

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

BRUNO RODRIGUES DE FREITAS

Inflexões de Linhas Assintóticas e de Linhas de Curvatura em Superfícies

Goiânia
2010

BRUNO RODRIGUES DE FREITAS

Inflexões de Linhas Assintóticas e de Linhas de Curvatura em Superfícies

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria e Topologia.

Orientador: Prof. Ronaldo Alves Garcia

Goiânia
2010

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
GPT/BC/UFG

F866i Freitas, Bruno Rodrigues de.
Inflexões de linhas assintóticas e de linhas de curvatura em superfícies [manuscrito] / Bruno Rodrigues de Freitas. - 2010.
89 f. : figs.

Orientador: Prof. Dr. Ronaldo Alves Garcia.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, 2010.

Bibliografia.
Inclui lista de figuras.
Apêndices.

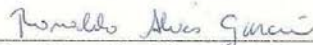
1. Linhas assintóticas. 2. Linhas de curvatura. 3. Superfícies Regradas – Inflexões. I. Título.

CDU: 517.928

BRUNO RODRIGUES DE FREITAS

**INFLEXÕES DE LINHAS ASSINTÓTICAS E DE
LINHAS DE CURVATURA EM SUPERFÍCIES**

Dissertação defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada no dia 19 de outubro de 2010, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



Prof. Dr. Ronaldo Alves Garcia
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca



Profa. Dra. Luciana Maria Dias de Ávila Rodrigues
Departamento de Matemática-UnB



Profa. Dra. Sueli Irene Rodrigues Costa
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica-UNICAMP

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Bruno Rodrigues de Freitas

Graduou-se em Matemática na UFG - Universidade Federal de Goiás. Durante sua graduação, participou de projetos de iniciação científica. Atualmente é professor da Universidade Federal de Goiás.

Aos meus pais por todo amor dedicado a mim e a minha formação.

A minha esposa por todo seu amor e sua compreensão.

A minha filha que tanto amo.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus.

A minha família que sem eles não seria possível a conclusão dessa etapa de minha vida.

Ao meu orientador, pela confiança e principalmente pela paciência.

Ao CNPq pela bolsa de mestrado.

Resumo

Freitas, Bruno Rodrigues de. **Inflexões de Linhas Assintóticas e de Linhas de Curvatura em Superfícies**. Goiânia, 2010. 92p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Pontos quadráticos (ou pontos hiperbólicos especiais) são pontos em que uma superfície pode ser aproximada por uma quádriga até os termos de ordem três. Trataremos de uma conjectura que afirma que toda superfície hiperbólica fechada em $\mathbb{R}P^3$ não tem menos que oito pontos quadráticos distintos. Provaremos um resultado que afirma que; se uma superfície genérica em $\mathbb{R}P^3$ contém um disco hiperbólico delimitado por uma curva parabólica de Jordan, então existe um número ímpar de pontos quadráticos no interior deste disco. Estudamos curvas formadas pelos pontos de inflexão das folheações assintóticas e principais no domínio hiperbólico. Estudamos o comportamento da curva de inflexão da folheação assintótica próxima de um ponto parabólico especial (ponto em que a direção assintótica é tangente a curva parabólica), e o comportamento da curva de inflexão da folheação principal próxima de um ponto umbílico.

Palavras-chave

<Inflexões, Linhas Assintóticas, Linhas de Curvatura>

Abstract

Freitas, Bruno Rodrigues de. <**Inflection of Asymptotic Lines and Lines of Curvature on Surfaces**>. Goiânia, 2010. 92p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Quadratic points (or special hyperbolic points) are points where a surface can be approximated by a quadric to the terms of order three. We will deal with a conjecture that asserts that every closed hyperbolic surface in $\mathbb{R}P^3$ has not less than eight distinct quadratic points. We prove a result which states that; if a generic surface in $\mathbb{R}P^3$ contains a hyperbolic disk bounded by a Jordan parabolic curve, then there is an odd number of quadratic points inside this disc. We study curves formed by the inflection points of asymptotic foliations and principals in the hyperbolic domain. We studied the behavior of the inflection curve of the asymptotically foliation near a special parabolic point (the point where the asymptotic direction is tangent to the parabolic curve), and the behavior of the inflection curve of the principal foliation near a umbilic point.

Keywords

<Inflections, Asymptotic Lines, Lines of Curvature>

Sumário

Lista de Figuras	11
1 Preliminares de Geometria Diferencial	15
1.1 Geometria de Superfícies em \mathbb{R}^3	15
1.2 Geometria de Superfícies em $\mathbb{R}P^3$	25
2 Pontos Parabólicos Especiais	29
2.1 Coleção de Resultados	29
2.2 Curvas Assintóticas, Flecnodal e Parabólica	35
2.3 Discos Hiperbólicos	41
3 Pontos Quadráticos	50
3.1 Pontos Quadráticos e Inflexões	50
3.2 Caracterização de Inflexões	56
3.3 Perturbação do Toro	58
4 Inflexões em Superfícies Regradas	65
4.1 A aplicação de Poincaré	65
4.2 Inflexões	67
4.3 Linhas Assintóticas Fechadas	69
5 Linhas de Curvatura	74
5.1 Inflexões de Linhas de Curvatura	74
5.2 Pontos Umbílicos	82
Referências Bibliográficas	90
A	92

Lista de Figuras

1.1	Linhas assintóticas sobre o toro	24
1.2	Toro de Clifford folheado por linhas assintóticas, os círculos de Villarceau.	28
2.1	Cone de direções principais	31
2.2	Curvas assintóticas, parabólica e flecnodal	34
2.3	Dez pontos parabólicos especiais	35
2.4	Levantamento das curvas flecnodal e parabólica	39
2.5	Configuração entre separatrizes de curvas assintóticas, curvas flecnodal e parabólica	41
2.6	Inclinações da parabólica, flecnodal e separatrizes	41
2.7	Curva parabólica orientada	43
2.8	$r < 0$ e $0 < r < \frac{1}{2}$	44
2.9	$r > \frac{1}{2}$	44
2.10	Configuração com dois pontos parabólicos especiais	45
2.11	$z_{yy}p^2 + 2z_{xy}p + z_{xx} = 0$	46
2.12	Curvas flecnodal e parabólica	46
2.13	Configuração com mais de dois pontos parabólicos especiais	47
2.14	Lema de Morse	48
2.15	Pontos críticos	49
2.16	Conjunto de inflexão na vizinhança da origem	49
3.1	$a_{30} \neq 0$ e $a_{30} = 0$ respectivamente	56
5.1	$a_{12} \neq 0$ e $a_{12} = 0$ respectivamente	76
5.2	Linhas de curvatura na vizinhança de pontos umbílicos Darbouxianos	86

Introdução

Quase cem anos atrás foram descobertos dois teoremas sobre curvas planas regulares simples fechadas e convexas. O primeiro é conhecido como teorema dos quatro vértices: A curvatura de uma curva regular plana fechada, simples e convexa tem ao menos quatro pontos críticos. Estes pontos críticos são os pontos em que os círculos osculadores são tangentes de terceira ordem à curva. O segundo é conhecido como teorema dos seis vértices e trata de cônicas osculadoras: Uma curva regular plana fechada simples convexa tem pelo menos seis pontos distintos em que as cônicas osculadoras são hiper-osculadoras, ou seja, a ordem de aproximação da cônica é maior que quatro. É natural esperar que existem versões multi-dimensionais dos teoremas dos quatro e seis vértices, mas até agora apenas alguns passos foram dados nesta direção. Uma superfície M em $\mathbb{R}P^3$ pode ser aproximada por uma quádrlica em todo ponto até os termos de ordem dois. Chamaremos um ponto $x \in M$ de quádrático se M puder ser aproximada por uma quádrlica em x até ordem três. Trabalharemos com superfícies no espaço projetivo de dimensão três $\mathbb{R}P^3$ e em \mathbb{S}^3 . Dado um espaço vetorial V , o espaço projetivo associado, $P(V)$, consiste dos subespaços uni-dimensionais de V . Se $V = \mathbb{R}^{n+1}$ então $P(V)$ é denotado por $\mathbb{R}P^n$. O espaço $\mathbb{R}P^n$, é o espaço quociente de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ pela relação de equivalência

$$(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \sim (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_{n+1}), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \neq 0.$$

Um ponto projetivo $p \in \mathbb{R}P^n$ é uma classe de equivalência

$$p = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_{n+1}), \quad \lambda \neq 0$$

ou seja, $p = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \lambda p$.

Uma coordenada local natural sobre $\mathbb{R}P^n$ provém do espaço vetorial \mathbb{R}^{n+1} . Se x_0, x_1, \dots, x_n são coordenadas lineares em \mathbb{R}^{n+1} , então $y_i = x_i/x_0$ são chamadas coordenadas afins sobre $\mathbb{R}P^n$; estas coordenadas são definidas na carta $x_0 \neq 0$.

O espaço projetivo $\mathbb{R}P^n$ pode ser pensado como o espaço quociente da esfera unitária $\mathbb{S}^n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1}; |p| = 1\}$ pela relação de equivalência que identifica $p \in \mathbb{S}^n$

com o seu ponto antípoda $A(p) = -p$. Com efeito, cada reta que passa pela origem determina na esfera dois pontos antípodas e a correspondência assim obtida é biunívoca e sobrejetiva.

Geometria de superfícies no espaço projetivo é um clássico objeto de estudo. Consideraremos superfícies não-degeneradas em \mathbb{S}^3 . Isto significa que, em um sistema de coordenadas afins, a segunda forma quadrática da superfície é não-degenerada em todos os pontos; esta condição é independente da escolha de coordenadas afins. Existe uma considerável diferença entre o caso de superfícies em \mathbb{R}^3 e em \mathbb{S}^3 . Em \mathbb{R}^3 as linhas assintóticas não são globalmente definidas por imersões de superfícies orientadas compactas. Isto vem do fato de que nestas superfícies existem sempre pontos elípticos. Em \mathbb{S}^3 as linhas assintóticas podem ser globalmente definidas. O toro padrão $x_0x_3 = x_1x_2$ é um exemplo de uma tal superfície (não-degenerada e com linhas assintóticas globalmente definidas), em coordenadas afins ele corresponde ao parabolóide hiperbólico. Um outro exemplo é o toro de Clifford, $C = \mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{S}^1(r) \subset \mathbb{S}^3$, onde $\mathbb{S}^1(r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\}$ e $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Um estudo de linhas assintóticas no toro de Clifford é realizado em [4].

Seja $M \subset \mathbb{S}^3$ uma superfície não-degenerada. Em cada ponto $x \in M$, temos duas direções tangentes distintas, chamadas direções assintóticas. Estas definem dois campos de direções transversais sobre M e portanto duas folheações. Pode-se escolher coordenadas locais (u, v) de tal forma que as folhas das folheações são dadas por $(u = \text{const.}, v = \text{const.})$. Estas coordenadas são chamadas assintóticas. Um outro motivo de estudarmos linhas assintóticas em superfícies no espaço projetivo é que direções assintóticas são invariantes por transformações projetivas. Tal resultado é demonstrado em [2].

Temos como objetivo estudar inflexões de linhas assintóticas e de linhas de curvatura sobre superfícies do espaço de dimensão três, projetivo ou Euclidiano. Dividimos o trabalho da seguinte forma:

No capítulo 1, damos uma introdução à geometria diferencial. Obtemos as equações das linhas assintóticas e linhas de curvatura, onde linhas de curvatura são estudadas no último capítulo. Damos também uma pequena introdução do espaço projetivo.

No capítulo 2, definimos a curva flecnodal, curva formada pelos pontos de inflexão das linhas assintóticas. Estudamos propriedades qualitativas das curvas flecnodal, das linhas assintóticas e da curva parabólica próximo de um ponto parabólico especial, ponto em que a (única) direção assintótica é tangente a curva parabólica. Neste

capítulo, também provamos que sob certas hipóteses; se uma superfície em \mathbb{R}^3 ou em $\mathbb{R}P^3$ contém um disco hiperbólico delimitado por uma curva de Jordan parabólica, então existe um número ímpar de pontos hiperbólicos especiais no interior deste disco. Pontos hiperbólicos especiais são pontos de inflexão de ambas folheações assintóticas e também são chamados de pontos quadráticos. Este capítulo foi baseado em [14]. O estudo do comportamento das linhas assintóticas próximo de pontos parabólicos é encontrado em [3] e em [5].

No capítulo 3 caracterizamos inflexões pela curvatura geodésica. Consideramos a superfície não degenerada dada pelo toro $x_0x_3 = x_1x_2$. Abordamos a conjectura que afirma que qualquer superfície hiperbólica fechada em $\mathbb{R}P^3$ não tem menos que oito pontos quadráticos distintos. Para isso, consideremos uma perturbação genérica do toro dado acima por uma função duplamente periódica suave $h(u, v)$, e obteremos que os pontos quadráticos são dados em uma primeira aproximação pelas soluções do sistema:

$$(I) \begin{cases} h_{uuu} + h_u = 0 \\ h_{vvv} + h_v = 0. \end{cases}$$

Daremos algumas respostas parciais do número mínimo de soluções do sistema acima. Este capítulo foi baseado em [11].

No capítulo 4, estudamos inflexões e a estabilidade de linhas assintóticas fechadas em uma classe de superfície regrada. Motivados pelos resultados do capítulo 3, estudamos no capítulo 5 inflexões de linhas de curvatura. Consideraremos uma perturbação do toro $x_0x_3 = x_1x_2$ por uma função duplamente periódica suave $h(u, v)$, e obteremos que os pontos de dupla inflexão das folheações principais são dados em uma primeira aproximação pelas soluções do sistema:

$$(II) \begin{cases} h_{uvv} + h_v = 0 \\ h_{vuu} + h_u = 0. \end{cases}$$

Relacionamos as soluções de (I) e de (II). Estudamos também neste capítulo o comportamento das linhas de curvatura e das curvas de inflexão das linhas de curvatura próxima de pontos umbílicos. Esta última parte do capítulo 5 foi baseada em [3].

Preliminares de Geometria Diferencial

1.1 Geometria de Superfícies em \mathbb{R}^3

Este capítulo foi baseado em [1]. Nesta seção trataremos de propriedades básicas de superfícies em \mathbb{R}^3 . Começaremos com uma breve introdução da noção de orientação para superfícies. Dada uma parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ de uma superfície regular S em um ponto $p \in S$, podemos escolher, para cada ponto de $X(U)$, um vetor normal unitário pela regra

$$N(q) = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}(q), q \in X(U). \quad (1-1)$$

Assim, temos uma aplicação diferenciável $N : X(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$ que associa a cada $q \in X(U)$ um vetor normal unitário $N(q)$.

De maneira geral, se $V \subset S$ é um conjunto aberto em S e $N : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável que associa a cada $q \in V$ um vetor normal unitário em q , dizemos que N é um campo diferenciável de vetores normais unitários em V .

Dizemos que uma superfície regular é orientável se ela admite um campo diferenciável de vetores normais unitários definido em toda a superfície. A escolha de tal campo N é chamada uma orientação de S .

Definição 1.1 *Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície com uma orientação N . A aplicação $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ onde N é dado por (1-1) toma seus valores na esfera unitária de \mathbb{R}^3 . A aplicação $N : S \rightarrow S^2$ assim definida, é chamada a aplicação de Gauss de S .*

É imediato verificar que a aplicação de Gauss é diferenciável. A diferencial dN_p de N em $p \in S$ é uma aplicação linear de $T_p S$ em $T_{N(p)} S^2$. Como $T_p S$ e $T_{N(p)} S^2$ são os mesmos espaços vetoriais, dN_p pode ser olhada como uma aplicação linear em $T_p S$.

A aplicação linear $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ opera da seguinte maneira. Para cada curva parametrizada $\alpha(t)$ em S , com $\alpha(0) = p$, consideramos a curva parametrizada $N(\alpha(t)) = N(t)$ na esfera S^2 ; isso equivale a restringir o vetor normal N à curva $\alpha(t)$.

O vetor tangente $N'(0) = dN_p(\alpha'(0))$ é um vetor de T_pS . Ele mede a taxa de variação do vetor normal N restrito à curva $\alpha(t)$, em $t = 0$. No caso das curvas, esta medida é dada por um número, a curvatura. No caso das superfícies, esta medida é caracterizada por uma aplicação linear.

Proposição 1.2 *A diferencial $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$ da aplicação de Gauss é uma aplicação linear auto-adjunta.*

Demonstração. Como dN_p é linear, basta verificar que $\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, dN_p(w_2) \rangle$ para uma base $\{w_1, w_2\}$ de T_pS . Seja $X(u, v)$ uma parametrização de S em p e $\{X_u, X_v\}$ a base associada de T_pS . Se $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma curva parametrizada em S , com $\alpha(0) = p$, temos

$$\begin{aligned} dN_p(\alpha'(0)) &= dN_p(X_u u'(0) + X_v v'(0)) \\ &= \frac{d}{dt} N(u(t), v(t))|_{t=0} \\ &= N_u u'(0) + N_v v'(0); \end{aligned}$$

em particular, $dN_p(X_u) = N_u$ e $dN_p(X_v) = N_v$. Portanto, para provar que dN_p é auto-adjunta, é suficiente mostrar que

$$\langle N_u, X_v \rangle = \langle X_u, N_v \rangle .$$

Para isto, derivamos $\langle N, X_u \rangle = 0$ e $\langle N, X_v \rangle = 0$, em relação a u e v , respectivamente, e obtemos

$$\begin{aligned} \langle N_v, X_u \rangle + \langle N, X_{uv} \rangle &= 0, \\ \langle N_u, X_v \rangle + \langle N, X_{vu} \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$\langle N_u, X_v \rangle = - \langle N, X_{uv} \rangle = \langle N_v, X_u \rangle .$$

□

O fato de ser $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$ uma aplicação linear auto-adjunta nos permite associar a dN_p uma forma quadrática Q em T_pS , dada por $Q(v) = \langle dN_p(v), v \rangle$, $v \in T_pS$.

Definição 1.3 *A forma quadrática II_p , definida em T_pS por $II_p(v) = - \langle dN_p(v), v \rangle$, é chamada a segunda forma fundamental de S em p .*

Vale aqui lembrarmos as fórmulas de Frenet. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco s tal que $\alpha''(s) \neq 0$, $s \in I$. Temos que as fórmulas de Frenet

são:

$$\begin{aligned}t' &= kn, \\n' &= -kt - \tau b, \\b' &= \tau n\end{aligned}$$

onde t, n e b são respectivamente os vetores tangente, normal e binormal a α , k é a curvatura e τ a torção de α . Estas fórmulas serão usadas em alguns fatos seguintes.

Definição 1.4 *Seja C uma curva regular em S passando por $p \in S$, k a curvatura de C em p , e $\cos(\theta) = \langle n, N \rangle$, onde n é o vetor normal a C e N é o vetor normal a S em p . O número $k_n = k \cos(\theta)$ é chamado a curvatura normal de $C \subset S$ em p .*

Em outras palavras, k_n é o comprimento da projeção do vetor kn sobre a normal à superfície em p , com um sinal dado pela orientação N de S em p .

Para dar uma interpretação da segunda forma fundamental II_p , considere uma curva regular $C \subset S$ parametrizada por $\alpha(s)$, onde s é o comprimento de arco de C , com $\alpha(0) = p$. Se indicarmos por $N(s)$ a restrição do vetor normal N à curva $\alpha(s)$, teremos $\langle N(s), \alpha'(s) \rangle = 0$, donde

$$\langle N(s), \alpha''(s) \rangle = - \langle N'(s), \alpha'(s) \rangle .$$

Portanto,

$$\begin{aligned}II_p(\alpha'(0)) &= - \langle dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle \\&= - \langle N'(0), \alpha'(0) \rangle = \langle N(0), \alpha''(0) \rangle \\&= \langle N, kn \rangle (p) = k_n(p).\end{aligned}$$

Em outras palavras, o valor da segunda forma fundamental II_p em um vetor unitário $v \in T_p S$ é igual à curvatura normal de uma curva regular passando por p e tangente a v .

Para cada $p \in S$, existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de $T_p S$ tal que $dN_p(e_1) = -k_1 e_1$, $dN_p(e_2) = -k_2 e_2$. Além disso, k_1 e k_2 ($k_1 \geq k_2$) são o máximo e o mínimo da segunda forma fundamental II_p restrita ao círculo unitário de $T_p S$; isto é, são os valores extremos da curvatura normal em p . Uma prova deste fato pode ser encontrado em [1].

Definição 1.5 *O máximo da curvatura normal k_1 e o mínimo da curvatura normal k_2 são chamadas curvaturas principais em p . As direções correspondentes, isto é, as direções dadas pelos auto-vetores denotados por e_1 e e_2 são chamadas direções principais em p .*

Definição 1.6 Se uma curva regular e conexa C em S é tal que para todo $p \in C$ a reta tangente a C é uma direção principal em p , então dizemos que C é uma linha de curvatura de S .

Proposição 1.7 (Olinde Rodrigues) Uma condição necessária e suficiente para que uma curva conexa e regular C de S seja uma linha de curvatura de S é que

$$N'(t) = \lambda(t)\alpha'(t),$$

para qualquer parametrização $\alpha(t)$ de C , onde $N(t) = N(\alpha(t))$ e $\lambda(t)$ é uma função diferenciável de t . Nesse caso, $-\lambda(t)$ é a curvatura (principal) segundo $\alpha'(t)$.

Demonstração. Basta observar que se $\alpha'(t)$ corresponde a uma direção principal, então $\alpha'(t)$ é um auto-vetor de dN e

$$dN(\alpha'(t)) = N'(t) = \lambda(t)\alpha'(t).$$

□

O conhecimento das curvaturas principais em p permite calcular a curvatura normal segundo uma direção dada de T_pS . De fato, se $v \in T_pS$ e $|v| = 1$, como e_1 e e_2 formam uma base ortonormal de T_pS , temos

$$v = e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta,$$

onde θ é o ângulo de e_1 a v na orientação de T_pS . A curvatura normal k_n na direção de v é dada por

$$\begin{aligned} k_n &= II_p(v) = - \langle dN_p(v), v \rangle \\ &= - \langle dN_p(e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta), e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta \rangle \\ &= \langle e_1 k_1 \cos \theta + e_2 k_2 \sin \theta, e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta \rangle \\ &= k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Esta última expressão é conhecida classicamente sob o nome de fórmula de Euler. Ela é simplesmente a expressão da segunda forma fundamental na base $\{e_1, e_2\}$.

Definição 1.8 Seja $p \in S$ e seja $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$ a diferencial da aplicação de Gauss. O determinante de dN_p é chamado a curvatura Gaussiana K de S em p . O negativo da metade do traço de dN_p é chamado a curvatura média (K_m) de S em p .

Em termos das curvaturas principais k_1 e k_2 , podemos escrever

$$K = k_1 k_2, \quad K_m = \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

Definição 1.9 Um ponto de uma superfície S é chamado

1. Elíptico, se $\det(dN_p) > 0$;
2. Hiperbólico, se $\det(dN_p) < 0$;
3. Parabólico, se $\det(dN_p) = 0$, com $dN_p \neq 0$;
4. Planar, se $dN_p = 0$.

Definição 1.10 Seja p um ponto em S . Uma direção assintótica de S em p é uma direção de $T_p S$ para a qual a curvatura normal é zero. Uma curva assintótica de S é uma curva conexa e regular $C \subset S$ tal que para cada $p \in C$ a reta tangente a C em p é uma direção assintótica.

Uma interpretação geométrica útil para as direções assintóticas é dada através da indicatriz de Dupin, que descreveremos agora.

Seja p um ponto de S . A indicatriz de Dupin em p é o conjunto de vetores de $T_p S$ tais que $II_p(w) = \pm 1$. Para escrever as equações da indicatriz de Dupin de uma maneira conveniente, sejam (ξ, η) as coordenadas cartesianas de $T_p S$ na base ortonormal $\{e_1, e_2\}$, onde e_1, e_2 são autovetores de dN_p . Dado $w \in T_p S$, sejam ρ e θ as “coordenadas polares” definidas por $w = \rho v$, com $|v| = 1$ e $v = e_1 \cos \theta + e_2 \sin \theta$, se $\rho \neq 0$. Pela fórmula de Euler,

$$\begin{aligned} \pm 1 &= II_p(w) = \rho^2 II_p(v) \\ &= k_1 \rho^2 \cos^2 \theta + k_2 \rho^2 \sin^2 \theta \\ &= k_1 \xi^2 + k_2 \eta^2, \end{aligned}$$

onde $w = \xi e_1 + \eta e_2$. Assim, as coordenadas (ξ, η) de um ponto da indicatriz de Dupin satisfazem a equação

$$k_1 \xi^2 + k_2 \eta^2 = \pm 1;$$

logo, a indicatriz de Dupin é a união de cônicas em $T_p S$. Notamos que a curvatura normal ao longo da direção determinada por w é $k_n(v) = II_p(v) = \pm \frac{1}{\rho^2}$.

Para um ponto elíptico, a indicatriz de Dupin é um elipse (k_1 e k_2 têm o mesmo sinal).

Para um ponto hiperbólico, k_1 e k_2 têm sinais opostos. A indicatriz de Dupin é então formada por uma hipérbole com um par comum de linhas assintóticas. Ao longo das direções assintóticas, a curvatura normal é zero; elas são portanto, direções assintóticas. Isso justifica a terminologia e mostra que um ponto hiperbólico tem exatamente duas direções assintóticas.

Para um ponto parabólico, uma das curvaturas é zero, e a indicatriz de Dupin degenera-se em um par de retas paralelas. A direção comum dessas retas é a única direção assintótica em questão. O seguinte resultado é encontrado como exercício em [1].

Teorema 1.11 (Beltrami-Enneper) *O valor absoluto da torção τ em um ponto de uma curva assintótica, cuja curvatura não se anula, é dada por*

$$|\tau| = \sqrt{-K},$$

onde K é a curvatura Gaussiana da superfície no ponto considerado.

Demonstração. Seja α uma curva assintótica parametrizada pelo comprimento de arco com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Temos então que

$$k_n(\alpha'(s)) = k(s) \langle N(s), n(s) \rangle = 0.$$

Por hipótese $k(s) \neq 0$, logo $\langle N(s), n(s) \rangle = 0$. Como $N(s) \perp \alpha'(s) = t(s)$, obtemos que $N(s) = cb(s)$, onde $b(s)$ denota o vetor binormal a α . Como $|N(s)| = |b(s)| = 1$, obtemos $N(s) = b(s)$. Derivando esta expressão obtemos que

$$|N'| = |\tau|$$

Por outro lado temos que: $\alpha'(0) = v = e_1 \cos\theta + e_2 \sin\theta \Rightarrow k_n(v) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta = 0 \Rightarrow k_1 \cos^2\theta = -k_2 \sin^2\theta \Rightarrow$

$$\begin{cases} k_1^2 \cos^2\theta = -k_1 k_2 \sin^2\theta \\ k_2^2 \sin^2\theta = -k_1 k_2 \cos^2\theta \end{cases}$$

Logo:

$$|\tau| = |N'| = |dN_p(v)| = |\cos\theta dN_p(e_1) + \sin\theta dN_p(e_2)| = |\cos\theta(-k_1 e_1) + \sin\theta(-k_2 e_2)| = |-k_1 \cos\theta e_1 - k_2 \sin\theta e_2| = \sqrt{k_1^2 \cos^2\theta + k_2^2 \sin^2\theta} = \sqrt{-k_1 k_2} = \sqrt{-K}.$$

□

Daremos agora uma expressão para segunda forma fundamental em coordenadas.

Seja $X(u, v)$ uma parametrização em um ponto $p \in S$ de uma superfície S , e seja $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ uma curva parametrizada em S , com $\alpha(0) = p$. Para simplificar a

notação, convencionaremos que todas funções abaixo indicam seus valores no ponto p .

O vetor tangente a $\alpha(t)$ em p é $\alpha' = X_u u' + X_v v'$ e

$$dN(\alpha') = N'(u(t), v(t)) = N_u u' + N_v v'.$$

Como N_u e N_v pertencem a $T_p S$, podemos escrever

$$N_u = a_{11}X_u + a_{21}X_v, \quad N_v = a_{12}X_u + a_{22}X_v, \quad (1-2)$$

e portanto

$$dN(\alpha') = (a_{11}u' + a_{12}v')X_u + (a_{21}u' + a_{22}v')X_v,$$

isto é,

$$dN \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Isto mostra que, na base $\{X_u, X_v\}$, dN é dada pela matriz (a_{ij}) , $i, j = 1, 2$.

Por outro lado, a expressão da segunda forma fundamental na base $\{X_u, X_v\}$ é dada por

$$\begin{aligned} II_p(\alpha') &= - \langle dN(\alpha'), \alpha' \rangle = - \langle N_u u' + N_v v', X_u u' + X_v v' \rangle \\ &= e(u')^2 + 2f u' v' + g(v')^2, \end{aligned}$$

onde, já que $\langle N, X_u \rangle = \langle N, X_v \rangle = 0$,

$$\begin{aligned} e &= - \langle N_u, X_u \rangle = \langle N, X_{uu} \rangle, \\ f &= - \langle N_v, X_u \rangle = \langle N, X_{uv} \rangle, \\ g &= - \langle N_v, X_v \rangle = \langle N, X_{vv} \rangle. \end{aligned}$$

Deste modo, pela definição 1.10, um curva assintótica é uma curva integral do campo de direções dado por

$$e(du)^2 + 2fdudv + g(dv)^2 = 0.$$

Vamos obter agora os valores de a_{ij} em termos dos coeficientes e, f, g . Das equações dadas em (1-2), temos

$$-f = \langle N_u, X_v \rangle = a_{11}F + a_{21}G,$$

$$-f = \langle N_v, X_u \rangle = a_{12}E + a_{22}F,$$

$$-e = \langle N_u, X_u \rangle = a_{11}E + a_{21}F,$$

$$-g = \langle N_v, X_v \rangle = a_{12}F + a_{22}G,$$

onde $E = \langle X_u, X_u \rangle$, $F = \langle X_u, X_v \rangle$ e $G = \langle X_v, X_v \rangle$. Estas relações podem ser expressas na forma matricial

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix};$$

donde

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}$$

onde

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}.$$

Daí segue as expressões

$$a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2},$$

$$a_{12} = \frac{gF - fG}{EG - F^2},$$

$$a_{21} = \frac{eF - fE}{EG - F^2},$$

$$a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2}.$$

As equações dadas em (1-2) com os valores obtidos acima, são conhecidas como as equações de Weingarten.

Pela proposição (1.7), temos que, uma curva regular conexa C em uma vizinhança coordenada de X é uma linha de curvatura se e somente se para uma parametrização qualquer $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, $t \in I$, de C , temos

$$dN(\alpha'(t)) = \lambda(t)\alpha'(t).$$

Segue-se que as funções $u'(t)$ e $v'(t)$ satisfazem o sistema de equações

$$\frac{fF - eG}{EGF^2}u' + \frac{gF - fG}{EG - F^2}v' = \lambda u',$$

$$\frac{eF - fE}{EG - F^2}u' + \frac{fF - gE}{EG - F^2}v' = \lambda v'.$$

Eliminando λ no sistema acima, obtemos a equação diferencial das linhas de curvatura,

$$(fE - eF)(u')^2 + (gE - eG)u'v' + (gF - fG)(v')^2 = 0. \quad (1-3)$$

Utilizando o fato das direções principais serem ortogonais, decorre facilmente da equação acima que uma condição necessária e suficiente para que as curvas coordenadas de uma parametrização sejam linhas de curvatura é que $F = f = 0$.

No exemplo seguinte determinamos o comportamento qualitativo das linhas assintóticas do toro de revolução em \mathbb{R}^3 .

Exemplo: Seja \mathbb{T}^2 o toro de revolução obtido pela rotação do círculo $(x - R)^2 + z^2 = r^2$ $r < R$, em torno do eixo z . Consideremos a seguinte parametrização do toro de revolução:

$$X(u, v) = (\cos(v)(R + r\cos(u)), \sin(v)(R + r\cos(u)), r\sin(u)).$$

A segunda forma fundamental é dada por:

$$e(u, v) = R^2, \quad f(u, v) = 0, \quad g(u, v) = R(R + r\cos(u))\cos(u).$$

Portanto, a equação diferencial das linhas assintóticas é dada por:

$$F(u, v, \frac{du}{dv}) = R(\frac{du}{dv})^2 + \cos(u)(R + r\cos(u)) = 0.$$

Escrevendo $q = \frac{du}{dv}$, consideramos o campo vetorial X definido pela equação diferencial

$$(u', v', q') = (qF_q, F_q, -(qF_u + F_v)).$$

Depois de multiplicarmos X por $\frac{1}{q}$, obtemos

$$(u', v', q') = (2Rq, 2R, R\sin(u) + r\sin(2u)).$$

Consideremos também o campo vetorial projetado, $Y(u, q) = (2Rq, R\sin(u) + r\sin(2u))$.

Notemos que a órbita de Y por $(\frac{\pi}{2}, 0)$ atinge $(\frac{3\pi}{2}, 0)$. De fato, da integral primeira de Y ,

$$G(u, q) = Rq^2 + R\cos(u) + \frac{r}{2}\cos(2u),$$

segue que $(\frac{\pi}{2}, 0)$ e $(\frac{3\pi}{2}, 0)$ estão na mesma componente conexa de $G^{-1}(-\frac{r}{2})$.

O tempo gasto por uma órbita que começa em $(\frac{\pi}{2}, 0)$ e alcance o ponto $(\frac{3\pi}{2}, 0)$ pode ser calculado como segue:

A partir de $G(u, q) = -\frac{r}{2}$ resulta que:

$$q = \left\{ \frac{[r(1 + \cos(2u) - 2R\cos(u))]}{2R} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Como $\frac{du}{dt} = 2Rq$, segue que:

$$T = R^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{du}{[-\cos(u)(r\cos(u) + R)]^{\frac{1}{2}}} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{[\text{sen}(u)(1 - \frac{r}{R}\text{sen}(u))]^{\frac{1}{2}}}.$$

Segue de [6], que a função $T(\frac{r}{R})$ têm a seguinte expansão analítica em série:

$$T\left(\frac{r}{R}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2a_n}{n!} \left(\frac{r}{R}\right)^n, \quad a_n = \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1) \Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{2n+\frac{1}{4}}{2})}{2^n \Gamma(2n + \frac{3}{4})}.$$

Portanto, de $\frac{dv}{dt} = 2R$, segue-se que um arco da linha assintótica que começa no ponto $(\frac{\pi}{2}, v_0)$ termina no ponto $(\frac{3\pi}{2}, v_1)$, onde v_1 é dado por $v_1 = 2RT + v_0$.

Este exemplo foi retirado de [3]. O comportamento qualitativo das linhas assintóticas é dado na figura seguinte.

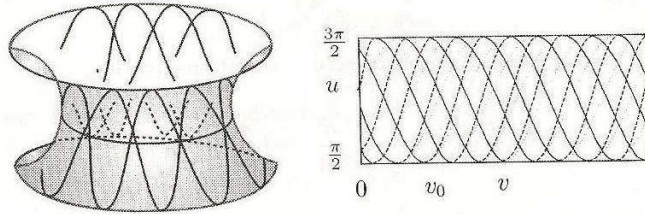


Figura 1.1: Linhas assintóticas sobre o toro

1.2 Geometria de Superfícies em $\mathbb{R}P^3$

Nesta seção trataremos de propriedades básicas da geometria no espaço projetivo $\mathbb{R}P^3$. Começaremos com o conceito de variedade diferenciável.

Definição 1.12 *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $X_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ de abertos U_α de \mathbb{R}^n em M tais que:*

- (1) $\bigcup_\alpha X_\alpha(U_\alpha) = M$;
- (2) *Para todo par α, β , com $X_\alpha(U_\alpha) \cap X_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $X_\alpha^{-1}(W)$ e $X_\beta^{-1}(W)$ são abertos em \mathbb{R}^n e as aplicações $X_\beta^{-1} \circ X_\alpha$ são diferenciáveis.*

O par (U_α, X_α) (ou a aplicação X_α) com $p \in X_\alpha(U_\alpha)$ é chamado uma parametrização (ou sistema de coordenadas) de M em p . Uma família $\{(U_\alpha, X_\alpha)\}$ satisfazendo (1) e (2) é chamada uma estrutura diferenciável em M .

Indiquemos por $\mathbb{R}P^n$ o conjunto das retas de \mathbb{R}^{n+1} que passam pela origem $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, isto é, $\mathbb{R}P^n$ é o conjunto das “direções” de \mathbb{R}^{n+1} . Vamos introduzir em $\mathbb{R}P^n$ uma estrutura diferenciável. Para isto, seja $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ e observemos, inicialmente, que $\mathbb{R}P^n$ é o espaço quociente de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ pela relação de equivalência:

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \sim (\lambda x_1, \dots, \lambda x_{n+1}), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \neq 0.$$

Indiquemos os pontos de $\mathbb{R}P^n$ por $[x_1, \dots, x_{n+1}]$. Observemos que, se $x_i \neq 0$,

$$[x_1, \dots, x_{n+1}] = \left[\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right].$$

Definamos em $\mathbb{R}P^n$ subconjuntos V_1, \dots, V_{n+1} , dados por:

$$V_i = \{[x_1, \dots, x_{n+1}]; x_i \neq 0\}, \quad i = 1, \dots, n+1.$$

Geometricamente, V_i é o conjunto das retas do \mathbb{R}^{n+1} que passam pela origem e não pertencem ao hiperplano $x_i = 0$. Vamos mostrar que podemos tomar os V_i 's como vizinhanças coordenadas, onde as coordenadas em V_i são

$$y_1 = \frac{x_1}{x_i}, \dots, y_{i-1} = \frac{x_{i-1}}{x_i}, \quad y_i = \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, y_n = \frac{x_{n+1}}{x_i}.$$

Para isto, definamos aplicações $w_i : \mathbb{R}^n \rightarrow V_i$ por

$$w_i(y_1, \dots, y_n) = [y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots, y_n], \quad (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

e mostremos que a família $\{(\mathbb{R}^n, w_i)\}$ é uma estrutura diferenciável em $\mathbb{R}P^n$.

De fato, cada aplicação w_i é biunívoca e $\bigcup w_i(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}P^n$. Resta mostrar que $w_i^{-1}(V_i \cap V_j)$ é aberto em \mathbb{R}^n e $w_j^{-1} \circ w_i$ é aí diferenciável, $j = 1, \dots, n+1$. Temos que os pontos de $w_i^{-1}(V_i \cap V_j)$ são da forma:

$$\{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n; y_j \neq 0\}.$$

Portanto $w_i^{-1}(V_i \cap V_j)$ é aberto em \mathbb{R}^n , e supondo $i > j$,

$$\begin{aligned} w_j^{-1} \circ w_i &= (y_1, \dots, y_n) = w_j^{-1}[y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots, y_n] \\ &= w_j^{-1}\left[\frac{y_1}{y_j}, \dots, \frac{y_{j-1}}{y_j}, 1, \frac{y_{j+1}}{y_j}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_j}, \frac{1}{y_j}, \frac{y_i}{y_j}, \dots, \frac{y_n}{y_j}\right] \\ &= \left(\frac{y_1}{y_j}, \dots, \frac{y_{j-1}}{y_j}, \frac{y_{j+1}}{y_j}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_j}, \frac{1}{y_j}, \frac{y_i}{y_j}, \dots, \frac{y_n}{y_j}\right), \end{aligned}$$

que é diferenciável. O caso em que $i < j$ é análogo. Em resumo, o espaço projetivo real $\mathbb{R}P^n$ fica coberto por $n+1$ vizinhanças coordenadas V_i , onde V_i é constituído pelas direções de \mathbb{R}^{n+1} que não estão no hiperplano $x_i = 0$. Além disso, em cada V_i temos coordenadas

$$\left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right),$$

onde (x_1, \dots, x_{n+1}) são coordenadas de \mathbb{R}^{n+1} .

O espaço projetivo $\mathbb{R}P^n$ pode ser pensado como o espaço quociente da esfera unitária $\mathbb{S}^n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1}; |p| = 1\}$ pela relação de equivalência $p \in \mathbb{S}^n$ com seu ponto antípoda $A(p) = -p$. De fato, cada reta que passa pela origem determina na esfera dois pontos antípodas e a correspondência assim obtida é biunívoca e sobrejetiva.

Trabalharemos com o espaço projetivo de dimensão três $\mathbb{R}P^3$, ou seja, com \mathbb{S}^3 . Consideremos uma superfície regular $M \subset \mathbb{S}^3$. Temos que M pode ser vista como uma superfície de \mathbb{R}^4 . O produto interno natural do $\mathbb{R}^4 \supset M$, induz em cada plano tangente $T_p M$ de M um produto interno, que indicaremos por \langle, \rangle_p . Se $w_1, w_2 \in T_p M \subset \mathbb{R}^4$, então $\langle w_1, w_2 \rangle_p$ é igual ao produto interno de w_1 e w_2 , como vetores em \mathbb{R}^4 . A este produto interno, que é uma forma bilinear simétrica, corresponde uma forma quadrática $I_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = |w|^2 \geq 0. \quad (1-4)$$

Definição 1.13 A forma quadrática I_p em $T_p M$ definida em (4-6), é chamada a primeira

forma fundamental da superfície regular $M \subset \mathbb{S}^3$ em $p \in M$.

Consideremos $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ uma parametrização de M . Como um vetor tangente $w \in T_p M$ é o vetor tangente a uma curva parametrizada $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, com $p = \alpha(0) = X(u_0, v_0)$, obtemos

$$I_p(\alpha'(0)) = E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2,$$

com

$$E = \langle X_u, X_u \rangle, \quad F = \langle X_u, X_v \rangle, \quad G = \langle X_v, X_v \rangle.$$

O vetor normal a M é dado por $N = \frac{X \wedge X_u \wedge X_v}{|X \wedge X_u \wedge X_v|}$. A segunda forma fundamental é definida por:

$$II_p = - \langle DN_p(w), w \rangle,$$

com $w \in T_p M$. Considerando $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, com $p = \alpha(0) = X(u_0, v_0)$, obtemos

$$II = e(du)^2 + 2fdudv + g(dv)^2 = 0$$

onde

$$e = \frac{\det[X, X_u, X_v, X_{uu}]}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad f = \frac{\det[X, X_u, X_v, X_{uv}]}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad g = \frac{\det[X, X_u, X_v, X_{vv}]}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Definimos assim a primeira forma fundamental e a segunda forma fundamental de uma superfície M em \mathbb{S}^3 herdando o produto interno canônico de \mathbb{R}^4 .

Consideraremos superfícies não-degeneradas em \mathbb{S}^3 . Isto significa que a segunda forma fundamental é não degenerada em cada ponto.

Um estudo de curvas e superfícies em \mathbb{S}^3 é realizado em [10]. Vejamos um exemplo de uma superfície não degenerada em \mathbb{S}^3 .

Exemplo: Consideremos o toro de Clifford $C = \mathbb{S}^1(\frac{1}{\sqrt{2}}) \times \mathbb{S}^1(\frac{1}{\sqrt{2}}) \subset \mathbb{S}^3$ parametrizado por:

$$C(u, v) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(v - u), \sin(v - u), \cos(v + u), \sin(v + u)) \quad (1-5)$$

onde C está definido no quadrado $Q = \{(u, v) : 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi\}$. Temos que as direções assintóticas sobre o toro de Clifford dado por (1-5) são dadas por $dudv = 0$, isto é, as linhas assintóticas são as curvas coordenadas. De fato, os coeficientes da primeira forma fundamental $I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ e da segunda forma fundamental $II = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$ de C com respeito ao vetor normal $N = \frac{C \wedge C_u \wedge C_v}{|C \wedge C_u \wedge C_v|}$ são dados por

$$E(u, v) = 1, \quad e(u, v) = 0$$

$$F(u, v) = 0, \quad f(u, v) = 1$$

$$G(u, v) = 1, \quad g(u, v) = 0$$

onde o vetor normal de C é dado por

$$N = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(v-u), \sin(v-u), -\cos(u+v), -\sin(u+v)).$$

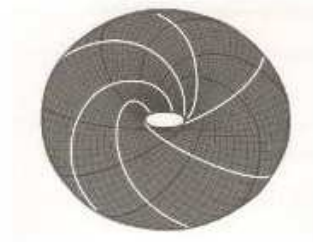


Figura 1.2: Toro de Clifford folheado por linhas assintóticas, os círculos de Villarceau.

Um estudo sobre folheações assintóticas em deformações do toro de Clifford é realizado em [4].

Pontos Parabólicos Especiais

2.1 Coleção de Resultados

Este capítulo foi baseado em [14]. Ressaltamos novamente porque estudamos superfícies em \mathbb{S}^3 : Em \mathbb{R}^3 as linhas assintóticas não são globalmente definidas por imersões de superfícies orientadas compactas. Isto vem do fato de que nestas superfícies existem sempre pontos elípticos. Em \mathbb{S}^3 as linhas assintóticas podem ser globalmente definidas. Identificaremos localmente o espaço projetivo com o espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 com coordenadas

$$x = \frac{x_1}{x_0} \quad y = \frac{x_2}{x_0} \quad z = \frac{x_3}{x_0}.$$

Nesta seção consideraremos propriedades qualitativas definidas por linhas assintóticas de uma superfície suave em um espaço de dimensão três (Euclidiano ou projetivo). Uma superfície conexa suave S é naturalmente particionada em três partes (possivelmente vazias):

- (E) Um domínio aberto de pontos elípticos;
- (H) Um domínio aberto de pontos hiperbólicos;
- (P) Uma curva parabólica.

Em geral o conjunto parabólico é a fronteira comum dos domínios hiperbólico e elíptico. Denotaremos o domínio hiperbólico por H . Temos que uma curva assintótica é uma curva integral do campo de direções

$$e(du)^2 + 2fdudv + g(dv)^2 = 0. \tag{2-1}$$

Para cada ponto p , da região hiperbólica H , passam duas linhas assintóticas transversais, tangentes a duas direções assintóticas que passam por p . De fato, olhando para esta equação como uma equação do segundo grau em du (ou em dv), obtemos que o seu discriminante é dado por $\Delta = 4(f^2 - eg)$. Seja $p_0 = X(q_0) \in S$ um ponto hiperbólico de S . Então, por continuidade, existe um aberto $U_0 \subset U$ tal que para todo $q \in U_0$ temos que $K(q) < 0$ e assim $\Delta > 0$. Portanto um domínio hiperbólico simplesmente conexo, onde $f^2 - eg > 0$, a equação (2-1) pode ser fatorada em dois fatores lineares distintos, o que

nos dá

$$\omega_1 \otimes \omega_2 = (Adu + Bdv)(Cdu + Ddv) = 0.$$

Assim, os campos de direções são definidos pelos núcleos Υ_1 e Υ_2 , das 1-formas ω_1 e ω_2 , ou seja,

$$Adu + Bdv = 0$$

$$Cdu + Ddv = 0$$

onde os coeficientes são determinados por

$$AC = e, \quad AD + BC = 2f, \quad BD = g.$$

Cada uma destas equações determina um campo diferenciável de direções assintóticas, e em cada ponto da vizinhança considerada as direções dadas pelas duas equações são distintas.

Sob uma hipótese de orientabilidade imposta sobre a superfície, é possível globalizar sobre toda a região hiperbólica H , a definição dos campos de direções assintóticas Υ_1 , Υ_2 e uma escolha de ordenação entre eles.

Consideremos o campo de cones tangentes C_X sobre H , definidos pelas direções principais e_1 , e_2 , orientado compativelmente com a superfície. Chamamos de $\{e_1(p), e_2(p)\}$ uma base positiva para T_pS onde

$$DX(p, e_1(p)) \wedge DX(p, e_2(p)) = N(p) \quad e \quad II_p(v) > 0, \quad \text{para } v = e_1(p) + e_2(p),$$

onde X é a imersão e N é o vetor normal. Notemos que se $\{e'_1(p), e'_2(p)\}$ é outra escolha para tal base, ambas definem o mesmo campo de direções:

$$\Psi_1(p) = \mathbb{R}.e_1(p) = \mathbb{R}.e'_1(p) \quad e \quad \Psi_2(p) = \mathbb{R}.e_2(p) = \mathbb{R}.e'_2(p).$$

As possíveis escolhas para o cone C_X são dadas na figura abaixo. Estes dois campos de direções são chamados de campos de direções principais de X . Distinguimos assim, os campos Υ_1 e Υ_2 de direções assintóticas da seguinte maneira: chamaremos de “1” o primeiro campo de direções Υ_1 , definido pela parte positiva do cone C_X e “2” o segundo campo de direções Υ_2 definido pela parte negativa do cone C_X .

As folheações assintóticas de X são as folheações integrais A_1 de Υ_1 e A_2 de Υ_2 . Estas folheações preenchem toda região hiperbólica H , ou seja, a região hiperbólica

é folheada por uma família de curvas assintóticas “1” e por uma família de curvas assintóticas “2”. Claramente, uma troca de orientação da superfície, produz uma permutação das folheações assintóticas.

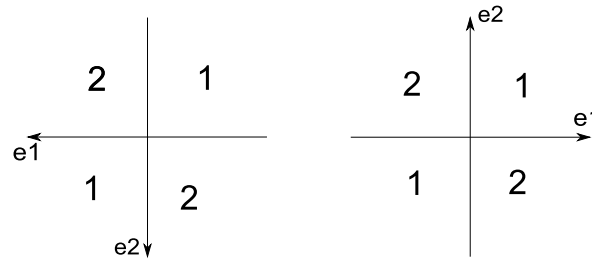


Figura 2.1: Cone de direções principais

Deste modo, por um ponto hiperbólico de uma superfície, passam duas curvas assintóticas, uma curva da família “1” e a outra da família “2”. Vamos a definição de alguns termos.

Definição 2.1 *Um ponto parabólico especial é um ponto parabólico em que a (única) direção assintótica é tangente a curva parabólica.*

Este ponto também é chamado de “godron” devido à R. Thom [13].

Definição 2.2 *Uma inflexão de uma curva regular parametrizada em \mathbb{RP}^3 (ou em \mathbb{R}^3) é um ponto em que as duas primeiras derivadas são linearmente dependentes.*

Estudaremos inflexões de linhas assintóticas.

Definição 2.3 *A linha formada (quando definida) pelos pontos de inflexão das curvas assintóticas no domínio hiperbólico é chamada curva flecnodal.*

No decorrer do texto, denotaremos a curva flecnodal por F . Como no domínio hiperbólico temos duas folheações assintóticas, é natural definirmos:

Definição 2.4 *A curva flecnodal “1” denotada por F_1 é a curva formada pelos pontos de inflexão da família assintótica “1”. De modo análogo se define a curva flecnodal “2”. Temos assim que $F = F_1 \cup F_2$.*

Pode ocorrer de uma das curvas F_1 ou F_2 serem vazias, ou seja, não termos curva de inflexão para uma folheação assintótica. Também pode ocorrer de ambas as curvas F_1 e F_2 serem vazias, ou seja, não termos curva de inflexão para nenhuma folheação assintótica. Consideramos aqui superfícies em que ambas curvas F_1 e F_2 são bem definidas, ou seja, são curvas regulares. Chamaremos de ponto hiperbólico especial

(ponto de dupla inflexão) um ponto de intersecção da curva flecnodal F_1 e curva flecnodal F_2 ($F_1 \cap F_2$). Estes pontos também recebem o nome de pontos quadráticos. No capítulo 3 mostraremos que pontos hiperbólicos especiais (ou pontos quadráticos) são os pontos em que uma superfície pode ser aproximada por uma quádrlica até os termos de ordem três.

No que segue, consideraremos a superfície S parametrizada localmente como o gráfico de uma função suave $z = z(x, y)$ (onde o mergulho é dado por $X(x, y) = (x, y, z(x, y))$). As direções assintóticas satisfazem a equação:

$$z_{xx}(dx)^2 + 2z_{xy}dxdy + z_{yy}(dy)^2 = 0.$$

Fazendo $dy = pdx$, esta equação se torna

$$F(x, y, p) = z_{yy}p^2 + 2z_{xy}p + z_{xx} = 0. \quad (2-2)$$

Esta equação é chamada equação assintótica de X . A esta equação associamos o campo vetorial $Y = (1, p, -\frac{(F_x + pF_y)}{F_p})$. De fato, $F(x, y, p) = 0 \implies F_x x' + F_y y' + F_p p' = 0$. Fazendo $x' = 1$, temos:

$$Y : \begin{cases} x' = 1 \\ y' = p \\ p' = -\frac{(F_x + pF_y)}{F_p}. \end{cases}$$

As projeções das curvas integrais de Y por $\Pi(x, y, p) = (x, y)$, são as linhas assintóticas de X . Chamaremos de \tilde{A} a superfície definida pelas equações $F(x, y, p) = 0$, $p = dy/dx$ e $F(x, y, q) = 0$, $q = dx/dy$. Isto é, consideraremos a equação diferencial das linhas assintóticas como uma superfície no espaço projetivo tangente da superfície.

Caracterizemos a curva flecnodal de X . Seja $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(x(t), y(t)))$ uma linha assintótica de X . Derivando em t e usando o campo Y teremos:

$$\dot{\gamma} = (x', y', z_x x' + z_y y') \implies \dot{\gamma} = (1, p, z_x + z_y p),$$

$$\dot{\gamma}'' = (0, p', z_{xx} + 2z_{xy}p + z_{yy}p^2 + z_y p') = p'(0, 1, z_y),$$

onde usamos que $z_{xx} + 2z_{xy}p + z_{yy}p^2 = 0$. Determinando os pontos onde $\dot{\gamma}'' = \lambda \dot{\gamma}$ (as duas primeiras derivadas são linearmente dependentes), com $\lambda \in \mathbb{R}$, obtemos:

$$\begin{cases} 0 = \lambda \\ p' = \lambda p \\ p' z_y = \lambda (z_x + z_y p) \end{cases}$$

donde $p' = 0$. Em Y , $p' = 0$ corresponde a $F_x + pF_y = 0$. Portanto, o levantamento da curva flecnodal é dado por

$$\tilde{F} = \begin{cases} z_{yy}p^2 + 2z_{xy}p + z_{xx} = 0 \\ F_x + pF_y = 0. \end{cases} \quad (2-3)$$

A curva flecnodal é obtida pela projeção $\Pi(x, y, p) = (x, y)$ desta curva.

Observação 2.5 O levantamento da curva parabólica na superfície \tilde{A} (superfície dada pela equação $F(x, y, p) = z_{yy}p^2 + 2z_{xy}p + z_{xx} = 0$) é dada por

$$\tilde{P} = \begin{cases} z_{yy}p^2 + 2z_{xy}p + z_{xx} = 0 \\ F_p = 0. \end{cases} \quad (2-4)$$

Exemplo: Consideremos a superfície dada por $X(x, y) = (x, y, y^4 - y + x^2y^3)$. Determinaremos suas curvas parabólica e flecnodal. Temos que:

$$z_{xx} = 2y^3, \quad z_{xy} = 6xy^2, \quad z_{yy} = 12y^2 + 6x^2y.$$

Assim a equação das linhas assintóticas com $p = \frac{dy}{dx}$ é dada por

$$F(x, y, p) = p^2z_{yy} + 2pz_{xy} + z_{xx} = p^2(12y^2 + 6x^2y) + 12pxy^2 + 2y^3 = 0.$$

Pelas observações feitas anteriormente temos que o levantamento das curvas flecnodal \tilde{F} e parabólica \tilde{P} são dadas por:

$$\tilde{F} = \begin{cases} z_{yy}p^2 + 2z_{xy}p + z_{xx} = 0 \\ F_x + pF_y = 0 \end{cases} \quad \tilde{P} = \begin{cases} z_{yy}p^2 + 2z_{xy}p + z_{xx} = 0 \\ F_p = 0. \end{cases}$$

Obtemos assim:

$$\tilde{F} = \begin{cases} (12y^2 + 6x^2y)p^2 + 12xy^2p + 2y^3 = 0 \\ (24y + 6x^2)p^3 + 36xy^2p^2 + 18y^2p = 0 \end{cases} \quad \tilde{P} = \begin{cases} (12y^2 + 6x^2y)p^2 + 12xy^2p + 2y^3 = 0 \\ (24y^2 + 12x^2y)p + 12xy^2 = 0. \end{cases}$$

Notemos que em \tilde{F} temos dois polinômios em p , um de grau dois e um de grau três. Fazendo o “resultant” em p (termo definido no Apêndice) destes dois polinômios obtemos a curva flecnodal, dada por:

$$-1152y^9(-49y^2 - 20x^2y + 20x^4) = 0.$$

Notemos que neste exemplo a curva flecnodal não é regular na origem. Fazendo o mesmo em \tilde{P} , onde temos um polinômio de grau dois e um de grau um em p , obtemos a curva

parabólica dada por:

$$-24y^4(-y + x^2) = 0.$$

O esboço das linhas assintóticas, da curva parabólica e da curva flecnodal é dado na figura seguinte.

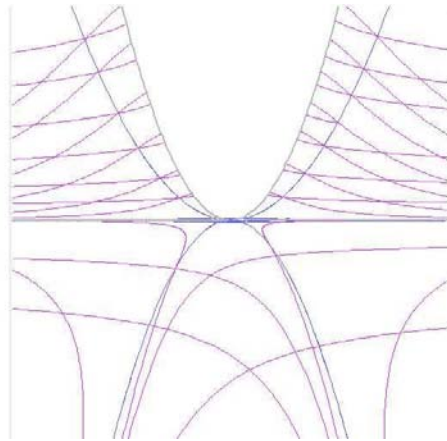


Figura 2.2: *Curvas assintóticas, parabólica e flecnodal*

As curvas em rosa são linhas assintóticas, cinza parabólica e azul flecnodal. No próximo exemplo é dada uma superfície em que temos dez pontos parabólicos especiais, ou seja, dez pontos parabólicos em que a (única) direção assintótica é tangente à curva parabólica.

Exemplo: Consideremos a superfície dada por $X(x, y) = (x, y, z(x, y))$, onde $z(x, y)$ é dado por:

$$z(x, y) = -x^4 - 2x^3y + 9x^2y^2 + 6xy^3 - 11y^4 - 13x^3 - 10x^2y + 3xy^2 + 10y^3 + 12x^2 + 2xy - 2y^2.$$

Temos que:

$$z_{xx} = -12x^2 - 12xy + 18y^2 - 78x - 20y + 24,$$

$$z_{xy} = -6x^2 + 36xy + 18y^2 - 20x + 6y + 2,$$

$$z_{yy} = 18x^2 + 36xy - 132y^2 + 6x + 60y - 4.$$

A curva parabólica é dada por: $-100 + 3504y^3 - 2700y^4 - 252x^4 - 1716x^3 - 216x^3y + 396x^2y^2 + 936xy^3 - 2448x^2y + 9252xy^2 - 3792xy - 364x^2 - 4548y^2 + 536x + 1496y = 0$. O esboço da curva parabólica e das linhas assintóticas é dado na figura seguinte.

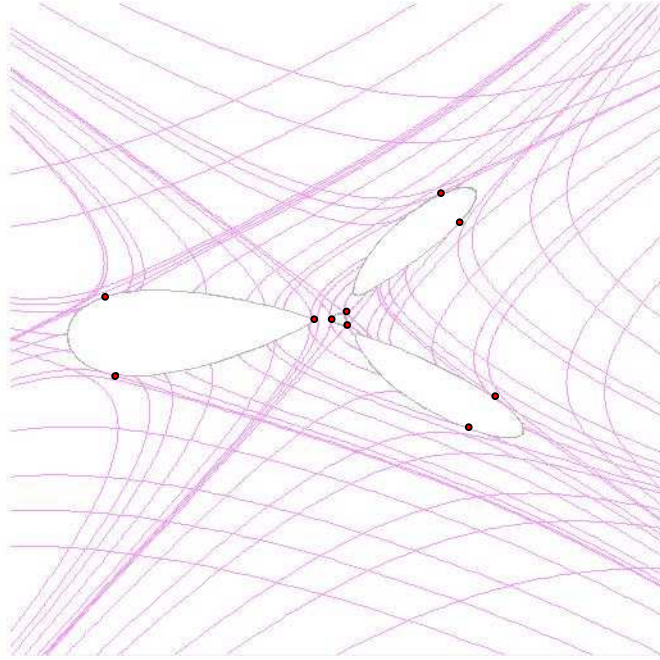


Figura 2.3: Dez pontos parabólicos especiais

2.2 Curvas Assintóticas, Flecnodal e Parabólica

Estudaremos agora a posição relativa entre as separatrizes das linhas assintóticas, curvas flecnodal e parabólica na vizinhança de um ponto parabólico especial. Para este fim, começaremos com a seguinte proposição:

Proposição 2.6 Consideremos o mergulho $X(x, y) = (x, y, z(x, y))$ onde z é da forma

$$z = \frac{ky^2}{2} + \frac{a_1xy^2}{2} + \frac{a_2x^2y}{2} + \frac{a_4y^3}{6} + \frac{a_5x^4}{24} + \frac{a_6y^4}{24} + \frac{a_7x^3}{6} + \frac{a_8x^2y^2}{4} + \frac{a_9x^3y}{6} + \varphi(x, y) \quad (2-5)$$

com $a_5 \neq \{0, \frac{1}{2}\}$, $a_2 \neq 0$, $k \neq 0$ e φ denotando a soma de polinômios homogêneos em x e y de grau maior que 4.

Com uma mudança de coordenadas do tipo

$$x = b_0u + b_1u^2 + b_2v^2 + b_3uv + sv$$

$$y = b_0v + c_1u^2 + c_2v^2 + c_3uv \quad (2-6)$$

é possível escolher os termos b_0 , b_1 , b_2 , b_3 , s , c_1 , c_2 e c_3 de tal forma que a equação diferencial das linhas assintóticas de (2-5) é a “mesma” equação diferencial das linhas assintóticas da superfície dada por:

$$z = \frac{y^2}{2} - x^2y + rx^4 + \varphi(x, y), \quad (2-7)$$

onde $r \neq \{0, \frac{1}{2}\}$ e φ denota a soma de polinômios homogêneos em x e y de grau maior que 4.

Demonstração. A equação diferencial das linhas assintóticas de (2-7) é dada por

$$z_{xx}(dx)^2 + 2z_{xy}dxdy + z_{yy}(dy)^2 = 0,$$

onde:

$$z_{xx} = -2y + 12rx^2 + O(3),$$

$$z_{xy} = -2x + O(3),$$

$$z_{yy} = 1 + O(3).$$

Portanto, dividindo por z_{yy} , a equação diferencial das linhas assintóticas de (2-7) é dada por

$$(-2y + 12rx^2 + O(3))(dx)^2 + (-4x + O(3))dxdy + (dy)^2 = 0.$$

Trabalharemos agora com a equação diferencial das linhas assintóticas de (2-5). Com a mudança dada em (2-6), obtemos a superfície $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, onde a equação diferencial das linhas assintóticas é dada por

$$e(dx)^2 + 2fdxdy + g(dy)^2 = 0, \quad (2-8)$$

com:

$$e = a_2b_0^5v + ((1/2)a_5b_0^6 + 4kb_0^2c_1^2 + 5c_1a_2b_0^4)u^2 + (4c_1a_1b_0^4 + a_5sb_0^5 + 4a_2b_0^4c_3 + 6b_1a_2b_0^4 + 2c_1a_2b_0^3s + a_9b_0^6 + 4c_1kb_0^2c_3)vu + ((1/2)a_8b_0^6 + 3a_2b_0^4c_2 + 2a_1b_0^4c_3 + a_2sb_0^3c_3 + (1/2)a_5s^2b_0^4 + a_9sb_0^5 + kc_3^2b_0^2 + 3a_2b_0^4b_3)v^2 + O(3);$$

$$f = (a_1b_0^5 + c_3kb_0^3 + 2a_2sb_0^4)v + (a_2b_0^5 + 2kb_0^3c_1)u + (2c_1kb_0^2b_3 + 4a_2b_0^4c_2 + 8a_2sb_0^3b_1 + 4a_2b_0^4b_3 + a_5s^2b_0^4 + 2a_4b_0^4c_1 + 8kc_2c_1b_0^2 + 4a_1b_0^4c_3 + 4a_2sb_0^3c_3 + 2c_3b_1kb_0^2 + 2kc_3^2b_0^2 + 2a_1b_0^3c_1s + 4a_1b_0^4b_1 + 2a_9sb_0^5 + a_8b_0^6 - 4c_3kb_0c_1s - 2a_2s^2b_0^2c_1)vu + (c_1a_2b_0^3s + 4c_1kb_0^2c_3 + (1/2)a_5sb_0^5 + 3c_1a_1b_0^4 + 4c_1kb_0^2b_1 - 4kb_0c_1^2s + 2a_2b_0^4c_3 + (1/2)a_9b_0^6 + 5b_1a_2b_0^4)u^2 + (-c_3a_2s^2b_0^2 + c_3a_1b_0^3s + 4b_3a_2sb_0^3 + 4c_3kb_0^2c_2 + (3/2)a_8sb_0^5 - kb_0c_3^2s + (1/2)a_5s^3b_0^3 + 7a_2sb_0^3c_2 + 2b_3a_1b_0^4 + 3a_2b_0^4b_2 + c_3a_4b_0^4 + (3/2)a_9s^2b_0^4 + 5a_1b_0^4c_2 + c_3b_3kb_0^2 + (1/2)a_7b_0^6)v^2 + O(3);$$

$$g = kb_0^4 + (6kc_2b_0^3 + a_4b_0^5 + 3a_2s^2b_0^3 + 3a_1sb_0^4 - c_3kb_0^2s + kb_0^3b_3)v + (2a_2sb_0^4 + a_1b_0^5 - 2c_1kb_0^2s + 3c_3kb_0^3 + 2kb_0^3b_1)u + ((1/2)a_5s^2b_0^4 + (1/2)a_8b_0^6 - 2c_1kb_0^2b_3 + 3a_1b_0^4c_3 + 3a_1b_0^4b_1 + 6a_2sb_0^3b_1 + 3kc_3^2b_0^2 + a_9sb_0^5 + 2a_2b_0^4b_3 - 4c_3kb_0c_1s - 3a_2s^2b_0^2c_1 + 6c_3b_1kb_0^2 + 4a_2sb_0^3c_3 + a_4b_0^4c_1)u^2 + (12c_3kb_0^2c_2 - 8kc_2b_0c_1s + 6a_2s^2b_0^2b_1 + 12c_2b_1kb_0^2 + 8a_2sb_0^3c_2 +$$

$$\begin{aligned}
& a_7b_0^6 + 4a_2b_0^4b_2 - 6a_2s^3b_0c_1 - 4c_1kb_0^2b_2 + 2a_4b_0^4b_1 + a_5s^3b_0^3 + 2c_3b_3kb_0^2 + 3a_8sb_0^5 - \\
& 2a_4b_0^3c_1s + 6a_1b_0^4c_2 + 4c_3a_2s^2b_0^2 + 4b_3a_1b_0^4 + 4c_3a_4b_0^4 - 2kb_0c_3^2s + 8c_3a_1b_0^3s + 6a_1sb_0^3b_1 - \\
& 6a_1s^2b_0^2c_1 + 8b_3a_2sb_0^3 + 3a_9s^2b_0^4)vu + (6c_2b_3kb_0^2 + 3a_1sb_0^3b_3 + 10b_2a_2sb_0^3 + 3a_2s^2b_0^2b_3 - \\
& 2c_3kb_0^2b_2 + 12kb_0^2c_2^2 + 7c_2a_4b_0^4 + 3a_8s^2b_0^4 - a_4b_0^3c_3s + 11c_2a_2s^2b_0^2 + 16c_2a_1b_0^3s + a_4b_0^4b_3 + \\
& (1/2)a_5s^4b_0^2 - 3a_2s^3b_0c_3 - 3a_1s^2b_0^2c_3 + (1/2)a_6b_0^6 + 5b_2a_1b_0^4 - 4kc_2b_0c_3s + 2a_9s^3b_0^3 + \\
& 2a_7sb_0^5)v^2 + O(3).
\end{aligned}$$

Fazendo $b_0 \neq 0$, podemos supor $g \neq 0$. Dividindo a equação (2-8) por g , obtemos:

$$\frac{e}{g}(dx)^2 + 2\frac{f}{g}dxdy + (dy)^2 = 0,$$

onde, em uma aproximação de ordem dois obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{e}{g} = & -\frac{u^2}{2b_0^2k^2}(-8k^2c_1^2 - a_5b_0^4k - 10c_1a_2b_0^2k) - \frac{vu}{2b_0^2k^2}(-8b_1a_2b_0^2k - 2a_5sb_0^3k - \\
& 8c_1k^2c_3 - 2a_9b_0^4k - 2a_2b_0^2c_3k - 8c_1a_1b_0^2k + 4a_2^2b_0^3s + 2a_2b_0^4a_1 - 8c_1a_2b_0sk) - \\
& \frac{v^2}{2b_0^2k^2}(-a_8b_0^4k - a_5s^2b_0^2k - 4a_2sb_0c_3k - 2a_9sb_0^3k - 2k^2c_3^2 + 6a_2b_0^2c_2k + 2a_2b_0^4a_4 + \\
& 6a_2^2b_0^2s^2 + 6a_2b_0^3a_1s - 4a_2b_0^2b_3k - 4a_1b_0^2c_3k) + \frac{a_2b_0v}{k} + O(3);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{f}{g} = & \frac{u^2}{2b_0^2k^2}(4c_1k^2c_3 - 2c_1a_1b_0^2k + 2c_1a_2b_0sk + 2a_2b_0^2c_3k - 6b_1a_2b_0^2k - \\
& a_9b_0^4k - a_5sb_0^3k + 4a_2^2b_0^3s + 2a_2b_0^4a_1) - \frac{vu}{2b_0^2k^2}(2a_1^2b_0^4 - 4a_1b_0^2b_1k + 2k^2c_3^2 + 14a_2^2b_0^2s^2 - \\
& 4a_9sb_0^3k + 6a_2sb_0c_3k - 8a_2sb_0b_1k + 8a_2s^2c_1k + 4a_1b_0c_1sk - 2a_8b_0^4k + 2a_2b_0^4a_4 + \\
& 14a_2b_0^3a_1s - 2a_5s^2b_0^2k + 8k^2c_2c_1 + 4a_2b_0^2c_2k - 6a_2b_0^2b_3k) - \frac{u}{2b_0^2k^2}(-2a_2b_0^3k - 4b_0k^2c_1) - \\
& \frac{v^2}{2b_0^2k^2}(-a_7b_0^4k + 2a_1b_0^4a_4 + 6a_1^2b_0^3s + 4a_2sb_0^3a_4 - 3a_9s^2b_0^2k + 4c_3k^2c_2 - a_5s^3b_0k - \\
& 3a_8sb_0^3k - 6a_2b_0^2b_2k - 2b_3a_1b_0^2k + 2a_1b_0^2c_2k + 18a_1b_0^2a_2s^2 + 4c_3a_2s^2k - 4b_3a_2sb_0k + \\
& 2c_3a_1b_0sk + 10a_2sb_0c_2k + 12a_2^2s^3b_0) - \frac{v}{2b_0^2k^2}(-4kb_0^2a_2s - 2k^2b_0c_3 - 2kb_0^3a_1) + O(3).
\end{aligned}$$

Deste modo, determinamos $b_0, b_1, b_2, b_3, s, c_1, c_2$ e c_3 de tal forma que

$$\frac{e}{g} = r_1v + r_2a_5u^2 + O(3)$$

$$\frac{f}{g} = r_3u + O(3).$$

com $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$.

□

A proposição anterior nos diz que uma superfície pode ser enviada por transformações projetivas para a forma normal

$$z = \frac{y^2}{2} - x^2y + rx^4 + \varphi(x, y) \quad (2-9)$$

com $r \neq \{0, \frac{1}{2}\}$. Ou seja, tendo uma superfície S em $\mathbb{R}P^3$, identificamos localmente $\mathbb{R}P^3$ com o espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 de tal forma que S é dada por (2-9). No que segue utilizaremos a forma normal dada em (2-9). Em [14] também é utilizado a forma normal (2-9). Na proposição anterior apenas justificamos o seu uso.

Proposição 2.7 *Um ponto parabólico especial separa a curva flecnodal em seus ramos F_1 e F_2 .*

Demonstração. Temos que o levantamento \tilde{F} da curva flecnodal é dado pela intersecção das superfícies

$$\tilde{F} = \begin{cases} z_{yy}p^2 + 2z_{xy}p + z_{xx} = 0 \\ F_x + pF_y = 0, \end{cases}$$

e o levantamento \tilde{P} da curva parabólica é dado pela intersecção das superfícies

$$\tilde{P} = \begin{cases} z_{yy}p^2 + 2z_{xy}p + z_{xx} = 0 \\ F_p = 0. \end{cases}$$

A imagem destas curvas pela projeção $(x, y, p) \mapsto (x, y)$ são respectivamente as curvas flecnodal e parabólica. A curva \tilde{P} separa a superfície \tilde{A} (superfície dada pela equação $z_{yy}p^2 + 2z_{xy}p + z_{xx} = 0$) em duas componentes, denotadas por A_1 e A_2 , onde A_1 denota a folheação assintótica “1”, e A_2 a folheação assintótica “2”. Lembremos que estamos supondo sempre que as curvas F_1 e F_2 são regulares. Temos assim que F_1 está na parte A_1 e F_2 está na parte A_2 . A superfície $F_p = 0$ é o plano dado pela equação $p = 2x + O(3)$. A superfície $F_x + pF_y = 0$ é o plano dado pela equação $p = 4rx + O(3)$. A intersecção entre estes dois planos e a superfície $z_{yy}p^2 + 2z_{xy}p + z_{xx} = 0$ é o ponto $(0, 0, 0)$. Pela projeção $(x, y, p) \mapsto (x, y)$, este ponto se projeta sobre o ponto $(0, 0)$.

Observemos que:

$$\tilde{F} = \begin{cases} z_{yy}p^2 + 2z_{xy}p + z_{xx} = 0 \\ F_x + pF_y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} p^2 - 4xp - 2y + 12rx^2 + A(x, y) = 0 \\ -6p + 24rx + B(x, y) = 0. \end{cases}$$

onde $A(x, y)$ e $B(x, y)$ denotam os termos de ordem superior em x e y . Eliminando p no último sistema, obtemos a curva flecnodal dada por $y = (8r^2 - 2r)x^2 + O(x, y)$ com $O(x, y)$ denotando os termos de ordem superior.

Temos também que:

$$\tilde{P} = \begin{cases} z_{yy}p^2 + 2z_{xy}p + z_{xx} = 0 \\ F_p = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} p^2 - 4xp - 2y + 12rx^2 + A(x,y) = 0 \\ 2p - 4x + D(x,y) = 0. \end{cases}$$

onde $A(x,y)$ e $D(x,y)$ denotam os termos de ordem superior em x e y . Eliminando p no último sistema obtemos que a curva parabólica é dada por $y = (6r - 2)x^2 + \tilde{O}(x,y)$ (observe que $(0,0)$ é um ponto parabólico). Da equação das linhas assintóticas

$$(1 + O(3))(y')^2 + (-4x + O(3))x'y' + (-2y + 12rx^2 + O(3))(x')^2 = 0,$$

notamos que o eixo x é uma direção assintótica em $(0,0)$. Obtemos assim que o ponto $(0,0)$ é um ponto parabólico especial.

Deste modo, um ponto parabólico especial separa a curva flecnodal $F = F_1 \cup F_2$ em seus ramos F_1 e F_2 .

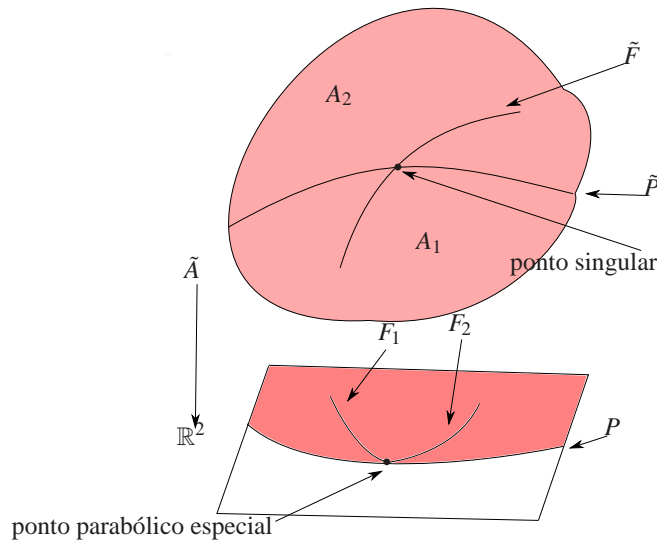


Figura 2.4: Levantamento das curvas flecnodal e parabólica

□

Obteremos agora a posição entre as curvas flecnodal, parabólica e as separatrizes das linhas assintóticas. Para isso, consideraremos a forma normal dada em (2-9).

Consideremos a equação assintótica $F(x,y,p) = z_{yy}p^2 + 2z_{xy}p + z_{xx} = 0$ onde $p = \frac{dy}{dx}$. A esta equação temos associado o campo vetorial:

$$Y : \begin{cases} x' = F_p \\ y' = pF_p \\ p' = -(F_x + pF_y) \end{cases} \implies Y : \begin{cases} x' = 2p - 4x + O_1(x,y) \\ y' = 2p^2 - 4px + O_2(x,y) \\ p' = 6p - 24rx + O_3(x,y) \end{cases}$$

com $O_i(x, y), i = 1, 2, 3$ denotando os termos de ordem superior em x e y . As projeções das curvas integrais de Y por $\Pi(u, v, p) = (u, v)$ são as linhas assintóticas do mergulho X ($X(x, y) = (x, y, z(x, y))$ onde $z(x, y)$ é dado pela equação (2-9)). O ponto singular de Y é $(x, y, p) = (0, 0, 0)$. A matriz jacobiana de $DY(0)$ é dada por:

$$DY(0) = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -24r & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad (2-10)$$

Os autovalores de $DY(0)$ são dados por $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{25 - 48r}$. Os auto espaços associados $E_i, i = 1, 2$, são gerados por $p = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 48r}}{2}x$. Pelo teorema da variedade estável (instável), existe uma variedade invariante tangente ao subespaço estável (instável), observe [12]. Obtemos as separatrizes, com $O_4(x, y)$ denotando os termos de ordem superior:

$$y = \left(\frac{5 \pm \sqrt{25 - 48r}}{4} \right) x^2 + O_4(x, y).$$

Observemos que para $r < \frac{1}{2}$ temos sela; $\frac{1}{2} < r < \frac{25}{48}$ nó; $r > \frac{25}{48}$ foco. Temos também que:

$r < -\frac{1}{2}$ a flecnodal está acima das duas separatrizes;

$-\frac{1}{2} < r < 0$ a flecnodal está entre as separatrizes;

$0 < r < \frac{25}{48}$ a flecnodal está abaixo das duas separatrizes.

Na figura 2.5, temos o esboço das curvas assintóticas, suas separatrizes, a curva parabólica e a curva flecnodal. As curvas assintóticas estão na cor rosa, suas separatrizes nas cores verde e vermelha, a curva parabólica na cor cinza e a curva flecnodal na cor azul. Esboçamos a curva flecnodal em duas tonalidades de azul (azul claro e escuro). Isto foi feito visando separar as curvas de inflexão (F_1 e F_2) das folheações assintóticas. Na seção 2.3, faremos um estudo da relação entre a posição das curvas F_1 e F_2 e o índice do ponto parabólico especial. A figura 2.5 foi gerada utilizando o software matemático “ODEinR2”, que pode ser encontrado em [9].

A figura 2.6 ilustra as inclinações das parábolas em questão. A curva em verde é a inclinação da curva parabólica, azul da flecnodal, vermelha e preta são inclinações das separatrizes.

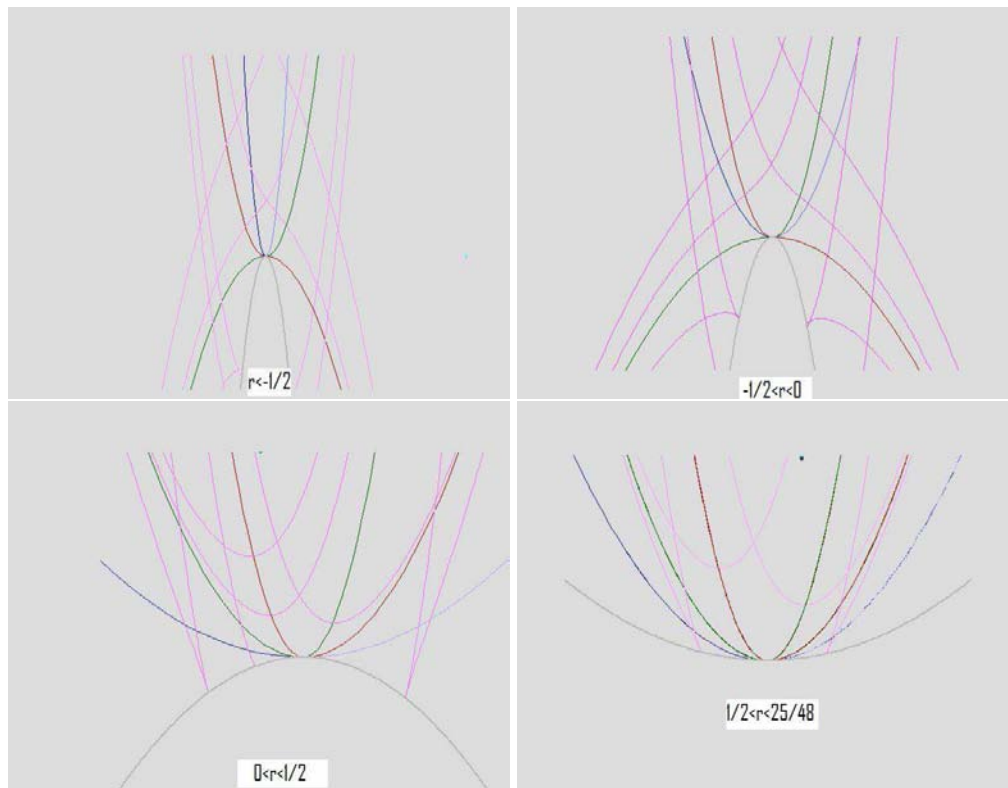


Figura 2.5: Configuração entre separatrizes de curvas assintóticas, curvas flecnodal e parabólica

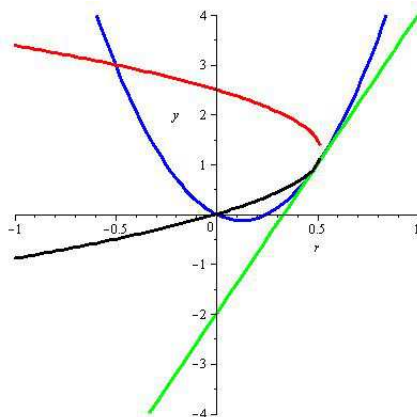


Figura 2.6: Inclinações da parabólica, flecnodal e separatrizes

2.3 Discos Hiperbólicos

Provamos nesta seção o resultado que afirma que; se uma superfície genérica em $\mathbb{R}P^3$ contém um disco hiperbólico delimitado por uma curva parabólica de Jordan, então existe um número ímpar de pontos hiperbólicos especiais no interior deste disco. Em [14] também é demonstrado este resultado. Aqui fizemos a demonstração de uma maneira diferente, utilizando os resultados da seção anterior, como por exemplo a posição relativa entre as curvas flecnodal, parabólica e as separatrizes das linhas assintóticas. Deve ficar

claro que quando dizemos disco hiperbólico estamos nos referindo que a região onde a curvatura Gaussiana é negativa é um disco. Quando a região hiperbólica H de uma superfície é não vazia, ela é limitada por uma curva parabólica. Nesta seção mostraremos que sob certas hipóteses, se uma superfície contém um disco hiperbólico limitado por uma curva parabólica regular de Jordan, existe um número ímpar de pontos hiperbólicos especiais no interior do disco. Para este fim, começamos com a noção de índice de um campo vetorial sobre superfícies.

Seja W um campo diferenciável de vetores em uma superfície orientada S . Dizemos que $p \in S$ é um ponto singular de W se $W(p) = 0$. O ponto singular é isolado se existe uma vizinhança V de p em S tal que W não tem pontos singulares em V além de p . Associamos a cada ponto singular isolado p de um campo de vetores W um número inteiro, o índice de W , definido da seguinte maneira. Seja $X : U \rightarrow S$ uma parametrização ortogonal em $p = X(0, 0)$ compatível com a orientação de S , e seja $\alpha : [0, l] \rightarrow S$ uma curva regular parametrizada simples, fechada, regular por partes e orientada positivamente tal que $\alpha([0, l]) \subset X(U)$ é a fronteira de uma região simples R contendo p como único ponto singular. Seja $W = W(t)$, $t \in [0, l]$, a restrição de W ao longo de α , e seja $\varphi = \varphi(t)$ uma determinação diferenciável do ângulo de X_u a $W(t)$ (observe [1]). Como α é fechada, existe um inteiro I definido por

$$2\pi I = \int_0^l \frac{d\varphi}{dt} dt.$$

I é chamado o índice de W em p . A prova de que a definição acima é independente das escolhas feitas, como a parametrização X e a curva α é encontrada em [1].

Definição 2.8 *Um ponto parabólico especial é dito ser de índice positivo (+1) se ele é um ponto de nó ou foco do campo de linhas definido na superfície \tilde{A} (superfície dada por $F(x, y, p) = z_{yy}p^2 + 2z_{xy}p + z_{xx} = 0$) que define as linhas assintóticas. Dizemos que um ponto parabólico especial é de índice negativo (-1) se ele é um ponto de sela do campo de linhas definido na superfície \tilde{A} que define as linhas assintóticas.*

Obtemos na seção anterior que considerando $z = \frac{y^2}{2} - x^2y + rx^4 + \varphi(x, y)$, um ponto parabólico especial é de sela se, e somente se, $r < \frac{1}{2}$. Deste modo, para $r < \frac{1}{2}$ temos um ponto parabólico especial de índice negativo, e para $r > \frac{1}{2}$ temos ponto parabólico especial de índice positivo.

Proposição 2.9 *A soma dos índices dos pontos parabólicos especiais (do tipo sela, nó e foco definidos acima) sobre a curva parabólica (de Jordan) limitando um disco hiperbólico é igual a dois. Em particular, tais curvas parabólicas contém um número par de pontos parabólicos especiais.*

Demonstração. Denotemos por \tilde{H} o fecho do disco hiperbólico. A superfície \tilde{A} (dada por $F(x, y, p) = z_{yy}p^2 + 2z_{xy}p + z_{xx} = 0$) é uma esfera. Sua característica de Euler é igual a dois. Pelo teorema de Poincaré [1], a soma dos índices de todos pontos singulares do campo de direção definido sobre \tilde{A} é igual a dois.

□

Antes de demonstrarmos o teorema principal desta seção, vamos a dois lemas. O primeiro diferencia o ponto parabólico especial de índice positivo do ponto parabólico especial de índice negativo pela posição das curvas flecnodais F_1 e F_2 . O segundo lema é um caso especial do teorema 2.12.

Lema 2.10 *Considerando a forma normal $z = \frac{y^2}{2} - x^2y + rx^4 + \varphi(x, y)$, os ramos F_1 e F_2 da curva flecnodal em um ponto parabólico especial g , correspondem localmente, respectivamente, ao semi eixo negativo e positivo do eixo x , se e somente se, g é de índice negativo.*

Demonstração. Com a forma normal em questão, o eixo x é tangente à curva parabólica no ponto parabólico especial. Para determinar a posição das curvas F_1 e F_2 em relação ao eixo x , usamos a análise feita na seção anterior, onde obtivemos as possíveis configurações entre linhas assintóticas, curva parabólica e curva flecnodal. Determinamos a posição das curvas F_1 e F_2 estudando o comportamento local das folheações assintóticas.

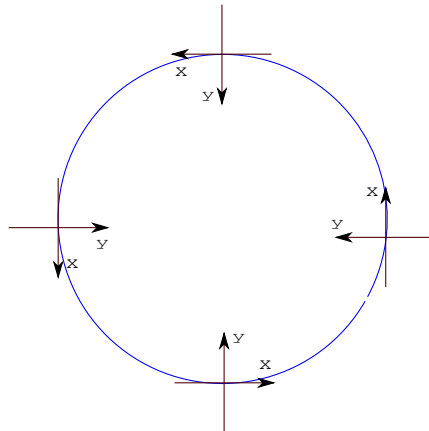


Figura 2.7: Curva parabólica orientada

Para simplificar as análises, determinamos a posição apenas da curva F_1 . Assim, nas figuras a seguir, esboçaremos apenas o comportamento da folheação “1”. O caso de sela, em que $r < \frac{1}{2}$ se divide em três partes:

- 1) $r < -\frac{1}{2}$, onde a curva flecnodal está acima das duas separatrizes;
- 2) $-\frac{1}{2} < r < 0$, onde a curva flecnodal está entre as separatrizes;

3) $0 < r < \frac{1}{2}$, onde a curva flecnodal está abaixo das duas separatrizes.

A curva em preto representa a curva parabólica, a curva em azul representa F_1 (curva de inflexão da folheação assintótica “1”) e as curvas em vermelho representam curvas da folheação assintótica “1”. Na figura 2.8, do lado esquerdo temos representado o caso em que a curva flecnodal está acima ou entre a separatriz da folheação “1”. Do lado direito, temos representado o caso em que a curva flecnodal está abaixo da separatriz da folheação “1”. Observamos que a curva F_1 está sempre do lado negativo do eixo x .

Para um ponto parabólico de índice positivo, ou seja, para $r > \frac{1}{2}$, a situação é esboçada na figura 2.9. Neste caso a curva F_1 está sempre do lado positivo do eixo x . Portanto, temos localmente a posição das curvas F_1 e F_2 em um ponto parabólico de

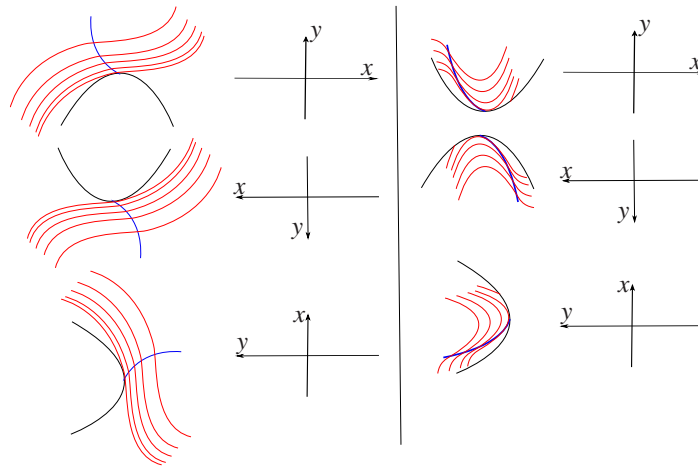


Figura 2.8: $r < 0$ e $0 < r < \frac{1}{2}$

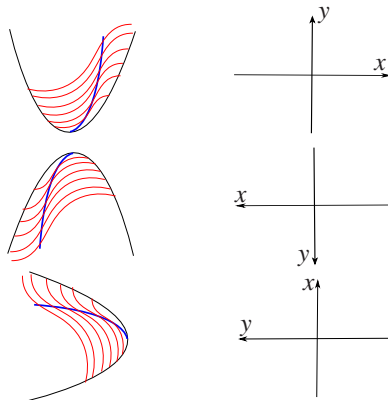


Figura 2.9: $r > \frac{1}{2}$

índice positivo e negativo.

□

Como consequência do lema 2.10, temos que se g_1 e g_2 são dois pontos parabólicos especiais de índice positivo e dois vetores v_1 e v_2 são tangentes à F em g_1 e g_2 , respectivamente, e ambos estão apontando no sentido de F_2 para F_1 , então v_1 e v_2 orientam a curva parabólica da mesma maneira. De fato, uma vez que todos pontos elípticos na vizinhança da curva parabólica pertencem a mesma componente conexa do domínio elíptico, eles tem a mesma co-orientação natural (dada pelo plano tangente). Desde que ambos pontos parabólicos especiais são de mesmo índice, a afirmação segue do lema 2.10. Este fato é de fundamental importância para a demonstração dos próximos resultados.

Lema 2.11 *Suponhamos que a curva parabólica limita um disco hiperbólico D (sobre uma superfície suave) e tem exatamente dois pontos parabólicos especiais. Suponhamos ainda que a curva parabólica é uma curva regular de Jordan, e que as curvas F_1 e F_2 são regulares, isto é, são pré imagem de um valor regular de uma função diferenciável. Nestas condições, existe um número ímpar de pontos hiperbólicos especiais (pontos de intersecção das curvas F_1 e F_2) no interior do disco.*

Demonstração. Escrevamos g_1 e g_2 os pontos parabólicos especiais sobre a curva parabólica. Pela proposição 2.9, ambos g_1 e g_2 são de índice positivo. Desde que existem somente dois pontos parabólicos especiais sobre a curva parabólica, a curva regular F_1 é um seguimento que “começa” em g_1 e “termina” em g_2 . Este segmento separa H em duas partes, que chamaremos de A e B . A curva regular F_2 é também um seguimento “começando” em g_1 , e “terminando” em g_2 . Pelo lema anterior, como os dois pontos parabólicos especiais são de índice positivo, temos que se na vizinhança de g_1 o segmento F_2 está do lado A , então, na vizinhança de g_2 ele está do lado B . Portanto F_2 cruza F_1 um número ímpar de vezes.

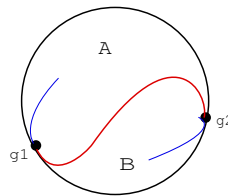


Figura 2.10: Configuração com dois pontos parabólicos especiais

□

Exemplo: A superfície dada por $z = xy + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{24}y^4 + \frac{1}{12}\sqrt{3}x^2y^2$ tem dois pontos parabólicos especiais. A figura seguinte é a superfície dada pela equação $z_{yy}p^2 + 2z_{xy}p + z_{xx} = 0$.



Figura 2.11: $z_{yy}p^2 + 2z_{xy}p + z_{xx} = 0$

Na figura seguinte, do lado esquerdo temos a projeção $((x, y, p) \rightarrow (x, y))$ das linhas assintóticas e da curva parabólica. Do lado direito temos a curva flecnodal ($F_1 \cup F_2$), onde a curva em preto é a curva de inflexão para uma folheação (F_1) e a curva em vermelho é a curva de inflexão para a outra folheação (F_2). Neste caso temos um ponto hiperbólico

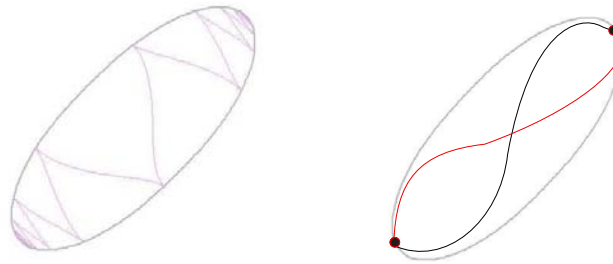


Figura 2.12: *Curvas flecnodal e parabólica*

especial.

Teorema 2.12 *Seja D um disco hiperbólico limitado por uma curva parabólica de Jordan. Suponhamos que na região hiperbólica as curvas F_1 e F_2 são regulares, isto é, são pré imagem de um valor regular de uma função diferenciável. Nestas condições, existe um número ímpar de pontos hiperbólicos especiais no interior do disco.*

Demonstração. Consideraremos apenas as componentes conexas das curvas F_1 e F_2 . Denotemos por G^+ o número de pontos parabólicos especiais de índice positivo e G^- o número de pontos parabólicos especiais de índice negativo. Pela proposição 2.9, temos que $G^+ - G^- = 2$. Deste modo, temos sempre dois pontos de índice positivo a mais que pontos de índice negativo. Assim, qualquer que seja a configuração das curvas F_1 e F_2 no interior do disco hiperbólico, temos sempre uma componente conexa de F_1 (ou de F_2) que começa em um ponto parabólico especial g_m de índice positivo e termina em outro ponto parabólico especial g_n também de índice positivo.

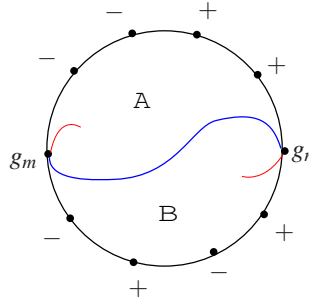


Figura 2.13: Configuração com mais de dois pontos parabólicos especiais

Consideremos assim a componente conexa de F_1 que começa em g_m e termina em g_n . Esta componente separa o disco em duas partes, A e B . Afirmamos que o número de pontos parabólicos especiais é par na parte A , o mesmo valendo para a parte B . De fato, se tivéssemos, por exemplo, uma quantidade ímpar de pontos parabólicos especiais na parte A , teríamos auto intersecção das componentes conexas de F_1 . Como consideramos a componente conexa de F_1 que começa em um ponto parabólico especial de índice positivo e termina em um ponto do mesmo tipo separando as partes A e B , temos um número ímpar de componentes conexas de curvas F_2 começando em cada uma destas partes. Deste modo, o número de cruzamentos de curvas F_1 e F_2 é ímpar.

□

Nos resultados acima consideramos as curvas F_1 e F_2 regulares. Cabe observar o que pode ocorrer sem esta hipótese. Pelo lema de Morse temos:

Lema 2.13 (Lema de Morse) *Seja a um ponto crítico não-degenerado de uma função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k ($k \geq 3$) num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Existe um sistema de coordenadas $\xi : V \rightarrow W$, de classe C^{k-2} , com $a \in W \subset U$, $0 \in V$ e $\xi(0) = a$, tal que*

$$f(\xi(y)) - f(a) = \sum_{i,j=1}^m a_{ij}y_iy_j$$

para todo $y = (y_1, \dots, y_n) \in V$, onde

$$a_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).$$

Como corolário do lema de Morse, temos que nas mesmas hipóteses do lema, existe um sistema de coordenadas $\zeta : V_0 \rightarrow W$, de classe C^{k-2} , com $a \in W \subset U$, $0 \in V_0$, $\zeta(0) = a$ e $f(\zeta(y)) - f(a) = -y_1^2 - \dots - y_i^2 + y_{i+1}^2 + \dots + y_n^2$.

As demonstrações do lema de Morse e de seu corolário são encontradas em [8]. O fato que queremos observar aqui é que, se $n = 2$ no corolário acima, as curvas de nível na

vizinhança de um ponto crítico não- degenerado de uma função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, definida em um aberto do plano, tem uma das formas abaixo:

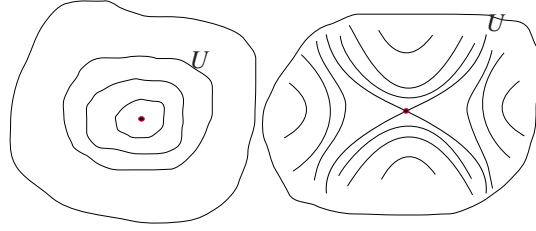


Figura 2.14: *Lema de Morse*

A esquerda, temos um ponto de máximo ou de mínimo; à direita um ponto de sela. De fato, se o ponto é de máximo ou de mínimo local, o lema de Morse nos dá $f(\zeta(y)) - f(a) = \pm(y_1^2 + y_2^2)$, logo as curvas de nível f próximas de a são imagens pelo difeomorfismo ζ dos círculos $y_1^2 + y_2^2 = \text{constante}$, logo têm a forma da figura à esquerda. A figura à direita, é a imagem por um difeomorfismo das curvas de nível da função $f(\zeta(y)) = -y_1^2 + y_2^2$. Logo, se impusermos uma condição de não regularidade na curva flecnodal (F_1 ou F_2), na vizinhança do ponto crítico teremos uma das duas situações esboçadas da figura acima.

Lema 2.14 *Consideremos a forma normal:*

$$z = xy + \frac{a_{03}}{6}y^3 + \frac{a_{12}}{2}xy^2 + \frac{a_{21}}{2}x^2y + \frac{a_{40}}{24}x^4 + \frac{a_{04}}{24}y^4 + \frac{a_{22}}{4}x^2y^2 + \frac{a_{13}}{6}xy^3 + \frac{a_{31}}{6}yx^3 + \frac{a_{50}}{120}x^5 + \frac{a_{05}}{120}y^5 + \frac{a_{32}}{6}x^3y^2 + \frac{a_{23}}{6}x^2y^3.$$

com $a_{03} \neq 0$. Uma condição suficiente para que a curva flecnodal não seja regular na origem é que $a_{40} = 0$ e $3a_{21}^2 - 2a_{31} = 0$.

Demonstração. Usando o sistema (2.1), obtemos que a curva flecnodal é dada por

$$H(x,y) = -8a_{03}a_{40}x + (-8a_{03}a_{31} + 12a_{03}a_{21}^2)y + (-12a_{03}a_{12}a_{40} - 18a_{12}^2a_{21}^2 + 12a_{12}^2a_{31} + 12a_{13}a_{21}^2 + 24a_{03}a_{21}^3 - 8a_{13}a_{31} - 8a_{04}a_{40})xy + (-8a_{04}a_{31} + 12a_{04}a_{21}^2 - 8a_{03}a_{32} + 18a_{03}a_{21}a_{22} - 12a_{03}a_{12}a_{31})y^2 + (-4a_{03}a_{50} - 18a_{03}a_{21}a_{40} - 8a_{13}a_{40} + 12a_{12}^2a_{40})x^2 + M(x,y) = 0,$$

onde $M(x,y)$ denota os termos de ordem maior ou igual a três de x e y . Notemos que

$$H_x = -8a_{03}a_{40} \quad H_y = -4a_{03}(2a_{31} - 3a_{21}^2).$$

Deste modo, para não termos a hipótese de regularidade, basta fazer $a_{40} = 0$ e $3a_{21}^2 - 2a_{31} = 0$. Neste caso, pelo lema de Morse, no ponto crítico a curva flecnodal faz uma “cruz” ou é apenas um ponto.



Figura 2.15: Pontos críticos

Façamos um exemplo satisfazendo esta condição de não regularidade, onde obtemos um ponto de cruz. □

Exemplo: Consideremos

$$z = xy + \frac{1}{6}y^3 + \frac{3}{2}y^2x + x^2y - \frac{1}{2}x^2y^2 + x^3y.$$

Neste caso $a_{40} = 0$, $a_{21} = 2$ e $a_{31} = 6$. Temos portanto a condição de não regularidade na origem. Na vizinhança da origem o conjunto de inflexão é dado por:

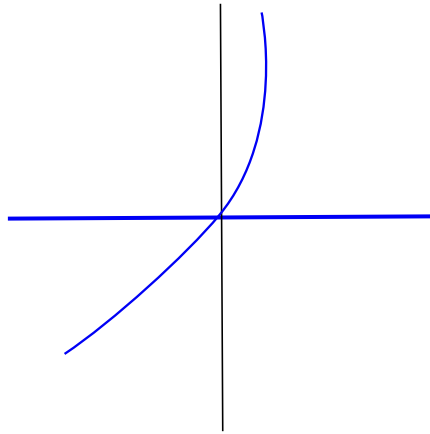


Figura 2.16: Conjunto de inflexão na vizinhança da origem

Observemos que temos um ponto de “cruz” na origem.

Pontos Quadráticos

3.1 Pontos Quadráticos e Inflexões

Este capítulo foi baseado em [11]. Alguns resultados desta seção como o lema 3.3, observação 3.5 e a proposição 3.7 são resultados obtidos pelos autores. Nós colecionamos aqui alguns fatos sobre pontos quadráticos (ou pontos hiperbólicos especiais). No capítulo anterior, definimos como ponto hiperbólico especial como um ponto de intersecção das curvas F_1 e F_2 . A seguir damos outra definição para estes pontos. Porém, no decorrer do texto provamos que ambas são equivalentes. Carregaremos neste capítulo o termo de ponto quadrático ao invés de ponto hiperbólico especial.

Definição 3.1 *Um ponto x de uma superfície em \mathbb{R}^3 ou $\mathbb{R}P^3$ é chamado quadrático se a superfície puder ser aproximada por uma quádrlica em x até ordem três.*

Identificaremos localmente $\mathbb{R}P^3$ com o espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 com coordenadas

$$x = \frac{x_1}{x_0} \quad y = \frac{x_2}{x_0} \quad z = \frac{x_3}{x_0}.$$

Dada uma superfície hiperbólica S , estas coordenadas podem ser escolhidas de tal forma que em uma vizinhança de um ponto p esta superfície é dada por

$$z = xy + \frac{1}{3}(ax^3 + by^3) + \frac{1}{2}(cx^2y + dxy^2) + O(4), \quad (3-1)$$

onde a, b, c e d são constantes. De fato, basta escolher as direções assintóticas em p como os eixos x e y .

Lema 3.2 *Considerando a forma normal (3-1), um ponto p é quadrático se, e somente se, os parâmetros a e b são iguais a zero em p .*

Demonstração. Consideremos então a forma normal (3-1) e a quádrlica

$$b_1xy + \frac{b_2}{2}x^2 + \frac{b_3}{2}y^2 + b_4xz + b_5yz + \frac{b_6}{2}z^2 + z = 0. \quad (3-2)$$

Resolvendo esta última equação em z , obtemos:

$$z_1 = \frac{-b_4x - b_5y - 1 + (b_4^2x^2 + 2b_4b_5xy + 2b_4x + b_5^2y^2 + 2b_5y + 1 + 2b_1b_6xy - b_2b_6x^2 - b_3b_6y^2)^{\frac{1}{2}}}{b_6}.$$

Escrevendo as partes quadrática e cúbica de z_1 , e equação da quádrlica fica

$$z = \frac{-b_2}{2}x^2 - b_1xy - \frac{b_3}{2}y^2 + \frac{1}{2}(b_5y + b_4x)(2b_1xy + b_2x^2 + b_3y^2) + O(4). \quad (3-3)$$

De (3-1) e (3-3), temos:

$$(1 + b_1)xy + \frac{1}{2}b_2x^2 + \frac{1}{2}b_3y^2 + \left(\frac{a}{3} - \frac{b_4b_2}{2}\right)x^3 + \left(\frac{b}{3} - \frac{b_5b_3}{2}\right)y^3 + \left(-b_4b_1 + \frac{c}{2} - \frac{b_5b_2}{2}\right)yx^2 + \left(\frac{d}{2} - b_5b_1 - \frac{b_4b_3}{2}\right)y^2x = 0.$$

Para termos contato de ordem dois, devemos fazer $b_1 = -1$, $b_2 = b_3 = 0$. Com isso, notemos que a parte cúbica da quádrlica se fatora

$$xy(b_4x + b_5y).$$

Gostaríamos assim, que a parte cúbica da superfície se fatorasse da forma $xy(rx + sy)$. Obtemos assim:

$$r = \frac{c}{2}, s = \frac{d}{2}, a = b = 0. \quad \square$$

De um modo geral temos:

Lema 3.3 Consideremos a forma normal $z = cxy + \frac{k_1}{2}x^2 + \frac{k_2}{2}y^2 + \frac{a_1}{2}x^2y + \frac{a_2}{2}xy^2 + \frac{a}{6}x^3 + \frac{b}{6}y^3 + O(4)$, com $k_1, k_2 \neq 0$ e $4c^2 \neq k_1k_2$. Um ponto p é quadrático se, e somente se

$$\begin{cases} a = \frac{3k_1(2ca_1 - k_1a_2)}{4c^2 - k_1k_2} \\ b = \frac{-3k_2(a_1k_2 - 2ca_2)}{4c^2 - k_1k_2} \end{cases}$$

em p .

Demonstração. Como foi feito anteriormente, consideremos a quádrlica

$$b_1xy + \frac{b_2}{2}x^2 + \frac{b_3}{2}y^2 + b_4xz + b_5yz + \frac{b_6}{2}z^2 + z = 0.$$

Resolvendo esta equação em z obtemos novamente a equação da quádrlica como

$$z = \frac{-b_2}{2}x^2 - b_1xy - \frac{b_3}{2}y^2 + \frac{1}{2}(b_5y + b_4x)(2b_1xy + b_2x^2 + b_3y^2). \quad (3-4)$$

Da forma normal em questão e de (3-4), obtemos

$$\left(\frac{k_1}{2} + \frac{b_2}{2}\right)x^2 + \left(\frac{b_3}{2} + \frac{k_2}{2}\right)y^2 + \left(\frac{a}{6} - \frac{b_4b_2}{2}\right)x^3 + \left(\frac{b}{6} - \frac{b_5b_3}{2}\right)y^3 + (b_1 + c)xy + \left(-b_4b_1 + \frac{a_1}{2} - \frac{b_5b_2}{2}\right)yx^2 + \left(\frac{a_2}{2} - b_5b_1 - \frac{b_4b_3}{2}\right)y^2x.$$

Para termos contato de ordem dois, devemos fazer $b_1 = -c$, $b_2 = -k_1$ e $b_3 = -k_2$.

Com isso, notemos que a parte cúbica da quádrlica se fatora

$$\left(\frac{k_1}{2}x^2 + cxy + \frac{k_2}{2}y^2\right)(b_4x + b_5y).$$

Gostaríamos assim, que a parte cúbica da superfície se fatorasse na forma

$$\left(\frac{k_1}{2}x^2 + cxy + \frac{k_2}{2}y^2\right)(rx + sy). \text{ Obtemos assim}$$

$$\begin{cases} a = 3k_1r \\ a_1 = 2cr + k_1s \\ a_2 = k_2r + 2cs \\ b = 3k_2s. \end{cases}$$

Eliminando r e s ficamos com

$$\begin{cases} a_1 = \frac{2ca}{3k_1} + \frac{k_1b}{3k_2} \\ a_2 = \frac{k_2a}{3k_1} + \frac{2cb}{3k_2}, \end{cases}$$

donde obtemos

$$\begin{cases} a = \frac{3k_1(2ca_1 - k_1a_2)}{4c^2 - k_1k_2} \\ b = \frac{-3k_2(a_1k_2 - 2ca_2)}{4c^2 - k_1k_2}. \end{cases}$$

□

Lema 3.4 *Pontos quadráticos são os pontos em que ambas linhas assintóticas possuem inflexão.*

Demonstração. De fato, consideremos a forma normal $z = xy + \frac{1}{3}(ax^3 + by^3) + \frac{1}{2}(cx^2y + dxy^2) + O(4)$. Pelo lema (3.2), um ponto é quadrático se, e somente se $a = b = 0$. A equação das linhas assintóticas é dada por $(x')^2z_{xx} + 2x'y'z_{xy} + 2(y')^2z_{yy} = 0$. Logo:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-z_{xy} - (z_{xy}^2 - z_{xx}z_{yy})^{\frac{1}{2}}}{z_{xx}}.$$

Assim,

$$(I) \begin{cases} x' = -z_{xy} - (z_{xy}^2 - z_{xx}z_{yy})^{\frac{1}{2}} \\ y' = z_{xx}. \end{cases}$$

Como $z_{xy}(0,0) = 1$, $z_{xx}(0,0) = z_{yy}(0,0) = 0$, temos no ponto $(0,0)$

$$\begin{cases} x' = -2 \\ y' = 0. \end{cases}$$

Derivando a expressão (I) e aplicando novamente no ponto $(0,0)$, obtemos

$$\begin{cases} x'' = 4c \\ y' = -2a. \end{cases}$$

Logo, obtemos uma aproximação para a linha assintótica:

$$x(t) = x(0) + x'(0)t + x''(0)\frac{t^2}{2} + \dots = -2t + (4c - a)\frac{t^2}{2} + \dots$$

$$y(t) = y(0) + y'(0)t + y''(0)\frac{t^2}{2} + \dots = -at^2 + \dots$$

$$z(t) = x(t)y(t) + \frac{1}{3}(ax(t)^3 + by(t)^3) + \frac{1}{2}(cx(t)^2y(t) + dx(t)y(t)^2) + \dots$$

Donde obtemos que sua curvatura em $(0,0)$ é dada por $k = \frac{a}{2}$. De modo análogo,

considerando $\frac{dy}{dx}$, obtemos $k = \frac{b}{2}$. □

Com isso chegamos a equivalência da definição de ponto quadrático (ponto hiperbólico especial) do capítulo anterior e a definição dada neste capítulo.

Observação 3.5 No capítulo 1, provamos o teorema de Beltrami-Enneper, que afirma que o valor absoluto da torção τ em um ponto de uma curva assintótica, cuja curvatura não se anula, é dada por

$$|\tau| = \sqrt{-K},$$

onde K é a curvatura Gaussiana da superfície no ponto considerado. Provaremos agora que o teorema ainda é válido em um ponto de inflexão, ou seja, onde a curvatura é zero. Consideremos a superfície dada por $X(x,y) = (x,y,z(x,y))$ onde

$$z(x,y) = xy + \frac{1}{3}(0x^3 + by^3) + \frac{1}{2}(cx^2y + dxy^2) + O(4).$$

Pelo lema 3.4, temos que no ponto $(0,0)$, a curvatura da linha assintótica é dada por $k = \frac{a}{2}$ (considerando $\frac{dx}{dy}$). Portanto, se $a = 0$ temos ponto de inflexão. Continuando com as derivadas do lema anterior, obtemos os termos $x'''(0)$ e $y'''(0)$, donde:

$$x(t) = -2t + [4c - a]\frac{t^2}{2} + [(2c - a)^2 - 4c^2 - 2(-2c + \frac{a}{2})^2 - (a(-4d + c))] \frac{t^3}{6} + \dots$$

$$y(t) = -at^2 + [-2a(-2c + \frac{a}{2}) - 2ca] \frac{t^3}{6} + \dots$$

$$z(t) = x(t)y(t) + \frac{1}{3}(ax(t)^3 + by(t)^3) + \frac{1}{2}(cx(t)^2y(t) + dx(t)y(t)^2) + \dots$$

Calculando a torção τ desta curva com $a = 0$ (ou seja, calculando a torção em um ponto de inflexão), e fazendo o limite de $t \rightarrow 0$, obtemos que na origem $\tau = -1$. Determinemos agora a curvatura Gaussiana no ponto $(0, 0)$ desta superfície. Os valores dos termos da primeira forma fundamental e da segunda forma fundamental em $(0, 0)$ são dados por:

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1,$$

$$e = 0, \quad f = 1, \quad g = 0.$$

Portanto:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -1.$$

Deste modo, obtemos aqui que em um ponto de inflexão $|\tau| = \sqrt{-K}$.

Observação 3.6 Observamos que definimos a torção de uma curva γ em \mathbb{R}^3 em um ponto onde a curvatura é zero da seguinte maneira:

Seja t_0 um ponto onde $k(t_0) = 0$, ou seja, $|\gamma'(t_0) \wedge \gamma''(t_0)| = 0$. Definimos a torção em t_0 quando o seguinte limite existir:

$$\tau(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{[\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t)]}{|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)|^2}.$$

O próximo resultado dá uma caracterização de pontos de inflexão em relação à posição relativa entre linhas geodésicas e linhas assintóticas.

Definição 3.7 Consideremos duas curvas dadas nas formas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ onde $f, g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções de classe C^∞ . Seja x_0 um ponto interior a I e $P_0 = (x_0, y_0)$ um ponto onde as duas curvas se tocam, isto é, $y_0 = f(x_0) = g(x_0)$. Diz-se que as curvas têm em P_0 um contato de ordem n se as funções e suas derivadas coincidem em x_0 até ordem $n - 1$ mas não na ordem n , isto é

$$f^i(x_0) = g^i(x_0), \quad i = 0, 1, \dots, n - 1; \quad f^n(x_0) \neq g^n(x_0).$$

Proposição 3.8 Consideremos a superfície parametrizada $X(x, y) = (x, y, z(x, y))$, onde

$$z = xy - \frac{y^2}{2} + \frac{a_{12}}{2}xy^2 + \frac{a_{21}}{2}x^2y + \frac{a_{30}}{6}x^3 + \frac{a_{03}}{6}y^3 + \frac{a_{22}}{4}x^2y^2 + \frac{a_{04}}{24}y^4 + \frac{a_{40}}{24}x^4 + \frac{a_{13}}{6}xy^3 + \frac{a_{31}}{6}x^3y + \frac{a_{41}}{24}x^4y + \frac{a_{50}}{120}x^5 + \dots$$

e $a_{40} \neq 0$. Em um ponto de inflexão da linha assintótica ($a_{30} = 0$) a linha geodésica “cruza” a linha assintótica com contato cúbico.

Demonstração. Da equação das geodésicas temos

$$\begin{cases} y''(x) = \Gamma_{22}^1 (y')^3 + (2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2)(y')^2 + (\Gamma_{11}^1 - 2\Gamma_{12}^2)y' - \Gamma_{11}^2 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

donde obtemos $y''(0) = 0$.

Notemos que $y''(x) = F(x, y, y')$. Logo $y'''(x) = F_x + F_y y' + F_{y'} y''$, donde obtemos $y'''(0) = 0$. Da mesma forma, $y'''(x) = G(x, y, y')$. Seguindo com as derivadas obtemos

$$y^{(4)}(0) = -4a_{30} = 0,$$

$$y^{(5)}(0) = -3a_{40} - 6a_{30}a_{21} = -3a_{40} \neq 0.$$

Da equação das linhas assintóticas temos:

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{-f + (f^2 - eg)^{\frac{1}{2}}}{g} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Notemos que $y'(x) = H(x, y)$. Logo, $y''(x) = H_x + H_y y'$ donde obtemos $y''(0) = \frac{a_{30}}{2} = 0$. Do mesmo modo, $y''(x) = M(x, y)$. Seguindo com as derivadas obtemos

$$y'''(0) = \frac{(a_{30})^2}{2} + \left(\frac{a_{21}}{8} + \frac{a_{12}}{2}\right)a_{30} + \frac{a_{40}}{4} = \frac{a_{40}}{4} \neq 0.$$

Temos portanto contato cúbico.

Note que se $a_{30} \neq 0$ (em um ponto que não é de inflexão) a geodésica e a linha assintótica teriam contato quadrático. A situação em que $a_{30} \neq 0$ e $a_{30} = 0$ é exibida na figura abaixo. □

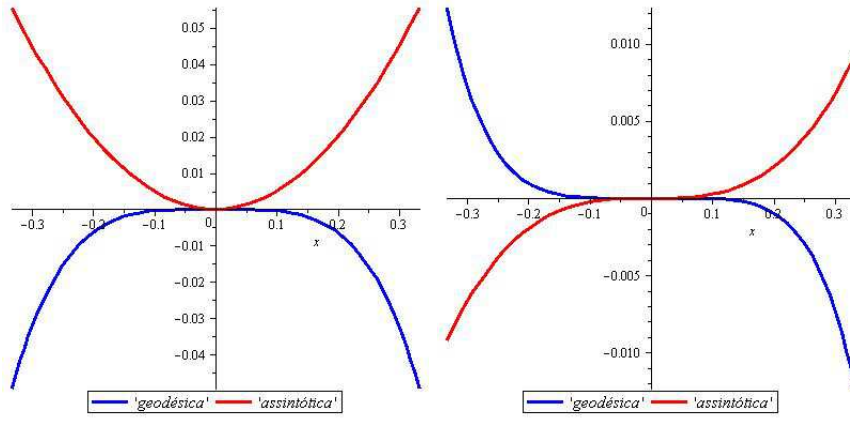


Figura 3.1: $a_{30} \neq 0$ e $a_{30} = 0$ respectivamente

3.2 Caracterização de Inflexões

Os resultados desta seção foram todos obtidos pelos autores. Nesta seção caracterizaremos as inflexões de uma superfície pela curvatura geodésica. Dada uma parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$, onde M é uma superfície de \mathbb{S}^3 , as linhas assintóticas são dadas pelas curvas integrais de $e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 = 0$ com

$$e = \frac{\det[X, X_u, X_v, X_{uu}]}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad f = \frac{\det[X, X_u, X_v, X_{uv}]}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad g = \frac{\det[X, X_u, X_v, X_{vv}]}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Seja $\gamma(s) = X(u(s), v(s))$, onde u e v satisfazem a equação $e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 = 0$. Derivando em s temos:

$$\gamma = X(u, v) \implies \gamma' = X_u u' + X_v v' \implies \gamma'' = X_{uu}(u')^2 + 2X_{uv}u'v' + X_{vv}(v')^2 + X_u u'' + X_v v''.$$

Temos que:

$$X_{uu} = \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN - EX,$$

$$X_{uv} = \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN - FX,$$

$$X_{vv} = \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN - GX.$$

$$\implies \gamma'' = (u')^2(\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN - EX) + 2u'v'(\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN - FX) + (v')^2(\Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN - GX) + X_u u'' + X_v v''.$$

$$\implies \gamma'' = ((u')^2 \Gamma_{11}^1 + 2u'v' \Gamma_{12}^1 + (v')^2 \Gamma_{22}^1 + u'')X_u + ((u')^2 \Gamma_{11}^2 + 2u'v' \Gamma_{12}^2 + (v')^2 \Gamma_{22}^2 + v'')X_v - ((u')^2 E + 2u'v' F + (v')^2 G)X.$$

onde já usamos que $e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 = 0$. Analisando as inflexões, onde $\gamma'' = 0$, temos que:

$$\begin{cases} (u')^2 \Gamma_{11}^1 + 2u'v' \Gamma_{12}^1 + (v')^2 \Gamma_{22}^1 + u'' = 0 \\ (u')^2 \Gamma_{11}^2 + 2u'v' \Gamma_{12}^2 + (v')^2 \Gamma_{22}^2 + v'' = 0. \end{cases}$$

Observamos que as inflexões são vistas na derivada covariante, por isso não acrescentamos o termo de X .

Do sistema de equações acima temos:

$$\frac{d^2v}{du^2} = \Gamma_{22}^1 \left(\frac{dv}{du}\right)^3 + (2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2) \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + (\Gamma_{11}^1 - 2\Gamma_{12}^2) \frac{dv}{du} - \Gamma_{11}^2. \quad (3-5)$$

Da equação $e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2 = 0$, fazendo $p = \frac{dv}{du}$, obtemos $F(u, v, p) = gp^2 + 2fp + e = 0$. Deste modo, a equação (3-5) fica:

$$\frac{d^2v}{du^2} = p' = \Gamma_{22}^1 p^3 + (2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2) p^2 + (\Gamma_{11}^1 - 2\Gamma_{12}^2) p - \Gamma_{11}^2.$$

Da equação $F(u, v, p) = 0$, temos o campo vetorial

$$\begin{cases} u' = 1 \\ v' = p \\ p' = -\frac{(F_u + pF_v)}{F_p}. \end{cases}$$

Deste modo o conjunto de inflexão (curva flecnodal) é dado por

$$\begin{cases} 2(gp + f)[\Gamma_{22}^1 p^3 + (2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2) p^2 + (\Gamma_{11}^1 - 2\Gamma_{12}^2) p - \Gamma_{11}^2] + g_v p^3 + (g_u + 2f_v) p^2 + \\ (e_v + 2f_u) p + e_u = 0 \\ gp^2 + 2fp + e = 0. \end{cases}$$

Com isso provamos:

Proposição 3.9 *Dada uma parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow M$, onde M é uma superfície de \mathbb{S}^3 , a curva flecnodal (curva regular formada pelos pontos de inflexão das linhas assintóticas) de M é dada por:*

$$\begin{cases} 2(gp + f)[\Gamma_{22}^1 p^3 + (2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2) p^2 + (\Gamma_{11}^1 - 2\Gamma_{12}^2) p - \Gamma_{11}^2] + g_v p^3 + (g_u + 2f_v) p^2 + \\ (e_v + 2f_u) p + e_u = 0 \\ gp^2 + 2fp + e = 0. \end{cases} \quad (3-6)$$

Observemos que em \mathbb{R}^3 este conjunto obtido coincide com nossa definição inicial de inflexão, ou seja, o conjunto onde as duas primeiras derivadas são linearmente dependentes. De fato da equação das linhas assintóticas $F(u, v, p) = gp^2 + 2fp + e = 0$, temos o campo vetorial associado

$$Y : \begin{cases} u' = 1 \\ v' = p \\ p' = -\left(\frac{F_u + pF_v}{F_p}\right). \end{cases}$$

Seja $\gamma(s) = X(u(s), v(s))$ uma linha assintótica. Usando o campo Y , e o fato que $e + 2fp + gp^2 = 0$, temos as derivadas:

$$\gamma' = X_u + pX_v$$

$$\begin{aligned}\gamma'' &= (\Gamma_{11}^1 + 2p\Gamma_{12}^1 + p^2\Gamma_{22}^1)X_u + (\Gamma_{11}^2 + 2p\Gamma_{12}^2 + p^2\Gamma_{22}^2 + p')X_v + (gp^2 + 2fp + e)N \\ &= (\Gamma_{11}^1 + 2p\Gamma_{12}^1 + p^2\Gamma_{22}^1)X_u + (\Gamma_{11}^2 + 2p\Gamma_{12}^2 + p^2\Gamma_{22}^2 + p')X_v.\end{aligned}$$

Logo, para $\gamma' \wedge \gamma'' = 0$, devemos ter:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 + 2p\Gamma_{12}^1 + p^2\Gamma_{22}^1 = \lambda & (I) \\ \Gamma_{11}^2 + 2p\Gamma_{12}^2 + p^2\Gamma_{22}^2 + p' = \lambda p & (II) \\ e + 2fp + gp^2 = 0 & (III) \end{cases}$$

De (I), (II) e Y (onde $p' = -(\frac{F_u + pF_v}{F_p})$), obtemos

$$2(gp + f)[\Gamma_{22}^1 p^3 + (2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2)p^2 + (\Gamma_{11}^1 - 2\Gamma_{12}^2)p - \Gamma_{11}^2] + gvp^3 + (g_u + 2f_v)p^2 + (e_v + 2f_u)p + e_u = 0.$$

Continuaremos trabalhando apenas com superfícies em que as curvas flecnodais F_1 e F_2 são regulares.

3.3 Perturbação do Toro

Consideraremos o toro padrão T dado por $x_1x_2 = x_0x_3$ em $\mathbb{R}P^3$ (toro considerado em [11]). Uma parametrização do mesmo é dada por:

$$\begin{aligned}x_0(u, v) &= \cos\left(\frac{u}{2}\right)\cos\left(\frac{v}{2}\right) & x_1(u, v) &= \cos\left(\frac{u}{2}\right)\sin\left(\frac{v}{2}\right) \\ x_2(u, v) &= \sin\left(\frac{u}{2}\right)\cos\left(\frac{v}{2}\right) & x_3(u, v) &= \sin\left(\frac{u}{2}\right)\sin\left(\frac{v}{2}\right)\end{aligned} \quad (3-7)$$

onde $(u, v) \in [0, 2\pi)$.

Proposição 3.10 *As linhas assintóticas do toro T dado acima são as curvas coordenadas.*

Demonstração. Os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais com respeito a $N = X \wedge X_u \wedge X_v$ são dados por:

$$E(u, v) = \frac{1}{4}, \quad e(u, v) = 0$$

$$F(u, v) = 0, \quad f(u, v) = \frac{1}{16}$$

$$G(u, v) = \frac{1}{4}, \quad g(u, v) = 0.$$

onde o vetor normal de T é dado por

$$N = \frac{1}{4}(\sin(\frac{u}{2}) \sin(\frac{v}{2}), -\sin(\frac{u}{2}) \cos(\frac{v}{2}), -\cos(\frac{u}{2}) \sin(\frac{v}{2}), \cos(\frac{u}{2}) \cos(\frac{v}{2})).$$

Portanto, as linhas assintóticas são definidas por $dudv = 0$. □

Descreveremos uma pequena perturbação de T em termos de uma função duplamente periódica sobre \mathbb{T}^2 . Consideramos a superfície

$$\tilde{X}(u, v) = X(u, v) + \varepsilon h(u, v)N, \quad (3-8)$$

onde $h : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave duplamente periódica, ε um número real positivo suficientemente pequeno e N denota o vetor normal a superfície. Com ε suficientemente pequeno, a família de superfícies dada em (3-8) continua suave. Reciprocamente, cada superfície M suficientemente próxima de T pode ser representada por uma parametrização da forma (3-8).

Teorema 3.11 *Consideremos a perturbação (3-8) do toro. Suponhamos que as curvas $h_{uuu} + h_u = 0$ e $h_{vvv} + h_v = 0$ são regulares e que $h_{vv} \neq 0$. Um ponto com coordenadas $(u, v) = (u_0, v_0)$ continua quadrático em ordem ε se, e somente se, a condição*

$$\begin{cases} h_{uuu} + h_u = 0 \\ h_{vvv} + h_v = 0 \end{cases} \quad (3-9)$$

é satisfeita em (u_0, v_0) . Ou seja, para cada solução (u_0, v_0) de (3-9), temos um ponto quadrático “próximo” de (u_0, v_0) .

Demonstração. Determinemos a curva flecnodal da superfície dada em (3-8). Os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental são dados por:

$$\begin{aligned} e &= \frac{\varepsilon}{16}(h_{uu}) + \frac{\varepsilon^2}{32}(h_u h_v) + \varepsilon^3 \left(-\frac{1}{256} h_{uu} h^2 + \frac{1}{128} h_u^2 h \right) + O(4), \\ f &= \frac{1}{16} + \frac{\varepsilon}{16}(h_{uv}) + \left(-\frac{1}{128} h^2 + \frac{1}{64} h_v^2 + \frac{1}{64} h_u^2 \right) \varepsilon^2 + \left(\frac{1}{128} h_u h_v h - \frac{1}{256} h_{uv} h^2 \right) \varepsilon^3 + O(4), \\ g &= \frac{\varepsilon}{16}(h_{vv}) + \frac{\varepsilon^2}{32}(h_v h_u) + \left(-\frac{1}{256} h_{vv} h^2 + \frac{1}{128} h_v^2 h \right) \varepsilon^3 + O(4), \\ E &= \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{16} h_u^2 + \frac{1}{64} h^2 \right) \varepsilon^2, \\ F &= -\frac{\varepsilon}{8} h + \frac{\varepsilon^2}{16} h_v h_u, \\ G &= \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{16} h_v^2 + \frac{1}{64} h^2 \right) \varepsilon^2, \end{aligned}$$

onde omitimos por simplicidade o argumento (u, v) . Com isso, escrevemos as equações

$$\begin{cases} 2(gp + f)[\Gamma_{22}^1 p^3 + (2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2)p^2 + (\Gamma_{11}^1 - 2\Gamma_{12}^2)p - \Gamma_{11}^2] + g_v p^3 + (g_u + 2f_v)p^2 + \\ (e_v + 2f_u)p + e_u = 0 \\ gp^2 + 2fp + e = 0, \end{cases}$$

que caracterizam a curva flecnodal. Observando que a primeira equação é um polinômio de grau quatro em p e a segunda equação é um polinômio de grau dois em p , determinamos o “resultant” (termo estudado no Apêndice) destas duas equações em p . Do “resultant” em p destas duas equações, obtemos:

$$\begin{aligned} \varepsilon[h_{vv}(h_{vvv} + h_v)(h_{uuu} + h_u)] + \varepsilon^2[h_{vv}(h_{uuu} + h_u)(hh_u + 12h_{uv}h_v - 12h_{vuv}h_{vv}) \\ - h_{vv}(h_{vvv} + h_v)(-12h_{uu}h_{uuv} + 12h_uh_{uv} + hh_v) \\ - 4(h_{uuu} + h_u)(h_uh_v + 6h_{vv}h_{uv})(h_{vvv} + h_v)] + O(\varepsilon^3) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (3-10)$$

Observemos que se $\varepsilon = 0$ na equação acima, obtemos que todos pontos são de inflexão. Com $\varepsilon \neq 0$, temos:

$$\begin{aligned} [h_{vv}(h_{vvv} + h_v)(h_{uuu} + h_u)] + \varepsilon[h_{vv}(h_{uuu} + h_u)(hh_u + 12h_{uv}h_v - 12h_{vuv}h_{vv}) \\ - h_{vv}(h_{vvv} + h_v)(-12h_{uu}h_{uuv} + 12h_uh_{uv} + hh_v) \\ - 4(h_{uuu} + h_u)(h_uh_v + 6h_{vv}h_{uv})(h_{vvv} + h_v)] + O(\varepsilon^2) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (3-11)$$

Observamos que, com ε suficientemente pequeno as raízes da equação (3-11) estão “próximas” das raízes da equação

$$(h_{vvv} + h_v)(h_{uuu} + h_u) = 0.$$

Logo, obtemos que os pontos quadráticos estão “próximos” das raízes de

$$\begin{cases} h_{uuu} + h_u = 0 \\ h_{vvv} + h_v = 0. \end{cases}$$

□

Em [11] foi obtido que os pontos quadráticos são as soluções de (3-9). Observamos que aqui caracterizamos as inflexões pela curvatura geodésica e que para cada solução (u_0, v_0) de (3-9) temos um ponto quadrático próximo de (u_0, v_0) . Obtemos assim que contar pontos quadráticos é o mesmo que contar o número de soluções de (3-9). Procedemos de uma maneira diferente de [11] e chegamos a mesma conjectura. Localmente temos que a curva $h_{uuu} + h_u = 0$ é a curva de inflexão para uma folheação assintótica, e a curva $h_{vvv} + h_v = 0$

é a curva de inflexão para a outra folheação assintótica. De fato, consideremos a perturbação do toro dada em (3-8) onde $h : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave duplamente periódica e ε um número real positivo suficientemente pequeno. Identifiquemos localmente $\mathbb{R}P^3$ e o espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 com coordenadas

$$x = \frac{x_1}{x_0}, \quad y = \frac{x_2}{x_0}, \quad z = \frac{x_3}{x_0}.$$

Deste modo, usando a parametrização do toro dada em (3-7), obtemos

$$x = \tan \frac{v}{2}, \quad y = \tan \frac{u}{2}, \quad z = \tan \frac{u}{2} \cdot \tan \frac{v}{2}. \quad (3-12)$$

Calculando os termos da superfície perturbada (\tilde{X}), obtemos:

$$\tilde{x} = \frac{\cos \frac{u}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{v}{2} - \frac{\varepsilon}{4} h \operatorname{sen} \frac{u}{2} \cdot \cos \frac{v}{2}}{\cos \frac{u}{2} \cdot \cos \frac{v}{2} + \frac{\varepsilon}{4} h \operatorname{sen} \frac{u}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{v}{2}},$$

e de modo similar os termos \tilde{y} e \tilde{z} . Finalmente, obtemos

$$\tilde{x} = x - \frac{\varepsilon}{4} h \cdot (y + xz) + O(\varepsilon^2),$$

$$\tilde{y} = y - \frac{\varepsilon}{4} h \cdot (x + yz) + O(\varepsilon^2),$$

$$\tilde{z} = xy + \frac{\varepsilon}{4} h \cdot (1 - z^2) + O(\varepsilon^2).$$

Deste modo, obtemos que

$$\tilde{z} - \tilde{x}\tilde{y} = \frac{\varepsilon}{4} h(1 - z^2 + x^2 + y^2 + 2xyz) + O(\varepsilon^2),$$

onde $z = xy$. Pela expansão de Taylor, nós obtemos a expressão $(\frac{1}{24}h_{xxx} + \frac{1}{4}h_x)\varepsilon$ para o termo de x^3 , onde as derivadas estão sendo tomadas na origem. Da mesma maneira, temos a expressão $(\frac{1}{24}h_{yyy} + \frac{1}{4}h_y)\varepsilon$ para o termo de y^3 . Portanto, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{1}{6}h_{xxx} + h_x = 0 \\ \frac{1}{6}h_{yyy} + h_y = 0. \end{cases}$$

Aplicando a regra da cadeia em (3-12), temos que

$$h_x = 2h_v \quad e \quad h_{xxx} = 8h_{vvv} - 4h_v,$$

e assim o sistema acima é exatamente o sistema (3-9).

Consideremos agora o toro de Clifford $C = \mathbb{S}(\frac{1}{\sqrt{2}}) \times \mathbb{S}(\frac{1}{\sqrt{2}}) \subset \mathbb{S}^3$ parametrizado por:

$$\begin{aligned} x_0(u, v) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{v-u}{2}\right) & x_1(u, v) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{v-u}{2}\right) \\ x_2(u, v) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{u+v}{2}\right) & x_3(u, v) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{u+v}{2}\right) \end{aligned}$$

onde C é definido em $Q = \{(u, v) : 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2\pi\}$.

Proposição 3.12 *As direções assintóticas sobre o toro de Clifford dado acima são dadas por $du dv = 0$, ou seja, as linhas assintóticas são as curvas coordenadas.*

Demonstração. Os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais com respeito ao vetor normal $N = C \wedge C_u \wedge C_v$ são dados por

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \frac{1}{4}, & e(u, v) &= 0 \\ F(u, v) &= 0, & f(u, v) &= \frac{1}{16} \\ G(u, v) &= \frac{1}{4}, & g(u, v) &= 0 \end{aligned}$$

onde o vetor normal de C é dado por

$$N = \frac{\sqrt{2}}{8} \left(\cos\left(\frac{u-v}{2}\right), -\sin\left(\frac{u-v}{2}\right), -\cos\left(\frac{u+v}{2}\right), -\sin\left(\frac{u+v}{2}\right) \right).$$

□

Consideremos a seguinte perturbação do toro de Clifford

$$\tilde{C}(u, v) = C(u, v) + \varepsilon h(u, v)N \quad (3-13)$$

onde $h : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave duplamente periódica e ε um número real positivo suficientemente pequeno.

Usando (3-6) para determinar o conjunto de inflexão da superfície dada por \tilde{C} , obtemos que um ponto (u, v) continua quadrático em ordem em ε se, e somente se, ele satisfaz:

$$\begin{cases} h_{uuu} + h_u = 0 \\ h_{vvv} + h_v = 0 \end{cases}$$

o que era de se esperar já que, toda quádrlica hiperbólica em $\mathbb{R}P^3$ é equivalente ao toro T , observe [10]. Estudaremos agora alguns casos especiais em que obtemos uma estimativa para o número de soluções para o sistema (3-9). No primeiro exemplo abaixo obtemos 8 pontos quadráticos, que acredita-se ser o número mínimo.

Exemplo: Seja $h = \cos(2u - v) + \varepsilon \cos(2u - 2v)$, onde ε é um número real suficiente-

mente pequeno. Temos que:

$$\begin{cases} h_{uuu} + h_u = 0 \implies 6\text{sen}(2u - v) + 6\epsilon\text{sen}(2u - 2v) = 0 \\ h_{vvv} + h_v = 0 \implies 6\epsilon\text{sen}(2u - 2v) = 0. \end{cases}$$

Resolver este sistema é equivalente a resolver o sistema

$$\begin{cases} \text{sen}(2u - v) = 0 \\ \text{sen}(2u - 2v) = 0 \end{cases}$$

onde este têm 8 soluções em $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$.

Proposição 3.13 *Consideremos a perturbação do toro dada em (3-8), onde $h(u, v)$ é da forma*

$$h(u, v) = F(u) + G(v)$$

com as funções $F(u)$ e $G(v)$ periódicas. Então o número de pontos quadráticos é pelo menos 16.

Usaremos o teorema de Sturm para provar esta proposição. O teorema de Sturm fornece um limite inferior para o número de zeros de funções 2π -periódicas $g(x)$ cuja expansão de Fourier é dada por

$$g(x) = \sum_{k \geq n} (a_k \cos(kx) + b_k \text{sen}(kx)), \quad (3-14)$$

começando com harmônicos de ordem n . A prova do seguinte teorema é encontrada em [10].

Teorema 3.14 (Sturm) *A função $g(x)$ dada em (3-14), tem pelo menos $2n$ zeros distintos sobre o círculo $[0, 2\pi)$.*

Demonstração. Denotemos por $Z(f)$ o número de mudanças de sinais de $f \in C^\infty(S^1)$. Pelo teorema de Rolle, temos que $Z(f') \geq Z(f)$. Consideremos D^{-1} o operador definido por:

$$(D^{-1}f)(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Do teorema de Rolle, temos novamente que: $Z(f) \geq Z(D^{-1}f)$. Considerando a sequência de funções

$$g_m = (-1)^m (nD^{-1})^{2m} g$$

onde g é dado por (3-14), explicitamente,

$$g_m(x) = (a_n \cos nx + b_n \text{sen} nx) + \sum_{k > n} \left(\frac{n}{k}\right)^{2m} (a_k \cos kx + b_k \text{sen} kx). \quad (3-15)$$

Pelo teorema de Rolle, para cada m , temos: $Z(g) \geq Z(g_m)$.

Desde que a série de Fourier dada em (3-14) converge, temos que $\sum_k (a_k^2 + b_k^2) < C$ para alguma constante C . Isto implica que a segunda soma em (3-15) é arbitrariamente pequena para m grande. Segue daí que g_m tem pelo menos $2n$ mudanças de sinal para m grande.

□

Para provar a proposição (3.13), notemos que os pontos quadráticos estão “próximos” das soluções de

$$\begin{cases} F'''(u) + F'(u) = 0 \\ G'''(v) + G'(v) = 0 \end{cases}$$

Escrevendo a série de Fourier de F e G , como em (3-14), obtemos

$$F'''(u) + F'(u) = 6a_2 \text{sen}(2u) - 6b_2 \cos(2u) + 24a_3 \text{sen}(3u) - 24b_3 \cos(3u) + \dots$$

$$G'''(v) + G'(v) = 6a_2 \text{sen}(2v) - 6b_2 \cos(2v) + 24a_3 \text{sen}(3v) - 24b_3 \cos(3v) + \dots$$

Pelo teorema de Sturm, $F''' + F' = 0$ e $G''' + G' = 0$ têm pelo menos 4 zeros em $[0, 2\pi)$. Deste modo, temos pelo menos 16 soluções em $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$.

Proposição 3.15 *Se h é uma função da forma:*

$$h = \cos(2u)(\alpha_{11}\cos(2v) + \alpha_{12}\text{sen}(2v)) + \text{sen}(2u)(\alpha_{21}\cos(2v) + \alpha_{22}\text{sen}(2v)),$$

onde α_{ij} são constantes arbitrárias, existe pelo menos 32 pontos distintos sobre o toro $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ em que o sistema (3-9) é satisfeito.

Demonstração. Neste caso verificamos que o sistema (3-9) é equivalente ao sistema:

$$\tau = \frac{\alpha_{11}t + \alpha_{12}}{\alpha_{21}t + \alpha_{22}}, \quad \tau = \frac{\alpha_{22}t + \alpha_{21}}{-\alpha_{12}t + \alpha_{11}}$$

onde $\tau = \tan(2u)$ e $t = \tan(2v)$. Este sistema é $\frac{\pi}{2}$ -periódico, e dele obtemos a equação

$$(\alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{21}\alpha_{22})t^2 + (\alpha_{22}^2 - \alpha_{21}^2 + \alpha_{12}^2 - \alpha_{11}^2)t - (\alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{21}\alpha_{22}) = 0$$

cujo discriminante é estritamente positivo. Daí segue que o sistema (3-9) tem duas soluções sobre $[0, \frac{\pi}{2}) \times [0, \frac{\pi}{2})$, e portanto 32 soluções sobre $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$.

□

Inflexões em Superfícies Regradas

Estudaremos aqui inflexões e a estabilidade de linhas assintóticas fechadas em uma classe de superfícies regradas orientadas. Relembrando que, uma família (diferenciável) a 1-parâmetro de retas $\{\alpha(s), w(s)\}$ é uma correspondência que associa a cada $s \in I \subset \mathbb{R}$ um ponto $\alpha(s) \in \mathbb{R}^3$ e um vetor $w(s) \in \mathbb{R}^3$, $w(s) \neq 0$, tais que ambos $\alpha(s)$ e $w(s)$ sejam diferenciáveis em s . Para cada $s \in I$, a reta L_s passando por $\alpha(s)$ e que é gerada por $w(s)$ é chamada a reta da família em s .

Dada uma família a 1-parâmetro de retas $\{\alpha(s), w(s)\}$, a superfície parametrizada

$$X(s, v) = \alpha(s) + vw(s), \quad s \in I, \quad v \in \mathbb{R},$$

é chamada superfície regrada gerada pela família $\{\alpha(s), w(s)\}$.

4.1 A aplicação de Poincaré

Esta seção foi retirada de [12]. A aplicação de Poincaré associada a uma órbita fechada γ de um campo vetorial é um difeomorfismo Π que definiremos a seguir. Esta aplicação descreve o comportamento do campo em uma vizinhança de γ .

Seja então $\gamma = \{\varphi(t, p), 0 \leq t \leq \tau_0\}$ uma órbita periódica de período τ_0 de um campo vetorial X de classe C^r , $r \geq 1$, definido em um aberto $\Delta \subset \mathbb{R}^2$. Seja Σ uma seção transversal a X em p . Em virtude da continuidade do fluxo φ de X , para todo ponto $q \in \Sigma$ próximo de p a trajetória $\varphi(t, p)$ permanece próxima a γ , com t em um intervalo compacto pré fixado, por exemplo, $[0, 2\tau_0]$. Define-se $\Pi(q)$ como o primeiro ponto onde esta órbita intercepta Σ . Seja Σ_0 o domínio de Π . Naturalmente $p \in \Sigma_0$ e $\Pi(p) = p$.

Muitas propriedades de X perto de γ se refletem em Π . Por exemplo, as órbitas periódicas de X vizinhas de γ correspondem aos pontos periódicos de Π , que são pontos $q \in \Sigma_0$ para os quais $\Pi^n(q) = q$ para algum inteiro $n \geq 1$. O comportamento assintótico

das órbitas de X perto de γ também é descrito por Π . Assim, $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi^n(q) = p$ implica $\lim_{n \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$.

Definição 4.1 *Com as notações acima, a órbita fechada γ é um atrator periódico (ou então γ diz-se orbitalmente estável) quando $\lim_{n \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$ para todo q em uma vizinhança de γ .*

Observação 4.2 *A seção Σ tomada acima é uma hipersuperfície ou uma subvariedade diferenciável $(n - 1)$ -dimensional do aberto $\Delta \subset \mathbb{R}^2$. Pode-se supor que a variedade Σ é um subespaço vetorial ou afim de \mathbb{R}^2 .*

Uma expressão para Π é $\Pi(q) = \varphi(\tau_0 + \tau(\varphi(\tau_0, q)), q)$, onde $\tau : V \rightarrow \mathbb{R}$ é o tempo $\tau(x)$ que leva a órbita por x em V para interceptar Σ . Em [12] é demonstrado que Π é um difeomorfismo de classe C^r (mesma classe de diferenciabilidade de X) sobre sua imagem.

Definição 4.3 *Sejam Δ um aberto de \mathbb{R}^2 e $X : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^1 . Uma órbita periódica de X chama-se ciclo limite se existe uma vizinhança V de γ tal que γ é uma órbita fechada de X que intercepta V .*

Proposição 4.4 *Com as notações da definição acima, existem apenas os seguintes tipos de ciclos limites:*

- a) *Estável, quando $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$ para todo $q \in V$;*
- b) *Instável, quando $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$ para todo $q \in V$;*
- c) *Semi-estável, quando $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$ para todo $q \in V \cap Ext\gamma$ e $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$ para todo $q \in V \cap Int\gamma$, ou o contrário.*

A demonstração da proposição 4.4 é encontrada em [12]. Com as notações da proposição 4.4, temos que γ é um ciclo limite se e só se p é um ponto fixo isolado de Π (transformação de Poincaré associada). Ainda:

- a) γ é estável se e somente se $|\Pi(x) - p| < |x - p|$ para todo $x \neq p$ próximo de p ;
- b) γ é instável se e somente se $|\Pi(x) - p| > |x - p|$ para todo $x \neq p$ próximo de p ;
- c) γ é semi-estável se e somente se $|\Pi(x) - p| < |x - p|$ para todo $x \in \Sigma \cap Ext\gamma$ próximo de p e $|\Pi(x) - p| > |x - p|$ para todo $x \in \Sigma \cap Int\gamma$ próximo de p , ou o contrário.

Em particular, se $\Pi'(p) < 1$, podemos aplicar o teorema do valor médio e concluir que γ é estável. Por outro lado, γ é instável se $\Pi'(p) > 1$.

Determinaremos a aplicação de Poincaré de linhas assintóticas fechadas, em superfícies regradas definidas a seguir.

4.2 Inflexões

Os resultados desta seção foram obtidos pelos autores. Consideraremos uma superfície regrada orientada definida da seguinte maneira:

Seja $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva fechada com curvatura $k \neq 0$ tal que $[\gamma', \gamma'', \gamma'''] = 1$ e $y^{(4)} = -k_1\gamma' - k_2\gamma''$.

Definimos a superfície regrada por

$$X(s, v) = \gamma(s) + v[a(s)\gamma'(s) + \gamma''(s)], \quad (4-1)$$

onde $s \in [0, L]$ e $v \in (-M, M)$, com $M \in \mathbb{R}$.

Observação 4.5 A condição $[\gamma', \gamma'', \gamma'''] = 1$, imposta sobre $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$, significa que γ está parametrizada pelo comprimento de arco afim. Qualquer curva fechada com torção não nula tem esta propriedade.

No que segue em todo capítulo, consideraremos a superfície definida em (4-1).

Nesta seção determinaremos o conjunto de inflexão das linhas assintóticas desta superfície. Temos que

$$X_s = (1 + va')\gamma' + av\gamma'' + v\gamma''' \quad X_v = a\gamma' + \gamma'' \quad X_{vv} = 0 \quad X_{sv} = a\gamma' + a\gamma'' + \gamma'''$$

$$X_{ss} = (va'' - vk_1)\gamma' + (1 + 2va' - k_2v)\gamma'' + av\gamma''''.$$

Daí obtemos que os coeficientes da segunda forma fundamental são dados por;

$$e = [X_{ss}, X_s, X_v] = 2av + (3aa' - ak_2 - a'' + k_1 - a^3)v^2,$$

$$f = [X_{sv}, X_s, X_v] = 1,$$

$$g = [X_{vv}, X_s, X_v] = 0.$$

Das equações das linhas assintóticas $e(s')^2 + 2fs'v' + g(v')^2 = 0$, fazendo $p = \frac{dv}{ds}$, temos $H(s, v, p) = 2p + e = 0$. A equação $H(s, v, p) = 0$, temos associado o campo vetorial:

$$\begin{cases} s' = 1 \\ v' = p \\ p' = -\frac{(H_s + pH_v)}{H_p}. \end{cases} \quad (4-2)$$

Seja então $\alpha(s) = \gamma(s) + v(s)(a(s)\gamma'(s) + \gamma''(s))$ uma linha assintótica de X . Usando o campo dado em (4-2) temos que:

$$\alpha' = (1 + a'v + ap)\gamma' + (p + av)\gamma'' + v\gamma'''$$

$$\alpha'' = (a''v + 2a'p + ap' - vk_1)\gamma' + (1 + 2a'v + 2ap + p' - vk_2)\gamma'' + (2p + av)\gamma''.$$

Determinando as inflexões onde $\alpha' = \lambda\alpha''$, $\lambda \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{cases} 1 + a'v + ap = \lambda(a''v + 2a'p + ap' - vk_1) & (I) \\ p + av = \lambda(1 + 2a'v + 2ap + p' - vk_2) & (II) \\ v = \lambda(2p + av) & (III) \\ 2p + e = 0 & (IV). \end{cases}$$

De (II) e (III):

$$\left(-\frac{3}{2}aa'' + \frac{a'k_2}{2} - \frac{3}{2}(a')^2 - \frac{k_1'}{2} + \frac{3}{2}a^2a' + \frac{ak_2'}{2} + \frac{a'''}{2}\right)v^3 + (-a^2 + a' + apk_2 + pa'' - pk_1 - 3paa' - k_2 + pa^3)v^2 + (-2ap + 1)v - 2p^2 = 0 \quad (V)$$

De (I) e (III):

$$\left(-\frac{3}{2}a^2a'' + \frac{1}{2}aa'k_2 - \frac{3}{2}a(a')^2 - \frac{1}{2}ak_1' + \frac{3}{2}a^3a' + \frac{1}{2}a^2k_2' + \frac{1}{2}aa'''\right)v^3 + (-2aa' + a'' + pa^2k_2 + apa'' - apk_1 - 3a^2a' - k_1 + pa^4)v^2 + (-a - 2a^2p)v - 2p - 2ap^2 = 0 \quad (VI)$$

De (IV) e (V):

$$(-6(a')^2 - 6aa'' + 2a'k_2 + 2a''' - 2k_1' + 6a^2a' + 2ak_2')v^3 + (-4a^2 + 4a' - 4k_2)v^2 + 4v = 0 \quad (VII)$$

De (IV) e (VI):

$$(-6a^2a'' + 2aa'k_2 - 6a(a')^2 - 2ak_1' + 6a^3a' + 2a^2k_2' + 2aa''')v^3 + (4aa' - 4a^3 - 4ak_2)v^2 + 4av = 0 \quad (VIII)$$

Notamos que $a(VII) = (VIII)$. Assim, o conjunto de inflexão das linhas assintóticas desta superfície é dado por:

$$(-6(a')^2 - 6aa'' + 2a'k_2 + 2a''' - 2k_1' + 6a^2a' + 2ak_2')v^3 + (-4a^2 + 4a' - 4k_2)v^2 + 4v = 0.$$

Observemos que $v = 0$ não pode ser solução desta equação, já que estamos supondo que a curvatura de γ é diferente de zero. Deste modo provamos a seguinte proposição:

Proposição 4.6 *Seja $\gamma: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva fechada regular com curvatura $k \neq 0$ tal que $[\gamma', \gamma'', \gamma'''] = 1$ e $y^{(4)} = -k_1\gamma' - k_2\gamma''$. Consideremos a superfície regradada dada por*

$$X(s, v) = \gamma(s) + v(a(s)\gamma'(s) + \gamma''(s))$$

onde $s \in [0, L]$ e $v \in (-L, L)$, com $L \in \mathbb{R}$. O conjunto de inflexão das linhas de $X(u, v)$ é

dada por:

$$(-6(a')^2 - 6aa'' + 2a'k_2 + 2a''' - 2k_1' + 6a^2a' + 2ak_2')v^2 + (-4a^2 + 4a' - 4k_2)v + 4 = 0. \quad (4-3)$$

4.3 Linhas Assintóticas Fechadas

Baseados no estudo feito sobre estabilidade de linhas assintóticas fechadas realizado em [3], estudamos a estabilidade das linhas assintóticas fechadas na superfície regrada definida na seção anterior por:

$$X(s, v) = \gamma(s) + v[a(s)\gamma'(s) + \gamma''(s)],$$

onde $[\gamma', \gamma'', \gamma'''] = 1$ e $y^{(4)} = -k_1\gamma' - k_2\gamma''$. Notemos que, com os termos da segunda forma fundamental calculados na seção anterior, a equação das linhas assintóticas fica

$$\frac{dv}{ds} = -\frac{e}{2} \implies v_s = -\frac{v}{2}(2a + 3aa'v - avk_2 - va'' + vk_1 - a^3v). \quad (4-4)$$

Deste modo, $\{v = 0\}$, (ou seja $\gamma(s)$) é uma linha assintótica fechada de $X(s, v) = \gamma(s) + v[a(s)\gamma'(s) + \gamma''(s)]$.

Definição 4.7 *Seja Π a aplicação de Poincaré associada $\gamma(s)$. A curva $\gamma(s)$ é uma linha assintótica fechada regular hiperbólica se $\Pi'(0) \neq 1$. Dizemos que $\gamma(s)$ é uma linha assintótica fechada semi-hiperbólica se $\Pi'(0) = 1$ e $\Pi''(0) \neq 0$.*

Determinemos as derivadas da aplicação de Poincaré associada. Denotemos por $v(s, r)$ a solução de (4-4) com condição inicial $v(0, r) = r$. Temos assim que a aplicação de retorno de Poincaré é dada por $\Pi(r) = v(L, r)$ onde $v = v(s, r)$. Diferenciando a equação (4-4) em r e aplicando em $v = 0$, temos:

$$v_{sr} = -v_r a(s) \implies \ln(v_r) = -\int_0^s a(u)du \implies \Pi'(r) = \exp\left(-\int_0^s a(u)du\right) \implies \Pi'(0) = \exp\left(-\int_0^L a(s)ds\right).$$

Obteremos agora $\Pi''(0)$. Derivando a equação (4-4) duas vezes em r e aplicando novamente em $v = 0$, obtemos:

$$(v_{rr})_s = -av_{rr} - (v_r)^2(3aa' - ak_2 - a'' + k_1 - a^3) \implies (v_{rr})_s = h(s)v_{rr} + w(s), \text{ onde } h(s) = -a(s) \text{ e } w(s) = -(v_r)^2(3aa' - ak_2 - a'' + k_1 - a^3).$$

Aplicando o método de variação de parâmetros (observe [12]), obtemos:

$$\Pi''(r) = v_{rr} = \left[\int_0^s \exp\left(-\int_0^u h(u)du\right)w(u)du \right] \exp\left(\int_0^s h(u)du\right) \implies$$

$$\Pi''(r) = \Pi'(r) \int_0^s w(u) \frac{1}{\Pi'(u)} du \implies$$

$$\Pi''(0) = \left[- \int_0^L \Pi'(s) (3a(s)a'(s) - a(s)k_2(s) - a''(s) + k_1(s) - a(s)^3) ds \right] \Pi'(0).$$

Resolveremos primeiro a integral: $\int_0^L \exp(-\int_0^s a(u)du) a(s)^3 ds$. Fazendo

$$w = a(s)^2 \quad e \quad dv = -a(s) \exp(-\int_0^s a(u)du) ds$$

e integrando por partes, obtemos:

$$\int_0^L \exp(-\int_0^s a(u)du) a(s)^3 ds = 2 \int_0^L \exp(-\int_0^s a(u)du) a(s) a'(s) ds.$$

Resolvendo agora a integral $\int_0^L \exp(-\int_0^s a(u)du) a''(s) ds$, também por partes com

$$w = \exp(-\int_0^s a(u)du) \quad e \quad dv = a''(s) ds,$$

obtemos:

$$\int_0^L \exp(-\int_0^s a(u)du) a''(s) ds = \int_0^L \exp(-\int_0^s a(u)du) a(s) a'(s) ds.$$

Logo, teremos que:

$$\Pi''(0) = \Pi'(0) \int_0^L (a(s)k_2(s) - k_1(s)) \Pi'(s) ds.$$

Logo, provamos:

Proposição 4.8 *Seja $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva fechada regular com curvatura $k \neq 0$ tal que $[\gamma', \gamma'', \gamma'''] = 1$ e $y^{(4)} = -k_1 \gamma' - k_2 \gamma''$. Consideremos a superfície regradada dada por*

$$X(s, v) = \gamma(s) + v[a(s)\gamma'(s) + \gamma''(s)]$$

onde $s \in [0, L]$ e $v \in (-M, M)$, com $M \in \mathbb{R}$. Então γ é uma linha assintótica fechada hiperbólica se

$$\int_0^L a(s) ds \neq 0,$$

e semi-hiperbólica se

$$\int_0^L a(s) ds = 0 \quad e \quad \int_0^L (a(s)k_2(s) - k_1(s)) \Pi'(s) ds \neq 0.$$

Temos que as linhas assintóticas fechadas desta superfície são dadas pelos pontos fixos da aplicação de Poincaré, ou seja, $\Pi(v) = v$. Em relação a aplicação de Poincaré de linhas assintóticas de superfícies regradadas, temos o seguinte resultado geral:

Lema 4.9 *Seja $X(s, v) = c(s) + vw(s)$ uma superfície regrada, onde $c : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma curva regular fechada. Então a aplicação de Poincaré associada a linha assintótica fechada c é da forma*

$$\Pi(v) = \frac{av}{bv + 1}$$

com $a, b \in \mathbb{R}$.

O lema segue dos resultados abaixo.

Observação 4.10 *A equação diferencial das linhas assintóticas de uma superfície regrada é da forma:*

$$\frac{dv}{ds} = a(s)v + b(s)v^2,$$

ou seja, é uma equação de Riccati. Em equações diferenciais, temos que se v_1, v_2, v_3, v_4 são quatro soluções linearmente independentes de uma equação de Riccati, então a razão cruzada

$$\frac{(v_1 - v_3)(v_2 - v_4)}{(v_1 - v_4)(v_2 - v_3)}$$

é constante. Dadas quaisquer quatro soluções linearmente independentes, esta constante é a mesma.

Lembremos que transformações de Möbius são transformações do tipo:

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc \neq 0$.

Para transformações de Möbius, temos o seguinte resultado:

Teorema 4.11 *Transformações de Möbius preservam a razão cruzada. Reciprocamente, dados $A = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ e $B = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ que têm a mesma razão cruzada, existe uma transformação de Möbius que aplica A em B .*

Demonstração. Para a primeira parte deste resultado, façamos $T(z_k) = \frac{az_k + b}{cz_k + d} = w_k$. Com isso, obtemos

$$w_j - w_i = \frac{az_j + b}{cz_j + d} - \frac{az_i + b}{cz_i + d} = \frac{(ad - bc)(z_j - z_i)}{(cz_j + d)(cz_i + d)}.$$

logo:

$$\frac{(w_1 - w_4)(w_3 - w_2)}{(w_1 - w_2)(w_3 - w_4)} = \frac{\frac{(ad - bc)(z_1 - z_2)}{(cz_1 + d)(cz_2 + d)} \frac{(ad - bc)(z_3 - z_4)}{(cz_3 + d)(cz_4 + d)}}{\frac{(ad - bc)(z_1 - z_4)}{(cz_1 + d)(cz_4 + d)} \frac{(ad - bc)(z_3 - z_2)}{(cz_3 + d)(cz_2 + d)}} = \frac{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}.$$

Para a segunda parte, suponhamos que

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{(x_1 - x_4)(x_3 - x_2)}{(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)} = \frac{(y_1 - y_4)(y_3 - y_2)}{(y_1 - y_2)(y_3 - y_4)} = [y_1, y_2, y_3, y_4] = \lambda.$$

Consideremos as transformações μ_1 e μ_2 definidas por:

$$\mu_1(z) = \frac{(x_1 - x_4)(x_3 - x_4)}{(x_3 - x_2)(z - x_4)} - \frac{x_2 - x_4}{x_3 - x_2}, \quad \mu_2(z) = \frac{(y_1 - y_4)(y_3 - y_4)}{(y_3 - y_2)(z - y_4)} - \frac{y_2 - y_4}{y_3 - y_2}.$$

Temos que,

$$\mu_1(x_1) = \lambda, \quad \mu_1(x_2) = 1, \quad \mu_1(x_3) = 0, \quad \mu_1(x_4) = \infty,$$

$$\mu_2(y_1) = \lambda, \quad \mu_2(y_2) = 1, \quad \mu_2(y_3) = 0, \quad \mu_2(y_4) = \infty.$$

Assim μ_1 leva $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ em $[\lambda, 1, 0, \infty]$, e μ_2 leva $[y_1, y_2, y_3, y_4]$ também em $[\lambda, 1, 0, \infty]$. Logo $\mu_2^{-1} \circ \mu_1$ leva (x_1, x_2, x_3, x_4) em (y_1, y_2, y_3, y_4) , onde estamos usando que inversa e composta de transformações de Möbius é transformação de Möbius. □

Observação 4.12 *Uma transformação que preserva a razão cruzada é de Möbius. Veja [7].*

Com isso temos:

Teorema 4.13 *Seja $\gamma : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva fechada com curvatura $k \neq 0$ tal que $[\gamma', \gamma'', \gamma'''] = 1$ e $y^{(4)} = -k_1\gamma' - k_2\gamma''$. Consideremos a superfície regradada dada por*

$$X(s, v) = \gamma(s) + v[a(s)\gamma'(s) + \gamma''(s)] \quad (4-5)$$

com $s \in [0, L]$, $v \in (-M, M)$, $M \in \mathbb{R}$. Suponhamos que $\int_0^L a(s)ds \neq 0$ e

$\int_0^L (a(s)k_2 - k_1)\Pi'(s)ds \neq 0$, onde $\Pi(r)$ denota a aplicação de retorno de Poincaré de γ . Então, a superfície (4-5) têm duas linhas assintóticas fechadas, ou seja, a aplicação de Poincaré possui dois pontos fixos.

Demonstração. Pelo o que foi feito acima, temos que a aplicação de Poincaré é dada por

$$\Pi(v) = \frac{cv}{bv + 1}, \quad (4-6)$$

e suas derivadas são dadas por

$$\Pi'(0) = \exp\left(-\int_0^L a(s)ds\right) \quad \Pi''(0) = \int_0^L (a(s)k_2 - k_1)\Pi'(s)ds. \quad (4-7)$$

Por outro lado, utilizando a equação (4-6), temos que

$$\Pi'(0) = c \quad \Pi''(0) = -2cb. \quad (4-8)$$

Das equações (4-7) e (4-8), obtemos:

$$c = \exp\left(-\int_0^L a(s)ds\right) \quad e \quad b = -\frac{1}{2} \int_0^L (a(s)k_2 - k_1)\Pi'(r)ds.$$

Determinando os pontos fixos da aplicação de Poincaré ($\Pi(v) = v$), obtemos $v = 0$ e $v = \frac{c-1}{b}$, onde os termos c e b foram determinados acima. \square

Observação 4.14 *No teorema anterior, se γ é semi hiperbólica, ou seja, se $\Pi'(0) = 1$ e $\Pi''(0) \neq 0$, obtemos apenas uma linha assintótica fechada dada por $v = 0$, que é a própria curva γ .*

Linhas de Curvatura

Motivados pelos resultados obtidos sobre linhas assintóticas do capítulo 3, estudaremos o análogo para linhas de curvatura. Os resultados da seção 5.1 foram todos obtidos pelos autores.

5.1 Inflexões de Linhas de Curvatura

Nesta seção, estudaremos inflexões de linhas de curvatura. Seja $S \subset \mathbb{S}^3$ (ou \mathbb{R}^3) uma superfície orientada e $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização local de S . Temos que uma curva regular C em S é uma linha de curvatura de S se para todo $p \in C$ a reta tangente a C é uma direção principal em p .

Temos que a equação diferencial das linhas de curvatura são dadas por

$$(fE - eF)(u')^2 + (gE - eG)u'v' + (gF - fG)(v')^2 = 0. \quad (5-1)$$

O discriminante desta equação é dado por $\Delta = 4(EG - F^2)^2(H^2 - K)$, onde H denota a curvatura média e K a curvatura Gaussiana. Suponhamos que $p_0 = X(q_0)$ (onde $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ é a imersão) seja um ponto não umbílico de S . Logo, $\Delta > 0$. Por continuidade, existe um aberto $U_0 \subset U$ com $q_0 \in U_0$ tal que $\Delta > 0$ para todo $q \in U_0$. Deste modo, a equação dada em (5-1) se decompõe em U_0 como produto de dois fatores lineares $(A_1 du + B_1 dv)(A_2 du + B_2 dv) = 0$. Portanto, na vizinhança de pontos não umbílicos de S , é possível decompor a equação diferencial das linhas de curvatura em dois fatores lineares distintos. Assim, na vizinhança de pontos não umbílicos, temos duas folheações principais, denotadas por “1” e “2”. Chamaremos de L_1 a curva de inflexão da folheação principal “1” e L_2 a curva de inflexão da folheação principal “2”.

Fazendo $p = \frac{dv}{du}$, a equação (5-1) fica da forma

$$M(u, v, p) = (Fg - Gf)p^2 + (Eg - Ge)p + Ef - Fe = 0. \quad (5-2)$$

Assim como obtemos no caso de linhas assintóticas, temos os resultados análo-

gos para linhas de curvatura. Começaremos com a seguinte proposição que caracteriza os pontos de inflexão das linhas de curvatura em função de seus coeficientes de uma dada forma normal.

Proposição 5.1 *Consideremos a superfície parametrizada $X(x, y) = (x, y, z(x, y))$, onde $z = \frac{k_1x^2}{2} + \frac{k_2y^2}{2} + \frac{a_{12}}{2}xy^2 + \frac{a_{21}}{2}x^2y + \frac{a_{30}}{3}x^3 + \frac{a_{03}}{3}y^3 + \frac{a_{22}}{4}x^2y^2 + \frac{a_{04}}{24}y^4 + \frac{a_{40}}{24}x^4 + \frac{a_{13}}{6}xy^3 + \frac{a_{31}}{6}x^3y + \frac{a_{41}}{6}x^4y + \frac{a_{50}}{120}x^5 + \dots$ e $k_1 \neq k_2$. Um ponto p é um ponto de inflexão das duas linhas de curvatura de X se os parâmetros a_{12} e a_{21} são iguais a zero em p .*

Demonstração. Da equação $M(u, v, p) = (Fg - Gf)p^2 + (Eg - Ge)p + Ef - Fe = 0$ onde $p = \frac{dy}{dx}$, temos:

$$y' = -\frac{(Eg - eG) - ((Eg - eG)^2 - 4(Fg - Gf)(Ef - eF))^{\frac{1}{2}}}{2(Fg - Gf)}$$

$$x' = 2(Fg - Gf)$$

donde obtemos $x'(0) = 0$ e $y'(0) = 2(k_1 - k_2)$. Derivando a expressão de x' obtemos $x''(0) = -4a_{12}(k_1 - k_2)$. Deste modo, na carta (x, y) , $k = 0 \iff 8a_{12}(k_1 - k_2)^2 = 0 \iff a_{12} = 0$. Escrevendo os termos

$$x(t) = x(0) + x'(0)t + x''(0)\frac{t^2}{2} + \dots$$

$$y(t) = y(0) + y'(0)t + y''(0)\frac{t^2}{2} + \dots$$

$$z(t) = \frac{k_1x(t)^2}{2} + \frac{k_2y(t)^2}{2} + \frac{a_{12}}{2}x(t)y(t)^2 + \frac{a_{21}}{2}x(t)^2y(t) + \frac{a_{30}}{3}x(t)^3 + \frac{a_{03}}{3}y(t)^3 + \dots$$

e calculando a curvatura em \mathbb{R}^3 também obtemos $k = 0 \iff a_{12} = 0$.

De modo análogo, considerando $\frac{dx}{dy}$, obtemos $k = 0 \iff a_{21} = 0$. □

A seguinte proposição caracteriza os pontos de inflexão da linha de curvatura em relação a posição entre a linha geodésica e linha de curvatura.

Proposição 5.2 *Consideremos a superfície parametrizada $X(x, y) = (x, y, z(x, y))$, onde $z = \frac{k_1x^2}{2} + \frac{k_2y^2}{2} + \frac{a_{12}}{2}xy^2 + \frac{a_{21}}{2}x^2y + \frac{a_{30}}{3}x^3 + \frac{a_{03}}{3}y^3 + \frac{a_{22}}{4}x^2y^2 + \frac{a_{04}}{24}y^4 + \frac{a_{40}}{24}x^4 + \frac{a_{13}}{6}xy^3 + \frac{a_{31}}{6}x^3y + \frac{a_{41}}{6}x^4y + \frac{a_{50}}{120}x^5 + \dots$, $a_{13} \neq 0$ e $k_1 \neq k_2 \neq 0$. Em um ponto de inflexão da linha de curvatura ($a_{12} = 0$), a linha geodésica “cruza” a linha de curvatura com contato cúbico.*

Demonstração. Das equações das geodésicas temos:

$$\begin{cases} x''(y) = \Gamma_{11}^2(x')^3 - (\Gamma_{11}^1 - 2\Gamma_{12}^2)(x')^2 - (2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2)x' - \Gamma_{22}^1 \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0, \end{cases}$$

donde obtemos $x''(0) = 0$. Notemos que $x''(y) = F(x, y, x')$. Logo $x'''(y) = F_x x' + F_y + F_{x'} x''$, donde obtemos $x'''(0) = 0$. Da mesma forma, $x'''(y) = G(x, y, x')$. Seguindo com as derivadas obtemos

$$x^{(4)}(0) = -k_2 a_{12} = 0,$$

$$x^{(5)}(0) = -k_2 a_{13} - 6a_{03} a_{12} = -k_2 a_{13} \neq 0.$$

Da equação das linhas de curvatura temos

$$\begin{cases} x'(y) = \left\{ \frac{-(Eg - Ge) - \sqrt{(Eg - Ge)^2 - 4(Ef - Fe)(Fg - Gf)}}{2(Fg - Gf)} \right\}^{-1} \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

Notando que $x'(y) = H(x, y)$, teremos que $x''(y) = H_x x' + H_y$, donde obtemos $x''(0) = \frac{a_{12}}{k_1 - k_2} = 0$. Seguindo com as derivadas, obtemos

$$x'''(0) = \frac{a_{13}}{k_1 - k_2} \neq 0.$$

Temos assim, contato cúbico. Note que se $a_{12} \neq 0$ (em um ponto que não é de inflexão) a geodésica e a linha de curvatura teriam contato quadrático.

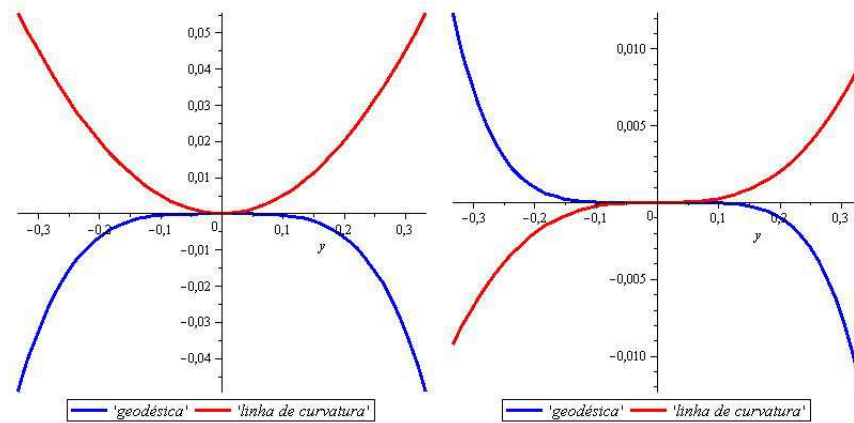


Figura 5.1: $a_{12} \neq 0$ e $a_{12} = 0$ respectivamente

□

Da mesma maneira que fizemos para linhas assintóticas, caracterizaremos agora o conjunto de inflexão das linhas de curvatura pela curvatura geodésica.

Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$, onde S é uma superfície de \mathbb{S}^3 . As linhas de curvatura são

determinadas pela equação

$$(fE - eF)(u')^2 + (gE - eG)u'v' + (gF - fG)(v')^2 = 0,$$

com

$$e = \frac{\det[X, X_u, X_v, X_{uu}]}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad f = \frac{\det[X, X_u, X_v, X_{uv}]}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad g = \frac{\det[X, X_u, X_v, X_{vv}]}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$E = \langle X_u, X_u \rangle, \quad F = \langle X_u, X_v \rangle, \quad G = \langle X_v, X_v \rangle.$$

Fazendo $p = \frac{dv}{du}$, esta equação fica da forma

$$M(u, v, p) = (Fg - Gf)p^2 + (Eg - Ge)p + Ef - Fe = 0. \quad (5-3)$$

Da equação (5-3), temos o campo vetorial Y dado por

$$Y : \begin{cases} u' = 1 \\ v' = p \\ p' = -\left(\frac{M_u + pM_v}{M_p}\right) \end{cases}$$

associado. Seja $\gamma(s) = X(u(s), v(s))$ uma linha de curvatura. Temos que $\gamma' = X_u u' + X_v v'$ e $\gamma'' = X_{uu}(u')^2 + 2X_{uv}u'v' + X_{vv}(v')^2 + X_u u'' + X_v v''$. Tendo que

$$X_{uu} = \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + eN - EX$$

$$X_{uv} = \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + fN - FX$$

$$X_{vv} = \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + gN - GX$$

obtemos:

$$\gamma'' = ((u')^2 \Gamma_{11}^1 + 2u'v' \Gamma_{12}^1 + (v')^2 \Gamma_{22}^1 + u'')X_u + ((u')^2 \Gamma_{11}^2 + 2u'v' \Gamma_{12}^2 + (v')^2 \Gamma_{22}^2 + v'')X_v + ((u')^2 e + 2u'v' f + (v')^2 g)N - ((u')^2 E + 2u'v' F + (v')^2 G)X = 0,$$

donde, lembrando que as inflexões ($\gamma'' = 0$) são vistas na derivada covariante:

$$\begin{cases} (u')^2 \Gamma_{11}^1 + 2u'v' \Gamma_{12}^1 + (v')^2 \Gamma_{22}^1 + u'' = 0 \\ (u')^2 \Gamma_{11}^2 + 2u'v' \Gamma_{12}^2 + (v')^2 \Gamma_{22}^2 + v'' = 0. \end{cases}$$

De $p = \frac{dv}{du}$ e do último sistema de equações, temos:

$$\frac{d^2 v}{du^2} = p' = \Gamma_{22}^1 p^3 + (2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2) p^2 + (\Gamma_{11}^1 - 2\Gamma_{12}^2) p - \Gamma_{11}^2. \quad (5-4)$$

De $p' = -\frac{(M_u + pM_v)}{M_p}$ e da equação (5-4), obtemos o conjunto de inflexão das linhas de

curvatura:

$$\begin{cases} M_p(\Gamma_{22}^1 p^3 + (2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2)p^2 + (\Gamma_{11}^1 - 2\Gamma_{12}^2)p - \Gamma_{11}^2) + M_u + pM_v = 0 \\ (Fg - Gf)p^2 + (Eg - Ge)p + Ef - Fe = 0. \end{cases}$$

Com isso provamos:

Proposição 5.3 *Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$, onde S é uma superfície de \mathbb{S}^3 . O conjunto de inflexão das linhas de curvatura de S é dado por*

$$\begin{cases} M_p(\Gamma_{22}^1 p^3 + (2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2)p^2 + (\Gamma_{11}^1 - 2\Gamma_{12}^2)p - \Gamma_{11}^2) + M_u + pM_v = 0 \\ (Fg - Gf)p^2 + (Eg - Ge)p + Ef - Fe = 0. \end{cases} \quad (5-5)$$

onde $M(u, v, p) = (Fg - Gf)p^2 + (Eg - Ge)p + Ef - Fe$.

Poderia ocorrer do conjunto de inflexão obtido acima ser vazio. Como no caso de inflexões de linhas assintóticas, estaremos supondo aqui que as curvas de inflexão das linhas de curvatura (conjunto obtido acima) são curvas regulares. Vale ressaltar que para linhas de curvatura, o conjunto obtido acima não é o mesmo se procurássemos inflexões onde $\gamma' \wedge \gamma'' = 0$, ou seja, onde as duas primeiras derivadas são linearmente dependentes. No caso de linhas assintóticas, temos a equivalência (em \mathbb{R}^3) entre o conjunto de inflexão obtido pela curvatura geodésica e o conjunto obtido onde as duas primeiras derivadas são linearmente dependentes, onde este fato foi demonstrado no capítulo 3. Considerando esta caracterização de inflexões pela curvatura geodésica, consideraremos o toro T cuja imersão é dada por:

$$\begin{aligned} x_0(u, v) &= \cos\left(\frac{v}{2} - \frac{u}{2}\right) \cos\left(\frac{u}{2} + \frac{v}{2}\right) & x_1(u, v) &= \cos\left(\frac{v}{2} - \frac{u}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{u}{2} + \frac{v}{2}\right) \\ x_2(u, v) &= \text{sen}\left(\frac{v}{2} - \frac{u}{2}\right) \cos\left(\frac{u}{2} + \frac{v}{2}\right) & x_3(u, v) &= \text{sen}\left(\frac{v}{2} - \frac{u}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{u}{2} + \frac{v}{2}\right) \end{aligned} \quad (5-6)$$

onde $(u, v) \in [0, 2\pi)$. Da mesma forma que foi feito no capítulo anterior, consideraremos a perturbação

$$\tilde{X}(u, v) = X(u, v) + \varepsilon h(u, v)N, \quad (5-7)$$

onde $h : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave duplamente periódica, ε um número real positivo suficientemente pequeno e N é o vetor normal a X . Começamos com a seguinte proposição:

Proposição 5.4 *As linhas de curvatura do toro T dado acima (por 5-6) são as curvas coordenadas.*

Demonstração. De fato, os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais com respeito a $N = X \wedge X_u \wedge X_v$ são dados por:

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \frac{1}{2}, & e(u, v) &= \frac{1}{4}, \\ F(u, v) &= 0, & f(u, v) &= 0, \\ G(u, v) &= \frac{1}{2}, & g(u, v) &= -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

□

Determinemos agora o conjunto de inflexão da superfície dada em (5-7). Os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental são dados por:

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\varepsilon(h_{uu}) + \varepsilon^2\left(-\frac{1}{8}h^2 + \frac{1}{4}h_u^2\right) + \varepsilon^3\left(\frac{1}{8}h_u^2h - \frac{1}{16}h_{uu}h^2\right) + O(4), \\ f &= \frac{1}{4}\varepsilon(h_{uv}) + \varepsilon^3\left(\frac{1}{8}h_vh_uh - \frac{1}{16}h_{uv}h^2\right) + O(4), \\ g &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\varepsilon(h_{vv}) + \frac{1}{4}\varepsilon^2\left(-h_v^2 + \frac{1}{2}h^2\right) + \varepsilon^3\left(\frac{1}{8}h_v^2h - \frac{1}{16}h_{vv}h^2\right) + O(4), \\ E &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\varepsilon h + \varepsilon^2\left(\frac{1}{8}h^2 + \frac{1}{4}h_u^2\right), \\ F &= \frac{1}{4}\varepsilon^2h_uh_v, \\ G &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon h + \varepsilon^2\left(\frac{1}{8}h^2 + \frac{1}{4}h_v^2\right). \end{aligned}$$

onde por simplicidade omitimos o argumento (u, v) nos termos acima. Com isso, escrevemos as equações

$$\begin{cases} M_p(\Gamma_{22}^1 p^3 + (2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2)p^2 + (\Gamma_{11}^1 - 2\Gamma_{12}^2)p - \Gamma_{11}^2) + M_u + pM_v = 0 \\ (Fg - Gf)p^2 + (Eg - Ge)p + Ef - Fe = 0, \end{cases} \quad (5-8)$$

onde $M(u, v, p) = (Fg - Gf)p^2 + (Eg - Ge)p + Ef - Fe$, e $p = \frac{dv}{du}$.

Notemos que a primeira equação é um polinômio de grau três em p e a segunda um polinômio de grau dois em p . Aplicando o “resultant” em p (termo definido no Apêndice) nestas duas equações obtemos:

$$\begin{aligned} \varepsilon[h_{uv}(h_{uu}h_v + h_v)(h_{vv}h_u + h_u)] + \varepsilon^2[-h_{uv}(h_{vv}h_u + h_u)(-2h_{vv}h_{uv} + h_{uv}h_{uu} + hh_v - 2h_{uu}h_v + h_vh_{vv}) \\ + (h_{uu}h_v + h_v)(-2h_{uv}^2h_{uu} + h_{vv}h_{uv}^2 - 2h_uh_{uv}h_{vv} + h_uh_{uv}h_{uu} + h_uh_{uv}h) + \\ (h_{vv}h_u + h_u)(h_{uu}h_v + h_v)(-3h_{vv}h_{uv} + 3h_{uu}h_{uv} + 2hh_{uv} + h_uh_v)] + O(\varepsilon^3) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (5-9)$$

Com $\varepsilon = 0$ temos que todos pontos são de inflexão. Se $\varepsilon \neq 0$, a equação (5-9) se fatora:

$$\begin{aligned} & [h_{uv}(h_{uuu} + h_v)(h_{vvu} + h_u)] + \varepsilon[-h_{uv}(h_{vvu} + h_u)(-2h_{vvu}h_{uv} + h_{uv}h_{uuu} + hh_v - 2h_{uu}h_v + h_vh_{vv}) \\ & + (h_{uuu} + h_v)(-2h_{uv}^2h_{uuu} + h_{vvv}h_{uv}^2 - 2h_uh_{uv}h_{vv} + h_uh_{uv}h_{uu} + h_uh_{uv}h) + \\ & (h_{vvu} + h_u)(h_{uuu} + h_v)(-3h_{vv}h_{uv} + 3h_{uu}h_{uv} + 2hh_{uv} + h_uh_v)] + O(\varepsilon^2) + \dots = 0. \end{aligned} \quad (5-10)$$

Observamos que, com ε suficientemente pequeno as raízes da equação (5-10) estão “próximas” das raízes da equação

$$h_{uv}(h_{uuu} + h_v)(h_{vvu} + h_u) = 0.$$

Com isto, provamos o seguinte resultado:

Teorema 5.5 *Consideremos a perturbação (5-7) do toro. Suponhamos que as curvas $h_{uuu} + h_v = 0$ e $h_{vvu} + h_u = 0$ são regulares e que $h_{uv} \neq 0$. Um ponto com coordenadas $(u, v) = (u_0, v_0)$ continua um ponto de dupla inflexão para as folheações principais em ordem ε se, e somente se, a condição*

$$\begin{cases} h_{uuu} + h_v = 0 \\ h_{vvu} + h_u = 0 \end{cases} \quad (5-11)$$

é satisfeita em (u_0, v_0) . Ou seja, para cada solução (u_0, v_0) de (5-11), temos um ponto de dupla inflexão “próximo” de (u_0, v_0) .

Observação 5.6 *Acreditamos que o número soluções de*

$$\begin{cases} h_{uuu} + h_v = 0 \\ h_{vvu} + h_u = 0 \end{cases} \quad (5-12)$$

é pelo menos quatro. Um exemplo em que acreditamos ter o número mínimo é dado considerando a função duplamente periódica $h : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(u, v) = F(u) + G(v)$. Para esta função temos:

$$\begin{cases} h_{uuu} + h_v = 0 \\ h_{vvu} + h_u = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} G'(v) = 0 \\ F'(u) = 0. \end{cases} \quad (5-13)$$

Pelo teorema 3.14 (Teorema de Sturm), o sistema acima tem pelo menos quatro soluções em $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$.

Aqui temos que localmente a curva $h_{uuu} + h_v = 0$ é a curva de inflexão para uma folheação principal e a curva $h_{vvu} + h_u = 0$ a curva de inflexão para a outra folheação principal.

Lembremos que, quando trabalhávamos com linhas assintóticas, a condição para que um ponto continuasse quadrático em ordem ε era:

$$\begin{cases} h_{uuu} + h_u = 0 \\ h_{vvv} + h_v = 0. \end{cases}$$

Assim, podemos relacionar as curvas de inflexão das linhas assintóticas e das linhas de curvatura.

Observação 5.7 *O número de pontos de intersecção de uma curva de inflexão de uma folheação principal com uma curva de inflexão de uma folheação assintótica em uma superfície hiperbólica fechada em $\mathbb{R}P^3$ é contado pelas soluções dos sistemas:*

$$\begin{aligned} (I) \begin{cases} h_{uvv} + h_v = 0 \\ h_{uuu} + h_u = 0 \end{cases} ; & (II) \begin{cases} h_{uvv} + h_v = 0 \\ h_{vvv} + h_v = 0 \end{cases} ; \\ (III) \begin{cases} h_{vvu} + h_u = 0 \\ h_{vvv} + h_v = 0 \end{cases} ; & (IV) \begin{cases} h_{vvu} + h_u = 0 \\ h_{uuu} + h_u = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

As soluções dos sistemas (I) e (III) podem ser vistos como pontos críticos de uma função de \mathbb{T}^2 em \mathbb{R} , ou seja:

$$(I) \begin{cases} (h_{uu} + h)_v = 0 \\ (h_{uu} + h)_u = 0 \end{cases} ; \quad (III) \begin{cases} (h_{vv} + h)_u = 0 \\ (h_{vv} + h)_v = 0. \end{cases}$$

$(h_{uu} + h), (h_{vv} + h) : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Para estes sistemas usamos o resultado que afirma que para uma função de \mathbb{T}^2 em \mathbb{R} , o vetor gradiente se anula pelo menos três vezes. Portanto para (I) e (III), temos pelo menos três soluções. Acreditamos que o número de soluções de (II) e (IV) é pelo menos oito.

Vejamos um exemplo.

Exemplo: Consideremos a função duplamente periódica $h : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(u, v) = F(u) + G(v)$. Temos que:

$$\begin{cases} h_{uvv} + h_v = 0 \\ h_{uuu} + h_u = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} G'(v) = 0 \\ F'''(u) + F'(u) = 0 \end{cases}$$

que tem pelo menos oito soluções em $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ pelo teorema 3.14 (Teorema de Sturm). De modo análogo, cada sistema

$$\begin{cases} h_{vvu} + h_u = 0 \\ h_{vvv} + h_v = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} F'(u) = 0 \\ G'''(v) + G'(v) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_{uuv} + h_v = 0 \\ h_{vvv} + h_v = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} G'(v) = 0 \\ G'''(v) + G'(v) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_{vuu} + h_u = 0 \\ h_{uuu} + h_u = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} F'(u) = 0 \\ F'''(u) + F'(u) = 0 \end{cases}$$

tem pelo menos oito soluções em $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$.

5.2 Pontos Umbílicos

Estudaremos nesta seção o comportamento das linhas de curvatura e das curvas de inflexão próximo de pontos umbílicos. Para isso, usaremos a parametrização $(u, v) \mapsto (u, v, z(u, v))$, onde $z(u, v)$ é dado por:

$$z(u, v) = \frac{k}{2}(u^2 + v^2) + \frac{a}{6}u^3 + \frac{b}{2}uv^2 + \frac{b'}{2}u^2v + \frac{c}{6}v^3 + \quad (5-14)$$

$$\frac{A}{24}u^4 + \frac{B}{6}u^3v + \frac{C}{4}u^2v^2 + \frac{D}{6}uv^3 + \frac{\bar{E}}{24}v^4 + O((u, v))$$

onde $O((u, v))$ denota os termos de ordem superior a quatro em u e v . Nos cálculos que faremos, consideraremos o termo $b' = 0$. Isto é conseguido por meio de uma rotação adequada do plano (u, v) . Lembremos que da equação das linhas de curvatura, fazendo $p = \frac{dv}{du}$, obtemos

$$M(u, v, p) = (Fg - Gf)p^2 + (Eg - Ge)p + Ef - Fe = 0, \quad (5-15)$$

onde:

$$Fg - Gf = -bv - \left(\frac{B}{2}\right)u^2 - (C - k^3)uv - \left(\frac{D}{2}\right)v^2 + M_1^3(u, v)$$

$$Eg - Ge = (b - a)u + cv + \left(\frac{C - A}{2} + k^3\right)u^2 + (D - B)uv + \left(\frac{\bar{E} - C}{2} - k^3\right)v^2 + M_2^3(u, v)$$

$$Ef - Fe = bv + \frac{B}{2}u^2 + (C - k^3)uv + \frac{D}{2}v^2 + M_3^3(u, v).$$

Observação 5.8 Considerando a superfície $M(u, v, p) = 0$ dada em (5-15), temos:

$$M_u(0, 0, 0) = 0 \quad M_v(0, 0, 0) = b \quad M_p(0, 0, 0) = 0$$

Considerando a carta $(u, v; q = \frac{du}{dv})$, observamos que a condição de regularidade desta superfície é dada pela condição $b(b - a) \neq 0$.

Associado à equação (5-15) temos o campo vetorial:

$$Y : \begin{cases} u' = M_p \\ v' = pM_p \\ p' = -(M_u + pM_v). \end{cases} \quad (5-16)$$

Obtemos uma expressão similar para a carta $(u, v; q = \frac{du}{dv})$. As projeções das curvas integrais de Y por $\Pi(u, v, p) = (u, v)$ são as linhas de curvatura. As singularidades de Y são dadas por $(0, 0, p_i)$, onde os p_i são raízes da equação $p(bp^2 - cp + a - 2b) = 0$. Assumindo as condições de regularidade ($b \neq 0$), as singularidades de Y estão sobre o eixo p com as coordenadas:

$$p_0 = 0, \quad p_{1,2} = \frac{c}{2b} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2}. \quad (5-17)$$

Antes de fazermos a análise das inflexões próximo dos pontos umbílicos, vamos ao seguinte resultado, que pode ser encontrado em [3]:

Proposição 5.9 *Consideremos a superfície $X(u, v) = (u, v, z(u, v))$ onde $z(u, v)$ é dado em (5-14) e a condição de regularidade $b(b - a) \neq 0$. Chamemos de $\Delta = -\left[\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2\right]$. Determinando as condições de hiperbolicidade das singularidades (5-17) do campo vetorial Y , temos as equivalências:*

$$D_1) \equiv \Delta > 0, \quad D_2) \equiv \Delta < 0 \quad e \quad 1 < \frac{a}{b} \neq 2, \quad D_3) \equiv \frac{a}{b} < 1, \quad \text{onde}$$

$D_1)$ temos uma única sela;

$D_2)$ um único nó entre duas selas;

$D_3)$ três selas.

Demonstração. Analisemos o primeiro caso D_1 . Como $\Delta > 0$, temos apenas um ponto singular, $P_0 = (0, 0, 0)$, cujos autovalores não nulos associados são:

$$\begin{cases} \bar{\lambda}_1 = b - a \\ \bar{\lambda}_2 = a - 2b. \end{cases}$$

De $\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2 < 0$ temos

$$0 < \left(\frac{c}{2b}\right)^2 + 2 < \frac{a}{b} \implies \frac{a}{b} > 0. \quad (I)$$

Portanto, a e b têm o mesmo sinal. Da mesma inequação, multiplicando de ambos os lados por $(2b)^2$, obtemos:

$$4b(2b - a) < 0, \quad (II)$$

o que nos dá que b e $2b - a$ têm sinais opostos.

Se $b > 0$, de (I) $a > 0$ e de (II) $2b - a < 0 \implies a - 2b > 0 \implies a > 2b > b > 0$

$\implies b - a < 0$. Temos assim ponto de sela, pois $\bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2 < 0$.

Se $b < 0$, de (I) $a < 0$, e de (II) $2b - a > 0 \implies a - 2b < 0 \implies a < 2b < b < 0 \implies a - b < 0 \implies b - a > 0$. Logo, neste caso também temos ponto de sela. Segue portanto o caso D_1 .

No caso D_2 , como $\Delta < 0$, temos três pontos singulares. Os pontos singulares são:

$$P_0 = (0, 0, 0) \quad P_1 = (0, 0, p_1) \quad P_2 = (0, 0, p_2)$$

onde $p_1 = \frac{c}{2b} - \sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2}$ e $p_2 = \frac{c}{2b} + \sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2}$. Os autovalores não nulos associados a P_0 são:

$$\begin{cases} \bar{\lambda}_1 = b - a \\ \bar{\lambda}_2 = a - 2b. \end{cases}$$

Os autovalores não nulos associados a $P_{1,2}$ são:

$$\begin{cases} \lambda_1 = a - 3b - cp \\ \lambda_2 = 4b - 2a + cp. \end{cases}$$

Fazendo o produto $\lambda_1 \lambda_2$ e usando a equação $bp^2 - cp - 2b + a = 0$, obtemos:

$$\lambda_1 \lambda_2 = (1 + p^2)b(a - 2b - bp^2). \quad (5-18)$$

I) Suponhamos que:

$$\begin{cases} b < 0 \\ a - 2b > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \bar{\lambda}_1 = b - a > 0 \\ \bar{\lambda}_2 = a - 2b > 0, \end{cases}$$

ou seja, suponhamos que P_0 seja um nó hiperbólico. De (5-18), obtemos $\lambda_1 \lambda_2 < 0$. Logo P_1 e P_2 são pontos de sela. De modo análogo, supondo $b > 0$ e $a - 2b < 0$, ou seja, supondo novamente P_0 ponto de nó, obtemos novamente em (5-18) $\lambda_1 \lambda_2 < 0$. Portanto, supondo P_0 ponto de nó, obtemos que P_1 e P_2 são pontos de sela. Observando o polinômio de singularidades

$$bp^2 - cp - 2b + a = 0,$$

temos $p_1 p_2 = \frac{a - 2b}{b} < 0$, donde p_1 e p_2 têm sinais opostos, donde o ponto de nó está entre as duas selas.

II) Suponhamos agora que:

$$\begin{cases} b < 0 \\ a - 2b < 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \bar{\lambda}_1 = b - a > 0 \\ \bar{\lambda}_2 = a - 2b < 0, \end{cases}$$

ou seja, suponhamos que P_0 seja ponto de sela. Novamente do polinômio das singularidades

$$bp^2 - cp - 2b + a = 0,$$

temos que $p_1 p_2 = \frac{a-2b}{b} > 0$, donde p_1 e p_2 têm o mesmo sinal. Suponhamos $c < 0$. Temos assim que $p_2 > p_1 > 0$. Da equação (5-18), temos $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ se, e somente se, $a - 2b > bp^2$, ou seja:

$$p_1 p_2 < p^2. \quad (5-19)$$

Se $p = p_1$, de (5-19) $p_2 < p_1$, o que é uma contradição. Logo $p = p_2$, ou seja, p_2 é o outro ponto de sela. Se $c > 0$ temos $p_1 < p_2 < 0$. Usando novamente (5-19), obtemos neste caso que o outro ponto de sela é p_1 . Segue de modo análogo se considerarmos o caso em que $b > 0$ e $a - 2b > 0$.

Neste caso temos portanto sempre um ponto de nó entre duas selas. Analisemos o último caso D_3 .

I) Suponhamos primeiro que $b > 0$. Daí $2b > b$ e $b > a$. Portanto:

$$2b > b > a \implies a - 2b < 0 \quad e \quad b - a > 0.$$

Portanto, P_0 é ponto de sela. De (5-18), P_1 e P_2 também são pontos de sela.

II) Suponhamos agora que $b < 0$. Logo $2b < b$ e $b < a$. Portanto:

$$2b < b < a \implies a - 2b > 0 \quad e \quad b - a < 0$$

o que nos dá que P_0 é ponto de sela. De (5-18), obtemos novamente que P_1 e P_2 também são pontos de sela.

□

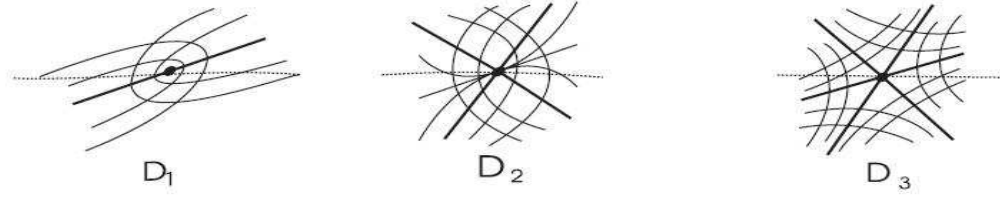


Figura 5.2: Linhas de curvatura na vizinhança de pontos umbílicos Darbouxianos

Considerando ainda a superfície dada por $X(u, v) = (u, v, z(u, v))$ onde $z(u, v)$ é dado em (5-14), obteremos o comportamento da curva de inflexão das linhas de curvatura próxima de pontos umbílicos. Este estudo foi realizado pelos autores. Os termos da primeira e segunda formas fundamentais desta superfície são dados por:

$$\begin{aligned}
e &= -\frac{1}{4}Ak^2u^4 - \frac{1}{2}Bk^2u^3v - \frac{1}{2}ak^2u^3 + \left(-\frac{1}{4}Ck^2 - \frac{1}{4}Ak^2\right)u^2v^2 + \left(-\frac{1}{2}k^3 + \frac{1}{2}A\right)u^2 - \\
&\quad -\frac{1}{2}Bk^2uv^3 - \frac{1}{2}ak^2uv^2 + Buv + au - \frac{1}{4}Ck^2v^4 + \left(-\frac{1}{2}k^3 + \frac{1}{2}C\right)v^2 + k + O(5); \\
f &= bv + Cuv + \frac{1}{2}Dv^2 + \frac{1}{2}Bu^2 - \frac{1}{2}bvk^2u^2 - \frac{1}{2}bv^3k^2 - \frac{1}{4}Bk^2u^4 - \frac{1}{2}Cvk^2u^3 \\
&\quad + \left(-\frac{1}{4}Dk^2 - \frac{1}{4}Bk^2\right)v^2u^2 - \frac{1}{2}Cv^3k^2u - \frac{1}{4}Dv^4k^2 + O(5); \\
g &= k + bu + cv + \left(-\frac{1}{2}k^3 + \frac{1}{2}C\right)u^2 + Duv + \left(-\frac{1}{2}k^3 + \frac{1}{2}\bar{E}\right)v^2 - \frac{1}{2}bk^2u^3 - \frac{1}{2}cvk^2u^2 - \frac{1}{2}bk^2v^2u \\
&\quad - \frac{1}{2}cv^3k^2 - \frac{1}{4}Ck^2u^4 - \frac{1}{2}Dk^2vu^3 + \left(-\frac{1}{4}\bar{E}k^2 - \frac{1}{4}Ck^2\right)v^2u^2 - \frac{1}{2}Dk^2v^3u - \frac{1}{4}\bar{E}v^4k^2 + O(5); \\
E &= 1 + k^2u^2 + ku^3a + kubv^2 + \left(\frac{1}{3}kA + \frac{1}{4}a^2\right)u^4 + \frac{1}{4}b^2v^4 + \frac{1}{3}kuDv^3 + \\
&\quad \left(kC + \frac{1}{2}ba\right)u^2v^2 + ku^3Bv + O(5); \\
F &= k^2uv + \left(kb + \frac{1}{2}ka\right)vu^2 + \frac{1}{2}kcv^2u + \frac{1}{2}bv^3k + \frac{1}{6}kBu^4 + \left(\frac{1}{6}kA + \frac{1}{2}ba + \frac{1}{2}kC\right)vu^3 \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}kB + \frac{1}{4}ac + \left(\frac{1}{2}kD\right)v^2u^2 + \left(\frac{1}{2}kC + \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{6}k\right)v^3u + \left(\frac{1}{6}kD + \frac{1}{4}bc\right)v^4 + O(5);
\end{aligned}$$

$$G = 1 + k^2v^2 + 2kubv^2 + kv^3c + \left(\frac{1}{3}k + \frac{1}{4}c^2\right)v^4 + (kC + b^2)u^2v^2 + (kD + bc)v^3u + \frac{1}{3}ku^3Bv + O(5).$$

Com isto, obtemos que o conjunto de inflexão

$$\begin{cases} M_p(\Gamma_{22}^1 p^3 + (2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2)p^2 + (\Gamma_{11}^1 - 2\Gamma_{12}^2)p - \Gamma_{11}^2) + M_u + pM_v = 0 \\ M(u, v, p) = (Fg - Gf)p^2 + (Eg - Ge)p + Ef - Fe = 0 \end{cases}, \quad (5-20)$$

onde $p = \frac{dv}{du}$, é dado por:

$$v(au^2 - 2bu^2 - vuc + bv^2) + O(4) = 0. \quad (5-21)$$

Obtemos este conjunto fazendo o resultante dos dois polinômios em p de (5-20). Observe-mos a semelhança entre o conjunto de inflexão obtido e o polinômio das singularidades

$$p(a - 2b - cp + bp^2) = 0.$$

No que segue, escreveremos o conjunto de inflexão e as separatrizes como

$$v = up + \gamma u^2$$

(onde $p = 0$ ou $p = \frac{c}{2b} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2}$), com o objetivo de distinguir estas duas curvas.

Determinemos primeiro as separatrizes.

Substituindo $v = up + \gamma u^2$ na equação diferencial das linhas de curvatura

$$(Fg - Gf)(dv)^2 + (Eg - Ge)dudv + (Ef - Fe)(du)^2 = 0,$$

obtemos:

$$-10p^2\gamma b - 3p^3C - 3p^2B - p^4D + 6pc\gamma - pA + 3pC + 3Dp^2 + p^3\bar{E} + 6b\gamma - 4\gamma a + B = 0$$

Temos então:

$$\gamma = -\frac{1}{2} \frac{-B + p^4D + (-\bar{E} + 3C)p^3 + (3B - 3D)p^2 + (A - 3C)p}{5p^2b - 3pc - 3b + 2a}.$$

Obtemos assim o termo de grau dois da separatriz (horizontal). Análise análoga considerando $u = vp + \gamma v^2$.

Para o conjunto de inflexão, façamos $v = pu + \bar{\gamma}u^2$ e consideramos os termos de grau

quatro da equação dada em (5-21), ou seja:

$$\begin{aligned} &v(au^2 - 2bu^2 - vuc + bv^2) + vu^3(14b^2C + 2a^2C - 6b^2A - 14abC + 4acB + 4abA + 2abk^3 + \\ &4b^2k^3 - 2a^2k^3 - 6bcB) + v^3u(-2abk^3 + 8bcD - 2b^2k^3 - 2c^2C + 2abC + 2c^2k^3 + 2bcB - \\ &4b^2C - 4acD + 4b^2A - 2b^2\bar{E}) + u^2v^2(-3bcA + 3bcC + 3a^2D + 3abB + 6bck^3 - 3b^2B - \\ &15abD - 3c^2B + 12Db^2) + u^4(abB - a^2B) + v^4(c^2D - bc\bar{E} - 7Db^2 - 2bck^3 + 5bcC + \\ &4b^2B + 3abD) + O(5) = 0. \end{aligned}$$

Substituindo $v = pu + \bar{\gamma}u^2$ na equação acima e resolvendo em $\bar{\gamma}$, obtemos:

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{2b(-b+a)(a-2b-2pc+3p^2b)} [a^2B - baB + (-14b^2C + 6bcB - 4acB - 4baA + 6b^2A - 2bak^3 - 4b^2k^3 - 2a^2C + 2a^2k^3 + 14baC)p + (-3bcC - 6bck^3 + 3bcA - 12b^2D - 3a^2D + 3Bb^2 + 3c^2B + 15baD - 3baB)p^2 + (-4Bb^2 - 5bcC - 3baD + 2bck^3 + 7b^2D + bc\bar{E} - c^2D)p^4 + (2bak^3 - 4b^2A - 2bcB + 4acD + 2b^2k^3 - 8bcD - 2c^2k^3 + 4b^2C + 2b^2\bar{E} + 2c^2C - 2baC)p^3].$$

Deste modo, a curva de inflexão se distingue das separatrizes umbílicas se o polinômio em p

$$L(p) = \frac{2(a-b)^2B}{(2a-3b)(a-2b)b} + \frac{p}{2b(a-b)(a-2b)^2(2a-3b)^2} [216b^5C + 8a^5k^3 - 8a^5C - 96b^5A + 90a^3k^3b^2 - 48a^4k^3b + 685b^3Ca^2 - 221b^3a^2A + 91b^2a^3A - 363a^3Cb^2 + 72b^5k^3 - 195Bb^2ca^2 + 69a^3bBc - 96Bb^4c - 22a^2k^3b^3 - 14ba^4A - 8a^4Bc - 618b^4Ca + 90a^4Cb + 238b^4Aa - 96b^4k^3a + 228Bb^3ca]$$

não se anula para $p = 0$ ou $p = \frac{c}{2b} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2}$.

Temos portanto:

Proposição 5.10 Consideremos a superfície $X(u, v) = (u, v, z(u, v))$ onde $z(u, v)$ é dado em (5-14). Suponhamos que $b(b-a)(2a-3b) \neq 0$. Nos termos acima, temos que uma condição suficiente para que a curva de inflexão se distingue das separatrizes umbílicas é que o polinômio

$$L(p) = \frac{2(a-b)^2B}{(2a-3b)(a-2b)b} + \frac{p}{2b(a-b)(a-2b)^2(2a-3b)^2} [216b^5C + 8a^5k^3 - 8a^5C - 96b^5A + 90a^3k^3b^2 - 48a^4k^3b + 685b^3Ca^2 - 221b^3a^2A + 91b^2a^3A - 363a^3Cb^2 + 72b^5k^3 - 195Bb^2ca^2 + 69a^3bBc - 96Bb^4c - 22a^2k^3b^3 - 14ba^4A - 8a^4Bc - 618b^4Ca + 90a^4Cb + 238b^4Aa - 96b^4k^3a + 228Bb^3ca],$$

não se anule para $p = 0$ ou $p = \frac{c}{2b} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{a}{b} + 2}$.

Para o ponto singular $p = 0$, a condição dada acima se reduz a

$$\frac{(a-b)^2B}{(2a-3b)(a-2b)b} \neq 0.$$

Observemos que esta análise foi feita nos termos de grau dois das separatrizes e nas inflexões. Caso obtenhamos que estes termos são iguais nas duas curvas, devemos calcular os termos de ordem maior para determinar onde elas se distinguem (se houver distinção). Como estamos interessados no comportamento local, calculamos apenas os termos de ordem dois.

Referências Bibliográficas

- [1] DO CARMO, M. P. **Differential Geometry of Curves and Surfaces**. Prentice-Hall, 1976.
- [2] EISENHART, L. P. **A treatise on the differentie geometry of curves and surfaces**. New York, Dover, 1909.
- [3] GARCIA, R; SOTOMAYOR, J. **Differential Equations of Classical Geometry, a Qualitative Theory**. Publicações Matemáticas, 27^o Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 2009.
- [4] GARCIA, R; SOTOMAYOR, J. **Tori embedded in \mathbb{S}^3 with dense asymptotic lines**. An. Acad. Bras de Cienc., 81(1):13-19, 2009.
- [5] GARCIA R., J. S; GUTIERREZ, C. **Structural atability of asymptotic lines on surfaces immersed in \mathbb{R}^3** . B. Sci. Math., 123:599-622, 1999.
- [6] GRADSHTEYN; RYZHIK. **Table of Integrals, Series and Products**. Academic Press, 1965.
- [7] KATOK, S. **Fuchsian groups**. Chicago, London, Univ. of Chicago, 1992.
- [8] LIMA, E. L. **Curso de Análise Vol.2**. Projeto Euclides, IMPA, 2008.
- [9] MONTESINOS, A. **Softwares encontrados na página pessoal**. Universitat de Valencia, www.uv.es/montesin/, 2009.
- [10] OVSIENKO, V; TABACHNIKOV, S. **Projective Differential Geometry Old an New**. Cambridge Univ. Press, 2005.
- [11] OVSIENKO, V; TABACHNIKOV, S. **Hyperbolic Carathéodory Conjecture**. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 258, pp.178-193, 2007.
- [12] SOTOMAYOR, J. **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias**. Projeto Euclides, CNPq, IMPA, 1979.

- [13] THOM; KERGOSIEN. **Sur les points paraboliques des surfaces.** C.R. Acad. Sci. Paris, 290 Sér. 705-710, 1980.
- [14] URIBE, R. **A Projective Invariant for Swallowtails and Godrons, and Global Theorems on the Flecnodal Curve.** Moscow Math. J.6,731-768, 2006.

Em vários momentos no texto usamos o “resultant” de dois polinômios. Estudaremos aqui um pouco sobre este termo.

Definição A.1 Dado um polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ de grau n com raízes $\alpha_i, i = 1, \dots, n$, e um polinômio $q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$ de grau m com raízes $\beta_j, j = 1, \dots, m$, o “resultant” $\rho(p(x), q(x))$ entre os polinômios $p(x)$ e $q(x)$ é dado por:

$$\rho(p(x), q(x)) = a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (\alpha_i - \beta_j).$$

Notemos assim, que quando estamos calculando o determinante de dois polinômios estamos eliminando variáveis. No texto, calculamos o “resultant” entre um polinômio de grau três e um polinômio de grau dois. Consideremos então os polinômios:

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad e \quad q(x) = ex^2 + fx + g.$$

O “resultant” entre estes dois polinômios é dado por:

$$\rho(p(x), q(x)) = eb^2g^2 - 2e^2bgd - bg^2af + e^3d^2 + 3edafg - fecbg - fe^2cd + f^2cag + eb^2d - af^3d + ge^2c^2 - 2ecag^2 + a^2g^3$$

O “resultant” entre dois polinômios é obtido usando o programa matemático maple, com o comando:

$$\text{resultant}(p(x), q(x), x).$$