + 2 \cos(s) \sin(s) \quad (4-76)$$

$$f(s) = -10 \cos(s) + 21 \sin(s) - 20 \sin^3 s \quad (4-77)$$

Usando a notação $x = \cos(s)$, a equação $f(s) = 0$ se torna

$$1 - 61x^2 + 360x^4 - 400x^6 = 0 \quad (4-78)$$

Este polinômio de grau seis tem seis soluções $x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$, $x_{3,4,5,6} =$

$\pm \sqrt{\frac{(7 \pm 2\sqrt{11})}{20}}$ e todos estão no intervalo $(-1, 1)$.

Então f tem os seguintes zeros,

$$s_1 = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right), s_{2,3} = \arccos\left(\sqrt{\frac{7 \pm 2\sqrt{11}}{20}}\right) \text{ e } \xi_{1,2,3} = s_{1,2,3} + \pi$$

A condição (4-52) é satisfeita para todo zero de f , mas a condição (4-53) é satisfeita somente pelos pontos ξ_1, ξ_2 e ξ_3 . Então, h tem exatamente três zeros.

Vamos mostrar agora que, $J_h(r^*, \rho^*, s^*) \neq 0$ para cada (r^*, ρ^*, s^*) zero de h .

De fato, a matriz jacobiana de h é dada por

$$\begin{pmatrix} 2 + \frac{d}{dr}I_1(r) & -2\cos(s) & 2\rho\sin(s) \\ \sin(s) & -1 & r\cos(s) \\ 2\sin(s)\frac{\rho}{r^2} - \cos(s)\frac{1}{\rho} & -2\sin(s)\frac{1}{r} + \cos(s)\frac{1}{\rho^2} & -2\cos(s)\frac{\rho}{r} + \sin(s)\frac{r}{\rho} \end{pmatrix}$$

Observe que $\rho^* = r^*\sin(s^*)$ e $r^* > 1$ é uma solução única de $I_1(r) = (2 + 2\cos(s^*)\sin(s^*))r$. Calculando o determinante da matriz jacobiana de h no ponto (r^*, ρ^*, s^*) , obtemos

$$J_h(r^*, \rho^*, s^*) = \frac{4}{5r^{*2}}(\sqrt{r^{*2} - 1} - r^{*2})\cos(s^*)(15\cos(s^*) - 16\sin(s^*)).$$

que é diferente de zero para cada $\xi_i, i = 1, 2$ e 3 . Segue da Observação 3.16 que, $d(h, D_n, \xi_i) \neq 0$ para $i = 1, 2$ e 3 . Assim, do Método do Averaging de Primeira Ordem temos que para cada zero (r^*, ρ^*, s^*) de h existe uma solução, $\varphi(\cdot, \varepsilon)$, 2π -periódica do sistema (4-4) tal que $\varphi(\cdot, \varepsilon) \rightarrow (r^*, \rho^*, s^*)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Portanto, cada zero da função h corresponde a um ciclo limite do sistema (4-4) que bifurca do sistema (1-1). Ou seja, no caso em que h possui os coeficientes c'_i 's e b'_j 's dados na Proposição 4.4 temos que existem exatamente três ciclos limites de 4-4 que bifurcam de 1-1. \square

Considerações Finais

No Capítulo 2, demonstramos o Método do Averaging de Primeira Ordem onde a condição específica para existência de um zero simples isolado a função "averaged" e dada em função do Grau de Brouwer. A vantagem do método apresentado no capítulo 2 é que a diferenciabilidade do campo de vetores não é necessária, exigimos apenas a sua continuidade. O ponto chave para demonstração desse método foi a Teoria do Grau de Brouwer que foi estudada na seção 3.1. Observamos também que, existe uma relação entre o Método do Averaging e o a função deslocamento, mais especificamente na Afirmação 5 estabelecemos que encontrar os pontos de equilíbrio do sistema "averaged" para algum sistema de equações diferenciais é equivalente a encontrar os zeros isolados da função deslocamento associada ao sistema.

No Capítulo 3, verificamos que o sistema de controle 4-dimensional dado por (4-1) através de uma mudança de variável específica, pode ser reduzido para um sistema 3-dimensional. A partir deste novo sistema, foi possível encontrar a função "averaged" correspondente ao sistema (4-1). Como encontrar os pontos de equilíbrio do sistema "averaged" correspondente ao sistema (4-1) é equivalente a encontrar os zeros simples da função deslocamento deste sistema, então determinamos a função deslocamento do sistema e estudamos suas raízes. Na Proposição 4.3 estabelecemos que cada zeros isolados da função deslocamento do sistema (4-1) corresponde a um ciclo limite deste sistema que bifurcam das órbitas periódicas do tipo centro do sistema (4-3). Este resultado foi importante pois, a partir dele pudemos concluir que o limite superior para o número de ciclos limites do sistema (4-1) que bifurcam das órbitas periódicas do tipo centro do sistema (4-3) é 3 e que para valores específicos esta cota superior é atingida.

Referências Bibliográficas

- [1] ALMEIDA, O. B. **Teoria do Grau e Aplicações**. dissertação de mestrado, UFCG, UFCG, 2006.
- [2] BUICÃ, A. E LLIBRE, J. **Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree**. Bull. Sci. Math. Sci. 128, 2004.
- [3] BUICÃ, A. E LLIBRE, J. **Bifurcation of Limit Cycles from a 4-dimensional Center In Control System**. International Journal Bifurcations and Chaos, Appl. Sci. Engrg. 15, 2005.
- [4] CARMONA V., FREIRE E., P. E. E. T.-F. **On symplifying and classyfing piecewise-linear systems**. IEEE Trans. Circuits Syst. I 49, 2002.
- [5] ELON, L. **Análise Real volume 2**. Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2007.
- [6] HAN, M. **Resonat bifurcations of periodic solutions of higher-dimensional systems**. Acta Math. Appl. Sinica 21, 1998.
- [7] LLOYD, N. **Degree Theory**. Cambridge University Press, London, 1978.
- [8] O'REGAN, D., C. Y. J. E. C. Y.-Q. **Topological Degree Theory and Aplications**. Series in Mathematical Analysis and Applications, Vol. 10, Taylor and Francis Group, 2006.
- [9] SANDERS, J.A. E VERHULST, F. **Averaging methods in nonlinear dynamical systems**. em Appl. Math. Sci. 59, Springer, 1985.
- [10] VERHUST, F. **Nonlinear differential equations and dynamical systems**. Springer-Verlag, Berlin.