

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

FERNANDO SOARES DE CARVALHO

**Difeomorfismos Conformes que
Preservam o Tensor de Ricci em
Variedades Semi-Riemannianas.**

Goiânia
2011

FERNANDO SOARES DE CARVALHO

Difeomorfismos Conformes que Preservam o Tensor de Ricci em Variedades Semi-Riemannianas.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria.

Orientadora: Profa. Dra. Rosângela Maria da Silva

Goiânia
2011



Termo de Ciência e de Autorização para Disponibilizar as Teses e Dissertações Eletrônicas (TEDE) na Biblioteca Digital da UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás-UFG a disponibilizar gratuitamente através da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações – BDTD/UFG, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1 1. Identificação do material bibliográfico: **Dissertação** **Tese**

1 2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor(a):	Fernando Soares de Carvalho		
CPF:		E-mail:	fernandosoareshcarvalho@gmail.com
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página?		<input checked="" type="checkbox"/> Sim	<input type="checkbox"/> Não
Vínculo Empregatício do autor			
Agência de fomento:		Sigla:	
País:		UF:	
		CNPJ:	
Título:	Difeomorfismos Conformes que Preservam o Tensor de Ricci em Variedades Semi-Riemannianas		
Palavras-chave:	Variedade semi-Riemanniana, Tensor de Ricci, difeomorfismo conforme, métricas conformes.		
Título em outra língua:	Conformal Diffeomorphism that Preserving the Ricci Tensor in Semi-Riemannian Manifolds.		
Palavras-chave em outra língua:	Semi-Riemannian Manifolds, Ricci Tensor, Conformal Diffeomorphism, Conformal Metrics.		
Área de concentração:	Geometria		
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	28/01/2011		
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado em Matemática		
Orientador(a):	Rosângela Maria da Silva		
CPF:		E-mail:	rmsrib@bol.com.br
Co-orientador(a):	Romildo da Silva Pina		
CPF:		E-mail:	romildo@mat.ufg.br

3. Informações de acesso ao documento:

Liberação para disponibilização?¹ total parcial

Em caso de disponibilização parcial, assinale as permissões:

Capítulos. Especifique: _____
 Outras restrições: _____

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O Sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Fernando Soares de Carvalho

Assinatura do(a) autor(a)

Data: 17, 02, 2011

¹ Em caso de restrição, esta poderá ser mantida por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Todo resumo e metadados ficarão sempre disponibilizados.

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
GPT/BC/UFG**

C331d Carvalho, Fernando Soares de.
Difeomorfismos conformes que preservam o tensor de Ricci em variedades semi-riemannianas [manuscrito] / Fernando Soares de Carvalho. - 2011.
48 f.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Rosângela Maria da Silva.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás,
Instituto de Matemática e Estatística, 2011.
Bibliografia.

1. Difeomorfismos conformes. 2. Tensor de Ricci
3. Métricas conformes. 4. Variedades semi-riemannianas.
I. Título.

CDU: 514.764.2

FERNANDO SOARES DE CARVALHO

**DIFEOMORFISMOS CONFORMES QUE PRESERVAM O
TENSOR DE RICCI EM VARIEDADES
SEMI-RIEMANNIANAS**

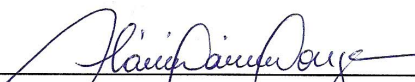
Dissertação defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada no dia 28 de janeiro de 2011, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



Profa. Dra. Rosângela Maria da Silva
Instituto de Matemática e Estatística - UFG
Presidente da Banca



Prof. Dr. Romildo da Silva Pina
Instituto de Matemática e Estatística - UFG



Prof. Dr. Flávio Raimundo de Souza
Instituto Federal de Goiás



Prof. Dr. Armando Mauro Vasquez Corro
Instituto de Matemática e Estatística - UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Fernando Soares de Carvalho

Graduou-se em Matemática pela UFG - Universidade Federal de Goiás.

Agradecimentos

Sobretudo a Deus por tudo o que tenho em minha vida e pelas oportunidades em meu caminho.

Agradeço aos meus pais, Luiz e Janete, pelo apoio, carinho e confiança durante todos esses anos.

À minha namorada, Silma Joseane Lara, pelo carinho e compreensão no decorrer de todo o curso.

Aos colegas do mestrado, que fizeram parte desta etapa da minha vida.

Aos professores e funcionários do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Goiás, por serem tão prestativos, em especial ao professor Romildo da Silva Pina, pelas valiosas sugestões para enriquecimento deste trabalho. Aos professores Armando Mauro Vasquez Corro e Flávio Raimundo de Souza, por aceitarem participar da banca examinadora e também pelas sugestões. À minha orientadora, professora Rosângela Maria da Silva, pela dedicação, paciência, disposição e por sempre me ajudar durante a elaboração deste trabalho.

Resumo

Carvalho, Fernando Soares de. **Difeomorfismos Conformes que Preservam o Tensor de Ricci em Variedades Semi-Riemannianas.** Goiânia, 2011. 58p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Esta dissertação está baseada no trabalho de W. Kuhnel e B. Rademacher, e consiste em caracterizar variedades Semi-Riemannianas (M, g) , que admite uma transformação conforme definida globalmente $\bar{g} = \frac{1}{\varphi^2}g$, nas quais a diferença entre os tensores de Ricci é um múltiplo escalar da métrica g (ou \bar{g}). Estudaremos também o caso em que a transformação $\bar{g} = \frac{1}{\varphi^2}g$ é concircular e (M, g) e (M, \bar{g}) tem curvatura escalar constante.

Palavras-chave

Variedades semi-Riemannianas, tensor curvatura de Ricci, difeomorfismo conforme, métricas conformes, difeomorfismo concircular

Abstract

Carvalho, Fernando Soares de. **Conformal Diffeomorphism that Preserving the Ricci Tensor in Semi-Riemannian Manifolds.** . Goiânia, 2011. 58p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

This work is based on the article by W. Kühnel and B. Rademacher, and is to characterize semi-Riemannian manifolds (M, g) , which admitting a globally defined conformal transformation $\bar{g} = \frac{1}{\varphi^2}g$, in which the difference between the Ricci tensor is a scalar multiple of the metric g (or \bar{g}). We also study the case where the transformation $\bar{g} = \frac{1}{\varphi^2}g$ is concircular and (M, g) and (M, \bar{g}) has constant scalar curvature.

Keywords

Semi-Riemannian manifolds, Ricci curvature tensor, conformal diffeomorphism, conformal metrics, concircular diffeomorphism

Sumário

Introdução	10
1 Preliminares	12
2 Geometria Conforme	27
2.1 Métricas Conformes	27
2.2 Difeomorfismos Concirculares	32
2.3 Produto Torcido	34
3 Difeomorfismo Conforme que Preserva o Tensor de Ricci	39
3.1 Caracterização das Transformações Conformes que Preservam a Diferença dos Tensores de Ricci	39
3.2 Transformações Concirculares que Preservam a Diferença dos Tensores de Ricci	54
Referências Bibliográficas	57

Introdução

Um dos assuntos bastante estudado em Geometria Riemanniana são as transformações conformes entre variedades Riemannianas, colocando hipótese adicional de preservar alguma propriedade que envolve o tensor curvatura de Ricci da variedade.

Como por exemplo, no caso em que $M = \mathbb{R}^n$, em 1872 Lie [12] mostrou, que métricas homotéticas possuem o mesmo tensor de Ricci, ou seja, se g e \bar{g} são métricas homotéticas, então

$$Ric_{\bar{g}} = Ric_g. \quad (0-1)$$

Este resultado foi generalizado, em 1937 por Haantjes [7], para o caso em que M é o espaço pseudo-Euclidiano, e em 1983 por Ferrand [4], no caso em que M é uma variedade Riemanniana completa.

Em 1965, considerando (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão $n > 2$, que admite uma função $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$, satisfazendo

$$\nabla^2 \varphi = (c\varphi + a)g,$$

Tashiro [18], caracterizou completamente a variedade M .

Este estudo, foi de grande importância para que Kuhnel [8], em 1988, pudesse caracterizar variedades Einstein (M, g) e (M, \bar{g}) , onde g e $\bar{g} = \frac{1}{\varphi^2}g$ são métricas conformes, tal que a diferença entre os tensores de Ricci em cada métrica é um múltiplo escalar da métrica g ou \bar{g} , isto é,

$$Ric_{\bar{g}} - Ric_g = c(n-1)g, \quad (0-2)$$

ou ainda,

$$Ric_{\bar{g}} - Ric_g = c(n-1)\bar{g}. \quad (0-3)$$

Posteriormente, em 1995, Kuhnel e Rademacher [?], generalizam o problema, caracterizando variedades semi-Riemannianas completas (M, g) e (M, \bar{g}) , onde g e $\bar{g} = \frac{1}{\varphi^2}g$ são métricas conformes e as igualdades (0-2) e (0-3) são satisfeitas.

Para $c = 0$, temos que a igualdade (0-1) vem como caso particular das igualdades (0-2) e (0-3).

Esta dissertação está baseada no artigo de W. Kuhnel e H. B. Rademacher [?].

O trabalho está dividido em três capítulos:

No Capítulo 1, apresentaremos alguns conceitos e resultados de geometria Riemanniana que serão estendidos às variedades semi-Riemannianas e usados nos capítulos subsequentes.

No Capítulo 2, apresentaremos algumas definições e enunciaremos alguns resultados sobre geometria conforme que serão fundamentais na solução do problema acima.

Finalmente, no Capítulo 3, faremos uma caracterização das variedades semi-Riemannianas admitindo uma transformação conforme global, tal que, as igualdades (0-2) e (0-3) são satisfeitas. Utilizando-se de alguns resultados devido a Tashiro [18], mostraremos que as únicas possibilidades são: g e \bar{g} são homotéticas, (M, g) e (M, \bar{g}) são variedades Riemannianas de curvatura seccional constante ou o produto torcido $M = \mathbb{R} \times_{\varphi(t)} M_*$, onde (M_*, g_*) é uma variedade Riemanniana Ricci flat completa.

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos alguns conceitos e resultados da geometria Riemanniana. Ademais, estudaremos também o espaço semi-Riemanniano, que é o principal espaço utilizado para o desenvolvimento deste trabalho. Maiores detalhes podem ser encontrados em [3] e [14].

Definição 1.1 *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $X_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ de abertos U_α de \mathbb{R}^n em M tais que:*

1. $\bigcup_\alpha X_\alpha = M$;
2. Para todo par α, β com $X_\alpha(U_\alpha) \cap X_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $X_\alpha^{-1}(W)$ e $X_\beta^{-1}(W)$ são abertos em \mathbb{R}^n e as aplicações $X_\alpha^{-1} \circ X_\beta^{-1}$ são diferenciáveis.

O par (U_α, X_α) com $p \in X_\alpha(U_\alpha)$ é uma *parametrização* de M em p ; $X_\alpha(U_\alpha)$ é uma *vizinhança coordenada* em p . Uma família $\{(U_\alpha, X_\alpha)\}$ satisfazendo 1 e 2 é uma *estrutura diferenciável* em M .

Definição 1.2 *Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ é chamada uma curva (diferenciável) em M .*

Suponha que $\alpha(0) = p \in M$ e seja $\mathcal{D}(M)$ o conjunto das funções de M diferenciáveis em p . O vetor tangente à curva α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}, \quad f \in \mathcal{D}.$$

Um *vetor tangente* em p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto dos vetores tangentes a M em p é indicado por $T_p M$.

Se escolhermos uma parametrização $x : U \rightarrow (M, g)$ em $p = x(0)$, podemos exprimir a função f e a curva α nesta parametrização por

$$f \circ x(q) = f(x_1, \dots, x_n), \quad q = (x_1, \dots, x_n) \in U$$

e

$$x^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

respectivamente. Portanto, restringindo f a α , obteremos

$$\alpha'(0)f = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)|_{t=0} = \frac{d}{dt}f(x_1(t), \dots, x_n(t))|_{t=0},$$

logo,

$$\alpha'(0)f = \sum_{i=1}^n x'_i(0) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right).$$

Portanto,

$$\alpha'(0)f = \left(\sum_{i=1}^n x'_i(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) \right) f.$$

Isto quer dizer que o vetor $\alpha'(0)$ pode ser expresso na parametrização x por

$$\alpha'(0) = \sum_{i=1}^n x'_i(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0. \quad (1-1)$$

Observe que $\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0$ é o vetor tangente em p à curva coordenada,

$$x_i \rightarrow x(0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0).$$

A expressão (1-1) mostra que o vetor tangente a uma curva α em p depende apenas das derivadas de α em um sistema de coordenadas. Decorre também de (1-1) que o conjunto T_pM , com as operações usuais de funções, forma um espaço vetorial de dimensão n , e que a escolha de uma parametrização $x : U \rightarrow (M, g)$ determina uma base associada $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_0, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_0 \right\}$ em T_pM . A estrutura linear em T_pM assim definida não depende da parametrização x . O espaço vetorial T_pM é chamado o *espaço tangente* de M em p .

Agora com a noção de espaço tangente podemos estender às variedades diferenciáveis a noção de diferencial de uma aplicação.

Teorema 1.3 *Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis e seja $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in M_1$ e cada $v \in T_pM_1$, escolha uma curva diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M_1$ com $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$. Faça $\beta = \varphi \circ \alpha$. A aplicação $d\varphi_p : T_pM_1 \rightarrow T_{\varphi(p)}M_2$ dada por $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de α .*

Definição 1.4 *A aplicação linear $d\varphi_p$ dada pelo teorema anterior é chamada **diferencial** de φ em p .*

Definição 1.5 *Sejam M_1 e M_2 variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ é um **difeomorfismo** se ela é diferenciável, biunívoca, sobrejetiva e sua inversa φ^{-1} é diferenciável.*

A existência de um difeomorfismo entre variedades diferenciáveis nos fornece a noção de equivalência entre variedades diferenciáveis; em particular se existe um difeomorfismo entre as variedades diferenciáveis M_1 e M_2 então estas variedades têm mesma dimensão.

Definição 1.6 *Uma **métrica Riemanniana** em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M uma forma bilinear e simétrica, positiva definida $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ no espaço tangente $T_p M$, que varia diferencialmente no seguinte sentido: Se $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p , com $x(x_1, x_2, \dots, x_n) = q \in x(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx(0, \dots, 1, \dots, 0)$ então*

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$$

*é uma função diferenciável em U . As funções g_{ij} são chamadas expressão da métrica Riemanniana. Uma variedade diferenciável com uma métrica Riemanniana chama-se **variedade Riemanniana**.*

Um exemplo de variedade Riemanniana é \mathbb{R}^n munido da métrica Euclidiana $g = \sum_{i=1}^n (dx_i^2)$, ou seja, $g_{ij} = \delta_{ij}$, fazendo a identificação canônica do espaço tangente $T_p \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$.

A existência de um produto interno que varia diferenciavelmente em relação à escolha do ponto $p \in M$ possibilita definir conceitos como ângulo entre vetores, comprimento de curvas, ângulo entre curvas e isometrias.

Definição 1.7 *Sejam M e \bar{M} variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \rightarrow \bar{M}$ é chamado uma **isometria** se*

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, \quad (1-2)$$

para todo $p \in M$ e $u, v \in T_p M$.

Definição 1.8 *Sejam M e \bar{M} variedades Riemannianas. Uma aplicação diferenciável $f : M \rightarrow \bar{M}$ é uma **isometria local** em $p \in M$ se existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f : U \rightarrow f(U)$ é um difeomorfismo satisfazendo (1-2).*

Dizemos que a variedade Riemanniana M é *localmente isométrica* à variedade \bar{M} se para todo $p \in M$, existe uma vizinhança U de p em M e uma isometria local $f: U \rightarrow f(U) \subset \bar{M}$.

Por exemplo, em \mathbb{R}^3 o plano e o cilindro são localmente isométricos, assim como o catenóide e o helicóide.

Da Definição 1.7, podemos observar que um difeomorfismo f é uma isometria se a diferencial df preserva o produto interno.

Definição 1.9 *Um campo de vetores X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_pM$.*

No que se segue $\mathfrak{X}(M)$ denotará o conjunto de campos de vetores C^∞ em M e $\mathfrak{D}(M)$ o conjunto das funções reais de classe C^∞ definidas em M .

Definição 1.10 *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação*

$$\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

indicada por $(X, Y) \rightarrow \nabla_X Y$ e que satisfaz as seguintes propriedades:

$$i) \nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z;$$

$$ii) \nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z;$$

$$iii) \nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y,$$

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in \mathfrak{D}(M)$.

Proposição 1.11 *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo da curva diferenciável $\gamma: I \rightarrow M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de γ , denominado derivada covariante de V ao longo de γ , tal que*

$$a) \frac{D}{dt}(V+W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt};$$

$$b) \frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt};$$

c) *Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathfrak{X}(M)$, isto é, $V(t) = Y(\gamma(t))$, então*

$$\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} Y,$$

onde W é um campo de vetores ao longo de γ e f é uma função diferenciável em I .

Demonstração.:

Vamos supor inicialmente que existe uma correspondência satisfazendo a), b) e c). Sejam $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ um sistema de coordenadas com $\gamma(I) \cap X(U) \neq \emptyset$ e $X^{-1} \circ \gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ a expressão local de $\gamma(t)$, $t \in I$. Seja $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, então podemos expressar o campo V localmente como $V(t) = \sum_{j=1}^n v^j(t) X_j(\gamma(t))$, onde $v^j = v^j(t)$ e $X_j = X_j(\gamma(t))$. Logo, por a) e b) temos

$$\frac{DV}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{dv^j}{dt} X_j + \sum_{j=1}^n v^j \frac{DX_j}{dt}.$$

Usando c), encontramos

$$\frac{DX_j}{dt} = \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} X_j.$$

Então,

$$\frac{DX_j}{dt} = \nabla_{\sum_{i=1}^n \frac{dx_i}{dt} X_i} X_j = \sum_{i=1}^n \frac{dx_i}{dt} \nabla_{X_i} X_j = \sum_{i,k=1}^n \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^k X_k.$$

Portanto,

$$\frac{DV}{dt} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j=1}^n v^j \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^k \right) X_k. \quad (1-3)$$

A expressão acima nos mostra que se existe uma correspondência satisfazendo às condições desta proposição, então tal correspondência é única.

Para mostrar a existência, definamos $\frac{DV}{dt}$ em $X(U)$ por (1-3). Dada essa definição temos que $\frac{DV}{dt}$ satisfaz as condições (a), (b) e (c). Agora, se $Y : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$, $Y(W)$ é uma outra vizinhança coordenada, com $Y(W) \cap X(U) \neq \emptyset$ e definamos $\frac{DV}{dt}$ em $Y(W)$ por (1-3), as definições coincidem em $Y(W) \cap X(U)$, pela unicidade de $\frac{DV}{dt}$ em $X(U)$. Segue-se que a definição pode ser estendida para todo M , isto conclui a demonstração. \square

Definição 1.12 *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \rightarrow M$ é chamado **paralelo** quando $\frac{DV}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.*

Lema 1.13 *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Seja $c : I \rightarrow M$ uma curva diferenciável em M e V_0 um vetor tangente a M em $c(t_0)$, $t_0 \in I$.*

Então existe um único campo de vetores paralelo V ao longo de c , tal que $V(t_0) = V_0$. $(V(t))$ é chamado o **transporte paralelo** de $V(t_0)$ ao longo de c

Definição 1.14 Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ em uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$. A conexão é dita **compatível com a métrica** $\langle \cdot, \cdot \rangle$, quando para toda curva diferenciável c e quaisquer pares de campos de vetores P e P' ao longo de c , tivermos $\langle P, P' \rangle = \text{constante}$.

A Definição 1.14 é justificada pela proposição seguinte que mostra que se ∇ é compatível com a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$, então podemos diferenciar o produto interno pela regra do produto usual.

Na proposição a seguir, $\frac{DV}{dt}$ é um campo vetorial ao longo da curva c , denominado **derivada covariante** de V ao longo de c , dado por

$$\frac{DV}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{dv^j}{dt} X_j + \sum_{i,j=1}^n \frac{dx_i}{dt} v^j \nabla_{X_i} X_j.$$

Proposição 1.15 Seja M uma variedade Riemanniana. Uma conexão ∇ em M é compatível com a métrica se, e somente se, para todo par V e W de campos de vetores ao longo da curva diferenciável $c : I \rightarrow M$ tem-se

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, t \in I.$$

Demonstração.:

Se a conexão ∇ em M é compatível com a métrica, escolhendo uma base ortonormal $\{P_1(t_0), \dots, P_n(t_0)\}$ de $T_{c(t_0)}(M)$, $t_0 \in I$. Utilizando o lema anterior, estenda paralelamente cada um dos vetores $P_i(t_0)$, $i = 1, 2, \dots, n$, ao longo de c . Como ∇ é compatível com a métrica, $\{P_1(t), \dots, P_n(t)\}$ é uma base ortonormal de $T_{c(t)}(M)$, para todo $t \in I$. Podemos, portanto, escrever

$$V = \sum_i v^i P_i, \quad W = \sum_i w^i P_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

onde v^i e w^i são funções diferenciáveis em I .

Segue-se daí que,

$$\frac{DV}{dt} = \sum_i \frac{dv^i}{dt} P_i, \quad \frac{DW}{dt} = \sum_i \frac{dw^i}{dt} P_i.$$

Portanto,

$$\left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle = \sum_i \left(\frac{dv^i}{dt} w^i + \frac{dw^i}{dt} v^i \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_i v^i w^i \right) = \frac{d}{dt} \langle V, W \rangle.$$

Reciprocamente, se V e W são campos paralelos, teremos

$$\frac{DV}{dt} = \frac{DW}{dt} = 0,$$

o que implica

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle = 0.$$

Dessa forma $\langle V, W \rangle$ é constante. Portanto a conexão ∇ em M é compatível com a métrica. \square

Definição 1.16 Sejam X e Y campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável M . O campo vetorial diferenciável $XY - YX$ é chamado o **colchete** $[X, Y] = XY - YX$ de X e Y .

Definição 1.17 Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é dita **simétrica** quando

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Observação 1.18 Em um sistema de coordenadas (U, X) , o fato da conexão ser simétrica implica que para todo $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$,

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0, \quad X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Teorema 1.19 (Levi Civita) *Dada uma variedade Riemanniana M , existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições:*

- 1) ∇ é simétrica.
- 2) ∇ é compatível com a métrica Riemanniana.

A conexão ∇ dada pelo Teorema 1.19 é denominada conexão de *Levi Civita* de M .

Considerando um sistema de coordenadas (U, X) em uma vizinhança de p . É conveniente dizer que as funções Γ_{ij}^k definidas em U por $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$, são os *coeficientes da conexão ∇ em U* ou os *símbolos de Christoffel* da conexão e satisfazem a seguinte equação

$$\sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right),$$

onde $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$.

Como a matriz (g_{km}) admite uma inversa (g^{km}) , teremos que

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right) g^{km}.$$

Uma ferramenta indispensável em geometria Riemanniana é caracterizar invariantes métricos, em particular, curvaturas. A seguir definiremos curvatura em uma variedade Riemanniana M , que de certa forma, é a medida da comutatividade da segunda derivada covariante, formalmente temos

Definição 1.20 *A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \mathfrak{X}(M),$$

onde ∇ é a conexão de *Levi Civita* de M .

Observe que se $M = \mathbb{R}^n$ então $R(X, Y)Z = 0$, para todo $X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$. De fato, consideremos os campos $E_i(p) = e_i$ para todo $p \in \mathbb{R}^n$, onde $\{e_i\}_{i=1}^n$ é uma base canônica do \mathbb{R}^n .

Assim, dados

$$X = \sum_{i=1}^n x_i E_i, \quad Y = \sum_{i=1}^n y_i E_i, \quad Z = \sum_{i=1}^n z_i E_i,$$

temos

$$\nabla_X Z = \nabla_X \left(\sum_{i=1}^n z_i E_i \right) = \sum_{i=1}^n (X(z_i) E_i + z_i \nabla_X E_i) = \sum_{i=1}^n X(z_i) E_i,$$

pois o campo E_i é um campo constante e, portanto, sua derivada covariante em relação a qualquer outro campo é nula.

Analogamente,

$$\nabla_Y \nabla_X Z = \sum_{i=1}^n Y(X(z_i)) E_i$$

e

$$\nabla_X \nabla_Y Z = \sum_{i=1}^n X(Y(z_i)) E_i.$$

Daí,

$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z = \sum_{i=1}^n X(Y(z_i)) E_i - \sum_{i=1}^n Y(X(z_i)) E_i,$$

ou ainda,

$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z = \sum_{i=1}^n [X(Y(z_i)) - Y(X(z_i))] E_i,$$

logo,

$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z = \sum_{i=1}^n (XY - YX)(z_i) E_i = \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Portanto, $R(X, Y)Z = 0$.

Em um sistema de coordenadas (U, X) em torno de $p \in M$ indicaremos $\frac{\partial}{\partial x_i} = X_i$, e consideramos

$$R(X_i, X_j)X_k = \sum_l R^l_{ijk} X_l.$$

Assim, R^l_{ijk} são os coeficientes da curvatura R em (U, X) . Podemos expressar em termos de Γ^k_{ij} por

$$R^s_{ijk} = \sum_l \Gamma^l_{ik} \Gamma^s_{jl} - \sum_l \Gamma^l_{jk} \Gamma^s_{il} + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma^s_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma^s_{jk}.$$

Relacionada com o operador R está a curvatura seccional que definiremos a seguir.

Definição 1.21 Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bi-dimensional $\sigma \subset T_p M$, onde $T_p M$ é o espaço tangente, o número real

$$K(\sigma) = K(x, y) = \frac{\langle R(x, y)x, y \rangle}{|x|^2 |y|^2 - \langle x, y \rangle^2},$$

onde $\{x, y\}$ é uma base qualquer de σ , é a **curvatura seccional** de σ em p .

Além da curvatura seccional ter interessantes interpretações geométricas, sua importância provém do fato que o conhecimento de $K(\sigma)$ para todo σ , determina comple-

tamente a curvatura R .

Teorema 1.22 *Sejam M uma variedade Riemanniana e $p \in M$. Defina uma aplicação trilinear $R' = T_pM \times T_pM \times T_pM \rightarrow T_pM$ por*

$$\langle R'(X, Y)Z, W \rangle = \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle Y, W \rangle \langle X, Z \rangle,$$

para todo $X, Y, Z, W \in T_pM$. Então M tem curvatura seccional constante e igual a K_0 se, e somente se, $R = K_0 R'$, onde R é o tensor curvatura de M .

Seja $x = e_n$ um vetor unitário em T_pM , considere uma base ortonormal $\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$ do hiperplano de T_pM ortogonal a x e as seguintes expressões:

$$Ric_p(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(x, e_i)x, e_i \rangle,$$

$$K(p) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Ric_p(e_j) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j=1}^n \langle R(e_j, e_i), e_j, e_i \rangle.$$

As expressões acima não dependem das bases ortonormais e são chamadas de *curvatura de Ricci* na direção de x e *curvatura escalar* em p , respectivamente.

Para provar estes fatos, daremos uma caracterização intrínseca das expressões acima. Primeiramente, definimos uma forma bilinear em T_pM como se segue: sejam $x, y \in T_pM$ e ponhamos

$$Q(x, y) = \text{traço da aplicação } z \rightarrow R(x, z)y.$$

Observamos que Q é bilinear. Escolhendo x unitário e uma base ortonormal $\{z_1, \dots, z_{n-1}, z_n = x\}$ para T_pM , temos

$$Q(x, y) = \sum_i \langle R(x, z_i)y, z_i \rangle = \langle R(y, z_i)x, z_i \rangle = Q(y, x),$$

isto é, Q é simétrica e $Q(x, x) = (n-1)Ric_p(x)$; isso demonstra que $Ric_p(x)$ está intrinsecamente definida.

Por outro lado, à forma bilinear Q em T_pM corresponde uma aplicação linear auto-adjunta K , dada por

$$\langle K(x), y \rangle = Q(x, y).$$

Considerando uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$, temos

$$\text{Traço de } K = \sum_j \langle K(z_j), z_j \rangle = \sum_j Q(z_j, z_j) = (n-1) \sum_j Ric_p(z_j) = n(n-1)K(p),$$

o que demonstra o que havíamos afirmado.

A forma bilinear $\frac{1}{n-1}Q$ é chamada o *tensor de Ricci*.

Definição 1.23 Se (M, g) é uma variedade Riemanniana de dimensão n , com $\text{Ric}_g = 0$ para todo $X \in T_pM$, dizemos que a variedade M é **Ricci-flat**.

Agora, expressamos o que foi feito anteriormente em um sistema de coordenadas (x_i) . Seja $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$, e g^{ij} a matriz inversa de g_{ij} . Então os coeficientes da forma bilinear $\frac{1}{n-1}Q$ na base X_i são dados por

$$\frac{1}{n-1}R_{ik} = \frac{1}{n-1} \sum_j R_{ijk}^j = \frac{1}{n-1} \sum_{sj} R_{ijks} g^{sj}.$$

Observe agora que se $A : T_pM \rightarrow T_pM$ é uma aplicação linear auto-adjunta e $B : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ é a forma bilinear a ela associada, isto é, $B(X, Y) = \langle A(X), Y \rangle$, então traço $A = \sum_{ik} B(X_i, X_k) g^{ik}$. Portanto, a curvatura escalar no sistema (x_i) é dada por

$$K = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{ik} R_{ik} g^{ik}.$$

Considerando, $\varphi \in \mathcal{D}(M)$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$ introduzimos em seguida, os conceitos de Divergente, Gradiente, Hessiana e Laplaciano.

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana, $\varphi \in \mathcal{D}(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, então

Definição 1.24 1) **Gradiente** de φ é dado por

$$\langle \text{grad}\varphi(p), v \rangle = \langle \nabla\varphi(p), v \rangle = d\varphi_p(v), \quad \forall p \in M, \quad \forall v \in T_pM;$$

2) **Hessiana** de φ é dada por

$$\text{Hess}\varphi(X, Y) = \nabla^2\varphi = \langle Y, \nabla_X(\nabla\varphi) \rangle, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M);$$

3) **Laplaciano** de φ é dado por

$$\Delta\varphi = \text{div}(\nabla\varphi),$$

onde $\text{div}X : M \rightarrow \mathbb{R}$ é dado por

$$\text{div}X(p) = \text{traço da aplicação linear } \{Y(p) \rightarrow \nabla_Y X(p)\}, \quad \forall p \in M.$$

Observamos que a Hessiana é uma forma bilinear simétrica.

Apresentaremos agora uma introdução ao estudo de tensores em uma variedade Riemanniana. A idéia de tensor é uma generalização natural da idéia de campos de vetores, e o ponto importante é que, analogamente aos campos de vetores, os tensores podem ser derivados covariantemente.

Definição 1.25 Um *tensor* T de ordem r em uma variedade Riemanniana é uma aplicação multilinear:

$$T : \mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{D}(M).$$

Isto quer dizer que, dados $Y_1, \dots, Y_r \in \mathfrak{X}(M)$, $T(Y_1, \dots, Y_r)$, é uma função diferenciável em M , e que T é linear em cada argumento, isto é,

$$T(Y_1, \dots, fX + gY, \dots, Y_r) = fT(Y_1, \dots, X, \dots, Y_r) + gT(Y_1, \dots, Y, \dots, Y_r)$$

$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\forall f, g \in \mathfrak{D}(M)$.

Se fixarmos um ponto $p \in M$ e seja U uma vizinhança de p em M onde é possível definir campos $E_1, \dots, E_n \in \mathfrak{X}(M)$, de modo que a cada $q \in U$, os vetores $\{E_i(q)\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, formam uma base de T_qM ; diremos, neste caso, que $\{E_i\}$ é um referencial móvel em U .
Sejam

$$Y_1 = \sum_{i_1} y_{i_1} E_{i_1}, \dots, Y_r = \sum_{i_r} y_{i_r} E_{i_r},$$

$i_1, \dots, i_r = 1, 2, \dots, n$, as restrições a U dos campos Y_1, \dots, Y_r , expressas no referencial móvel $\{E_i\}$. Por linearidade,

$$T(Y_1, \dots, Y_r) = \sum_{i_1, \dots, i_r} y_{i_1}, \dots, y_{i_r} T(E_{i_1}, \dots, E_{i_r}).$$

As funções $T(E_{i_1}, \dots, E_{i_r})$ em U são chamadas as *componentes de T* no referencial $\{E_i\}$.

Da expressão acima decorre que o valor de $T(Y_1, \dots, Y_r)$, em um ponto $p \in M$ depende apenas dos valores de (Y_1, \dots, Y_r) em p . Neste sentido dizemos que T é *pontual*.

Exemplos:

(I) O tensor curvatura

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{D}(M)$$

é definido por

$$R(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle,$$

$X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$. R é um tensor de ordem 4, cujas componentes no referencial $\{X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\}$ associado ao sistema de coordenadas (x_i) são

$$R(X_i, X_j, X_k, X_l) = R_{ijkl}.$$

(II) O tensor métrico

$$G : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{D}(M)$$

é definido por $G(X, Y) = \langle X, Y \rangle$; $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. G é um tensor de ordem 2 e suas componentes no referencial $\{X_i\}$ são os coeficientes g_{ij} da métrica Riemanniana no sistema de

coordenadas dado.

(III) A **conexão Riemanniana** ∇ definida por

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{D}(M),$$

$\nabla(X, Y, Z) = \langle \nabla_X Y, Z \rangle$, $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, não é um tensor, pois ∇ não é linear em relação ao argumento Y .

(IV) O **Tensor de Ricci** é um tensor de ordem 2 bilinear, simétrico definido por:

$$Ric(x, y)_p = \text{traço da aplicação } \{T : z \rightarrow R(x, z)y\}.$$

Em um sistema de coordenadas locais, temos que

$$R_{ik} = Ric\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_k}\right) = \sum_{j=1}^n R_{ijk}^j, \quad (1-4)$$

onde,

$$R_{ijk}^j = \sum_{l=1}^n \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^j - \sum_{l=1}^n \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^j + \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^j - \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{jk}^j. \quad (1-5)$$

Substituindo (1-5) em (1-4) obtemos que

$$R_{ij} = \sum_{s,l=1}^n \Gamma_{ij}^s \Gamma_{sl}^l - \sum_{s,l=1}^n \Gamma_{il}^s \Gamma_{sj}^l + \sum_{s=1}^n \frac{\partial}{\partial x_s} \Gamma_{ij}^s - \sum_{s=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{is}^s, \quad (1-6)$$

onde

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \left\{ \frac{\partial g_{js}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_s} \right\} g^{is},$$

são os símbolos de Christoffel da métrica.

Identificamos o campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ com o tensor $X : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dado por $X(Y) = \langle X, Y \rangle$, para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Definição 1.26 *Seja T um tensor de ordem r . A **diferencial covariante** ∇T de T é um tensor de ordem $(r+1)$ dado por*

$$\nabla T(Y_1, \dots, Y_r, Z) = Z(T(Y_1, \dots, Y_r)) - T(\nabla_Z Y_1, \dots, Y_r) - \dots - T(Y_1, \dots, Y_{r-1}, \nabla_Z Y_r).$$

Para cada $Z \in \mathfrak{X}(M)$, a derivada covariante $\nabla_Z T$ de T em relação a Z é um tensor de ordem r dado por

$$\nabla_Z T(Y_1, \dots, Y_r) = \nabla T(Y_1, \dots, Y_r).$$

Mostraremos que, em um referencial conveniente, a definição de derivada covariante de um tensor T em relação a $Z \in \mathfrak{X}(M)$ se torna de fato natural.

Para isto, seja $p \in M$ e seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ uma curva diferenciável com $\alpha(0) = p$, $\alpha'(t) = Z(\alpha(t))$. Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base de $T_p M$ e seja $e_i(t)$ o transporte paralelo de e_i ao longo de $\alpha = \alpha(t)$, $i = 1, \dots, n$. Sejam $T_{i_1 \dots i_r}(t)$ as componentes, na base $\{e_i(t)\}$, da restrição $T(\alpha(t))$ de T à curva α . Então, por definição de $\nabla_Z T$,

$$\begin{aligned} (\nabla_Z T)(e_{i_1}(t), \dots, e_{i_r}(t)) &= \frac{d}{dt} T_{i_1 \dots i_r}(t) - T(\nabla_Z e_{i_1}(t), \dots, e_{i_r}(t)) - \dots - \\ &\quad - T(e_{i_1}(t), \dots, \nabla_Z e_{i_r}(t)). \end{aligned} \quad (1-7)$$

Como $\nabla_Z e_i(t) = 0$, teremos, por linearidade,

$$(\nabla_Z T)_{i_1 \dots i_r} = (\nabla_Z T)(e_{i_1}(t), \dots, e_{i_r}(t)) = \frac{d}{dt} T_{i_1 \dots i_r}.$$

Neste referencial, as componentes da derivada covariante de T são as derivadas usuais das componentes de T .

Exemplos:

(I) A diferencial covariante do tensor métrico é o tensor identicamente nulo. Com efeito, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\nabla_Z \langle X, Y \rangle = Z \langle X, Y \rangle - \langle \nabla_Z X, Y \rangle - \langle X, \nabla_Z Y \rangle = 0,$$

pois ∇ é a conexão Riemanniana.

(II) Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$. Identifiquemos X com o tensor que faz corresponder ao campo $Y \in \mathfrak{X}(M)$ a função $\langle X, Y \rangle$. A derivada covariante do tensor X em relação ao campo $Z \in \mathfrak{X}(M)$ é tal que, para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\nabla_Z X(Y) = \nabla X(Y, Z) = Z(X(Y)) - X(\nabla_Z Y) = Z \langle X, Y \rangle - \langle X, \nabla_Z Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle.$$

Decorre daí que o tensor $\nabla_Z X$ pode ser identificado ao campo $\nabla_Z X$. Isto justifica a notação adotada, e mostra que a derivada covariante de tensores é uma generalização da derivada covariante de vetores.

Introduzimos agora o conceito de variedade semi-Riemanniana.

Definição 1.27 *Uma métrica semi-Riemanniana em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M uma forma bilinear e simétrica, não degenerada, $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ no espaço tangente $T_p M$, que varia diferencialmente no seguinte sentido: Se $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p , com $x(x_1, x_2, \dots, x_n) = q \in x(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx(0, \dots, 1, \dots, 0)$ então $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ é uma função diferenciável em U . As funções g_{ij} são chamadas expressão*

da métrica semi-Riemanniana. Uma variedade diferenciável com uma métrica semi-Riemanniana chama-se **variedade semi-Riemanniana**.

Observe que a diferença entre uma métrica Riemanniana e uma métrica semi-Riemanniana é que uma métrica semi-Riemanniana não precisa ser positiva-definida, basta ser não degenerada (ou seja, $\langle X, Y \rangle = 0$ para todo X no espaço tangente, que implica $Y = 0$). Neste caso dizemos também que a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é *indefinida*. Assim as variedades semi-Riemannianas podem ser consideradas uma generalização das variedades Riemannianas. E todos os conceitos apresentados até agora, se estendem às variedades semi-Riemannianas.

Daremos a seguir uma classificação chamada de caráter casual dos vetores:

Definição 1.28 Seja $p \in M$ e $v \in T_pM$, dizemos que v é

i) **Tipo-espaço** se $\langle v, v \rangle > 0$ ou $v = 0$;

ii) **Tipo-nulo** se $\langle v, v \rangle = 0$ e $v \neq 0$;

iii) **Tipo-tempo** se $\langle v, v \rangle < 0$.

Observação 1.29 Dizemos que uma curva $\alpha(t)$ em M é nula se todos os vetores tangentes $\alpha'(t)$ são tipo-nulo; similarmente para tipo-tempo e tipo-espaço.

Definição 1.30 Uma curva parametrizada $\alpha : I \rightarrow M$ é uma **geodésica** em $t_0 \in I$ se $\frac{D}{dt} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right) = 0$ no ponto t_0 ; se α é geodésica em t , para todo $t \in I$, dizemos que α é **geodésica**.

Assim uma geodésica $\alpha(t)$ será chamada de **geodésica nula** se todos os vetores tangentes $\alpha'(t)$ são tipo-nulo.

Definição 1.31 Uma variedade Riemanniana M é **completa** se para todo $p \in M$, as geodésicas $\alpha(t)$ que partem de p estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$. (M será nula completa, se todas geodésicas nulas que partem de p estão definidas para para todos os valores do parâmetro t).

Geometria Conforme

2.1 Métricas Conformes

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados da Geometria Conforme que são fundamentais na resolução dos principais resultados deste trabalho.

Definição 2.1 *Duas métricas $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ em uma variedade diferenciável M são **conformes** se existe uma função diferenciável $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$, positiva definida, tal que para todo $p \in M$ e todo $u, v \in T_p M$ se tenha*

$$\langle u, v \rangle_p = \lambda^2 \langle\langle u, v \rangle\rangle_p.$$

Em particular, se $\lambda(p) = k$ onde k é uma constante positiva, dizemos que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ são métricas *Homotéticas*.

Observe ainda que, pela definição acima, $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ não tem zeros em M , pois λ é positiva definida.

Exemplo 2.2 *Consideremos o semi-espaço do \mathbb{R}^n dado por:*

$$H^n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$$

e introduza em H^n a métrica

$$g_{ij}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{x_n^2} \delta_{ij},$$

assim tal métrica é conforme à métrica usual de \mathbb{R}^n .

O espaço H^n é chamado de *espaço Hiperbólico* de dimensão n .

De agora em diante consideramos (M, g) e (M, \bar{g}) como variedades semi-Riemannianas de dimensão n .

Definição 2.3 *Uma variedade semi-Riemanniana (M, g) de dimensão $n > 2$ é chamada de **variedade Einstein**, se*

$$\text{Ric}_g = (n - 1)Sg,$$

onde $S = \frac{1}{n(n-1)} \text{trRic}_g = \text{constante}$, denota a curvatura escalar de M .

Lema 2.4 Para métricas conformes g e $\bar{g} = \frac{1}{\varphi^2}g$, onde $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$, temos a seguinte equação

$$\frac{1}{\varphi^2} \bar{S} = S + \frac{2}{n} \Delta\varphi - \frac{n-2}{n} \|\nabla\varphi\|^2 = S + \frac{2}{n} \frac{\Delta\varphi}{\varphi} - \frac{\|\nabla\varphi\|^2}{\varphi^2}. \quad (2-1)$$

Uma demonstração deste lema pode ser encontrada em [2] e [8].

A notação $\nabla\varphi$, $\Delta\varphi$, $\nabla^2\varphi$, são respectivamente, o Gradiente, o Laplaciano e a Hessiana, como na Definição 1.24.

Lema 2.5 Se g e $\bar{g} = \frac{1}{\varphi^2}g$ são métricas conformes, então

$$\text{Ric}_{\bar{g}} - \text{Ric}_g = \frac{1}{\varphi^2} \{ (n-2)\varphi\nabla^2\varphi + (\varphi\Delta\varphi - (n-1)\|\nabla\varphi\|^2)g \}. \quad (2-2)$$

A relação entre os tensores de Ricci das variedades (M, g) e (M, \bar{g}) expressa no lema anterior, é fundamental para a caracterização das transformações conformes que preservam a diferença entre os tensores de Ricci das variedades semi-Riemannianas (M, \bar{g}) e (M, g) . A demonstração deste lema encontra-se em [17].

Lema 2.6 Se (M, g) é uma variedade semi-Riemanniana de dimensão n , com $\bar{g} = \frac{1}{\varphi^2}g$. Então as condições a seguir são equivalentes:

- i) Existe uma função $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ com $\nabla^2\varphi = \lambda g$;
- ii) $\nabla^2\varphi = \frac{\Delta\varphi}{n}g$;
- iii) Existe uma constante B , tal que, $\nabla^2\varphi = (-S\varphi + B)g$.

Introduzimos a notação $[T]$ para a classe de todos os tensores que são múltiplos escalares de um dado tensor T de ordem 2.

Lema 2.7 Duas métricas conformes g e $\bar{g} = \frac{1}{\varphi^2}g$ satisfazem a relação

$$[\text{Ric}_{\bar{g}} - \text{Ric}_g] = [g] = [\bar{g}]$$

se, somente se, a função φ satisfaz a equação

$$\nabla^2\varphi = \frac{\Delta\varphi}{n}g.$$

Demonstração.:

Se $[Ric_{\bar{g}} - Ric_g] = [\psi g]$, implica que,

$$Ric_{\bar{g}} - Ric_g = \psi g; \quad \psi : M \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2-3)$$

Pelo Lema 2-2,

$$Ric_{\bar{g}} - Ric_g = \frac{1}{\varphi^2} \{ (n-2)\varphi \nabla^2 \varphi + (\varphi \Delta \varphi - (n-1) \|\nabla \varphi\|^2) g \}. \quad (2-4)$$

De (2-3) e (2-4), obtemos

$$\frac{1}{\varphi^2} \{ (n-2)\varphi \nabla^2 \varphi + (\varphi \Delta \varphi - (n-1) \|\nabla \varphi\|^2) g \} = \psi g,$$

que é equivalente a,

$$(n-2)\varphi \nabla^2 \varphi + \Delta \varphi g - (n-1) \|\nabla \varphi\|^2 g = \varphi^2 \psi g.$$

Que implica,

$$\nabla^2 \varphi = \left(-\frac{1}{n-2} \Delta \varphi + \frac{n-1}{n-2} \frac{\|\nabla \varphi\|^2}{\varphi} + \frac{\varphi}{n-2} \psi \right) g. \quad (2-5)$$

Considerando,

$$\lambda = -\frac{1}{n-2} \Delta \varphi + \frac{n-1}{n-2} \frac{\|\nabla \varphi\|^2}{\varphi} + \frac{\varphi}{n-2} \psi,$$

de (2-5), temos

$$\nabla^2 \varphi = \lambda g.$$

Do Lema 2.6, obtemos

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\Delta \varphi}{n} g.$$

Reciprocamente, se

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\Delta \varphi}{n} g. \quad (2-6)$$

Pelo Lema 2-2, sabemos que

$$Ric_{\bar{g}} - Ric_g = \frac{1}{\varphi^2} \{ (n-2)\varphi \nabla^2 \varphi + (\varphi \Delta \varphi - (n-1) \|\nabla \varphi\|^2) g \}. \quad (2-7)$$

De (2-6) e (2-7), temos

$$Ric_{\bar{g}} - Ric_g = \frac{1}{\varphi^2} \{ (n-2)\varphi \frac{\Delta \varphi}{n} g + (\varphi \Delta \varphi - (n-1) \|\nabla \varphi\|^2) g \}.$$

Que implica,

$$Ric_{\bar{g}} - Ric_g = \frac{1}{\varphi^2} \left\{ (n-2)\varphi \frac{\Delta\varphi}{n} + \varphi\Delta\varphi - (n-1)\|\nabla\varphi\|^2 \right\} g.$$

Portanto,

$$[Ric_{\bar{g}} - Ric_g] = [g] = [\bar{g}].$$

□

Lema 2.8 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de curvatura seccional constante K e $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\bar{g} = \frac{1}{\varphi^2}g$. Então as condições a seguir são equivalentes:*

i) (M, \bar{g}) é um espaço de curvatura seccional constante \bar{K} ;

ii) (M, \bar{g}) é uma variedade Einstein;

iii) $\nabla^2\varphi = \frac{\Delta\varphi}{n}g$;

iv) $\nabla^2\varphi = (-K\varphi + B)g$, para alguma constante B .

A demonstração do lema anterior pode ser encontrada em ([8], p.109).

Definição 2.9 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva diferenciável parametrizada pelo comprimento de arco (e portanto regular), de classe C^k , com $k > 2$. O campo de vetores de curvatura geodésica de γ é definido pela aplicação*

$$\begin{aligned} k_\gamma : I &\rightarrow T_{\gamma(s)}M. \\ s &\mapsto \nabla_{\gamma'(s)}\gamma'(s). \end{aligned} \quad (2-8)$$

Se γ for parametrização regular com um parâmetro t qualquer, consideramos $T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$ e temos que $k_\gamma(t) = \nabla_{T(t)}T(t)$. Chamamos de *curvatura geodésica* de γ a função

$$\begin{aligned} k_\gamma : I &\rightarrow \mathbb{R}^+. \\ t &\mapsto \langle k_\gamma(t), k_\gamma(t) \rangle^{1/2}. \end{aligned} \quad (2-9)$$

Observe que a função curvatura geodésica, a cada ponto da curva associa o módulo do vetor curvatura geodésica no ponto.

Na definição a seguir faremos a identificação

$$\begin{aligned} k_1 &= k_1(t) = \langle \nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t), \nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t) \rangle^{1/2}, \\ k_2 &= k_2(t) = \langle \nabla_{\gamma''(t)} \gamma''(t), \nabla_{\gamma''(t)} \gamma''(t) \rangle^{1/2}, \\ &\dots \\ k_n &= k_n(t) = \langle \nabla_{\gamma^{(n)}(t)} \gamma^{(n)}(t), \nabla_{\gamma^{(n)}(t)} \gamma^{(n)}(t) \rangle^{1/2}. \end{aligned} \quad (2-10)$$

Definição 2.10 Seja $\gamma : [0, L] \rightarrow (M, g)$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Vamos denotar por γ' , $\gamma'' = \nabla_{c'} c'$, etc. Se estas derivadas são linearmente independentes podemos definir o **referencial de Frenet**, e_1, e_2, \dots, e_k e as curvaturas geodésicas k_1, k_2, \dots, k_n , $n = 1, 2, \dots, k-1$, de forma que

$$i) e'_1 = k_1 e_2;$$

$$ii) e'_n = -k_{n-1} e_{n-1} + k_n e_{n+1}, \quad n = 2, \dots, k-1.$$

Definição 2.11 A curva γ é chamada de **geodésica** se $k_1 = 0$, e chamada de **círculo geodésico** se k_1 é constante e $k_2 = 0$.

Os grandes círculos da esfera é um exemplo de círculos geodésicos. Observe ainda que não é necessário que um círculo geodésico seja uma curva fechada, por exemplo a curva espiral é também um círculo geodésico.

Lema 2.12 A curva γ é um círculo geodésico se e somente se γ''' é um múltiplo escalar de γ' .

Demonstração.:

Se γ é um círculo geodésico então $k_1 = c$, onde c é uma constante e $k_2 = 0$. Considerando $e_1 = \gamma'$, das equações de Frenet temos

$$\gamma'' = e'_1 = ce_2,$$

dessa forma

$$e'_2 = -ce_1.$$

Então,

$$\gamma''' = (\gamma'')' = (ce_2)' = c.e'_2 = -c^2 e_1 = -c^2 \gamma'.$$

Portanto, γ''' é um múltiplo escalar de γ' .

Reciprocamente, se γ''' é um múltiplo escalar de γ' , temos que

$$\gamma''' = (\gamma'')' = (k_1 e_2)' = k_1' e_2 + k_1 e_2' = k_1' e_2 + k_1(-k_1 e_1 + k_2 e_3).$$

Como por hipótese $\gamma''' = c\gamma'$, (c constante), então

$$k_1' e_2 + k_1(-k_1 e_1 + k_2 e_3) = c\gamma' = ce_1.$$

Logo, temos necessariamente que k_1 é constante e $k_2 = 0$. Portanto, γ é um círculo geodésico. □

2.2 Difeomorfismos Concirculares

Nesta seção apresentaremos alguns resultados envolvendo transformações concirculares entre variedades semi-Riemannianas completas.

Definição 2.13 *Sejam (M, g) e (M, \bar{g}) variedades semi-Riemannianas. Uma aplicação $f : (M, g) \rightarrow (M, \bar{g})$ é chamada **conforme** se os ângulos (não orientados) de curvas que se cortam são preservados.*

Da definição acima, se $\gamma : I \rightarrow (M, g)$ e $\alpha : I \rightarrow (M, g)$, são curvas que se cortam em um ponto $p \in M$ e $u, v \in T_p M$ são tangentes em p a γ e α , respectivamente. Sejam θ o ângulo formado entre os vetores u e v e ϕ o ângulo formado entre os vetores $d(f \circ \gamma)$, $d(f \circ \alpha) \in T_{f(p)} M$, então

$$\cos \theta = \cos \phi.$$

Definição 2.14 *Dizemos que duas variedades (M, g) e (M, \bar{g}) são **conformemente equivalentes** se existe uma aplicação $f : (M, g) \rightarrow (M, \bar{g})$ bijetiva, de classe C^∞ , conforme, cuja inversa também é de classe C^∞ . Tal aplicação f é chamada um **difeomorfismo conforme**.*

Se $M = \mathbb{R}^3$, f é uma composição de isometrias, dilatações e inversões, no máximo uma de cada: (ver [3], p.189).

Uma condição necessária e suficiente para que $f : (M, g) \rightarrow (M, \bar{g})$ seja conforme é que g e \bar{g} sejam métricas conformes, ou seja,

$$\langle u, v \rangle_p = \lambda^2(p) \langle df(u), df(v) \rangle_p \quad u, v \in T_p M.$$

De fato, pois se a igualdade acima é satisfeita,

$$\|w\|_g^2 = \lambda^2(p) \|w\|_{\bar{g}}^2;$$

para todo $w \in T_p M$. Assim,

$$\|w\|_g = \lambda(p) \|w\|_{\bar{g}}. \quad (2-11)$$

Agora, observe que o ângulo ψ entre $df_p(u)$ e $df_p(v)$ em (M, \bar{g}) é dado por

$$\cos \psi = \frac{\langle\langle u, v \rangle\rangle}{\|u\|_{\bar{g}} \|v\|_{\bar{g}}} \quad (2-12)$$

e por (2-11) o ângulo θ entre u e v em (M, g) é dado por

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|_g \|v\|_g} = \frac{\lambda^2(p) \langle\langle u, v \rangle\rangle}{\lambda^2(p) (\|u\|_{\bar{g}} \|v\|_{\bar{g}})} = \frac{\langle\langle u, v \rangle\rangle}{\|u\|_{\bar{g}} \|v\|_{\bar{g}}}. \quad (2-13)$$

Dessa forma, por (2-12) e (2-13) os ângulos entre u e v são preservados.

Definição 2.15 *Um difeomorfismo conforme $f : (M, g) \rightarrow (M, \bar{g})$ entre duas variedades semi-Riemannianas é chamado de **concircular** se f preserva círculos geodésicos.*

Lema 2.16 *Todo difeomorfismo concircular é necessariamente conforme.*

Lema 2.17 *Uma transformação conforme $g \rightarrow \bar{g} = \frac{1}{\varphi^2} g$ é concircular se, somente se, existe uma função $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$, satisfazendo*

$$\nabla^2 \varphi = \lambda g.$$

As demonstrações dos Lemas 2.16, 2.6 e 2.17, podem ser encontradas em [8].

Corolário 2.18 *Se (M, g) é uma variedade Einstein (ou espaço de curvatura seccional constante) e $g \rightarrow \bar{g} = \frac{1}{\varphi^2} g$ uma transformação conforme. Então são equivalentes:*

- i) (M, \bar{g}) é uma variedade Einstein (ou espaço de curvatura seccional constante);
- ii) A transformação $g \rightarrow \bar{g}$ é concircular.

Demonstração.:

Se (M, g) e (M, \bar{g}) são espaços de Einstein, pelo Lema 2.6 item ii) existe $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$, satisfazendo

$$\nabla^2 \varphi = \lambda g.$$

Pelo Lema 2.17 a transformação conforme $g \rightarrow \bar{g} = \frac{1}{\varphi^2} g$ é concircular.

Reciprocamente, se a transformação conforme $g \rightarrow \bar{g} = \frac{1}{\varphi^2}g$ é concircular, de acordo com o Lema 2.17 existe $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$, satisfazendo

$$\nabla^2 \varphi = \lambda g.$$

Portanto pelo Lema 2.6, (M, \bar{g}) é um espaço de Einstein. □

2.3 Produto Torcido

Se M e N são variedades diferenciáveis, então o produto cartesiano $M \times N$ é uma variedade diferenciável: em $M \times N$ consideramos a coleção maximal que contém os sistemas de coordenadas da forma $(U_\alpha \times V_\beta, \phi_\alpha \times \psi_\beta)$, onde (U_α, ϕ_α) e (V_β, ψ_β) são sistemas de coordenadas das estruturas diferenciáveis de M e N , respectivamente. Devemos observar que $\dim(M \times N) = \dim M + \dim N$.

De forma análoga, se M_1, \dots, M_k são variedades diferenciáveis de dimensões d_1, \dots, d_k , respectivamente, podemos definir uma estrutura diferenciável no produto cartesiano $M_1 \times \dots \times M_k$ de dimensão $d_1 + \dots + d_k$. Por exemplo, o toro k -dimensional $T^k = S^1 \times \dots \times S^1$ e os cilindros $\mathbb{R}^k \times S^1$.

Com base em [14], finalizaremos esta seção definindo a noção de produto torcido, um produto que generaliza o produto cartesiano entre variedades Riemannianas.

Sejam B e F duas variedades Riemannianas com métricas $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$, respectivamente. Seja $M = B \times F$ o produto usual das variedades B e F . Temos, definidas em M , duas aplicações, a saber, as projeções

$$\begin{aligned} \pi : B \times F &\rightarrow B \\ (x, y) &\mapsto \pi(x, y) = x \end{aligned} \tag{2-14}$$

e

$$\begin{aligned} \sigma : B \times F &\rightarrow F \\ (x, y) &\mapsto \sigma(x, y) = y \end{aligned} \tag{2-15}$$

Dado $p = (a, b) \in M$, usamos $T_p B$ e $T_p F$ para indicar os subespaços de $T_p M$ que são

isomorfos a T_aB e T_bF , isto é,

$$T_pB = \{(X, 0); X \in T_aB\} \quad e \quad T_pF = \{(0, U); U \in T_bF\}.$$

T_pM é soma direta de desses subespaços, isto é, $T_pM = T_pB \oplus T_pF$.

Definição 2.19 *Seja $\phi : B \rightarrow (0, \infty)$ uma função real de classe C^∞ . A partir das métricas de B e de F , introduzimos em $M = B \times F$ a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ que, para cada $p = (a, b) \in M$, funciona assim:*

$$\langle U, V \rangle = \langle d\pi_p(U), d\pi_p(V) \rangle_B + \phi^2(a) \langle d\sigma_p(U), d\sigma_p(V) \rangle_F, \quad U, V \in T_pM.$$

A variedade M , munida desta métrica, é o que denominamos de **produto torcido** das variedades B por F , segundo ϕ . Este produto é denotado por $B \times_\phi F$. As variedades B e F são conhecidas, respectivamente, por **base** e **fibra** do produto. A função ϕ é chamada de **coeficiente de torção do produto**.

Exemplo 2.20 : $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ é um produto torcido: Em coordenadas esféricas a métrica de $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ pode ser escrita na forma

$$ds^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$

Considerando $r = 1$, teremos a métrica da esfera unitária S^2 . Temos ainda que $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ é difeomorfo a $\mathbb{R}^+ \times S^2$, já que $(t, p) \mapsto tp$, $t \in \mathbb{R}^+$, $p \in S^2$ é um difeomorfismo. Assim a fórmula para ds^2 mostra que $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ pode ser identificado com o produto torcido $\mathbb{R}^+ \times S^2$.

Lema 2.21 *Se B e F são variedades semi-Riemannianas completas, então a variedade semi-Riemanniana $M = B \times_{\phi} F$ é completa.*

A demonstração deste lema pode ser encontrada em [14].

Se M é uma variedade semi-Riemanniana de dimensão n , o conjunto $M_u = \{p \in M; \phi(p) = u\}$, irá denotar os u -níveis de ϕ .

Lema 2.22 *Seja (M, g) uma variedade semi-Riemanniana que admite localmente uma função $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo $\nabla^2\phi = \lambda g$. Seja U um aberto de M sem pontos críticos de ϕ , então vale as seguintes igualdades:*

- i) As trajetórias de $\nabla\phi$ são geodésicas;
- ii) $\|\nabla\phi\|$ é constante ao longo dos níveis de ϕ .

Demonstração.:

O vetor normal unitário de uma hipersuperfície de nível $\{x \in M \mid \varphi(x) = c\}$ de φ é $N = \frac{\nabla\varphi}{\|\nabla\varphi\|}$. Então da equação diferencial $\nabla^2\varphi = \lambda g$, temos que

$$\nabla_X(\nabla\varphi) = \lambda X,$$

ou,

$$\nabla_X N = \nabla_X \frac{\nabla\varphi}{\|\nabla\varphi\|},$$

que implica,

$$\nabla_X N = \frac{\lambda X}{\|\nabla\varphi\|} - \frac{\langle X, \nabla\varphi \rangle}{\langle \nabla\varphi, \nabla\varphi \rangle} \cdot \frac{\lambda \nabla\varphi}{\|\nabla\varphi\|}.$$

Para qualquer vetor X , tangente a M .

Se considerarmos $X = N$ na equação anterior, teremos

$$\nabla_N N = \frac{\lambda N}{\|\nabla\varphi\|} - \frac{\langle N, \nabla\varphi \rangle}{\langle \nabla\varphi, \nabla\varphi \rangle} \cdot \frac{\lambda N \nabla\varphi}{\|\nabla\varphi\|} = 0.$$

Portanto, as trajetórias de $\nabla\varphi$ são geodésicas.

Seja X tangente à uma hipersuperfície de φ , temos que

$$\nabla_X \|\nabla\varphi\|^2 = 2g(\nabla_X \nabla\varphi, \nabla\varphi) = 2 \frac{\Delta\varphi}{n} g(X, \nabla\varphi) = 0,$$

pois X e N são ortogonais. Portanto, $\|\nabla\varphi\|$ é constante ao longo dos níveis de φ . □

Proposição 2.23 *Seja (M, g) uma variedade semi-Riemanniana. Se existe solução não constante φ de $\nabla^2\varphi = \frac{\Delta\varphi}{n}g$, em uma vizinhança de $p \in M$ com $\nabla\varphi|_p \neq 0$, então existem, um sistema de coordenadas locais (u, u_1, \dots, u_n) em uma vizinhança de p , uma função $\varphi = \varphi(u)$ com $\varphi'|_p \neq 0$ e uma métrica Riemanniana $(n-1)$ -dimensional $g_* = g_*(u_1, \dots, u_{n-1})$, tal que*

$$g\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}\right) = 1,$$

$$g\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u_i}\right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$g\left(\frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j}\right) = (\varphi'(u))^2 g_*\left(\frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j}\right) \quad i, j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Assim, a métrica g pode ser escrita como $ds^2 = du^2 + (\varphi'(u))^2 d\bar{s}^2$.

Demonstração.:

Seja $c := \varphi(p)$ e $M_c = \{q; \varphi(q) = c\}$. M_c é uma hipersuperfície de nível regular de φ . Escolha um sistema de coordenadas qualquer u_1, \dots, u_n sobre M_c . Como as trajetórias de $\nabla\varphi$ são geodésicas, estendemos este sistema de coordenadas geodésicas paralelas (u_1, \dots, u_n) em uma vizinhança de p . Este tem as seguintes propriedades:

- 1) As u -linhas são geodésicas com u como comprimento de arco.
- 2) $\frac{\partial}{\partial u}$ é ortogonal a todo conjunto $\{(u, u_1, \dots, u_{n-1}) | u = cte\}$, expressando o fato que os diferentes u -níveis são paralelos uns aos outros e a distância entre eles é justamente os u -valores.

Temos que o u -nível contendo p coincide por construção com o φ -nível M_c . Como $\|\nabla\varphi\|$ é constante ao longo dos φ -níveis, estes são paralelos uns aos outros. O u -nível contendo p coincide com M_c e os u -níveis são paralelos uns aos outros, temos que os u -níveis coincidem com os φ -níveis, daí

$$\varphi = \varphi(u) \quad \nabla\varphi = \varphi' \frac{\partial}{\partial u}.$$

Falta mostrar que

$$(\varphi'(u))^{-2} g_{ij}(u, u_1, \dots, u_n) = g_{*ij}(u_1, \dots, u_{n-1}).$$

Isto segue de

$$\frac{\partial}{\partial u} g_{ij} = g \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u_i}} \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u_j} \right) + g \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u_j}} \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u_i} \right).$$

Assim,

$$\frac{\partial}{\partial u} g_{ij} = g \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u_i}} \frac{\nabla\varphi}{\varphi'}, \frac{\partial}{\partial u_j} \right) + g \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial u_j}} \frac{\nabla\varphi}{\varphi'}, \frac{\partial}{\partial u_i} \right).$$

Dessa forma,

$$\frac{\partial}{\partial u} g_{ij} = \frac{2\Delta\varphi}{n\varphi'} g_{ij}.$$

Logo,

$$\frac{\partial}{\partial u} g_{ij} = 2 \frac{\varphi''}{\varphi'} g_{ij}.$$

Esta última igualdade segue de $\nabla^2\varphi = \frac{\Delta\varphi}{n}g$. Portanto para u_1, \dots, u_n fixos, $g_{ij} = g_{ij}(u)$ satisfaz a equação

$$\left(\frac{g_{ij}}{\varphi'^2} \right)' = \frac{g'_{ij}}{\varphi'^2} - 2 \frac{\varphi''}{\varphi'^3} g_{ij} = 0.$$

Portanto, $(\varphi'(u))^{-2} g_{ij}(u, u_1, \dots, u_{n-1})$ não depende de u . Logo,

$$(\varphi'(u))^{-2} g_{ij}(u, u_1, \dots, u_{n-1}) = g_{*ij}(u_1, \dots, u_{n-1}),$$

como queríamos demonstrar.



Difeomorfismo Conforme que Preserva o Tensor de Ricci

3.1 Caracterização das Transformações Conformes que Preservam a Diferença dos Tensores de Ricci

Neste capítulo exibiremos os principais resultados que caracterizam difeomorfismos conformes e concirculares com as quais se considerarmos (M, g) e (M, \bar{g}) variedades semi-Riemannianas então, a diferença entre os tensores de Ricci em cada métrica é um múltiplo escalar da métrica g ou $\bar{g} = \frac{1}{\varphi^2}g$.

Teorema 3.1 *Seja (M, g) uma variedade semi-Riemanniana completa que admite uma transformação conforme global $\bar{g} = \frac{1}{\varphi^2}g$ satisfazendo*

$$\text{Ric}_{\bar{g}} - \text{Ric}_g = c(n-1)g,$$

para alguma constante c . Então, um dos seguintes casos ocorrem

- 1) φ é constante;
- 2) (M, g) e (M, \bar{g}) são espaços Riemannianos simplesmente conexos de curvatura seccional constante;
- 3) (M, g) é um produto torcido $\mathbb{R} \times_{\varphi(t)} M_*$, onde $\varphi(t) = \pm \alpha e^{t\sqrt{c}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e (M_*, g_*) é uma variedade Riemanniana Ricci-flat completa $(n-1)$ -dimensional.

Enunciaremos, agora dois resultados que serão necessários para demonstrar o teorema anterior.

Lema 3.2 *Se (M, g) é uma variedade Riemanniana completa, que admite uma transformação conforme $\bar{g} = \frac{1}{\varphi^2}g$ satisfazendo a relação*

$$\nabla^2 \varphi = (c\varphi + a)g.$$

Então M é uma das seguintes variedades:

- i) Se $c = a = 0$, (M, g) é um produto torcido $I \times V$, onde $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo aberto e V é uma variedade Riemanniana completa $(n-1)$ -dimensional;
- ii) Se $c = 0$ e $a \neq 0$, (M, g) é o espaço Euclidiano;
- iii) Se $c > 0$ e $N = 1$, (M, g) é um espaço hiperbólico de curvatura $-c$.

A demonstração deste lema consiste em explicitar as soluções φ de $\nabla^2\varphi = (c\varphi + a)g$ ou determinar o número de pontos críticos de φ , considerando todas as possibilidades para as constante a e c , maiores detalhes ver [18].

Lema 3.3 Uma função $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$, onde (M, g) é uma variedade semi-Riemanniana, satisfaz $\nabla^2\varphi = \lambda g$, para alguma $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ em uma vizinhança de um ponto $p \in M$, com $\|\nabla\varphi\|^2 \neq 0$ se, somente se, g é localmente o produto torcido $ds^2 = \eta dt^2 + \varphi^2(t)d\bar{s}^2$, onde $\eta \in \{+1, -1\}$ denota o sinal de $\|\nabla\varphi\|^2$, φ , λ são funções que dependem somente de t satisfazendo $\varphi'' = \eta\lambda$ e $d\bar{s}^2$ é independente de t .

A demonstração deste lema pode ser encontrada em [5], Seção 12.

Demonstração. do Teorema (3.1):

De acordo com o Lema 2.5,

$$Ric_{\bar{g}} - Ric_g = \frac{1}{\varphi^2} \{ (n-2)\varphi\nabla^2\varphi + (\varphi\Delta\varphi - (n-1)\|\nabla_g\varphi\|^2)g \}, \quad (3-1)$$

e por hipótese, temos

$$Ric_{\bar{g}} - Ric_g = c(n-1)g. \quad (3-2)$$

De (3-1) e (3-2), obtemos

$$\frac{1}{\varphi^2} \{ (n-2)\varphi\nabla^2\varphi + (\varphi\Delta\varphi - (n-1)\|\nabla_g\varphi\|^2)g \} = c(n-1)g. \quad (3-3)$$

Como por hipótese a diferença entre os tensores de Ricci em cada métrica é um múltiplo escalar da métrica g , pelo Lema 2.7, temos

$$\nabla^2\varphi = \frac{\Delta\varphi}{n}g. \quad (3-4)$$

Substituindo esta última igualdade em (3-3), obtemos

$$\frac{1}{\varphi^2} \{ (n-2)\varphi\frac{\Delta\varphi}{n}g + (\varphi\Delta\varphi - (n-1)\|\nabla\varphi\|^2)g \} = c(n-1)g,$$

que é equivalente a

$$\frac{1}{\varphi^2} \left\{ (n-2)\varphi \frac{\Delta\varphi}{n} g + \varphi \Delta\varphi g - (n-1) \|\nabla\varphi\|^2 g \right\} = c(n-1)g,$$

que implica

$$\frac{1}{\varphi^2} \left\{ \varphi \Delta\varphi \left(\frac{n-2}{n} + 1 \right) g - (n-1) \|\nabla\varphi\|^2 g \right\} = c(n-1)g,$$

ou ainda,

$$\varphi \Delta\varphi \left(\frac{n-2}{n} + 1 \right) - (n-1) \|\nabla\varphi\|^2 = c(n-1)\varphi^2,$$

resultando em,

$$\frac{2(n-1)}{n} \varphi \Delta\varphi - (n-1) \|\nabla\varphi\|^2 - c(n-1)\varphi^2 = 0.$$

Como $n > 2$, temos

$$2\varphi \frac{\Delta\varphi}{n} - \|\nabla\varphi\|^2 - c\varphi^2 = 0. \quad (3-5)$$

Considerando $\eta = 1$ e $\lambda = \frac{\Delta\varphi}{n}$, por (3-4), ao longo de uma geodésica $\gamma(t)$, temos

$$\nabla^2\varphi = \lambda g.$$

Pelo Lema 3.3

$$\varphi'' = \frac{\Delta\varphi}{n}. \quad (3-6)$$

Substituindo a equação (3-6) em (3-5), temos

$$2\varphi\varphi'' - \varphi'^2 - c\varphi^2 = 0. \quad (3-7)$$

Derivando a equação (3-7) em relação a t obtemos,

$$2\varphi'\varphi'' + 2\varphi\varphi''' - 2\varphi'\varphi'' - 2c\varphi\varphi' = 0,$$

ou seja,

$$2\varphi\varphi''' - 2c\varphi\varphi' = 0.$$

Se $\varphi(p) \neq 0$ em $p \in M$, então

$$\varphi''' = c\varphi', \quad (3-8)$$

isto implica que existe uma constante a satisfazendo

$$\varphi'' = c\varphi + a. \quad (3-9)$$

Multiplicando ambos os lados da equação acima por $2\varphi'$ e sabendo que $[(\varphi')^2]' = 2\varphi'\varphi''$ obtemos,

$$[(\varphi')^2]' = 2\varphi'(c\varphi + a) = 2c\varphi\varphi' + 2a\varphi'. \quad (3-10)$$

Mas $2\varphi\varphi' = (\varphi^2)'$, então

$$[(\varphi')^2]' = c(\varphi^2)' + 2a\varphi'.$$

Desta forma, existe uma constante b satisfazendo

$$(\varphi')^2 = c\varphi^2 + 2a\varphi + b. \quad (3-11)$$

Substituindo (3-9) em (3-7), temos que

$$2\varphi(c\varphi + a) - (\varphi')^2 - c\varphi^2 = 0,$$

ou ainda,

$$2c\varphi^2 + 2a\varphi - (\varphi')^2 - c\varphi^2 = 0,$$

que é equivalente a

$$(\varphi')^2 = c\varphi^2 + 2a\varphi. \quad (3-12)$$

Agora, comparando as equações (3-11) e (3-12) vemos que $b = 0$. Logo

$$(\varphi')^2 = \varphi(c\varphi + 2a). \quad (3-13)$$

Por hipótese c é constante, então dividimos o nosso estudo em três casos, a saber, $c = 0$, $c < 0$ e $c > 0$.

Primeiro caso: $c = 0$.

Se $c = 0$, a equação (3-9) se reduz a $\varphi'' = a$. Assim, φ é um polinômio de grau menor ou igual a 2.

Se $\varphi(t)$ é um polinômio de grau 1, isto é,

$$\varphi(t) = At + B,$$

com $A, B \in \mathbb{R}$ e $A \neq 0$, φ tem necessariamente um zero ao longo de γ , pois $\varphi(-\frac{B}{A}) = 0$, que é uma contradição, pelo fato de φ ser um fator conforme e portanto não tem zeros ao longo de γ .

Suponha então que $\varphi(t) = At^2 + Bt + C$, com $A, B, C \in \mathbb{R}$ e $A \neq 0$. Como $c = 0$ (3-13) se reduz a $(\varphi')^2 = 2a\varphi$, que implica

$$[(At^2 + Bt + C)']^2 = 2a(At^2 + Bt + C),$$

isto é,

$$4A^2t^2 + 4ABt + B^2 = 2aAt^2 + 2aBt + 2aC.$$

Comparando os dois lados da igualdade na equação acima, obtemos

$$4A^2 = 2aA, \quad 4AB = 2aB, \quad B^2 = 2aC,$$

que é equivalente a

$$2A = a, \quad B^2 = 2aC,$$

isto implica que o discriminante $B^2 - 4AC = 2aC - 4AC = 2(2A)C - 4AC = 0$, dessa forma $\varphi(t)$ é o quadrado de uma função linear e conseqüentemente $\varphi(t)$ tem um zero ao longo de γ , que é uma contradição. Portanto podemos concluir que φ é constante.

Segundo caso: $c < 0$.

Neste caso, nosso interesse é encontrar uma solução para a equação diferencial (3-9). Para isto considere a equação homogênea

$$\varphi'' - c\varphi = 0, \tag{3-14}$$

associada a equação (3-9), teremos que

$$\varphi_1(t) = \cos(t\sqrt{-c}), \quad \varphi_2(t) = \sen(t\sqrt{-c}),$$

são soluções de (3-14), logo

$$\varphi(t) = \alpha \cos(t\sqrt{-c}) + \beta \sen(t\sqrt{-c}), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \tag{3-15}$$

é a solução geral de (3-14).

Notemos também que,

$$\varphi(t) = -\frac{a}{c} \tag{3-16}$$

é uma solução particular de (3-9).

Portanto, a solução geral de (3-9), será dada pela soma da solução geral da equação homogênea (3-14) expressa em (3-15) com a solução particular (3-16).

Explicitamente, a solução geral de (3-9) é dada por

$$\varphi(t) = \alpha \cos(t\sqrt{-c}) + \beta \sen(t\sqrt{-c}) - \frac{a}{c}. \tag{3-17}$$

Substituindo (3-17) em (3-13) teremos

$$\left[\left(\alpha \cos(t\sqrt{-c}) + \beta \sin(t\sqrt{-c}) - \frac{a}{c} \right)' \right]^2 = \left(\alpha \cos(t\sqrt{-c}) + \beta \sin(t\sqrt{-c}) - \frac{a}{c} \right) \cdot \left[c \left(\alpha \cos(t\sqrt{-c}) + \beta \sin(t\sqrt{-c}) - \frac{a}{c} \right) + 2a \right], \quad (3-18)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} (-\alpha\sqrt{-c} \sin(t\sqrt{-c}) + \beta\sqrt{-c} \cos(t\sqrt{-c}))^2 &= c\alpha^2 \cos^2(t\sqrt{-c}) + c\alpha\beta \cos(t\sqrt{-c}) \sin(t\sqrt{-c}) - \\ &- a\alpha \cos(t\sqrt{-c}) + 2a\alpha \cos(t\sqrt{-c}) + c\alpha\beta \sin(t\sqrt{-c}) \cos(t\sqrt{-c}) + \\ &+ c\beta^2 \sin^2(t\sqrt{-c}) - a\beta \sin(t\sqrt{-c}) + 2a\beta \sin(t\sqrt{-c}) - \\ &- a\alpha \cos(t\sqrt{-c}) - a\beta \sin(t\sqrt{-c}) + \frac{a^2}{c} - \frac{2a^2}{c}, \end{aligned} \quad (3-19)$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned} (-\alpha\sqrt{-c} \sin(t\sqrt{-c}) + \beta\sqrt{-c} \cos(t\sqrt{-c}))^2 &= c\alpha^2 \cos^2(t\sqrt{-c}) + c\beta^2 \sin^2(t\sqrt{-c}) + \\ &+ 2c\alpha\beta \cos(t\sqrt{-c}) \sin(t\sqrt{-c}) - \frac{a^2}{c}. \end{aligned} \quad (3-20)$$

Que implica

$$\begin{aligned} -c\alpha^2 \sin^2(t\sqrt{-c}) + 2c\alpha\beta \cos(t\sqrt{-c}) \sin(t\sqrt{-c}) - c\beta^2 \cos^2(t\sqrt{-c}) &= c\alpha^2 \cos^2(t\sqrt{-c}) + \\ &+ 2c\alpha\beta \cos(t\sqrt{-c}) \sin(t\sqrt{-c}) + c\beta^2 \sin^2(t\sqrt{-c}) - \frac{a^2}{c}. \end{aligned} \quad (3-21)$$

Dessa forma, temos

$$-c\alpha^2 \sin^2(t\sqrt{-c}) - c\beta^2 \cos^2(t\sqrt{-c}) = c\alpha^2 \cos^2(t\sqrt{-c}) + c\beta^2 \sin^2(t\sqrt{-c}) - \frac{a^2}{c},$$

ou ainda,

$$-c(\alpha^2 + \beta^2)[\cos^2(t\sqrt{-c}) + \sin^2(t\sqrt{-c})] = -\frac{a^2}{c},$$

que resulta em,

$$c(\alpha^2 + c\beta^2) = \frac{a^2}{c}.$$

Logo,

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{a^2}{c^2}.$$

Se $a = 0$, então $\alpha = \beta = 0$ e por (3-17), teremos $\varphi(t) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, pela definição de φ sabemos que isto é uma contradição, pois φ é positiva definida.

Se $a \neq 0$, φ é periódica, com período $T = \frac{2\pi}{\sqrt{-c}}$, φ atinge ponto de máximo e mínimo (locais). Suponha que p e q sejam os pontos de máximo e mínimo de φ , respectivamente. Temos que $\varphi'(p) = \varphi'(q) = 0$ e por (3-13)

$$\varphi(p)(c\varphi(p) + 2a) = \varphi(q)(c\varphi(q) + 2a) = 0,$$

isto implica que,

$$\varphi(p) = \varphi(q) = 0$$

ou

$$\varphi(p) = \varphi(q) = -\frac{2a}{c}.$$

Se $\varphi(p) = \varphi(q) = 0$, então p e q são zeros de φ , que não é possível, pois φ é positiva definida.

Por outro lado, se $\varphi(p) = \varphi(q) = -\frac{2a}{c}$, então φ seria constante, que não ocorre, pois por (3-17) sabemos que φ é periódica.

Se $\varphi(p) \neq \varphi(q)$, então φ tem pelo menos um zero, já que teríamos necessariamente $\varphi(p) = 0$ ou $\varphi(q) = 0$, que é uma contradição, já que φ não tem zeros em M .

Portanto, $a = 0$ e $a \neq 0$ nos levam a contradições, assim observamos a impossibilidade de ser $c < 0$.

Terceiro caso: $c > 0$.

Neste caso, nosso intuito é encontrar uma solução da equação diferencial (3-9). Para isto, considerando novamente a equação homogênea

$$\varphi'' - c\varphi = 0, \quad (3-22)$$

associada a equação diferencial (3-9). Vamos procurar soluções da forma $\varphi_i(t) = e^{\lambda_i t}$.

Da equação anterior temos,

$$(e^{\lambda t})'' - ce^{\lambda t} = 0,$$

que é equivalente a,

$$\lambda^2 e^{\lambda t} - ce^{\lambda t} = 0,$$

ou ainda,

$$\lambda^2 - c = 0,$$

e obtemos as raízes,

$$\lambda_1 = \sqrt{c}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{c}.$$

Sendo assim,

$$\varphi(t) = e^{t\sqrt{c}}, \quad \varphi(t) = e^{-t\sqrt{c}}$$

são soluções de (3-22). Desta maneira,

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{2} \left(e^{t\sqrt{c}} + e^{-t\sqrt{c}} \right) = \cosh(t\sqrt{c}) \quad (3-23)$$

e

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{2} \left(e^{t\sqrt{c}} - e^{-t\sqrt{c}} \right) = \sinh(t\sqrt{c}), \quad (3-24)$$

são também soluções de (3-22).

Logo, a solução geral de (3-22), é dada por

$$\varphi(t) = \alpha \cosh(t\sqrt{c}) + \beta \sinh(t\sqrt{c}); \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Novamente, observando que

$$\varphi(t) = -\frac{a}{c},$$

é uma solução particular de (3-9). A solução geral de (3-9) é dada por

$$\varphi(t) = \alpha \cosh(\sqrt{c}t) + \beta \sinh(\sqrt{c}t) - \frac{a}{c}, \quad (3-25)$$

que por (3-13) satisfaz

$$\left[\left(\alpha \cosh(t\sqrt{c}) + \beta \sinh(t\sqrt{c}) - \frac{a}{c} \right) \right]^2 = \left(\alpha \cosh(t\sqrt{c}) + \beta \sinh(t\sqrt{c}) - \frac{a}{c} \right) \cdot \left[c \left(\alpha \cosh(t\sqrt{c}) + \beta \sinh(t\sqrt{c}) - \frac{a}{c} \right) + 2a \right], \quad (3-26)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} (\alpha \sinh(t\sqrt{c})\sqrt{c} + \beta \cosh(t\sqrt{c})\sqrt{c})^2 &= c\alpha^2 \cosh^2(t\sqrt{c}) + c\alpha\beta \cosh(t\sqrt{c})\sinh(t\sqrt{c}) - \\ &- a\alpha \cosh(t\sqrt{c}) + 2a\alpha \cosh(t\sqrt{c}) + c\alpha\beta \sinh(t\sqrt{c})\cosh(t\sqrt{c}) + \\ &+ c\beta^2 \sinh^2(t\sqrt{c}) - a\beta \sinh(t\sqrt{c}) + 2a\beta \sinh(t\sqrt{c}) - a\alpha \cosh(t\sqrt{c}) - \\ &- a\beta \sinh(t\sqrt{c}) + \frac{a^2}{c} - \frac{2a^2}{c}, \end{aligned} \quad (3-27)$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned} (\alpha \sinh(t\sqrt{c})\sqrt{c} + \beta \cosh(t\sqrt{c})\sqrt{c})^2 &= c\alpha^2 \cosh^2(t\sqrt{c}) + c\beta^2 \sinh^2(t\sqrt{c}) + \\ &+ 2c\alpha\beta \cosh(t\sqrt{c})\sinh(t\sqrt{c}) - \frac{a^2}{c}, \end{aligned} \quad (3-28)$$

que implica,

$$\begin{aligned} c\alpha^2 \sinh^2(t\sqrt{c}) + 2c\alpha\beta \cosh(t\sqrt{c})\sinh(t\sqrt{c}) + c\beta^2 \cosh^2(t\sqrt{c}) &= c\alpha^2 \cosh^2(t\sqrt{c}) + \\ &+ 2c\alpha\beta \cosh(t\sqrt{c})\sinh(t\sqrt{c}) + c\beta^2 \sinh^2(t\sqrt{c}) - \frac{a^2}{c}. \end{aligned} \quad (3-29)$$

Dessa forma,

$$c\alpha^2 \sinh^2(t\sqrt{c}) + c\beta^2 \cosh^2(t\sqrt{c}) = c\alpha^2 \cosh^2(t\sqrt{c}) + c\beta^2 \sinh^2(t\sqrt{c}) - \frac{a^2}{c},$$

ou ainda,

$$c(-\alpha^2 + \beta^2)[\cosh^2(t\sqrt{-c}) - \sinh^2(t\sqrt{-c})] = -\frac{a^2}{c},$$

que resulta em,

$$c(-\alpha^2 + \beta^2) = -\frac{a^2}{c}.$$

Logo,

$$\beta^2 - \alpha^2 = \frac{a^2}{c^2} \geq 0.$$

Assim,

$$\beta^2 \geq \alpha^2.$$

Se $\beta^2 > \alpha^2$, temos $a \neq 0$, então φ tem um ponto crítico ao longo de γ . Isto implica que existe um ponto q em γ com $\nabla\varphi(q) = 0$ (note que $\nabla\varphi = \varphi' \cdot \frac{\partial}{\partial t}$). Além disso φ satisfaz globalmente $\nabla^2\varphi = (c\varphi + a)g$ com $c > 0$. Portanto pelo Lema 3.2, implica que (M, g) é um espaço hiperbólico de curvatura seccional $-c$ e pelo Lema 2.8, (M, \bar{g}) é também um espaço de curvatura seccional constante.

Se $\alpha^2 = \beta^2$, então $\beta = \pm\alpha$ e $a = 0$. Então a equação (3-25) reduz-se a

$$\varphi(t) = \pm\alpha \left(\cosh(t\sqrt{c}) + \sinh(t\sqrt{c}) \right). \quad (3-30)$$

Substituindo (3-23) e (3-24) na igualdade (3-30), temos que

$$\varphi(t) = \pm\frac{\alpha}{2} \left(e^{t\sqrt{c}} + e^{-t\sqrt{c}} + e^{t\sqrt{c}} - e^{-t\sqrt{c}} \right),$$

que implica,

$$\varphi(t) = \pm\alpha e^{t\sqrt{c}}.$$

Note que a solução acima não possui pontos críticos ao longo de γ . Pelo Lema 3.3,

$$ds^2 = dt^2 + \alpha^2 e^{2\sqrt{c}t} ds_*^2 \quad (3-31)$$

é uma métrica completa em $M = \mathbb{R} \times_{\varphi(t)} M_*$.

Por fim, se $X \in T_p M$,

$$c(n-1)g(X, X) = (Ric_{\bar{g}} - Ric_g)(X, X) = (1 - ce^{2\sqrt{c}t})Ric_{g_*}(X, X) + c(n-1)g(X, X),$$

que é possível apenas se $Ric_{g_*} = 0$. Isto completa a demonstração do teorema. □

Agora enunciaremos um lema que nos auxilia na demonstração de que se (M, g) e (M, \bar{g}) são variedades Einstein e \bar{g} é uma métrica conforme a g , sendo uma delas completa, então teremos as mesmas conclusões do teorema 3.1.

N irá denotar o número de pontos críticos da função φ .

Lema 3.4 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana completa admitindo uma solução não constante φ de $\nabla^2\varphi = \frac{\Delta\varphi}{n}g$. Então o número de pontos críticos de φ é $N \leq 2$, M é difeomorficamente conforme a:*

i) *Esfera (S^n, g_1) se $N = 2$;*

ii) *Espaço Euclidiano (E^n, g_0) ou espaço hiperbólico (H^n, g_{-1}) , se $N = 1$;*

iii) O produto torcido $I \times M_*$ se $N = 0$, onde (M_*, g_*) é uma variedade completa $(n-1)$ -dimensional e $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo aberto.

A demonstração do Lema 3.4 pode ser encontrada em [18].

Teorema 3.5 *Seja (M, g) uma variedade Einstein completa, g e $\bar{g} = \frac{1}{\varphi^2}g$ métricas de Einstein. Então temos as mesmas conclusões do Teorema 3.1.*

Demonstração.:

Se g e $\bar{g} = \frac{1}{\varphi^2}g$, são métricas de Einstein então, (M, g) e (M, \bar{g}) são variedades Einstein, como φ é positiva definida e (M, g) é completa, isto implica que (M, \bar{g}) é também uma variedade Einstein completa.

Se S e \bar{S} denotam a curvatura escalar de (M, g) e (M, \bar{g}) , respectivamente. Então pela definição (2.3), temos que

$$Ric_{\bar{g}} = (n-1)\bar{S}\bar{g}, \quad Ric_g = (n-1)Sg.$$

Assim,

$$Ric_{\bar{g}} - Ric_g = (n-1)\bar{S}\bar{g} - (n-1)Sg,$$

ou ainda,

$$Ric_{\bar{g}} - Ric_g = (n-1)\bar{S}\frac{1}{\varphi^2}g - (n-1)Sg,$$

que é equivalente a

$$Ric_{\bar{g}} - Ric_g = \left(\frac{\bar{S}}{\varphi^2} - S \right) (n-1)g. \quad (3-32)$$

Pelo Lema 2.5, temos

$$Ric_{\bar{g}} - Ric_g = \frac{1}{\varphi^2}[(n-2)\varphi\nabla^2\varphi + (\varphi\Delta\varphi - (n-1)\|\nabla\varphi\|^2)g], \quad (3-33)$$

por (3-32) e (3-33), obtemos

$$\frac{1}{\varphi^2}\{(n-2)\varphi\nabla^2\varphi + (\varphi\Delta\varphi - (n-1)\|\nabla\varphi\|^2)g\} = \left(\frac{\bar{S}}{\varphi^2} - S \right) (n-1)g.$$

De acordo com o Lema 2.7,

$$\nabla^2\varphi = \frac{\Delta\varphi}{n}g, \quad (3-34)$$

que implica,

$$\frac{1}{\varphi^2}\left[(n-2)\varphi\frac{\Delta\varphi}{n}g + (\varphi\Delta\varphi - (n-1)\|\nabla\varphi\|^2)g\right] = \left(\frac{\bar{S}}{\varphi^2} - S \right) (n-1)g,$$

ou ainda,

$$(n-2)\varphi \frac{\Delta\varphi}{n} + \varphi\Delta\varphi - (n-1)\|\nabla\varphi\|^2 - (n-1)\bar{S} + S(n-1)\varphi^2 = 0,$$

que é equivalente a

$$\varphi\Delta\varphi \left(\frac{n-2}{n} + 1 \right) - (n-1)\|\nabla\varphi\|^2 - (n-1)\bar{S} + S(n-1)\varphi^2 = 0,$$

ou seja,

$$2(n-1)\varphi \frac{\Delta\varphi}{n} - (n-1)\|\nabla\varphi\|^2 - (n-1)\bar{S} + S(n-1)\varphi^2 = 0.$$

Como $n > 2$, teremos então,

$$2\varphi \frac{\Delta\varphi}{n} - \|\nabla\varphi\|^2 - \bar{S} + S\varphi^2 = 0. \quad (3-35)$$

Considerando $\eta = 1$ e $\lambda = \frac{\Delta\varphi}{n}$, da equação (3-34) ao longo de uma geodésica $\gamma(t)$, temos

$$\nabla^2\varphi = \lambda g.$$

Pelo Lema 3.3

$$\varphi'' = \frac{\Delta\varphi}{n}. \quad (3-36)$$

Substituindo a igualdade (3-36) na equação (3-35), obtemos

$$2\varphi\varphi'' - (\varphi')^2 + S\varphi^2 - \bar{S} = 0. \quad (3-37)$$

Derivando a equação anterior em relação a t , teremos

$$2\varphi'\varphi'' + 2\varphi\varphi''' - 2\varphi'\varphi'' + 2S\varphi\varphi' = 0,$$

que implica

$$2\varphi\varphi''' + 2S\varphi\varphi' = 0.$$

Se $\varphi(p) \neq 0$ em $p \in M$, então

$$\varphi''' + S\varphi' = 0,$$

isto implica que existe uma constante a satisfazendo

$$\varphi'' = -S\varphi + a. \quad (3-38)$$

Como $[(\varphi')^2]' = 2\varphi'\varphi''$, da equação (3-38) obtemos,

$$[(\varphi')^2]' = 2\varphi'(-S\varphi + a),$$

ou ainda,

$$[(\varphi')^2]' = -2S\varphi\varphi' + 2a\varphi',$$

isto é,

$$[(\varphi')^2]' = -S(\varphi^2)' + 2a\varphi'.$$

Então novamente, existe um constante b satisfazendo

$$(\varphi')^2 = -S\varphi^2 + 2a\varphi + b. \quad (3-39)$$

Substituindo (3-38) em (3-37), temos que

$$2\varphi(-S\varphi + a) - (\varphi')^2 + S\varphi^2 - \bar{S} = 0.$$

Portanto,

$$(\varphi')^2 = -S\varphi^2 + 2a\varphi - \bar{S}. \quad (3-40)$$

Comparando as equações (3-40) e (3-39), concluímos que $b = -\bar{S}$, obtendo assim,

$$(\varphi')^2 = -S\varphi^2 + 2a\varphi - \bar{S}. \quad (3-41)$$

Em qualquer caso a solução φ de (3-38) e (3-41) tem um zero (que é impossível, pois φ é positiva definida) ou um ponto crítico, exceto para soluções do tipo

$$\varphi(t) = \alpha e^{t\sqrt{-S}}. \quad (3-42)$$

Se φ tem um ponto crítico, pelo Lema 3.4, (M, g) é um espaço de curvatura seccional constante. Se $\varphi(t) = \alpha e^{t\sqrt{-S}}$, o Lema 3.4 garante que $M = \mathbb{R} \times M_*$, que completa a demonstração do teorema. □

Considerando que M é uma variedade semi-Riemanniana completa, g e \bar{g} são métricas conformes. Caracterizamos a variedade M quando a diferença entre os tensores de Ricci em cada métrica é um múltiplo escalar da métrica \bar{g} . Para isto utilizamos o lema a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em [8].

Lema 3.6 *Seja (M, g) uma variedade completa que admite uma solução não constante de $\nabla^2\varphi = Bg$, $0 \neq B \in \mathbb{R}$. Então (M, g) é isométrica ao espaço Euclidiano.*

Para a demonstração do Teorema a seguir utilizaremos idéias inteiramente análogas às utilizadas na demonstração do Teorema 3.1.

Teorema 3.7 *Seja (M, g) uma variedade semi-Riemanniana completa admitindo uma transformação conforme global $\bar{g} = \frac{1}{\varphi^2}g$ satisfazendo*

$$Ric_{\bar{g}} - Ric_g = c(n-1)\bar{g},$$

para uma constante c . Então φ é constante ou (M, g) é isométrica ao espaço Euclidiano.

Demonstração.:

De acordo com o Lema 2.5

$$Ric_{\bar{g}} - Ric_g = \frac{1}{\varphi^2} \{ (n-2)\varphi \nabla^2 \varphi + (\varphi \Delta \varphi - (n-1) \|\nabla_g \varphi\|^2) g \} \quad (3-43)$$

e por hipótese,

$$Ric_{\bar{g}} - Ric_g = c(n-1)\bar{g} = \frac{c(n-1)}{\varphi^2} g. \quad (3-44)$$

De (3-43) e (3-44), temos então que

$$\frac{1}{\varphi^2} \{ (n-2)\varphi \nabla^2 \varphi + (\varphi \Delta \varphi - (n-1) \|\nabla_g \varphi\|^2) g \} = \frac{c(n-1)}{\varphi^2} g, \quad (3-45)$$

pelo Lema 2.7,

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\Delta \varphi}{n} g.$$

Substituindo esta última igualdade em (3-45), obtemos

$$\frac{1}{\varphi^2} \{ (n-2)\varphi \frac{\Delta \varphi}{n} g + (\varphi \Delta \varphi - (n-1) \|\nabla \varphi\|^2) g \} = \frac{c(n-1)}{\varphi^2} g,$$

que implica

$$\varphi \Delta \varphi \left(\frac{n-2}{n} + 1 \right) - (n-1) \|\nabla \varphi\|^2 = c(n-1),$$

que é equivalente a

$$\frac{2(n-1)}{n} \varphi \Delta \varphi - (n-1) \|\nabla \varphi\|^2 - c(n-1) = 0.$$

Como $n > 2$, teremos

$$2\varphi \frac{\Delta \varphi}{n} - \|\nabla \varphi\|^2 - c = 0. \quad (3-46)$$

Considerando $\eta = 1$ e $\lambda = \frac{\Delta\varphi}{n}$ no Lema 3.3, ao longo de uma geodésica $\gamma(t)$, temos então,

$$2\varphi\varphi'' - (\varphi')^2 - c = 0. \quad (3-47)$$

Derivando com relação a t os dois lados da igualdade, obtemos

$$2\varphi'\varphi'' + 2\varphi\varphi''' - 2\varphi'\varphi'' = 0,$$

ou ainda,

$$2\varphi\varphi''' = 0. \quad (3-48)$$

Se $\varphi(p) \neq 0$ em $p \in M$, então

$$\varphi''' = 0. \quad (3-49)$$

Isto implica que φ é um polinômio de grau no máximo, igual a 2.

Se φ for um polinômio de grau 1, ou seja,

$$\varphi(t) = At + B, \quad A, B \in \mathbb{R},$$

isto implica que φ tem um zero ao longo de γ , que é uma contradição pelo fato de φ estar globalmente definida em M e portanto não tem zeros em M .

Assim, as possibilidades que temos é φ constante ou φ é um polinômio de grau 2, isto é,

$$\varphi(t) = At^2 + Bt + C, \quad A, B, C \in \mathbb{R}. \quad (3-50)$$

De (3-47), obtemos

$$2(At^2 + Bt + C)(At^2 + Bt + C)'' - [(At^2 + Bt + C)']^2 - c = 0,$$

que é equivalente a

$$2(At^2 + Bt + C)2A - (2At + B)^2 - c = 0,$$

ou ainda,

$$4A^2t^2 + 4ABt + 4AC - 4A^2t^2 - 4ABt - B^2 - c = 0,$$

que implica,

$$4AC - B^2 = c. \quad (3-51)$$

Se $c = 0$, o discriminante $B^2 - 4AC = 0$, então φ é o quadrado de uma função linear. Portanto, φ tem um zero em M , que é uma contradição.

Se $c < 0$, o discriminante $B^2 - 4AC = -c > 0$, então φ tem dois zeros em M , que é também uma contradição.

Se $c > 0$, o discriminante $B^2 - 4AC = -c < 0$, então φ não tem zeros em M , mas por (3-49) sabemos que $\varphi''' = 0$, que implica $\varphi' = At + B$, como estamos considerando φ ao longo da geodésica $\gamma(t)$, que está definida para todo valor de t , pois M é uma variedade completa. Podemos concluir então que φ tem um ponto crítico ao longo de γ , já que

$$\varphi' \left(\frac{-B}{A} \right) = 0.$$

E ainda por (3-50), $\varphi = At^2 + Bt + C$, assim observamos que φ satisfaz a equação $\nabla^2 \varphi = 2A.g$. Portanto, pelo Lema 3.6, (M, g) é isométrica ao espaço Euclidiano. \square

Observação 3.8 *Em particular, se φ é não constante, então c deve ser positivo e (M, \bar{g}) é um espaço de curvatura seccional constante c .*

Definição 3.9 *Dizemos que a transformação conforme $g \rightarrow \bar{g} = \frac{1}{\varphi^2} g$ é uma **transformação de Liouville** se $Ric_{\bar{g}} - Ric_g = 0$.*

Corolário 3.10 *Uma transformação de Liouville definida globalmente em uma variedade semi-Riemanniana é uma homotetia.*

Este resultado é justamente o caso $c = 0$ do Teorema 3.1.

Observe ainda que se for dado um tensor T de ordem 2 em (M, g) , pelo Corolário 3.10, a unicidade do sistema

$$Ric_g = T,$$

pode ser considerada a menos de homotetia.

3.2 Transformações Concirculares que Preservam a Diferença dos Tensores de Ricci

Nesta seção nosso objetivo é caracterizar as transformações concirculares $g \rightarrow \bar{g} = \frac{1}{\varphi^2} g$, sendo g e \bar{g} métricas indefinidas e completas.

Proposição 3.11 *Seja $\bar{g} = \frac{1}{\varphi^2} g$, onde g é uma métrica indefinida completa, admitindo uma solução não constante definida globalmente φ de $\nabla^2 \varphi = \frac{\Delta \varphi}{n} g$. Então φ tem um zero.*

Demonstração.:

Ao longo de uma geodésica nula $\gamma(t)$, temos;

$$\frac{d^2}{ds^2}(\varphi(\gamma(s))) = \frac{d}{ds}g(\nabla\varphi, \gamma'),$$

ou ainda,

$$\frac{d^2}{ds^2}(\varphi(\gamma(s))) = g(\nabla_{\gamma'}(\nabla\varphi), \gamma') + g(\nabla\varphi, \nabla_{\gamma'}\gamma'),$$

que implica,

$$\frac{d^2}{ds^2}(\varphi(\gamma(s))) = g\left(\frac{\Delta\varphi}{n}\gamma', \gamma'\right) = 0.$$

Sendo assim $\varphi(\gamma(s))$ é linear em s . Portanto, existe $t_0 \in \mathbb{R}$, com $\gamma(t_0) = p$, $p \in M$ e $\varphi(\gamma(t_0)) = 0$, ou seja, φ tem um zero ao longo de γ .

□

Observe que se φ tem um zero ao longo de γ então, \bar{g} não será uma métrica completa.

Corolário 3.12 *A única transformação concircular $g \rightarrow \bar{g} = \frac{1}{\varphi^2}g$ globalmente definida entre métricas indefinidas completas são as homotetias.*

Demonstração.:

Se φ não é constante, da Proposição 3.11, sabemos que φ tem um zero ao longo de uma geodésica nula $\gamma(t)$. Sendo assim, para que g e \bar{g} sejam métricas completas devemos ter necessariamente que φ seja constante. Portanto, g e \bar{g} são métricas homotéticas.

□

Teorema 3.13 *Seja (M, g) completa admitindo uma transformação concircular globalmente definida $\bar{g} = \frac{1}{\varphi^2}g$. Assuma que S, \bar{S} são constantes. Então ocorre um dos casos do Teorema 3.1.*

Demonstração.:

Se S, \bar{S} são constantes, pelo Lema 2.4, temos

$$\frac{1}{\varphi^2}\bar{S} = S + \frac{2}{n} \frac{\Delta\varphi}{\varphi} - \frac{\|\nabla\varphi\|^2}{\varphi^2},$$

isto é,

$$\frac{1}{\varphi^2}\bar{S} - S = \frac{2}{n} \frac{\Delta\varphi}{\varphi} - \frac{\|\nabla\varphi\|^2}{\varphi^2}. \quad (3-52)$$

De acordo com o Lema 2.5

$$Ric_{\bar{g}} - Ric_g = \frac{1}{\varphi^2} \{ (n-2)\varphi \nabla^2 \varphi + (\varphi \Delta \varphi - (n-1) \|\nabla_g \varphi\|^2) g \}. \quad (3-53)$$

E, pelo Lema 2.7

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\Delta \varphi}{n} g.$$

Substituindo esta última igualdade em (3-53), obtemos

$$Ric_{\bar{g}} - Ric_g = \frac{1}{\varphi^2} \left[(n-2)\varphi \frac{\Delta \varphi}{n} g + (\varphi \Delta \varphi - (n-1) \|\nabla \varphi\|^2) g \right], \quad (3-54)$$

então pela expressão (3-54), obtemos

$$Ric_{\bar{g}} - Ric_g = \frac{1}{\varphi^2} \left[\varphi \Delta \varphi \left(\frac{n-2}{n} + 1 \right) g - (n-1) \|\nabla \varphi\|^2 g \right].$$

Logo,

$$Ric_{\bar{g}} - Ric_g = \frac{1}{\varphi^2} \left\{ \frac{2(n-1)}{n} \varphi \Delta \varphi g - (n-1) \|\nabla \varphi\|^2 g \right\}.$$

Portanto,

$$Ric_{\bar{g}} - Ric_g = \left(\frac{2}{n} \frac{\Delta \varphi}{\varphi} - \frac{\|\nabla \varphi\|^2}{\varphi^2} \right) (n-1) g.$$

Mas pela equação (3-52), concluímos que

$$Ric_{\bar{g}} - Ric_g = \left(\frac{1}{\varphi^2} \bar{S} - S \right) (n-1) g.$$

A equação anterior é a mesma obtida em (3-32). Portanto, a demonstração segue idêntica à demonstração do Teorema 3.5.

□

Referências Bibliográficas

- [1] AUBIN, T. **Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry**. 1^a ed. Springer Monographs Mathematics, 1998.
- [2] BESSE, A. **Einstein Manifolds**. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1987.
- [3] DO CARMO, M. **Geometria Riemanniana**. Projeto Euclides, 2008.
- [4] FERRAND, J. **Sur une Classe de Morphismes Conformes**. C.R.Acad Sci. Paris, 681-684, 1983.
- [5] FIALKOW, A. **Conformal Geodesics**. Transactions AMS 45, 443-473, 1939.
- [6] GRISVARD, P. **Elliptic Problems in Nonsmooth Domains**. Res. Notes Math., Pitman Advanced Publishing Program, 1985.
- [7] HAANTJES, J. **Conformal Representations of an n-dimensional Euclidean Space with a non-definite Fundamental Form on Itself**. Proc. Kon. Nederl. Akad. Amsterdam 40, 700-705, 1937.
- [8] KUHNEL, W. **Conformal Transformations Between Einstein Spaces**. Conformal Geometry (R.S. Kulkarni and U. Pinkall, eds), Aspects of Math., vol.E12, Braunschweig, Vieweg-Verlag, pp.105-146, 1988.
- [9] KUHNEL, W. **Differential Geometry - Curves - Surfaces - Manifolds**. American Mathematical Society, 2005.
- [10] LAKES, R. S. **Foam structures with a negative *Poisson's* ratio**. 1987.
- [11] LI, P. **Lectures Notes on Geometric Analysis**. 2009.
- [12] LIE, S. **Komplexe, Insbesondere Linien und Kugelkomplexe mit Anwendung auf die Theorie Partieller Differentialgleichungen**. Math. Ann., 5, 145-246, 1872.
- [13] LIOUVILLE, J. **EsExtension au cas Trois Dimensions de la Question du Tracé Géographique**. Note VI, Applications de l'Analyse à la Géométrie, Paris, pp. 609-617, 1850.

- [14] O'NEILL, B. **Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity**. ACADEMIC PRESS, INC., 1983.
- [15] Q. WANG, C. X. **Sharp bounds for the first non-zero Stekloff eigenvalues**. J. Func. Analysis, 2635-2644, 2009.
- [16] SCHOEN, R E YAU, S. T. **Lectures on Differential Geometry**. International Press, Conference Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology, volume I, USA, 1994.
- [17] SCOUTEN, J. A. **Der Ricci-Kalkul**. Springer-Verlag, Berlin, 1924.
- [18] TASHIRO, T. **Complete Riemannian Manifolds and Some Vector Fields**. Trans. Amer. Math. Soc. 117, 251-275, 1965.
- [19] VILLAGGIO, P. **Mathematical Models for Elastic Structures**. Cambridge Univ. Press, 1997.
- [20] W. KUHNEL, B. R. **Conformal Diffeomorphisms Preserving the Ricci Tensor**. Proceedings of the American Mathematical Society, 123, Number 9, September, 2841-2848, 1995.
- [21] XU, X. **Prescribing a Ricci Tensor in a Conformal Class of Riemannian Metrics**. Math. Soc., 115, 455-459, corrigenda, ibid.118, (1983), 333, 1992.