

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

LIDIANE DOS SANTOS MONTEIRO LIMA

**Problemas de Riemann para um
Sistema Simétrico de Duas Leis de
Conservação**

Goiânia
2010

LIDIANE DOS SANTOS MONTEIRO LIMA

Problemas de Riemann para um Sistema Simétrico de Duas Leis de Conservação

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. Jesus Carlos da Mota

Goiânia
2010

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
GPT/BC/UFG

L732p Lima, Lidianne dos Santos Monteiro.
Problemas de Riemann para um Sistema Simétrico de Duas
Leis de Conservação [manuscrito] / Lidianne dos Santos
Monteiro Lima. - 2010.
59 f. : il., figs.

Orientador: Prof. Dr. Jesus Carlos da Mota.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás,
Instituto de Matemática e Estatística, 2010.
Bibliografia.
Inclui lista de figuras.

1. Leis de conservação. 2. Problemas de Riemann. 3.
Sistema hiperbólico. Título.

CDU: 517.58

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

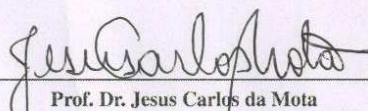
Lidiane dos Santos Monteiro Lima

Graduou-se bacharel em matemática pela UFG - Universidade Federal de Goiás. Durante sua graduação, teve bolsa de iniciação científica pela UFG. Durante o mestrado, na UFG, foi bolsista do CNPq. Atualmente é aluna de doutorado em matemática na Unicamp - Universidade Estadual de Campinas, sendo bolsista da Capes, e com previsão de termino para Março de 2014.

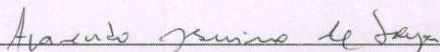
LIDIANE DOS SANTOS MONTEIRO LIMA

Problemas de Riemann para um Sistema Simétrico de Duas Leis de Conservação

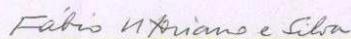
Dissertação defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 09 de Abril de 2010, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



Prof. Dr. Jesus Carlos da Mota
Instituto de Matemática e Estatística – UFG
Presidente da Banca



Prof. Dr. Aparecido Jesuino de Souza
Departamento de Matemática e Estatística – UFCG



Prof. Dr. Fábio Vitoriano e Silva
Instituto de Matemática e Estatística –UFG

A pessoa mais importante em minha vida,
minha amiga e querida mãe, Neuraci

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente a Deus por está sempre presente em meu coração, ajudando-me a vencer os obstáculos de minha vida.

Agradeço a toda minha família que sempre torceu pelo meu crescimento, em particular, agradeço a minha mãe, que com muito esforço lutou para oferecer a mim a melhor educação possível e por ser, para mim, um exemplo de mãe e mulher batalhadora. Agradeço aos meus tios e tias por esta sempre me apoiando e pelo apoio financeiro durante toda minha vida escolar.

Agradeço ao grande amor de minha vida, Luciano, pelo apoio e por todo o amor que tem disponibilizado a mim. A Núbia Petronilio e Auréa Petronilio pela grande amizade durante esses 10 anos.

Agradeço ao meu orientador, Jesus Carlos da Mota, não só pela orientação, mas pela disponibilidade, paciência e amizade e pelo enriquecimento matemático que me proporcionou durante a graduação e mestrado.

Agradeço a todos os meus colegas de mestrado e graduação pela amizade e pelo conhecimento compartilhado. Em especial, à Adriana Araujo Cintra, Arianny Grasielly Baião Malaquias, Darlene Rodrigues de Melo e Flávia Cristina da Silva que se tornaram mais que amigas, se tornaram-se minhas irmãs e cuja amizade levarei por toda a minha vida.

A todos os professores e funcionários do IME-Ufg pelo incentivo, pelo conhecimento compartilhado e pela amizade.

Enfim, agradeço ao CNPq pelo apóio financeiro.

A matemática é o alfabeto no qual Deus escreveu o universo.

Galileu Galilei,

.

Resumo

Lima, Lidiane dos Santos Monteiro. **Problemas de Riemann para um Sistema Simétrico de Duas Leis de Conservação**. Goiânia, 2010. 61p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Nesta dissertação determinamos as soluções do problema de Riemann para um sistema de duas leis de conservação escrito na forma normal segundo a classificação de Schaeffer-Shearer, em [9].

Através de mudanças de variáveis, Schaeffer-Shearer determinaram a forma normal para um sistema não linear de duas leis de conservação com um ponto umbílico isolado no espaço de estados. A forma normal consiste de um sistema de duas equações, com funções de fluxo quadráticas homogêneas que dependem apenas de dois parâmetros. Também em [9] foram determinadas quatro regiões distintas no plano dos parâmetros, denotadas por I, II, III e IV, onde, variando o par de parâmetros em cada região, as curvas de onda que compõem a solução do problema de Riemann tem a mesma configuração.

Nesta dissertação consideramos o caso em que o par de parâmetros pertence a região IV, e ainda no caso particular em que um dos parâmetros é nulo. Neste caso, o clássico critério de Lax para admissibilidade dos choques (soluções descontínuas), em geral, é suficiente para se obter unicidade de solução. Embora, para alguns estados iniciais, é necessário admitir na solução também os chamados choques compressivos, que não satisfazem o critério de Lax.

Palavras-chave

Leis de conservação, problemas de Riemann, sistemas hiperbólicos.

Abstract

Lima, Lidianne dos Santos Monteiro. **Riemann Problems for a Symmetrical System of Two Conservation Laws**. Goiânia, 2010. 61p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

In this dissertation we describe the solutions to the Riemann problem for a system of two conservation laws written in the normal form according to classification of Schaeffer-Shearer in [9].

Through changes of variables Schaeffer-Shearer determined the normal form for a nonlinear system of two conservation laws with an isolated umbilical point in state space. The normal form consists of a system of two equations, with homogeneous and quadratic functions of flow that depend only on two parameters. Also in [9] were established four distinct regions in terms of parameters, denoted by I, II, III and IV, in which varying pair of parameters in each region, the curves of waves that make up the solution of the Riemann problem have the same configuration.

In this dissertation we consider the case in which the pair of parameters belongs to region IV, and in the particular case in which one of the parameters is null. In this case, the classic Lax criterion for admissibility of shocks (discontinuity solutions) generally is sufficient to obtain uniqueness of solution. Although, for some initial states, it is necessary to admit in solution also the called compressive shocks, which do not satisfy the Lax criterion.

Keywords

Conservation laws, Riemann problems, hyperbolic systems.

Sumário

Lista de Figuras	12
Introdução	14
1 Preliminares	16
2 Forma Normal para um Sistema de Leis de Conservação	27
2.1 Sistema Simétrico	31
3 Curvas de onda	38
3.1 Curva de Rarefação	39
3.2 Curva de choque	41
3.3 Curvas de Onda	46
4 Solução do problema de Riemann	48
4.1 Solução para U_L sobre o semi-eixo u positivo.	49
4.2 Solução para $U_L \in A_1$	50
4.3 Solução para U_L sobre raio $\theta = \theta_*$	53
4.4 Solução para $U_L \in A_2$	54
4.5 Solução para U_L sobre o semi-eixo u negativo.	56
4.6 Solução para $U_L = (0, 0)$	57
Conclusão	58
Referências Bibliográficas	60

Lista de Figuras

1.1	(a)-Características em uma onda de rarefação no plano- (x, t) . (b)-Gráfico de uma solução típica de (1.1)-(1.2) por uma rarefação com t fixo.	20
1.2	(a)-Característica em uma onda de choque no plano- (x, t) . (b)-Gráfico típico da solução de (1.1)-(1.2) por um choque com t fixo.	21
1.3	(a)-Choque-1 no plano- (x, t) . (b)-Choque-2 no plano- (x, t) .	22
1.4	(a)-Choque expansivo-1 no plano- (x, t) . (b)-Choque expansivo-2 no plano- (x, t) .	23
1.5	(a)-Choque totalmente compressivo no plano (x, t) . (b)-Choque totalmente expansivo no plano (x, t) .	23
1.6	Choque de cruzamento no plano (x, t) .	24
1.7	(a)- Choque transporte a direita no plano (x, t) . (b)-Choque transporte a esquerda no plano (x, t) .	24
1.8	(a)-Representação de uma solução no espaço (x, t) por uma onda composta-RC- i . (b)- Representação de uma solução no espaço (x, t) por uma onda composta-CR- i .	25
1.9	Representação das ondas elementares no espaço (x, t) ao longo de uma curva de onda conectando U_L a U_R .	26
2.1	Regiões I, II, III e IV	31
3.1	Regiões A_1 e A_2 determinadas pelo raio $\theta = \theta_*$.	39
3.2	Legenda para figuras do Capítulo 3 e 4.	39
3.3	Curvas integrais na região IV. As setas indicam o sentido crescente dos autovalores ao longo da curva.	40
3.4	(a)-Curva de Hugoniot e tipos de choques para $U_L = (u_L, 0)$, $u_L > 0$. (b)-Curva de Hugoniot e tipos de choques para $U_L \in A_1$.	43
3.5	(a)-Curva de Hugoniot e tipos de choques para U_L sobre o raio $\theta = \theta_*$. (b)-Curva de Hugoniot e tipos de choques para $U_L \in A_2$.	45
3.6	(a)-Curva de Hugoniot e tipos de choques para U_L na parte negativa do eixo u . (b)-Curva de Hugoniot e tipos de choques para $U_L = (0, 0)$.	46
3.7	(a)-Curvas de onda para U_L no semi eixo- u positivo. (b)-Curvas de onda para U_L no semi eixo- u negativo.	46
3.8	(a)-Curvas de onda para $U_L \in A_1$. (b)-Curvas de onda para A_2 .	47
4.1	Curva de onda-1 por U_L e curva de onda-2 para trás a partir de U_R .	49
4.2	(a)-Regiões R_1 e R_2 . (b)-Solução no espaço de estado para U_L no semi eixo- u .	50
4.3	(a)-Regiões $R_1, \dots, R_7$. (b)-Solução no espaço de estado para $U_L \in A_1$.	52

4.4	(a)-Regiões $R_1, \dots, R_7$. (b)-Solução no espaço de estado para U_L sobre o raio $\theta = \theta^*$.	54
4.5	(a)-Regiões $R_1, \dots, R_7$. (b)-Solução para $U_L \in A_2$.	56
4.6	(a)-Regiões R_1 e R_2 . (b)-Solução para U_L no semi-eixo negativo.	57
4.7	Solução para $U_L = (0, 0)$.	58

Introdução

Esta dissertação é baseada principalmente em [2].

Sistemas de leis de conservação tem fundamental importância em diversos problemas na área de matemática aplicada e, em especial, em dinâmica dos fluidos.

Por exemplo, o escoamento de óleo, água e gás, através de um reservatório petrolífero é modelado por um sistema de duas leis de conservação [2, 5], da forma

$$\begin{cases} u_t + f(u, v)_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ v_t + g(u, v)_x = 0, \end{cases} \quad (0.1)$$

onde $u = u(x, t)$, $v = v(x, t)$, $0 \leq u, v \leq 1$, são as saturações de duas das fases, a saturação da outra fase é dada por $w = 1 - u - v$. As funções f e g são denominadas funções de fluxo do escoamento.

O conjunto dos estados (u, v) tais que $0 \leq u + v \leq 1$, é denominado triângulo das saturações.

Um modelo bem conhecido na literatura é o chamado modelo de Corey, ver por exemplo [5], onde as funções de fluxo são não lineares, em que o sistema (0.1) possui um único ponto umbílico no interior do triângulo das saturações. Um ponto umbílico é um ponto onde as velocidades características coincidem e a matriz jacobiana do sistema é diagonalizável.

A solução do problema de Riemann para o modelo de Corey para dados iniciais numa vizinhança do umbílico, mesmo para aproximações quadráticas das funções de fluxo em torno do ponto umbílico, ainda hoje não é completamente conhecida.

A forma normal determinada em [9] foi baseada no modelo de Corey, com funções de fluxo quadráticas em que o sistema (0.1) reduz-se ao sistema

$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{2}(au^2 + 2buv + v^2)_x = 0, \\ v_t + \frac{1}{2}(bu^2 + 2uv)_x = 0. \end{cases} \quad (0.2)$$

onde a e b são os dois parâmetros reais.

Vários artigos tratam da solução do problema de Riemann para o Sistema (0.2) com o par de parâmetros variando nas regiões I, II, III e IV, ver por exemplo [3, 4, 8, 1, 2].

Nesta dissertação determinamos a solução do problema de Riemann para o Sistema (0.2), quando (a, b) pertence a região IV e ainda, no caso particular em que $b = 0$. Isto é, determinamos a solução do seguinte problema:

$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{2}(au^2 + v^2)_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ v_t + (uv)_x = 0, \end{cases} \quad (0.3)$$

$$U_0(x) = \begin{cases} U_L, & \text{se } x < 0 \\ U_R, & \text{se } x > 0, \end{cases} \quad (0.4)$$

onde $U_L = (u_L, v_L)$ e $U_R = (u_R, v_R)$ são estados constantes no plano de estados (u, v) .

Para cada par U_L, U_R em $\mathbb{R}^2$, a solução é dada através de uma sequência de ondas elementares, rarefações (soluções contínuas), choques (soluções descontínuas) e compostas, satisfazendo o critério de compatibilidade geométrica, o qual estabelece que as velocidades das ondas elementares devem ser crescentes da esquerda para direita no espaço físico- (x, t) .

Para obter unicidade de solução, usamos o critério de Lax, que relaciona a velocidade de propagação da descontinuidade, com as velocidades características à direita e à esquerda da descontinuidade pelas conhecidas desigualdades de Lax, [10].

Com esses critérios, a solução como uma sequência de ondas conectando U_L a U_R pode não ser única, mas a solução definida no espaço físico (x, t) é única e depende continuamente dos dados iniciais.

No Capítulo 1, seguindo [11] e [10], descrevemos alguns resultados da teoria geral de problemas de Riemann para sistemas de Leis de conservação, tais como, a definição de solução fraca, ondas de choque, ondas de rarefação e curvas de onda. Além disso, descrevemos o critério de entropia de Lax e a condição de compatibilidade geométrica.

No Capítulo 2 fizemos um resumo da forma normal introduzida por Schaeffer e Shearer em [9]. Também nesse capítulo, estudamos algumas propriedades do Sistema (0.3), principalmente algumas referentes às curvas integrais dos autovetores e curvas de choques. Essas propriedades são úteis na construção da solução do problema. As principais referências usadas neste capítulo são [9, 2].

No Capítulo 3, a partir da construção das ondas elementares de rarefações, choques e compostas, construímos as curvas de onda que compõem a solução problema de Riemann. Aqui, seguimos [2] e usamos o software [6].

No Capítulo 4, usando as curvas de onda, construímos a solução do problema de Riemann. Variando os estados iniciais U_L, U_R no espaço de estados, ilustramos as soluções através de vários diagramas, conforme Figuras 4.2(a)-4.7.

Preliminares

Neste capítulo apresentamos alguns resultados gerais sobre um sistema de leis de conservação.

Um sistema de leis de conservação unidimensional é um sistema da forma

$$U_t + F(U)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R} \text{ e } t > 0, \quad (1.1)$$

onde $U = (u_1, \dots, u_n)$ é o vetor das quantidades conservadas e $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é a função de fluxo destas quantidades conservadas, definidas em um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Cada $U \in \Omega$ é denominado estado do sistema.

Um problema de Riemann para o sistema (1.1) consiste do próprio sistema, juntamente com o dado inicial

$$U(x, 0) = U_0(x) = \begin{cases} U_L, & \text{se } x < 0 \\ U_R, & \text{se } x > 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

com U_L e U_R estados constantes em Ω .

Definição 1.1 O sistema (1.1) é dito hiperbólico em Ω se os autovalores, $\lambda_1(U), \dots, \lambda_n(U)$ da matriz jacobiana $dF(U)$, de F , são reais para todo $U \in \Omega$. Se além de reais, os autovalores são distintos em Ω , dizemos que (1.1) é estritamente hiperbólico em Ω . Um ponto U em Ω_* é dito umbílico para o sistema (1.1) se existem dois autovalores λ_i e λ_j tais que $\lambda_i(U_*) = \lambda_j(U_*)$ e a matriz $dF(U_*)$ é diagonalizável.

A partir de agora vamos supor que (1.1) é hiperbólico e que os autovalores de $dF(U)$ estão ordenados da forma $\lambda_1(U) \leq \dots \leq \lambda_n(U)$.

Definição 1.2 As curvas no plano (x, t) definidas por

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_i(U(x, t)), \quad i = 1, \dots, n$$

são denominadas curvas características de (1.1), e os autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ velocidades características.

Sabe-se que um problema de valor inicial para um sistema de leis de conservação, mesmo para dado inicial de classe C^1 pode não ter solução de classe C^1 para todo $t \geq 0$ (Capítulo 15, páginas 241-244 em [10]). Com o objetivo de obter solução definida em todo $t \geq 0$, introduz-se o conceito de solução fraca.

Definição 1.3 *Uma solução fraca para o sistema (1.1), com condição inicial $U_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, é uma função $U \in L^1_{loc}(\mathbb{R} \times [0, \infty), \mathbb{R}^n)$ que satisfaz a seguinte equação integral*

$$\iint_{t \geq 0} (U \varphi_t + F(U) \varphi_x) dx dt + \int_{t=0} U_0(x) \varphi(x, 0) dx = 0 \quad (1.3)$$

para toda $\varphi : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ e de suporte compacto, onde a integral é tomada componente a componente.

Proposição 1.4 *Se $U(x, t)$ é uma solução fraca de classe C^1 de (1.1)-(1.2), então U é também uma solução clássica de (1.1)-(1.2).*

Prova. Como a demonstração é feita para cada componente do sistema (1.1) basta provar para uma lei de conservação.

Seja u solução fraca de classe C^1 do problema (1.1)-(1.2), com $n = 1$ e $F = f$. Então para toda $\varphi : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ e suporte compacto no retângulo $R = [a, b] \times [0, T]$ tem-se

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{t \geq 0} [u \varphi_t + f(u) \varphi_x] dx dt - \int_{t=0} u_0(x) \varphi(x, 0) dx \\ &= \int_a^b \int_0^T [u \varphi_t + f(u) \varphi_x] dx dt - \int_a^b u_0(x) \varphi(x, 0) dx. \end{aligned}$$

Integrando por partes e observando que $\varphi(a, t) = \varphi(b, t) = \varphi(x, 0) = \varphi(x, T) = 0$ tem-se

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b [u(x, T) \varphi(x, T) - u(x, 0) \varphi(x, 0)] dx - \int_a^b \int_0^T u_t \varphi dt dx + \\ &\quad \int_0^T [f(u(b, t)) \varphi(b, t) - f(u(a, t)) \varphi(a, t)] dt - \int_0^T \int_a^b f(u)_x \varphi dt dx \\ &= - \int_a^b \int_0^T u_t \varphi dt dx - \int_0^T \int_a^b f(u)_x \varphi dx dt \\ &= - \int_a^b \int_0^T [u_t + f(u)_x] \varphi dx dt \\ &= - \iint_{t \geq 0} [u_t + f(u)_x] \varphi dx dt. \end{aligned}$$

Pelo lema de Dubois-Reymond temos que

$$u_t + f(u)_x = 0.$$

Resta mostrar que u satisfaz a condição inicial $u(x, 0) = u_0(x)$. De fato, para toda φ de suporte compacto no retângulo $[a, b] \times [0, \infty)$ temos,

$$\int_a^b \int_0^T [u_t + f(u)_x] \varphi dx dt = 0.$$

Integrando por partes e subtraindo de (1.3) temos,

$$\int_a^b [u(x, 0) - u_0(x, 0)] \varphi(x, 0) dx = 0.$$

Logo

$$u(x, 0) = u_0(x, 0).$$

□

A equação (1.3) impõe restrições sobre a solução de (1.1)-(1.2) nas curvas de descontinuidade. Mais especificamente sejam $U(x, t)$ solução fraca de (1.1)-(1.2) e $\Gamma : t = t(x)$ uma curva em $t \geq 0$, tal que U tenha uma descontinuidade do tipo salto sobre Γ . Então, usando o teorema da divergência, mostra-se que em todo ponto P de Γ vale a igualdade,

$$-s(U_+ - U_-) + F(U_+) - F(U_-) = 0, \quad (1.4)$$

onde $s = \frac{dx}{dt}$ é a velocidade de propagação da descontinuidade,

$$U_+ = \lim_{(x,t) \rightarrow P} U(x, t), \quad (x, t) \text{ à direita de } \Gamma,$$

e

$$U_- = \lim_{(x,t) \rightarrow P} U(x, t), \quad (x, t) \text{ à esquerda de } \Gamma.$$

A equação (1.4) é denominada condição de salto de Rankine-Hugoniot.

Definição 1.5 A curva de Hugoniot por um estado U_- em Ω , denotada por $H(U_-)$, é o conjunto dos estados U em Ω , tais que existe $s \in \mathbb{R}$ satisfazendo a condição (1.4), ou seja,

$$H(U_-) = \{U \in \mathbb{R}^n : -s(U - U_-) + F(U) - F(U_-) = 0\}.$$

Em geral, a solução do problema de Riemann (1.1)-(1.2) é dada por uma sequência de ondas elementares do tipo rarefações, choques e compostas, definidas a seguir, de tal modo que as velocidades destas onda sejam crescentes da esquerda para à direita no plano (x, t) .

Ondas de Rarefação

Seja $U(x, t)$ uma solução de classe C^1 de (1.1). Para todo $\alpha > 0$ a função $V(x, t) = U(\alpha x, \alpha t)$ é também uma solução. Assim esperamos que a solução U seja função apenas da razão $\frac{x}{t}$, ou seja, mantém-se constante ao longo de retas pela origem.

Substituindo $U(x, t) = U(\xi)$, $\xi = \frac{x}{t}$, em (1.1), obtemos

$$[dF(U(\xi)) - \xi I]U'(\xi) = 0, \quad (1.5)$$

onde $(\cdot)'$ denota a derivada em relação a ξ . Neste caso, se $U'(\xi) \neq 0$, então $U'(\xi)$ é um autovetor de $dF(U)$ associado ao autovalor $\lambda = \xi$. Assim, as soluções de classe C^1 de (1.1) estão sobre as curvas integrais do campo de autovetores de $dF(U)$ e devem satisfazer as equações

$$U'(\xi) = r_i(U(\xi)), \quad (1.6)$$

$$\lambda_i(U(\xi)) = \xi, \quad (1.7)$$

onde $r_i(U)$ é um autovetor de dF associado ao autovalor λ_i .

O autovetor $r_i(U)$ é referido como i -ésimo campo característico de (1.1).

Definição 1.6 Consideremos os estados $U_L \in \Omega$ e U_R sobre a curva integral do i -ésimo campo característico por U_L . Uma onda de rarefação da família- i , ou simplesmente uma rarefação- i , do problema (1.1)-(1.2), conectando os estados U_L à esquerda e U_R à direita é uma solução fraca $U(x, t)$ de (1.1)-(1.2), tal que U está sobre esta curva integral e a i -ésima velocidade característica $\lambda_i(U)$ é crescente quando U varia no sentido de U_L para U_R .

Definição 1.7 A condição de $\lambda_i(U(\frac{x}{t})) = \frac{x}{t}$ ser crescente da esquerda para a direita no plano (x, t) entre $\lambda_i(U_L)$ e $\lambda_i(U_R)$ é denominada de condição de compatibilidade geométrica para uma rarefação- i .

Para (x, t) pertencente ao leque $\lambda_i(U_L) < \frac{x}{t} < \lambda_i(U_R)$, $t > 0$, $U(x, t)$ pode ser calculada invertendo a função $\lambda_i(U(\frac{x}{t}))$. Portanto, a i -ésima onda de rarefação conectando U_L a U_R é dada por

$$U(x, t) = \begin{cases} U_L, & \text{se } x \leq \lambda_i(U_L)t \\ \lambda_i^{-1}(\frac{x}{t}), & \text{se } \lambda_i(U_L)t < x < \lambda_i(U_R)t, \\ U_R, & \text{se } x \geq \lambda_i(U_R)t. \end{cases}$$

A Figura 1.1(a) ilustra as retas características no caso de uma onda de rarefação, e a Figura 1.1(b) ilustra uma solução típica conectando U_L e U_R para $t > 0$ fixo.

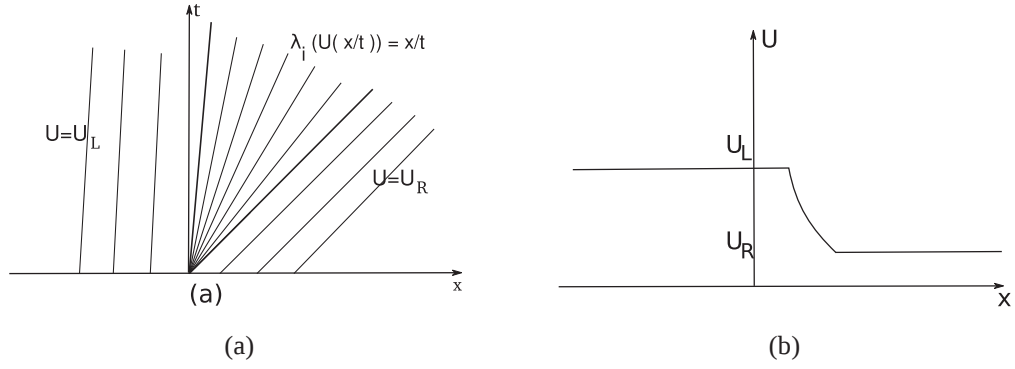


Figura 1.1: (a)-Características em uma onda de rarefação no plano- (x,t) . (b)-Gráfico de uma solução típica de (1.1)-(1.2) por uma rarefação com t fixo.

Definição 1.8 Uma curva de rarefação- i por um estado U_L em Ω é o conjunto dos estados U em Ω que podem ser conectados a U_L por uma onda de rarefação- i .

Definição 1.9 O conjunto dos estados $U \in \Omega$ tais que $\nabla \lambda_i(U) \cdot r_i(U) = 0$ é denominado conjunto de inflexão relativo a i -ésima família característica.

O conjunto de inflexão da i -ésima família é formado pelos pontos críticos da i -ésima velocidade característica restrita às curvas integrais do respectivo campo característico.

Ondas de Choque

Definição 1.10 Uma onda de choque conectando os estados U_L e U_R é uma solução fraca do problema (1.1)-(1.2), com uma descontinuidade de salto da forma

$$U(x,t) = \begin{cases} U_L, & \text{se } x < st \\ U_R, & \text{se } x > st, \end{cases}$$

onde s é a velocidade de propagação da descontinuidade e U_L , U_R e s satisfazem a condição de Rankine-Hugoniot (1.4).

Quando necessário denotamos a velocidade de propagação da descontinuidade da onda de choque conectando os estados U_L e U_R por $s(U_L, U_R)$.

Nas figuras a seguir as características são representadas por semiretas cheias no plano- (x,t) , onde as setas indicam o sentido de crescimento de t . Os choques são representados por semiretas tracejadas com inclinações $\frac{dx}{dt} = s$.

A Figura 1.2(a) ilustra as retas características e a reta de choque no semiplano $t \geq 0$ para o problema (1.1)-(1.2) e a Figura 1.2(b) ilustra o gráfico de solução típica por onda de choque para um valor de $t > 0$ fixo.

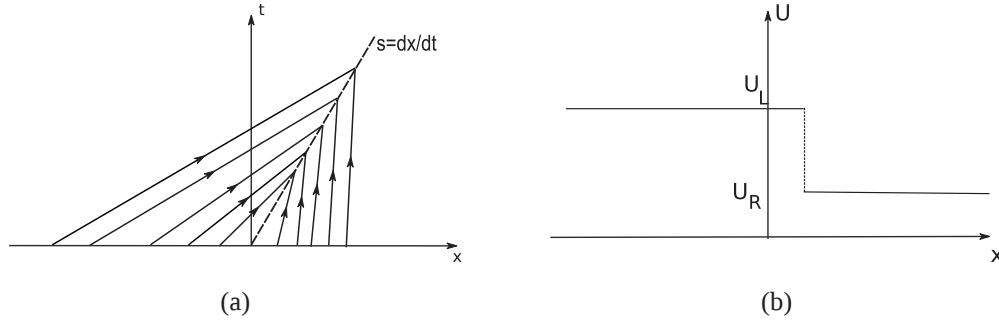


Figura 1.2: (a)-Característica em uma onda de choque no plano- (x, t) . (b)-Gráfico típico da solução de (1.1)-(1.2) por um choque com t fixo.

Somente a condição (1.4), em geral, não garante a unicidade de solução do problema de Riemann, conforme mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 1.11 As funções

$$U_1(x, t) = (u_1(x, t), v_1(x, t)) = \begin{cases} (0, 0), & \text{se } x < \frac{t}{2} \\ (1, 1), & \text{se } x > \frac{t}{2}, \end{cases}$$

$$U_2(x, t) = (u_2(x, t), v_2(x, t)) = \begin{cases} (0, 0), & \text{se } x \leq 0, \\ (\frac{x}{t}, \frac{x}{t}), & \text{se } 0 < x < t, \\ (1, 1), & \text{se } x \geq t, \end{cases}$$

$x \in \mathbb{R}, t \geq 0$, são soluções fracas do seguinte problema:

$$\begin{cases} u_t + (\frac{v^2}{2})_x = 0, \\ v_t + (\frac{u^2}{2})_x = 0, \end{cases}$$

$$U(x, 0) = \begin{cases} U_L = (0, 0), & \text{se } x < 0 \\ U_R = (1, 1) & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

$x \in \mathbb{R}, t > 0$.

Na tentativa de se obter a unicidade da solução do problema de Riemann para um sistema de leis de conservação são introduzidas restrições sobre as soluções fracas. Tais restrições são denominadas condições de entropia. O nome entropia é proveniente de um problema da dinâmica dos gases, onde para se obter as soluções fisicamente relevantes, foram introduzidas restrições sobre a entropia do sistema.

Nesta dissertação usamos o critério de entropia, introduzido por P. Lax em [7], o qual é definido através de desigualdades entre a velocidade do choque e as velocidades características dos dois lados do choque. Aqui restringimos a definição para um sistema

com apenas duas equações, que é a que será usada nesta dissertação, mas a definição pode ser estendida para sistemas com mais de duas equações.

Definição 1.12 Critério de Entropia de Lax:

Uma onda de choque do problema (1.1)-(1.2), conectando os estados U_L e U_R , com velocidade s , satisfaz o critério de entropia de Lax se

$$\begin{aligned}\lambda_1(U_R) < s < \lambda_1(U_L), \\ s < \lambda_2(U_R),\end{aligned}\tag{1.8}$$

ou

$$\begin{aligned}\lambda_2(U_R) < s < \lambda_2(U_L) \\ \lambda_1(U_L) < s.\end{aligned}\tag{1.9}$$

Um choque satisfazendo (1.8) é denominado choque-1 de Lax e satisfazendo (1.9) choque -2 de Lax.

O critério de Lax pode ser muito restritivo no sentido de que dependendo dos estados U_L e U_R o problema de Riemann pode não ter solução. Assim outros tipos de choques podem ser considerados.

Listamos abaixo todos os possíveis tipos de choques que podem aparecer na solução de um problema de Riemann para um sistemas de duas equações, além do choque -1 e do choque-2 de Lax.

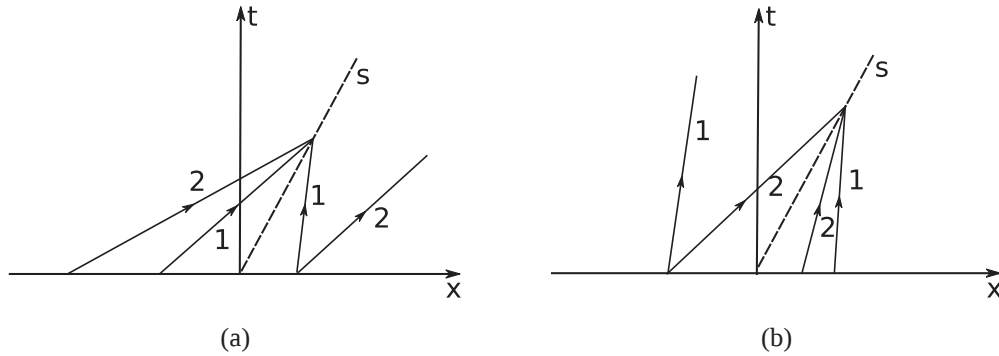


Figura 1.3: (a)-Choque-1 no plano- (x,t) . (b)-Choque-2 no plano- (x,t) .

Choque expansivo-1: (Ver Figura 1.4(a))

$$\begin{aligned}\lambda_1(U_L) < s < \lambda_2(U_L) \\ s < \lambda_1(U_R).\end{aligned}$$

Choque expansivo-2: (Ver Figura 1.4(b))

$$\lambda_2(U_L) < s$$

$$\lambda_1(U_R) < s < \lambda_2(U_R).$$

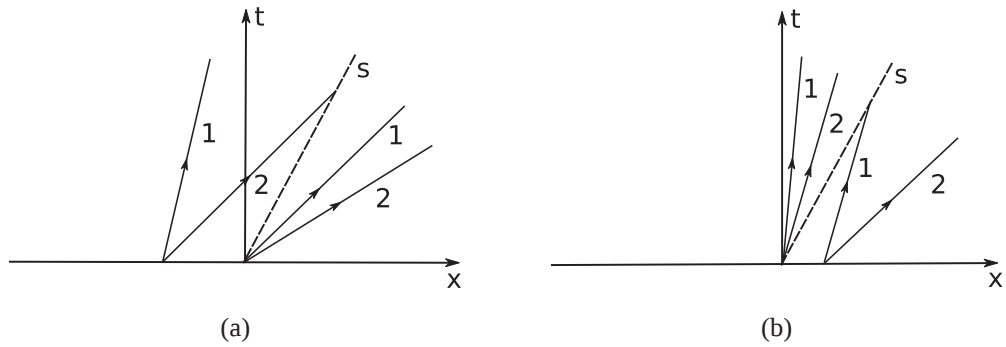


Figura 1.4: (a)-Choque expansivo-1 no plano- (x, t) . (b)-Choque expansivo-2 no plano- (x, t) .

Choque Compressivo: (Ver Figura 1.5(a))

$$\lambda_2(U_R) < s < \lambda_1(U_L)$$

Choque totalmente expansivo: (Ver Figura 1.5(b))

$$\lambda_2(U_L) < s < \lambda_1(U_R)$$

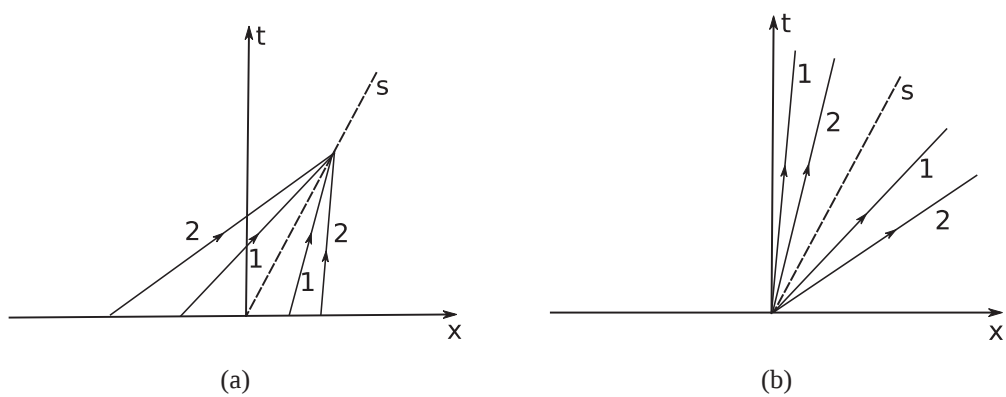


Figura 1.5: (a)-Choque totalmente compressivo no plano (x, t) . (b)-Choque totalmente expansivo no plano (x, t) .

Choque de cruzamento: (Ver Figura 1.6)

$$\lambda_1(U_L) < s < \lambda_2(U_L)$$

$$\lambda_1(U_R) < s < \lambda_2(U_R).$$

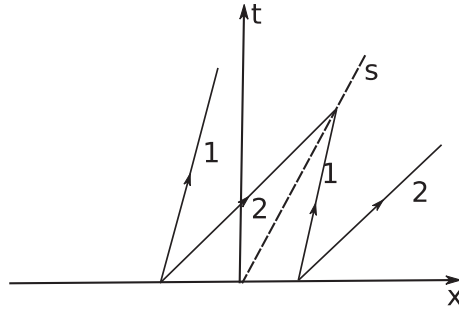


Figura 1.6: Choque de cruzamento no plano (x, t) .

Transporte a direita: (Ver figura 1.7(a))

$$s < \lambda_1(U_L)$$

$$s < \lambda_1(U_R).$$

Transporte a esquerda: (Ver figura 1.7(b))

$$\lambda_2(U_L) < s$$

$$\lambda_2(U_R) < s.$$

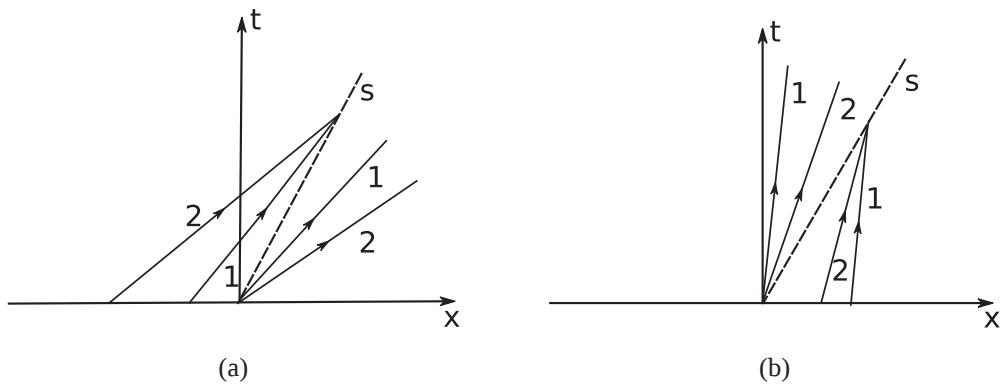


Figura 1.7: (a)- Choque transporte a direita no plano (x, t) . (b)- Choque transporte a esquerda no plano (x, t) .

Ondas Compostas

As ondas compostas aparecem na solução do problema de Riemann quando o sistema deixa de ser genuinamente não linear, conforme definição a seguir.

Definição 1.13 O i -ésimo campo característico de $DF(U)$ é genuinamente não linear em um conjunto $\Omega' \subset \Omega$, se $\nabla \lambda_i(U) \cdot r_i(U) \neq 0$ para todo $U \in \Omega'$, onde “ $\cdot$ ” denota o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$.

O sistema é dito genuinamente não linear em Ω' , se todos os seus campos característicos são genuinamente não lineares em Ω' .

As ondas compostas podem ser de dois tipos: rarefação seguida de choque, ver Figura 1.8(a), ou choque seguido de rarefação, ver 1.8(b).

Definição 1.14 Uma onda composta do tipo rarefação-choque da família- i , ou simplesmente uma onda composta-RC- i conectando os estados U_L e U_R em Ω é formada por uma rarefação- i conectando U_L à um estado intermediário U_M sobre a curva integral do i -ésimo campo característico, seguida por um choque- i conectando U_M a U_R , de tal modo que a velocidade característica final da rarefação $\lambda_i(U_M)$, seja igual a velocidade do choque $s(U_M, U_R)$.

Definição 1.15 Uma curva composta do tipo rarefação-choque por um estado inicial U_L , denotada por $C_i(U_L)$, associada ao i -ésimo campo característico, é o conjunto de todos os estados U_R que podem ser conectados a U_L por uma onda composta-RC- i .

Uma composta do tipo choque-rarefação é definida de modo semelhante.

Definição 1.16 Uma onda composta do tipo choque-rarefação da família- i , ou simplesmente uma composta-CR- i conectando os estados U_L e U_R em Ω é formada por um choque- i conectando U_L à um estado intermediário U_M sobre a curva de choque por U_L , seguido por uma rarefação- i conectando U_M à U_R , de tal modo que a velocidade característica inicial da rarefação $\lambda_i(U_M)$, seja igual a velocidade do choque $s(U_L, U_M)$.

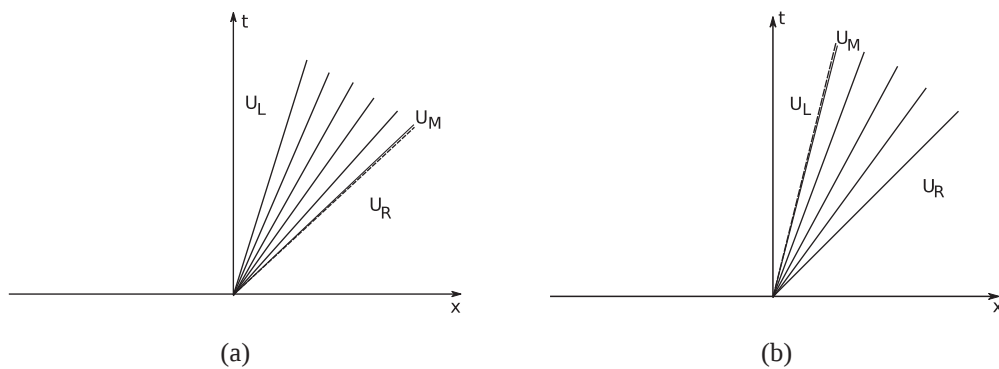


Figura 1.8: (a)-Representação de uma solução no espaço (x, t) por uma onda composta-RC- i . (b)- Representação de uma solução no espaço (x, t) por uma onda composta-CR- i .

Para o propósito dessa dissertação não é necessário definir uma curva composta do tipo choque-rarefação. No seu lugar definimos a curva de fronteira- i que é formada pelos pontos intermediários U_M da definição 1.16.

Definição 1.17 *Uma curva de onda por um estado inicial U_L associada a i -ésima família característica, denotada por $W_i(U_L)$, é o conjunto dos estados $U \in \Omega$ que podem ser conectados a U_L por uma onda de rarefação, ou por uma onda de choque ou por uma onda composta, associada à i -ésima família característica, de tal modo que para cada U as velocidades características ao longo das ondas de rarefação e a velocidades dos choques ao longo das ondas de choque sejam crescente ao se conectar U_L a U , no espaço físico (x, t) .*

Geometricamente a curva de onda $W_i(U_L)$ é formada pela união de curvas de rarefação, curvas de choque e compostas da família- i .

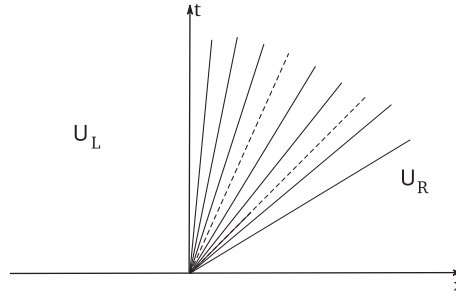


Figura 1.9: Representação das ondas elementares no espaço (x, t) ao longo de uma curva de onda conectando U_L a U_R .

No próximo capítulo descrevemos de modo resumido como obter a forma normal para um sistema de leis de conservação com um ponto umbílico isolado no espaço de estados.

Forma Normal para um Sistema de Leis de Conservação

Consideremos o Sistema (0.1) na forma vetorial,

$$U_t + F(U)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad t > 0, \quad (2.1)$$

onde $U = (u, v) \in \mathbb{R}^2$ e $F = (f, g) : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é de classe $C^2(\Omega)$.

Suponhamos que (2.1) possua um ponto umbílico isolado U_* em Ω . A fórmula de Taylor de F , de segunda ordem, em torno de U_* é dada por

$$F(U) = F(U_*) + dF(U_*)(U - U_*) + Q(U_*)(U - U_*) + R(U), \quad (2.2)$$

onde $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma forma quadrática homogênea e $R(U)$ representa o resto.

Mudando $F(U)$ para $F(U) - F(U_*)$ eliminamos o termo constante $F(U_*)$ de (2.2). Por hipótese $dF(U_*)$ é diagonalizável, assim vamos considerar o caso particular em que $dF(U_*) = \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Fazendo $x' = x - \lambda t$, $t' = t$ eliminamos o termo linear de (2.2). Por fim trocando U por $U - U_*$ levamos o ponto umbílico U_* para a origem e a Equação (2.2) se reduz a

$$F(U) = Q(U) + R(U).$$

No que se segue, $M_{(2 \times 2)}$ denota o conjunto das matrizes reais 2×2 .

Proposição 2.1 A matriz

$$dF(U) = \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}$$

tem autovalores iguais e dF é diagonalizável se e somente se $f_u - g_v = g_u = f_v = 0$.

Prova. Observamos que uma matriz $M \in M_{(2 \times 2)}$ tem autovalores iguais e é diagonalizável, se e somente se

$$M - \frac{1}{2}(\text{tr} M)I = 0.$$

De fato, se M tem autovalores iguais e é diagonalizável, então existe uma base β , que diagonaliza M . Assim podemos considerar nessa base que

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Portanto, $M - \frac{1}{2}(\text{tr}M)I = 0$.

Por outro lado, se $M - \frac{1}{2}(\text{tr}M)I = 0$, então $M = \frac{1}{2}(\text{tr}M)I$ e assim M possui autovalores iguais e é diagonalizável.

Para $M = dF(U)$ temos que

$$dF - \frac{1}{2}(\text{tr}dF)I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(f_u - g_v) & f_v \\ g_u & -\frac{1}{2}(f_u - g_v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

se e somente se $f_u - g_v = g_u = f_v = 0$. □

Neste capítulo, a partir de agora, vamos considerar o Sistema (0.1) com funções de fluxo aproximadas por polinômios quadráticos homogêneos da forma,

$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{2}(a_1u^2 + 2b_1uv + c_1v^2)_x = 0, \\ v_t + \frac{1}{2}(a_2u^2 + 2b_2uv + c_2v^2)_x = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

e dados iniciais da forma,

$$U_0(x) = \begin{cases} U_L = (u_L, v_L), & \text{se } x < 0 \\ U_R = (u_R, v_R), & \text{se } x > 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

onde, $a_i, b_i, c_i, i = 1, 2$, são parâmetros reais.

Agora, observamos que se $S \in M_{(2 \times 2)}$ é constante e invertível e U é uma solução fraca de (2.1),(2.4), com F quadrática homogênea, então $V = S^{-1}U$ é solução do problema

$$V_t + G(V)_x = 0, \quad (2.5)$$

$$V(x, 0) = \begin{cases} V_L = S^{-1}U_L, & \text{se } x < 0 \\ V_R = S^{-1}U_R, & \text{se } x > 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

com $G(V) = S^{-1}F(SV)$.

Isso motiva a seguinte definição:

Definição 2.2 *Duas funções quadráticas e homogêneas $F, G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ são equivalentes*

se existe uma matriz constante e invertível $S \in M_{2 \times 2}$ tal que

$$G(U) = S^{-1}F(SU), \text{ para todo } U \in \mathbb{R}^2. \quad (2.7)$$

Diremos que dois sistemas da forma (2.3) são equivalentes se suas funções de fluxo são equivalentes.

O seguinte lema mostra que equivalências preservam as curvas de onda.

Lema 2.3 Consideremos um sistema de leis de conservação (2.3) na forma vetorial. A mudança $V = S^{-1}U$, $S \in M_{2 \times 2}$ constante e invertível, que transforma o sistema (2.1) com fluxo F no sistema (2.5) com fluxo $G(V) = S^{-1}F(SV)$, leva onda de choque em onda de choque e onda de rarefação em onda de rarefação.

Prova. Suponhamos que $U(x, t)$ é uma onda de choque do problema (2.3)-(2.4), com F quadrática homogênea, ou seja,

$$U(x, t) = \begin{cases} U_L, & \text{se } x < st, \\ U_R, & \text{se } x > st, \end{cases}$$

e s , U_L e U_R satisfazem a condição de Rankine-Hugoniot

$$-s(U_R - U_L) + F(U_R) - F(U_L) = 0.$$

Se $x < st$, então $U(x, t) = U_L = SV_L$. Aplicando S^{-1} à esquerda temos $V_L = S^{-1}U(x, t) = V(x, t)$.

Se $x > st$, então $U(x, t) = U_R = SV_R$ e portanto $V_R = S^{-1}U(x, t) = V(x, t)$.

Logo,

$$V(x, t) = \begin{cases} V_L, & \text{se } x < st \\ V_R, & \text{se } x > st. \end{cases}$$

Resta mostrar que s , V_L e V_R satisfazem a condição (1.4). De fato,

$$\begin{aligned} -s(U_L - U_R) + F(U_L) - F(U_R) &= \\ -s(SV_L - SV_R) + F(SV_L) - F(SV_R) &= 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Aplicando S^{-1} à esquerda em (2.8) temos,

$$\begin{aligned} -s(V_L - V_R) + S^{-1}F(SV_L) - S^{-1}F(SV_R) &= \\ -s(V_L - V_R) + G(V_L) - G(V_R) &= 0, \end{aligned}$$

pois $S^{-1}F(V) = G(V)$. Portanto a mudança $U \mapsto S^{-1}U$ leva onda de choque de (2.3)-(2.4) em onda de choque de (2.5)-(2.6).

Suponhamos agora, que U é uma onda de rarefação do problema (2.3)-(2.4). Então, $U(x, t) = U(\frac{x}{t})$ é solução da equação ordinária,

$$-\xi U' + dF(U)U' = 0, \text{ onde } \xi = \frac{x}{t}. \quad (2.9)$$

Substituindo $U = SV$ em (2.9) temos,

$$-\xi SV' + dF(SV)SV' = 0 \Rightarrow -\xi V' + S^{-1}dF(SV)SV' = 0.$$

Como $dG(V) = S^{-1}dF(SV)S$ concluímos que

$$-\xi V' + dG(V)V' = 0.$$

Além disso, os autovetores de $dG(V)$ são iguais aos autovetores de $dF(SV) = dF(U)$, pois $dG(V) = S^{-1}dF(SV)S$. Portanto V é uma onda de rarefação de (2.5)-(2.6). $\square$

O teorema seguinte garante que existe uma mudança na variável U que transforma o sistema (2.3), com fluxo quadrático homogêneo com seis parâmetros livres, em um sistema com dois parâmetros livres e que preserva as curvas de onda. A demonstração desse teorema é dada em [9].

Teorema 2.4 *Se $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma aplicação quadrática homogênea tal que a equação (2.1) seja hiperbólica com ponto umbílico isolado $U_0 = (0, 0)$, então existem constantes reais a e b com $a \neq 1 + b^2$, tais que F é equivalente a ∇C , onde*

$$C(x, y) = \frac{1}{3}au^3 + bu^2v + uv^2. \quad (2.10)$$

O Teorema (2.4) mostra que os sistemas (0.2) e (2.3) são equivalentes. Assim, pelo Lema (2.3), as curvas de onda do problema (2.3)-(2.4) são levadas, pela mudança $V = S^{-1}U$, nas curvas de onda do problema (0.2),(0.4).

Pela Proposição (2.1) a matriz jacobiana da aplicação de fluxo, $F(u, v) = \nabla C$ tem autovalores iguais e é diagonalizável se e somente se $a \neq 1 + b^2$. Isso explica porque as constantes a e b do teorema acima são tais que $a \neq 1 + b^2$.

As curvas de onda para U_L perto do ponto umbílico para o problema (0.2),(0.4) dependem dos valores de a e b . Schaeffer e Shearer mostraram em [9], que existem quatro regiões no espaço dos parâmetros (a, b) , denotadas por I, II, III e IV, tais que em cada uma dessas regiões as curvas de onda são topologicamente equivalentes. A fronteira entre as regiões I e II é dada pela parábola $a = \frac{3}{4}b^2$, a fronteira entre as regiões II e III é também uma parábola $a = 1 + b^2$, e a fronteira entre as regiões III e IV é dada pela curva $-32b^4 + b^2(27 + 36(a - 2) - 4(a - 2)^2) + 4(a - 2)^3 = 0$. Note que, ao longo da fronteira

das regiões II e III a matriz jacobiana de $dF(u, v)$ não é diagonalizável, como observado anteriormente.

Um esboço dessas regiões é dado na Figura (2.1).

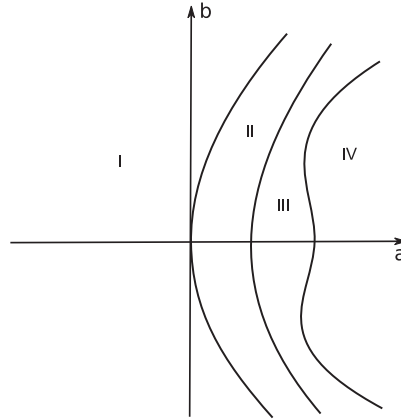


Figura 2.1: Regiões I, II, III e IV

2.1 Sistema Simétrico

Observamos aqui, que a função de fluxo do sistema (0.3)

$$F(u, v) = \left(\frac{1}{2}(au^2 + v^2), uv \right),$$

é definida por $F(u, v) = \frac{1}{2} \nabla C(u, v)$, onde C é a função potencial definida em (2.10), no caso particular em que $b = 0$. Neste caso, o Sistema (0.3) é denominado de sistema simétrico.

As soluções de classe C^1 do Sistema (0.3) são simétricas com relação ao eixo v , no seguinte sentido:

Proposição 2.5 *Se $U = (u, v)$ é solução de classe C^1 de (0.3), então $\tilde{U} = (u, -v)$ e $\hat{U} = (-u(-x, t), v(-x, t))$ também são soluções.*

Prova. Seja $U = (u, v)$ é solução de classe C^1 de (0.3). Então,

$$\begin{aligned} u_t + \frac{1}{2} \{ au^2 + (-v)^2 \}_x &= u_t + \frac{1}{2} \{ au^2 + v^2 \}_x = 0, \\ v_t + \frac{1}{2} \{ -2uv \}_x &= -(v_t + \frac{1}{2} \{ 2uv \}_x) = 0, \end{aligned}$$

ou seja, $\tilde{U} = (u, -v)$ é solução de (0.3). De modo análogo mostra-se que $\hat{U} = (-u(-x, t), v(-x, t))$ também é solução de (0.3). □

Descrevemos a seguir algumas propriedades do sistema simétrico (0.3).

Propriedades do sistema simétrico

Pela Proposição (2.5) as curvas integrais dos campos de autovetores da matriz jacobiana da função de fluxo do sistema (0.3) são simétricas com relação ao eixo- v . Nessa seção mostramos propriedades análogas para as velocidades características, velocidades de choque e curvas de Hugoniot.

Para o sistema (0.3) temos

$$dF(U) = \begin{pmatrix} au & v \\ v & u \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico de $dF(U)$ é dado por

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (a+1)u\lambda + au^2 - v^2.$$

Observamos que,

$$\Delta = (a+1)^2 - 4(au^2 - v^2) = (a-1)^2u^2 + 4v^2 \geq 0, \text{ para todo } (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Logo $dF(U)$ tem autovalores reais,

$$\lambda_1(u, v) = \frac{1}{2}((a+1)u - \sqrt{(a-1)^2u^2 + 4v^2}), \quad (2.11)$$

$$\lambda_2(u, v) = \frac{1}{2}((a+1)u + \sqrt{(a-1)^2u^2 + 4v^2}). \quad (2.12)$$

Além disso, $\lambda_1(U) = \lambda_2(U)$ se e somente se, $u = v = 0$. Portanto o único ponto umbílico é o ponto $(0, 0)$.

A condição de Rankine-Hugoniot com $U_- = U_L$ e $U_+ = U$ é dada por

$$-s(u - u_L) + \frac{1}{2}(au^2 + v^2 - au_L^2 - v_L^2) = 0, \quad (2.13)$$

$$-s(v - v_L) + (uv - u_Lv_L) = 0. \quad (2.14)$$

A curva de Hugoniot por U_L é um polinômio cúbico em u e v , obtido eliminando-se s de (2.13) e (2.14), dado por

$$\begin{aligned} v^3 - v_Lv^2 + ((a-2)u^2 - 2u_Lu - au_L^2 - v_L^2)v - \\ av_Lu^2 + v_L^3 - 2u_Lv_Lu + (a-2)u_L^2v_L = 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Para $U_L = (0, 0)$ temos que

$$H(u, v) = v^3 + (a - 2)u^2v = 0.$$

Se $a < 2$ a curva de Hugoniot pela origem consiste de tres retas,

$$v = 0 \text{ e } v = \pm\sqrt{2-a}u.$$

Em particular, se $a > 2$, que é o caso considerado nessa dissertação, $H(0)$ reduz-se apenas ao eixo $v = 0$.

Se U_R pertence a curva $H(u, v) = 0$, a velocidade do choque conectando U_L a U_R é dada por

$$s(U_L, U_R) = \frac{u_R v_R - u_L v_L}{v_R - v_L}, \text{ se } v_R \neq v_L,$$

ou

$$s(U_L, U_R) = \frac{a}{2}(u_R + u_L), \text{ se } v_R = v_L.$$

Observação 2.6 • Para $U_R = -U_L$ temos

$$\begin{aligned} & -v_L^3 - v_L v_L^2 - ((a-2)u_L^2 + 2u_L u_L - au_L^2 - v_L^2)v_L - av_L u_L^2 + v_L^3 + 2u_L v_L u_L + (a-2)u_L^2 v_L \\ & = -v_L^3 - v_L^3 - ((a-2)u_L^2 + 2u_L^2 - au_L^2 - v_L^2)v_L - av_L u_L^2 + v_L^3 + 2u_L^2 v_L + (a-2)u_L^2 v_L = 0, \end{aligned}$$

ou seja, $-U_L$ pertence a curva de Hugoniot por U_L . Além disso, se $v_L \neq 0$ temos

$$s(U_L, -U_L) = \frac{(-u_L)(-v_L) - u_L v_L}{-v_L - v_L} = \frac{u_L v_L - u_L v_L}{-2v_L} = 0.$$

Caso contrário, temos

$$s(U_L, U_R) = \frac{a}{2}(-u_L + u_L) = 0.$$

• Para $U_R = \tilde{U}_L$ temos

$$\begin{aligned} & v_L^3 - v_L v_L^2 + ((a-2)u_L^2 + 2u_L u_L - au_L^2 - v_L^2)v_L - av_L u_L^2 + v_L^3 + 2u_L v_L u_L + (a-2)u_L^2 v_L \\ & = v_L^3 - v_L^3 + ((a-2)u_L^2 - (a-2)u_L^2 - v_L^2)v_L - av_L u_L^2 + v_L^3 + 2u_L^2 v_L + (a-2)u_L^2 v_L = 0, \end{aligned}$$

$$s(U_L, \tilde{U}_L) = \frac{-u_L v_L - u_L v_L}{v_L + v_L} = \frac{-2u_L v_L}{-2v_L} = u_L.$$

• Temos ainda que $U_R = U_0 = (\frac{1}{a}(u_L - \sqrt{(a-1)^2 u_L^2 + a v_L^2}), 0)$ satisfaz a equação

(2.15) e além disso,

$$s(U_L, U_0) = \frac{\frac{1}{a}(u_L - \sqrt{(a-1)^2 u_L^2 + a v_L^2}) - u_L v_L}{0 - v_L} = \frac{u_L v_L}{v_L} = u_L.$$

Proposição 2.7 Seja $H(U_L)$ a curva de Hugoniot por U_L . Então $\alpha H(U_L)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, é a curva de Hugoniot por αU_L , onde $\alpha H(U_L) = \{\alpha U; U \in H(U_L)\}$. Se $s(U_L, U_R)$ é a velocidade do choque conectando U_L a U_R , então $s(\alpha U_L, \alpha U_R) = \alpha s(U_L, U_R)$. Valem resultados análogos para as curvas integrais e velocidades características.

Prova. Seja U_R pertencente a $H(U_L)$. Então,

$$\begin{aligned} (\alpha v_R)^3 - \alpha v_L (\alpha v_R)^2 + [(a-2)(\alpha u_R)^2 - 2\alpha u_L \alpha u_R - a(\alpha u_L)^2 - (\alpha v_L^2)] \alpha v_R - \\ a \alpha v_L (\alpha u_R)^2 + (\alpha v_L)^3 - 2\alpha u_L \alpha v_L \alpha u_R + (a-2)(\alpha u_L)^2 \alpha v_L = \\ \alpha^3 [v_R^3 - v_L v_R^2 + ((a-2)u_R^2 - 2u_L u_R - a u_L^2 - v_L^2) v_R - a v_L u_R^2 + \\ v_L^3 - 2u_L v_L u_R + (a-2)u_L^2 v_L] = 0. \end{aligned}$$

ou seja, se U_R satisfaz a equação (2.15) para U_L , αU_R satisfaz (2.15) para αU_L .

Além disso,

$$s(\alpha U_L, \alpha U_R) = \frac{\alpha^2 (u_R v_R - u_L v_L)}{\alpha (v_R - v_L)} = \alpha \frac{u_R v_R - u_L v_L}{v_R - v_L} = \alpha s(U_L, U_R).$$

□

Assim a curva integral e a curva de Hugoniot por um estado U_L determinam as correspondentes curva integral e curva de Hugoniot para cada estado U sobre o raio $\theta = \theta_L = \arctan\left(\frac{v_L}{u_L}\right)$.

Proposição 2.8 A reflexão da curva de Hugoniot em relação ao eixo- u ou ao eixo- v é também curva de Hugoniot, isto é, se $U_R \in H(U_L)$ então $\tilde{U}_R \in H(\tilde{U}_L)$ e $\hat{U}_R \in H(\hat{U}_L)$, onde $\tilde{U} = (u, -v)$ e $\hat{U} = (-u, v)$.

Prova. Se $U_R \in H(U_L)$, U_R satisfaz a equação (2.15). Assim para $\tilde{U}_R$ temos

$$\begin{aligned} -v_R^3 + v_L v_R^2 - ((a-2)u^2 - 2u_L u_R - a u_L^2 - v_L^2) v + a v_L u_R^2 - v_L^3 + 2u_L v_L u - (a-2)u_L^2 v_L = 0 \\ -(v^3 - v_L v^2 + ((a-2)u^2 - 2u_L u - a u_L^2 - v_L^2) v - a v_L u^2 + v_L^3 - 2u_L v_L u + (a-2)u_L^2 v_L) = 0. \end{aligned}$$

Logo, $\tilde{U}_R$ pertence a $H(\tilde{U}_L)$. Analogamente, $\hat{U}_R$ pertence a $H(\hat{U}_L)$.

□

Em termos das velocidades características e velocidade de choque temos,

$$\lambda_k(\tilde{U}) = \frac{1}{2}((a+1)u \pm \sqrt{(a-1)^2u^2 + 4v^2}) = \lambda_k(U), \quad k = 1, 2$$

$$\lambda_1(\hat{U}) = \frac{1}{2}(-(a-1)u - \sqrt{(a-1)^2u^2 + 4v^2}) = -\lambda_2(U).$$

Além disso,

$$s(\tilde{U}_L, \tilde{U}_R) = s(U_L, U_R),$$

e

$$s(\hat{U}_L, \hat{U}_R) = \frac{-u_R v_R + u_L v_L}{v_R - v_L} = -s(U_L, U_R).$$

Portanto valem as igualdades,

$$\lambda_k(U) = \lambda_k(\tilde{U}) = -\lambda_{\hat{k}}(\hat{U}) \quad (2.16)$$

$$s(U_L, U_R) = s(\tilde{U}_L, \tilde{U}_R) = -s(\hat{U}_L, \hat{U}_R), \quad (2.17)$$

onde $\hat{k}$ denota a velocidade característica da outra família.

Observamos de (2.16) e (2.17) que o tipo de choque conectando $\tilde{U}_L$ e $\tilde{U}_R$ é o mesmo tipo de choque conectando U_L e U_R e que o tipo de choque conectando $\hat{U}_L$ e $\hat{U}_R$ é o que chamamos de tipo de choque inverso conectando U_L e U_R , por exemplo choque-1 e choque expansivo-2 são inversos, choque-2 e expansivo-1 são inversos, choque compressivo e totalmente expansivo são inversos, transporte a direita e transporte a esquerda são inversos e choque de cruzamento é o inverso dele mesmo.

Portanto, no caso simétrico, toda curva de Hugoniot e tipos de choques são determinados pela curva de Hugoniot e tipos de choque para estados fixos em apenas um quadrante do plano (u, v) .

Finalizamos este capítulo demonstrando três resultados úteis na construção da solução do problema de Riemann (0.3)-(0.4).

Teorema 2.9 Regra do Ponto Médio

Para o sistema (2.3), $U_R \in H(U_L)$ se e somente se, o segmento conectando U_L a U_R é tangente a uma curva integral da família- i no ponto médio do segmento. Nesse caso

$$s(U_L, U_R) = \lambda_i\left(\frac{U_L + U_R}{2}\right)$$

Prova. Observamos que

$$F(U_R) - F(U_L) = \left[\int_0^1 dF(U_L + \tau(U_R - U_L)) d\tau \right] (U_R - U_L)$$

Além do mais, dF é linear pois F é quadrática homogênea. Portanto, $U_R \in H(U_L)$ se e somente se,

$$\begin{aligned}
 0 &= s(U_R - U_L) - F(U_R) + F(U_L) \\
 &= \left[sI - \int_0^1 dF(U_L + \tau(U_R - U_L)) d\tau \right] (U_R - U_L) \\
 &= \left[sI - \int_0^1 \left(dF(U_L) + \tau dF(U_R) - \tau dF(U_L) \right) d\tau \right] (U_R - U_L) \\
 &= \left[sI - \left(dF(U_L)\tau + \frac{\tau^2}{2} dF(U_R) - \frac{\tau^2}{2} dF(U_L) \right)_0^1 \right] (U_R - U_L) \\
 &= \left[sI - \left(dF(U_L) - \frac{1}{2} dF(U_L) + \frac{1}{2} dF(U_R) \right) \right] (U_R - U_L) \\
 &= \left[sI - dF\left(\frac{U_R + U_L}{2}\right) \right] (U_R - U_L),
 \end{aligned}$$

ou seja, $U_R \in H(U_L)$ se e somente se $(U_R - U_L)$ é um autovetor r_i de $dF(U)$ em $\left(\frac{U_R + U_L}{2}\right)$ com autovalor $s = \lambda_i\left(\frac{U_R + U_L}{2}\right)$. $\square$

Teorema 2.10 Regra da Tangência

Para o Sistema (0.3) suponhamos que $U_L \notin H(0)$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes para $U \in H(U_L), U \neq U_L$:

- (i) $H(U_L)$ é tangente a uma curva integral da família- i no ponto U .
- (ii) $\dot{s} = 0$ em U (onde o ponto denota a diferenciação com respeito ao parametro comprimento de arco ao longo de $H(U_L)$).
- (iii) $\lambda_i(U) = s(U_L, U)$.

Prova. Diferenciando

$$s(U - U_L) = F(U) - F(U_L)$$

ao longo de $H(U_L)$ obtemos,

$$\dot{U}(U - U_L) + s\dot{U} = dF(U)\dot{U}$$

ou

$$[dF(U) - sI]\dot{U} = \dot{s}(U - U_L). \quad (2.18)$$

Suponhamos agora que $H(U_L)$ é tangente a uma curva integral da família- i em U . Então, $\dot{U}$ é um autovetor de dF associado a algum autovalor λ_i . Assim de (2.18) temos

$$(\lambda_i - s)\dot{U} = \dot{s}(U - U_L),$$

ou seja,

$$(\lambda_i - s)\dot{U} - \dot{s}(U - U_L) = 0. \quad (2.19)$$

Como $U_L \notin H(0)$, o segmento de reta conectando U_L a U não é tangente a $H(U_L)$ em U e portanto os vetores $\dot{U}$ e $(U - U_L)$ são linearmente independentes e assim de (2.19) temos $\dot{s} = 0$ e $s = \lambda_i$, o que prova que (i) implica (ii) e que (i) implica (iii).

Suponhamos agora que $\dot{s} = 0$ em U . De (2.18) temos

$$[dF(U) - sI]\dot{U} = 0,$$

ou seja, $\dot{U}$ é um autovetor de $dF(U)$ e $s = \lambda_i$ para $i = 1$ ou 2 . Portanto (ii) implica (i) e (iii).

Por fim, suponhamos que $\lambda_i(U) = s(U_L, U)$ e, por absurdo, que $\dot{U}$ não é paralelo ao autovetor r_i de $dF(U)$ e $\dot{s} \neq 0$. Então (2.18) implica que $U - U_L$ é paralelo ao outro autovetor de $dF(U)$. Pela regra do ponto médio, $U - U_L$ também é tangente a curva integral passando pelo ponto $\frac{1}{2}(U_L + U)$. Absurdo pois como $U_L \notin H(0)$ então toda linha passando por U_L é tangente a exatamente uma curva integral. Portanto, $\dot{U}$ é tangente a r_i em U e $\dot{s} = 0$. $\square$

O resultado abaixo é válido para sistemas de n leis de conservação com função de fluxo da forma $F(u, v) = (f_1(u, v), \dots, f_n(u, v))$.

Teorema 2.11 Regra de Choque Triplo

Seja U_L um estado em Ω tal que $H(U_L)$ possui dois pontos U_1 e U_2 tais que $s(U_L, U_1) = s(U_L, U_2) = s_0$. Então U_2 está na curva de Hugoniot por U_1 e $s(U_1, U_2) = s_0$.

Prova. Como U_1 e U_2 pertencem a $H(U_L)$ temos,

$$-s_0(U_1 - U_L) + F(U_1) - F(U_L) = 0 \quad (2.20)$$

e

$$-s_0(U_2 - U_L) + F(U_2) - F(U_L) = 0. \quad (2.21)$$

Subtraindo (2.20) de (2.21) temos,

$$-s_0(U_2 - U_1) + F(U_2) - F(U_1) = 0.$$

Portanto U_2 pertence a $H(U_1)$ e $s(U_1, U_2) = s_0$. $\square$

Curvas de onda

Neste capítulo construímos as curvas de onda do problema de Riemann para o sistema simétrico (0.3), na região IV da Figura 2.1. Notemos que neste caso, $a > 2$ e $b = 0$.

Conforme definido no Capítulo 1, as curvas de ondas são obtidas pela união de curvas rarefação, curvas de choque e curvas composta de uma mesma família. Pelas Proposições (2.5) e (2.8) as curvas de onda por $\tilde{U}_L = (u_L, -v_L) \in \mathbb{R}^2$ são reflexões com relação ao eixo- u das curvas de onda por $U_L = (u_L, v_L)$. Portanto, é suficiente construir as curvas de onda para U_L no semiplano inferior.

Como veremos adiante, os tipos de choque sobre a curva de Hugoniot por um estado U_L mudam quando U_L cruza a linha $\lambda_1 = 0$. Por esse motivo, as curvas de onda das famílias 1 e 2 contém a mesma sequência de ondas para todo U_L em cada um dos setores, ver Figura 3.1.

$$A_1 = \{U : \theta_* < \theta_L < 0\},$$

e

$$A_2 = \{U : -\pi < \theta_L < \theta_*\},$$

onde $\theta_L = \arctan(\frac{v_L}{u_L})$ e $\theta_* = \arctan(-\sqrt{a})$.

Observamos que $\lambda_1(U) = 0$ se e somente se

$$\frac{1}{2}[(a+1) - \sqrt{(a-1)u^2 + 4v^2}] = 0,$$

se e somente se,

$$(a+1) = \sqrt{(a-1)u^2 + 4v^2},$$

se e somente se, $\frac{v}{u} = \pm\sqrt{a}$. Ou seja, o raio $\theta_* = \arctan(-\sqrt{a})$ é um raio no qual $\lambda_1 = 0$.

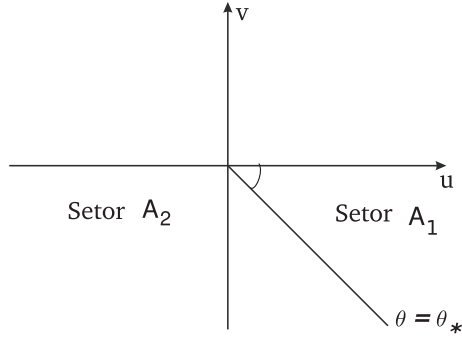


Figura 3.1: Regiões A_1 e A_2 determinadas pelo raio $\theta = \theta_*$.

Nas figuras dos Capítulos 3 e 4 usamos a seguinte legenda:

Legenda

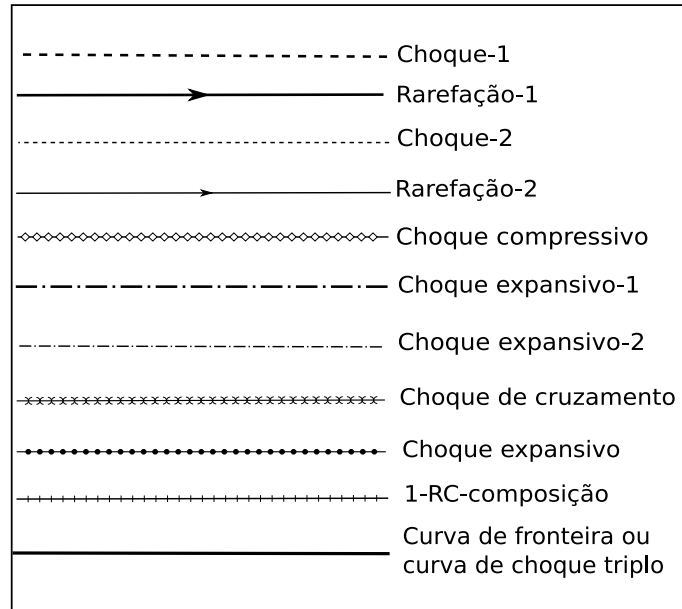


Figura 3.2: Legenda para figuras do Capítulo 3 e 4.

3.1 Curva de Rarefação

Os autovetores da matriz jacobiana da função de fluxo do sistema (0.3) associados aos autovalores λ_1 e λ_2 são dados respectivamente por

$$r_1(u, v) = ((a-1)u - \sqrt{(a-1)^2 u^2 + 4v^2}, 2v),$$

$$r_2(u, v) = ((a-1)u + \sqrt{(a-1)^2 u^2 + 4v^2}, 2v).$$

A seguir, determinamos as curvas integrais dos campos r_1 e r_2 .

Os pontos singulares do campo r_1 , isto é, os pontos onde $r_1(u, v) = (0, 0)$ são da forma $(u, 0)$ com $u \geq 0$. Se $u < 0$, $r_1(u, 0) = 2u(a-1)(1, 0)$, ou seja, o semi-eixo $\alpha(u) = (u, 0)$ com $u < 0$ é uma curva integral de r_1 .

Se $u = u(v) \neq 0$, com $v \neq 0$, é uma curva integral de r_1 , então

$$\frac{du}{dv} = \frac{(a-1)u - \sqrt{(a-1)^2 u^2 + 4v^2}}{2v}.$$

Observamos que $\frac{du}{dv} > 0$ se $v < 0$ e $\frac{du}{dv} < 0$ se $v > 0$, pois $(a-1)u < \sqrt{(a-1)^2 u^2 + 4v^2}$. Isso significa que $u = u(v)$ é crescente para $v < 0$ e decrescente para $v > 0$.

Se $a = 3$ as curvas $u = u(v)$ são parábolas dadas por

$$\gamma_{u_0}(v) = \left(\frac{4u_0^2 - v^2}{4u_0}, v \right),$$

onde u_0 é o ponto no qual a parábola corta o eixo- u .

Se $a > 2$, usando o software [6], vemos que as curvas $u = u(v)$ são parecidas com parábolas centradas no semi-eixo $u > 0$ com concavidade voltada para a esquerda, ver Figura 3.3.

Analogamente, os pontos singulares do campo r_2 são da forma $(u, 0)$ com $u \geq 0$. Se $u > 0$, o semi-eixo $\alpha(u) = (u, 0)$ com $u > 0$ é uma curva integral de r_2 . E para $v \neq 0$ as curvas integrais do campo r_2 são parecidas com parábolas centradas no semi-eixo $u < 0$ e com concavidade voltada para direita, como na Figura 3.3.

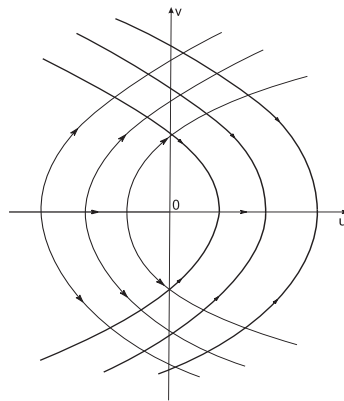


Figura 3.3: Curvas integrais na região IV. As setas indicam o sentido crescente dos autovalores ao longo da curva.

Observamos que a curva integral da família-1 por um ponto $(u, 0)$, $u < 0$, emenda com a curva integral da família-2 no ponto umbílico $(0, 0)$. Esta onda de rarefação também é conhecida como onda de rarefação transicional, [12].

3.2 Curva de choque

Nesta e na próxima seção, usamos a notação $\widehat{MN}$ para indicar a parte de uma curva de onda entre dois pontos M e N . Se $|N| \rightarrow \infty$ ou $|M| \rightarrow \infty$ usamos, respectivamente, as notações $\widehat{M^\infty}$ ou $\widehat{^\infty N}$. Usamos notações análogas para o conjunto de pontos que satisfaçam a regra do choque triplo, denominada curva de choque triplo, e curva de fronteira.

O ponto C nas Figuras 3.4(a), 3.4(b), 3.5(a), 3.5(b), 3.7(a), 4.2(a), 4.2(b), 4.3(a), 4.3(b), 4.4(a), 4.4(b), 4.5(a) e 4.5(b) é o ponto de tangência da curva de Hugoniot por U_L com a curva integral da família-2.

Relembramos que a velocidade de um choque entre dois estados U_1 e U_2 é denotada por $s(U_1, U_2)$.

Se $U_L = (0, 0)$, como visto no Capítulo 2, a curva de Hugoniot por U_L , $H(U_L)$, consiste apenas do eixo- u .

Se $U_L = (u_L, 0)$, $H(U_L)$ consiste do eixo- u e da elipse

$$(a-2)\left(u + \frac{u_L}{a-1}\right)^2 + v^2 = \frac{(a-1)^2}{a-2}u_L. \quad (3.1)$$

Colocando (3.1) na forma canônica vemos que para $2 < a < 3$ o eixo maior da elipse está sobre o eixo- u e para $a > 3$ está sobre o eixo- v .

Se $U_L \neq (0, 0)$ é conveniente escrever a curva de Hugoniot por U_L em coordenadas polares

$$\begin{aligned} u &= u_L + R \cos \varphi, \quad \varphi \in (-\pi, 0), \\ v &= v_L + R \sin \varphi. \end{aligned}$$

Proposição 3.1 *A curva de Hugoniot em coordenadas polares é dada por*

$$R = -2 \frac{u_L(a-1) \sin \varphi \cos \varphi + v_L(\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi)}{\sin \varphi((a-2) \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}. \quad (3.2)$$

Prova. Substituindo

$$u = u_L + R \cos \varphi$$

$$v = v_L + R \sin \varphi$$

na equação (2.15) temos,

$$R^2[2(1-a)u_L \sin \varphi \cos \varphi + 2v_L(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + R \sin \varphi((2-a) \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)] = 0.$$

Portanto,

$$R = -2 \frac{u_L(a-1) \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + v_L(\operatorname{sen}^2 \varphi - \cos^2 \varphi)}{\operatorname{sen} \varphi((a-2) \cos^2 \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi)}.$$

□

Essa parametrização pode ser feita também para sistemas de duas leis de conservação com função de fluxo quadrática da forma (2.3). Neste caso,

$$R = R(\varphi) = -2 \frac{\alpha(\varphi)u_L + \beta(\varphi)v_L}{\alpha(\varphi) \cos \varphi + \beta(\varphi) \operatorname{sen} \varphi},$$

onde,

$$\alpha(\varphi) = \frac{1}{2} \{ (a_2 + b_1) \cos 2\varphi + (b_2 - a_1) \operatorname{sen} 2\varphi + a_2 - b_1 \}$$

e

$$\alpha(\varphi) = \frac{1}{2} \{ (b_2 + c_1) \cos 2\varphi + (c_2 - b_1) \operatorname{sen} 2\varphi + b_2 - c_1 \}.$$

Como $a > 2$,

$$\lim_{\varphi \rightarrow \pi^+} |R(\varphi)| = \lim_{\varphi \rightarrow 0^-} |R(\varphi)| = \infty,$$

e

$$\lim_{\varphi \rightarrow \pi^+} v = \lim_{\varphi \rightarrow 0^-} v = \frac{a}{a-2} v_L.$$

Usando o software [6] vemos que a curva de Hugoniot para U_L não pertencente ao eixo- u com $v_L < 0$ tem a forma de um loop fechado em torno da origem e tem como assíntota a reta horizontal $v = \frac{a}{a-2} v_L$, quando $u \rightarrow \pm\infty$, ver Figura 3.4(b).

Para U_L fora do eixo- u os diversos tipos de choque sobre a curva $H(U_L)$ foram determinados através do software Pakman. Para U_L sobre o eixo- u os tipos de choque foram determinados analiticamente.

Nessa dissertação os únicos tipos de choque admitidos na solução do problema de Riemann são os choque-1, choque-2 e choque compressivo.

Identificamos a seguir as partes da curva de Hugoniot por U_L consistindo de choques admissíveis. Fazemos isto separando nos casos em que U_L pertence aos setores A_1 , A_2 , ao eixo- u e U_L sobre a origem. Para U_L sobre o eixo- u determinamos os tipos de choques analiticamente, e para U_L pertence aos setores A_1 , A_2 usamos o auxílio do software Pakman, [6].

Choques admissíveis para $U_L = (u_L, 0)$, $u_L > 0$.

Ver Figura 3.4(a).

Para $U_R = (u_R, 0)$ temos

$$\begin{cases} s(U_L, U_R) = \frac{1}{2}a(u_R + u_L), \\ \lambda_1(U_R) = u_R, \text{ e } \lambda_2(U_R) = au_R \text{ se } u_R > 0, \\ \lambda_1(U_R) = au_R, \text{ e } \lambda_2(U_R) = u_R, \text{ se } u_R < 0. \end{cases}$$

Para $U_R = (u_R, v_R)$, $v_R \neq 0$, sobre a elipse (3.1), temos

$$\begin{cases} s(U_L, U_R) = \frac{a}{2}u_R, \\ \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}((a+1)u \pm \sqrt{(a-3)^2u_R^2 - 8au_Lu - 4au_L^2}). \end{cases}$$

Comparando as velocidades características com a velocidade do choque entre U_L e U_R temos que o conjunto dos pontos sobre a curva de Hugoniot consistindo de choques-1 é formado pelos arcos inferior e superior da elipse (3.1), união com os pontos sobre o semi-eixo- u a esquerda de $C = (-\frac{a}{a-2}, 0)$. O conjunto de pontos consistindo de choques-2 é formado pelo segmento de reta entre os pontos $A = -\frac{a-2}{a}u_L$ e u_L . E o conjunto de pontos consistindo de choque compressivo é formado pelo segmento de reta entre C e A .

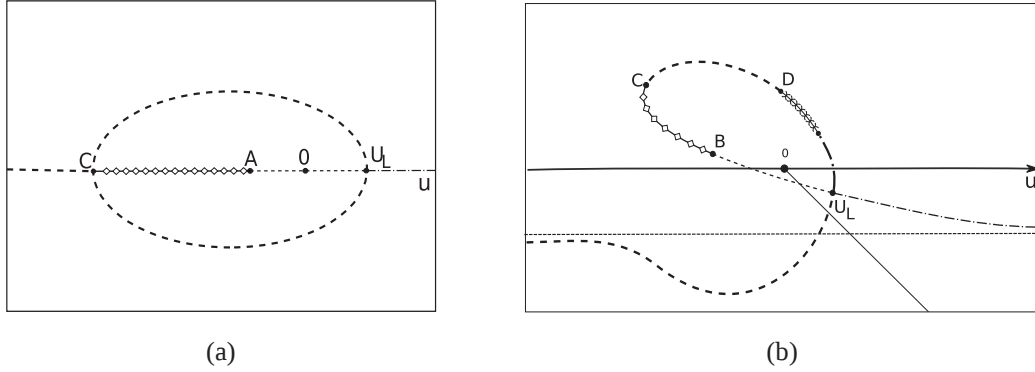


Figura 3.4: (a)-Curva de Hugoniot e tipos de choques para $U_L = (u_L, 0)$, $u_L > 0$. (b)-Curva de Hugoniot e tipos de choques para $U_L \in A_1$.

Choques admissíveis para $U_L \in A_1$

A curva $H(U_L)$ e os tipos de choque para $U_L \in A_1$ são dados na Figura 3.4(b).

Proposição 3.2 *Existem dois pontos B e D sobre a curva de Hugoniot por U_L tais que B , D e U_L satisfazem a regra do choque triplo.*

Prova. Como visto na observação 2.6, $-U_L$ e $\tilde{U}_L$ pertencem a $H(U_L)$ e

$$s(U_L, \tilde{U}_L) = u_L, \quad s(U_L, -U_L) = 0.$$

Além disso como $U_L \in A_1$ temos

$$s(U_L, -U_L) = 0 < \lambda_1(U_L) = \frac{a+1}{2}u_L - \frac{1}{2}\sqrt{(a-1)^2u_L^2 + 2v_L^2} < u_L = s(U_L, \tilde{U}_L).$$

Pelo teorema do valor médio, existe um ponto D entre $\tilde{U}_L$ e $-U_L$ tal que $s(U_L, D) = \lambda_1(U_L)$. Analogamente para $U_0 = (\frac{1}{a}(u_L - \sqrt{(a-1)^2u_L^2 + av_L^2}), 0)$ temos

$$s(U_L, U_0) = u_L,$$

e existe um ponto B entre $-U_L$ e U_0 tal que $s(U_L, B) = \lambda_1(U_L)$. Portanto B , D e U_L satisfazem a regra do choque triplo. $\square$

O conjunto de pontos sobre a curva de Hugoniot para $U_L \in A_1$ consistindo de choques-1 é formado pelos pontos sobre $\widehat{\infty U_L}$ união com os pontos sobre $\widehat{DC}$, o conjunto de pontos consistindo de choques-2 é formado pelo pontos sobre $\widehat{BU_L}$ e o conjunto de pontos consistindo de choque compressivo é formado pelos pontos sobre $\widehat{CB}$.

Choques admissíveis para U_L sobre o raio $\theta = \theta_*$

Para U_L sobre o raio $\theta_L = \theta_*$, os tres estados D , B e C coincidem, ver Figura 3.5(a). Além disso,

$$\lambda_1(U_L) = s(U_L, -U_L) = \lambda_2(-U_L) = 0,$$

logo $C = -U_L$.

Neste caso o conjunto de pontos sobre a curva de Hugoniot consistindo de choques-1 é formado pelos pontos sobre $\widehat{\infty U_L}$, o conjunto de pontos consistindo de choques-2 é formado pelos pontos sobre $\widehat{CU_L}$ e choque compressivo ocorre apenas para $U_R = C$.

Choque admissíveis para $U_L \in A_2$

A curva $H(U_L)$ e os tipos de choques são dados na Figura 3.5(b).

O conjunto de pontos sobre a curva de Hugoniot para $U_L \in A_2$ consistindo de choques-1 é formado pelos pontos sobre $\widehat{\infty U_L}$, o conjunto de pontos consistindo de choques-2 é formado pelos pontos sobre $\widehat{CU_L}$ e o conjunto consistindo de choque compressivo é vazio.

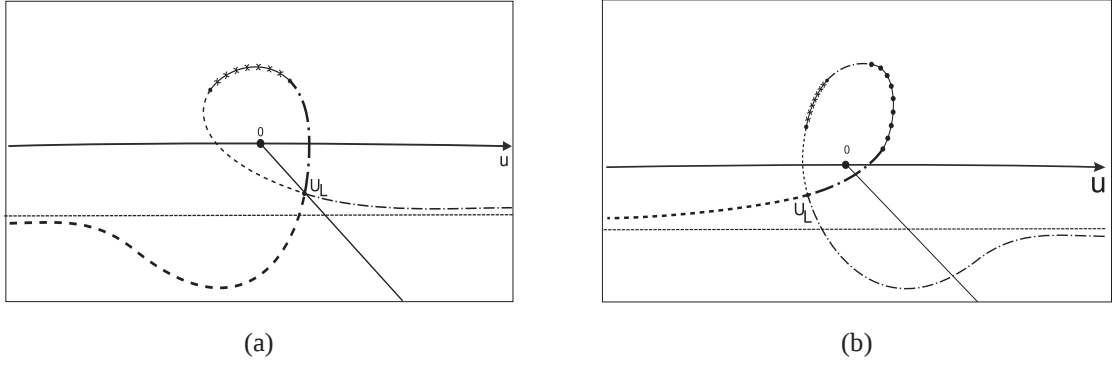


Figura 3.5: (a)-Curva de Hugoniot e tipos de choques para U_L sobre o raio $\theta = \theta_*$. (b)-Curva de Hugoniot e tipos de choques para $U_L \in A_2$.

Choques admissíveis para $U_L = (u_L, 0)$, $u_L < 0$

Ver Figura 3.6(a).

$$\begin{aligned} \text{Para } U_R = (u_R, 0), \quad s(U_L, U_R) &= \frac{1}{2}a(u_R + u_L), \\ \lambda_1(U_R) &= u_R \text{ se } u_R > 0 \text{ e } \lambda_1(U_R) = au_R \text{ se } u_R < 0, \\ \lambda_2(U_R) &= au_R \text{ se } u_R > 0 \text{ e } \lambda_2(U_R) = u_R \text{ se } u_R < 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Para } U_R = (u_R, v_R), \quad v_R \neq 0, \text{ sobre a elipse (3.1),} \quad s(U_L, U_R) &= \frac{a}{2}u_R, \\ \lambda_{1,2} &= \frac{1}{2}((a+1)u \pm \sqrt{(a-3)^2u_R^2 - 8au_Lu - 4au_L^2}). \end{aligned}$$

Portanto, o conjunto dos pontos sobre a curva de Hugoniot consistindo de choque-1 é formado pelos pontos sobre o semi-eixo- u a esquerda de U_L . O conjunto de pontos consistindo de choque-2 e o conjunto de pontos consistindo de choque compressivo são vazios.

Choques admissíveis para $U_L = (0, 0)$

Neste caso a curva de Hugoniot e os tipos de choques sobre a curva são dados na Figura 3.6(b).

O conjunto dos pontos sobre a curva de Hugoniot consistindo de choque-1 é formado pelos pontos sobre o semi-eixo- u a esquerda da origem, o conjunto de pontos consistindo de choque-2 e o conjunto de pontos consistindo de choque compressivo são vazios.

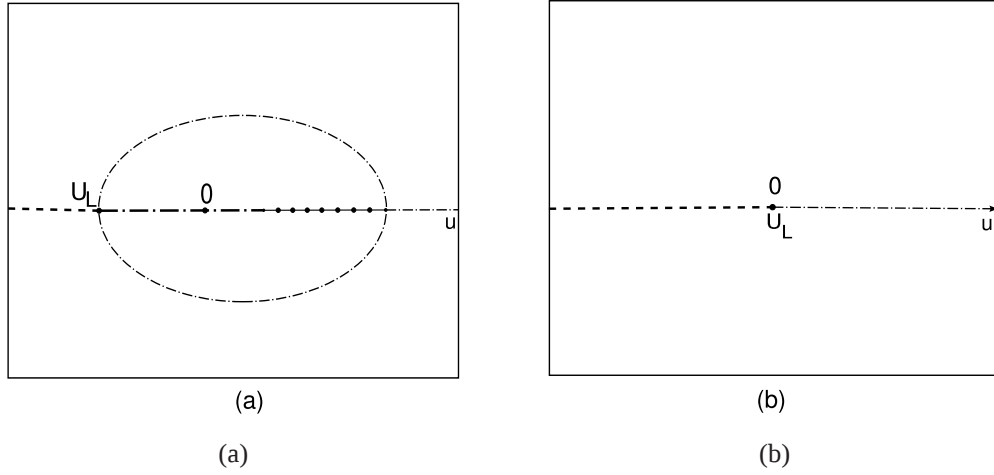


Figura 3.6: (a)-Curva de Hugoniot e tipos de choques para U_L na parte negativa do eixo u . (b)-Curva de Hugoniot e tipos de choques para $U_L = (0, 0)$.

3.3 Curvas de Onda

Para $U_L = (u_L, 0)$, $u_L > 0$ a curva de Hugoniot consiste do eixo- u juntamente com a elipse (3.1), Figura 3.4(a). O conjunto dos pontos sobre a curva de Hugoniot consistindo de choques-1 é formado pelos arcos inferior e superior da elipse (3.1), união com os pontos sobre o semi-eixo- u a esquerda de $C = (-\frac{a}{a-2}, 0)$. O conjunto de pontos consistindo de choques-2 é formado pelo segmento de reta entre os pontos $A = -\frac{a-2}{a}u_L$ e u_L . Além disso, para $u_R > u_L$ temos rarefação-2. A Figura 3.7(a) ilustra as curvas de onda da família-1 e da família-2 para $U_L = (u_L, 0)$, $u_L > 0$.

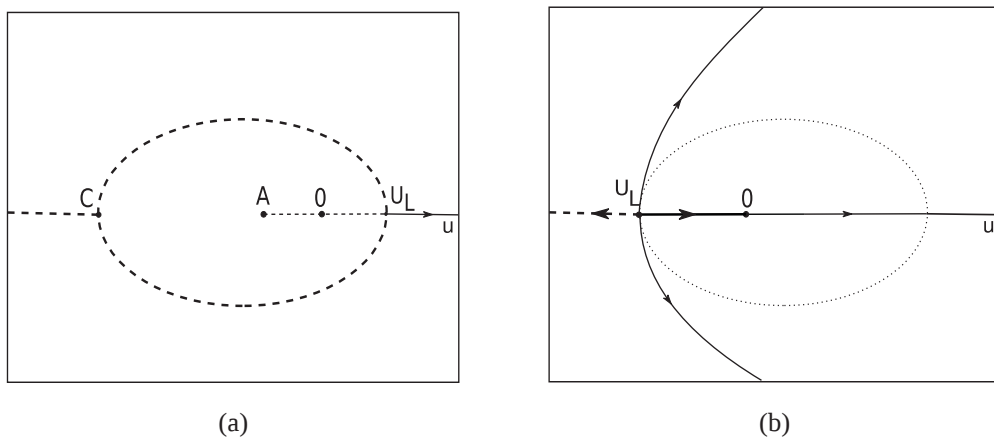


Figura 3.7: (a)-Curvas de onda para U_L no semi eixo- u positivo. (b)-Curvas de onda para U_L no semi eixo- u negativo.

Para $U_L = (u_L, 0)$, $u_L > 0$ a curva de Hugoniot consiste do eixo- u juntamente com a elipse (3.1), Figura 3.7(b). O conjunto dos pontos sobre a curva de Hugoniot consistindo

de choque-1 é formado pelos pontos sobre o semi-eixo- u a esquerda de U_L . O conjunto de pontos consistindo de choque-2 é vazio. Além disso, para $u_L < u_R < 0$ temos curva de rarefação-1 e para $u_R > 0$ temos curva de rarefação-2. A Figura 3.7(b) ilustra as curvas de onda da família 1 e da família 2 para $U_L = (u_L, 0)$, $u_L < 0$.

Para $U_L \in A_1$ a curva de onda da família-1 é dada pela união de segmento de choque-1 união com segmento de rarefação-1 com segmento de e composta-1, $C_1(U_L)$, e a curva de onda da família-2 é a união de segmento de choque-2 com segmento de rarefação-2 por U_L . Ver Figura 3.8(a).

Para $U_L \in A_2$ a curva de onda da família-1 é dada pela união de segmento de choque-1 com segmento de rarefação-1 com segmento de composta-1, $C_1(U_L)$. E a curva de onda-2 é a união de segmento de rarefação-2 por U_L com segmento de choque- 2 união com rarefação-2 por E , onde o ponto E , quando existe, satisfaz $s(U_L, E) = \lambda_2(E)$, ver Figura 3.8(b).

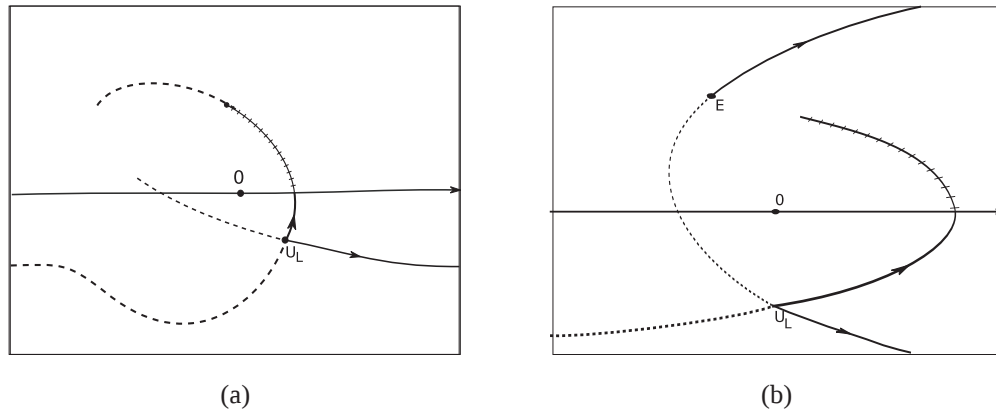


Figura 3.8: (a)-Curvas de onda para $U_L \in A_1$. (b)-Curvas de onda para A_2 .

Os segmentos de rarefação da família-1 e da família-2 estão justificadas na Figura 3.3, e os segmentos de choques-1 e choques-2 para U_L nas regiões A_1 e A_2 justificados nas figuras 3.4(b) e 3.5(b), respectivamente. O segmento de composta foi obtido através do Pakman.

Solução do problema de Riemann

Para identificar os diversos tipos de ondas conectando dois estados U_1 a U_2 usamos as seguintes notações:

$$\begin{aligned}
 U_1 &\xrightarrow{S_i} U_2, && \text{onda de choque-}i \text{ de Lax, } i=1,2. \\
 U_1 &\xrightarrow{R_i} U_2, && \text{onda de rarefação-}i, i=1,2. \\
 U_1 &\xrightarrow{RC-1} U_2, && \text{onda composta RC-1.} \\
 U_1 &\xrightarrow{S_c} U_2, && \text{onda de choque compressivo.} \\
 U_1 &\xrightarrow{CR-2} U_2, && \text{onda composta CR-2.}
 \end{aligned}$$

Construímos a solução do problema de Riemann (0.3)-(0.4) através de vários diagramas, ver Figuras 4.2(a)-4.7.

Fixados dois estados U_L, U_R em $\mathbb{R}^2$, a solução é dada através de uma sequência de ondas elementares, rarefações, choques e compostas, satisfazendo a condição de compatibilidade geométrica (Definição 1.7). A solução é única e depende continuamente dos dados U_L e U_R no sentido $L^1_{loc}(\mathbb{R} \times [0, \infty), \mathbb{R}^2)$. Embora a sequência de ondas no plano de estados (u, v) possa não ser única, ver por exemplo Figura 4.2(b).

Primeiro construímos a curva de onda-1 por U_L , em seguida construímos a curva de onda-2 para trás a partir de U_R até interceptar a curva de onda-1. Denotamos por U_M este ponto de interseção, ver Figura (4.1). A solução consiste da sequência de ondas sobre a curva de onda-1 entre U_L e U_M , seguida pela sequência de ondas sobre a curva de onda-2 entre U_M e U_R .

A sequência de ondas resultante é denominada de solução no espaço de estados (u, v) . A solução $u = u(x, t)$, $v = v(x, t)$ definida no espaço físico (x, t) poderá facilmente ser obtida a partir da solução no espaço de estados.

A solução no espaço de estados é única, a não ser quando U_R está sobre a parte da curva de onda correspondente a choque compressivo ou choque triplo. Mas neste caso, U_L, U_M e U_R satisfazem a regra do choque triplo, o que implica que a solução definida no plano (x, t) é única, pois as velocidades dos choques, $s(U_L, U_M)$, $s(U_R, U_M)$ e $s(U_L, U_R)$,

são iguais.

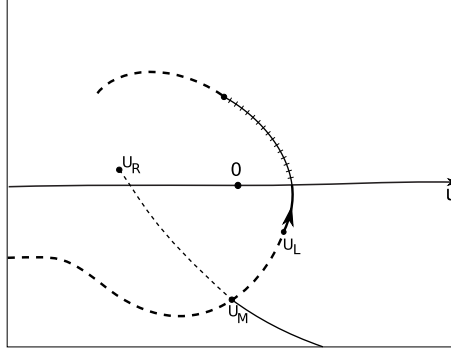


Figura 4.1: Curva de onda-1 por U_L e curva de onda-2 para trás a partir de U_R .

4.1 Solução para U_L sobre o semi-eixo u positivo.

Neste caso, ver Figura 4.2(a), onde os pontos A e C foram definidos na Seção 3.2. Dividimos o plano- (u, v) em duas regiões, R_1 e R_2 , para os estados U_R , onde R_1 é o interior da elipse (3.1) menos o segmento de reta entre C e A e R_2 é o exterior da elipse menos o semi-eixo u , $u > u_L$.

Para U_R sobre o semi-eixo u , $u_R > u_L$, a solução é uma rarefação-2, como mostra a Figura 3.7(a),

$$U_L \xrightarrow{R_2} U_R.$$

Para U_R sobre o segmento $\overline{Au_L}$, a solução é choque-2, como mostra a Figura 3.7(a),

$$U_L \xrightarrow{S_2} U_R.$$

Para U_R sobre o segmento $\overline{CA}$, a solução é um choque compressivo, como mostra a Figura 3.4(a),

$$U_L \xrightarrow{S_c} U_R.$$

Para U_R sobre o semi-eixo u , $u_R < C$, a solução é choque-1, como mostra a Figura 3.7(a),

$$U_L \xrightarrow{S_1} U_R.$$

As soluções para U_R pertencentes as regiões R_1 e R_2 são dadas, respectivamente, por

$$U_R \in R_1 : U_L \xrightarrow{S_1} U_M \xrightarrow{S_2} U_R$$

e

$$U_R \in R_2 : U_L \xrightarrow{S_1} U_M \xrightarrow{R_2} U_R,$$

onde o ponto U_M pertence a parte $\widehat{\infty U_L}$ sobre a curva de Hugoniot por U_L . O choque-1 e o choque-2 são justificados pelas figuras 3.4(b), 3.5(a) e 3.5(b).

A solução para U_R pertencente a região aberta R_2 é dada por,

$$U_R \in R_2 : U_L \xrightarrow{S_1} U_M \xrightarrow{R_2} U_R,$$

onde o ponto U_M pertence a parte $\widehat{\infty U_L}$ sobre a curva de Hugoniot por U_L . A rarefação-2 é justificada na Figura 3.3.

A solução para U_R pertencente a região aberta R_3 , é dada por,

$$U_R \in R_3 : U_L \xrightarrow{R_1} U_M \xrightarrow{R_2} U_R,$$

onde o ponto U_M pertence a curva integral da família-1, como mostra a Figura 4.3(b). A rarefação-1 e a rarefação-2 são justificadas pela Figura 3.3.

A solução para U_R pertencente a região aberta R_4 é dada por,

$$U_R \in R_4 : U_L \xrightarrow{RC-1} U_M \xrightarrow{R_2} U_R,$$

onde o ponto U_M pertence a curva composta $C_1(U_L)$. A curva $RC-1$ é justificada pela Figura 3.8(a).

A solução para U_R pertencente a região aberta R_5 é dada por

$$U_R \in R_5 : U_L \xrightarrow{RC-1} U_M \xrightarrow{S_2} U_R,$$

onde o ponto U_M pertence a curva $C_1(U_L)$.

A solução para U_R pertencente a região aberta R_6 é dada por

$$U_R \in R_6 : U_L \xrightarrow{R_1} U_M \xrightarrow{S_2} U_R,$$

onde o ponto U_M pertence a curva integral da família-1, como mostra a Figura 4.3(b).

A solução para U_R pertencente a região aberta R_7 é dada por,

$$U_R \in R_7 : U_L \xrightarrow{S_1} U_{M_1} \xrightarrow{CR-2} U_R,$$

onde o ponto U_M pertence a parte $\widehat{\infty U_L}$ sobre a curva de Hugoniot por U_L . A curva $CR-2$ é justificada pela Figura 3.8(b).

Para U_R sobre a $\widehat{CB}$ a solução é um choque compressivo,

$$U_L \xrightarrow{S_c} U_R.$$

Para U_R sobre a curva de choque triplo $\widehat{BA}$, existem duas soluções no espaço de

estado,

$$U_L \xrightarrow{R_1} U_{M_1} \xrightarrow{S_2} U_R$$

e

$$U_L \xrightarrow{RC-1} U_{M_2} \xrightarrow{S_2} U_R,$$

porém a solução no espaço físico- (x, t) é única, pois

$$\lambda_1(U_{M_1}) = s(U_{M_1}, U_{M_2}) = s(U_{M_2}, U_R) = s(U_{M_1}, U_R).$$

Obeservamos que para U_R sobre $\widehat{CB}$ existem mais duas soluções, dadas respectivamente, por

$$U_L \xrightarrow{S_1} U_{M_3} \xrightarrow{S_2} U_R$$

e

$$U_L \xrightarrow{S_1} U_{M_4} \xrightarrow{S_2} U_R,$$

ver Figura 4.3(b). No entanto, a solução definida no espaço físico- (x, t) é única, pois

$$s(U_L, U_{M_i}) = s(M_i, U_R) = s(U_L, U_R), \quad i = 1, 2.$$

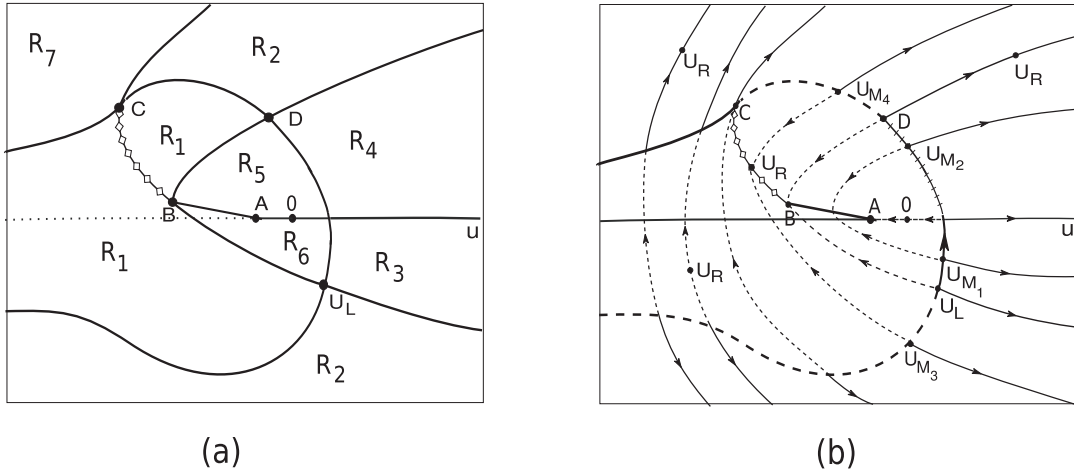


Figura 4.3: (a)-Regiões $R_1, \dots, R_7$. (b)-Solução no espaço de estado para $U_L \in A_1$.

Como o ponto C é a interseção entre $H(U_L)$ e uma curva integral da família-2, pela regra da tangência, temos que $s(U_L, C) = \lambda_2(C)$. O estado C é uma extremidade da curva de fronteira $\widehat{\infty C}$. Isto garante a dependência contínua dos dados iniciais perto de C .

4.3 Solução para U_L sobre raio $\theta = \theta_*$

A curva de Hugoniot $H(U_L)$ é mostrada na Figura 3.5(a). As curvas de onda para as famílias 1 e 2 são mostradas nas figuras 3.7(a), 3.7(b), 3.8(a) e 3.8(b).

Como no caso anterior, dividimos o plano- (u, v) nas regiões $R_1, R_2, \dots, R_7$, conforme Figura 4.4(a).

A solução para U_R pertencente a região aberta R_1 é dada por,

$$U_R \in R_1 : U_L \xrightarrow{S_1} U_M \xrightarrow{S_2} U_R,$$

onde, o estado U_M pertence a parte $\widehat{\infty U_L}$ sobre a curva de Hugoniot por U_L . Os choques 1 e 2 são justificados pelas figuras 3.4(b), 3.5(a) e 3.5(b).

A solução para U_R pertencente a região aberta R_2 é dada por,

$$U_R \in R_2 : U_L \xrightarrow{S_1} U_M \xrightarrow{R_2} U_R,$$

onde o estado U_M pertence a parte $\widehat{\infty U_L}$ sobre a curva de Hugoniot por U_L . A rarefação-2 é justificada pela Figura 3.3.

A solução para U_R pertencente a região aberta R_3 é dada por,

$$U_R \in R_3 : U_L \xrightarrow{R_1} U_M \xrightarrow{R_2} U_R,$$

onde o estado U_M pertence a curva integral da família-1, como mostra a Figura 4.4(b).

A solução para U_R pertencente a região aberta R_4 é dada por,

$$U_R \in R_4 : U_L \xrightarrow{RC-1} U_M \xrightarrow{R_2} U_R,$$

onde o estado U_M pertence a curva composta $RC-1$. A composta $RC-1$ é justificada pela Figura 3.8(a), e a rarefação-2 pela Figura 3.3.

A solução para U_R pertencente a região aberta R_5 é dada por,

$$U_R \in R_5 : U_L \xrightarrow{RC-1} U_M \xrightarrow{S_2} U_R,$$

onde o estado U_M pertence a curva composta $RC-1$ por U_L .

A solução para U_R pertencente a região aberta R_6 é dada por,

$$U_R \in R_6 : U_L \xrightarrow{R_1} U_M \xrightarrow{S_2} U_R,$$

onde o estado U_M pertence a curva integral da família-1 por U_L , como mostra a Figura 4.4(b).

A solução para U_R pertencente a região aberta R_7 é dada por,

$$U_R \in R_7 : U_L \xrightarrow{S_1} U_M \xrightarrow{CR-2} U_R.$$

onde o estado U_M pertence a parte $\widehat{\infty U_L}$ sobre a curva de Hugoniot por U_L . A curva $CR-2$ é justificada pela Figura 3.8(b).

Para U_R sobre a curva de choque triplo $\widehat{CA}$, existem duas soluções no espaço de estado,

$$U_L \xrightarrow{R_1} U_{M_1} \xrightarrow{S_2} U_R$$

e

$$U_L \xrightarrow{RC-1} U_{M_2} \xrightarrow{S_2} U_R,$$

porém a solução no espaço físico- (x, t) é única, pois

$$\lambda_1(U_{M_1}) = s(U_{M_1}, U_{M_2}) = s(U_{M_2}, U_R) = s(U_{M_1}, U_R).$$

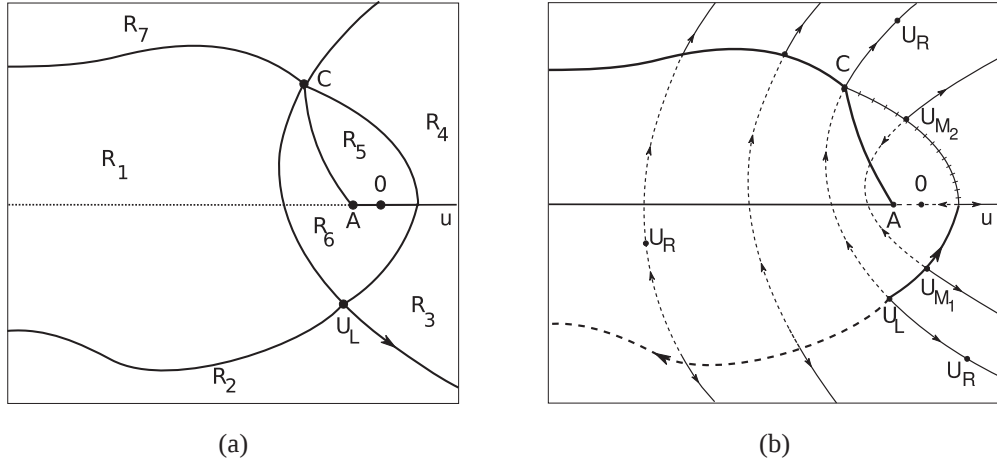


Figura 4.4: (a)-Regiões $R_1, \dots, R_7$. (b)-Solução no espaço de estado para U_L sobre o raio $\theta = \theta^*$.

Como o ponto C é a interseção entre $H(U_L)$ e uma curva integral da família-2, pela regra da tangência, temos que $s(U_L, C) = \lambda_2(C)$. O ponto C é uma extremidade da curva de fronteira $\widehat{\infty C}$. Isto garante a dependência contínua dos dados iniciais perto de C .

4.4 Solução para $U_L \in A_2$

A curva de Hugoniot para $U_L \in A_2$ é dada na Figura 3.5(b).

Neste caso, dividimos o plano- (u, v) para os estados U_R em sete regiões, $R_1, R_2, \dots, R_7$, conforme Figura 4.5(a).

A solução para U_R pertencente a região aberta R_1 é dada por,

$$U_R \in R_1 : U_L \xrightarrow{S_1} U_M \xrightarrow{S_2} U_R,$$

onde o estado U_M pertence a parte $\widehat{\infty U_L}$ sobre a curva de Hugoniot por U_L . Os choques-1 e 2 são justificados pela Figura 3.5(b).

A solução para U_R pertencente a região aberta R_2 é dada por,

$$U_R \in R_2 : U_L \xrightarrow{S_1} U_M \xrightarrow{R_2} U_R,$$

onde o estado U_M pertence a parte $\widehat{\infty U_L}$ sobre a curva de Hugoniot por U_L . A rarefação-2 é justificada pela Figura 3.3.

A solução para U_R pertencente a região aberta R_3 é dada por

$$U_R \in R_3 : U_L \xrightarrow{R_1} U_M \xrightarrow{R_2} U_R,$$

onde o estado U_M pertence a curva integral da família-1 por U_L .

A solução para U_R pertencente a região aberta R_4 é dada por,

$$U_R \in R_4 : U_L \xrightarrow{RC-1} U_M \xrightarrow{R_2} U_R,$$

onde o estado U_M pertence a curva composta $RC-1$ por U_L . A composta $RC-1$ é justificada pela Figura 3.8(b), e a rarefação-2 pela Figura 3.3.

A solução para U_R pertencente a região aberta R_5 é dada por,

$$U_R \in R_5 : U_L \xrightarrow{RC-1} U_M \xrightarrow{S_2} U_R,$$

onde o estado U_M pertence a curva $RC-1$ por U_L .

A solução para U_R pertencente a região aberta R_6 é dada por,

$$U_R \in R_6 : U_L \xrightarrow{R_1} U_M \xrightarrow{S_2} U_R,$$

onde o estado U_M pertence a curva integral da família-1 por U_L , como mostra a Figura 4.5(b).

A solução para U_R pertencente a região aberta R_7 é dada por,

$$U_R \in R_7 : U_L \xrightarrow{S_1} U_{M_1} \xrightarrow{CR-2} U_R,$$

onde o estado U_M pertence a parte $\widehat{\infty U_L}$ sobre a curva de Hugoniot por U_L , como mostra a Figura 4.5(b).

Para U_R sobre a curva de choque triplo $\widehat{FA}$, existem duas soluções no espaço de

estado,

$$U_L \xrightarrow{R_1} U_{M_1} \xrightarrow{S_2} U_R$$

e

$$U_L \xrightarrow{RC-1} U_{M_2} \xrightarrow{S_2} U_R,$$

porém a solução no espaço físico- (x, t) é única, pois

$$\lambda_1(U_{M_1}) = s(U_L, U_{M_2}) = s(U_{M_2}, U_R) = s(U_{M_1}, U_R).$$

Novamente, a dependência contínua dos dados iniciais perto de C é garantida, pois $s(U_L, C) = \lambda_2(C)$.

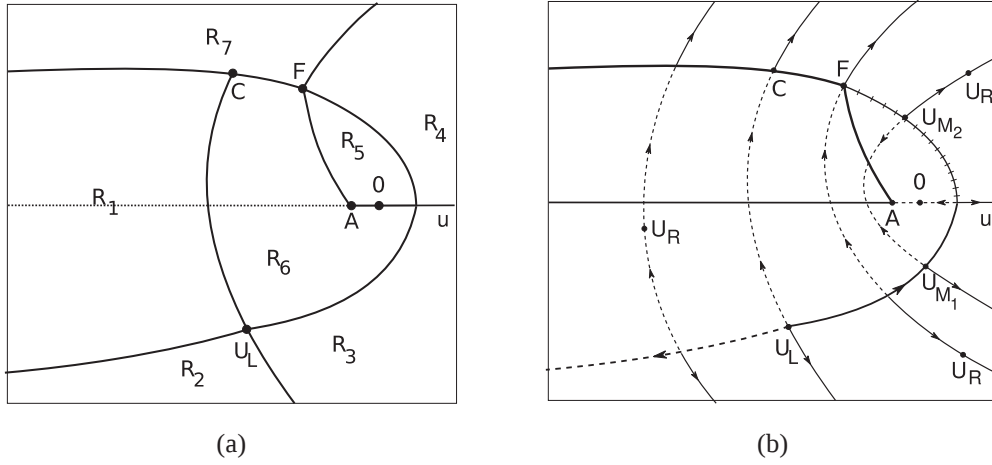


Figura 4.5: (a)-Regiões $R_1, \dots, R_7$. (b)-Solução para $U_L \in A_2$.

4.5 Solução para U_L sobre o semi-eixo u negativo.

Neste caso, ver Figura 4.6(a). A curva de Hugoniot, $H(U_L)$, é dada na Figura 3.6(a).

Dividimos o plano- (u, v) em duas regiões, R_1 e R_2 , para os estados U_R .

Para U_R sobre o eixo u , $u < u_L$, a solução consiste apenas de choque-1, como mostra a Figura 3.6(a),

$$U_L \xrightarrow{S_1} U_R.$$

Para U_R sobre o segmento $\overline{U_L 0}$, a solução consiste apenas de uma rarefação-1, como mostra a Figura 3.7(b),

$$U_L \xrightarrow{R_1} U_R.$$

Para U_R sobre o eixo- u , com $u > 0$ a solução consiste de uma rarefação-1 de U_L

a $U_* = (0,0)$, seguida de uma rarefação-2 de U_* a U_R .

$$U_L \xrightarrow{R_1} U_* \xrightarrow{R_2} U_R.$$

A solução para U_R pertencentes a região R_1 é dada por

$$U_R \in R_1 : U_L \xrightarrow{S_1} U_{M_1} \xrightarrow{R_2} U_R,$$

onde U_{M_1} pertence a curva de choque-1, como mostra a Figura 4.6(b).

A soluções para U_R pertencente a região R_2 é dada por

$$U_R \in R_2 : U_L \xrightarrow{R_1} U_{M_2} \xrightarrow{R_2} U_R,$$

onde U_{M_2} pertence a curva de rarefação-1, como mostra a Figura 4.6(b).

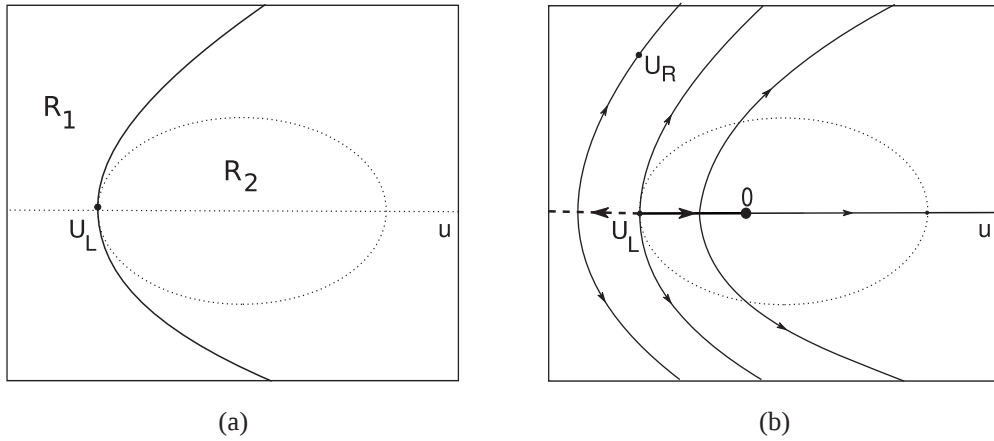


Figura 4.6: (a)-Regiões R_1 e R_2 . (b)-Solução para U_L no semi-eixo negativo.

Finalmente falta a solução para $U_L = (0,0)$, a qual é determinada na próxima seção.

4.6 Solução para $U_L = (0,0)$

A curva de Hugoniot por $U_L = (0,0)$ é mostrada na Figura 3.6(a).

A solução para $U_L = (0,0)$ é mostrada na Figura 4.7

A solução para U_R sobre o eixo- u consiste apenas de um choque-1 se $u_R < u_L = 0$ ou apenas de uma rarefação-2 se $u_R > u_L = 0$.

A solução para qualquer U_R fora do eixo- u é dada por

$$U_L \xrightarrow{S_1} U_M \xrightarrow{R_2} U_R,$$

onde $U_M = (u_M, v_M)$ está sobre o eixo- u , $u_M < 0$, como mostra a Figura 4.7.

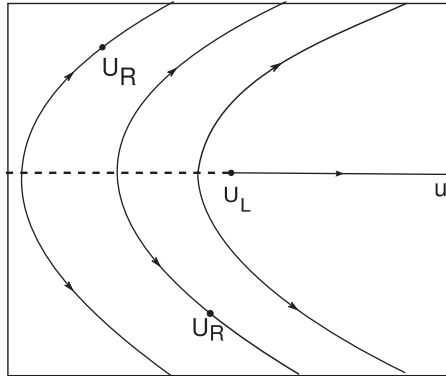


Figura 4.7: Solução para $U_L = (0,0)$.

Conclusão

Determinamos a solução do problema de Riemann (0.3)-(0.4) para quaisquer U_L e U_R no espaço de estados (u, v) através de uma sequência de ondas de rarefação, choque e composta, satisfazendo o critério de compatibilidade geométrica e o critério de entropia de Lax. Para cada par de dados iniciais U_L, U_R , fixo no espaço de estados, a solução como sequência de ondas pode não ser única, no entanto, no espaço físico- (x, t) a solução é única e depende continuamente, no sentido $L^1_{loc}(\mathbb{R} \times [0, \infty), \mathbb{R}^2)$, dos dados iniciais.

Uma continuação desse trabalho, seria estudar o sistema (0.3) nas regiões I, II e III e ainda resolver o problema (0.2) para o caso $a \neq 0$ e $b \neq 0$ nessas regiões. Para (a, b) na região I, a solução pode ser encontrado em [8]. Para o caso simétrico nas regiões II e III a solução pode ser encontrada em [3] e [4], respectivamente.

Sabe-se que para os casos não simétricos nas diversas regiões, o critério de Lax não é suficiente para se obter unicidade de solução. Um critério de admissibilidade também bastante aceito na literatura é o chamado critério de viscosidade, ver por exemplo [5], onde os choque admitidos são limites de solução de um sistema parabólico, com termos viscosos, associado ao sistema original.

Referências Bibliográficas

- [1] S. ŠANIĆ E B. PLOHR, *Shock wave Admissibility for quadratic conservation laws*, J. Differential Equations, 118, pp.293-335, 1995.
- [2] E. ISAACSON, D. MARCHESIN, B. PLOHR E B. TEMPLE, *The Riemann problem near a hyperbolic singularity I*, SIAM J. Appl. Math., 48, pp. 1009-1032, 1988.
- [3] E. ISAACSON, D. MARCHESIN, B. PLOHR E B. TEMPLE, *The Riemann problem near a hyperbolic singularity II*, SIAM J. Appl. Math., 48, pp. 1287-1301, 1988.
- [4] E. ISAACSON, D. MARCHESIN, B. PLOHR E B. TEMPLE, *The Riemann problem near a hyperbolic singularity III*, SIAM J. Appl. Math., 48, pp. 1302-1312, 1988.
- [5] E. ISAACSON, D. MARCHESIN, B. PLOHR E B. TEMPLE, *Multiphase flow models with singular Riemann problems*, Mat. Aplic. Comput., 11, pp. 147-166, 1992.
- [6] D. MARCHESIN, B. PLOHR, *Pakman, software para sistemas hiperbólicos*, software privado desenvolvido no laboratório Fluid, Impa, Rio de Janeiro, 1990.
- [7] P. D. LAX, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws* , Commun. Pure Appl. Math., 10, pp 537-566, 1957.
- [8] M. SHEARER, D. SCHAEFFER, D.MARCHESIN E P. PAES-LEME, *Solution of the Riemann Problem for a prototype 2x2 system of non-strictly hyperbolic conservation laws*, Arch. Rational Mech. Anal., 97, pp. 299-320 1987.
- [9] M. SHEARER E D. SCHAEFFER , *The classification of 2x2 systems of nonstrictly hyperbolic conservation laws, with application to oil recovery*, Comm. Pure Appl. Math., 15, pp. 141-178, 1987.

- [10] SMOLLER, J., *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag, 1980.
- [11] DE SOUZA, A. J. *Wave Structure for a Non Strictly Hyperbolic System of three Conservation Laws*, Mathematical and Computer Modelling, 22, n.9, pp. 1-30, 1995.
- [12] E. ISAACSON, D. MARCHESIN E B. PLOHR *Transitional Waves for Conservation Laws*, SIAM J. Math, Vol. 21, N. 4, pp 837-866, July 1990.