UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

LUCIANE NUNES RIBEIRO

UMA ANÁLISE DO MOVIMENTO DE CONSTITUIÇÃO DA EMENTA DA DISCIPLINA DE ÁLGEBRA LINEAR NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Goiânia, 2018

sistema de bibliotecas ufg

PRPG
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[X] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

Nome completo do autor: Luciane Nunes Ribeiro

Título do trabalho: Uma análise do movimento de constituição da ementa da disciplina de Álgebra Linear na Licenciatura em Matemática.

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Luciane Nunes Ribeiro

Assinatura do(a) autor(a)[2]

Ciente e de acordo:

Assinatura do(a) orientador(a)[2]

Data: 26 / 10 / 2018.

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

[2] A assinatura deve ser escaneada.

Versão atualizada em setembro de 2017.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

LUCIANE NUNES RIBEIRO

UMA ANÁLISE DO MOVIMENTO DE CONSTITUIÇÃO DA EMENTA DA DISCIPLINA DE ÁLGEBRA LINEAR NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Educação em Ciências e Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Wellington Lima Cedro.

Goiânia, 2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor por meio do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

RIBEIRO, Luciane Nunes.
UMA ANÁLISE DO MOVIIMENTO DE CONSTITUIÇÃO DA EMENTA DA DISCIPLINA DE ÁLGEBRA LINEAR NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA [manuscrito] / Luciane Nunes RIBEIRO. - 2018.
211 f.

Orientador: Prof. Dr. Wellington Lima Cedro.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Pró-reitoria de Pós-Graduação (PRPG), Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Goiânia, 2018.
Bibliografia.
Inclui lista de tabela.

1. Álgebra Linear 2. Ementas. 3. Ensino e Aprendizagem. 4. Movimento Lógico-Histórico. 5. Licenciatura em Matemática. I. Cedro, Wellington Lima, orient. II. Título.

CDU 51:37

UFG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

LUCIANE NUNES RIBEIRO

Aos 28 dias do mês de setembro do ano de 2018, às 14:00 horas no IME-UFG, de forma semi-presencial, reuniu-se a Banca Examinadora composta pelos(as), Prof(a). Dr(a). Wellington Lima Cedro, presidente(a)/orientador(a) - UFG; Prof(a). Dr(a). José Pedro Machado Ribeiro – UFG; Prof(a). Dr(a). Maria do Carmo de Sousa – UFSCar, para sob a presidência do(a) primeiro(a), procederem a DEFESA DE DISSERTAÇÃO do trabalho intitulado **"UMA ANÁLISE DO MOVIMENTO DE CONSTITUIÇÃO DA EMENTA DA DISCIPLINA DE ÁLGEBRA LINEAR NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA"**, do(a) referido(a) discente do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGECM), nível Mestrado. Após realizada a avaliação oral no sistema de apresentação e defesa do Trabalho, a Banca Examinadora reuniu-se emitindo os seguintes pareceres com as justificativas e sugestões abaixo:

Docente	Resultado (Aprovado/ Reprovado)	Assinatura
Wellington Lima Cedro	APROVADA	Wellington Lima Cedro
José Pedro Machado Ribeiro	APROVADA	José Pedro M Ribeiro
Maria do Carmo de Sousa	aprovada	

Justificativas e comentários sobre o trabalho:

O TRABALHO TEM UMA TEMÁTICA RELEVANTE PARA O CAMPO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E PARA AS DISCUSSÕES SOBRE O ENSINO DA ÁLGEBRA LINEAR EA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. A BANCA SUGERE TAMBÉM A PUBLICAÇÃO DO TRABALHO EM FORMATO DE ARTIGO E OUTROS.

Sugestões de alterações do trabalho:

A BANCA SUGERE QUE A DISCENTE ATENDA NA MEDIDA DO POPSSÍVEL OS PONTOS INDICADOS DURANTE A ARGUIÇÃO.

Após a avaliação, o referido candidato foi considerado APROVADA na defesa da dissertação. Às 16:00 horas, a Prof(a). Dr(a). Wellington Lima Cedro - UFG, Presidente da Banca Examinadora, deu por encerrada a sessão e, para constar lavrou-se a presente Ata.

Dedicatória

Aos meus pais, ao meu irmão e a três professoras que são verdadeiros exemplos para mim e que, certamente, não têm a exata noção do quanto as admiro e do quanto as suas práticas profissionais me influenciaram na escolha da minha profissão: minhas tias Abadia e Maria Celeste e minha madrinha de batismo, Alvanir.

Agradecimentos

Inicio este texto com os olhos marejados; aos que me conhecem, sabem que isso é bem comum, mas a emoção deste momento é muito especial, pois o sentimento de gratidão floresce em mim.

Antes de tudo, agradeço a Deus, pois durante a intensa caminhada, foram várias as situações que me abalaram física e emocionalmente, mas n'Ele consegui forças e inspiração para não desistir.

Aos meus pais, Ênio e Fátima, fundamentais nesse processo. Obrigada pela compreensão, apoio e amor a mim dedicados, não somente nesse período do mestrado, mas ao longo de toda a minha vida: eu amo vocês.

Ao meu irmão, Ênio Júnior, que sempre me incentivou a procurar uma pós-graduação e, por vezes, acreditou mais em mim que eu mesma. Te amo!

Aos amigos e familiares – são tantos que não irei citá-los – que me apoiaram e compreenderam a minha ausência, e àqueles que me ajudaram emprestando os ouvidos sempre prontos para escutar minhas inquietações quanto às disciplinas e à escrita da dissertação.

Aos colegas de trabalho e alunos da UEG, que se tornaram amigos, e em especial à Jô, à Ana Paula, à Isabele e ao Alyson, que me incentivaram e me apoiaram desde o processo seletivo até este momento.

A todos aqueles colegas que, ao longo do processo seletivo para o mestrado, quando eu ainda cursava disciplinas como aluna especial, me incentivaram, e até me emprestaram livros.

Aos amigos do GEMAT, que também foram importantes nesse processo, e de forma especial, à Maria Marta, cuja amizade iniciada em Pirenópolis, em 2015 é, para mim, de inestimável valor.

Aos colegas de turma, pelos momentos compartilhados ao longo das disciplinas, significativos para minha formação profissional.

Por fim, agradecimentos especiais a alguns professores decisivos nesse processo: inicialmente, ao meu orientador, Wellington Cedro – nos conhecemos na minha graduação (2006) e, anos depois, ele incentivou-me para que eu retornasse aos estudos e acreditou em mim. Obrigada por tudo, inclusive pela paciência nas orientações, que muitas das vezes acabavam em choro, por culpa exclusiva do meu

temor em não conseguir atender às suas expectativas. Também durante a graduação, conheci o professor José Pedro, e, mesmo não sendo sua aluna, aprendi a admirá-lo; hoje agradeço sua aceitação ao meu convite para fazer parte da minha banca.

No início do mestrado, entre tantas inquietações sobre o tema da pesquisa, tive a oportunidade de conversar com a professora Maria do Carmo, em São Paulo (2016), que, desde o primeiro encontro, foi extremamente atenciosa, dando-me valiosas sugestões de leituras e igualmente aceitou o convite para fazer parte da minha banca, muito obrigada professora, eu te admiro muito, a senhora é um exemplo para mim.

Deus foi abundantemente maravilhoso ao colocar esses mestres tão especiais no meu caminho ao longo da minha vida acadêmica.

RESUMO

RIBEIRO, Luciane Nunes. Uma análise do movimento de constituição da ementa da disciplina de Álgebra Linear na licenciatura em Matemática. Dissertação – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Goiânia, 2018.

Este estudo analisa os movimentos da constituição da Universidade na Europa e no Brasil; a criação do primeiro curso de Matemática no Brasil; a constituição dos conteúdos que compõem a ementa da disciplina de Álgebra Linear e, por fim, as suas ementas atuais nos cursos presenciais de Licenciatura em Matemática das Universidades Federais Brasileiras. O objetivo dessa análise é o de responder à seguinte questão de pesquisa: como se deu a constituição dos conteúdos que compõem a ementa da disciplina de Álgebra Linear nos cursos de Licenciatura em Matemática das Universidades Federais Brasileiras? Para atingir o objetivo, utilizou-se como metodologia o estudo bibliográfico e documental, mormente de obras clássicas, livros de história, anuários, legislação e ementas. O referencial teórico é pautado nos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural, que se constitui científica, mas também política (MOURA, 2017; VYGOTSKI, 1995; CEDRO, 2008; OLIVEIRA, 2002; ZANELLA, 2007), mediante o estudo do movimento lógico-histórico – apregoado por Kopnin, 1978; Sousa, Panossian, Cedro, 2014; Sousa, 2004; Fazenda, 2000 – de constituição da disciplina de Álgebra Linear (PIRES, 2006; DORIER, 2000, SILVA, 2003; MOORE, 1995). Fez-se necessário compreender o que motivou a sua inserção no contexto universitário e qual a sua contribuição para a formação do professor de Matemática, com base em Bastos (1980; 2006), Boyer (1974), Cavalari (2012), Celestino (2000), Garding (1981), Kopnin (1978), Caraça (1959), Ríbnikov (1987), Tubino (1984), Kleiner (2007), entre outros. Foram analisadas 55 Universidades Federais Brasileiras que oferecem o curso presencial de Licenciatura em Matemática. Estabeleceram-se como categorias de análise os conteúdos das ementas, a carga horária e a referência bibliográfica básica da disciplina obrigatória de Álgebra Linear oferecida nestas instituições. Como principais conclusões, observou-se que a disciplina de Álgebra Linear começou a ser desenvolvida e ensinada nas Universidades para resolver problemas práticos de diversos intelectuais das engenharias e ciências correlatas, e que o repasse de seus conteúdos de forma desvinculada pode contribuir para as dificuldades do processo de ensino e aprendizagem presentes nessa disciplina.

Palavras-chaves: Álgebra Linear. Ementas. Ensino e Aprendizagem. Movimento Lógico-Histórico. Licenciatura em Matemática.

ABSTRACT

RIBEIRO, Luciane Nunes. An analysis of the movement of constitution of the syllabus of Linear Algebra discipline in Mathematics degree. Dissertation – Post-Graduation Degree Program in Education in Science and Mathematics, Goiânia, Brazil, 2018.

This research analyzes the constitution's movements of the University in Europe and in Brazil; the creation of Mathematics' first course in Brazil; the constitution of the contents which make up the Linear Algebra discipline syllabus and, finally, its current discipline syllabus in the presential courses in Mathematics Degree of the Brazilian Federal Universities. The purpose of the mentioned analysis is to answer the following research question: how did occur the contents' constitution that compose the syllabus of Linear Algebra in Mathematics degrees of Brazilian Federal Universities? In order to reach this objective, the bibliographical and documentary study were used as methodology, especially classical, history and yearbooks, legislation and the syllabus. The theoretical reference is based on Historical-Cultural Theory assumptions, which is scientific, but also political (MOURA, 2017; VYGOTSKI, 1995; CEDRO, 2008; OLIVEIRA, 2002; ZANELLA, 2007), through the study of logical-historical movement – defended by Kopnin, 1978; Sousa, Panossian, Cedro, 2014; Sousa, 2004; Fazenda, 2000 – of Algebra Linear discipline constitution, according to Pires, 2006; Dorier, 2000, Silva, 2003; Moore, 1995. It was necessary to understand the reasons of its inclusion in the university context and its contribution to the professional formation of Mathematics teacher, according to Bastos (1980; 2006), Boyer (1974), Cavalari (2012), Celestino (2000), Garding (1981), Kopnin (1978), Caraça (1959), Ríbnikov (1987), Tubino (1984), Kleiner (2007), among others. It was analyzed 55 Federal Brazilian Universities that offer presential course of Degree in Mathematics. As categories of analysis were stablished the content of syllabus, the workload and the basic bibliographic reference of compulsory discipline of Linear Algebra of these institutions. As more relevant conclusions, it was observed that Linear Algebra began to be developed and taught in Universities to solve practical problems of diverse intellectuals of engineering and exact sciences, and that the transfer of its indexes in an unrelated way may contribute to the difficulties in teaching and learning process present in this discipline.

Keywords: *Linear Algebra. Syllabus. Teaching and Learning. Logical-Historical Movement. Degree in Mathematics.*

Lista de Tabelas

Lista de Quadros

SUMÁRIO

OS PROPÓSITOS DESSA JORNADA

O que vale na vida não é o ponto de partida e sim a caminhada. Caminhando e semeando, no fim terás o que colher. (Cora Coralina)

Inspirados nos dizeres da poetisa Cora Coralina, pretendemos mostrar, ao longo dessa pesquisa, que de onde começamos não é o mais importante, mas sim as reflexões propostas. Vale dizer que aquilo que se faz relevante para a profissão docente é, a nosso ver, o amadurecimento que a pesquisa acadêmica proporciona. Deste modo, importa evidenciar não como o ensino da Álgebra Linear teve início, mas sim os motivos e as necessidades que fizeram com que seu desenvolvimento continuasse avançando até atingir a Universidade.

O caminhar e o semear provocam mudanças nos sujeitos, sendo este o movimento que demanda desejável observação e análise a fim de se compreender o porquê do que se colhe hoje. Sabe-se que o curso de Matemática, seja na modalidade licenciatura ou bacharelado, coloca o discente, ao longo da graduação, em contato com conteúdos da Matemática nunca antes estudados, bem como com alguns conceitos já vistos, porém, de modo superficial, antes do ingresso na academia. Esta pesquisa aborda uma das disciplinas que compõem a matriz curricular do curso de licenciatura em Matemática: a Álgebra Linear, cujos alguns de seus conteúdos são apresentados no Ensino Médio, o que, porém, não torna fácil seu aprendizado e compreensão.

As razões que me levaram a pesquisar sobre o ensino da Álgebra Linear surgem da minha experiência como aluna e, posteriormente, professora universitária dessa disciplina.

Tendo como formação inicial a licenciatura em Matemática, a disciplina de Álgebra Linear foi componente obrigatório na minha graduação; contudo, a relação da disciplina com a formação do professor de Matemática nunca ficou clara para mim e, acredito, para a grande maioria dos graduandos.

Desde a graduação, pude constatar minha facilidade de apreensão das temáticas inerentes às disciplinas ditas “abstratas”, ou seja, aquelas compreendidas no plano das ideias, não palpáveis, como a Álgebra Linear. Entretanto, igualmente era perceptível, na época da graduação, a dificuldade enfrentada por grande parte dos meus colegas na compreensão dos conteúdos dessa disciplina, o que culminava na reprovação de muitos deles ou em aprovação sem a apreensão necessária de seus conteúdos. Anos depois, ao tornar-me professora e ministrar aulas dessa disciplina, a situação não se revelou diferente com meus alunos.

Já há alguns anos atuando como professora no curso de Matemática, modalidade licenciatura, em uma Universidade pública no estado de Goiás, tive a oportunidade de trabalhar com diversas disciplinas, mas ao ministrar aulas de Álgebra Linear, vi-me em uma situação que não me satisfazia como profissional. Por mais que eu alterasse a minha metodologia em sala de aula, eu não contava com a participação dos alunos nas aulas, e o desempenho nas avaliações era insatisfatório. Tal percepção foi possível diante da constatação de que eles não conseguiam compreender os conceitos e executavam as atividades propostas decorando os procedimentos, sem compreender o seu porquê.

Nessa oportunidade, igualmente pude identificar algumas fragilidades relacionadas à organização do currículo dessa disciplina, o que provavelmente causou prejuízos aos discentes. A ementa e as referências bibliográficas são preestabelecidas, devendo o professor cumpri-las.

Entretanto, a forma como está posta não propicia relações com a realidade dos estudantes, não faz sentido para eles e, assim, torna-se irrelevante e sem aplicações práticas. Tal situação descola-se da realidade, pois se sabe que a disciplina perpassa por diversos cursos exatamente por conta de sua extensa aplicabilidade; logo, o problema não reside em seu conteúdo, e sim na organização do ensino. Com efeito, o processo de ensino e aprendizagem precisa de mudanças e essa mudança tem que partir do docente. É o que leciona Cedro (2008, p.60):

> Cabe ao professor criar condições para que os indivíduos interajam motivados pela tentativa de dar resposta a determinado problema, de forma que ocorra um fluxo ininterrupto no processo de elaboração compartilhada da solução que abarque tanto os indivíduos isolados, quanto os pequenos grupos e o coletivo da sala de aula.

Portanto, o anseio por investigar o ensino da disciplina de Álgebra Linear tem por objetivo o de tornar-me uma docente com capacidade de criar condições para que os alunos sejam motivados a estudar esses conteúdos. Para além da sala de aula, minha pretensão é colaborar com o processo de ensino e aprendizagem da Álgebra Linear, proporcionando um novo olhar sobre este curso, para que outros professores se inspirem e repensem sua prática:

> O professor do ensino secundário (e não só êle) não se deve limitar a ser um professor de matemáticas, mas esforçar-se, isso sim, por ser um mestre de matematização. Censurar as matemáticas por serem abstratas é estultícia: é de sua natureza serem-no; mas é perfeitamente legítimo censurar um ensino matemático que não mostre claramente donde, e como, foram abstraídas as matemáticas. (REVUZ, 1967, p. 72).

Logo, a pesquisa parte de uma inquietação pessoal, relacionada ao ensino e à aprendizagem de graduandos do curso de Matemática. Ressalta-se, porém, que essa percepção de que tal processo apresenta problemas não ocorre apenas no curso de Matemática da instituição onde a pesquisadora ministra aulas. Em conversa informal com outros professores da Universidade, que ministram a disciplina em outros cursos, a constatação é a mesma, e o consenso é de que a dificuldade surge por se tratar de conceitos desvinculados da realidade, ou seja, os alunos não aprendem porque não conseguem enxergar motivos para isso.

Nesse sentido, acreditamos que a Universidade seja o lócus de discussão sobre o desenvolvimento mais abrangente dos sujeitos – que abarque esses motivos e as necessidades – que a procuram para formação profissional. O tripé ‘ensino, pesquisa e extensão’ que sustenta a universidade deve garantir a “produção do conhecimento por meio da problematização dos conhecimentos historicamente produzidos, de seus resultados na construção da sociedade humana e das novas demandas e desafios que ela apresenta.” (PIMENTA; ANASTASIOU, 2005, p. 162).

As pesquisas científicas, na sua maioria, são desenvolvidas em parceria com Instituições de Ensino Superior (IES), mas nem sempre tratam da realidade dessas instituições. Nesta pesquisa, portanto, discute-se a importância da Universidade na formação dos sujeitos. Pimenta e Anastasiou (2005, p.168) discorrem sobre esse papel:

> Enquanto instituição social, a universidade se caracteriza como ação e prática social, pautando-se pela idéia de um conhecimento guiado por suas próprias necessidades e por sua própria lógica, tanto no que se refere à descoberta e invenção quanto à transmissão desse conhecimento.

Para tanto, pretende-se debater sobre os conteúdos que compõem a ementa de Álgebra Linear para se compreender por que se tornou disciplina obrigatória em muitos cursos de graduação, e, assim, apontar a sua relação social com a formação docente. Antes, porém, é preciso assimilar o papel da Matemática no meio acadêmico e como ela ganhou espaço dentro das IES para, após, chegarmos ao objeto de pesquisa: o ensino da Álgebra Linear.

As inquietações iniciais

A intenção primordial desta pesquisa é fazer uma viagem ao passado para se conhecer o processo de desenvolvimento e consolidação do ensino da Álgebra Linear no Brasil. Afinal, tudo de que se dispõe hoje é fruto de um longo caminho já percorrido, pois as necessidades humanas remontam ao princípio da vida humana e continuam a surgir a todo instante.

Deste modo, busca-se neste estudo compreender o que motivou a inserção dessa disciplina no contexto universitário e qual a sua contribuição para a formação do professor de Matemática. Acreditamos que isso só é possível a partir da percepção acerca do movimento lógico-histórico de constituição dessa disciplina.

> Por histórico subentende-se o processo de mudança do objeto, as etapas de seu surgimento e desenvolvimento. O histórico atua como objeto do pensamento, o reflexo do histórico, como conteúdo. O pensamento visa á reprodução do processo histórico real em toda a sua objetividade, complexidade e contrariedade. O lógico é o meio através do qual o pensamento realiza essa tarefa, mas é o reflexo do histórico em forma teórica, vale dizer, é a reprodução da essência do objeto e da história do seu desenvolvimento no sistema de abstrações. O histórico é primário em relação ao lógico, a lógica reflete os principais períodos da história. (KOPNIN, 1978, p. 183-184).

Investigar o movimento lógico-histórico da constituição da ementa da disciplina de Álgebra Linear não se trata apenas de relacionar o desenvolvimento teórico e científico do objeto e a sua história, pois "o lógico reflete não só a história do próprio objeto, como também a história do seu conhecimento" (KOPNIN, 1978, p. 186). Por isso, a relação entre o lógico e o histórico é necessária, pois permitirá a análise do movimento do pensamento que levou a consolidação desta disciplina.

Conhecer esse movimento que culminou com o ensino da Álgebra Linear nas IES, em diversos cursos de graduação, contribuirá para a prática docente. Isto é, será possível conhecer o processo de desenvolvimento do ensino da Álgebra Linear, ou seja, identificar os caminhos percorridos a fim de revelar como ele hoje se dá, na tentativa de vislumbrar o que pode vir a ser futuramente, bem como suas potencialidades.

Dito de outro modo, cientes desse movimento lógico-histórico, será possível alcançar o objetivo de pesquisa, qual seja, analisar o movimento de constituição dos conteúdos que compõem a ementa da disciplina de Álgebra Linear nos Cursos de Licenciatura em Matemática das Universidades Federais Brasileiras.

Considerando que a disciplina permeia diversos cursos de graduação, sejam em IES públicas ou privadas, na licenciatura ou no bacharelado, algumas decisões foram tomadas para que a análise das ementas se tornasse possível. Inicialmente, decidiu-se por analisar os cursos de licenciatura em Matemática das Universidades Federais brasileiras. Primeiro, porque o foco da pesquisa é a formação de professores de Matemática; segundo, porque as instituições federais foram as que ministraram os primeiros cursos de Matemática no país, visto que eram ofertados por instituições financiadas pelo governo. Como exemplo, cita-se o primeiro curso de Matemática, ofertado pela Universidade de São Paulo (USP), financiada pelo Governo Federal.

Além de a disciplina, frisa-se, Álgebra Linear ser obrigatória em vários cursos de graduação da área das ciências exatas, ela aborda conteúdos teoricamente conhecidos dos alunos, desde o Ensino Médio; porém, como já mencionado, isso não torna a sua aprendizagem e compreensão mais fáceis.

Esse cenário nos leva à inquietação de se perquirir as razões de tantas dificuldades. Como ponto de partida da nossa caminhada, elabora-se o seguinte problema: **como se deu a constituição dos conteúdos que compõem a ementa da disciplina de Álgebra Linear nos cursos de licenciatura em Matemática das Universidades Federais brasileiras?**

Para responder à questão posta, é necessário, antes, conhecer a história do desenvolvimento da Matemática no Brasil para, posteriormente, relatar o surgimento da Álgebra Linear neste contexto e, assim, compreender como se deu seu desenvolvimento e quais acontecimentos a influenciaram nesse processo. Acreditamos que “entender o lógico-histórico da vida é entender o mundo no qual estamos inseridos, o qual se apresenta a todos nós, em todos os dias, a todo momento.” (SOUSA, 2004, p. 47). Ao percorrermos esse trajeto histórico, são oportunizados momentos de proveitosas reflexões sobre o processo de constituição dessa disciplina, pois este estudo possibilita que nos coloquemos diante de situações que mobilizaram diversos pesquisadores/professores para que este conhecimento algébrico fosse discutido na Universidade em diversos cursos de graduação.

Pretendemos identificar a unidade entre o lógico e o histórico porque é ela que nos “(...) ajuda a resolver o problema da construção da ciência, de sua estrutura interna, do sistema de suas categorias. Essa unidade é básica na definição do próprio conceito de forma de pensamento.” (KOPNIN, 1978, p. 186).

Outrossim, acredita-se que este estudo poderá contribuir no sentido de repensarmos a organização do ensino dessa disciplina, trazendo contribuições para professores de Álgebra Linear que atuam nos cursos de Matemática e nos diversos cursos da área de exatas. Com efeito, trata-se de uma disciplina que perpassa vários cursos, sendo considerada um “problema” na Universidade. Vale dizer que as pesquisas científicas publicadas nesta área são recentes e insuficientes, como se passa a apresentar.

A extensão das pesquisas sobre a Álgebra Linear no Brasil

Os conhecimentos matemáticos estavam presentes no Brasil desde a sua descoberta, contribuindo em diversos aspectos para o desenvolvimento do nosso país, mas só começaram a se destacar em meados de 1600, com os cursos de artilharia. “À Matemática, desde a época medieval, atribuía-se uma utilidade prática, sendo vista, predominantemente, como um conhecimento para as chamadas “artes mecânicas.” (BASTOS, 2006, p. 39). Por muitos anos, os conteúdos matemáticos foram usados apenas para o ensino militar (1808-1874), e, com a valorização desses conteúdos, fundou-se a Academia Real Militar da Corte do Rio de Janeiro, em 1811, para desenvolver o ensino sistemático da Matemática no Brasil.

Este foi o primeiro passo para a propagação da Matemática no país, e alguns anos depois, em 1875, ela foi disseminada com mais ênfase com a criação das escolas de engenharia. No entanto, apenas na década de 1930 ganhou status distinto com a criação do primeiro curso de graduação para formar matemáticos no Brasil.

Conhecer com detalhes o movimento de constituição da Matemática é fundamental para identificar a importância e influência do ensino da Álgebra Linear no desenvolvimento do Brasil, pois, como citado, alguns de seus conteúdos são tratados no Ensino Médio, o que é comprovado a partir do estudo histórico da Matemática. Certamente por conta dessa ampla utilização é que a disciplina atualmente está presente em vários cursos de graduação das ciências exatas. Para nos inteirarmos melhor sobre a natureza dos problemas relacionados à Álgebra Linear e suas aplicações, realizamos uma busca na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) do Instituto Brasileiro de Informação e Tecnologia[1]. Ao usarmos as palavras 'Álgebra Linear', sem aspas, em todos os campos – título, autor ou assunto –, deparamo-nos com 699[2] trabalhos cadastrados nesse banco de dados.

Entre essas investigações, os assuntos são os mais variados: há estudos sobre o conceito matemático, suas definições e teorias; outros sobre a aplicação dos conceitos que compõem a ementa de Álgebra Linear em diversas áreas; outros sobre o ensino e/ou aprendizagem desses conteúdos e as contribuições para a formação do professor de Matemática, além de pesquisas que tratam de temas como conceitos algébricos, questões lineares ou, ainda, geometria algébrica.

Diante disso, realizamos outra busca usando os termos "Álgebra Linear", entre aspas, na intenção de garantir resultados que tratassem apenas dessa área, e o número de resultados reduziu para 170.

Delimitando um pouco mais a procura, usando '"Álgebra Linear" Aplicações', o resultado diminuiu consideravelmente: 43. Entre eles, há estudos que tratam de aplicações que podem ser usadas no Ensino Médio, enquanto uma pequena parte trata de aplicações dos conteúdos do Ensino Superior. A fim de identificar algum trabalho que se aproxime da proposta da nossa pesquisa, pesquisamos por '"Álgebra Linear" Constituição', e encontramos 36 pesquisas; no entanto, nem todas tratam da constituição da Álgebra Linear do modo que gostaríamos. As que mais se aproximam de nosso estudo são pesquisas que tratam da contribuição da álgebra para a formação docente.

Ao alterarmos a busca para '"Álgebra Linear" ensino e aprendizagem', a quantidade foi ainda menor: apenas 25 pesquisas. Analisando os resultados dessa última busca, para saber o que a comunidade científica tem produzido sobre o processo de ensino e aprendizagem. Como resultado, nos deparamos com apontamentos que confirmam a escassez desses estudos e período recente em que foram produzidos, o que denota preocupação. Selecionaram-se algumas para explicitar. Celestino (2000), em sua dissertação, se propôs a analisar as pesquisas brasileiras que tratam do processo de ensino e aprendizagem da Álgebra Linear, na

[1] A Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) integra e dissemina, em um só portal de busca, os textos completos das teses e dissertações defendidas nas instituições brasileiras de ensino e pesquisa. O acesso a essa produção científica é livre de quaisquer custos. Disponível no link: http://bdtd.ibict.br

[2] Busca realizada em 25 de outubro de 2017, somente com as palavras "Álgebra Linear".

década de 90. Nesse caminho, o autor deparou-se com estudos internacionais, concluindo que

> (...) as pesquisas em ensino-aprendizagem de disciplinas de cursos superiores, no mundo todo, são relativamente recentes e no início se concentravam na área de cálculo diferencial e integral. Nos Estados Unidos, por exemplo, as investigações sobre o ensino-aprendizagem de Álgebra Linear tomaram fôlego a partir da criação do *Linear Algebra Curriculum Study Group (LACSG)* em 1990. Na França, as pesquisas sobre didática da Álgebra Linear começaram a aparecer também a partir de 1990; a tese de Jean Luc Dorier sobre o assunto é do início da década de 1990. No Brasil, a pesquisa sobre as disciplinas-problemas, efetuadas pela equipe de Campinas, conforme consta da problemática, foi divulgada em 1997. (CELESTINO, 2000, p. 89).

Os dados encontrados por Celestino coincidem com os apontados por Joel Hillel, pesquisador canadense que mais adiante será abordado. Além do fato de as pesquisas sobre Álgebra serem recentes, esses autores citam que a disciplina Cálculo conta com mais atenção dos pesquisadores. Prova disso é a pesquisa publicada em Campinas, em 1997, que considera a Álgebra Linear, ao lado de Cálculo, como "disciplina-problema" na Universidade. Percebemos que a Álgebra Linear ganha espaço nas pesquisas científicas relacionadas à Educação a partir da década de 90; porém, pode-se afirmar que ainda são insuficientes.

Outra pesquisa que se compromete a tratar do processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos que fazem parte da Álgebra Linear é a de Oliveira (2002), que tem como título, "Sobre a Produção de Significados para a Noção de Transformação Linear em Álgebra Linear". A autora faz uma breve apresentação do surgimento da Álgebra Linear e a considera uma área de estudo recente, pois apenas em 1941 teve seu reconhecimento com a publicação do livro *A Survey of Modern Algebra,* de Garrett Birkhoff e Saunders Mac Lane. A autora defende que isso não diminui sua importância:

> A relevância da Álgebra Linear no ensino superior despertou o interesse de educadores matemáticos franceses e canadenses. Para estes pesquisadores, no que diz respeito ao ensino e à aprendizagem, o primeiro curso de Álgebra Linear é geralmente mal sucedido. Na expectativa de mudança desse quadro, os franceses Jean-Luc Dorier, Aline Robert, Jaqueline Robinet e Marc Rogalski fizeram uma análise epistemológica e didática das dificuldades de estudantes em álgebra linear no primeiro ano da universidade francesa de Ciências. Já Joel Hillel e Anna Sierpinska pesquisaram o ensino e aprendizagem da álgebra linear na perspectiva de diferentes níveis de linguagem usados para descrever vetores e operadores. (OLIVEIRA, 2002, p. 3-4).

Essa breve apresentação contendo as discussões levantadas pelas transcrições dos dois autores já nos permite constatar que as pesquisas nessa área são recentes porque a disciplina de Álgebra Linear é igualmente recente em nosso país.

Ao analisar os demais trabalhos, percebe-se que, além de recentes, são insuficientes, pois não há pesquisas que tratem, na mesma investigação, de todos os conteúdos que compõem a disciplina. O que percebemos são pesquisas que focam em conteúdos específicos da Álgebra Linear, o que é um ponto positivo, porém, não dispensa outros estudos na área.

Acreditamos, assim, que o professor deve se preocupar com as partes que compõem a ementa da disciplina, sem deixar de lado a relação entre elas, porque é nessa relação que conseguiremos entender a sua proposta:

> O foco nas relações é de suma importância, pois ao isolar elementos perde-se a compreensão tanto das partes que compõem o todo, quanto da própria totalidade. Isto significa dizer que cada fragmento é constituído por meio das relações que estabelece com os demais, em movimento de mutualidade. De igual maneira compreende-se a totalidade, pois é justamente a maneira como os elementos se relacionam que configura o quadro total: qualquer mudança na composição dos mesmos altera o todo. (ZANELLA, 2007, p. 27).

Portanto, não podemos desvincular os conteúdos que compõem a disciplina de Álgebra Linear. É preciso compreendê-los nas suas relações entre si e entre eles e a nossa realidade.

Como exemplo, ao pensarmos nas atividades que exercemos ao longo do dia, certamente fazemos o uso dos *smartphones, notebooks, internet,* entre outros equipamentos eletrônicos, e é de conhecimento de todos que sem a Matemática não teríamos tanta evolução nessa área; contudo, poucos compreendem qual matemática é utilizada. Contudo, o profissional que faz uso da Álgebra Linear para sanar suas necessidades na programação linear, no processamento de imagens, entre outras atividades da área da computação, por exemplo, precisa estabelecer e conhecer todas essas relações.

Encontramos algumas pesquisas que tratam de aplicações da Álgebra Linear, como citado anteriormente, em nível de pós-graduação, que exigem uma boa compreensão dos seus conteúdos diante da complexidade dos cálculos que a envolvem.

Em vista disso, nossa preocupação com o ensino e a aprendizagem da Álgebra Linear só aumenta, pois é urgente repensá-los para que nossos alunos se apropriem desses conhecimentos e consigam usá-los para sanar suas necessidades.

Considerando todas as questões apresentadas, nota-se que, para se conhecer o objeto de estudo em sua totalidade, qual seja, o ensino da Álgebra Linear, há diversos aspectos a serem analisados. Contudo, fez-se necessária uma delimitação para que fosse possível a concretização de um trabalho de qualidade no tempo disponível: “[a] cuidadosa identificação e caracterização da particularidade é condição *sine qua non* para compreender-se como se dá essa concretização da universalidade no ‘vir-a-ser’ da singularidade.” (OLIVEIRA, 2005, p. 46).

Por isso, devemos olhar para a singularidade, mediada pelas particularidades, para que se construa a base concreta da realidade, a universalidade.

Com todas essas questões teóricas e a problemática relacionada ao processo de ensino e aprendizagem da Álgebra Linear, atualmente discutidas em vários países, inclusive no Brasil, julgamos relevante a investigação nessa área, com recorte para um aspecto, porém, ainda pouco debatido: as questões históricas sobre a constituição da ementa da disciplina de Álgebra Linear. Na próxima seção, são tratados os instrumentos utilizados para responder a nossa questão de investigação.

Sistematização da pesquisa

Como ponto de partida, definimos por compreender o princípio da constituição do objeto de pesquisa, o ensino da Álgebra Linear. Isso porque não se pode pensar na construção de um conhecimento sem ter clara a sua relação com as necessidades humanas. Para isso, utilizaremos a dialética materialista histórica “que permite uma apreensão radical (que vai à raiz) da realidade e enquanto práxis, isto é, unidade de teoria e prática na busca da transformação e de novas sínteses no plano do conhecimento e no plano da realidade histórica” (FAZENDA, 2000, p.73). Nossa intenção é ter uma abordagem associada à ideia de realidade, de conexão entre o empírico e o teórico, entre o lógico e o histórico, por isso este método se afigura ideal ao cumprimento do objetivo da pesquisa:

> A abordagem dialética (...) não renuncia à origem empírica objetiva do conhecimento, à semelhança da ciência analítica, nem renuncia à interpretação e compreensão fenomenológicas que as considera como

> elementos abstratos, necessários à construção do conhecimento (o concreto no pensamento). (FAZENDA, 2000, p. 101).

Com este propósito, e por meio de uma viagem ao passado, a pesquisa fundamenta-se em aprofundado estudo bibliográfico e documental pautado no estudo de obras clássicas, livros de história, anuários e decretos a fim de compreender o processo de constituição dos conteúdos que compõem a disciplina Álgebra Linear. Acreditamos que ao analisar a história dos fenômenos sociais, com base na perspectiva materialista, conseguiremos identificar o movimento lógico-histórico:

> [q]uando uma investigação abrange o processo de desenvolvimento de um fenômeno em todas as suas fases e mudanças, desde o momento em que surge até desaparecer, implica revelar sua natureza, conhecer sua essência, já que somente em movimento demonstra o corpo que existe. Assim, a investigação histórica do comportamento não é algo que complementa ou sustenta o estudo teórico, mas constitui sua base. (VYGOTSKI, 1995, p. 42, tradução nossa)[3].

A revisão bibliográfica tem o intuito de apresentar uma retrospectiva histórica da Universidade e da Álgebra Linear como disciplina do Ensino Superior, mas não só no Brasil. Para cumprir esta finalidade é necessário conhecer as partes que compõem esse universo. “O homem, ao assimilar determinado conhecimento, assimila também as práticas sociais e a experiência social da humanidade fixada em determinado conhecimento, e é nesse movimento que se vai formando sua personalidade.” (MOURA, 2017, p. 52-53).

Para repensarmos o ensino e a aprendizagem da Álgebra Linear, é imprescindível conhecer o movimento lógico-histórico, de forma que os motivos e as necessidades que a levaram ao status de disciplina obrigatória nos cursos de ciências exatas do Ensino Superior estejam claros para o professor e sejam usados como instrumento para o desenvolvimento da personalidade humana rumo à apropriação dos conhecimentos produzidos historicamente (MOURA, 2017). Isso só será possível mediante a compreensão das razões que moveram tantos matemáticos a estudar e defender a importância desses conteúdos para a formação de tantas profissões.

---

[3] (...) el estudio histórico, dicho sea de paso. simplemente significa aplicar las categorías del desarrollo a la investigación de los fenómenos. Estudiar algo históricamente significa estudiarlo en movimiento. Esta es la exigencia fundamental del método dialéctico. Cuando en una investigación se abarca el proceso de desarrollo de algún fenómeno en todas sus fases y cambios, desde que surge hasta que desaparece, ello implica poner de manifiesto su naturaleza, conocer su esencia, ya que sólo en movimiento demuestra el cuerpo que existe. Así pues, la investigación histórica de la conducta no es algo que complementa o ayuda el estudio teórico, sino que constituye su fundamento. (VYGOTSKI, 1995, p. 42).

Em vista disso, estudaremos a história da Universidade e do curso de Matemática fora do Brasil, nos cientificando da origem das influências que colaboraram com o desenvolvimento da Matemática do país, principalmente advindas da França:

> Embora o Brasil tivesse nascido e vivido os seus primeiros séculos debaixo do domínio de Portugal, é incontestável a influência que ele recebeu, desde o início, da cultura francesa. Ela começou a exercer-se através dos navegadores e comerciantes que, logo depois do descobrimento, estabeleceram o comércio do pau-brasil com os nossos selvagens, interessando-se pela civilização natural e a inteira liberdade em que eles viviam, neste outro mundo, inteiramente novo, que era o Brasil do século XVI. (TAVARES, 1979, p. 30).

Na sequência, em direção ao Brasil, segue-se com a revisão bibliográfica e documental que elucida o surgimento da Universidade no país, a importância da Matemática neste processo, identificando o que levou a criação do seu primeiro curso e como ocorreu o movimento de constituição da matriz curricular e a inserção da Álgebra Linear na Universidade.

Com este roteiro, será permitido identificar o movimento de constituição dos conteúdos que compõem a ementa da disciplina de Álgebra Linear, o que a motivou e suas necessidades e relevância para a formação de tantos profissionais:

> Não nos referimos a uma transposição imediata de fatos ou problemas históricos para a atividade de ensino. O uso da história do conceito, nessa perspectiva, tem por objetivo explicitar o seu movimento histórico de produção e desenvolvimento, uma vez que como objetivação da atividade humana o conceito está impregnado de trabalho humano cristalizado, como síntese da resposta humana dada às necessidades que motivaram sua produção – suas necessidades, suas formas de ação, seus instrumentos, sua generalização. (MOURA, 2017, p. 135).

Portanto, o presente estudo vai além da descrição do que se apresentará aos nossos olhos neste caminhar. Ao revisitar a história, pretende-se assimilar, ultrapassar o que está posto cientificamente e analisar o movimento lógico-histórico:

> Respeitar verdadeiramente o trabalho dos nossos antepassados é recolhê-lo, assimilá-lo, ultrapassá-lo, e não permanecer, preguiçosamente, no ponto a que êles chegaram: é nosso dever esforçarmo-nos tanto como êles se esforçaram e agradecer-lhes o terem desbravado o caminho – mas também é nosso dever não nos convencermos de que êles conseguiram (ou de que nós algum dia conseguiremos) dar à ciência a sua forma definitiva. (REVUZ, 1967, p. 89)

Em vista disso, a presente pesquisa fundamenta-se nos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural, que se constitui científica, mas também política:

> Assumir a Teoria Histórico-Cultural como fundamento das pesquisas em Educação representa uma necessidade teórica e metodológica. Uma necessidade teórica na medida em que é preciso conhecer os processos de desenvolvimento do psiquismo humano na direção de contribuir para o seu pleno desenvolvimento. (...) uma necessidade metodológica na medida em que é preciso construir o método científico da Pedagogia que nos permitirá explicitar as possibilidades concretas de contribuir, em nossa atual sociedade, para que cada indivíduo se aproprie da “força social” produzida pelo homem e objetivada nos signos, particularmente nos conceitos teóricos. (MOURA, 2017, p. 41).

Sabe-se que esta pesquisa consiste em um ponto de partida, contudo, isoladamente, não é suficiente, considerando que estamos inseridos em um processo correlacionado a diversos outros.

Em síntese, a intenção é analisar o movimento levando em consideração algumas relações, uma vez que não é possível desvincular a criação da Universidade no Brasil e a fundação do primeiro curso de Matemática no país das influências estrangeiras, do movimento lógico-histórico da matriz curricular do curso de Matemática, da constituição dos conteúdos que compõem a ementa da disciplina de Álgebra Linear no Brasil. Por isso, traçamos um caminho, que será longo, e julgamos essencial para repensarmos o ensino e aprendizagem da Álgebra Linear no Ensino Superior.

Os itinerários da investigação

O roteiro definido para esta caminhada pelo passado – que analisa o movimento de constituição dos conteúdos que compõem a ementa da disciplina de Álgebra Linear nos cursos de Licenciatura em Matemática nas Universidades Federais Brasileiras – é estruturado de modo a evidenciar o ponto de partida do objeto de pesquisa, para, posteriormente, revelar o seu desenvolvimento e o porquê de seu estudo atual em diversos cursos superiores.

O primeiro capítulo – Álgebra Linear na Universidade: memórias do Ensino Superior e do curso de graduação em Matemática no Brasil – inicia com o relato da consolidação da Universidade na Europa para após dissertar sobre a origem da educação e do ensino superior no Brasil. Pretende-se, com isso, conhecer as necessidades sociais, políticas e culturais da época da criação da Universidade, em especial, no Brasil. Com efeito, Pimenta e Anastasiou (2005, p. 168) consideram que “(...) desde suas origens, a universidade buscou efetivar os princípios de formação, criação, reflexão e crítica, tendo sua legitimidade derivada da autonomia do saber ante a religião e o Estado”.

Na sequência, é discutida a organização da educação brasileira, o que requer a sua necessária análise desde a época do Brasil Colônia até o processo de consolidação da Universidade no país, até a criação do seu primeiro curso superior de Matemática, identificando o momento e a circunstância em que isso ocorreu, com o intuito de apontar suas contribuições no desenvolvimento do Brasil.

Por certo, conhecer o processo de autonomia do ensino da Matemática no nosso país é essencial para nos aproximarmos do objeto de estudo – o ensino da Álgebra Linear –, uma disciplina constante das matrizes curriculares de diversos cursos das Ciências Exatas do Ensino Superior no Brasil, cujos alguns conteúdos são inicialmente apresentados no ensino secundário. Ou seja, houve a necessidade de se aprofundar esses conhecimentos e por isso foram postos no ensino superior.

Defendemos que os conceitos são construídos historicamente e passados de geração em geração, e acreditamos que isso aconteceu no Brasil. Os professores estrangeiros que vieram atuar nas nossas Universidades já dispunham de experiências profissionais que foram levadas em consideração na organização do o ensino pátrio, influenciando, de efeito, na organização do primeiro curso de Matemática e na escolha das disciplinas das matrizes curriculares. Deste modo, disserta-se sobre essas influências estrangeiras e o movimento de constituição das matrizes curriculares.

No capítulo seguinte – Álgebra Linear: constituição histórica e organização dos conteúdos – inicia-se a seção pelo movimento histórico de constituição dos conteúdos que compõem a ementa de Álgebra Linear. É apresentada a natureza da Álgebra Linear para identificar quando começaram a ser estudados os seus conteúdos e como se deu o seu processo de desenvolvimento, para, em seguida, tratar-se da sistematização desses conteúdos que a compõem e conhecer outras perspectivas sobre a organização daqueles.

O terceiro capítulo – Os conteúdos que compõem a Álgebra Linear: um estudo das ementas nos cursos presenciais de Licenciatura em Matemática, nas Universidades Federais Brasileiras – apresenta as ementas de diversos cursos brasileiros e analisa as relações entre os nomes das disciplinas, as ementas, as referências bibliográficas básicas e carga horária.

Ao final dessa jornada, pretendemos fazer reflexões sobre os motivos dessa pesquisa, a fim de retomar a nossa questão inicial posta e levantar alguns questionamentos sobre a diferença entre os motivos e as necessidades que permearam em especial o início e meados do século XX e os atuais. Esta investigação foi pensada e planejada, inicialmente, a fim de suprir necessidades profissionais pessoais, mas pretende-se que ela vá além das minhas inquietações e colabore com o processo de ensino e aprendizagem da Álgebra Linear.

1 ÁLGEBRA LINEAR NA UNIVERSIDADE: MEMÓRIAS DO ENSINO SUPERIOR E DO CURSO DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA NO BRASIL

Ao se pensar na Universidade, vem-nos à memória um local em que o conhecimento é o que a sustenta. No entanto, não se trata de qualquer tipo de conhecimento, mas sim dos científicos, que se ocupam dos fenômenos reais, sistematizados, que podem ser verificáveis; contudo, não estão prontos e acabados, pois podem ser reformulados de acordo com evolução do homem (LAKATOS; MARCONI, 2002). Estes conhecimentos são divulgados e apresentados à sociedade em diferentes formatos – livros, revistas, meios eletrônicos, entre outros – e são historicamente construídos pelo homem.

Nesse contexto, a Universidade deve ser um espaço que possibilita aos sujeitos conhecerem, com especificidade, o que foi produzido ao longo da humanidade e para ela se voltar como uma instituição que deve "(...) possibilitar que todos os seres humanos tenham condições de ser partícipes e desfrutadores dos avanços da civilização historicamente construída e compromissados com a solução dos problemas que essa mesma civilização gerou." (PIMENTA; ANASTASIOU, 2005, p.162). Partindo deste ponto de vista, a discussão acerca da origem da Universidade na Europa dá-se no intuito de apontar as influências no desenvolvimento da Educação e da Matemática no Brasil.

A existência hoje da Universidade, do curso de licenciatura em Matemática e da disciplina de Álgebra Linear no Brasil assenta-se na influência europeia, pois foi no velho continente que surgiram as primeiras universidades (TUBINO, 1984). Conhecer não só as suas origens, mas, em especial, o desenvolvimento histórico dessas instituições possibilitará o entendimento acerca de alguns aspectos da atual educação brasileira.

Será possível compreender, ainda, o porquê do surgimento tardio, em relação à Europa, da Universidade no Brasil e do curso da Matemática (em 1934) nestas Universidades, e, posteriormente, como os conteúdos que atualmente compõem a Álgebra Linear ganharam espaço neste contexto.

Desta feita, visitar esse recorte histórico possibilitará assimilar quais as questões sociais e políticas que contribuíram para a criação da universidade brasileira e do curso de Matemática com o fito de identificar quando a Álgebra Linear é incluída no rol de disciplinas obrigatórias. Ou seja, serão evidenciados os motivos e as necessidades que levaram a organização educacional da Europa a ser empregada no Brasil.

O desenvolvimento histórico das Universidades europeias tem papel fundamental nesta pesquisa, pois, ao tratarmos da formação de professores, estamos nos referindo a um dos objetivos da Universidade. Todavia, para que ela – Universidade – alcançasse esse objetivo, alguns caminhos foram percorridos, visto que, inicialmente, não se tinha a preocupação com a formação docente: essa necessidade surge com o passar do tempo e, ao explorar tais caminhos históricos, torna-se possível identificar o que motivou a criação de cursos específicos voltados à formação de professores de Matemática.

A imersão neste percurso certamente possibilitará ao futuro professor dessa disciplina um olhar diferenciado aos esses conteúdos, pois ciente de seus motivos e necessidades, sejam elas sociais, políticas ou culturais, certamente dispensará maior atenção aos seus conteúdos durante a graduação.

Como mencionado, os cursos para formação de professores não era uma prioridade nas universidades italianas, francesas e portuguesas, como se verá do estudo da história das universidades. O foco se dava no ensino das Artes Liberais, da Teologia, do Direito e da Medicina, o que explica a desvalorização da formação docente no Brasil, pois, por muitos anos na Europa, a este tipo de formação foi negligenciada.

Deste modo, relatar e analisar esse processo são uma forma de situar o leitor sobre a importância da formação docente, pois, por muitos anos, não houve a preocupação em se investir em formação de qualidade, o que é fartamente demonstrado pela história da educação. É, ainda, uma forma de expor e valorizar os conhecimentos desenvolvidos por tantos matemáticos.

Diante do proposto, esta caminhada tem início na busca da origem da Universidade no mundo, para se compreender o início do desenvolvimento da educação no Brasil, até a criação da Universidade no país. Será dada atenção especial ao ensino da Matemática no Brasil a fim de mostrar que alguns conteúdos que atualmente compõem a Álgebra Linear já estavam presentes nas escolas secundárias brasileiras desde o período colonial.

Ao final do capítulo, traz-se o surgimento do primeiro curso de Matemática no país, a sua modernização por conta das influências europeias e a constituição das matrizes curriculares até a inserção oficial da disciplina de Álgebra Linear no currículo do primeiro curso superior de Matemática.

1.1 A CONSOLIDAÇÃO DA UNIVERSIDADE NA EUROPA

Nossa jornada começa na Idade Média, quando há os primeiros elementos históricos de organização educacional em nível superior. É o que preceituam Charle e Verger (1996, p. 7-8):

> Se aceitarmos atribuir à palavra universidade o sentido relativamente preciso de "comunidade (mais ou menos) autônoma de mestres e alunos reunidos para assegurar o ensino de um determinado número de disciplinas em um nível superior", parece claro que tal instituição é uma criação específica da civilização ocidental, nascida na Itália, na França e na Inglaterra no início do século XIII.

Para discorrer sobre o processo de consolidação das Instituições de Ensino Superior, volta-se ao século IV, época em que surgem as primeiras organizações escolares com objetivo de formar sujeitos com graduação superior. Ainda que se usasse o termo "universidade" para nomear esses locais, nesta época tratava-se apenas de escolas que, com a criação da escrita, organizaram-se para ensinar o que já havia sido criado pelo homem. Portanto, percebemos que,

> [c]om a divisão do Império Romano, em 395, em Império Romano do Ocidente, cuja capital permaneceu Roma, e Império Romano do Oriente, cuja capital passou a ser Constantinopla (a Nova Roma, de Constantino), a educação, em geral, e a educação superior, em especial, viriam a sofrer influências diversas e tomariam destinos diferentes. (TUBINO, 1984, p. 16).

Com essas mudanças políticas o império do Oriente, em 17 de fevereiro de 425, fundou a Universidade de Constantinopla. "(...) para fazer frente à influência pagã exercida pelos dois outros grandes centros de Ensino Superior: a Escola de Atenas e a de Alexandria" (TUBINO, 1984, p.17). Portanto, havia escolas gregas com bases religiosas distintas das romanas, razão pela qual Constantino cria aquela instituição: para garantir que os sujeitos tenham formação cristã.

Anos depois, em 825, foi fundada a Universidade de Pávia, na Itália, que tinha como foco o estudo do Direito. "Pávia foi uma das muitas escolas que, a partir do século IX, reviveram o estudo da legislação romana." (TUBINO, 1984, p. 18). Outras escolas surgem na sequência, nos séculos IX, X e XI: Roma, Ravena e Orléans; Milão, Narbona e Lion; Verona, Mântua e Angers, respectivamente.

Essas instituições da Idade Média ensinavam o que consideravam essencial para a época. As disciplinas eram cristianizadas e definidas pelos padres da Igreja Católica. Portanto, os sujeitos eram instruídos para dar continuidade à cultura erudita, que naquela época era considerada

> (...) a forma mais alta de saber intelectual à qual um homem livre poderia almejar [são elas]: as “Artes Liberais” (Gramática, Retórica, Lógica, Aritmética, Música, Astronomia, Geometria) formando sua base e a ciência sagrada (que mais tarde será denominada Teologia), seu coroamento. Disciplinas mais práticas, tais como o Direito ou a Medicina, mais capazes, entretanto, de um nível suficiente de abstração, encontravam igualmente seus lugares dentro deste sistema. (CHARLE; VERGER, 1996, p. 13).

Nesse cenário, surge, também na Itália, a Escola de Bolonha, com um ensino da legislação tão significativo para a época que os imperadores lhes destinavam recursos financeiros, “(...) pois a jurisprudência ali revivida assinalou interpretações que favoreciam as reivindicações imperiais contra as pretensões eclesiásticas.” (TUBINO, 1984, p. 18).

Com todo esse movimento, há uma mudança nos objetivos das escolas: aquelas exclusivamente monásticas ficam mais ocultas, e as escolas catedrais aumentam consideravelmente sua representatividade.

> Os prelados mais eruditos e mais eficientes que a reforma da Igreja designou para as inúmeras sedes episcopais dedicaram-se a dotar suas catedrais de escolas ativas para formar os clérigos instruídos de que tinham necessidades; na direção dessas escolas foram colocados “escoliastas” competentes e ativos. (CHARLE; VERGER, 1996, p. 14).

Surgem aí as escolas particulares, nas quais “(...) os mestres instalavam-se por conta própria e, contando apenas com sua reputação, ensinavam aqueles que aceitassem pagar para matricular-se em suas escolas.” (CHARLE; VERGER, 1996, p. 14). Em vista disso, o número de mestres atuando nas cidades aumentou desorganizadamente, o que incomodou a Igreja, que desde a Idade Média exercia monopólio na área da educação. Para sanar tal impasse, a Igreja cria uma forma de controlar a criação e expansão das escolas, impondo que

> (...) para abrir-se uma escola, mesmo que particular, fazia-se necessário doravante ter em mãos uma “autorização de ensino” outorgada em cada diocese pela autoridade episcopal. Esse sistema se impôs principalmente

> porque, de toda forma, a maioria dos mestres continuava sendo, por seu estatuto pessoal, de clérigos. (CHARLE; VERGER, 1996, p. 14-15).

Referida licença foi nomeada de *licentia docendi*, que, de certa forma, dificultou, mas não impediu o surgimento de instituições independentes nos países mediterrâneos.

As primeiras escolas de Direito e Medicina surgem nessa época, de forma independente e laica, com funcionamento autônomo, e apenas o mestre era o responsável por fazer um contrato com seus alunos. “As primeiras escolas de Direito surgiram no norte da Itália desde o final do século XI, em particular em Bolonha; as mais antigas escolas de Medicina são as de Salerno, no sul da Itália.” (CHARLE; VERGER, 1996, p. 15).

Ao longo do século XII, os sujeitos formados por essas instituições italianas “(...) começaram a espalhar-se para além dos Alpes e a ensinar, pelo menos de maneira episódica, na Provença, no Languedoc, na Catalunha, e, em seguida, até mesmo no norte da França e na Inglaterra.” (CHARLE; VERGER, 1996, p. 15)

Essa fase de peregrinação dos sujeitos formados com conhecimentos ditos superiores foi considerada um momento de renovação dos saberes. Percebeu-se a importância dessas pessoas para o desenvolvimento econômico tanto dos negócios públicos como privados. Poucas pessoas, naquela época, detinham conhecimento mais aprofundado em diversas áreas, até mesmo das técnicas de escrita, e, por isso, prestigiaram aqueles sujeitos.

Todos esses fatores influenciaram no surgimento das primeiras universidades. Porém, com a grande quantidade de escolas públicas e privadas,

> (...) numerosos centros escolares ativos sofreram um declínio bastante brusco na segunda metade do século XII. Ao norte do rio Loire, as escolas-catedrais de Chartres, Laon, Reims, Liège etc. voltam para a obscuridade. No sul da França e na Itália, os ensinamentos de Direito, que pareciam enraizar-se em vários lugares, desaparecem. (CHARLE; VERGER, 1996, p. 16).

Com tais acontecimentos, restaram apenas algumas escolas que, por conta de sua organização e atuação, receberam incentivos para crescer e se consolidar. No entanto, mesmo com todo privilégio e reconhecimento, tratava-se apenas de escolas privadas e independentes, como uma *societates*, que se consistia em um agrupamento entre o mestre e seus alunos. Bolonha foi um dos locais onde o incentivo foi diferenciado: sua escola de Direito conservava sua importância e por isso o imperador Frederico Barba-Ruiva concedeu-lhe uma proteção especial (CHARLE; VERGER, 1996).

Por volta de 1190, iniciou-se outro movimento no qual os estudantes se reagrupavam segundo sua região de origem para tentarem se proteger das imposições das comunas:

> Pouco a pouco, as “nações” estudantis reagruparam-se em “universidades” (...) na direção de cada universidade surgiu um reitor eleito anualmente. A Comuna tentou opor-se à constituição das universidades estudantis, mas o papa obrigou-a a ceder, aproveitando-se disso para introduzir em Bolonha o sistema da *licentia docendi*, ali outorgada pelo arcedíago. Por volta de 1230, a Universidade de Bolonha, pelo menos quanto aos direitos Civil e Canônico, estava solidamente constituída. (CHARLE; VERGER, 1996, p. 17).

Os registros mais antigos de estatutos da Universidade de Bolonha datam de 1252; portanto, conclui-se que não foi tão simples o processo de consolidação, considerando, inclusive, que somente em 1270 a Comuna reconheceu oficialmente a instituição. Há elementos históricos de que nesse mesmo período surge na cidade italiana outra Universidade para as Artes e a Medicina, entretanto, não se sabe ao certo sua data de fundação (TUBINO, 1984).

Bolonha é considerada “(...) a primeira cidade ocidental da Europa que ampliou sua escola, transformando-a em *studium generale*.” (TUBINO, 1984, p. 18).

Já em Paris, o processo de agrupamento dos mestres para ensinar de forma privada e independente. Os primeiros ensinamentos foram os das Artes Liberais. Ulteriormente, e com certo atraso, as disciplinas superiores de direito canônico e teologia fizeram parte desses ensinamentos, conforme afirmam Charle e Verger (1996):

> O rei da França não se opôs a nada. O bispo de Paris e seu chanceler, que concediam a *licentia docendi*, bem que tentaram frear o movimento, o que suscitou alguns conflitos, mas desde 1215 um legado pontifical outorgou à jovem *universitas magistrorum et scholarium Parisiensium* seus primeiros estatutos. (CHARLE; VERGER, 1996, p. 17).

A autonomia da Universidade Parisiense foi garantida e, ainda no século XIII, “(...) os mestres de Paris constituíram quatro faculdades ou poderes: as de teologia, leis canônicas, medicina e ‘artes’.” (TUBINO, 1984, p. 20). Seu prestígio era tão grande que foi considerada a instituição mais influente desde os tempos de Aristóteles.

A Universidade de Oxford igualmente está entre as mais antigas do mundo. Seus registros apontam que o agrupamento de mestres aconteceu por volta de 1200, e alguns anos depois é oficialmente reconhecida como Universidade, sob controle do bispo, que se mantinha distante, garantindo a sua autonomia (CHARLE; VERGER, 1996):

> Na região norte da Europa (Paris, Oxford), as universidades eram antes de tudo associações de mestres ou, se quisermos, federações de escolas. As disciplinas dominantes eram as Artes Liberais e a Teologia, e a marca eclesiástica continuava forte. (...) A disciplina mestra era o Direito, secundariamente a Medicina, o que implicava haver alunos com uma média de idade mais avançada e com um nível social mais elevado. E se também aqui um controle eclesiástico conseguiu se impor, este permanecia, apesar de tudo, exterior à própria instituição. (CHARLE; VERGER, 1996, p. 18-19).

Mesmo com o controle da Igreja, os estatutos dessas instituições de ensino foram criados pelos próprios mestres e/ou estudantes. Seus representantes eram escolhidos por eleição e sua organização interna tinha o intuito de “assegurar sua proteção diante das ameaças possíveis da população e das autoridades locais e regulamentar o exercício autônomo da atividade, que era a própria razão de ser de sua associação, a saber, o estudo e o ensino.” (CHARLE; VERGER, 1996, p. 19).

Nas grandes cidades, como Paris, o progresso proporcionou novas necessidades. Com isso, foi necessário contratar pessoas com mais conhecimento para atuarem em cargos de confiança dos príncipes e da Igreja. Os mais aptos a tomar posse dos ditos cargos eram os recém-graduados daquelas escolas.

Entre as novas demandas surgidas nos anos seguintes a 1200, está a tradução das obras de Aristóteles.

> Com tais textos, não se tratava mais simplesmente de lógica, como no século XII; tratava-se doravante do conjunto da filosofia e das ciências greco-árabes, então acessíveis, que surgiam nas escolas do Ocidente. Essa renovação das autoridades fascinava muitos espíritos, mas despertava a desconfiança das autoridades eclesiásticas. Seria, então, para beneficiar-se de uma plena liberdade de ensino que os indivíduos das escolas teriam conquistado a autonomia que caracteriza a universidade. (CHARLE; VERGER, 1996, p. 20).

Houve um grande crescimento na quantidade de estudantes e mestres, sem um controle correspondente. Deu-se início a uma espécie de “ensino” duvidoso, em que cada mestre lecionava a seu modo e, muitas vezes, superficialmente, fazendo relações equivocadas entre as disciplinas. Na intenção de controlar essa situação, bem como de padronizar o ensino, alguns mestres se juntaram

> (...) com o objetivo de limitar a proliferação das escolas e de impor a todos um regime de estudos bem definido, baseado na hierarquia das disciplinas, na leitura sistemática das autoridades obrigatórias, na proibição da leitura dos livros perigosos e finalizando com um sistema coerente de exames e de diplomas. (CHARLE; VERGER, 1996, p. 20).

Assim, algumas escolas tornaram-se Universidades, o que somente foi possível devido a um árduo esforço ideológico. “Poder-se-ia dizer que teria sido para fazer frente a um determinado número de disfunções surgidas nas escolas existentes e às críticas por elas suscitadas que a solução universitária foi constituída.” (CHARLE; VERGER, 1996, p. 20). Por conta do seu alto prestígio, essas primeiras instituições universitárias permanecem em atividade até os dias atuais, com inúmeras modificações em suas organizações administrativas. Cita-se a Universidade de Bolonha, considerada *universitas scholarium,* por ter sido inicialmente formada por estudantes que tinham conhecimentos superiores, todavia não licenciados pelo chanceler da Catedral de Notre Dame como mestres. Por conta dessa configuração, ocorriam situações pitorescas dentro da instituição, como o reitor nomear um grupo de alunos como responsáveis por observar a conduta dos mestres e repassar-lhe as irregularidades. Já na Universidade de Paris isso não acontecia, por se tratar originalmente *universitas magistrorum*, composta por mestres licenciados pelo chanceler da Catedral de Notre Dame para exercer essa função. (TUBINO, 1984)

Diante disso, percebe-se que tais universidades não tiveram o mesmo modelo de organização e de ensino; logo, apresentam sistemas pedagógicos e institucionais bem diferentes.

Com o passar do tempo, outra lógica foi novamente estabelecida:

> Embora permanecendo oficialmente instituições eclesiásticas, as universidades passaram cada vez mais para o controle das cidades e dos estados, que esperavam delas tanto a formação dos letrados quanto a dos juristas competentes de que necessitavam suas administrações em pleno desenvolvimento, bem como a sua contribuição para a elaboração da ideologia nacional e monárquica que acompanhava o nascimento do Estado moderno. Sob formas diversas, o controle político tornou-se, assim, opressivo para as universidades (restrição no exercício das liberdades e privilégios, intervenção na nomeação dos professores e no recrutamento dos estudantes, pressões diversas). Em troca, é verdade, dessa integração à ordem comum do reino, os universitários obtiveram algumas gratificações financeiras (salários professorais), assim como promessas de brilhantes carreiras. (CHARLE; VERGER, 1996, p. 25).

Com tanto controle, não tardou para que outros conflitos surgissem tanto dentro das instituições como em sua relação com as autoridades externas. Com isso, inicia-se um novo movimento em que mestres e estudantes se dispersam para outras regiões, e “(...) novas universidades nasceram por desmembramento, mas somente duas delas mostraram-se duráveis: Cambridge, desde 1209, nascida de uma migração oxfordiana; Pádua, fundada em 1222 pelos doutores e estudantes foragidos de Bolonha.” (TUBINO, 1984, p. 18).

A Universidade de Paris se contrapôs por um tempo a essa organização que lhe retirava a autonomia; contudo, por problemas econômicos, seus universitários não resistiram à ação política que prometia vantagens financeiras e, assim, acabaram por se curvar aos ditames do Estado.

Nesse cenário, enquanto as novas Universidades se preocupavam apenas em cumprir com o acordo firmado com o príncipe de promover um ensino ortodoxo que contribuísse para a ordem social e política, novamente foi instituída uma lista de cursos a serem ofertados pelas universidades, que, contudo, não se efetivaram em todas. A Universidade de Orléans, na França, trabalhava apenas com o Direito; a Teologia era exclusiva de Paris, Oxford e Cambridge, “(...) e mesmo com o surgimento, no final do século XIV, da idéia de que toda universidade deveria ter as “quatro faculdades” tradicionais (Artes, Medicina, Direito e Teologia), eram frequentes aquelas que existiam apenas no papel.” (CHARLE; VERGER, 1996, p. 31).

Na faculdade de “Artes Liberais”, por mais organizada que se apresentava, na prática não houve um modelo único e algumas de suas áreas foram mais dominantes que outras:

> [d]istinguiam-se as três artes do *trivium*, artes das palavras e dos signos (Gramática, Retórica, Dialética) e as quatro artes do *quadrivium*, artes das coisas e dos números (Aritmética, Música, Astronomia, Geometria) e adquiriu-se, então, o hábito de falar da “Faculdade de Artes”, faculdade preparatória e generalizantes. (CHARLE; VERGER, 1996, p. 32).

Deste modo, cada universidade ensinava o que lhe era conveniente. A título de exemplo, para um aprofundamento maior nos estudos de Direito, considerava-se essencial o ensino da Gramática e da Retórica, negligenciando-se os demais conteúdos. Já em Paris e Oxford, o ensino da Gramática não ganhou tanto destaque, pois o foco eram os tratados de lógica de Aristóteles, investindo-se, portanto, nos ensinamentos da Dialética para colaborar com os estudos dos tratados: “[o] século XIII acrescentou um ensino propriamente filosófico aos cursos de Dialética, igualmente baseado em Aristóteles, o Aristóteles da *Física*, da *Metafísica* e da *Ética*, comentado por Avicenas e Averróis.” (CHARLE; VERGER, 1996, p. 32). Portanto, as Universidades, de certa forma, organizavam-se a fim de atender às suas necessidades.

As disciplinas, deste modo, foram sendo moldadas segundo as necessidades daquela época. O ensino do Direito, por exemplo, a princípio, concentrava-se somente na temática civil, porém não era aplicável ao modo que a sociedade medieval estava organizada, razão pela qual

> [a]o Direito Civil acrescentou-se, no decorrer do século XII, o Direito Canônico, repousando simultaneamente na compilação de Graciano (*Decreto*, por volta de 1140) e nas diversas coleções de decisões pontificais (*Decretais*) promulgadas até o início do século XIV. O Direito Canônico, ele próprio imbuído do Direito Romano, foi um instrumento essencial para o reforço da instituição eclesiástica e para a afirmação do primado pontifical. (CHARLE; VERGER, 1996, p. 33).

Com tanta autonomia, os estudantes de Direito eram dispensados de frequentar a faculdade de Artes, enquanto na Medicina considerava-se essencial o estudo da Filosofia. Portanto, para o estudo específico nessas faculdades, eram definidos os textos base, considerados essenciais aos princípios gerais de cada área:

> Prisciano (por volta de 500) na Gramática, Aristóteles na Lógica e na Filosofia, a Bíblia na Teologia, os dois *Corpus* (*juris civilis* e *juris canonici*) no Direito, um conjunto de compósito (tratados hipocráticos, galênicos e árabes) na Medicina constituíam as autoridades essenciais. (CHARLE; VERGER, 1996, p. 34).

Posteriormente, escritos do século XII e XIII, dos grandes mestres Pierre Lombard e Pierre le Mangeur, foram considerados textos modernos e acrescentados aos textos bases de Teologia (CHARLE; VERGER, 1996).

Portanto, o método usado naquele tempo era o escolástico, por ser derivado das escolas anteriores. Com efeito, a pedagogia escolástica estava presente em todas as universidades por meio da leitura dos textos bases, obrigatória aos estudantes e mestres com o propósito de desenvolver a capacidade de autonomia para apresentar os dados contidos nos textos. Com isso, desenvolviam-se entre eles o senso crítico e os debates – as chamadas “disputas”:

> Surgiam debates, que posteriormente “tomou a forma concreta da “disputa”, ou seja, de uma discussão pública organizada entre estudantes sob a direção do mestre (que concluía o debate por meio de uma “determinação”. (CHARLE; VERGER, 1996, p. 34).

Essas “disputas” reuniam públicos diferentes, ora na classe do mestre, ora com toda a faculdade. O tema debatido era escolhido pelo mestre, contudo poderia surgir de questões levantadas pelo público. O método escolástico foi considerado à época importante nesse processo de ensino por estimular a mobilidade das ideias e a competição entre os estudantes.

As disputas, além de promover essa troca de ideias, também eram usadas como um método de avaliação para ascensão aos demais graus acadêmicos:

> O bacharelado na maioria das vezes era obtido dentro da própria escola; ao término das provas, o mestre reconhecia que seu aluno estava bastante adiantado para conduzir ele mesmo algumas leituras e “responder” durante as disputas. A antiga licença era, a partir de então, levada perante um júri de mestres que o chanceler apenas presidia. Eram examinadas “a vida, os hábitos e a ciência” do candidato. Ao final das provas consideradas difíceis (que consistiam em sustentar várias disputas), o novo licenciado poderia, se assim o desejasse, apresentar-se para o mestrado ou para o doutorado (CHARLE; VERGER, 1996, p. 36).

Posteriormente, essa atividade foi desvalorizada por encorajar a exposição de ideias, o que causava grandes transtornos.

> Diante disso, percebe-se claramente que o ensino escolástico era principalmente oral e que os alunos eram avaliados nas disputas. Nestes momentos, o estudante não poderia realizar consultas em anotações ou livros (CHARLE; VERGER, 1996), que desde essa época já tinham seu papel no ensino, pois o mestre disponibilizava o material de estudo e avaliava seus discentes baseado nele: As universidades procuravam facilitar o acesso de seus membros aos livros. Porém, até o século XV, havia bibliotecas apenas nos grandes colégios. Na falta, as universidades colocaram os trabalhos do livro sob seu controle e encorajaram o sistema denominado do *exemplar* e da *pecia* que permita ao mesmo tempo verificar a qualidade dos textos postos em circulação e facilitar o uso simultâneo por vários copistas de um mesmo *exemplar* dividido em cadernos (*pecie*) separados (CHARLE; VERGER, 1996, p. 37).

Mesmo com todo esse cuidado e empenho para facilitar o contato dos alunos com o livro, ele ainda era um produto caro e nem todos conseguiam obtê-lo. Consequentemente, essa escassez de livros é uma das responsáveis por muitas limitações do ensino universitário medieval.

No entanto, não se pode deixar de reconhecer os notórios méritos desse ensino:

> [n]as Artes, os estudos da Gramática e de Dialética, ultrapassando sua pura finalidade instrumental, desdobraram-se, depois de 1250, em Paris, e na sequência, em Oxford, em ensinamentos de lógica formal e de Gramática especulativa em que a Lógica e a Linguística modernas reencontraram algumas de suas intuições (CHARLE; VERGER, 1996, p. 37).

Na área do Direito, por exemplo, houve grandes inovações no ensino medieval a partir de Bolonha, quando foram retomados os estudos do Direito Romano e a elaboração do Direito Canônico.

Na Medicina, os médicos de Bolonha, Pádua ou Montpellier, mesmo sofrendo com altos tributos impostos por Gregos e Árabes, “contribuíram para a profissionalização da atividade médica e mesmo para um estímulo de revalorização da prática cirúrgica.” (CHARLE; VERGER, 1996, p. 38).

A Filosofia, a seu turno, foi reconhecida como a base para o estudo da Teologia, que teve grandes contribuições por Alberto, o Grande, que se trata de uma síntese tomista por levar em consideração as ideias de Tomás de Aquino.

As universidades cujas criações datam após esse período, por volta de 1220-1230, passaram por um processo diferente:

> (...) resultaram de um ato de fundação decidido por autoridades políticas, pelo príncipe ou pela cidade, e confirmado pelo papado. Contrariamente, a existência de uma tradição escolar anterior e a vontade comunitária dos mestres, mesmo que colaborassem para o sucesso, não tinham mais a importância primordial que tiveram em Bolonha, Paris ou Oxford. (CHARLE; VERGER, 1996, p. 23).

Paralelamente a esse contexto educacional vivenciado na Europa central e nórdica, Portugal tentava se estabelecer como um país europeu e suas relações inerentes, o que era dificultado pelo seu isolamento geográfico e cultural:

> Antes dos meados do século XIII, Portugal não se afigurava como um país europeu propriamente dito. Situado na extrema periferia da Europa Ocidental, o país tinha a desvantagem de dificilmente poder comunicar-se com a Europa. Vivia praticamente num estado de isolamento geográfico, que correspondia a um estado de isolamento ou de atraso cultural; as correntes da cultura européia dificilmente chegava a Portugal. E se chegavam, quando chegavam, vinham um tanto tardiamente e um tanto despojadas da força de seus impulsos iniciais. (JANOTTI, 1992, p. 115).

Assim, no reinado de Afonso XIII, entre os anos de 1248 a 1279, Portugal começou a se esforçar para fazer parte da "europeização" nos campos político, econômico, social e educacional; porém, foi durante o reinado de seu filho D. Diniz, em 1290, que o país obteve maior avanço. D. Diniz, ao contrário do pai, foi instruído de forma primorosa por mestres notáveis da época, e, por isso, primou pelo progresso social de Portugal. Assim, o país começou a se desenvolver em diversos campos, inclusive no educacional. Janotti (1992) relata o importante marco nessa área – a fundação da Universidade:

> "Europeização" no campo pedagógico, com a fundação da Universidade: a 12 de novembro de 1288 prelados portugueses suplicavam ao papa que confirmasse a fundação de uma universidade em Lisboa, para o que já contavam com a anuência régia, antes, porém, que o papa concedesse, oficialmente, a autorização solicitada pelos prelados, D. Diniz, a 1º de março de 1290, fundava a Universidade; a 9 de agosto de 1290, pela bula *De statu regni Portugaliae*, Nicolau IV confirmava a fundação dionisiana. (JANOTTI, 1992, p. 118-119).

A Universidade de Lisboa era antes chamada de "Estudos Gerais de Lisboa", transferida para a cidade de Coimbra em 1338. Seus cursos, autorizados pelo papa Nicolau IV, foram: Humanidades, Direito Canônico, Leis, Medicina e Artes (SILVA, 2003, p. 3). A Matemática não fazia parte do rol de cursos ofertados, e assim continuou por muitos anos:

> (...) Em verdade, no século XIII, os estudos da Matemática não estavam bem desenvolvidos na Europa ocidental. Encontramos na Universidade de Bologna o ensino da Matemática e da Astronomia, via obras de Euclides e de Ptolomeu. É verdade a afirmação de que, durante muitos anos, não houve em Portugal quem tivesse interesse em ensinar Matemática na Universidade de Lisboa. Nesse período, tampouco houve alguém que pudesse dimensionar a importância do ensino sério da Matemática aplicada para as necessidades futuras da nação. (SILVA, 2003, p. 4).

Como ocorreu em outros países cristãos, os sacerdotes eram os responsáveis pela transmissão do conhecimento e se organizaram para levar o conhecimento a outros sacerdotes e leigos interessados, ou seja, esse grupo de "professores".

Há carência de documentos que comprovem a organização do ensino superior em Lisboa e, dos poucos existentes, nem todos são autenticados por escrituras originais. Janotti (1992) atribui a escassez de documentos a diversas razões:

> (...) pequeno número das escolas e pouco desenvolvimento delas, destruição de muitos dos antigos cartórios, abandono a que os portugueses vêm

> relegando o estudo dos diplomas medievais dos seus próprios arquivos. (JANOTTI, 1992, p. 174-175).

Nessas condições, notam-se os motivos que obstaram a criação da Universidade em Portugal antes, pois o país não tinha ciência o suficiente da importância da formação intelectual, visto que se tratava de uma nação predominantemente agrária, enquanto a Europa já desenvolvia uma vida urbana.

Outro exemplo de atraso cultural de Portugal à época foi o desenvolvimento literário:

> Em Portugal, a evolução literária foi tão tardia quanto a sua evolução histórica, sendo compreensível, assim, que dificilmente se possa falar de uma literatura portuguesa antes de 1200. No que se refere ao lirismo provençal não padece dúvida com relação ao seu arcaísmo. (JANOTTI, 1992, p. 159).

Segundo Janotti (1992), para se criar uma universidade, as cidades europeias normalmente reuniam duas condições básicas necessárias, a social e a cultural. Em Portugal, a questão cultural era arcaica e a social estava em desenvolvimento, pois o país, frisa-se, era composto basicamente por agricultores, enquanto no restante da Europa havia comunas italianas, francesas e flamengas, “tipicamente urbanas, geradas pelo renascimento do comércio.” (JANOTTI, 1992, p. 192). Silva incrementa o relato sobre essa dinâmica urbana propício à instalação das universidades:

> O século XII foi um século de grande desenvolvimento urbano na Europa ocidental. Artesãos, intelectuais etc. organizaram-se em um gigantesco movimento corporativo, que culminou com o grande movimento comunal. (...) Os estudiosos (mestres e discípulos) também agiram dessa forma. No século XIII, as corporações urbanas de estudiosos passaram a dar lugar às universidades européias” (SILVA, 2003, p.3).

Esse movimento de desenvolvimento da Europa impulsionou Portugal a também desenvolver-se – daí a expressão “europeização” de Portugal –, ainda que em condições diversas das dos demais países europeus.

Por certo, Portugal passou por diversos problemas ao longo do seu processo de “europeização”, desde a falta de profissionais qualificados para ministrar aulas até problemas de deslocamentos da sede de sua Universidade, o que seguramente trouxe prejuízos para o desenvolvimento cultural da comuna:

> De fato, de todas as universidades, a portuguesa foi a que mais “migrou”: de 1290 a 1308 esteve em Lisboa; transferida em 1308, permaneceu em Coimbra até 1338; voltou a Lisboa de 1338 a 1354; novamente em Coimbra de 1354 a 1377; novamente em Lisboa de 1377 a 1537, e, definitivamente,

> em Coimbra a partir de 1537. Essas contínuas deslocações são, antes de mais nada, um indício da própria fraqueza cultural da Universidade, pois elas nunca estiveram relacionadas com um problema de caráter pedagógico ou com algum motivo de ordem intelectual ou, ainda, de defesa de privilégios; não deram origem a nenhuma outra universidade, ao contrário do que aconteceu na Europa, onde metade das suas universidades surgiu como consequência de tais migrações; diferentemente das migrações das demais universidades, elas não foram atos da livre vontade de mestres e alunos, e sim da iniciativa dos monarcas. (JANOTTI, 1992, p. 214).

Em vista disso, percebemos que a Universidade portuguesa inicialmente não se destacou, nem adquiriu fama, ao contrário das demais universidades da Europa, e sua existência, a princípio, não garantiu demonstrações importantes para o desenvolvimento do país, pois com tantas mudanças “chega-se à conclusão de que os reis de Portugal consideravam a Universidade “um órgão do Estado e um anexo da corte – concepção que é única na história das universidades medievais.” (JANOTTI, 1992, p. 214).

O retorno da Universidade para Lisboa, em 1377, propiciou a conquista de maior prestígio cultural e científico ante a comunidade acadêmica, visto que o rei dom Fernando I (1345-1383) decidiu por convidar bons mestres para atuar na Universidade a fim de atrair mais alunos para a instituição. No entanto, os convidados só se dispuseram a residir em Lisboa, o que motivou a mudança de Coimbra para Lisboa. Outro fato que fortaleceu a instituição foi que “posteriormente, o rei dom João I criou o cargo de protetor de estudos para a Universidade de Lisboa” (SILVA, 2003, p. 6).

Mesmo com o crescimento do prestígio da Universidade em Portugal, os estudos da Matemática permaneceram fora do rol de cursos nesse país até 1431, quando “Dom Henrique criou na instituição as chamadas ‘artes liberais’, em cujo conjunto se ensinava Aritmética, Geometria e Astrologia.” (SILVA, 2003, p.6).

Contudo, há grandes elementos históricos de que as artes liberais (*trivium:* Gramática, Retórica e Dialética e *quadrivium:* Aritmética, Geometria, Música e Astronomia) não teriam sido efetivamente ensinadas nessa época na Universidade em Portugal. Segundo Janotti (1992), “só encontramos referências às disciplinas do *trivium* – e assim mesmo de um *trivium* incompleto –, pois das “disciplinas do quadrívio não há vestígios nas escolas portuguesas anteriores à fundação da Universidade.” (JANOTTI, 1992, p. 199).

Essa situação começou a se alterar em Portugal com o rei dom Manuel I (1469-1521), que se sentiu motivado a criar uma cadeira de Astronomia na Universidade de Lisboa, que também contemplava conhecimentos matemáticos, por conta da “chegada de Vasco da Gama à Índia e de Pedro Álvares Cabral ao Brasil, para impulsionar o desenvolvimento da ciência e da prática da navegação marítima (...).” (SILVA, 2003, p. 6). Nessas condições, Portugal começou uma nova fase na sua história:

> Partia assim Portugal para a descoberta geográfica do Mundo, sem antes ter completado a descoberta cultural da Europa, procurando compensar as desvantagens da sua “mais longínqua gravitação no sistema da Europa culta, pelas vantagens de uma atração mais decisiva, exercida pelas ilhas misteriosas e pelas riquezas da costa africana.” (JANOTTI, 1992, p. 219).

Motivados pelos descobrimentos de novas terras, Portugal investiu na formação intelectual e a última transferência da Universidade de Lisboa para Coimbra, em 1537, propiciou o surgimento de uma nova instituição, com novos objetivos: a Universidade de Coimbra. Seguindo o padrão das demais Universidades europeias, as cadeiras de Matemática e Astronomia foram introduzidas e ocupadas pelo matemático português Pedro Nunes que, em Coimbra, ensinou: “(...) Geometria Euclidiana; o Tratado da Esfera, de Sacrobosco; a Teoria dos Planetas, de Purbáquio. Em Lisboa, ele ministrou aulas em apoio à formação de pilotos marítimos.” (SILVA, 2003, p. 8).

Pedro foi importantíssimo para as questões de navegação de Portugal, tendo sido consultado por várias vezes pelos navegadores:

> (...) o matemático português estudou e resolveu, entre outros, os seguintes problemas que eram cruciais para a época: duração do dia e da noite, transformação de coordenadas astronômicas, determinação do tempo pelas observações da altura e azimute do Sol e das estrelas e a duração dos crepúsculos para um dado local da Terra e uma posição dada do Sol. (SILVA, 2003, p. 8).

Dos estudos de Pedro Nunes, infere-se que a navegação foi a motivação para o desenvolvimento da Matemática na Universidade portuguesa.

Após se firmarem na Espanha, Itália, França, Alemanha, no norte da Europa e, tempos depois, em Portugal, as instituições universitárias começaram a se fixar nas colônias europeias situadas nas Américas do Norte e Latina por volta de 1636:

> (...) ensinando principalmente Teologia e Direito Canônico, as universidades da América Latina eram claramente fundações coloniais e missionárias. (...) No Brasil, não houve nenhuma. Na América do Norte, as primeiras universidades, sob a forma de colégios (...), foram Harvard (1636), Williamsburg (1693) e Yale (1701). (CHARLE; VERGER, 1996, p. 42).

Com o retrospecto da história das primeiras Universidades do mundo, é possível apontar algumas situações que lembram nosso atual sistema educacional, como a regulamentação para padronizar as ações dos estabelecimentos de ensino (*v.g.*, a edição da Lei de Diretrizes e Bases – Lei 9.394/96 – e dos Parâmetros Curriculares Nacionais), sejam eles públicos ou privados.

Com efeito, percebe-se que a organização daquelas instituições evoluiu a partir de novas necessidades, movendo a comunidade acadêmica e confirmando, mais uma vez, que o homem tem necessidades culturais emergidas a partir de sua interação com o meio.

Em razão dos vínculos que o Brasil historicamente manteve com França e Portugal, é possível afirmar que o sistema educacional brasileiro é influenciado, em diversos aspectos, pela organização cultural e científica desses dois países, em especial por Portugal, visto que inicialmente a educação no Brasil foi de responsabilidade portuguesa. É o que se passa a discutir.

1.2 A EDUCAÇÃO FORMAL NO BRASIL: DA ESTRUTURAÇÃO À CONSOLIDAÇÃO DA UNIVERSIDADE

Não há ensino superior brasileiro, nem em qualquer outra parte do mundo, sem antes haver ensino secundário. Portanto, para o entendimento de como e por que foi criada a Universidade, é necessário conhecer o movimento de constituição da educação no nosso país, visto que o ensino superior foi um desdobramento do ensino secundário, assim como se deu nos demais países aludidos nesta pesquisa.

O princípio da educação no Brasil deu-se com a Educação Jesuítica, marco histórico que influenciou consideravelmente na organização do ensino do país: “[d]esde que chegaram no Brasil, os jesuítas estabeleceram escolas e começaram a ensinar a ler, a escrever e a contar e cantar” (LOPES; FARIA FILHO; VEIGA, 2003, p. 43):

> A sociedade portuguesa tinha uma estrutura rígida, centrada na hierarquia, fundada na religião. Hierarquia e religião era princípios inadiáveis em qualquer situação. (...) Por isso, não há do que se espantar com o colégio jesuítico em terras brasílicas: baluarte erguido no campo da batalha cultural, cumpria com a missão de preservar a cultura portuguesa. (LOPES; FARIA FILHO; VEIGA, 2003, p. 45).

Com este propósito, a educação começa a se desenvolver no país, de acordo com as concepções portuguesas. O restante do continente americano dispunha de Universidades desde o século XVI, pois várias instituições espanholas foram instauradas no continente, que inicialmente atuavam nas áreas da Filosofia, Direito e Teologia, e, tempos depois, na Medicina. Os locais de fundação dessas instituições foram, portanto, territórios ocupados pela colonização espanhola, a saber, México, Peru, Argentina, Chile, entre outros, diferentemente do Brasil, colônia de Portugal, que não fomentava o ensino superior aqui:

> (...) Portugal bloqueava o desenvolvimento do ensino superior no Brasil, de modo a manter a colônia incapaz de cultivar e ensinar as ciências, as letras e as artes. De um lado, a coroa concedia bolsas para brasileiros irem estudar em Coimbra, mas não queria que esses estudos fossem feitos aqui. Em 1800, por exemplo, a coroa instituiu, como prêmio, quatro bolsas de estudo para jovens brasileiros em Coimbra: duas em matemática, uma em medicina e outra em cirurgia. Por outro lado, em resposta a um requerimento com a pretensão de se instalar um curso de medicina na região de Minas, disse o Conselho Ultramarino, em 1768, fundamentando a negativa, que “um dos mais fortes vínculos que sustentava a dependência das colônias era a necessidade de vir estudar em Portugal”. (CUNHA, 1980, p. 12).

Em vista disso, e em meio a esses argumentos de dominação ora tratados, há outros fatos que reforçam a ausência de Universidades no Brasil.

A população de Portugal era substancialmente menor que a da Espanha, fazendo com que Portugal dispusesse apenas de uma Universidade realmente consolidada – a de Coimbra –, ao passo que a Espanha contava com várias Universidades, entre elas a de Salamanca, considerada de “grande porte para a época, com 6 mil alunos e 60 cátedras.” (CUNHA, 1980, p. 13). Diante desse cenário, era mais penoso para Portugal o envio de verbas para a educação, pois isso poderia prejudicar o desenvolvimento de suas atividades universitárias internas.

Além disso, Portugal foi o responsável pela ocupação das terras brasileiras e, para garantir sua expansão, assim como os demais países colonizadores, tomou algumas providências para que o domínio das terras e de tudo que pudesse delas ser extraído fossem reservados a ele:

> O “descobrimento” do Brasil deu-se no bojo de um amplo processo de expansão econômica e política de certos estados europeus, principalmente a Espanha, Portugal, a França, a União das Províncias dos Países Baixos e a Inglaterra, buscando fora de suas fronteiras mecanismos de superação das limitações das relações sociais feudais. (CUNHA, 1980, p. 19).

Com este ideal de dominação, só era permitido no porto brasileiro navios com a bandeira portuguesa. A administração "(...) era centralizada na metrópole; impunha o monopólio no comércio das colônias; e, coroando isso tudo, exercia forte controle fiscal sobre as operações comerciais internas e externas." (CUNHA, 1980, p. 20).

A metrópole portuguesa tinha o apoio do exército e da marinha, que, além de vigiar para que a exploração econômica da Colônia fosse exclusiva de Portugal, deveriam combater

> (...) o contrabando (obrigando, assim, ao pagamento das taxas alfandegárias); impondo o trabalho compulsório; fazendo cumprir as ordenações da metrópole; reprimindo as iniciativas autonomistas; dando força aos cobradores de impostos. Essa base militar amparava, assim, uma estrutura administrativa de caráter predominantemente jurídico e fiscal (CUNHA, 1980, p. 21).

O monopólio português, no entanto, dominava não só a exploração econômica, como também a instrução, em que os jesuítas, vindos de Portugal, tinham que cumprir três funções: formar padres para ajudar na orientação religiosa da população; formar sujeitos que colaborassem com o aparelho repressivo imposto sobre a Colônia e, por fim, instruir os residentes da classe dominante, ou seja, os filhos e proprietários de terras e minas, mercadores, entre outros.

Esses foram os motivos e as necessidades que levaram a Coroa portuguesa a constituir as primeiras instituições de ensino no Brasil. Em 1540, foi criada a Companhia de Jesus, que estabeleceu normas padronizadas e sistematizadas no *Ratio Studiorum:*

> O *Ratio Studiorum,* (...) estabelecia em pormenores o currículo do colégio. A *Gramática média;* a *Gramática superior;* as *Humanidades;* a *Retórica.* Havia ainda a *Filosofia* e a *Teologia* para quem se preparasse para o sacerdócio. A presença greco-romana é incontestável. (LOPES; FARIA FILHO; VEIGA, 2003, p. 44).

O currículo era único, porém dividido em dois graus, o *studia inferiora* e *studia superiora*. O primeiro tratava do ensino secundário, que considerava o ensino da língua latina como essencial, e o segundo, o superior, que tratava dos conhecimentos de Filosofia e Teologia.

O primeiro Colégio Jesuíta no país foi fundado em 1550, na Bahia, que, além do ensino secundário, ofertou, alguns anos depois, os "cursos superiores" de Humanidades, em 1553, e de Artes e Teologia, em 1572. Com isso, a Câmara

Municipal da Bahia, em 1662, solicitou que a formação dada por este colégio fosse equivalente aos cursos oferecidos pelos colégios jesuítas da cidade de Évora, em Portugal. Chamados a dar parecer sobre a questão, os dirigentes da Universidade de Coimbra opuseram-se à extensão do privilégio. (CUNHA, 1980).

Essa oposição deu-se por conta de uma divergência entre a Universidade de Coimbra e a Escola de Évora, motivado pelo desejo de Coimbra do monopólio do ensino superior, rivalidade esta que prejudicou a criação do ensino superior no Brasil. Mais tarde, outra rivalidade se inicia entre o Estado português e os jesuítas, por conta do modo de admissão. Segundo os jesuítas, sua missão era admitir os indígenas e aqueles que julgassem aprovados para cursar o ensino superior, enquanto que para o Estado a admissão deveria ser ampliada, pois o ensino era custeado por ele. Depois de muitas discussões e reflexões, os jesuítas cederam.

Os colégios jesuítas, então, começaram a se espalhar, sendo fundados no Rio de Janeiro (RJ), em Olinda (PE), e, algum tempo depois, no Recife (PE), em São Luís (MA), em Belém (PA) e nas vilas de São Paulo de Piratininga e Santos (SP). Com tantos colégios em todo o país, “(...) o da Bahia foi não só modelo para os outros, até a expulsão dos jesuítas, em 1759, como também apresentou inovações inéditas, como foi o caso da organização, no século XVIII, de uma faculdade de Matemática.” (CUNHA, 1980, p. 34).

Temos, então, os primeiros elementos históricos de um ensino voltado exclusivamente para a Matemática. No entanto, não há muitos registros sobre esse fato, o que nos leva a inferir que o ensino da Matemática, apesar de bastante desenvolvido pelos jesuítas na Bahia, foi pouco reconhecido.

O último curso criado pelos Jesuítas foi em Mariana, em Minas Gerais, no Seminário de Nossa Senhora da Boa Morte, em 1750. Deu-se em virtude de um pedido do bispo local ao rei, justificado pelas altas despesas de deslocamento para os colégios existentes. “Conseguindo autorização e recursos, o bispo encarregou os jesuítas da administração do seminário e estes, a partir de 1753, instalaram os cursos de Filosofia e Teologia.” (CUNHA, 1980, p. 36-37). Azevedo (1894) relata o ideal dos ensinamentos da Companhia de Jesus:

> A Companhia de Jesus não se limitava a doutrinar a todos com a palavra cristã, edificando-os com os sacramentos e os exemplos de suas virtudes nem empregava somente os meios religiosos para difundir o Evangelho e assegurar a coesão moral e a fidelidade das tribos catequizadas: investia contra a prepotência e os abusos dos colonos; desencadeava a ofensiva

> contra a dissolução dos costumes, com que, pela acessibilidade as índias e pela escassez de mulheres brancas, se abalava até os seus fundamentos a estabilidade social. (...) (AZEVEDO, 1894, p. 247).

Com efeito, observa-se que o trabalho dos jesuítas teve grande influência na formação cultural e moral do Brasil, entretanto, eles teriam sido expulsos da Colônia pelos mesmos motivos, pois defendiam os índios e os seus costumes. A expulsão dos jesuítas desarticulou o sistema educacional da Colônia: todos os colégios, seminários, missões, entre outros espaços ocupados pelos jesuítas para a instrução, foram fechados.

A fim de prosseguir-se com as instruções no país, posteriormente foram criadas as aulas régias, com "(...) aulas de grego, hebraico, filosofia, teologia, retórica e poética, desenho e figura, aritmética, geometria, francês, quase todas independentes, funcionando em locais distintos." (CUNHA, 1980, p. 55). De certa forma, essas aulas assemelhavam-se ao trabalho desenvolvido pelos jesuítas, mas sem um espaço próprio. No entanto, as necessidades da Colônia os levaram a repensar essa instrução:

> Em 1776, os frades franciscanos criaram, autorizados por alvará régio, um curso superior no Convento de Santo Antônio do Rio de Janeiro. Era, na realidade, uma faculdade, organizada conforme a Universidade de Coimbra, já nos moldes da reforma pombalina. (CUNHA, 1980, p. 57).

A reforma pombalina foi um processo dividido em etapas distintas, de implantação e de consolidação da prática na Universidade de Coimbra, lembrando que a organização do ensino no Brasil era moldada segundo essa Universidade, levando à extensão dessa reforma ao Brasil.

A renovação deu-se inicialmente pelos Estudos Menores (que correspondiam ao ensino secundário), que se iniciaram em Portugal no ano de 1759. Uma das mudanças foi a de que a educação não mais seria coordenada por membros religiosos, e sim pelos órgãos governamentais (FONSECA, 2011). Outra alteração foi no currículo implantado, que se baseava nas aulas de humanidades; as primeiras disciplinas criadas foram:

> (...) Gramática Latina, Língua Grega, Língua Hebraica, Retórica e Poética, mas depois outras foram criadas. As *Aulas de primeiras letras* – de ler, escrever e contar –, que correspondiam ao ensino primário, foram contempladas na segunda fase, ocorrida em 1772. (FONSECA, 2011, p. 76).

Nesse período, no Brasil, o ensino secundário, ou Estudos Menores, como era chamado na época, funcionava no convento do Rio de Janeiro, e os alunos que o concluíssem estavam habilitados a cursar os Maiores, ou seja, o ensino superior.

Com efeito, a segunda fase, em 1772, além de contemplar o ensino primário, também tratou dos Estudos Maiores, em que se propunha a elaboração de novos estatutos para a Universidade de Coimbra, para que houvesse dois cursos "superiores" de Filosofia e Teologia no Brasil. (FONSECA, 2011).

Neste processo de reforma, em 1798, foi elaborado "(...) em Lisboa os Estatutos do Seminário Episcopal Nossa Senhora da Graça de Olinda" (CUNHA, 1980, p. 59). Com o objetivo de formar cidadãos cristãos que colaborassem com o desenvolvimento da sociedade, o bispo Azeredo Coutinho, que tinha grandes conhecimentos em diversas áreas, doutrinava seus alunos a pensar em soluções práticas para seus problemas cotidianos, como abrir canais para levar a água até as suas plantações. Os estudos do seminário começavam pelo curso de Gramática, depois Retórica, Filosofia, Geometria e, por fim, Teologia.

Mais tarde, em 1808, com a transferência da sede do poder para o Brasil, foi necessário criar um ensino superior diferente do até então construído na Colônia. "A partir de 1808, foram criados cursos e academias destinados a formar burocratas para o Estado e especialistas na produção de bens simbólicos; como subproduto, formar profissionais liberais." (CUNHA, 1980, p. 67).

Os cursos oferecidos inicialmente, nessa nova proposta, eram os de Medicina e Cirurgia, que surgiram nos hospitais militares. A finalidade era formar profissionais para a Marinha e o Exército. Nesse contexto, os conteúdos matemáticos só foram usados quando se percebeu que seriam úteis para o exercício da guerra, ou seja, o motivo para estudar Matemática era ajudar na arte da guerra. Todavia, outras necessidades surgiram e "[o]utros cursos foram criados para a formação de profissionais não militares para a burocracia do Estado, como os de agronomia, de química, de desenho técnico, de economia política e de arquitetura." (CUNHA, 1980, p. 68).

O novo Ensino Superior, ou Estudos Maiores, surgiu na forma de aulas e cadeiras, e nesse período: "foram criadas as cadeiras de anatomia (no Rio de Janeiro) e cirurgia (no Rio de Janeiro e na Bahia). Elas funcionaram nos prédios dos antigos colégios dos jesuítas das duas cidades, que (...) foram utilizados como hospitais militares." (CUNHA, 1980, p. 100).

No período de 1808 até 1820, com a volta de João VI para Portugal por conta da Revolução Constitucionalista, o Brasil passou de Colônia a Reino Unido e, por isso, o rei de Portugal era também considerado rei nas terras brasileiras. Entretanto,

> Na volta a Portugal o rei, "prisioneiro das cortes" (parlamento), não foi acompanhado pelo aparelho de Estado que para cá trouxe. Este permaneceu aqui, como seu filho Pedro, quem, por conselho paterno, acabou tomando para si a coroa, proclamando a independência do Brasil, "antes que algum aventureiro o fizesse". Por isso, é possível dizer que o Estado Nacional tem sua origem, no Brasil, não em 1822, mas em 1808. (CUNHA, 1980, p. 76).

Essas mudanças políticas afetaram a Educação; contudo, no Ensino Superior as mudanças não foram tão significativas, pois mantiveram-se os cursos existentes e impulsionou-se a formação de burocratas por meio da criação de mais dois cursos de Direito, um em São Paulo e o outro em Olinda, "prevalecendo a corrente que defendia a localização das academias fora do Rio de Janeiro e naquelas províncias onde foi mais forte o movimento pela independência." (CUNHA, 1980, p. 112):

> As modificações mais notáveis foram a criação da Escola Politécnica, em 1874, no Rio de Janeiro, e a da Escola de Minas de Ouro Preto, um ano depois. A primeira nasceu da Escola Militar e a outra, da vontade do imperador, ambas num período em que (...) construíram-se estradas, portos, serviços públicos de iluminação a gás, abriam-se fábricas de tecidos, de produtos alimentícios e químicos. (CUNHA, 1980, p. 76-77).

As motivações e necessidades mudam à medida que os anos passam; no entanto, as mudanças políticas não afetaram na oferta do ensino superior, pois ele era necessário para continuar com o desenvolvimento do país. Apesar disso, as instituições como a Academia Real Militar passaram por várias reformas tanto no nome como no regulamento para atender a essas novas necessidades. (CASTRO, 1992). Em uma dessas mudanças, em 1839, passou a ser chamada de Escola Militar e, em 1858, Escola Central, e ainda sim continuava sendo a responsável pelo ensino básico de Matemática, Ciências naturais e Físicas.

Nesse período, houve, ainda, a criação da "fazenda da lagoa Rodrigo de Freitas, no Rio de Janeiro, Horto Real, depois Jardim Botânico, protótipo dos que viriam a ser criados, mais tarde, na Bahia, em São Paulo, em Pernambuco e em Minas Gerais." (CUNHA, 1980, p. 114). O jardim botânico da Bahia tornou-se escola de agricultura, em 1812, com curso de duração de dois anos. Na sequência, em 1816, foi criada a Escola Real de Ciências, Artes e Ofícios,

> (...) que deveria reunir, num conjunto difícil de imaginar, os estudos de ciências como a matemática, a física, a química, a biologia e a botânica, à prática de ofícios “mecânicos” como a ferraria e a marcenaria e ao cultivo das artes ornamentais e da arquitetura. (CUNHA, 1980, p. 116).

No entanto, essa escola não chegou a funcionar e foi recriada em 1820, como Real Academia de Desenho, Pintura, Escultura e Arquitetura Civil e, apenas em 1824, firmou-se como Academia de Belas-Artes, contando com a colaboração de artistas franceses para a formação cultural:

> A influência cultural francesa chegou ao Brasil primeiro via Portugal pombalino, depois via missão artística e obras educacionais do príncipe regente, culminando, por múltiplas vias, no Império, quando um Aluísio de Azevedo afirmava que, incontestavelmente, “a França é a sede do pensamento humano”. (CUNHA, 1980, p. 132).

Outros cursos foram criados nesse período – Economia Política, Química, História, Desenho, Música e o de Matemática Superior, criado em Pernambuco, no ano de 1889; porém, não duraram muito tempo.

Vale lembrar que antes da proclamação da Independência, a educação escolar no país era ofertada somente pelo “Estado” (poder público); portanto, os estabelecimentos ditos particulares eram excepcionais.

Entretanto, “(...) depois da independência, formaram-se dois setores, o do ensino estatal (secular) e o do ensino particular (religioso e secular).” (CUNHA, 1980, p. 86). A medida foi estabelecida pelo Ato Adicional de 1834, emanado pelo Império no Brasil.

O ensino público foi dividido em duas esferas, a nacional e provincial, a primeira era responsável pelo ensino primário e médio, no município da corte, e superior em todo o país, e a segunda se dedicava ao ensino primário e médio nas províncias. (CUNHA, 1980, p. 87). Portanto, o Ato Adicional de 1834 trouxe sinais de federalismo, e a esfera nacional prolongou seu poder, indiretamente, à esfera provincial e ao setor particular. Outro desdobramento desse Ato foi o de que “(...) algumas províncias passaram a reunir as aulas avulsas em escolas de currículo seriados. Começaram a surgir os liceus provinciais: o Ateneu do Rio Grande do Norte, em 1835, e os liceus da Bahia e da Paraíba, em 1836.” (CUNHA, 1980, p. 126):

> Em 1837, foi criado, no Rio de Janeiro, o Colégio Pedro II, para ministrar ensino secundário. O colégio era administrado diretamente pelo poder central e o ensino nele ministrado era considerado adequado para que seus ex-

> alunos se matriculassem em qualquer curso superior do Império. Abriu-se, assim, uma outra via de acesso ao ensino superior. (CUNHA, 1980, p. 126).

A expansão dos colégios estatais era controlada pelo poder central, porém, a do ensino privado não, o que gerou algumas reflexões, pois também era necessário regular esse crescimento. Houve opiniões opostas sobre esse pensamento: “uma corrente defendia o controle de todo o ensino pela universidade (CUNHA, 1980, p. 89). A outra defendia que se deveria criar órgãos burocráticos especialmente para isso. Essa última corrente prevaleceu e “(...), em 1849, foi criado um órgão desse tipo na Província do Rio de Janeiro e, em 1854, no Município Neutro, medida que, a partir dessa data, foi sendo estendida às demais províncias do império.” (CUNHA, 1980, p. 89-90).

De volta especificamente ao Ensino Superior, em meados do século XIX, houve uma disputa entre liberais e positivistas sobre a criação da universidade no país. O primeiro grupo considerava uma importante tarefa no campo educativo a criação de uma universidade no Brasil: “(...) A universidade teria a função de formar ‘uma elite preparada e competente, capaz, não de traduzir as aspirações populares, mas de desenvolvê-las e incentivá-las’” (CUNHA, 1980, p. 94).

Os positivistas Miguel Lemos e Teixeira Mendes, a seu turno, opunham-se, alegando que “a universidade seria uma iniciativa contrária à liberdade de ensino que pregavam, ainda mais porque, sob o controle direto do imperador, seria previsível o predomínio das doutrinas católicas.” (CUNHA, 1980, p. 138). Esta última ideia prevaleceu, e a criação da Universidade foi adiada.

As ideias positivistas, contudo, ganharam força e começaram a ser lançadas no Brasil por volta dos anos de 1850. O lançamento do “livro de Antônio Ferrão Moniz de Aragão, *Elementos de Matemática*, publicado na Bahia em 1858, foi, talvez, a primeira obra de um brasileiro na perspectiva positivista.” (CUNHA, 1980, p. 97). Certamente, a publicação desse livro foi considerada um marco para o ensino da Matemática, pois até então não se tinham registros de livros de Matemática brasileiros. Seu surgimento, por certo, deu-se pelo fato de que era necessário materializar de alguma forma o olhar positivista para o ensino da Matemática, o que nos leva a pensar que esse foi o motivo de sua publicação.

Neste mesmo ano, a Escola Central oferecia cursos de Engenharia Civil e de Engenharia Geográfica. O termo “civil” era usado para diferenciar as engenharias, considerando que naquele período existia a engenharia “militar”. Todavia, “(...)

somente em 1874 que o ensino de engenharia passou a ser totalmente realizado em estabelecimento não militar e voltado para objetivos não militares." (CUNHA, 1980, p. 104). Neste ano,

> (...) a Escola Central passou para a administração do Ministro do Império, com o nome de Escola Politécnica, destinada ao ensino de engenharia "civil". Ela formava quatro especialidades de engenheiros: engenheiro civil, de minas, geógrafo ou industrial, e duas especialidades de bacharéis, em ciências físicas e naturais e em ciências físicas e matemáticas. Esses bacharéis tornavam-se, provavelmente, professores de física, química e matemática das escolas secundárias. (CUNHA, 1980, p. 105).

A Matemática estava tão presente nesses cursos de bacharelados que possibilitou aos sujeitos formados ministrar aulas da matéria no ensino básico, pois não havia um curso específico para formar professores dessa área, visto que esses profissionais formados na Escola Central supriam as necessidades existentes.

O curso oferecido pela Escola Central era voltado para a engenharia; contudo, o aluno poderia optar em um determinado momento por uma das quatro especialidades da engenharia ou uma das duas especialidades de bacharelado. Os dois primeiros anos eram considerados 'curso geral' e, após, os alunos deveriam escolher qual das áreas seguiriam: engenharia ou bacharelado. O currículo geral e o de bacharelado em ciências físicas e matemáticas são apresentados a seguir, por compor o foco desta pesquisa:

> *Curso Geral*
> 1º ano: álgebra (teoria geral das equações e teoria e uso de logaritmos), geometria analítica, geometria no espaço, trigonometria retilínea, física experimental, meteorologia, desenho geométrico e topográfico;
> 2º ano: cálculo diferencial e cálculo integral, mecânica racional e aplicação às máquinas elementares, geometria descritiva, trabalhos gráficos a respeito da solução dos principais problemas de geometria descritiva, química inorgânica, noções gerais de mineralogia, botânica, zoologia. (CUNHA, 1980, p. 106)
>
> *Curso de ciências físicas e matemáticas*
> 1º ano: séries, funções elípticas, cálculo diferencial e integral (continuação), cálculo das variações, cálculo das probabilidades e suas aplicações (tábuas de mortalidade, juros compostos, amortização pelo Sistema Price, Sociedades Tontinas, seguros de vida), geometria descritiva aplicada à perspectiva, sombras e estereotomia, mineralogia e geologia;
> 2º ano: trigonometria esférica, astronomia (observações astronômicas e cálculos de astronomia prática), construção e desenho de cartas geográficas, topografia, geodésia, hidrografia;
> 3º ano: mecânica celeste, física matemática, mecânica aplicada às máquinas em geral e cálculos dos seus efeitos, máquinas a vapor; trabalhos gráficos e concursos. (CUNHA, 1980, p. 106-107).

Denota-se que nem mesmo o curso de Ciências Físicas e Matemáticas tinha como objetivo o ensino da Matemática, o que se conclui a partir dos conteúdos ministrados, que tinham como foco apenas os conceitos matemáticos e suas aplicações. Esses conceitos abordados tinham um motivo para compor essa lista de conteúdos: eles eram usados para suprir as necessidades do país relacionadas à navegação, usando a astronomia e desenho de cartas geográficas para se localizar, ou à noção de mecânica, trigonometria e hidrografia para a construção de barcos. Assim, é fácil perceber a motivação para a organização desse curso e dos demais que iam sendo criados.

No ano seguinte à criação da Escola Politécnica, foi fundada a Escola de Minas em Ouro Preto, em 1875, na época a capital da província. Com a criação dessa escola, o curso de Engenharia de Minas da Escola Politécnica foi extinto em 1899.

Em 1885, foi instituído o currículo para o curso de engenharia de Ouro Preto, com duração total de seis anos, em que os três primeiros consistiam no 'curso geral' e os demais anos no curso superior. Aquele que concluísse o segundo ano do curso geral recebia o título de agrimensor; aos que concluíssem o currículo todo, era concedido o título de Engenheiro de Minas. Veja-se o programa de disciplinas do curso geral, por nele conter os conteúdos matemáticos:

> Curso Geral
> 1º ano: aritmética, geometria, álgebra, trigonometria elementar, noções de física e química, desenho de imitação;
> 2º ano: complementos de álgebra, cálculo das derivadas, geometria analítica (2 e 3 dimensões), complementos de trigonometria retilínea, geometria descritiva (linha reta e plano), agrimensura, cosmografia, topografia elementar, química de metalóides, físicas (calor, magnetismo, eletricidade), zoologia, épuras, trabalhos práticos de química, de física e de zoologia, desenho de imitação e topografia, prática de trabalhos de campo;
> 3º ano: cálculo diferencial e integral, mecânica racional, trigonometria esférica, geometria descritiva (planos tangentes e interseções de superfícies), química de metais e orgânica, física (acústica e luz), botânica, épuras, trabalho prático de química, de física e de botânica, desenho de imitação. (CUNHA, 1980, p. 110).

Os cursos ditos de ensino superior estavam estruturados segundo as necessidades da época e observa-se claramente o quanto a Matemática esteve presente desde o início desse processo de constituição e organização da educação no Brasil. Em alguns momentos, nota-se uma luta em busca da criação da Universidade, porém fracassada por questões políticas. Nesse contexto, a Matemática também se manifesta rumo à sua autonomia com a mencionada publicação do livro

Elementos de Matemática, em 1858, um verdadeiro marco por ser o primeiro da área no país. Contudo, o foco ainda se concentrava na formação de engenheiros, pois a necessidade daquele momento era a Fortificação, curso que será discutido mais adiante.

Ao conhecer o movimento de constituição das universidades na Europa, é perceptível que o que moveu a criação oficial das primeiras universidades foram os interesses políticos, pois as instituições surgidas a partir de interesses culturais ainda não contavam com o apoio dos governos. Ao nos depararmos com o desenvolvimento da educação no Brasil, é visível que sua organização não foi diferente.

Com a Proclamação da República, em 1889, e as influências positivistas se consolidando, o sistema de ensino, entretanto, começa a mudar. O ensino superior começa a ser uma necessidade do novo período, rumo à criação das primeiras Universidades brasileiras, tema sobre o qual se passa a discorrer.

1.2.1 O estabelecimento da Universidade no Brasil

Prosseguindo com o relato cronológico dos fatos, no período da República Velha, que perdurou de 1889 a 1930, "(...) surgiram as escolas superiores livres, isto é, não dependentes do Estado, empreendidas por particulares. (...) Esse fenômeno foi produto de determinações técnico-econômicas (...)" (CUNHA, 1980, p.146-147). Isso ocorre por conta da influência do positivismo, da necessidade de mão de obra com alta escolaridade e da mudança paulatina dos princípios ideológicos da época.

Além disso, "(...) nesse período que surgiram os primeiros estabelecimentos de ensino superior do Brasil com o nome de universidade, sendo a do Rio de Janeiro (1920) e a de Minas Gerais (1927) as que vingaram." (CUNHA, 1980, p.147). Mais à frente, pormenorizar-se-á como se deu a criação dessas Universidades, concomitantemente à criação de outras que tiveram curta existência.

Antes, é preciso conhecer as questões sociais e políticas desse período, a fim de compreender o que influenciou na criação das Universidades. Cunha (1980) elucida esse cenário:

> A República foi proclamada por um golpe de Estado, no desfecho de uma conspiração que reuniu liberais, como Rui Barbosa, positivistas, como o Coronel Benjamin Constant, e monarquistas ressentidos, como o Marechal Deodoro da Fonseca. A Constituição promulgada em 1891 resultou de

> conflitos e composições de liberais (Rui Barbosa foi seu principal redator) e positivistas. (CUNHA, 1980, p.152).

A influência do positivismo na política educacional da República que nasceria em 1891 resultou da presença de militares na Assembleia Constituinte e da atuação pessoal de Benjamin Constant como Ministro da Instrução Pública, Correios e Telégrafos, em 1890 e 1891. (CUNHA, 1980). Com efeito, o artigo 34 da recém-proclamada Constituição de 1891 sofreu fortes influências positivistas:

> A República não admite privilégio de nascimento, desconhece foros de nobreza e extingue ordens honoríficas existentes e todas as suas prerrogativas, bem como os títulos nobiliárquicos e de conselho. (CUNHA, 1980, p. 169).

Por outro lado, no mesmo artigo (inciso 30) deliberou-se que era de responsabilidade do Congresso Nacional estabelecer a organização do ensino superior na capital federal, contrariando os positivistas, que alegavam que essa atribuição ao Congresso não fazia sentido, dado que,

> (...) os congressistas não eram filósofos e, por isso, não poderiam decidir em matéria de ciência. Propunham completa liberdade no ensino superior de modo que, da anarquia resultante, brotassem doutrinas novas, as quais seriam, então, amparadas pelo Governo com subsídios para o seu ensino, mas nunca de modo exclusivo. (CUNHA, 1980, p. 169).

A proposta positivista, assim, queria ir além da organização do ensino: pretendia influenciar também na admissão dos cursos. Cabe, nesse contexto, relatar como se dava a admissão dos candidatos para a escola superior em 1808, a fim de compreender o porquê dessa proposta. A aceitação do aluno no curso estava vinculada à aprovação em exames aplicados pela instituição que desejava. Contudo, em 1837, não eram todos os candidatos que precisavam prestar a essas provas – os formandos do Colégio Pedro II tinham privilégios e podiam matricular-se, caso assim desejassem, em qualquer escola superior, sem exames.

Em 1890, esse privilégio, de certa forma, mudou, pois o Decreto nº 981, de 8 de novembro de 1890[4], que tratava do ensino primário e secundário do Distrito Federal, propunha um novo regulamento, elaborado por Benjamin Constant, que redefiniu o currículo do Colégio Pedro II, intitulado de Ginásio Nacional, e que seguiria

[4]Disponível em: http://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1824-1899/decreto-981-8-novembro-1890-515376-publicacaooriginal-1-pe.html, acessado em 15/10/2017.

a hierarquia das ciências proposta por Augusto Comte: “do mundo natural ao social; das ciências físicas, da matemática e da biologia à sociologia e à moral.” (CUNHA, 1980, p. 172):

> No fim da última série, os estudantes seriam submetidos a um *exame de madureza* e, se aprovados, poderiam se matricular, sem outros exames, em qualquer escola superior do país. O ponto mais importante dessa reforma, (...) foi a extensão desse privilégio aos colégios organizados pelos governos estaduais, desde que adotassem currículos semelhantes ao do Ginásio Nacional. (CUNHA, 1980, p. 172).

O exame de madureza também poderia ser aplicado aos alunos das escolas particulares e, se aprovados, não precisavam prestar os exames preparatórios. Por vezes, esse exame era ‘confundido’, pois de exame de saída do ensino secundário tornou-se exame de entrada para os cursos superiores, em 1896.

Benjamin Constant, além de propor mudanças que aumentassem o acesso ao ensino superior, “(...) criou condições legais para que escolas superiores particulares viessem a conceder diplomas dotados do mesmo valor dos expedidos pelas escolas federais (...) (CUNHA, 1980, p. 172-173).

Praticamente nesse mesmo período, de 1891 até 1910, aconteceu a reforma de Constant e, nesse intervalo, “(...) foram criadas no Brasil 27 escolas superiores: 9 de medicina, obstetrícia, odontologia e farmácia, 8 de direito, 4 de engenharia, 3 de economia e 3 de agronomia.” (CUNHA, 1980, p. 175), e os exames de madureza seguiram por mais alguns anos.

Entre essas escolas, algumas não eram subordinadas ao Estado, como a Escola de Engenharia do Mackenzie College, fundada pela missão presbiteriana em 1896, e a Escola de Engenharia de Porto Alegre, criada por iniciativa privada no mesmo ano.

Diante dessa expansão e multiplicação de escolas de ensino superior, surgem situações que fugiram do controle do Estado, o que culminou em uma nova proposta de reforma do ensino, em 1911. Ela tinha o propósito de “(...) conceder autonomia financeira, disciplinar, pedagógica e administrativa diante do governo; os candidatos passariam a ser selecionados por exames de admissão.” (CUNHA, 1980, p. 180).

Diante disso, foi promulgada a Lei Orgânica do Ensino Superior e do Fundamental na República – Decreto nº 8.659, de 5 de abril de 1911) [5]. Os artigos 2º e 4º tratam especificamente sobre a autonomia didática e administrativa e acrescentam, ainda, instruções para as faculdades do Rio de Janeiro, Bahia, São Paulo e Pernambuco. Apesar dos avanços obtidos com o Decreto, algumas medidas foram alvo de inúmeras críticas, conforme relata Cunha (1980):

> (...) Os críticos da lei orgânica diziam que as exigências dos exames de admissão diminuíram para que as faculdades não ficassem sem alunos; livres de qualquer fiscalização, abriram-se faculdades particulares que facilitavam ao máximo os exames modo a aumentar suas receitas; os professores que participavam (ou esperavam participar) das bancas examinadoras ministravam aulas particulares aos futuros candidatos; os programas de ensino eram encurtados conforme as conveniências de alunos e professores; os concursos de livre-docência se desmoralizavam pela grande quantidade de título conferidos (200 só na Faculdade de Medicina do Rio de Janeiro) e pela dificuldade de se averiguar a paternidade das teses apresentadas sem arguição. (CUNHA, 1980, p. 184).

Com tanto problemas relacionados a esse normativo, em 1915 foi publicado o Decreto nº 11.530, refazendo o ensino secundário e superior no Brasil, o que ficou conhecido como Reforma Carlos Maximiliano em homenagem ao então Ministro da Justiça e Negócios Interiores e também responsável pela Educação e Saúde Pública.

O documento tinha o objetivo de reaver a autonomia e o respeito do ensino secundário oficial. Para tanto, manteve algumas determinações da Lei Orgânica, como o fim do privilégio dos ex-alunos do Colégio Pedro II e "(...) dos que lhe eram equiparados, de garantir aos seus possuidores matrículas nas escolas superiores; e a instituição dos exames de admissão, então rebatizados de exames vestibulares, para a seleção dos candidatos ao ensino superior." (CUNHA, 1980, p. 187).

Os exames eram aplicados no início do ano, em janeiro, e eram compostos de prova escrita e oral, porém, a aprovação nessas provas não era o suficiente: o candidato precisava de aprovação nas matérias do ensino secundário. Esse último requisito causou uma redução drástica na quantidade de alunos admitidos.

Neste novo decreto nasce, ainda, "a figura do professor catedrático, substituindo a do professor ordinário da lei orgânica." (CUNHA, 1980, p. 188). Os catedráticos eram nomeados pelo governo por meio de um concurso, no qual eram

---

[5] Disponível em: http://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1910-1919/decreto-8659-5-abril-1911-517247-publicacaooriginal-1-pe.html

apresentadas e avaliadas teses escritas por eles. O cargo era vitalício, ou seja, só ocorreria substituição por morte, aposentadoria ou por vontade do professor.

Em 1925, houve outra reforma, conhecida por Reforma de Rocha Vaz, que reforçava o controle do Estado "(...) particularmente do governo federal sobre o aparelho escolar, numa tentativa de estabelecer o controle ideológico das crises políticas e sociais que vieram desembocar na revolução que pôs fim ao regime, em 1930." (CUNHA, 1980, p. 190).

O Decreto nº 16.782-A, de 1925, que promoveu a dita reforma, "[e]stabelece o concurso da União para a difusão do ensino primário, organiza o Departamento Nacional do Ensino, reforma o ensino secundário e superior e dá outras providências." (BRASIL, 1925)[6].

Algumas mudanças em relação a essa reforma deram-se em relação à frequência dos alunos, que antes era livre e tornou-se obrigatória. A quantidade de vagas para admissão dos estudantes foi fixada por ano, e, com isso, teve início o sistema de classificação dos candidatos. Acreditava-se que, com essas condições, a formação desses sujeitos seria mais eficiente por haver menos alunos em sala de aula, além de se consistir em uma forma de conduzir candidatos para os cursos com menos procura.

Essa reforma também "(...) procurava impedir a entrada da política e da ideologia não oficiais no ensino superior" (CUNHA, 1980, p. 194). Para isso, foi instituída nos currículos dos ensinos primário e secundário a instrução moral e cívica. No ensino secundário, além desta instrução, deveriam ser ministradas aulas sobre os

> (...) deveres do cidadão na família, na escola, na pátria e em todas as manifestações do sentimento de solidariedade humana, comemorações das grandes datas nacionais, dos grandes fatos da história pátria e universal, homenagens aos grandes vultos representativos das nossas fases históricas e dos que influíram decisivamente no progresso humano. (CUNHA, 1980, p. 194).

Fica notória a intenção era formar sujeitos patriotas. O Brasil passava por uma situação delicada e precisava do apoio de sua população, e esse ensino vem ao encontro dessa necessidade de formar cidadãos capazes de colaborar com a prosperidade do país.

---

[6] Disponível em: http://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1920-1929/decreto-16782-a-13-janeiro-1925-517461-publicacaooriginal-1-pe.html

Outra determinação que colaborou para a consolidação da educação no país foi a extensão da polícia acadêmica para as escolas secundárias, pois, até esse momento, ela era a responsável por manter “a ordem e a moral” apenas no ensino superior. Ademais, sua nomenclatura também foi alterada para Polícia Escolar.

Em vista de tantos acontecimentos políticos e sociais, Cunha (1980) afirma:

> A proclamação da República criou uma ordem jurídica que, liberando antigos anseios federativos, propiciou iniciativas de criação de instituições de ensino superior em diversos estados. Em três deles surgiram universidades fora e à revelia do poder central, no Amazonas, em São Paulo e no Paraná, embora tivessem existência curta, só vingando décadas mais tarde. (CUNHA, 1980, p. 198).

As citadas universidades, como visto, tiveram curta existência por surgirem sem relação com o poder central.

O estatuto da Escola Universitária Livre de Manaus, como foi chamada inicialmente, foi aprovado em fevereiro de 1909 e, alguns anos depois, tornou-se Universidade de Manaus, que surge em meio ao ciclo da borracha, que trouxe grande prestígio para a região. Os cursos oferecidos eram: formação de oficiais das três armas, engenharia civil, agrimensura, agronomia, indústrias, ciências jurídicas e sociais, medicina, farmácia e odontologia, em nível superior. O curso de Ciências e Letras foi oferecido em nível secundário e suas atividades começaram no mês de março do mesmo ano de criação da universidade (CUNHA, 1980).

Inicialmente, a Universidade em Manaus tinha fortes razões de existir: a exploração da borracha atraiu muitas pessoas e era necessário investir em infraestrutura, saúde e segurança. No entanto, com o declínio do ciclo da borracha, tais motivos se perderam, fazendo com que a população da região diminuísse – de consequência, a procura pelos alunos – e a instituição entrasse em crise por falta de alunos e de financiamento do Estado. É o que aponta Cunha (1980):

> Em 1926, a Universidade de Manaus se dissolveu, fragmentando-se em três estabelecimentos isolados. A faculdade de Engenharia, que só conseguiu desenvolver o curso de agrimensura, deu origem à Escola Agronômica de Manaus, a qual acabou extinta em 1943. A Faculdade de Medicina deu origem à Faculdade de Farmácia e Odontologia, já que não conseguiu implantar o curso médico. Foi extinta, também, em 1944. Só vingou mesmo a Faculdade de Direito, federalizada em 1949 e incorporada à Universidade do Amazonas, instituída por lei federal em 1962, mas só instalada em 1965. (CUNHA, 1980, p. 200).

Em São Paulo, a reforma Rivadávia Corrêa motivou o médico Eduardo Augusto Ribeiro Guimarães a liderar a criação da Universidade de São Paulo. O médico e outros vinte profissionais de nível superior “(...) uniram-se a Luís Antônio dos Santos, denominado “sócio capitalista”, e fundaram uma sociedade civil, a Universidade de São Paulo (CUNHA, 1980, p. 201):

> A Universidade de São Paulo foi fundada a 19 de novembro de 1911, com o objetivo de oferecer ensino de todos os graus: primário, secundário, superior e “transcendental”. (...) As escolas superiores deveriam ser as de belas-artes; ciências, filosofia e letras; agronomia e zootecnia; medicina veterinária; comércio; farmácia; odontologia; medicina e cirurgia; engenharia; direito. (CUNHA, 1980, p. 2002).

Na inauguração oficial, ocorrida em março de 1912, 48 alunos começaram a estudar no ensino secundário e 466 no ensino superior, sendo o curso de Direito o mais procurado, com 126 alunos aprovados.

A universidade cresceu consideravelmente nos anos seguintes e, em 1915, já possuía em torno de 700 alunos e 100 professores. Devido a isso, em 1916, a Academia de Ciências de São Paulo e a Associação Beneficente Universitária uniram-se à universidade:

> (...) A Academia de Ciências deveria ter quatro seções, cada uma com 30 sócios: ciências matemáticas, ciências físicas, ciências biológicas e ciências morais, também chamadas de ciências sociais. Dela poderiam fazer parte professores de escolas superiores ou pessoas de “notória capacidade científica”, desde que brasileiros ou estrangeiros estivessem no gozo de seus direitos civis e políticos. A Associação Beneficente Universitária foi formada para ajudar a conclusão e a manutenção do Instituto Luís Pereira Barreto, um hospital de caridade. (CUNHA, 1980, p. 204).

A Universidade de São Paulo era uma instituição particular e, naquela época, seus formandos não eram reconhecidos como profissionais, o que fez com que a universidade não subsistisse por muitos anos. Tudo indica que em 1917 todas as suas atividades foram suspensas.

No mesmo período, em 1912, na cidade de Curitiba, foi criada a Universidade do Paraná. “Em 1913, os estatutos da universidade foram promulgados, tendo ela sido previamente reconhecida pelo governo estadual, que lhe doou vultoso patrimônio.” (CUNHA, 1980, p. 207). O Paraná tinha uma situação mais favorável que São Paulo, até mesmo porque a Lei 1,352, de 24 de abril de 1913, determinou “que só poderiam exercer a profissão de farmacêutico no estado os diplomados por escolas superiores e os práticos de farmácia que fossem aprovados em exames de habilitação da Universidade do Paraná. (CUNHA, 1980, p. 207). Porém, a cidade de Curitiba não resistiu à reforma de Carlos Maximiliano, “(...) que impedia a equiparação de escolas superiores em cidades com menos de 100 mil habitantes, como era o caso de Curitiba, salvo se fosse capital do estado com mais de 1 milhão de habitantes.” (CUNHA, 1980, p. 210). Em 1915, Curitiba tinha apenas 66 mil habitantes e todo o estado do Paraná, 686 mil.

> Como a instituição visava a equiparação de seus cursos aos das federais, e entre estas só havia escolas isoladas, a Universidade do Paraná não teve outra alternativa senão dissolver-se. Após demoradas exigências do Conselho Superior de Educação, as faculdades isoladas de direito, engenharia e medicina foram reconhecidas. As duas primeiras em 1920 e a última em 1922. (CUNHA, 1980, p. 211).

Todas essas tentativas de organização e consolidação da universidade foram importantes para o desenvolvimento do Ensino Superior, pois mesmo sendo “(...) independentes e até mesmo contrárias à orientação do poder central, (...) devem ter provocado uma reação no sentido de o governo da União assumir, controlando, a iniciativa de fundar a universidade.” (CUNHA, 1980, p. 212).

Neste sentido, o Governo Federal publica o Decreto nº 11.530, de 18 de março de 1915[7], com destaque para o artigo 6º, que autorizava a criação da Universidade, por meio de agrupamento, das Escolas Politécnicas com a de Medicina do Rio de Janeiro e uma faculdade de Direito, com local gratuito para funcionamento, disponibilizado pelo Estado. (BRASIL, 1915).

Transcorreram-se cinco anos para que fosse elaborado pelo então Ministro do Interior, Alfredo Pinto, o Decreto n° 13.343, de 1920, que ordenou a criação da Universidade do Rio de Janeiro. Sete anos depois, em Minas Gerais, a organização da Universidade foi da mesma natureza, por aglutinação das faculdades de engenharia, direito, medicina, odontologia e farmácia, que já funcionavam em Belo Horizonte, enquanto a universidade no Rio Grande do Sul foi totalmente diferente, pois surgiu de uma única instituição (CUNHA, 1980).

A Escola de Engenharia de Porto Alegre já contava com várias unidades, pois existia desde 1896; com passar dos tempos, aumentou a quantidade de cursos e

[7] Disponível em: http://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1910-1919/decreto-11530-18-marco-1915-522019-republicacao-97760-pe.html

alunos. Ao todo, eram 11 unidades em 1928, que investiam na formação de engenheiros civis, geógrafos, agrônomos, médicos veterinários, operários agrícolas e de eletricidade, entre outros, e na pesquisa aplicada na área de agronomia, agricultura, zootecnia e química industrial. “Essa diversidade de institutos e cursos, fora do esquema tradicional medicina-engenharia-direito, fez com que João Simplício chamasse a Escola de Engenharia de Universidade Técnica do Rio Grande do Sul.” (CUNHA, 1980, p. 215-216).

Com a revolução de 1930, inicia-se a Era Vargas, que implicou algumas mudanças no ensino com a implementação de duas políticas educacionais, a liberal e a autoritária.

O liberalismo, que era elitista e agia “(...) conforme os interesses sociais e pedagógicos das oligarquias, começou a ceder lugar, a partir de 1932, a um liberalismo igualitário, convergente com os interesses das classes trabalhadoras e das camadas médias.” (CUNHA, 1980, p. 230), enquanto a política autoritária foi influenciada pelas doutrinas fascistas e parafascistas. Na sua vigência, criou-se uma entidade para congregar os estudantes das escolas superiores de todo o país, primeiro denominada de Conselho Nacional de Estudantes, e após de União Nacional dos Estudantes: a UNE (CUNHA, 1980, p. 230):

> A partir de 1935, a repressão generalizada retirou de cena as idéias educacionais liberais, pela prisão, atual ou virtual, de quem as sustentasse. (...) Assim, de 1937 em diante, foi sendo construída uma estrutura educacional completamente nova, consistente com o regime autoritário que se iniciava. (CUNHA, 1980, p. 231).

No Ensino Superior, a política educacional autoritária começou atuar em 1931, com a elaboração do Estatuto das Universidades Brasileiras. Contudo, o liberalismo também trouxe novidades, como a criação da atual Universidade de São Paulo, iniciada em 1931, da Escola de Sociologia e Política no estado de São Paulo e da Universidade do Distrito Federal. Portanto, no início da Era Vargas, havia no Brasil apenas três universidades e, ao final, em 1945, já eram cinco:

> A Universidade do Rio de Janeiro tinha passado a se chamar, desde 1937, Universidade do Brasil. A Escola de Engenharia de Porto Alegre foi denominada Universidade Técnica do Rio Grande do Sul, em 1932, e, a partir de 1934, Universidade de Porto Alegre. Em 1934, foi criada a Universidade de São Paulo e, em 1940, na cidade do Rio de Janeiro, as Faculdades Católicas, embrião da Universidade Católica, mais tarde pontifícia. Teve vida curta a Universidade do Distrito Federal, criada em 1935 e absorvida pela Universidade do Brasil, em 1939. (CUNHA, 1980, p. 232).

Ao longo deste tópico, apontam-se elementos históricos de que o sistema universitário brasileiro foi pensado bem antes de ser oficialmente criado, e que vários cursos foram ministrados ao ensino secundário com propostas superiores. Por isso que no decorrer do século XIX, várias propostas surgiram, porém faltaram motivos, por parte do Governo, para que fosse realmente efetivada. Nesse contexto de criação oficial das Universidades no país, a Matemática ganha mais espaço, até que finalmente surge o primeiro Curso Superior de Matemática, em 1934, em São Paulo, na USP. Na intenção de conhecer o movimento de constituição do ensino dessa ciência, que culminou com a criação do seu primeiro curso, será relatado como se deu o ensino dessa área do conhecimento no Brasil, desde os tempos de Colônia, para compreender os motivos e as necessidades que levaram à criação e consolidação do curso de Matemática no país, a fim de identificar as suas contribuições para o desenvolvimento do país.

1.3 O ENSINO DA MATEMÁTICA NO BRASIL

Conforme já aludido, a educação nas terras brasileiras começou com a atuação dos jesuítas, que vieram para o Brasil para educar segundo os interesses de Portugal. A princípio, o objetivo era a catequese, na intenção de formar padres missionários que pudessem levar a cultura religiosa de Portugal a todo o Brasil. Por isso, “(...) o ensino do português foi a primeira necessidade educacional da Colônia, bem como ao evangelizador coube aprender a língua indígena” (ZOTTI, 2004, p. 17).

Com o passar dos anos, as instruções da Companhia de Jesus foram ampliadas e, além de formar padres, lecionava-se para formar funcionários para os serviços administrativos da Colônia e educar a classe dominante. Desta forma, a Matemática começa a ser ensinada pelos jesuítas como ensino de técnicas para solução de problemas práticos. Valente (2007) discorre como isso se dava:

> Tudo leva a crer, enfim, apesar dos poucos conhecimentos que temos sobre o tema, que as ciências, e em particular a matemática, não constituíram, ao longo dos duzentos anos de escolarização jesuítica no Brasil, um elemento integrante da cultura escolar e formação daqueles que aos colégios da Companhia de Jesus acorriam. (VALENTE, 2007, p. 35).

Nesta seção da pesquisa, o foco é, portanto, conhecer o movimento de consolidação dos conceitos matemáticos no Brasil, pois sabemos que a Matemática contribuiu para o desenvolvimento da Colônia, sendo nosso intuito apresentar a sua importância para o progresso do país até a data da criação do primeiro curso superior dessa ciência e quando ela se tornou autônoma no sistema educacional brasileiro.

Acreditamos ser fundamental para nossa investigação entender as contribuições da Matemática no país, pois “(...) é preciso compreender o processo ontológico da realidade humana e de como esse processo tem se efetivado, historicamente, dentro das relações sociais de produção.” (OLIVEIRA, 2005, p. 21). Para a ideal compreensão do processo ontológico, é indispensável conhecer todas as partes que se relacionam com o objeto de pesquisa, ou seja, o desenvolvimento da Matemática no Brasil nos mostrará o seu processo de consolidação segundo as necessidades da sociedade.

Tal processo é fundamental para se analisar o movimento lógico-histórico da constituição dos conteúdos que compõem a disciplina Álgebra Linear, para irmos além do que está posto e perceptível. Para atender a esse propósito e conduzir ao objeto da pesquisa, o ensino da Álgebra Linear, definiu-se uma sequência que tratará da consolidação da Matemática nas atividades desenvolvidas na Colônia, rumo à criação – o que a motivou e quais as influências políticas e sociais – do primeiro curso superior de Matemática no Brasil.

Outro caminho que julgamos imprescindível é o de conhecer as disciplinas que faziam parte desse Curso, como elas estavam organizadas para propiciar essa formação e as modificações nele ocorridas com o passar do tempo.

1.3.1 O ensino da Matemática nas atividades da Colônia

Os primeiros elementos históricos do ensino da Matemática nos tempos medievais pela humanidade são nas Aulas de Artilharia e Fortificações, conhecida por artes mecânicas. Elas foram as responsáveis pela origem do engenheiro, pois “(...) de seu ofício são exigidas: rapidez, solidez e economia. Tais exigências representam frutos diretos de seus conhecimentos matemáticos.” (VALENTE, 2007, p. 41).

A organização dos conteúdos dessas aulas começa a ser discutida ainda no século XVI e se estende ao século XVII, quando se define que os conhecimentos de aritmética são pré-requisitos para o início das aulas e os de geometria prática[8] devem ser ensinados logo no início do curso.

Todavia, não é demais lembrar que antes de esse ensino chegar ao Brasil, os jesuítas já atuavam no país com a missão de converter os índios e fundar escolas segundo suas regras, e essas instituições já estavam espalhadas por diversas regiões do mundo. “Os estabelecimentos de ensino dos jesuítas seguiam normas padronizadas, que vieram a ser sistematizadas na (...) *Ratio Studiorum* –-promulgada, após preliminares, em 1599.” (CUNHA, 1980, p. 24-25). Nessa organização não constava a Matemática como disciplina isolada pois,

> (...) a grande maioria dos alunos dos colégios jesuítas obtinha uma formação literária dominada quase que exclusivamente pelo latim. Numa fase posterior, já frequentado por poucos alunos, o estudo das ciências, fornecidos nos grandes colégios era ministrado, sobretudo nos cursos de artes. Aí tinha lugar o ensino das quatro ciências escolásticas: a lógica, a metafísica, a ética e a física. Na física é que iria surgir o ensino dos rudimentos matemáticos. Apesar do aparecimento das matemáticas nos programas dos cursos de física desde o início do século XVII, os professores durante mais de um século reservam à matemática um lugar marginal seja negligenciando-a, seja ocupando-se dela em algumas lições de aberturas de cursos. (VALENTE, 2007, p. 32-33).

Em vista disso, o ensino era dividido em dois graus, o *studia inferiora* e *studia superiora.* No primeiro se estudava a língua latina, humanidades, retórica, geografia e mitologia. No outro, que correspondia aos estudos universitários, era ministrado cursos de filosofia e teologia.

> O curso de filosofia levava três anos, onde Aristóteles era o autor estudado: no primeiro ano, lia-se *A Lógica*; no segundo, *De Coelo, De Generatione* e *Meteoros*; no terceiro, continuava-se com *De Generatione,* acrescentando-se *De Anima* e a *Metafísica*; paralelamente a essas obras principais, liam-se, na cadeira de moral, a *Ética* e, na de matemática, a *Geometria* e a *Cosmografia*. (CUNHA, 1980, p. 25).

No Brasil, a divisão teve que ser adaptada para atender à realidade da Colônia, e “(...) nos colégios jesuítas do Brasil havia quatro graus de ensino, sucessivos e propedêuticos: o curso elementar, o curso de humanidades, o curso de artes e o curso de teologia.” (CUNHA, 1980, p. 27-28).

O curso elementar consistia em ensinar a ler, escrever e contar, isto é, em relação à Matemática tratava de aulas de aritmética, estudo dos algarismos e das

---

[8] Geometria usada por carpinteiros, arquitetos e agrimensores.

operações básicas. O curso de humanidades focava no estudo de línguas, com aulas ministradas em latim, permitindo-se o uso do português somente nos intervalos e feriados, e, em vez de se estudar a língua grega ou hebraica, conforme acontecia em outros países, no Brasil esse estudo foi substituído pelo tupi-guarani (LEITE, 2006). O curso de artes ou, na ocasião, chamado de curso de Filosofia, era idêntico aos ministrados na Europa em relação a conteúdos e duração, mas não tinha a mesma validade (VALENTE, 2007). Cunha (1980) traz mais detalhes:

> (...) ensinava-se, durante três anos, lógica, física, matemática, ética e metafísica. (...) Esse curso oferecia os graus de bacharel e licenciado. A diferença entre eles estava no número de pessoas que compunham a banca examinadora: três para os bacharéis e cinco para os licenciados, estes os que pretendiam exercer o magistério. (CUNHA, 1980, p. 28).

Por fim, o curso de Teologia, com duração de quatro anos, continha dois temas básicos, teologia moral e especulativa, e o estudante nele aprovado recebia o grau de doutor. Todos esses cursos surgiram inicialmente na Bahia, pois, em 1550, foi fundado o primeiro colégio jesuíta; todavia somente em 1553 foi implementado o curso de humanidades e posteriormente, em 1572, os de artes e teologia. Nesse mesmo período, outros colégios foram abertos pelos jesuítas, como já visto; entretanto, o da Bahia destaca-se de modo particular, pois nele a Matemática aparece como ensino autônomo em 1757:

> O ensino da Matemática no Brasil principiou naturalmente por onde devia começar, isto é, pela *Lição de Algarismos*, ou primeiras operações, ensino gradativamente elevado, mencionando-se em 1605 nos três Colégios da Baía, Rio de Janeiro e Pernambuco, a aula de *Aritmética*, título genérico, para designar com maior ou menor desenvolvimento o que hoje consta de diversos tratados elementares desta disciplina; e foi gradação positiva e permanente até ao mais alto dela no ano de 1757 em que aparece já a *Matemática*, no Colégio da Baía, com a dignidade autônoma de *Faculdade.* (LEITE, 2006, p. 163).

Assim, o Colégio da Bahia se fortaleceu no final do século XVI e foi se desenvolvendo, até que no século XVIII criou-se a Faculdade de Matemática. Esse crescimento certamente se deu porque o colégio contava com um grupo de professores considerados ilustres nos estudos superiores, inclusive na área Matemática (LEITE, 2006).

Tal colégio, além de ser o primeiro, foi o principal no Brasil na época, e recebia o título de Colégio Máximo da Província (LEITE, 2006). Porém, essa chamada

Faculdade de Matemática não durou muito tempo, pois dois anos após a sua criação, os jesuítas foram expulsos do Brasil.

Outro fator que reforça o prestígio da Matemática nos colégios jesuítas é o uso de obras de grandes estudiosos. No ano de 1757, o Colégio do Rio de Janeiro "(...) situava-se em posição sensivelmente igual ao da Bahia, e ter-se-ia transformado com o tempo em *Universidade*, se a tormenta que logo se seguiu não o tivesse impedido." (LEITE, 2006, p. 6). Valente (2007) acrescenta, ainda, que essas obras eram inventariadas:

> Um documento importante que nos permite elaborar algumas considerações sobre o ensino da Matemática nos colégios jesuítas do Brasil é o *Auto de Inventário e Avaliação dos Livros Achados no Colégio dos Jesuítas do Rio de Janeiro e Sequestrados em 1775.* (VALENTE, 2007, p. 29-30).

Segundo esse levantamento, havia várias obras que tratavam de conteúdos matemáticos, entre elas "A *Matemática* de Clávio, 5 tomos (...); a *Matemática* de Kircher, 14 livros in-fº e 6 in-4º (...); os *Elementos de Matemática* de Boscovich, 7 tomos (...)." (LEITE, 2006, p. 27). Clávio foi membro da Companhia de Jesus desde 1580, era matemático e astrônomo. Seus livros tratam de aritmética, geometria, álgebra e astronomia e serviram como orientação para os jesuítas em seus colégios. Athanasius Kircher foi nomeado, em 1630, professor de Filosofia e Matemática no colégio jesuíta. Suas publicações tratam dos seguintes temas: magnetismo, óptica, acústica, música, astronomia, mecânica, aritmética, entre outros. Rogério José Boscovich, também jesuíta e professor, produziu grandes obras sobre aritmética, geometria plana e sólida, trigonometria plana e esférica, além de vários outros temas (VALENTE, 2007).

Mesmo com bons professores e relevantes obras de Matemática nas bibliotecas dos colégios jesuítas, essa ciência custou a conseguir autonomia nessas instituições e, quando conseguiu, em 1757, com a Faculdade de Matemática no Colégio da Bahia, os padres jesuítas foram expulsos do Brasil e seus colégios foram fechados em 1759, conforme já explanado.

A expulsão dos jesuítas fez com que o processo de autonomia da Matemática no Brasil fosse interrompido e, por muitas décadas, ela foi ensinada como uma disciplina das artes mecânicas.

Paralelamente a esse cenário, instituem-se as aulas de Artilharia no Brasil por volta do ano de 1648, quando Portugal contrata especialistas estrangeiros para formar militares para incremento das fortificações militares. “Portugal precisa proteger e defender suas terras ultramarinas. Essa primeira iniciativa é seguida por várias outras de modo irregular, até que, em 1699, é criada a *Aula de Fortificação* no Rio de Janeiro.” (VALENTE, 2007, p. 43).

Porém as aulas não foram efetivamente iniciadas nesta época, pois faltavam recursos e, especialmente, livros. Somente em 1738, com esforço de Gomes Freire, governador do Rio de Janeiro, é que oficialmente cria-se o curso chamado de ‘Aula de Artilharia e Fortificações’. Com a expulsão dos jesuítas alguns anos depois, a Matemática segue sendo ensinada apenas neste curso com finalidade militar, cujos conceitos matemáticos são adiante expostos.

O curso tornou-se obrigatório para os militares e tinha a duração de 5 anos. O professor nomeado para ministrá-lo foi José Fernandes Pinto Alpoim, com o objetivo de

> (...) formar engenheiros militares, cartógrafos e matemáticos, capazes de levar a cabo o levantamento de mapas com latitudes determinadas pelos novos métodos empregados na Inglaterra e na França, e habilitar engenheiros a construir fortificações para a defesa dos domínios ultramarinos. (VALENTE, 2007, p. 46).

Alpoim – que atuou de 1738 até 1765, quando faleceu – “(...) seguindo os passos do pai, iniciou seus estudos militares na Academia de Viana do Castelo e prosseguiu-os em Lisboa. Alpoim teve diversas missões como engenheiro em Portugal” (VALENTE, 2007, p. 46) e foi muito elogiado pelos seus projetos, apesar da já mencionada escassez de livros, o que fez com que o citado professor escrevesse suas próprias obras, os primeiros livros didáticos no Brasil:

> Alpoim, acumulando experiências pedagógicas em suas aulas ministradas desde a época em que foi lente substituto na Academia de Viana do Castelo de Portugal, vai escrever dois livros que se tornariam os primeiros livros didáticos escritos no Brasil: em 1744 o *Exame de Artilheiros e Exame de Bombeiros* em 1748. (...) Os conteúdos da “arte militar” são precedidos da matemática necessária à sua compreensão. *Exame de Artilheiros* compreende três capítulos: Aritmética, Geometria e Artilharia. *Exame de Bombeiro*, escrito em dez tratados, tem os dois primeiros dedicados à geometria e à trigonometria. (VALENTE, 2007, p. 48).

Portanto, a Matemática usada nesses livros era exclusivamente voltada para a formação militar. O tratado de aritmética discorre sobre as operações básicas da Matemática, enquanto o de geometria dá ênfase a aplicações segundo os interesses da artilharia, como conceito de retas, círculos, triângulos, proporcionalidade, entre outros. Na trigonometria, apresenta métodos para encontrar o valor das distâncias de um ponto ao outro e os ângulos que se formam entre retas, segundo os interesses "(...) da *arte de deitar bombas*" (VALENTE, 2007, p. 58).

Em 1763, em razão das precárias condições das Forças Armadas na metrópole, foi necessária a reorganização completa do exército português. No Brasil, a situação era ainda pior: "a Corte, alertada no início de 1767 sobre o prenúncio de novas lutas com os espanhóis do Rio da Prata, resolveu reforçar e cuidar melhor da defesa da colônia" (VALENTE, 2007, p. 66). Para tal, foram enviados munição, oficiais, generais, novos livros e

> (...) os Regimentos de Artilharia do Reino para orientar a estruturação das tropas no Brasil. É então criada no mesmo ano, em substituição à antiga Aula de Fortificação, a *Aula de Regimento de Artilharia do Rio de Janeiro.* Além disso, seguem para o Brasil vários exemplares do *Douto Bellidoro.* A Corte desejava que o texto de Bélidor fosse *de fato* utilizado para a instrução. (VALENTE, 2007, p. 66-67).

Bélidor atuou como professor de Matemática em uma escola de artilharia na França; daí, chegam ao Brasil vários livros e manuais técnicos por ele escritos, substituindo as obras de Alpoim. Sua atuação chamou atenção por sua aptidão com a Matemática. Alguns anos depois, o curso é reestruturado e "(...) passa a incluir ensinamentos de Arquitetura Militar, mudando seu nome para *Aula Militar do Regimento de Artilharia do Rio de Janeiro."* (VALENTE, 2007, p. 67). Outras mudanças ocorreram nos anos seguintes, até que em 1792 foi criada a Academia de Artilharia, Fortificação e Desenho. Nela havia

> (...) um curso matemático, de 6 anos, que se destinava aos oficiais de todas as armas; os oficiais de infantaria e cavalaria faziam apenas os três primeiros, os de artilharia cinco e os de engenharia, o curso completo. Os livros de matemática adotados eram a *Geometria Prática de Bélidor e a Aritmética de Bézout.* (VALENTE, 2007, p. 67).

Étienne Bézout publicou diversos livros. Sua obra original se divide entre os temas de aritmética, geometria, álgebra, mecânica e tratado de navegação. Ficou conhecido por sua atuação como "(...) pensionista da Academia de Ciências, professor das escolas militares, examinador único dos alunos candidatos a oficiais da marinha e da artilharia, (...) [e] seus livros eram a única referência para os exames.” (VALENTE, 2007, p. 79). Por fim, em 1795, mais mudanças acontecem nessa instituição, que recebe o título de Academia de Aritmética, Geometria Plana, Fortificação, Desenho e Língua Francesa:

> (...) Do texto simples de Alpoim, com seus parcos conteúdos de matemática, salta-se para um curso completo de matemáticas elementares. (...) A adoção de Bélidor inicialmente leva em conta que as armas francesas eram as melhores preparadas da Europa e, portanto, serviam de referência para todos os outros países. Enquanto em Alpoim a matemática constituía uma espécie de apêndice dos ensinamentos militares, em Bélidor e Bézout a matemática, nos cursos militares, irá ganhar independência com uma autonomia relativa em relação às práticas militares. (VALENTE, 2007, p. 87).

Segundo Valente (2007), essas mudanças nos cursos de artilharia é um marco para distinguir a aritmética da geometria e, posteriormente, da álgebra para se tornarem disciplinas autônomas na escola. Contudo,

> [s]omente no século XIX, já no Império, com a implantação das escolas primárias em 1827 e do Colégio Imperial Dom Pedro II, em 1837, no Rio de Janeiro, é que se pode afirmar que o conhecimento matemático foi introduzido de maneira significativa em nosso país, estendendo até o século XX. (BASTOS, 1980, p. 39).

O Colégio Pedro II era organizado em oito séries, uma por ano, e a Matemática esteve presente em todas elas: nos três primeiros, a aritmética; após, dois anos de geometria, um ano de álgebra e, nos demais, trigonometria e mecânica.

Aqui, é necessário recobrar que outro marco importante para a disseminação da Matemática no Brasil foi a criação das escolas de Engenharia. Em 1875, a Escola de Minas de Ouro Preto, em Minas Gerais, considerado o mais famoso centro de pesquisas geológicas e mineralógicas. Em 1894, a Escola Politécnica de São Paulo.

Entretanto, apenas na década de 1930 a Matemática teve um destaque maior, pois, em 1934, foi criado o primeiro curso para formar professores de Matemática no Brasil. Silva (2003) esmiúça esse contexto, em que emergiu o chamado “Manifesto dos Pioneiros da Educação Nova”:

> (...) [E]m 1932, emergiu o chamado “Manifesto dos Pioneiros da Educação Nova”, tendo como um dos signatários o educador Anísio Teixeira (1900-1971). A partir da década de 1930, teve início no Brasil o que chamamos de “segundo período de desenvolvimento da Matemática Superior”. Com efeito, em 1934 (...), foi fundada, pelo governo paulista, na cidade de São Paulo, a

> Universidade de São Paulo (USP), com sua Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras (FFCL), apresentando um tipo de ensino superior, que fugia do ensino profissionalizante das grandes escolas até então existentes. A FFCL passou a formar profissionais ligados ao magistério e à pesquisa científica básica e com atuação nas áreas das ciências exatas, humanas e biológicas, entre outras" (SILVA, 2003, p. 132).

O Manifesto dos Pioneiros da Educação Nova foi redigido por Fernando de Azevedo, líder das mais importantes reformas educacionais no Brasil, e continha orientações e finalidades fundamentais para a educação no país, como a concepção de respeito às individualidades, com uma educação para todos, sem fazer distinção de classe social. O Estado era o guardião desse direito e, portanto, "(...) a escola deve ser única, obrigatória, pelo menos até um certo nível e limite de idade, gratuita, leiga e funcionar em regime de igualdade para os dois sexos." (LEMME, 2005, p. 172). O documento também contemplava os professores, que, segundo os pioneiros,

> (...) devem ser formados dentro de um espírito de unidade, constituindo-se num corpo profissional consciente de suas responsabilidades perante a Nação, os educandos e o povo em geral; para isso, devem receber remuneração condigna, para que possam manter a necessária eficiência no trabalho, a dignidade e o prestígio indispensáveis ao desempenho de sua missão. (LEMME, 2005, p. 173).

Outro ponto importante também abordado no Manifesto é a organização do ensino, para a qual é defendida a ideia de "escada educacional contínua, das escolas pré-primárias, às primárias, secundárias e ao ensino superior, de acordo com sua capacidade, aptidões e aspirações, e nunca por suas diferenças em poder econômico." (LEMME, 2005, p. 172-173).

Portanto, cuida-se de um documento que se preocupa com questões importantes, como a primazia por uma sociedade igualitária e democrática, sendo essas orientações que permearam a formação de professores e contribuíram para o desenvolvimento da Matemática e para a criação da USP, que ocorreu a partir de uma junção de várias faculdades na intenção de reunir em apenas uma Instituição todas as formações de nível superior presentes no Brasil, inclusive os cursos para formação de professores:

> A Universidade de São Paulo foi fundada em 1934 pelo governador (Interventor Federal no Estado de São Paulo) Armando de Salles Oliveira; reunia a Faculdade de Direito (federal, 11/08/1827), a Escola Politécnica (estadual, 1893) e a Faculdade de Medicina (19/12/1912) e a Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras. A emenda Roquette Pinto, na comissão de professores, exigia para as Universidades, pelo menos, três escolas

> superiores, sendo uma, obrigatoriamente, a de Filosofia, Ciências e Letras. (PIRES, 2006, p. 161).

A criação da USP deu-se por meio do decreto nº 6.283, de 25 de janeiro de 1934. A Universidade era composta por diversos institutos, são eles:

> **Art. 3º** A Universidade de São Paulo se constitui dos seguintes institutos oficiais:
> a) Faculdade de Direito;
> b) Faculdade de Medicina;
> c) Faculdade de Farmácia e Odontologia;
> d) Escola Politécnica;
> e) Instituto de Educação;
> f) Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras;
> g) Instituto de Ciências Econômicas e Comerciais;
> h) Escola de Medicina Veterinária;
> i) Escola Superior de Agricultura;
> j) Escola de Belas Artes.
> (BRASIL, 1934).

Este decreto foi um marco na formação de professores no Brasil, pois, a partir da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras – na qual o Curso Superior de Matemática estava inserido –, tal formação começou a ter destaque dentro da Universidade, sendo igualada, em termos científicos, com as demais faculdades já existentes no Brasil.

Com este breve relato, percebemos que a Matemática vai se destacando no meio educacional e ganhando autonomia, porém, ainda como instrumento para a formação de outros profissionais, ou seja, ela ainda era percebida como uma ciência das práticas, usada para sanar ou fomentar as engenharias existentes no país, por mais que já houvesse manifestos a favor da reforma do ensino da Matemática no país.

A criação do Curso Superior de Matemática na USP, em 1934, no bojo da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, como já dito, com vínculos no magistério, é – repita-se, dada a relevância – um marco para a formação de professores de Matemática no Brasil, pois deixa claro que essa ciência, que contribui para resolver questões práticas nas diversas engenharias, precisa de autonomia, o que se materializa na oferta de um curso superior específico para formação de seus professores. Em vista disso, a seguir trata-se, com detalhes, do primeiro curso de Matemática no Brasil, a fim de conhecer como se deu sua organização curricular.

1.4 O PRIMEIRO CURSO DE MATEMÁTICA EM UNIVERSIDADE BRASILEIRA

O Brasil sofreu diversas influências estrangeiras em várias áreas; no sistema educacional não foi diferente. O relato histórico até aqui exposto – que se retoma brevemente para fins de contextualização deste tópico – mostra que, inicialmente, na Colônia, eram os jesuítas que atuavam na área educacional, razão pela qual definiam como deveria ser organizado o ensino e quais os seus objetivos. Entretanto, com a sua expulsão, os colégios existentes foram fechados, e a retomada do sistema educacional do país contou com outras intervenções. O período pombalino, responsável pela reforma do ensino no Brasil, trouxe novas concepções.

Um dos problemas que dificultava o desenvolvimento da educação na Colônia era a falta de livros. Isso foi sendo alterado, pois, com a reforma, as "(...) escolas superiores criadas desde 1808 tinham currículos calcados em modelos franceses e muitos dos livros adotados eram da mesma origem." (CUNHA, 1980, p. 138).

Assim, entre os livros utilizados na Academia Real Militar, em 1810, muitos eram franceses, como os de álgebra, cálculo diferencial e integral de Lacroix, geometria descritiva de Monge, trigonometria esférica de Lagendre.

A justificativa para o uso desses materiais é apresentada por Cunha (1980) de forma sistemática. Inicialmente, ele afirma que o fato de as línguas portuguesa e francesa advirem da mesma origem – neolatina – foi um facilitador para o estudo dos livros franceses, assim como para as navegações. Outra observação importante é que os franceses eram reconhecidos pelo acúmulo de bens produzidos pelos senhores feudais, mais tarde transformados em obras artísticas e construções grandiosas, tudo a demandar conhecimentos matemáticos. Tal dado revela-se importante, considerando que, ao se falar da educação no Brasil, está-se tratando de uma nação em construção, com influências culturais diversas. Por último, "(...) a França oficialmente católica, como Portugal, permaneceu fiel à ortodoxia em matéria de religião" (CUNHA, 1980, p. 133), o que interessava a Portugal e, de efeito, ao Brasil, enquanto a Inglaterra apoiava a Reforma Protestante. Por fim,

> No reinado de José I, em Portugal, a chamada "europeização" do país se fez com intensa utilização das novas ideologias francesas, principalmente no que se refere à educação escolar. Nessa época, uma elite intelectual ativa, conhecedora dessas ideologias, os "estrangeirados" – o principal deles era o próprio Pombal –, foi buscar na França as idéias que convinham às lutas políticas que se desenvolviam no seu país. (CUNHA, 1980, p. 135).

Portanto, as ideias francesas chegaram com facilidade ao Brasil e foram responsáveis por mudanças tanto do Ensino Superior quanto do Ensino Secundário. Em 1875, por exemplo, a Escola de Minas de Saint-Etienne (instituição francesa) foi usada como referência para a Escola de Minas de Ouro Preto:

> A Escola de Minas de Ouro Preto esteve ligada estreitamente, por décadas, à Escola de Minas, ao Museu e à Academia de Ciências de Paris. Para estas instituições mandava coleções geológicas e delas recebia professores, livros, coleções geológicas e técnicas pedagógicas. (CUNHA, 1980, p. 139).

No entanto, segundo Cunha (1980), a escola criada em Ouro Preto, mesmo tendo como exemplo uma excelente instituição francesa, teve problemas na sua implantação, pois não foram levadas em consideração as particularidades da região, como o clima.

Por certo, as instituições francesas colaboraram sobremodo para o ensino superior do Brasil, mas essa influência precisava ser avaliada e adaptada à realidade local, inclusive no ensino secundário. “O ensino secundário também a sofria, pois a legislação e os livros empregados na França eram utilizados frequentemente como paradigma para esse grau escolar.” (CUNHA, 1980, p. 139).

Em 1856, o Colégio Pedro II (RJ) sofreu uma reforma e determinou-se a utilização de livros franceses, como *Élements de Chimie précedés de notions de Physique*[9], de Guérin-Varry. Alguns anos se passaram e, em 1883, Antônio Henrique Leal apresentou no Congresso de Instrução um parecer que propunha que o ensino secundário seguisse os preceitos do conselho superior da instrução pública da França, reforçando a utilização de livros franceses traduzidos para o português. Portanto, nessa época, a França dominava as questões culturais do Brasil, com o apoio do governo.

Mais uma importante influência da França no Brasil deu-se com o estudo secundário para as mulheres, pois na França, com o Decreto de 1882, as mulheres já tinham seus direitos resguardados. Os colégios religiosos para moças no Brasil foram, assim, se multiplicando, e a formação oferecida lhes propiciava, segundo Cunha (1980), sair “(...) preparadas para a vida de sociedade e falando fluentemente seu francês, senhorinhas capazes de se tornarem esposas e colaboradoras de homens públicos, sobretudo de diplomata.” Assim, pode-se considerar que “[a] Inglaterra foi o

---

[9] Elementos de Química precedentes de noções de Física (tradução nossa).

pólo dominante em termos de política e de economia, e a França, em termos culturais." (CUNHA, 1980, p.141).

Deste modo, observa-se que o ensino secundário no Brasil sofreu influências europeias, o que não diferiu do ensino superior, mais especificamente da primeira faculdade de Matemática do Brasil.

Nesse cenário, a Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras (FFCL) da USP, reitera-se, foi a responsável pela criação, implantação e implementação do primeiro curso de Matemática, pois era composta de seções que abrangiam as Ciências Matemáticas, Físicas, Químicas, Naturais, Sociais e Políticas, além de Geografia e História.

O decreto nº 6.283, de 25 de janeiro de 1934, em seu o capítulo II, trata especificamente da FFCL e das suas subseções. O art. 8º, de sua feita, detalha as cadeiras fundamentais de cada curso e, mais à frente, no art. 10, estipula-se a organização temporal em relação aos componentes curriculares do curso de Matemática. Veja-se:

> **Art. 10** O curso para licença cultural será e seriado e de três anos, em cada uma das secções e sub-secções que compõem a Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, abrangendo todas as matérias da respectiva secção ou sub-secção e outras afins ou fundamentais, distribuídas da seguinte forma, pelos três anos:
> II - Ciências Matemáticas:
> 1º ano - Geometria (projetiva e analítica), Análise matemática;
> 2º ano - Análise matemática, Cálculo Vetorial e Elementos de Geometria Infinitesimal, Física Geral e Experimental;
> 3º ano - Mecânica Racional e Elementos de Mecânica Celeste, Física Geral e Experimental, História das Matemáticas. (BRASIL, 1934).

Denota-se que as disciplinas criadas inicialmente não se diferem de forma substancial do currículo geral e o de bacharelado de Ciências Físicas e Matemáticas da Escola Central. No entanto, a princípio poucas cadeiras foram criadas para o curso de Matemática devido à falta de profissionais para ministrar as aulas.

Deste modo, o movimento de consolidação do curso de Matemática no Brasil, consubstanciado nas condições de sua criação, assim como a formação de seu quadro de professores e na forma como se deu a organização das cadeiras com o passar dos anos, merece especial atenção nesta pesquisa, considerando os obstáculos enfrentados.

Com efeito, o curso de Matemática, ao ser criado no Brasil, encontrou algumas dificuldades, pois não havia professores qualificados para assumir as cátedras[10].

> Theodoro Ramos (1895-1935), pesquisador da Escola Politécnica, foi incumbido da importante missão estudar o funcionamento das universidades européias e contratar professores de alto nível científico para lecionar e formar a nova elite intelectual brasileira. Foram contratados pesquisadores na Itália, França e Portugal. Houve, também, algumas contratações de docentes no Brasil. (CAVALARI, 2012, p. 17).

Os dois primeiros professores a serem contratados foram os italianos Luigi Fantappiè e Gleb Vassielievich Wataghin, os únicos docentes a atuarem nos dois primeiros anos de funcionamento do curso. Eles contaram com a ajuda dos assistentes brasileiros Omar Catunda, Ernesto Luiz de Oliveira Júnior e Fernando Jorge Larrabure. O currículo desses dois primeiros anos contemplava as seguintes cátedras: Análise Matemática, Mecânica (precedida de Cálculo Vetorial), Geometria (Projetiva e Analítica) e História das Matemáticas.

A contratação de italianos, segundo Cavalari (2012), pode ter tido motivação política, pois, em entrevista concedida a Cavalari, Ubiratan D'Ambrosio, aluno do curso de Matemática da USP, na época, alegou que havia uma "pressão para que fossem contratados cientistas políticos e sociais da Itália." (D'AMBROSIO apud CAVALARI, 2008, p. 17). Portanto, por mais que os professores contratados fossem bons, a Matemática na Itália naquela época estava defasada em relação à francesa e alemã, portanto, a única explicação para essa contratação era a motivação política.

Em 1936, outro professor italiano foi contratado, Giacomo Albanese (1890-1948), por indicação do Fantappiè, para assumir a cadeira de Geometria:

> Fantappiè, no período que esteve no Brasil, lecionou sempre disciplinas diferentes, que versaram sobre Teoria dos Funcionais Analíticos, Teoria das Equações Diferenciais Ordinárias e Equações Derivadas Parciais até Equações Lineares de Segunda Ordem, Teoria dos Números, Teoria dos Grupos de Substituição e Equações Algébricas (como era chamado, naquela época, Teoria de Galois), Teoria dos Sistemas de Equações Derivadas Parciais, Lineares e Diferenciais Totais, Funções Elípticas, Grupos de Lie, Cálculo Diferencial Absoluto, Relatividade Generalizada e Análise Geral (uma introdução à Topologia). Já Albanese lecionou as disciplinas de Geometria Diferencial e Fundamentos da Matemática. (DIAS, 1981-84 apud CAVALARI, 2012, p. 18).

[10] Termo usado antigamente para o cargo de professor universitário. Para assumir a cátedra, era necessário ter conhecimento reconhecido pela comunidade científica.

Porém, no final de 1939, com a deflagração da Segunda Guerra Mundial, o Fantappiè retornou a Itália, e seu assistente, Omar Catunda, assumiu a cátedra de Análise Matemática e teve como assistente um professor, também brasileiro, Cândido Lima da Silva Dias. Em 1940, outros brasileiros iniciaram a carreira docente no curso de Matemática: Benedito Castrucci, como auxiliar da cátedra de Geometria, e Fernando Furquim de Almeida, que se tornou responsável pela cátedra de Complementos de Matemática, criada naquele ano (CAVALARI, 2012).

A cátedra de Geometria funcionou até abril de 1942, quando Albanese também retornou a Europa por conta da II Guerra Mundial. Em virtude disso, a cátedra foi dividida em duas: ‘Geometria Analítica, Projetiva e Descritiva’, ministrada no primeiro ano pelo professor Benedito Castrucci, e ‘Complementos de Geometria e Geometria Superior’, ministrada pelo professor Catunda, no segundo ano do curso, e pelo professor Cândido Dias, no terceiro ano (ANUÁRIO DA FFCL/USP, 1939-1949).

No ano seguinte, 1943, ainda influenciado pela guerra, Fernando de Azevedo, diretor da FFCL/USP, pede demissão, e o médico André Dreyfus é nomeado Diretor. (PIRES, 2006). Dreyfus era formado em Medicina pela Faculdade de Medicina do Rio de Janeiro e havia sido assistente da Cadeira de Histologia e Embriologia da Faculdade de Medicina de São Paulo. Após, foi contratado para atuar no curso de Biologia Geral da FFCL da USP, tornando-se professor catedrático de Biologia Geral. Desenvolveu várias pesquisas e realizou diversos cursos e conferências, tanto no Brasil como no exterior. “É Dreyfus que em 1944, a convite do “State Department”, visitou os Estados Unidos da América do Norte, com duplo objetivo: fazer conferências sobre seus trabalhos originais e procurar professores para as cadeiras vagas da Faculdade de Filosofia.” (PIRES, 2006, p. 237).

Nesta viagem, Dreyfus fez vários convites a professores renomados para que ocupassem as cadeiras da FFLC. Um deles foi o francês André Weil, que, a princípio, teve problemas legais para vir ao Brasil, pois, devido à Segunda Guerra Mundial, o Consulado Brasileiro atrasou com a expedição do visto. Em janeiro de 1945 finalmente ocorreu a sua chegada ao Brasil para assumir a cadeira de Análise Superior.

> No momento da criação desta Faculdade, foram contratados professores na Europa, no entanto, na referida década as novas contratações foram realizadas nos Estados Unidos, pois, neste período, em decorrência da Segunda Guerra Mundial, os centros de pesquisas europeus foram desestabilizados e os Estados Unidos criaram programas de acolhimento de

> cientistas. Desta forma, estavam radicados neste país pesquisadores provenientes de diversos países europeus. (CAVALARI, 2012, p. 20).

Como se vê, a guerra influenciou consideravelmente na composição do quadro de docentes da USP, pois professores que lecionavam no Brasil tiveram que retornar a seus países de origem por terem sido convocados. Isso propiciou a vinda de outros professores estrangeiros que buscavam um país neutro para se afastar da guerra. Com essas mudanças e as novas contratações, a influência – até o momento italiana, no curso de Matemática – passou a ser francesa, consequência da presença de Weil, conforme relatado por Silva (2003):

> Ainda na década de 1940 e logo após o término da Segunda Guerra Mundial, alguns matemáticos estrangeiros foram contratados para lecionar em instituições de vários estados. Assim, chegou para trabalhar na USP o matemático francês André Weil, um dos brilhantes matemáticos da sua geração. Ele desembarcou em São Paulo, em 1945, ali permanecendo até 1947. Na França, ele participou do Seminário Gaston Julia, e foi um dos fundadores do grupo Nicolas Bourbaki (Seminário Bourbaki). Logo em seguida, chegaram, também para trabalhar na USP, como professores contratados, Oscar Zariski, Jean Dieudonné, Jean A. F. Delsart, e A. Grothendieck, entre outros. Este último foi ganhador da Medalha Fields, em 1966, durante Congresso Internacional de Matemáticos, realizado em Moscou. (SILVA, 2003, p. 137).

O professor Weil era matemático e fundador de um grupo de matemáticos franceses, nomeado de Grupo Nicolas Bourbaki, a ser tratado com mais detalhes em outra seção. Os estudos deste grupo passaram a influenciar consideravelmente na organização do Curso de Matemática da USP, pois, após o retorno dos professores italianos à Europa, este curso contava apenas com professores brasileiros, que reconheciam a competência das pesquisas de Weil. Assim, foi possível colocar em prática as ideias do grupo Bourbaki e expandir as cátedras do curso de Matemática.

Verifica-se que a criação do primeiro curso superior de Matemática não foi um processo tão simples, mas permeado de diversas situações que atravancaram seu desenvolvimento. As questões sociais e políticas influenciaram de tal forma que os primeiros professores contratados para assumir as cátedras foram escolhidos não por competência, conhecimento ou desenvolvimento científico no país de origem.

As primeiras cátedras, inclusive, eram direcionadas a assuntos essenciais ao desenvolvimento de outras profissões e não havia uma preocupação em formar professores de Matemática para o ensino secundário. As mudanças no quadro de professores da Faculdade de Matemática promovidas por conta do contexto da

Segunda Guerra Mundial foram que colaboraram para um amadurecimento e expansão do curso.

Viu-se que os primeiros professores que atuaram nesse curso foram italianos e poucas eram as cadeiras na época. Com a sua saída, houve a vinda de professores franceses, o curso consolidou e houve a expansão da quantidade de disciplinas oferecidas.

À vista disso, cabe melhor analisar a atuação desses professores franceses a fim de identificar quais foram as intervenções promovidas para a consolidação do curso de Matemática da USP para, posteriormente, tratar-se do movimento de organização da matriz curricular. Acreditamos que, a partir destes dados, será possível dissertar sobre a influência francesa no nosso objeto de estudo, o ensino da Álgebra Linear e assim assimilar como ela surge no currículo do ensino superior.

1.4.1 A modernização do primeiro curso superior de Matemática no Brasil

Conforme já discutido, sabe-se que o primeiro departamento/curso de Matemática do Brasil foi criado pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras na Universidade de São Paulo (USP), em 1934, voltado "(...) para a formação de bacharéis, licenciados, bem como pesquisadores em Matemática no Brasil, e é neste departamento que atuarão como professores alguns importantes membros do grupo Nicolas Bourbaki." (PIRES, 2006, p. 3).

Viu-se, ainda, que a contratação de professores brasileiros após a saída dos professores italianos do curso de Matemática da USP não foi suficiente, e logo foram contratados novos professores, desta vez de origem francesa, muitos deles membros do grupo Bourbaki.

O Bourbaki começa a atuar no Brasil praticamente no mesmo momento em que as propostas do Movimento da Matemática Moderna (MMM) – surgido nos Estados Unidos logo após a Segunda Guerra Mundial – começaram a ser discutidas no país. A mudança no ensino proposta pela MMM teve um alcance mundial e, no final da década de 1950, nos EUA, já existia um movimento que discutia a reforma do ensino secundário, com apoio do governo americano, bem à frente dos países europeus, e essa nova perspectiva não demorou a chegar ao Brasil (OLIVEIRA; SILVA; VALENTE, 2011).

O MMM influenciou consideravelmente o ensino e a aprendizagem da Matemática básica no Brasil, tanto que há diversos trabalhos publicados que enfatizam essa influência. Uma breve pesquisa realizada no site da BDTD, usando o termo “Movimento da Matemática Moderna”, resultou em 61 resultados; em alguns estudos o termo aparece no título, em outros consta do resumo ou assunto. Se a mesma busca for realizada no Portal de Periódicos da CAPES, o resultado aumenta para 92 publicações. Portanto, são números relativamente altos sobre este tema. Porém, interessa a esta pesquisa conhecer qual a influência desse Movimento no curso de Matemática da USP. Oliveira, Silva e Valente (2011) ajudam a elucidar tal influência:

> Na década de 60, com a disseminação do Movimento da Matemática Moderna em âmbito internacional, o Brasil inaugura um novo patamar na genealogia profissional do professor de Matemática. Nesse tempo histórico (...), amplia-se o número de cursos de Licenciatura em Matemática como também o acesso da população ao ensino secundário. Com a penetração da Matemática Moderna, a matriz de formação dos professores de Matemática, caracterizada pelo modelo “3+1” (três anos de conteúdos específicos e um ano de conteúdos pedagógicos) prevalece. Entretanto, com a chegada do Movimento da Matemática Moderna (MMM), o cenário brasileiro da profissionalização do professor de Matemática sofre grandes alterações a partir da proliferação de cursos de treinamento e capacitação oferecidos aos professores em exercício. (OLIVEIRA; SILVA; VALENTE, 2011, p. 88).

Observa-se que as mudanças no curso de Matemática promovidas pelo MMM introduziram-se na USP por meio do grupo francês Bourbaki e se consubstanciaram na promoção de uma formação específica do professor de Matemática com conteúdos pedagógicos.

Cientes dessa influência, cabe investigar o peso do estruturalismo matemático francês no ensino superior brasileiro e como se deu essa atuação do Bourbaki na implementação do curso de Matemática da USP e na formação de professores e matemáticos nessa Universidade.

A intenção é refazer esse caminho histórico para identificar tais influências na composição da matriz curricular do primeiro curso de Matemática da USP, explorada na próxima seção deste estudo.

A pesquisa de Pires (2006) nos ajudará a percorrer este caminho, considerando que sua tese “(…) tem um duplo objetivo: retratar o grupo Bourbaki e o Departamento de Matemática da Faculdade de Filosofia da USP e investigar a influência da presença destes professores, especificamente neste Departamento, bem, como seus desdobramentos.” (PIRES, 2006, p. 3). Acreditamos que, ao percorrer os mesmos caminhos da aludida autora, conseguiremos entender o porquê do surgimento da Álgebra Linear no Ensino Superior.

O grupo Bourbaki começa sua história em 1920 na Escola Normal Superior em Paris, e sua fundação oficial foi em 10 de dezembro de 1934 em Paris. Neste momento, estavam presentes alguns membros do grupo, a saber, Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Delsarte, Jean Dieudonné, René de Possel e André Weil. Suas manifestações surgiram de inquietações com a Matemática nas faculdades francesas, mais especificamente com o ensino do Cálculo Diferencial e Integral (CDI) e a compreensão da Álgebra Moderna, que aparece em 1930 com a obra de Van der Waerden. Segundo Pires (2006), a Álgebra Moderna de Waerden causou embaraços a alguns estudiosos, pois não conseguiam compreendê-la.

Com esta declaração, percebe-se que os conhecimentos algébricos, desde a criação do grupo, era uma de suas preocupações e o primeiro departamento de Matemática do Brasil contou com a atuação de vários membros do grupo. Por conseguinte, permite-se concordar com a seguinte proposição: “podemos afirmar que o matemático Zariski e os membros do grupo Bourbaki, em especial, Weil, Dieudonné, Delsarte, exerceram grande influência na pesquisa e na formação dos matemáticos da FFCL da USP.” (CAVALARI, 2012, p. 22).

Para se compreender que tipo de influência ocorreu, cumpre fazer uma breve apresentação desses professores, a fim de conhecer suas áreas de pesquisa e atuação, seja no Brasil ou em outros países, para que se possa avaliar seus impactos no curso de Matemática da USP.

Começa-se por André Weil (1906-1998), que chegou ao Brasil em 1945 e permaneceu até 1947. Pode ser considerado o líder do grupo no seu início e, provavelmente, foi quem cunhou o nome Bourbaki. Weil defendeu sua tese de doutorado *“L’arithmétique sur les courbes algébriques”*[11] sob orientação de Jacques Hadamard[12], na Universidade de Paris, em 1928. Atuou em algumas Universidades antes de chegar ao Brasil: a primeira foi a Universidade de Aligard Muslim, na Índia, de 1930 a 1932; depois, de volta à França, atuou na Universidade de Marselha e

[11] Aritmética em curvas algébricas (tradução nossa).

[12] “(...) foi um matemático francês que provou o teorema do número primo. (...) Doutorou-se em 1892 com uma tese sobre funções definidas por séries de Taylor”. (UNIVERSIDADE DE COIMBRA, 2017). Disponível em: https://www.uc.pt/fctuc/dmat/departamento/bibliomat/servicos/copy_of_matematicos/Hadamard-J.

depois na Universidade de Strasbourg, até 1939. Como oficial da reserva, e por circunstância da guerra e para não ser preso por insubmissão, incorpora-se às forças armadas francesas até 1940. "Em 1945 vem ao Brasil, onde permanece até 1947 como professor contratado da Universidade de São Paulo" (PIRES, 2006, p. 47-48), atuando inicialmente na cadeira de Análise Superior. Após, retornou aos EUA atuando na Universidade de Chicago e, alguns anos depois, no *Institute for Advanced Study,* de Princeton:

> Sua obra matemática relativa sobretudo à teoria dos números e à geometria algébrica é vasta. (...) Weil, após ter demonstrado a hipótese de Riemann para curvas algébricas definidas sobre um corpo finito, ao procurar sua generalização às equações polinomiais a um número qualquer de variáveis, foi levado a elaborar diversas conjecturas que suscitaram muitos desenvolvimentos da geometria algébrica. (PIRES, 2006, p. 48).

Weil também é conhecido por formulação de conjectura que contribuiu para a demonstração do teorema de Fermat e por seus trabalhos serem utilizados até hoje como base para várias outras pesquisas, como na geometria algébrica tridimensional e na topologia das variedades algébricas. Weil contribuiu com o grupo Bourbaki até 1956.

Outro importante matemático para o grupo e que igualmente atuou na USP foi Jean Alexandre Eugéne Dieudonné (1906–1992). Sua tese, defendida em 1931, tem como título *Recherches sur quelques problèmes relatifs aux polynômes et aux fonctions bornées d'une variable complexe*[13].

Dieudonné começou a lecionar em Bordeaux e em 1933 atuou na faculdade em Rennes, também na França. No ano seguinte, ingressou no grupo Bourbaki, que por ele é considerado um dos acontecimentos mais importantes de sua vida. A primeira oportunidade que Dieudonné teve no Brasil foi para ministrar um curso de Álgebra Moderna e Grupos de Galois em 1946 e, no ano seguinte, o de Topologia Plana. Em novembro de 1947, retornou aos Estados Unidos para a Faculdade de Ciências de Nancy. "Seus trabalhos abrangem a álgebra, os espaços vetoriais topológicos, a topologia, os grupos de Lie, a análise. A ele se deve a noção de espaço "paracompacto", útil em topologia algébrica." (PIRES, 2006, p. 46).

---

[13] Pesquisa sobre alguns problemas relacionados a polinômios e funções limitadas de uma variável complexa.

Com o retorno de Weil e Dieudonné aos EUA, foi necessária nova contratação: a do professor francês Jean Delsarte (1903–1968), em 1948. Delsarte contribuiu consideravelmente com a consolidação dos Bourbaki. Defendeu sua tese *Les rotations fonctionnelles*[14] em Paris, no ano de 1928. Logo em seguida começou a atuar como Mestre de Conferências na Faculdade de Ciências de Nancy e, posteriormente, como professor de Análise Superior. Nas suas idas a Paris, conheceu, em 1930, o grupo de matemáticos franceses, que posteriormente seria chamado de Bourbaki. Envolveu-se em atividades administrativas do grupo, colaborando com publicações "(...) referentes a estas atribuições, relativos à organização da pesquisa científica, ao ensino superior nas faculdades de ciências francesas e um projeto de reforma do ensino superior." (PIRES, 2006, p. 49).

A Segunda Guerra Mundial também provocou grandes mudanças na vida científica de Delsarte, pois, no período de 1938 a 1940, comandou a artilharia francesa, só retornando à universidade em 1941, onde continuou seus estudos e,

> (...) foi conferencista em diversas universidades depois de 1947, particularmente, na Índia, nos E.U.A. e na América do Sul. Ficou 4 meses em Princeton, em 1947; 4 meses na Universidade de São Paulo, Brasil, em cada ano de 1948 a 1951. Entre 1962-1965, ele permanece três meses a cada ano no México. (PIRES, 2006, p. 50).

A contratação de Delsarte para a USP foi indicada por Weil em 1948 para assumir a cadeira de Análise; porém, os registros, segundo Pires (2006), indicam que ele foi professor visitante e desenvolveu um curso de Teoria das Distribuições no período que esteve no Brasil.

Finalmente, outro importante professor foi Oscar Zariski (1899–986), que não era membro dos Bourbaki, mas trouxe contribuições tanto para o grupo como para o curso de Matemática da USP. Zariski era natural da Ucrânia, no entanto, continuou seus estudos na Itália após sua cidade, Kiev, ter sido devastada pela guerra. Com sua mudança, teve contato com grandes matemáticos em Roma, que influenciaram seus estudos para a área da geometria algébrica, daí sua tese defendida em 1924 estar relacionada à Teoria de Galois. Alguns anos depois, por problemas políticos, Zariski foi para os EUA e lá teve contato com os métodos topológicos, conseguindo reproduzir novos conhecimentos em seu trabalho. É o que relata Pires (2006):

---

[14] Rotações funcionais.

> Seu trabalho topológico concentrou-se principalmente no grupo fundamental; muitas das idéias que abriu caminho eram inovações de topologia tanto quanto de geometria algébrica e tornaram-se independentes nos dois campos desde então. Em 1937, Zariski reorientou completamente sua pesquisa e começou a introduzir idéias da álgebra abstrata na geometria algébrica, influenciado pelos trabalhos de Emmy Noether e B L van der Waerden, trabalhando completamente as fundações do assunto sem o uso de métodos topológicos ou analíticos. Na Universidade de Johns Hopkins, entre 1939 e 1940, Zariski realizou seu projeto de aplicar a álgebra moderna às fundações da geometria algébrica. (PIRES, 2006, p. 63).

Estes trabalhos de Zariski serviram de base para a mudança da geometria algébrica, que, até então, não era tão conhecida entre seus pares, mas atualmente tem maior destaque. “O livro mais famoso de Oscar Zariski é o *Algebre Commutative,* um trabalho de dois volumes escrito conjuntamente com Pierre Samuel. O primeiro volume apareceu em 1958 e o segundo em 1960.” (PIRES, 2006, p. 64).

Zariski esteve no Brasil em 1945 e ministrou um curso de curta duração na USP: “(...) foi assistido por André Weil, que nesta universidade também se encontrava. Zariski e Weil aprenderam muito nas discussões, frequentemente Weil argumentava sobre o material que Zariski apresentava.” (PIRES, 2006, p. 64). Mesmo Zariski não sendo membro do grupo Bourbaki, o encontro no Brasil com Weil trouxe grandes contribuições para as pesquisas bourbakistas.

Desta breve apresentação acerca de alguns dos professores que atuaram, diretamente e indiretamente, no curso de Matemática da USP, percebe-se que em muitas das pesquisas por eles desenvolvidas os conceitos algébricos, como espaço vetorial, equações polinomiais, matrizes, geometria algébrica, transformações lineares, estavam presentes, sejam como foco da pesquisa ou como base para compreender outros conceitos.

Inclusive a obra de Van der Waerden, que a princípio gerou aos membros do Bourbaki grandes dificuldades de compreensão, é bastante usada por alguns deles. Com o título *Modern Algebra,* o livro trata de diversos temas que compõem a ementa da atual disciplina de Álgebra Linear. São eles: vetores no espaço, equações de segundo, terceiro e quarto grau, dependência linear e produto direto. Além disso, o conceito de matriz é usado praticamente em todos os capítulos como instrumento para a resolução de exercícios. (WAERDEN, c1949-1950).

Considerando que o grupo Bourbaki organizava a Matemática começando pela “(...) teoria dos conjuntos e é seguida, nesta ordem, pela álgebra (abstrata), topologia geral, funções de variáveis reais (incluindo-se aí o cálculo comum), espaços vetoriais topológicos e a teoria geral e a teoria geral da integração” (GILLISPIE, 2007, p. 333), na década de 1950, no Brasil, as cadeiras de Complementos de Geometria, Geometria Superior e a de Análise Superior sofreram grandes influências da Matemática bourbakista (PIRES, 2006).

Consideramos que esses fatos revelam elementos históricos de que a disciplina de Álgebra Linear surge na USP por influência dos Bourbaki, que atuaram no departamento de Matemática. No entanto, para desvelar com mais clareza sobre as disciplinas desse curso, oferecido inicialmente pela USP, convém analisar como se deu o movimento de constituição da matriz curricular.

1.4.2 O movimento de constituição da Matriz Curricular do primeiro Curso de Matemática no Brasil

Uma vez reconhecida a importância dos conteúdos matemáticos para o avanço do Brasil e compreendido como surgiu o primeiro curso de graduação em Matemática no país, bem como as influências sobre este curso, segue-se analisando o movimento de constituição das matrizes curriculares do curso de Matemática, para identificar elementos históricos de quando a Álgebra Linear se tornou componente curricular obrigatório no Brasil.

De volta à criação da USP, em 1934, o Decreto nº 6.283[15] definiu que o curso de Matemática faria parte da seção de Ciências da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras.

> **Art. 8º** A Secção de Ciências compreenderá as seguintes sub-secções com as suas respectivas cadeiras fundamentais:
> I - Ciências Matemáticas:
> 1) Geometria (projetiva e analítica). História das Matemáticas;
> 2) Análise matemática (inclusive elementos de cálculo das probabilidades e de estatística matemática);
> 3) Cálculo Vetorial e Elementos de Geometria Infinitesimal. Mecânica Racional e Elemento de Mecânica Celeste.
> (...)
> **Art. 10** O curso para licença cultural será e seriado e de três anos, em cada uma das secções e sub-secções que compõem a Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, abrangendo todas as matérias da respectiva secção ou sub-secção e outras afins ou fundamentais, distribuídas da seguinte forma, pelos três anos:
> (...)
> II - Ciências Matemáticas:
> 1º ano - Geometria (projetiva e analítica), Análise matemática;

[15] Disponível em: http://citrus.uspnet.usp.br/leginf/criacao/decreto6283.htm

> 2º ano - Análise matemática, Cálculo Vetorial e Elementos de Geometria Infinitesimal, Física Geral e Experimental;
> 3º ano - Mecânica Racional e Elementos de Mecânica Celeste, Física Geral e Experimental, História das Matemáticas.
> (...)
> **Art. 11** Terminado o curso, em qualquer das secções ou das sub-secções, ao candidato será dada licença cultural respectiva, considerando-se licenciado em filosofia em ciências ou letras. (BRASIL, 1934).

Contudo, mesmo com o decreto definindo as disciplinas que deveriam ser ministradas, a quantidade de professores contratados para atuar no curso, inicialmente, não foi suficiente, e as disciplinas oferecidas nos dois primeiros anos foram apenas a de Análise Matemática, Geometria (analítica e projetiva) e Mecânica Racional, assim seguindo até 1942.

A cátedra de Geometria funcionou até abril de 1947, quando o professor Albanese retornou à Europa por motivo da guerra, como já discorrido. Diante disso, a cátedra de Geometria foi dividida em duas: 'Geometria Analítica, Projetiva e Descritiva' e 'Complementos de Geometria e Geometria Superior' (ANUÁRIO DA FFCL/USP 1939-1949, p.5):

> Nesta cadeira, no 2º ano, em Complementos de Geometria, pode-se dizer, embora não esteja explicitado no programa, trata-se de Álgebra Linear. São contemplados no conteúdo programático: espaço vetorial, transformações lineares sobre um espaço vetorial, matrizes, determinantes, espaço vetorial normado, álgebra de Grasmmann e suas aplicações ao estudo dos sub-espaços de um espaço vetorial, entre outros. (PIRES, 2006, p. 340).

Portanto, há fartos elementos históricos de que os conteúdos que compõem a disciplina de Álgebra Linear atualmente têm seu espaço na faculdade de Matemática desde essa época. Ademais, no Anuário da FFCL da USP relativo ao período de 1934-1935 – ao apresentar as ementas das disciplinas oferecidas no curso de Matemática e relatar do que se trata a cadeira de Cálculo Vetorial que compõe o quadro de disciplinas do 2º ano do curso de Matemática –, nota-se que alguns dos conteúdos que atualmente compõem a ementa da disciplina de Álgebra Linear aparecem também naquelas ementas. Nitrini (2009) confirma essa assertiva:

> No programa de Cálculo Vetorial, que precedia os estudos de Mecânica Racional, constavam, no primeiro ano (...): *Elementos de álgebra vetorial* - grandezas escalares e vetoriais, grandezas vetoriais livres e localizadas, vetores livres, convenções sobre vetores; soma de vetores, produto de um número real por um vetor, vetores coplanares, vetores não coplanares; produto escalar, produto vetorial; produto misto, duplo produto vetorial; (...). *Complementos de álgebra vetorial* – sistemas de vetores localizados:

> generalidades, sistemas equivalentes de vetores, redução de um sistema de vetores; noções sobre os operadores vetoriais lineares. *Complementos de análise vetorial* – gradiente de uma função escalar de ponto e suas propriedades; rotor de uma função vetorial de ponto e suas propriedades; divergência de uma função vetorial de ponto e suas propriedades; teorema sobre o gradiente, sobre a divergência e sobre o rotor, aplicações; (NITRINI, 2009, p. 60-61).

A disciplina de Cálculo Vetorial não foi ministrada nessa época, todavia o propósito era evidente e pode-se considerar que esses conceitos algébricos já eram reconhecidos como fundamentais para a formação inicial do matemático.

Algumas mudanças aconteceram em 1942, pois o corpo docente foi alterado em virtude da ausência de Albanese, logo, as disciplinas oferecidas também. No início daquele mesmo ano é publicado o Decreto-lei nº 12.511[16], que reorganiza a Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da USP.

> **Artigo 2°** A Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras compreenderá quatro secções fundamentais, a saber:
> **a)** Secção de Filosofia
> **b)** Secção de Ciências
> **c)** Secção de Letras
> **d)** Secção de Pedagogia
> **Parágrafo único –** Haverá uma secção especial de Didática.
> (BRASIL, 1942).

O decreto definiu ainda, em um dos artigos, que no primeiro ano as Ciências Matemáticas seria composta pelas disciplinas Geometria Analítica e Projetiva; Análise Matemática; Física Geral e Experimental; e Cálculo Vetorial. No segundo, Análise Matemática; Física Geral e Experimental; Mecânica Racional; Crítica dos Princípios de Matemática; Geometria Descritiva e Complementos de Geometria; Mecânica Racional; e Crítica dos princípios da Matemática. No último ano, Análise Superior; Geometria Superior; Física Matemática; e Mecânica Celeste e Crítica dos Princípios.

Outrossim, o decreto definia que os discentes, além de cumprir as disciplinas que tratam dos conteúdos matemáticos, também deveriam cursar disciplinas que faziam parte do curso de didática. Veja-se:

> **SECÇÃO XII**
> **Do Curso de Didática**
> **Artigo 21** O Curso de Didática será de um ano e constituir-se-á das seguintes disciplinas:

[16] Disponível em: http://www.al.sp.gov.br/repositorio/legislacao/decreto.lei/1942/decreto.lei-12511-21.01.1942.html.

> 1 - Didática geral
> 2 - Didática especial
> 3 - Psicologia educacional
> 4 - Administração escolar e Educação Comparada
> 5 - Fundamentos biológicos da Educação
> 6 - Fundamentos sociológicos da Educação
> **Artigo 22** Dos candidatos à matricula no curso de didática exigir-se-á a apresentação do diploma de bacharel em qualquer dos demais cursos de que trata este decreto-lei.
> (BRASIL, 1942).

Com a inserção da Didática, nota-se que a ideia de diferenciar a licenciatura do bacharelado começa a acontecer na FFCL da USP. No entanto, somente em 1946, com o Decreto-lei nº 9.092[17], o texto se torna mais explícito:

> Art. 2º O diploma de licenciado ou de bacharel em o novo regime será conferido após quatro anos de estudos, de acôrdo com as condições dos artigos 3º e 4º.
>
> Art. 3º Nos três primeiros anos os alunos seguirão um currículo fixo de cadeiras, cuja discriminação será a atual ou objeto de instruções baixadas pelo Ministro da Educação e Saúde.
>
> Art. 4º No quarto ano de curso os alunos optarão por duas ou três cadeiras ou cursos, dentre os ministrados pela faculdade.
>
> § 1º Para obter o diploma de licenciado, os alunos do quarto ano receberão formação didática, teórica e prática, no ginásio de aplicação e serão obrigados a um curso de psicologia aplicada à educação.
>
> § 2º Os que não satisfizerem as exigências do parágrafo anterior receberão o diploma de bacharel. (BRASIL, 1946).

Com tantas mudanças no currículo do Curso de Matemática, foi necessário repensar sobre a contratação de novos professores para ocupar as novas cadeiras. Dessa vez a sugestão contemplava pesquisadores que residiam nos EUA:

> (...) Afinal, com a Segunda Guerra Mundial os centros de pesquisas, principalmente os Europeus, foram desestabilizados e os Estados Unidos criaram um programa de acolhimento de cientistas, em especial com o apoio da Fundação Rockefeller. Assim, conseguiram reunir em seu território excelentes pesquisadores de diversos países europeus. (CAVALARI, 2012, p. 37).

Enquanto não chegavam os novos professores, alguns cursos e seminários eram organizados e realizados. No ano de 1944, já com professor brasileiro atuando

---

[17]Disponível em: http://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1940-1949/decreto-lei-9092-26-marco-1946-416948-publicacaooriginal-1-pe.html

no Departamento de Matemática, foram ministrados os cursos de Equações Diferenciais e Séries de Fourier, além de seminários que tratavam de Análise.

Com a vinda dos professores franceses, a começar por André Weil, em 1945, novas mudanças ocorreram na matriz curricular do curso de Matemática em 1946. Segundo Cavalari (2012), no primeiro ano acrescentou-se o conteúdo Complementos da Matemática, no segundo, Geometria Descritiva, Analítica e Projetiva e, no último ano, Análise Matemática e Álgebra (Topologia plana):

> Com a chegada à USP desses e de outros matemáticos estrangeiros, os alunos de São Paulo tomaram contato com as principais correntes de desenvolvimento da Matemática da época, passando a estudar tópicos como Análise Funcional; Espaços Métricos; Teoria dos Conjuntos, em nível avançado; Topologia Geral; Álgebra, Álgebra Linear, etc. (SILVA, 2003, p. 137).

Entre 1948 e 1953, vários cursos foram ofertados pelos professores franceses membros do Bourbaki: cursos de Teoria das Distribuições; Espaços Vetoriais Topológicos e Teoria da Integração; Hipergrupos e Álgebra de Lie; Topologia Algébrica, entre outros. Inclusive, o curso de Espaços Vetoriais Topológicos, ministrado por Grothendieck[18], em 1953, foi publicado posteriormente com o título *Espaces Vectoriels topologiques, Cours à Université de São Paulo*[19] (PIRES, 2006).

Em 1954, outras mudanças ocorreram:

> (...) a estrutura curricular do curso era praticamente igual a adotada após a reforma de 1946. No entanto, no terceiro ano, a disciplina de Álgebra passou a ser lecionada juntamente com a de Geometria Superior e conteúdos relativos à Topologia passaram a compor a cadeira de Análise Superior. (CAVALARI, 2012, p. 46).

O modelo de currículo “3+1” sofreu alterações em 1962 promovidas pelo Conselho Federal de Educação por meio do Parecer nº 292/62, que estabelece os currículos mínimos dos cursos de licenciatura com matérias fixas para o bacharelado e licenciatura:

> (...) a formação do licenciando deveria incluir, além da parte de conteúdo fixada no currículo de cada curso, estudos que o familiarizassem com os dois aspectos imediatos da situação docente: o aluno e o método. Para isso, previa matérias pedagógicas de caráter obrigatório, como a Psicologia da

[18] Nascido em Berlim e, por conta da guerra civil espanhola, erradicou-se na França. Defendeu sua tese ‘Produtos Tensoriais Topológicos e Espaços Nucleares’ em Nancy. Foi colaborador do grupo Bourbaki.
[19] Espaços Vetoriais Topológicos, cursos na USP.

> Educação, incluindo Adolescência e Aprendizagem, Didática e Elementos de Administração Escolar, além da Prática de Ensino das matérias que seriam objeto de habilitação profissional, sob a forma de estágio supervisionado. (OLIVEIRA; SILVA; VALENTE, 2011, p. 92).

O ano de 1962, deste modo, torna-se um marco para o curso de Licenciatura, pois foi a partir desse parecer que se institui a prática de ensino no curso. Com isso, o estágio supervisionado na licenciatura torna-se uma realidade no nosso país. Com o passar dos anos, a licenciatura foi ocupando seu espaço, pois se percebeu que havia necessidade de padronizar essa formação, motivada pelo grande crescimento das escolas secundárias no país, como já discutido anteriormente.

Sendo assim, em 1966, segundo Cavalari (2012), o núcleo comum da matriz do curso de Matemática estava organizada da seguinte forma.

Tabela 1 – Disciplinas do núcleo comum da matriz do curso de Matemática da USP no ano de 1966

Primeiro ano	Geometria Analítica, Álgebra, Física I e Cálculo Diferencial e Integral I.
Segundo ano	Álgebra Linear, Física II ou Mecânica, Cálculo Diferencial e Integral II, Desenho Geométrico e Geometria Descritiva e Projetiva.
Terceiro ano	Cálculo Diferencial e Integral III, Teoria dos Números, Cálculo Numérico, Introdução a Topologia Geral e Geometria III.

Fonte: elaborada pela autora (2017) com base em Cavalari (2012).

O ano de 1966 consiste em um marco para nossa pesquisa, pois neste momento a disciplina de Álgebra Linear aparece, de forma explícita, na estrutura curricular do curso de Matemática, trazendo consigo evidências de que os membros do grupo Bourbaki, que atuaram na USP, foram fundamentais para essa mudança, já que publicaram alguns fascículos, produzidos coletivamente pelo grupo, que tratavam de Conjuntos, Álgebra, Topologia, Funções de Variáveis Reais, Espaços Vetoriais Topológicos e Integral. (GILLISPIE, 2007).

Após conhecer o processo histórico que culminou na criação das Universidades e as influências que impulsionaram a criação do primeiro curso de Matemática no Brasil, é notável o quanto a França se sobressai nesse contexto. Inicialmente, a sociedade francesa se destaca, ao lado de outros países, com a sua organização do ensino por ter a intenção de formar sujeitos em um nível superior, o que resulta na criação das primeiras Universidades na Europa, ainda no século XIII.

No entanto, a criação dessas primeiras instituições de ensino superior não foi suficiente, pois surgiram novas necessidades. Nas grandes cidades, como Paris, os intelectuais começaram a se interessar por outros tipos de conhecimentos, além daqueles ensinados nos cursos de Artes Liberais, Teologia, Direito e Medicina. Em virtude dessas necessidades foi que em Paris e Oxford estudaram-se, com mais afinco, as obras de Aristóteles, pois o estudo desses tratados ia além da lógica, pois discutia sobre Filosofia e as Ciências greco-árabes, relacionadas à Física, Metafísica e Ética.

Nessa mesma época, Portugal tentava “unir-se à Europa” sócio e politicamente, passando pelo processo de “europeização”, que culminou na fundação de sua primeira Universidade, em 1288, mais uma vez por influência europeia. No entanto, essa instituição não se destacou como as demais da Europa, pois os motivos que levaram à sua criação não foram os mesmos do restante da Europa.

Fica visível na história que a motivação para a criação da universidade em Portugal não foi a necessidade cultural ou a pressão de intelectuais para o desenvolvimento cultural do país, e sim questões políticas da época. Por isso, a Universidade de Lisboa só ganha prestígio por volta de 1.500, com a chegada de Vasco da Gama à Índia e Pedro Álvares Cabral ao Brasil.

Esses acontecimentos motivaram a criação de uma cadeira de Astronomia, que estudava Matemática, na Universidade, pois naquele momento era necessário investir na navegação e artilharia. Esses estudos, posteriormente, chegam ao Brasil para resolver questões práticas da Colônia.

Assim, neste capítulo, percebeu-se que a influência cultural francesa chega a Portugal e posteriormente no Brasil, pois a França era considerada “a sede do pensamento humano” (CUNHA, 1980, p. 132). O começo tardio do ensino superior em Portugal, comparado aos outros países europeus, e os demais acontecimentos na Europa influenciaram no desenvolvimento da Educação e, consequentemente, no ensino da Matemática no Brasil, pois quando Portugal iniciou a ocupação do território brasileiro não havia um contingente de intelectuais suficiente para atender à demanda de Portugal e do Brasil, o que fez com que a Coroa portuguesa se opusesse a todas as tentativas de criação de Universidade no Brasil, visto que uma divisão de seus intelectuais abalaria o seu domínio cultural. Percebe-se que, ao analisar essas questões históricas, é possível compreender por que o curso de Matemática é tão recente no Brasil e como os franceses colaboraram para a consolidação deste curso no país e para a inserção da disciplina de Álgebra Linear nos currículos.

Estudar e conhecer as contribuições de alguns estudiosos, em especial do grupo francês Bourbaki para o curso de Matemática da USP, é uma forma de reforçar que a França foi berço cultural para o desenvolvimento da Universidade na Europa, no Brasil, nos cursos de Matemática e no ensino da Álgebra Linear no Brasil.

Com esta constatação, encerra-se esta seção em direção a um novo caminho, em que é apresentado o surgimento histórico dos conceitos que permeiam a disciplina de Álgebra Linear, visando demonstrar como, quando e por que surgiram os conteúdos que atualmente compõem a ementa da disciplina de Álgebra Linear a fim de relacioná-los com as questões históricas apresentadas neste capítulo.

2 ÁLGEBRA LINEAR: CONSTITUIÇÃO HISTÓRICA E ORGANIZAÇÃO DOS CONTEÚDOS

Este capítulo dedica-se à história do objeto de estudo desta pesquisa: o ensino da Álgebra Linear. Para tanto, foi estruturado em duas partes. A primeira delas apresenta a natureza dessa disciplina de modo a compreender como surgiram os conteúdos que a compõem e quais matemáticos contribuíram para sua expansão e desenvolvimento. Na sequência, aborda-se a inserção da Álgebra Linear no currículo as diferentes perspectivas sobre a organização sistemática dos seus conteúdos.

Sobreleva ressaltar que a presente pesquisa parte dos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural; portanto não se trata de um simples contar da História. Acreditamos que, ao percorrer este caminho, serão identificados os elementos históricos de como, onde e por que começaram os estudos para constituição daquela disciplina até tornar-se componente curricular obrigatório do curso de graduação em Matemática e de tantos outros da área de ciências exatas. Esses pontos serão cruciais para o alcance do objetivo de pesquisa, a saber, o de analisar o movimento de constituição dos conteúdos que compõem a ementa da disciplina de Álgebra Linear nas Instituições de Ensino Superior no Brasil.

Ao longo da história da Matemática, foram muitos os matemáticos que contribuíram de forma singular para o desenvolvimento das diversas áreas que compõem esta ciência. Nesta seção, discorre-se sobre os estudos de alguns desses estudiosos que produziram relevantes conhecimentos relacionados aos conteúdos que compõem a Álgebra Linear atualmente.

Nomes como Euler, Cramer, Frobenius, Leibniz, Hamilton, Peano, Grassmann, Cayley, Banach, entre outros, são trazidos com o propósito de compreender a natureza e o desenvolvimento dos conteúdos que compõem da Álgebra Linear, sem a preocupação de dissertar sobre a vida e obra de cada um.

Para entender o porquê da organização das atuais ementas nas Universidades, teremos como fontes de referências autores como Boyer (1974), Demidov et al. (2017), Dorier (1996, 2000), Garding (1981), Eves (2004), Kleiner (2007) e Moore (1995).

Trata-se de uma abordagem histórica que contribuirá para a apreensão da natureza desses conhecimentos. A história, assim, será usada para revelar o que está posto nos livros em relação ao nosso objeto, pois para se compreender como se deu o início do ensino da Álgebra Linear precisamos conhecer o movimento de constituição dos conteúdos que compõem a sua ementa:

> (...) Não deve apenas traçar as origens dos conceitos, mas também tentar entender como cada um deles evoluiu, até alcançar seu maior grau de generalidade, como é sabido na teoria moderna. Isso implica estimar a importância de todas as diferentes etapas da evolução em relação à maturidade dos conceitos envolvidos, bem como ao potencial de generalização que eles possuem em cada estágio. (DORIER, 2000, p. 4, tradução nossa)[20].

Os conteúdos matemáticos a serem investigados são: matrizes, sistemas de equações lineares, espaço vetorial, transformações lineares, operadores lineares, diagonalização de operadores e produto interno.

> A álgebra linear moderna é baseada na teoria de espaços vetoriais sobre um campo ou, mais geralmente, na teoria de módulos sobre um anel. Por volta de 1930, essa formulação da álgebra linear unificou o assunto e fez dele parte da álgebra abstrata ou moderna. Ainda álgebra linear tem suas raízes históricas em vários ramos da matemática, não apenas um. Na álgebra, suas raízes incluem equações lineares, formas bilineares e matrizes, bem como quatérnios e sistemas numéricos hipercomplexos; em geometria, segmentos de linhas direcionadas, geometria afim e geometria projetiva; e em análise, equações diferenciais lineares e espaços de dimensões infinitas de vários tipos. Finalmente, a álgebra linear tem suas raízes na física do século XIX de Maxwell, Gibbs e Heaviside. (MOORE, 1995, p. 262-263, tradução nossa)[21].

A organização atual da Álgebra Linear não foi sempre assim: ocorreram mudanças com o passar dos anos, motivo pelo qual é necessário discutir sobre a produção desses conhecimentos. Sobre as primeiras apresentações da matéria, Dorier (2000) pontua:

> As primeiras apresentações axiomáticas da álgebra linear e os trabalhos cruciais sobre problemas lineares finalizados são mais ou menos

[20](…) It must not only trace the origins of concepts but also try to understand how each of them evolved, until it attained its highest degree of generality as it is known in the modern theory. This implies estimating the importance of all the different stages of evolution with regard to the maturity of the concepts involved, as well as to the potential for generalization they bear at each stage. (DORIER, 2000, p. 4).

[21] Modern linear algebra is based on the theory of vector spaces over a field or, more generally, on the theory of modules over a ring. Around 1930 this formulation of linear algebra unified the subject and made it a part of abstract, or modern, algebra. Yet linear algebra has its historical roots in various branches of mathematics, not just one. In algebra, its roots include linear equations, bilinear forms, and matrices, as well as quaternions and hypercomplex number systems; in geometry, directed line segments, affine geometry, and projective geometry; and in analysis, linear differential equations and infinite-dimensional spaces of various sorts. Finally, linear algebra has its roots in the 19th-century physics of Maxwell, Gibbs, and Heaviside. (MOORE, 1995, p. 262-263)

> contemporâneos (final da década de 1880). No entanto, os dois aspectos permaneceram bastante independentes até, pelo menos, 1920 e realmente começaram a ser unificados apenas a partir de 1930. No entanto, é bastante surpreendente ver que esses dois aspectos da história recente da álgebra linear coexistiram há mais de 40 anos e ainda tiveram tão pouca influência um sobre o outro. (DORIER, 2000, p. 30, tradução nossa)[22].

Mostraremos a relação entre o desenvolvimento dos conteúdos que compõem a ementa de Álgebra Linear a fim de entender o porquê de terem sido tão independentes. Segundo Garding (1981), a Álgebra Linear tem raízes na geometria, euclidiana e analítica, e na teoria de sistemas de equações lineares, mas nem por isso – frisa-se – houve relação no desenvolvimento de seus conteúdos.

2.1 O MOVIMENTO HISTÓRICO DE CONSTITUIÇÃO DOS CONTEÚDOS QUE COMPÕEM A EMENTA DE ÁLGEBRA LINEAR

Ao longo desta seção, será apresentada a origem dos conteúdos que compõem a Álgebra Linear com o propósito de compreender o porquê de sua organização atual e sua relação com as demais áreas da Matemática.

Os conteúdos que a compõem datam de muito tempo, e seu desenvolvimento não é linear, pois a composição usada atualmente se deu por conta de outras áreas da Matemática. Garding (1981) afirma que sua gênese está nos estudos da geometria euclidiana, pois a origem do paralelogramo, apresentada inicialmente no livro *Elementos de Euclides*, por volta de 300 a.C., foi usada tempos depois por Arquimedes e explica a adição de vetores:

> (...) Há mais de 100 anos a álgebra vetorial é usada na Física, onde várias forças têm sido ilustradas por flechas, indicadas com símbolos que são somados e multiplicados por números reais. A contrapartida física da adição vetorial é o paralelogramo de composição de forças implícito no trabalho de Arquimedes (200 a.C.). Os vetores foram introduzidos nas escolas secundárias nos anos 50 como parte da modernização da Matemática. (GARDING, 1981, p. 82).

---

[22] The first axiomatic presentations of linear algebra and the crucial works on finite dimensional linear problems are more or less contemporary (end of the 1880s). Nevertheless, the two aspects remained largely independent until at least 1920 and really started being unified only from 1930. However, it is quite striking to see that these two aspects of the recent history of linear algebra have coexisted for more than 40 years and yet have had so little influence on each other. (DORIER, 2000, p. 30).

Neste conceito de composição de forças, temos implícita a geometria euclidiana e analítica, pois a ideia de vetor foi usada inicialmente para introduzir o sistema de coordenadas da geometria analítica: “(...) existe uma correspondência natural entre os números reais e os pontos de uma reta, entre os pares de números reais e os pontos de um plano, e entre os ternos de números reais e os pontos do espaço.” (GARDING, 1981, p. 74). Ou seja, os números podem ser representados geometricamente, na geometria euclidiana, e os geométricos como problemas algébricos; daí a relação da geometria euclidiana e analítica com a Álgebra Linear.

Deste modo, infere-se que os estudos sobre os conteúdos da Álgebra Linear são mais recentes que a Geometria Analítica. Boyer (1974) afirma, ainda, que os conteúdos de Cálculo e da Geometria Analítica foram produzidos no século XIV. Deste modo, não é difícil perceber a relação da álgebra com a geometria, pois, como afirma Dorier,

> Uma vez que a geometria, ao contrário da álgebra, está intrinsecamente ligada à percepção visual, é potencialmente uma fonte para o pensamento intuitivo. Além disso, tem uma longa tradição de problemas clássicos e formas de questionamento que remontam ao nascimento da Matemática na Grécia antiga. A introdução da álgebra em geometria representou, através do método analítico, uma abordagem radicalmente diferente desses problemas, na medida em que agora poderiam ser resolvidos com métodos mais sistemáticos. (...) Foi também de certa complementaridade entre álgebra e geometria que surgiu a ideia de criar um novo tipo de álgebra, operando em entidades geométricas e não em números que as representassem. Este seria um fator essencial não só no desenvolvimento da geometria, mas também no desenvolvimento de cálculos vetoriais e álgebra linear na segunda metade do século XIX. (DORIER, 2000, p. 12, tradução nossa)[23].

Certamente, em virtude desse desenvolvimento é que surge a ideia de Matriz para resolução de problemas. “Em cartas de 1693 a L’Hospital, Leibniz escreveu que ocasionalmente usava números indicando linhas e colunas numa coleção de equações simultâneas (...).” (BOYER, 1974, p. 297). Essa organização usada por

---

[23] Since geometry, unlike algebra, is intrinsically linked to visual perception, it is potentially a source for intuitive thinking. Moreover, it has a long tradition of classical problems and forms of questioning that go back to the birth of Mathematics in ancient Greece. The introduction of algebra in geometry represented, through the use of the analytical method, a radically different approach to these problems in that they could now be solved with more systematic methods. For instance, the classification of curves could be carried out through the classification of Cartesian equations. Moreover, Cartesian geometry had the potential to break the limitation of study to three dimensions, even though this generalization did not come into effect for nearly another two centuries after Descartes. It was also from a certain complementarity between algebra and geometry that the idea of creating a new type of algebra, operating on geometric entities and not on numbers representing them, emerged. This was to be an essential factor not only in the development of geometry but also in the development of vector calculus and linear algebra in the second half of the 19th century. (DORIER, 2000, p. 12).

Leibniz significa que ele resolvia suas questões usando a definição de determinantes, no entanto, “[e]ssa antecipação dos determinantes por Leibniz só foi publicada em 1850 e teve que ser redescoberta mais de meio século depois.” (BOYER, 1974, p. 297). Antes, porém, já havia registros de estudos de Euler que apontam ligação com o raciocínio de Leibniz:

> De fato, em 1798, Euler estava interessado em representar números inteiros como uma soma de quadrados. Nesse contexto aritmético, ele criou uma classificação de formas quadráticas em N, uma forma estando no mesmo grupo que outra pode ser transformada na outra através de uma substituição linear de suas variáveis. Para este propósito, ele introduziu uma notação para substituição linear que é muito semelhante a uma matriz, e, além disso, estabeleceu que o produto de duas substituições lineares é outra substituição linear e deu sua representação (algo análogo ao produto de duas matrizes) (Euler 1798, 306-309). Augustin Louis Cauchy mais tarde reconheceu a notação inspiradora de Euler quando estabeleceu os resultados fundamentais sobre o produto dos determinantes: det (AB) = det (A) det (B) (Cauchy 18 15). Portanto, o estudo de substituições lineares (tradicionalmente ligado a questões de classificação) está ligado à teoria dos determinantes e constitui as origens do conceito de matriz. (DORIER, 2000, p. 29, tradução nossa)[24].

A relação entre determinante e matriz, como é conhecida atualmente, não foi sempre assim. Ao analisar os estudos de Euler, fica visível que tais conceitos tiveram origens diferentes e que “os determinantes aparecem antes das matrizes e os estágios iniciais de sua história estavam intimamente ligados às equações lineares.” (KLEINER, 2007, p. 81, tradução nossa)[25] .

Apesar disso, demorou a ser reconhecida a distinção entre o conceito de matriz e determinante, que por muitos era confundido. “De fato, para se ter um conceito de matriz, era necessário ter a ideia de uma álgebra operando em objetos tão complicados quanto tabelas de números.”(DORIER, 2000, p. 29, tradução nossa)[26].

---

[24] Indeed, in 1798, Euler was interested in representing whole numbers as a sum of squares. In this arithmetical context, he created a classification of quadratic forms in N, a form being in the same group as another if it can be transformed into the other through a linear substitution of its variables. For this purpose, he introduced a notation for linear substitution which is very similar to a matrix, and, moreover, he established that the product of two linear substitutions is another linear substitution and gave its representation (something analogous to the product of two matrices) (Euler 1798, 306-309). Augustin Louis Cauchy later acknowledged Euler's inspiring notation when he established the fundamental results on the product of determinants: det(AB) = det(A)det(B) (Cauchy 18 15). Therefore, the study of linear substitutions (traditionally attached to questions of classification) is connected to the theory of determinants and constitutes the origins of the concept of matrix (DORIER, 2000, p. 29).

[25] In particular, determinants appeared before matrices, and the early stages in their history were closely tied to linear equations (KLEINER, 2007, p. 81).

[26] Nevertheless, it took quite a long time before the concept of matrix was clearly distinguished from the concept of determinant, with which it was somehow confusedly amalgamated. Indeed, in order to have a concept of matrix, it was necessary to have the idea of an algebra operating on objects as complicated as tables of numbers (DORIER, 2000, p. 29).

Cauchy (*in* KLEINER, 2007) foi o primeiro a sistematizar o conceito de determinantes, em 1815:

> Ele pode ser considerado o fundador da teoria dos determinantes como a conhecemos hoje. Muitos dos resultados sobre determinantes encontrados em um primeiro livro didático sobre álgebra linear são devidos a ele. Por exemplo, ele provou a regra importante do produto det(AB) = (det A) (det B). Seu trabalho forneceu aos matemáticos um poderoso aparato algébrico para lidar com álgebra, geometria e análise n dimensional. Por exemplo, em 1843, Cayley desenvolveu a geometria analítica de n dimensões usando determinantes como uma ferramenta básica e, na década de 1870, Dedekind usou-as para provar o importante resultado de que somas e produtos de inteiros algébricos são inteiros algébricos. (KLEINER, 2007, p. 81, tradução nossa)[27].

Posteriormente à sistematização de determinantes, entre 1820 e 1870, Cauchy continuou os estudos sobre matrizes, e, juntamente com Jacobi, Jordan, Weierstrass e outros matemáticos, eles:

> (...) criaram o que pode ser chamado de teoria espectral de matrizes: sua classificação em tipos como simétrica, ortogonal e unitária; resultados sobre a natureza dos autovalores dos vários tipos de matrizes; e acima tudo, a teoria das formas canônicas para matrizes – a determinação, entre todas as matrizes de certo tipo, daquelas que são canônicas em algum sentido. Um exemplo importante é a forma canônica de Jordan, introduzida por Weierstrass (e de forma independente por Jordan), que mostrou que duas matrizes são semelhantes se – e somente se – elas têm a mesma forma canônica de Jordan. (KLEINER, 2007, p. 83, tradução nossa)[28].

Euler, além de inspirar estudos sobre determinantes, também trouxe contribuições para a resolução de sistemas de equações com n incógnitas, pois alegava que não existe necessariamente uma única solução para tal sistema (KLEINER, 2007). Dorier (2000) descreve o pensamento de Euler:

> No que diz respeito às equações lineares, um dos primeiros exemplos significativos pode ser encontrado em um texto de Leonhard Euler, intitulado,

---

[27] He can be said to be the founder of the theory of determinants as we know it today. Many of the results on determinants found in a first textbook on linear algebra are due to him. For example, he proved the important product rule det(AB) = (det A)(det B). His work provided mathematicians with a powerful algebraic apparatus for dealing with n dimensional algebra, geometry, and analysis. For instance, in 1843, Cayley developed the analytic geometry of n dimensions using determinants as a basic tool, and in the 1870s Dedekind used them to prove the important result that sums and products of algebraic integers are algebraic integers.(KLEINER, 2007, p. 81)

[28] They created what may be called the spectral theory of matrices: their classification into types such as symmetric, orthogonal, and unitary; results on the nature of the eigenvalues of the various types of matrices; and, above all, the theory of canonical forms for matrices—the determination, among all matrices of a certain type, of those that are canonical in some sense. An important example is the Jordan canonical form, introduced by Weierstrass (and independently by Jordan), who showed that two matrices are similar if and only if they have the same Jordan canonical form. (KLEINER, 2007, p. 83)

> Sobre uma Contradição Aparente na Doutrina das Curvas de Ligna, de 1750 (Euler 1750). Euler discute o paradoxo de Cramer. O estudo deste problema levou-o a questionar o fato de que qualquer sistema de n equações lineares com n desconhecidos possui uma solução única. Esse fato era naquela época implicitamente suposto ser verdade por todos. (DORIER, 2000, p. 6, tradução nossa)[29].

No entanto, nesta obra de Euler, não são apresentados novos métodos para resolver sistemas, mas apenas discutidas algumas abordagens (DORIER, 2000).

Infere-se que Euler, com sua memória e intuição, trouxe contribuições para a resolução desses sistemas, pois, como afirma Dorier (2000), suas ideias, além de resolver os paradoxos de Cramer, apresentou uma resolução intuitiva. No entanto, os problemas tornaram-se mais complexos e Cramer incrementou o trabalho de Euler, explicando melhor a sua própria regra, tornando as resoluções intuitivas de Euler não mais aplicáveis.

> Do trabalho de Cramer, os determinantes se tornaram amplamente utilizados e constituíam um ramo próspero da matemática. A teoria dos determinantes tornou-se o quadro inevitável para o estudo de sistemas de equações lineares; consequentemente a abordagem Euleriana deixou de existir. Após Cramer, poucos dos numerosos trabalhos sobre determinantes envolveram qualquer tipo de estudo qualitativo sobre sistemas de equações lineares. (DORIER, 2000, p. 8, tradução nossa)[30].

Entre os numerosos trabalhos existentes à época, um estudo que igualmente tornou-se um marco para a solução de sistemas de equações lineares foi o de Gauss. Em 1815, o matemático publicou um artigo no qual apresenta o método dos mínimos quadrados para explicar a órbita de um asteroide e, em consonância com esse método, estabeleceu uma técnica, sem utilizar a notação matricial, chamado de "eliminação gaussiana, para a solução de sistemas de equações lineares (...). Ele lidou com os casos em que o número de equações e incógnitas podem ser diferentes."

---

[29] Concerning linear equations, one of the first significant examples can be found in a text by Leonhard Euler, entitled, Sur une Contradiction Apparente dans la Doctrine des Ligna Courbes, from 1750 (Euler 1750). Euler discusses Cramer's paradox. The study of this problem led him to question the fact that any system of n linear equations with n unknowns has a unique solution. This fact was at that time implicitly supposed to be true by all. (DORIER, 2000, p. 6).

[30] From Cramer's work, determinants became widely used and constituted a thriving branch of mathematics. The theory of determinants became the inevitable framework for the study of systems of linear equations, consequently the Eulerian approach ceased to exist. After Cramer, very few of the numerous works on determinants involved any sort of qualitative study on systems of linear equations. (DORIER, 2000, p. 8).

(KLEINER, 2007, p. 80, tradução nossa)[31]. Atualmente esse método também é denominado “escalonamento”.

Com a continuidade do aumento da complexidade dos problemas matemáticos, surgem os estudos de William Rowan Hamilton, decisivos no desenvolvimento da álgebra dita moderna, pois ele “foi forçado, por considerações físicas, a inventar uma álgebra em que a lei comutativa da multiplicação não valia. (...) [Esse passo] só foi dado depois de vários anos de cogitações em torno de um mesmo problema particular.” (EVES, 2004, p. 548).

Hamilton chegou à conclusão de que a comutatividade nem sempre valia para a multiplicação estudando os números complexos, que, no início do século XIX, eram considerados um híbrido estranho (EVES, 2004):

> O sistema dos números complexos é extremamente conveniente para o estudo dos vetores e das rotações do plano. Hamilton tentou vislumbrar um sistema de números análogo para o estudo dos vetores e das rotações do espaço tridimensional. Em suas pesquisas, foi levado a considerar não os pares ordenados (a, b) de números reais, tendo imersos neles os números reais, mas os quádruplos ordenados (a, b, c, d) de números reais, tendo imersos neles tanto os números reais como os números complexos. (EVES, 2004, p. 549).

Nessa tentativa de mostrar as operações matemáticas para esses quádruplos ordenados de números reais, que chamou de *quatérnios* (reais) (EVES, 2004), o citado matemático percebeu que a multiplicação não era comutativa. “O estudo da álgebra de matrizes e outras álgebras não comutativas foi em toda parte um dos principais fatores no desenvolvimento de uma visão cada vez mais abstrata da álgebra.” (BOYER, 1974, p. 425). Dorier (2000) complementa:

> Ele abriu o caminho para muitos trabalhos de pesquisa sobre novos tipos de álgebras. Ferdinand Eisenstein (1844-45) e Arthur Cayley (1858) foram as duas figuras mais importantes na descoberta e desenvolvimento da teoria das matrizes. No entanto, embora as matrizes se tornassem amplamente e rapidamente usadas na Inglaterra, a situação era muito diferente no continente, especialmente na Alemanha, apesar da contribuição de Eisenstein, que permanecia muito menos conhecida que a de Cayley. De fato, Frobenius publicou, em 1878, uma memória na qual ele estabeleceu resultados muito similares aos de Cayley, mas em termos de formas bilineares e quadráticas, sem usar qualquer notação de matriz. Os dois pontos de vista (o das matrizes e o das formas bilinear e quadrática) forneceram ferramentas tanto da teoria dos determinantes quanto do estudo de equações lineares para resolver tipos similares de problemas. Esta

[31] Called Gaussian elimination, for the solution of systems of linear equations […]. He dealt with the cases in which the number of equations and unknowns may differ. (KLEINER, 2007, p. 80).

> situação durou até o início do século XX. (DORIER, 2000, p. 29, tradução nossa)[32].

No entanto, as pesquisas de Hamilton não evoluíram em direção à álgebra e por isso não se faz menção ao nome dele quando se trata, por exemplo, de vetores, visto que, apesar de ter utilizado o termo vetor em 1845, nos seus estudos sobre quatérnios, não foi o único, pois a ideia de vetor fez parte de vários outros estudos, como relata Moore (1995):

> Fazia parte do cálculo baricêntrico de Mobius (1827), o cálculo de equipolências de Bellavitis (1835) e o cálculo de extensão, ou "Ausdehnungslehre", de Grassmann (1844). O uso explícito de vetores ocorre ainda mais cedo no trabalho de Wessel (1797) e Argand (1806). O termo mais antigo "vetor do raio" ("rayon vecteur") é encontrado na física matemática francesa, como a obra de Ampère, Ornamentação aromática de nomes eletrodinâmicos ph (1826). Este termo aparece já em 1776 no célebre Enciclopédia, editado por Diderot, no artigo "Rayon vecteur" do astrônomo J.-J. de la Lande. Ele escreveu que um vetor de raio é a "linha direta do mundo" no que diz respeito ao planejamento do meio ambiente, e que o meio ambiente é importante para o futuro. O que de la Lande tinha em mente torna-se mais claro quando nos lembramos que "vecteur", ou "vetor", vem do particípio passado "vectus" do verbo latino que significa "transportar ou transportar."(MOORE, 1995, p. 265, tradução nossa)[33].

A publicação de Hermann Gunther Grassmann, em 1844, a qual tratava de classes de álgebra, continha mais generalidade que as ideias de quatérnios de Hamilton, pois, “em vez de considerar apenas quádruplos ordenados de números reais, Grassmann considerou conjuntos ordenados de *n* números reais.” (EVES, 2004, p. 551). No entanto, sua obra só começou a fazer sentido depois de reescrita em 1862.

---

[32] It opened the way for many research works on new types of algebras. Ferdinand Eisenstein (1844-45) and Arthur Cayley (1858) were the two most important figures in the discovery and the development of the theory of matrices. Yet, although matrices became widely and rapidly used in England, the situation was very different on the continent, especially in Germany, in spite of Eisenstein's contribution, which remained much less well-known than Cayley's. Indeed, Frobenius published, in 1878, a memoir in which he established results very similar to Cayley's but in terms of bilinear and quadratic forms, without using any matrix notation. The two viewpoints (that of matrices and that of bilinear and quadratic forms) provided tools from both the theory of determinants and from the study of linear equations to solve similar types of problems. This situation lasted until the beginning of the 20th century. (DORIER, 2000, p. 29).

[33] It formed part of the barycentric calculus of Mobius (1827), the calculus of equipollences of Bellavitis (1835), and the calculus of extension, or "Ausdehnungslehre," of Grassmann (1844). The explicit use of vectors occurs even earlier in the work of Wessel (1797) and Argand (1806). The older term "radius vector" ("rayon vecteur") is found in French mathematical physics, such as Ampère's Théorie mathématique des phénomènes électrodynamiques (1826). This term appears already in 1776 in the celebrated Encyclopédie, edited by Diderot, in the article "Rayon vecteur" by the astronomer J.-J. de la Lande. He wrote that a radius vector is the "ligne droite qui va du soleil au centre de la planète; on l'appelle vecteur, parce qu'on le conçoit comme portant la planète à une de ses extrêmités . What de la Lande had in mind becomes clearer when we recall that "vecteur," or "vector," comes from the past participle "vectus" of the Latin verb meaning "to carry or transport.") (MOORE, 1995, p. 265).

As pesquisas do autor motivaram outros pesquisadores a caminhar rumo à axiomatização das suas ideias, contribuindo para a organização atual da álgebra linear. Um dos nomes mais citados é o de Giuseppe Peano, por ter publicado, em 1888, estudos que discutiam questões básicas da teoria de Grassmann e apresentavam as limitações em relação à geometria. “Surpreendentemente, no último capítulo de seu livro, Peano deu uma definição axiomática do que ele chamou de ‘sistema linear’, que é o conceito moderno de espaço vetorial.” (DORIER, 2000, p. 31, tradução nossa)[34].

> Foi o último capítulo de Peano, intitulado "Transformações de Sistemas Lineares", que é de maior interesse. Ele começou com uma definição de sistema linear (isto é, de espaço vetorial sobre os números reais):
> Existem sistemas de objetos para os quais as seguintes definições são dadas:
> (1) Definiu-se uma equivalência entre dois objetos do sistema, ou seja, uma proposição, denotada por **a = b**...
> (2) Existe uma soma de dois objetos **a** e **b**. Ou seja, é definido um objeto, denotado por **a + b**, que também pertence ao sistema dado e satisfaz as condições:
> (**a = b**) <(**a + c = b + c**), **a + b = b + a**, **a + (b + c) = (a + b) + c**.
> (3) Deixar um ser um objeto do sistema e ser um inteiro positivo, entendemos por m**a**, a soma de m objetos iguais a **a**. É fácil ver que, se **a, b**. . . . são objetos do sistema e *m, n*. . . . são inteiros positivos, então
> (**a = b)** <(*m***a** = *m***b**); m (**a + b**) = *m***a** + *m***b**; (*m* + *n*)**a** = *m***a** + *n***a**: *m*(*n***a**) = (*mn*)**a**; 1a = a.
> Assumimos que um significado é atribuído a m**a** para qualquer número real m de tal maneira que as equações anteriores ainda sejam satisfeitas. O objeto m**a** é dito ser o produto do número (real) m pelo objeto **a**.
> (4) Finalmente, assumimos que existe um objeto do sistema, que nós denotamos por 0, tal que, para qualquer objeto **a**, o produto do número 0 pelo objeto **a** é sempre o objeto 0, ou seja, 0**a** = 0.
> Se deixarmos que a - b signifique a + (-1) b, então segue que:
> a-a = O, a + O = a.
>
> DEF. Sistemas de objetos para os quais as definições (1) a (4) são introduzidos de forma a satisfazer as condições dadas são chamados de sistemas lineares. (MOORE, 1995, p. 267, tradução nossa)[35] .

---

[34] Surprisingly, in the last chapter of his book, Peano gave an axiomatic definition of what he called a ‘linear system’, which is the modern concept of vector space: (DORIER, 2000, p. 31)

[35]Vectors appeared in the book when Peano discussed geometrical formations, a notion adopted from Grassmann. A formation of the first species was a finite expression of the form mA + nB + pC + ... where A, B, C . . . . were points and m, n, p . . . . were real numbers. A vector was defined to be a formation of first species that can be put in the form B - A [81, 37]. Thus Peano conceived of vectors in quite a traditional way.
It was Peano's final chapter, entitled "Transformations of Linear Systems," that is of most interest. He began it with a definition of linear system (that is, of vector space over the real numbers):
There exist systems of objects for which the following definitions are given:
(1) There is defined an equivalence between two objects of the system, i.e., a proposition, denoted by a = b ...
(2) There is defined a sum of two objects a and b. That is, there is defined an object, denoted by a + b, which also belongs to the given system and satisfies the conditions:

O citado capítulo é um marco para a Álgebra Linear e foi decorrente de vários anos de estudos, mas Peano apresentou a ideia de vetor de três formas diferentes ao longo de sua carreira, como se vê do relato de Moore (1995):

> A primeira maneira, começando em 1887, era como n-tuplas, com adição e multiplicação escalar definidas pela operação correspondente em cada coordenada. Ele não identificou essas n-tuplas com vetores, mas nós as consideraríamos agora. A segunda maneira, começando em 1888, era como a "diferença" B - A de dois pontos A e B (isto é, como um segmento de linha direcionada). Aqui ele fez uma abordagem Grassmanniana ao que ele chamou de cálculo geométrico. A terceira via, que também começou em 1888, foi o que ele chamou de sistemas lineares (e que agora chamamos de espaços vetoriais). O primeiro caminho não era axiomático, e o segundo caminho foi axiomatizado por Peano apenas uma década depois, em 1898. Naquela época, ele não usava mais sua terceira abordagem via sistemas lineares. (MOORE, 1995, p. 265-266, tradução nossa)[36].

Como a ideia de espaço vetorial nem sempre foi entendida como atualmente o é, a definição de vetor também não era a usada atualmente. Seu desenvolvimento passou por um longo período de formalização e aceitação, que igualmente influenciaram na organização e consolidação da Álgebra Linear:

> Uma abordagem diferente dos vetores axiomatizantes surgiu do trabalho de Gaston Darboux. Em 1875, ele publicou um artigo analisando várias provas da composição de forças em estática (ie, a lei de paralelogramo), começando com Daniel Bernoulli em 1726. Darboux se propôs a tarefa de tratar esta matéria em geometria pura e então determinar qual suposições são

---

(a = b) < (a + c = b + c),a + b = b + a,a + (b + c) = (a + b) + c.
(3) Letting a be an object of the system and m be a positive integer, we mean by ma the
sum of m objects equal to a. It is easy to see that if a, b . . . . are objects of the system and m, n . . . . are positive integers, then (a = b) < (ma rob); m(a + b) = ma + rob; (m + n)a = ma + na: m(na) = (mn)a; la = a.
We assume that a meaning is assigned to ma for any real number m in such a way that the previous equations are still satisfied. The object ma is said to be the product of the (real) number m by the object a.
(4) Finally, we assume that there exists an object of the system, which we denote by
0, such that, for any object a, the product of the number 0 by the object a is always the object
0, i.e., 0a = 0.
If we let a - b mean a + (-1)b, then it follows that: a-a=O, a+O=a. DEF. Systems of objects for which definitions (1)-(4) are introduced in such a way as to
satisfy the given conditions are called linear systems. (MOORE, 1995, p. 266).

[36] Giuseppe Peano treated vector-like notions in three different ways at different periods in his career. The first way, beginning in 1887, was as n-tuples, with addition and scalar multiplication defined by the corresponding operation on each coordinate. He did not identify these n-tuples with vectors, but we would so regard them now. The second way, beginning in 1888, was as the "difference" B - A of two points A and B (i.e., as a directed line segment). Here he took a Grassmannian approach to what he called the geometric calculus. The third way, which also began in 1888, was what he called linear systems (and which we would now call vector spaces). The first way was not axiomatic, and the second way was axiomatized by Peano only a decade later, in 1898. At that time, he no longer used his third approach via linear systems. (MOORE, 1995, p. 265-266).

> necessárias. Ele encontrou quatro: dados n segmentos direcionados, todos começando no mesmo ponto O, a lei da composição é tal que:
> 1. O total resultante é único e não é alterado, permutando a ordem das resultantes parciais.
> 2. O resultante total é inalterado por uma rotação dos segmentos sobre O.
> 3. A lei da composição reduz a adição algébrica para segmentos com a mesma direção.
> 4. A direção e magnitude do resultante são funções contínuas dos segmentos.
> Em 1903, os quatro axiomas de Darboux para vetores foram adotados por dois alemães, Rudolf Schimmack e Georg Hamel. (MOORE, 1995, p. 273, tradução nossa)[37].

Moore (1995) afirma que esse entendimento de vetor permeou vários estudos. Há registros de que a ideia de vetor, como um segmento de linha direcionada, é, inclusive, mais antiga:

> No final do século XIX e início do século XX, a noção de vetor era geralmente tratada como um segmento de linha direta AB, ou como a diferença B - A de dois pontos A e B. Os físicos tratavam um vetor como uma quantidade (por exemplo, momentum ou força) possuindo direção e magnitude. Como segmentos de linha direcionados, dois vetores foram considerados iguais quando tinham o mesmo comprimento e a mesma direção. Normalmente, os vetores foram considerados como tendo no máximo três dimensões. Às vezes, particularmente por aqueles na tradição Grassmanniana, os vetores eram autorizados a ter qualquer número finito de dimensões. Um conceito mais geral de vetor – espaços vetoriais abstratos – surgiu primeiro sob um nome diferente, o de "sistema linear", no trabalho de Peano. (MOORE, 1995, p. 265, tradução nossa)[38].

Entretanto, as pesquisas de Peano referiam-se apenas ao contexto da geometria, enquanto os estudos sobre vetores, com a definição hoje conhecida , aconteceu quando ele os aplicou na análise:

---

[37] A different approach to axiomatizing vectors emerged from the work of Gaston Darboux. In 1875 he published an article analyzing various proofs of the composition of forces in statics (i.e., the parallelogram law), beginning with one due to Daniel Bernoulli in 1726. Darboux set himself the task of treating this matter in pure geometry and then determining which assumptions are necessary. He found four: Given n directed segments, all beginning at the same point O, the law of composition is such that:
1. The total resultant is unique and is unchanged by permuting the order of the partial resultants.
2. The total resultant is unchanged by a rotation of the segments about O.
3. The law of composition reduces to algebraic addition for segments having the same direction.
4. The direction and magnitude of the resultant are continuous functions of the segments.
In 1903 Darboux's four axioms for vectors were taken up by two Germans, Rudolf Schimmack and Georg Hamel. (MOORE, 1995, p. 273).

[38] In the late 19th century and the early 20th, the notion of vector was generally treated as a directed line segment AB, or as the difference B - A of two points A and B. Physicists treated a vector as a quantity (e.g, momentum or force) possessing both direction and magnitude. As directed line segments, two vectors were considered to be equal when they had the same length and the same direction. Usually vectors were considered to have at most three dimensions. At times, particularly by those in the Grassmannian tradition, vectors were allowed to have any finite number of dimensions. A more general concept of vector--abstract vector spaces--first arose under a different name, that of "linear system," in the work of Peano. (MOORE, 1995, p. 265).

> Em um artigo de 1887, ele deu uma prova da existência de uma solução para n equações diferenciais lineares homogêneas de primeira ordem em n variáveis, e, em uma discussão preliminar, ele introduziu "complexos numéricos de ordem n". Tais complexos eram n-tuplas de números reais, e ele definia tanto sua adição quanto seu produto por um número no que é agora a maneira usual de coordenar: Se a = [al, ..., an], b = [bl. . . . , bn], ek é um número real, então a + b = [aa + bl, ..., a + bn] e ka = [kal. . . . . kan]. Ele observou que essa adição era comutativa e associativa, enquanto o produto era distributivo em relação a ambos os fatores. Depois de introduzir a base padrão e a norma (embora sem usar esses termos), ele se voltou para funções vetoriais e suas integrais. Em seguida, ele discutiu transformações lineares em complexos, representando tal transformação por uma matriz e considerando o produto de duas transformações. (MOORE, 1995, p. 266, tradução nossa)[39].

A forma como Peano apresentou os axiomas era considerada inusitada para a época e, certamente por isso, foi considerada imatura. No entanto, mesmo com ideias atípicas, Peano influenciou alguns matemáticos. Três deles se destacaram, cujas pesquisas serão agora brevemente apresentadas a fim de apontar como contribuíram para a Álgebra Linear.

O primeiro a ser influenciado de várias formas por Peano foi Cesare Burali-Forti, que, em 1896, publicou artigos sobre o uso do método de Peano na geometria projetiva. Moore (1995) registra essa influência:

> Burali-Forti seguiu Peano chamando um sistema "linear" quando, para todos os seus elementos, foi definida uma "soma", bem como um produto por um número real, "e tais operações aproveitam as propriedades das operações correspondentes em números". Ele estava preocupado principalmente com sistemas lineares n-dimensionais de formas geométricas, para n no máximo quatro, no contexto de transformações projetivas. (MOORE, 1995, p. 269-270, tradução nossa)[40].

---

[39] In a paper of 1887 he gave a proof of the existence of a solution to n first-order homogeneous linear differential equations in n variables, and, in a preliminary discussion, he introduced "number complexes of order n." Such complexes were n-tuples of real numbers, and he defined both their addition and their product by a number in what is now the usual coordinatewise way: If a = [al, ..., an], b = [bl . . . . , bn], and k is a real number, then a + b = [aa + bl, ..., a + bn] and ka = [kal . . . . . kan]. He noted that this addition was commutative and associative, while the product was distributive with respect to both factors. After introducing the standard basis and the norm (though without using these terms), he turned to vector functions and their integrals. Then he discussed linear transformations on complexes, representing such a transformation by a matrix and considering the product of two transformations. (MOORE, 1995, p. 266).

[40] Burali-Forti followed Peano in calling a system "linear" when, for all its elements, there was defined a "sum," as well as a product by a real number, "and such operations enjoy the properties of the corresponding operations on numbers". He was mainly concerned with n-dimensional linear systems of geometric forms, for n at most four, in the context of projective transformations. When he used Grassmannian methods the following year in differential geometry, he did not mention Peano's linear systems. (MOORE, 1995, p. 269-270).

Burali-Forti, em 1910, publicou um livro em conjunto com Roberto Marcolongo, professor de mecânica racional em Nápoles, sobre as aplicações da geometria e da física, apresentando métodos vetoriais mais hábeis e comuns:

> Por exemplo, eles definiram os produtos escalares e vetoriais geometricamente e usaram uma interpretação vetorial do determinante através da fórmula det (u, v, w) = (u^v) .w; eles também usaram os dois produtos para dar interpretações geométricas dos diferentes tipos de operador linear em dimensão não superior a 3. A teoria espectral para a transformação linear geométrica também foi introduzida com o uso dos dois produtos. (DORIER, 2000, p. 36, tradução nossa)[41].

A motivação dessa dupla de autores era análoga às de Leibniz, pois eles acreditavam que a abordagem axiomática era a forma de construir a verdadeira álgebra, que fosse independente de coordenadas e, por isso, construiu bases teóricas para uma álgebra geométrica:

> Eles então declararam axiomas para um sistema linear mais ou menos como Peano havia feito em seu livro de 1888. Eles apontaram, como Peano, o importante fato de que os operadores lineares entre dois sistemas lineares em si formam um sistema linear. Na segunda edição de seu livro, eles deram um tratamento similar. Apesar de sua afirmação, a noção axiomática de sistema linear certamente não era familiar para a maioria dos matemáticos em 1912. (MOORE, 1995, p.270, tradução nossa)[42].

O terceiro estudioso a usar os axiomas de Peano sobre sistema linear foi Salvatore Pincherle. Na década de 1890, Pincherle ressaltou em seus estudos os conceitos de espaços lineares de funções e operadores lineares. “Seu interesse cresceu a partir do trabalho de Vito Volterra sobre o cálculo funcional e da abordagem de Peano aos sistemas lineares.” (MOORE, 1995, p.270, tradução nossa)[43].

A linha de pesquisa de Pincherle assemelha-se consideravelmente à de Peano, no entanto, ele demonstrou um olhar mais complexo sobre conjunto linear de

---

[41] For instance, they defined the scalar and vector products geometrically and used a vectorial interpretation of the determinant via the formula det(u,v,w)= (u >v).w; they also used the two products in order to give geometrical interpretations of the different types of linear operator in dimension not more than 3. Spectral theory for geometrical linear transformation was also introduced with the use of the two products. (DORIER, 2000, p. 36).

[42]They then stated axioms for a linear system more or less as Peano had done in his 1888 book. They pointed out, as Peano had, the important fact that the linear operators between two linear systems themselves form a linear system. In the second edition of their book, they gave a similar treatment. Despite their claim, the axiomatic notion of linear system was certainly not familiar to most mathematicians in 1912. (MOORE, 1995, p.270).

[43]His interest grew from Vito Volterra's work on the functional calculus and from Peano's approach to linear systems. (MOORE, 1995, p.270)

dimensões finitas e sobre noções de base e dimensão que compõem a ementa de Álgebra Linear atualmente.

> (...) ao contrário de Peano, ele imediatamente fez a conexão com a questão dos geradores. Na verdade, ele mostrou que, no conjunto linear feito de todas as combinações lineares de n elementos independentes, os elementos n + 1 são sempre dependentes. Para provar isso, ele usou o fato de que qualquer sistema de equações lineares homogêneas com n + 1 desconhecidos sempre possui uma solução não trivial. Este resultado levou a uma caracterização das bases ("sistema fundamental") como os sistemas de n elementos independentes. Assim, Pincherle foi mais explícito do que Peano quanto aos conceitos de base e dimensão. Sua abordagem também foi muito diferente em comparação com Grassmann, uma vez que não usou o método de troca. (DORIER, 2000, p. 34, tradução nossa)[44].

Desta feita, a colaboração de Pincherle foi mais à frente que a de Peano, pois ele foi capaz de apresentar “(...) uma abordagem axiomática unificada do estudo de operadores lineares em espaços lineares finitos e de dimensões infinitas.” (DORIER, 2000, p. 35, tradução nossa)[45]. Contudo, mesmo apresentando de forma detalhada suas ideias, o trabalho de Pincherle não teve muita influência, e Peano continuou seus estudos, e em 1899, na segunda edição de seu livro *Formulaire de mathèmatiques,* ele voltou a usar a abordagem da pesquisa de 1898, com algumas alterações:

> Ele acrescentou explicitamente dois novos axiomas, afirmando que todos os pontos formaram uma classe e que esta classe não estava vazia. Em seguida, ele acrescentou um axioma 4 que, em 1898, ele pensara seguir a partir de seus outros axiomas, mas que agora mostrava ser independente: Se a - c = b - c, então a = b. Peano continuou a usar este sistema axiomático revisado para vetores nas últimas edições do Formulaire, por exemplo. (MOORE, 1995, p.272-273, tradução nossa)[46].

Considerando a complexidade e quantidade de fenômenos em torno do conceito de espaço vetorial, desenvolvido por Peano em 1888, não é de se estranhar que essa definição, no contexto geométrico, tenha sido ignorada por tanto tempo e

---

[44] (...) unlike Peano, he immediately made the connection with the question of generators. Indeed, he showed that in the linear set made of all the linear combinations of n independent elements, n+1 elements are always dependent. To prove this, he used the fact that any system of n homogeneous linear equations with n +1 unknowns always has a non trivial solution. This result led to a characterization of the bases (‘sistema fundamentale’) as the systems of n independent elements. Thus, Pincherle was more explicit than Peano concerning the concepts of basis and dimension. His approach was also very different compared to Grassmann since it did not use the exchange method. (DORIER, 2000, p. 34).

[45] (...) a unified axiomatic approach of the study of linear operators in finite and infinite-dimensional linear spaces. (DORIER, 2000, p. 35).

[46] He explicitly added two new axioms, stating that all the points formed a class and that this class was nonempty. Next he added an axiom 4' which in 1898 he had thought to follow from his other axioms but which he now showed to be independent: If a - c = b - c, then a = b. Peano continued to use this revised axiom system for vectors in the later editions of the Formulaire, e.g., (MOORE, 1995, p. 272-273).

redescoberta somente nos estudos de análise funcional e teoria dos anéis (MOORE, 1995).

> Em 1903, Russell discutiu o assunto enquanto dava uma definição vetorial do espaço euclidiano nos Princípios da Matemática. Ele observou que essa definição "é inadequada quando o espaço euclidiano é considerado como o limite de certos espaços não-euclidianos, mas é muito apropriado para os quatérnios e para o vetor Cálculo" (MOORE, 1995, p. 273, tradução nossa)[47].

Outros estudiosos discutiram a noção de espaço vetorial, mas as definições de Peano nem sempre foram usadas. As pesquisas de Hermann Weyl, por exemplo, não indicavam explicitamente o uso dos axiomas de Peano, mas há elementos históricos de que o trabalho de Pincherle era conhecido do autor. Weyl publicou um livro, em 1918, que tratava da axiomatização de espaços vetoriais. Os vetores tinham destaque entre os fundamentos da geometria e foram definidos inconscientemente como um deslocamento no espaço (MOORE, 1995):

> Os axiomas de Weyl para a geometria afim eram em duas partes. A primeira parte, que axiomatizava vetores, era essencialmente o primeiro conjunto de axiomas de Peano (1888). Mas um axioma dessa parte separou-o fortemente da abordagem de Peano. Enquanto Peano permitia explicitamente que os sistemas lineares fossem de dimensão infinita, Weyl descartou essa possibilidade. O último dos axiomas de Weyl foi seu Axiom of Dimension: "Existem n vetores linearmente independentes, mas todos os vetores n + 1 são linearmente dependentes" (MOORE, 1995, p. 276-277)[48]

Em 1910, a publicação de Ernst Steinitz, também discutia sobre dependência linear e podemos considerar também um marco na história da álgebra dita moderna. Ele definiu dependência linear sobre um campo qualquer. “Esta definição era idêntica à definição do número de dimensões de um espaço linear dado por Peano ou Burali-Forti e Marcolongo.” (DORIER, 2000, p. 40, tradução nossa)[49]. Sendo assim, a

---

[47] In 1903 Russell discussed the matter while giving a vector definition of Euclidean space in the Principles of Mathematics. He observed that this definition "is inappropriate when Euclidean space is considered as the limit of certain non-Euclidean spaces, but is very appropriate to quaternions and the vector Calculus" (MOORE, 1995, p. 273).
[48] Weyl's axioms for affine geometry were in two parts. The first part, which axiomatized vectors, was essentially Peano's first (1888) set of axioms. But one axiom of this part separated him quite strongly from Peano's approach. Whereas Peano explicitly allowed linear systems to be infinite-dimensional, Weyl ruled out that possibility. The last of Weyl's axioms was his Axiom of Dimension: "There are n linearly independent vectors, but every n + 1 vectors are linearly dependent" (MOORE, 1995, p. 276-277).
[49]This definition was identical to the definition of the number of dimensions of a linear space given by Peano or Burali-Forti and Marcolongo. (DORIER, 2000, p. 40).

abordagem de Weyl também descarta a de Steinitz e sua axiomatização dava a noção de um espaço vetorial finito no conjunto dos números reais.

> Então Weyl completou sua axiomatização da geometria afim com um segundo conjunto de axiomas que conectam os conceitos de ponto e vetor, axiomas que eram remanescentes da segunda axiomatização de vetores de Peano (1898):
> 1. Quaisquer dois pontos determinam um vetor a; em símbolos, AB (seta em cima do AB) = a. Se A é qualquer ponto e a é qualquer vetor, então existe um e somente um ponto B para o qual AB = a.
> 2. Se AB = a e BC = b, então AC = a + b.
> (MOORE, 1995, p. 276, tradução nossa)[50].

Essa associação de vetor com pontos propiciou, de forma intuitiva, a definição de produto interno, por pressupor a ideia de tamanho e projeção, e, assim, Weyl estabeleceu o Axioma Métrico, "afirmando que um produto interno a. b é uma forma bilinear simétrica que é definida positiva e que existe um vetor e com e.e = 1." (MOORE, 1995, p. 276, tradução nossa)[51].

No entanto, em 1928, em outra obra de Weyl, ele apresenta seus axiomas para definir espaço vetorial, mas omite o axioma que tratava da relação ponto e vetor, abandonando a ideia de dimensão infinita. Segundo Moore (1995), essa postura foi tomada com base em aplicações na mecânica quântica. Segundo Moore (1995), no citado livro,

> (...) Weyl também mostrou uma confusão bastante comum no início da história dos espaços vetoriais de dimensões infinitas; ele considerava o espaço de Hilbert como tendo uma dimensão infinitamente contável. Além disso, ele insistiu que não havia distinção entre um espaço tendo uma dimensão infinitamente contável e um tendo como sua dimensão o poder do contínuo. A confusão era entre o número de coordenadas do espaço, que era infinitamente contável, e o número máximo de vetores linearmente independentes (isto é, a cardinalidade de uma base de Hamel), que era incontável. Para espaços de dimensão finita, esses dois conceitos concordavam, e Weyl não distinguia entre eles. Mas ele ainda não distinguia entre eles para o espaço de Hilbert, e isso era um erro. Da mesma forma, ele descreveu o espaço de funções contínuas como tendo muitas dimensões contínuas. (MOORE, 1995, p. 277, tradução nossa)[52].

---

[50] Then Weyl completed his axiomatization of affine geometry with a second set of axioms which connected the concepts of point and vector, axioms that were reminiscent of Peano's second (1898) axiomatization of vectors:
1. Any two points determine a vector a; in symbols, AB = a. If A is any point and a is any vector, then there is one and only one point B for which AB = a.
2. If AB = a and BC = b, then AC = a + b. (MOORE, 1995, p. 276).

[51] "(...) stating that an inner product a. b is a symmetric bilinear form which is positive definite and that there is a vector e with e. e = 1." (MOORE, 1995, p. 276)

[52] In that book Weyl also showed a confusion that was fairly common in the early history of infinite-dimensional vector spaces; he regarded Hilbert space as having a countably infinite dimension.

Mesmo com tantos estudos para a axiomatização de espaço vetorial, nem Weyl nem Peano conseguiram disseminar suas ideias, sendo necessários outros três matemáticos que o fizessem, em países distintos (MOORE, 1995).

Stefan Banach, na Polônia; Hans Hahn, na Áustria; e Norbert Wiener, nos Estados Unidos, desenvolviam pesquisas relacionadas à Análise, descobrindo a ideia de espaço vetorial. O interesse deles era generalizar as propriedades algébricas e topológicas em diversos espaços (MOORE, 1995). As pesquisas desses três matemáticos foram desenvolvidas praticamente no mesmo período, ficando difícil estabelecer uma sequência cronológica para relatar os fatos. Assim, para apresentar os seus estudos, compreendê-los e relacioná-los é necessário fazer um ir e vir no tempo:

> Em 1922, o analista vienense Hans Hahn formulou a noção de um espaço vetorial normalizado, que ele chamou de um espaço linear, em um trabalho que estava na fronteira da análise clássica e da análise funcional. (...) Depois de introduzir sua definição de espaço linear, Hahn usou a norma para torná-la um espaço métrico. Ele então definiu completude métrica para isso, dando um espaço vetorial completo normalizado. Por outro lado, Hahn não demonstrou interesse em espaços vetoriais sem uma norma e nem mesmo formulou tal noção. (MOORE, 1995, p. 277 - 278, tradução nossa)[53].

Hahn tinha uma motivação para explorar a noção de espaço vetorial. Em seus estudos, seria conveniente unificar a discussão sobre integrais singulares e transformações lineares de séries infinitas. No entanto, o seu primeiro artigo sobre o tema não continha resultados suficientes, e, em 1927, foi publicado um segundo artigo sobre espaços vetoriais normados completos, que faz menção aos estudos de Banach, sobre o qual se discorre mais adiante.

Moreover, he insisted that there was no distinction between a space having countably infinite dimension and one having as its dimension the power of the continuum [130, 29-30]. The confusion was between the number of the space's coordinates, which was countably infinite, and the maximal number of linearly independent vectors (i.e., the cardinality of a Hamel basis), which was uncountable. For finite-dimensional spaces these two concepts agreed, and Weyl did not distinguish between them [130, 5]. But he still did not distinguish between them for Hilbert space, and that was an error. Likewise he described the space of continuous functions as having continuum many dimensions. (MOORE, 1995, p. 277).

[53] In 1922 the Viennese analyst Hans Hahn formulated the notion of a normed vector space, which he called a linear space, in work that was on the border of classical analysis and functional analysis. [45]. Hahn was moved to do so by the desire to unify his treatment of singular integrals (i.e., limits of definite integrals) and Issai Schur's results on linear transformations of infinite series. After introducing his definition of linear space, Hahn used the norm to make it a metric space. He then defined metric completeness for it, giving a complete normed vector space. By contrast, Hahn showed no interest in vector spaces without a norm and did not even formulate such a notion. (MOORE, 1995, p. 277 - 278).

> O segundo artigo de Hahn estava preocupado com sistemas lineares de equações em tais espaços. Foi motivado por problemas em equações integrais, mas formulou seus resultados em termos de subespaços lineares de espaços vetoriais normados. Ele usou a indução transfinita para definir uma cadeia de tais subespaços lineares bem ordenada pela inclusão. O ponto alto de seu artigo foi sua versão do Teorema de Hahn-Banach:
> Se R é um espaço vetorial normalizado completo tendo um subespaço completo R_0, e se $f_0(x)$ é um funcional linear definido em R_0 e tendo norma M, então existe um funcional linear $f(x)$ definido em todo R que concorda com $f_0(x)$ em R_0 e também tem norma M. (MOORE, 1995, p. 278, tradução nossa)[54].

A noção de espaço de Banach foi publicada como artigo, em 1922, e apresentava os resultados da sua pesquisa de doutorado, defendida em 1920. O objetivo da pesquisa era determinar teoremas válidos para domínios funcionais diferentes. Para tal, usou o método axiomático diferente de Hilbert. (MOORE, 1995):

> O objetivo de Banach não era caracterizar um certo domínio matemático por axiomas, como Hilbert fizera para a geometria euclidiana, mas estabelecer teoremas verdadeiros para uma classe de domínios, fornecendo axiomas para essa *classe*, e então mostrar que aqueles teoremas eram verdadeiros para um domínio particular mostrando apenas que satisfaziam os axiomas. Essa versão do método axiomático, tão comum na matemática atual, era relativamente nova em 1920 e não era comum na análise, tendo sido usada raramente, exceto em certos ramos da álgebra (principalmente a teoria dos grupos e a teoria dos campos). (MOORE, 1995, p. 280, tradução nossa)[55].

Para apresentar essa abordagem axiomática, Banach demonstrou que seu estudo era amplo, pois citava exemplos das “formas Grassmannianas, quatérnios, sistemas numéricos hipercomplexos e vetores do tipo tradicional. Seu segundo grupo de axiomas era o de uma norma, e o terceiro era o de que todas as sequências de Cauchy convergiam.” (MOORE, 1995, p. 280, tradução nossa)[56].

---

[54] Hahn's second article was concerned with linear systems of equations in such spaces. It was motivated by problems in integral equations, but formulated its results in terms of linear subspaces of normed vector spaces. He used transfinite induction to define a chain of such linear subspaces well-ordered by inclusion. The high point of his paper was his version of the Hahn-Banach Theorem:
If R is a complete normed vector space having a complete subspace R0, and if f(x) is a linear functional defined on R0 and having norm M, then there is a linear functional f(x) defined on all of R that agrees with fo(x) on Ro and also has norm M. (MOORE, 1995, p. 278).

[55] Banach's aim was not to characterize a certain mathematical domain by axioms, as Hilbert had done for Euclidean geometry, but to establish theorems true for a class of domains by giving axioms for that class, and then to show that those theorems were true for a particular domain by showing merely that it satisfied the axioms. This version of the axiomatic method, so common in mathematics now, was relatively new in 1920 and not common in analysis, having been used rarely except in certain branches of algebra (primarily group theory and field theory). (MOORE, 1995, p. 280).

[56] Here he cited as examples Grassmannian forms, quaternions, hypercomplex number systems, and vectors of the traditional sort. His second group of axioms was that for a norm, and his third was that every Cauchy sequence converged.

Nas pesquisas de Weyl, a preocupação era com a Geometria afim e a Física Matemática, enquanto as de Hahn ocupavam-se da Análise Real, ao passo que Banach relacionava a Análise com outros campos da Matemática. O matemático Wiener, na mesma época, dedicou-se a estudar Análise Funcional envolvendo Topologia, razão pela qual conseguimos estabelecer relação entre essas pesquisas.

Em 1920, Wiener apresentou axiomas para um espaço vetorial normado com o objetivo de associar os conceitos de limite sequencial, vizinhança e homeomorfismo em um mesmo espaço. Moore (1995) explicita os achados de Wiener:

> Neste contexto, Wiener introduziu o que chamou de "sistema vetorial", ou sistema (Ve), como um conjunto K de pontos e um conjunto σ de vetores com operações $\oplus$(adição vetorial), $\odot$ (D (multiplicação escalar) e II II (norma) satisfazendo 14 axiomas. Com efeito, seus axiomas definiram algo mais ou menos como um espaço vetorial normalizado, mas sem menção de completude. Quaisquer dois pontos A e B em K determinaram um vetor AB em σ. O axioma afirmou que, dado qualquer A em K e σ em σ, havia algum B em K tal que AB = σ. Outros axiomas relacionando pontos e vetores eram reminiscentes de Peano: Se A, B, C, D estão em K, então AC = AB $\oplus$ BC, e AB = CD implica BA = DC. (MOORE, 1995, p. 278-279, tradução nossa)[57].

No entanto, mesmo com todas essas pesquisas, Moore (1995) elucida que somente em 1925, com a publicação de dois artigos de Maurice Fréchet, é que foi possível assumir os axiomas para espaços vetoriais normados. No primeiro deles, Fréchet comparou as propostas de Banach e Wiener, mas, desconhecendo a axiomatização de Hahn, afirmou que essa noção de espaço vetorial já havia sido publicada, em 1901, por Pincherle:

> De acordo com Fréchet, Pincherle havia creditado esses axiomas a Laguerre (1867) e Peano (1888). De fato, o trabalho de Laguerre não continha tal axiomatização e tratava apenas de matrizes, enquanto o de Peano axiomatizava a noção de espaço vetorial sobre os reais. Fréchet sustentou que "o mérito de MM. Banach e Wiener consiste em ter reconhecido que estes postulados [para espaços vetoriais] são verificados por espaços muito mais gerais do que espaços n-dimensionais e por terem dado alguns exemplos". (MOORE, 1995, p. 281, tradução nossa)[58].

---

[57] In this context, Wiener introduced what he called a "vector system," or system (Ve), as a set K of points and a set o- of vectors with operations (vector addition), (D (scalar multiplication), and [[II (norm) satisfying 14 axioms. In effect, his axioms defined something more or less like a normed vector space, but with no mention of completeness. Any two points A and B in K determined a vector AB in o-. One axiom stated that, given any A in K and a in o-, there was some B in K such that AB = a. Other axioms relating points and vectors were reminiscent of Peano: If A, B, C, D are in K, then AC = AB • BC, and AB = CD implies BA = DC. (MOORE, 1995, p. 278-279).

[58] According to Fréchet, Pincherle had credited these axioms to Laguerre (1867) and Peano (1888). In fact, Laguerre's work contained no such axiomatization and dealt only with matrices, whereas Peano's did axiomatize the notion of vector space over the reals. Fréchet held that "the merit of MM. Banach and Wiener consists in having recognized that these postulates [for vector spaces] are verified by spaces

Fréchet enfatizou nesse artigo os estudos de Peano e Pincherle, mas também reconheceu a relevância das pesquisas de Banach e Wiener. Afinal, nas publicações de Peano e Pincherle, não se havia ‘axiomatizada’ a noção de norma para um espaço vetorial, mesmo com potencial para tanto, e nem foi tão aceito na época. Como anteriormente discutido, poucos matemáticos usaram as ideias de Peano em suas pesquisas. (MOORE, 1995). Assim,

> Fréchet adotou um híbrido dos sistemas de Banach e Wiener e chamou-o de "espace (D) vectoriel", isto é, um espaço vetorial cuja norma produz um espaço métrico. Wiener não havia incluído certos postulados necessários para a adição de vetores, postulados que Banach havia declarado e que Fréchet agora adotou. Por outro lado, Fréchet ficou mais feliz com a abordagem de Wiener sobre a relação entre pontos e vetores. Ou seja, Wiener havia introduzido axiomas relacionando pontos e vetores, de modo que um vetor era determinado por um par de pontos da maneira tradicional. Banach introduziu apenas vetores e não uma categoria separada de pontos. Fréchet insistiu em ter pontos e vetores em seus espaços vetoriais métricos e em defini-los por axiomas como os de Wiener. (MOORE, 1995, p. 281-282, tradução nossa)[59].

A insistência de Fréchet em definir pontos e vetores era para satisfazer seus interesses: poder usar espaços vetoriais na Análise Geral; daí suas pesquisas conterem uma generalização topológica:

> A origem da explicitação da natureza topológica nos conjuntos de funções é encontrada no cálculo das variações. Nesse contexto, Karl Weierstrass foi um dos primeiros a se interessar pela noção de vizinhança de uma função, realizando assim um trabalho essencial na história da topologia. A partir de 1865, ele definiu a noção fundamental de ponto de acumulação. É nesta tradição que o trabalho dos italianos Vito Volterra, Giulio Ascoli, Cesare Arzela e os de Pincherle, que estudam as propriedades das funções da linha, noções de continuidade e desvio de funções. Na França, Jacques Hadamard e especialmente Maurice Fréchet também fazem parte dessa tendência. (DORIER, 1996, p. 284, tradução nossa)[60].

---

much more general than n-dimensional spaces and in having given some examples" [40, 52]. But, we must stress, Peano and Pincherle had already recognized the same thing some years earlier. The importance of Banach's and Wiener's work was, first, in formulating the axiomatic notion of norm for a vector space--a notion which, from Fréchet's remarks, one might expect to find in Peano or Pincherle, but which is not there--and, second, in causing the notion of normed vector space to become widely accepted. (MOORE, 1995, p. 281).

[59] Fréchet adopted a hybrid of Banach's and Wiener's systems and called it an "espace (D) vectoriel," i.e., a vector space whose norm yields a metric space. Wiener had failed to include certain postulates needed for vector addition, postulates that Banach had stated and that Fréchet now adopted. On the other hand, Fréchet was happier with Wiener's approach concerning the relation between points and vectors. That is, Wiener had introduced axioms relating points and vectors, so that a vector was determined by a pair of points in the traditional way. Banach had only introduced vectors and not a separate category of points. Fréchet insisted on having both points and vectors in his metric vector spaces and in defining them by axioms like those of Wiener. (MOORE, 1995, p. 281-282).

[60] L’origine de l’explicitation de la nature topologique sur les ensembles de fonctions se trouve dans le calcul des variations. Dans ce cadre, KarlWeierstrass fut l’un des premiers `a s’int´eresser `a la notion de voisinage d’une fonction, r´ealisant ainsi un travail essentiel dans l’histoire de la topologie; d`es 1865,

No final de 1925, Fréchet retoma os estudos sobre espaços vetoriais para incluir espaços funcionais, que não eram espaços métricos, apresentando uma generalização para espaço afim topológico.

> Seus axiomas eram os mesmos que para um espaço vetorial normalizado, exceto que ele substituiu a desigualdade do triângulo por três condições mais fracas:
> (a) Cada ponto de acumulação de um subconjunto de uma linha está nessa linha.
> (b) Um ponto A em uma linha é um ponto de acumulação de um conjunto M nessa linha se e somente se a norma de A - B tiver zero como mínimo para qualquer B em M.
> (c) Toda tradução é contínua, e assim é o seu inverso.
> (MOORE, 1995, p. tradução nossa) [61].

Fréchet foi o primeiro a considerar que era possível um espaço vetorial topológico sem ser métrico. Segundo Moore (1995), os espaços topológicos definidos por Fréchet foram estudados, em 1927, por André Weil, membro do grupo Bourbaki, que o considerou abstrata para a Análise Linear. Todavia, o conceito de espaço vetorial topológico, com adição de vetores e multiplicação escalar definidas como contínuas, foi realmente elaborado anos depois por um matemático russo, Kolmogorov, influenciado pelos estudos de Banach, publicados em um livro no ano de 1932, sobre Teoria dos Funcionais Lineares.

O tema foi inicialmente discutido por Banach já em 1922, no bojo de sua dissertação; após, porém, o matemático dedicou-se ao estudo de outros temas, e, alguns anos depois, voltou a pesquisar sobre espaços vetoriais, publicando o citado livro, desdobramento de sua dissertação.

Banach discutiu sobre a Teoria dos Funcionais Lineares, unindo esse conceito ao de espaços, definido anteriormente em sua dissertação (MOORE, 1995):

> Após algumas preliminares, ele começou com seus espaços G, nos quais ele considerou os operadores aditivos U (isto é, com U (x + y) = U (x) + U (y).) Em um Gspace, um operador aditivo contínuo em um ponto era contínuo em

---

il d´efinit la notion fondamentale de point d’accumulation. C’est dans cette tradition que se situent les travaux des italiens, Vito Volterra, Giulio Ascoli, Cesare Arzela, ainsi que ceux de Pincherle, qui ´etudi`erent les propri´et´es des fonctions de lignes, en d´eterminant des notions de continuit´e et de d´erivabilit´e de fonctions de fonctions. En France, Jacques Hadamard et surtout Maurice Fr´echet s’inscrivent ´egalement dans ce courant. (DORIER, 1996, p, 284)

[61] Its axioms were the same as for a normed vector space, except that he replaced the triangle inequality by three weaker conditions:
(a) Every accumulation point of a subset of a line lies on that line.
(b) A point A on a line is an accumulation point of a set M on that line if and only if the norm of A - B has zero as least upper bound for any B in M.
(c) Every translation is continuous, and so is its inverse. (MOORE, 1995, p. 282).

> todos os lugares – um teorema que generalizou o resultado de Hamel (1905) para o caso em que U era uma função real.
> O segundo capítulo do livro de Banach discutiu espaços vetoriais. Enquanto em seu artigo de 1922, introduzindo espaços vetoriais normatizados, ele considerava apenas propriedades que dependiam da norma, agora ele considerava espaços vetoriais arbitrários (reais). Ele definiu a noção geral de uma base (Hamel) H para um espaço vetorial E como um conjunto de vetores tal que cada vetor em E é uma combinação linear única de finitos vetores em H. Então ele apontou que cada espaço vetorial tem uma base e que quaisquer duas bases terão a mesma cardinalidade. Esta parece ser a primeira vez que os espaços vetoriais sobre os números reais foram tratados como um tópico distinto, em generalidade axiomática completa e sem consideração de uma norma ou restrição a uma dimensão finita. (MOORE, 1995, p. 283, tradução nossa)[62].

Ao analisar os conteúdos que atualmente compõem a disciplina de Álgebra Linear, percebe-se que o conceito de espaço vetorial pode ser considerado como aquele que comanda os demais conteúdos. Estudam-se matrizes, sistemas de equações lineares e determinantes para se compreender a definição de espaço vetorial, sendo que os demais conteúdos – como transformações lineares, operadores lineares e produto interno – são dependentes da definição de espaço vetorial e podem ser considerados complemento da definição de espaço vetorial para resolver determinados problemas da Matemática.

Pode-se inferir que por esta razão as pesquisas sobre Álgebra Linear são recentes, visto que somente em 1922 a definição de espaços vetoriais apresentada por Banach foi aceita e tratada de forma específica e com princípios axiomáticos completos sem restrições. Ou seja, até este momento, havia diversos estudos, contudo, não completamente aceitos, pois as ideias apresentadas não eram claras e não convenciam a comunidade científica da época.

Se a compararmos às demais áreas da Matemática, como o Cálculo e a Geometria Analítica, que datam do século XIV (BOYER, 1974), o desenvolvimento da Álgebra Linear é muito recente; no entanto, é perceptível que os conteúdos que a

---

[62] Banach's seminal book (1932) on the theory of linear functionals unified and simplified the earlier work on Banach spaces. But the book took a much more general view. After some preliminaries, it began with his G-spaces, on which he considered additive operators U (i.e., with U(x + y) = U(x) + U(y).) In a Gspace, an additive operator continuous at one point was continuous everywhere--a theorem that generalized Hamel's result (1905) for the case when U was a real function.
The second chapter of Banach's book discussed vector spaces. While in his 1922 paper introducing normed vector spaces he had only considered properties that depend on the norm, now he considered arbitrary (real) vector spaces. He defined the general notion of a (Hamel) basis H for a vector space E as a set of vectors such that each vector in E is a unique linear combination of finitely many vectors in H. Then he pointed out that every vector space has a basis and that any two bases will have the same cardinality [7, 231]. This appears to be the first time that vector spaces over the real numbers were treated as a distinct topic, in complete axiomatic generality and without consideration of a norm or restriction to a finite dimension. (MOORE, 1995, p. 283)

compõem são antigos. Assim, o que demorou a ocorrer foi a aceitação das definições e a junção delas como uma disciplina de Ensino Superior.

Os estudos ora analisados explicam, indireta ou diretamente, de modo cristalino o porquê da organização sistemática atual da Álgebra Linear. Destarte, não há como discutir os conteúdos dessa área matemática sem citar a Geometria e outros conceitos matemáticos antigos, como a ideia de matriz. Tais conteúdos são de extrema relevância para a formação do matemático, pois, como explanado ao longo deste capítulo, são diversas as suas aplicações, como, por exemplo, na resolução de problemas da geometria, cálculo, análise e física.

Diante disso, Garding (1981) defende que todos os cursos de formação inicial de Matemática devem trazer no currículo a disciplina de Álgebra Linear, ancorado na alegação de que sua apresentação atual, de forma axiomática, trata-se de um padrão internacional. No entanto, este padrão baseado nas geometrias euclidiana e analítica e no sistema de equações lineares traz complicações para o ensino e aprendizagem, pois

> [i]niciantes com uma preparação pouco firme em geometria e em cálculos algébricos e que ainda têm dificuldade com abstrações não estão realmente maduros para o estudo da álgebra linear. Por outro lado, não há necessidade de exagerarmos as dificuldades. A teoria é muito simples, tem poucos teoremas e nenhumas demonstrações complicadas. A álgebra linear também é item mandatório. Não estar familiarizado com conceitos de álgebra linear tais como linearidade, vetor, espaço vetorial, matrizes, etc., hoje em dia redunda quase em ser analfabeto nas ciências naturais e talvez também nas ciências sociais. (GARDING, 1981, p. 67).

Em vista disso, a explicação para as dificuldades dos discentes está exatamente na raiz da disciplina, pois os alunos nem sempre carregam uma base Matemática apropriada e consistente para compreender as definições apresentadas na disciplina de Álgebra Linear.

No percurso dessa análise histórica, percebe-se o quanto a geometria, a análise e a física influenciaram no desenvolvimento dos conceitos que compõem a Álgebra Linear. Assim, sua criação não pode ser atribuída a apenas uma pessoa ou a um lugar. Houve um movimento, por conta das necessidades de cada período e contexto, para que a disciplina de Álgebra Linear chegasse à organização atual, o que não significa que ela esteja pronta e acabada.

Em virtude disso, na próxima seção, pretende-se conhecer como se deu a organização desses conteúdos e as diferentes perspectivas para, então, compreender as relações de conceitos básicos da Matemática com os conteúdos da Álgebra Linear.

2.2 O MOVIMENTO DE SISTEMATIZAÇÃO DOS CONTEÚDOS QUE COMPÕEM A EMENTA DE ÁLGEBRA LINEAR A PARTIR DO SÉCULO XX

Os conteúdos que compõem a Álgebra Linear foram estudados e aprimorados por diversos matemáticos e desenvolvidos para a resolução de problemas relacionados à Análise, conforme apresentado na seção anterior. Por conseguinte, apreendê-los tornou-se essencial para aqueles que se interessavam pela Matemática. Entretanto, o ensino desses conteúdos também passou por um desenvolvimento, e a sua organização nem sempre ocorreu do modo como é atualmente definida.

Como visto nos tópicos anteriores, a influência da Europa na educação e no desenvolvimento da Matemática no mundo e, por óbvio, no Brasil, é indiscutível. Nesse contexto, um dos principais marcos no progresso da Matemática foi o seu movimento de modernização, iniciado na França.

> (...) os matemáticos da França na época da Revolução não só contribuíram bastante para a reserva de conhecimentos como foram em grande medida responsáveis pelas linhas principais do desenvolvimento na proliferação explosiva da matemática no século seguinte. (BOYER, 1974, p. 344).

O Movimento Matemática Moderna (MMM), nos anos de 1960, influenciou no desenvolvimento de diversas áreas da Matemática. Como exemplo, citam-se suas influências sobre a relação Álgebra Linear e Geometria, da qual aquela se origina:

> Na França, o ensino da álgebra linear foi totalmente remodelado com a "reforma da matemática moderna" nos anos sessenta. Naquela época, a influência de Bourbaki e alguns outros levaram à ideia – que se baseava em uma preocupação muito democrática – de que a geometria poderia ser mais facilmente acessível aos alunos se fosse fundada nos axiomas da estrutura dos espaços afins. Portanto, a teoria axiomática dos espaços vetoriais finalizados foi ensinada no primeiro ano do ensino médio (15 anos). (DORIER, 2000, p. 85, tradução nossa)[63].

[63] In France, the teaching of linear algebra was entirely remodeled with the 'reform of modern mathematics' in the sixties. At that time, the influence of Bourbaki and a few others led to the idea - which was based on a very democratic concern - that geometry could be more easily accessible to students if it were founded on the axioms of the structure of affine spaces. Therefore the axiomatic theory of finite dimensional vector spaces was taught in the first year of secondary school (age 15) (DORIER, 2000, p. 85).

Veem-se elementos históricos de que o MMM trouxe mudanças tanto para o Ensino Médio como para o Ensino Superior, pois alguns componentes da atual ementa de Álgebra Linear faziam parte do currículo do Ensino Médio na época. Este fato não é diferente do que se tem hoje, considerando que a ideia de matriz e sistemas de equações lineares fazem parte do rol de conteúdos do Ensino Médio atual. Dorier (2000) expõe esse cenário:

> (...) No final dos anos oitenta, essa mudança começou a afetar o ensino da álgebra linear na universidade. Muitos departamentos de matemática decidiram criar um curso de segundo ano sobre geometria cartesiana e vetorial como um pré-requisito para o curso mais formal sobre a teoria do espaço vetorial. Contudo, essa atitude mostra que a geometria é vista pela maioria dos matemáticos como um contexto natural para a introdução dos principais conceitos de linearidade. (...) Portanto, existe uma forte ênfase cultural (pelo menos na França) que sugere uma relação natural entre geometria e álgebra linear. No entanto, do ponto de vista histórico, a questão está longe de ser tão simples. (DORIER, 2000, p. 12, tradução nossa)[64].

Percebe-se que na França a Álgebra Linear destaca-se de modo que se percebe uma real preocupação com o aprendizado dos seus conteúdos, tanto que se criou um curso específico voltado à Geometria cartesiana e vetorial, com base nas ideias de Bourbaki. Trata-se da versão moderna da Álgebra Linear, conforme Dorier (2000) relata:

> Na sua versão moderna, a álgebra linear baseia-se essencialmente na teoria dos espaços vetoriais. Na França, essa teoria geralmente é ensinada em sua versão axiomática de acordo com a apresentação de Bourbaki, de forma tão hipotético-dedutiva que a apresentação lógica dos conceitos pode fazer os professores acreditarem que seu conteúdo é muito simples. Isso é reforçado pela padronização de seu vocabulário e ferramentas, devido a um uso extensivo da teoria do espaço vetorial em muitos campos, dentro ou fora da matemática. Esta universalidade recentemente adquirida – a abordagem axiomática tornou-se amplamente utilizada somente após 1930 – não deve ocultar um longo desenvolvimento que se estende por vários séculos com fases difíceis de unificação. (DORIER, 2000, p. 3, tradução nossa)[65].

---

[64] (...) In the late eighties, this change started to affect the teaching of linear algebra at university. Many mathematics departments decided to create a sophomore course on Cartesian and vector geometry as a prerequisite for the more formal course on vector space theory. (...) Therefore, there is a strong cultural emphasis (at least in France) that suggests a natural relationship between geometry and linear algebra. Nevertheless, from a historical viewpoint, the question is far from being so simple (DORIER, 2000, p. 12).

[65] In its modern version, linear algebra is essentially based on the theory of vector spaces. In France, this theory is usually taught in its axiomatic version according to Bourbakis' presentation, in such a hypothetico-deductive manner that the logical presentation of concepts might make teachers believe that its content is very simple. This is reinforced by the standardization of its vocabulary and tools, due to an extensive use of vector space theory in many fields, within or outside mathematics. This recently

Denota-se que o grupo francês de matemáticos nomeado por Bourbaki teve grande influência não só na França como no Brasil, como já frisado: “[d]esde 1939 vem aparecendo na França uma série de obras matemáticas da mais alta abrangência, supostamente de autoria de Nicolas Bourbaki, refletindo propositada e acentuadamente as tendências da matemática no século XX.” (EVES, 2004, p. 691).

No entanto, não existia uma única proposta de organização dos conteúdos matemáticos, o que nos instiga a avançar na discussão sobre a perspectiva de outros autores, da mesma época, acerca dos conteúdos que atualmente compõem a Álgebra Linear.

2.2.1 Outras perspectivas para a organização dos conteúdos

Nesta seção, são apresentados outros estudiosos que se dedicaram e publicaram obras com ênfase à história da Matemática para o ensino de alguns dos conteúdos que compõem a Álgebra Linear. Merecem destaque os autores Bento de Jesus Caraça e Konstantin Alekseevich Rybnikov.

A pretensão é a de destacar perspectivas diferentes sobre a organização dos conteúdos matemáticos com o intuito de compreender a relação entre os conceitos básicos da Matemática e os conteúdos que compõem a Álgebra Linear. Isto porque, como já posto, a raiz da Álgebra Linear está nas geometrias euclidiana e analítica e nos sistemas de equações lineares. Significa dizer que a não compreensão desses conceitos dificulta no ensino e aprendizado dos conteúdos que compõem a ementa da disciplina de Álgebra Linear.

De origem portuguesa, Bento nasceu em 1901, na parte rural do Distrito de Évora; foi lá que aprendeu as noções básicas de escrita, leitura e contagem e frequentou a escola primária. Posteriormente, mudou-se para Lisboa, dando continuidade aos seus estudos em liceus. Ingressou no Curso Superior de Comércio e, para garantir seu sustento, começou a atuar como professor. Tornou-se professor do Instituto Superior de Ciências Econômicas e Financeiras da Universidade Técnica de Lisboa, em 1919, quando ainda era aluno, como assistente nas cadeiras de

---

acquired universality – the axiomatic approach became widely used only after 1930 – should not hide a long development stretching over several centuries with difficult phases of unification. (DORIER, 2000, p. 3).

Matemáticas Superiores. Anos depois, tornou-se Professor Catedrático até sua demissão, em 1946, mas teve a oportunidade de atuar em outras instituições de Portugal. Amaral (2014) lhe caracteriza como um divulgador científico:

> Caraça desenvolveu importante papel como divulgador científico, em Portugal, aproveitando os mais variados meios de comunicação para difundir as mais recentes conquistas científicas em sua época. A sua ação de divulgador científico esteve presente em aulas, conferências, artigos de jornais e revistas, buscando abranger a maior quantidade de pessoas com as mais variadas formações e provindas dos mais diversos setores de atuação, lembrando que a sua predileção eram os trabalhadores e os jovens, em geral. A sua atuação como divulgador científico é constatada pela quantidade de conferências e ensaios literários que escreveu para jornais e revistas. (AMARAL, 2014, p. 43).

Caraça foi criticado por suas publicações ao defender a corrente filosófica proposta por Marx e Engels, afinal, prevalecia em Portugal na época a ditadura Salazarista[66]. Nas suas obras, é perceptível a dialética tanto no raciocínio quanto no desenvolvimento dos capítulos, que trazem a ideia de converter quantidade em qualidade, interdependência dos contrários, negação da negação e conexões com outros ramos do conhecimento (AMARAL, 2014):

> Em suas ações, encontramo-nos diante de um importante filósofo com reflexões convictas quanto ao fato de pensar o seu tempo amparado por seu aprendizado formal e não formal, trilhando caminhos filosóficos consistentes e embasados em Pitágoras, Parmênides, Heráclito, Platão, Aristóteles, Galileu, Newton, Leibniz, Hegel, Marx e Engels, entre outros pensadores. A sua vertente filosófica instala-se fortemente por ações embasadas em valores humanos e sociais, com trajetória de conquista por meio da ampliação da cultura geral da pessoa. O seu pensamento está presente em todas as suas atitudes, nas quais desenvolveu as atividades, sendo urna trajetória carregada de coerência e consistência entre convicções e ações. Seu pensamento dialético foi indelevelmente expresso para a reflexão nos textos de suas conferências e artigos específicos. Apesar de embasado nos problemas de sua época e no contexto em que envolveu suas reflexões, constatamos que seu pensamento continua atual, podendo ser efetivamente aplicado, minimamente, sob sua vertente filosófica. (AMARAL, 2014, p. 45).

Caraça tinha um olhar requintado para o ensino e aprendizagem da Matemática. Durante anos foi responsável “pela seção de Pedagogia da revista Gazeta de Matemática da Sociedade Portuguesa de Matemática, onde deixou claras lições de importantes ações pedagógicas.” (AMARAL, 2014, p. 45). Sua intenção era popularizar o conhecimento matemático nos diversos níveis escolares, e seus livros

[66] Essa ditadura recebeu este nome por conta da influência de António Oliveira Salazar, professor na Universidade de Coimbra, sobre as finanças de Portugal.

apresentam propostas pedagógicas e metodológicas para alcançar esse objetivo, como se vê do relato de Amaral (2014):

> Bento Caraça desenvolveu intensa atividade como escritor e autor de livros que considerava didáticos: também escreveu sobre vários temas sendo, em sua maioria, publicados por alguns órgãos de imprensa, em Portugal e no estrangeiro. Certamente, a maior quantidade foram artigos, mas também publicou, em separatas, as suas conferências; porém, sua atenção voltou-se para a publicação de seus livros, fundamentalmente, na área de Matemática. (...) Esses livros foram amplamente divulgados, difundidos e utilizados, tanto em Portugal quanto no Brasil, e, ainda hoje, existem vestígios de sua presença e utilização nos campos de sua abrangência. (AMARAL, 2014, p. 51).

Suas ideias de generalidade e universalidade surpreendem para a época por levarem em consideração, na sua escrita, a essência do homem com a intenção de colaborar com a qualidade de vida. “Suas preocupações e reflexões fundamentam-se no passado para a devida compreensão do presente e projeção de um futuro melhor.” (AMARAL, 2014, p. 56).

Entre tanto livros publicados por Caraça, nesta pesquisa será analisada a obra Lições de Álgebra e Análise, Volumes I e II. A primeira edição do volume I foi publicada em 1935 e a do II em 1940. Os anos de publicação destas obras coincidem com os anos iniciais do primeiro curso de Matemática no Brasil, na USP. Deste modo, analisá-las é, sem embargo de dúvida, conhecer o pensamento matemático deste autor:

> “Lições de Álgebra e Análise”, em seus dois volumes, é uma obra destinada aos alunos universitários, bem como para profissionais da área de matemática. É uma obra em que o autor utiliza uma linguagem formal com o devido rigor, atendendo à finalidade a que se propõe — dar suporte tanto aos alunos quanto aos professores. Apresenta temas matemáticos destinados ao ensino superior, abordando das noções simples às mais complexas, sempre com o apoio na introdução da História da Matemática e alguns aspectos filosóficos. (AMARAL, 2014. p. 174).

Ao abrir o livro de Caraça, é perceptível o olhar humanista e universalista para com o ensino e a aprendizagem da Matemática, pois, desde o prefácio da 1ª edição do volume I, o autor tem a intenção de que seu livro seja acessível a todos. O volume I é dividido em duas partes: a primeira recebe o título de Números e a segunda de Algoritmos de Simetria.

A parte Números, do capítulo I ao IV, apresenta discussões básicas sobre os Números Naturais, Racionais, Relativos, para depois tratar dos conjuntos, que abordam o conceito de grupo, anel etc. Relacionando essa ordem adotada por Caraça com o que está atualmente posto nas Universidades, os conceitos de grupo e anel, por exemplo, não são apresentados nem discutidos de forma que mostrem uma relação com os conteúdos da Álgebra Linear (tal percepção ficará mais clara por ocasião da apresentação, mais adiante, dos conteúdos que compõem as ementas de Álgebra Linear).

No capítulo V (ainda na primeira parte da obra de Caraça), volta-se a tratar dos conjuntos numéricos, especificando os Reais; em outro capítulo, denominado Conjunto – fazendo referência aos conjuntos numéricos apresentados anteriormente – é vista a Equivalência. O autor tem ainda a preocupação de organizar um capítulo de ‘Complemento’ aos capítulos anteriores.

A primeira parte é finalizada com outros dois capítulos sobre os Números Complexos e a representação geométrica. Caraça (1959) explica que a possibilidade de se estabelecer uma correspondência biunívoca entre números complexos e ponto do plano é uma forma de definir vetor, e para isso apresenta duas definições[67]. Ele, deste modo, reforça ao leitor a importância de se conhecer os números complexos para compreender a ideia de vetor no espaço, quando diz que “Mais tarde, no estudo da *Álgebra Vectorial*, utilizaremos estas duas definições de vector.” (CARAÇA, 1959, p. 189).

Caraça é minucioso e, em todos os capítulos, tem o cuidado de apresentar a parte histórica do conceito que será estudado, o que remete à ideia desta pesquisa, que é a de conhecer a história visando compreender o objeto da pesquisa. A explicação para essa organização é dada pelo autor ainda no prefácio:

> Apresento sistematicamente, nos primeiros capítulos, teorias analíticas dos números. Se assim procedo é, não porque lhes reconheça só virtudes sobre as sintéticas (têm vantagens e têm inconvenientes), mas, simplesmente, porque, tendo estas matérias sido tratadas já, duma maneira elementar e orientação sintética, no ensino secundário, me parece útil que o aluno, ao retomar o seu estudo, o faça sob orientação diferente.
>
> A diversidade de métodos, além de alargar horizontes e de dar uma visão mais larga da riqueza do edifício matemático, tem ainda outra vantagem - a de permitir o aproveitamento daquelas inclinações que a um só deles ficariam insensíveis e a de provocar sempre, em cada inteligência, o trabalho fecundante do debate. (CARAÇA, 1959).

[67] As definições não serão apresentadas por não contribuírem para os propósitos dessa seção. Contudo, o fato do autor conceber duas definições denota a preocupação em esclarecer, antes, a relação entre números complexos e conceito de vetor, para depois dar seguimento às demais definições.

Caraça (1959) deixa claro que para compreender a proposta do livro e estudar sobre Álgebra e Análise, é importante rever esses conteúdos para, após, adentrar na Álgebra parte propriamente dita. Esse pensamento do autor remete, frisa-se, à parte histórica da seção anterior desta pesquisa, em que se relatam estudos de grande parte dos matemáticos sobre os conteúdos que atualmente compõem a ementa de Álgebra Linear, para resolver os problemas de Análise.

Ao relacionar os itens apresentados nesses capítulos iniciais da obra de Caraça com a história apresentada nas seções anteriores desta dissertação, é possível estabelecer outra relação, pois no desenvolvimento e consolidação dos conteúdos que atualmente compõem a ementa de Álgebra Linear houve diversos estudos que envolveram conjuntos numéricos e representações geométricas, o que é feito por Caraça, ao reforçar na sua escrita a importância da história e organizar os conteúdos com base nela para que esse conhecimento seja acessível a todos.

A segunda parte, Algoritmos de Simetria, que se inicia no capítulo X e segue até o XV, trata, a princípio, de Análise Combinatória, e, na parte histórica do capítulo, o autor já nos explica, de forma indireta, o motivo da exposição desse conteúdo antes de tratar de matriz, por exemplo. Caraça (1959) conta que as origens da Análise Combinatória datam do século XVII com Pascal, Leibniz, entre outros matemáticos, e há elementos históricos, como apresentado anteriormente, de que Leibniz resolvia alguns dos problemas matemáticos organizando os dados em linhas e colunas, o que remete à ideia de matriz.

Essa organização também necessita da noção de Combinatória; por isso Caraça afirma que o desenvolvimento desse conceito também passou por Leibniz. Assim, “A *Análise Combinatória* serve hoje de suporte a várias teorias da *Análise Matemática* – probabilidades, determinantes, teoria dos números, teoria dos grupos, topologia, álgebras lógicas etc.” (CARAÇA, 1959; 1999).

Na sequência, há a Teoria dos Determinantes, que, segundo Caraça (1959), começa a desenvolver-se também no século XVII, com consolidação no século XIX por meio dos estudos de Cauchy e Jacobi. Para explicar a definição de determinante, o autor usa o conceito de Números Reais ou Complexos e explica sobre a organização em linhas e coluna, conforme sugerido por Leibniz no século XVII.

O capítulo seguinte da obra de Caraça trata da Álgebra das Matrizes, cuja apresentação histórica é breve, citando apenas o nome de Sylvester como o responsável pelo conceito de matriz no século XIX. Para apresentar a definição de matriz, Caraça (1959) explica que os elementos que a compõem podem ser números reais ou complexos e devem pertencer a um dado corpo, ou seja, para que o leitor a compreenda é necessário retornar ao capítulo IV para apreensão da definição de corpo.

Na sequência, o capítulo intitulado Característica – Equações lineares continua tratando de Matriz, dessa vez sobre nulidade, operações elementares, equivalência, dependência linear e redução, para discorrer sobre Sistemas de Equações Lineares. Desta forma, Caraça (1959) mostra claramente a importância do conceito de matriz para a resolução de Sistemas.

O assunto seguinte é Matrizes Especiais – Transformação, quando novamente o autor reforça “que as matrizes de que nos ocuparemos são definidas no corpo C dos números complexos.” (CARAÇA, 1959, p. 310), deixando novamente clara a importância dos capítulos anteriores para a compreensão desse.

Antes de definir Transformação, o autor até mesmo apresenta alguns conceitos relacionados à Matriz para facilitar a compreensão: Matriz transposta, conjugada, associada e ortogonal são algumas das definições discutidas no livro antes de apresentar as propriedades das operações com matriz transposta e discutir sobre transformação de matrizes, normalização e ortogonalização. A preocupação com o conhecimento de matriz é grande neste livro, e pode-se considerar, diante da proposta de Caraça, que se cuida de um conceito extremamente importante tanto para a Álgebra como para a Análise.

Ao analisar o Volume II, o enfoque é diferente do primeiro volume, em que os números tiveram destaque. No tomo II, a tônica é nas variáveis. Caraça continua tratando da ideia de conjunto, mas agora associando-o à ideia de variáveis e, assim, enuncia algumas definições importantes para o estudo de espaço, como a ideia de pontos de acumulação.

Na sequência, trata da noção de função de uma ou mais variáveis e introduz a teoria dos limites como “estudo do comportamento das funções quando as variáveis independentes tomam valores da vizinhança de um ponto do seu domínio.” (CARAÇA, 1954, p. 123). Após aprofundar nas definições de limite, o autor discute a relação entre limite e a noção de espaço completo apresentada por Fréchet no início do século XIX, ou seja, novamente retoma a história para orientar a organização do seu livro. Caraça finaliza esse volume tratando da Teoria da Continuidade.

Essas duas obras são de grande importância para a Matemática, inclusive, os conteúdos nelas discutidos, segundo o autor, são aqueles necessários para se começar os estudos de Álgebra e Análise. Com efeito, ao longo da história, percebemos que os conteúdos que compõem a Álgebra Linear foram estudados com o propósito de contribuir com os estudos de Análise. É o que Caraça faz nestes livros: apresentar quais conteúdos são necessários para a compreensão da Análise, e, devido a esse enfoque histórico, seus livros ainda são usados atualmente:

> Caraça foi um homem múltiplo, que viveu a sua época e as suas circunstâncias de forma intensa e altamente produtiva. Seu legado filosófico e pedagógico, indiscutivelmente, constitui uma importante fonte inspiradora de aplicabilidade em nosso sistema educacional. (AMARAL, 2014 , p. 40).

Bento de Jesus Caraça tem uma reputação, de certa forma, semelhante a de outro autor que agora se passa a analisar, pois “Todos que conheciam Konstantin Alekseevich lembravam-se dele não apenas como um cientista e professor de destaque, mas também como um homem de alta cultura, princípios morais sólidos, excepcionalmente decentes e benevolentes.” (DEMIDOV et al., 2014, p. 169)[68]. Caraça e Rybnikov foram professores e, por serem consideradas referência no ensino de conteúdos matemáticos, suas obras são analisadas nesta dissertação.

O russo Konstantin Alekseevich Rybnikov[69], nascido em 1913, na Aldeia Luganskoy, que atualmente faz parte da cidade de Lugansk, na Ucrânia, é filho de professores do ensino fundamental. Konstantin e seus irmãos foram alfabetizados pelos próprios pais na escola primária em que trabalhavam. Em virtude do advento da Primeira Guerra Mundial, a família deixou a aldeia em 1918 para morar em uma fazenda nos arredores da cidade de Millerovo. No novo local, não seria possível às crianças continuarem os estudos em razão da dificuldade de mobilidade. Com a população da cidade de Millerovo crescendo e demandando professores, a família se deslocou para lá em 1927. Eram duas as escolas na cidade: os pais-professores de Konstantin trabalhavam em uma e as crianças estudavam na outra. Nessa época,

---

[68] Все, кто знал Константина Алексеевича, помнят его не только как выдающегося учёного и педагога, но и как человека высокой культуры, твёрдых нравственных принципов, исключительно порядочного и доброжелательного. (DEMIDOV et al., 2014, p. 169).

[69] Há, nas obras consultadas, dois registros de grafia do sobrenome de Konstantin: Rybnikov e Ribnikov. A grafia “Rybnikov” será adotada nas menções genéricas ao autor (em que não haja referência expressa a obras); nas situações que se referirem à citação da obra referenciada, a grafia do nome será “Ribnikov”, conforme constante da referência.

Konstantin sentiu-se atraído pela Matemática por influência de um professor e decidiu que se mudaria para Rostov para estudar na escola de Física (DEMIDOV et al., 2014).

A vida estudantil de Rybnikov, no entanto, não foi exatamente como planejada: rejeitado pela Universidade de Rostov, retornou para casa e se viu impelido a arrumar emprego para ajudar a família. Começou a trabalhar com produção de tijolos, e em meio a essas atividades, ficou conhecido pela sua dedicação aos estudos e foi indicado para ser professor primário em um assentamento a 40 km da cidade.

Um ano depois, Rybnikov foi transferido para trabalhar na escola primária em Millerovo. De 1931 a 1933, sua principal atividade era ensinar Matemática, mas, em 1932, enviou uma carta ao reitor da Universidade de Moscou, explicando sua história e solicitando uma vaga na universidade. A resposta foi rápida, e Rybnikov foi admitido como estudante do curso superior de Matemática. No começo do ano de 1935, ele já deveria definir o tema de sua pesquisa, e a área escolhida foi a História da Matemática. (DEMIDOV et al., 2014, tradução nossa).

O início da vida científica de Rybnikov coincide também com a data de criação do primeiro curso de Matemática no Brasil, em 1934, e o foco de sua pesquisa igualmente corresponde ao objeto deste estudo:

> A pesquisa de Konstantin "Álgebra nas obras de Omar Khayyam" (supervisor Professor Yanovska Sofia Alexandrovna) foi dedicada ao estudo de "Um Tratado sobre a evidência de problemas de álgebra" deste estudioso medieval. A principal conquista de Khayyam neste trabalho, em que a álgebra foi considerada pela primeira vez na história como uma ciência independente, foi o desenvolvimento de métodos para encontrar as raízes positivas das equações cúbicas. Como método geral para sua solução, a construção de raízes foi escolhida encontrando a interseção das seções cônicas. Posteriormente, este tratado Khayyam tornou-se o objeto de muitos estudos de historiadores soviéticos da matemática (BA Rosenfeld, Yushkevich e outros.), Mas os primeiros passos em seu estudo sistemático foram feitas por Konstantin. Para começar, ele teve que se familiarizar com a extensa literatura sobre o assunto e, em primeiro lugar, claro, com o próprio tratado. (DEMIDOV et al., 2014, p. 159-160, tradução nossa)[70].

[70] Дипломная работа Константина Алексеевича "Алгебра в трудах Омара Хайяма" (научный руководитель профессор Яновская Софья Александровна) была посвящена исследованию "Трактата о доказательствах задач алгебры" этого средневекового учёного. Основным достижением Хайяма в этом сочинении, в котором алгебра впервые в истории рассматривалась как самостоятельная наука, стала разработка методов нахождения положительных корней кубических уравнений. В качестве общего метода их решения было избрано построение корней посредством нахождения пересечения конических сечений. Впоследствии этот трактат Хайяма стал предметом исследований многих советских историков математики (Б. А. Розенфельда, А. П. Юшкевича и др.), но первые шаги в его систематическом изучении были сделаны Константином Алексеевичем.
Для начала ему предстояло ознакомиться с обширной литературой вопроса и, прежде всего, конечно, с самим трактатом. (p. 159-160).

Rybnikov percebeu que, sem conhecer alguns conceitos da Matemática e a própria obra de Omar Khayyam, conforme citação, não seria possível desenvolver a sua pesquisa. No ano de 1936, Rybnikov encerrou os estudos de graduação, determinado a fazer os exames de admissão para a pós-graduação, mas, ao ser indicado para um cargo de chefia na Universidade de Moscou, o excesso de trabalho o impediu de dar prosseguimento aos estudos, retomados somente em 1938. No artigo de Demidov et al. (2014), há relatos de Konstantin Rybnikov sobre sua experiência na pós-graduação, em que relata que foi necessário aprender outras línguas, como o latim e o grego, para estudar a história do desenvolvimento da resolução de problemas variacionais desde a antiguidade, bem como os trabalhos de Euler. Demidov et al. (2014) discorre sobre os estudos de Rybnikov:

> Era necessário navegar livremente no estado moderno de métodos variacionais de matemática e mecânica, para reabastecer a erudição na história geral e na história da ciência, em particular, na história da matemática. (...) Assim, a pesquisa de Konstantin Alekseevich iniciou o estudo sistemático da história do cálculo das variações. Nesse caminho, eles lançaram as bases para toda uma linha de pesquisa – pré-história e história inicial de análise funcional (AV Dorofeev, SS Petrov et al.) (DEMIDOV et al., 2014, p. 162, tradução nossa)[71].

A pesquisa desenvolvida nesta pós-graduação de Rybnikov, defendida em 1941, denota a importância dos estudos sobre os aspectos históricos dos conteúdos e a relação da História Geral com a História da Ciência. Na sequência, com a Grande Guerra Patriótica, o matemático novamente teve que interromper seus estudos para assumir o posto de tenente em Leningrado. Somente em 1945, retornou à Universidade de Moscou e trabalhou, por três anos, no seu Departamento de Física. Em 1948, novas mudanças ocorreram: ele foi compelido a deixar a Universidade para trabalhar no Comitê Central do Partido Comunista da União Soviética, exercendo diversas funções:

> No começo ele era instrutor no departamento de ciência e ensino superior. Mais tarde, foi enviado para um serviço criptográfico especial (...).

---

[71]Надо было свободно ориентироваться в современном состоянии вариационных методов математики и механики, пополнять эрудицию в общей истории и истории науки, в особенности, истории математики. (...) Таким образом диссертация Константина Алексеевича положила начало систематическому изучению истории вариационного исчисления. На этом пути им были заложены основания целого направления исследований – предыстории и ранней истории функционального анализа (А. В. Дорофеева, С. С. Петрова и др.).
Важной вехой на этом направлении стал коллоквиум "Пути развития функционального анализа" , организованный Константином Алексеевичем в 1971 году рамках 13-го Международного конгресса по истории науки в Москве. (DEMIDOV et al., 2014, p. 162).

> Trabalhando lá, interessou-se por problemas de análise combinatória, cujo papel no século XX aumentou enormemente. (...) Mais tarde, Konstantin Alekseevich, juntamente com seu trabalho científico na história da matemática, começou a trabalhar na construção de uma teoria geral da análise combinatória (que ainda não existia em meados do século XX). (DEMIDOV et al, 2014, p. 165-166, tradução nossa)[72].

Mesmo alterando os objetivos de suas pesquisas, Rybnikov não se afastou dos estudos sobre a história da Matemática. Suas pesquisas sobre análise colaboraram para que retornasse à Universidade, em 1953, para trabalhar na Faculdade de Mecânica e Matemática e concluísse, no ano seguinte, sua tese de doutorado sobre os manuscritos matemáticos de Karl Marx.

> Duas áreas principais do trabalho científico de Konstantin Alekseevich foram: 1) história e metodologia da matemática, 2) análise combinatória.
> Como principal tarefa da pesquisa na história da matemática, Konstantin Alekseevich considerou a criação de um sistema cientificamente fundamentado de conhecimento sobre os caminhos do desenvolvimento da ciência matemática até os tempos mais próximos possíveis do presente. Percebendo essa ideia, ele criou um livro didático "História da Matemática" para estudantes de especialidades matemáticas de universidades e institutos pedagógicos, bem como para uma ampla gama de matemáticos de especialistas. Este é o primeiro livro universitário fundamental dedicado a esta disciplina (e até agora o único). (DEMIDOV et al., 2014, p. 167, tradução nossa)[73].

O livro citado igualmente evidencia a relevância da história da Matemática nos estudos de diversos conteúdos matemáticos. Para melhor percepção, será analisada a sua versão em espanhol, traduzida em 1987.

A obra é dividida em oito capítulos. No primeiro, o autor discute o objeto e o método da história da Matemática, apresentando ao leitor a importância da prática no seu desenvolvimento e os momentos mais importantes da sua história, tudo em uma

---

[72] Сначала он был инструктором в отделе науки и высших учебных заведений. В дальнейшем его направили в специальную криптографическую службу, […]. Работая там, он заинтересовался проблемами комбинаторного анализа, роль которого в XX столетии чрезвычайно возросла. […] В дальнейшем Константин Алексеевич, наряду с научной работой в области истории математики, начал работу по построению общей теории комбинаторного анализа (которой к середине XX века всё ещё не существовало). (DEMIDOV et al., 2014, p. 165-166) .

[73] Двумя основными направлениями научной работы Константина Алексеевича стали : 1) история и методология математики, 2) комбинаторный анализ.
Главной задачей исследований в области истории математики Константин Алексеевич считал создание научно обоснованной, цельной системы знаний о путях развития математической науки вплоть до времён, как можно более близких к современности. Реализуя этот замысел, он создал учебник "История математики" для студентов математических специальностей университетов и педагогических институтов, а также для широких кругов математиковспециалистов. Это первый фундаментальный университетский учебник, посвящённый данной дисциплине (и пока единственный). (DEMIDOV et al., 2014, p. 167).

interpretação materialista do tema, afinal, sua tese de doutorado versa sobre os estudos de Marx:

> A prática nos ensina que toda a ordem lógica de qualquer ciência, sua estrutura, inter-relação e, até mesmo, a existência de ramos independentes não são algo imutável. Eles são o resultado do desenvolvimento histórico. Além disso, o mesmo desenvolvimento lógico de ideias sobre uma ciência nada mais é do que o reflexo do processo histórico de forma consistente, abstrata e teórica. (RÍBNIKOV, 1987, p. 18, tradução nossa)[74].

Ríbnikov (1987) deixa claro em seu livro que para se compreender os conteúdos matemáticos é necessário conhecer o processo de desenvolvimento do conceito, os fatos importantes da história da Matemática e as obras que foram referências. Na sequência, o autor discute sobre o processo de formação das representações matemáticas, apresentando, de forma resumida, a Matemática no Egito Antigo, na Babilônia, na China Antiga e na Índia Antiga. O autor reforça que "[s]eu início provavelmente remonta a tempos antigos, quando o homem começou a usar instrumentos para obter meios de subsistência e, posteriormente, para trocar os produtos do trabalho." (RÍBNIKOV, 1987, p. 20, tradução nossa)[75]. Isto é, foi a necessidade da época que moveu o homem a desenvolver técnicas matemáticas.

Nos dois capítulos seguintes – terceiro e quarto –, o autor mostra como se deu a formação e o desenvolvimento das primeiras teorias matemáticas, para, posteriormente, tratar da criação da Matemática das Variáveis, e, assim, chegar aos estudos da Análise Infinitesimal. Mais uma vez, a Análise surge em meio ao desenvolvimento histórico da Matemática. A propósito, o autor relata que o desenvolvimento da Geometria Analítica trouxe contribuições para o estudo e compreensão de problemas da Análise:

> O surgimento na matemática da geometria analítica aliviou substancialmente a formação da análise infinitesimal. Por outro lado, tornou-se um instrumento indispensável da construção da mecânica em Newton, Lagrange e Euler, muito eficaz na resolução de numerosos problemas das ciências exatas. Na matemática do século XVIII, o surgimento da geometria analítica significou o surgimento das possibilidades para a criação da análise de variáveis. Esta possibilidade foi imediatamente percebida, uma vez que os problemas (...)

---

[74] La práctiva nos enseña que todo el orden lógico de cualquier ciencia, su estructura, interrelación e incluso la existencia de ramas independientes no constituyen algo inmutable. Ellas son fruto del desarrollo histórico. Además de esto, el mismo desarrollo lógico de las ideias sobre una ciencia no es otra cosa que el reflejo del processo histórico em forma consecuente, abstracta y teórica. (RÍBNIKOV, 1987, p.18).

[75] Su comienzo probablemente data de tiempos remotos, cuando el hombre pasó a utilizar instrumentos para la obtención de medios de subsistencia y posteriormente, al intercambio de los productos del trabajo. (RÍBNIKOV, 1987, p. 20).

> mais importantes eram tais que causaram uma aguda necessidade no passo urgente para a descoberta dos métodos e das teorias gerais da análise matemática. (RÍBNIKOV, 1987, p. 167, tradução nossa)[76].

Nos mesmos capítulos, logo após o relato do surgimento da Geometria Analítica, Ríbnikov (1987) apresenta os métodos integrais e diferenciais para facilitar a compreensão do surgimento da Análise Infinitesimal e, inclusive, aponta as ideias filosóficas de Leibniz sobre análise infinitesimal, publicadas em 1684.

No capítulo seguinte, o autor ainda trata da Análise e do Cálculo, dessa vez, relacionando-os com as variáveis e o desenvolvimento da Geometria, para, após, no capítulo 6, introduzir o item que trata da criação dos princípios da Álgebra moderna e da Teoria dos Números. Havia uma grande discussão em torno do conceito de número negativo e dos números imaginários da álgebra, que apareceram em formas de raízes das equações. (RÍBNIKOV, 1987). Para finalizar o capítulo, o autor trata do desenvolvimento da Teoria das Probabilidades e da Análise Combinatória.

O capítulo 7, de sua feita, é dedicado ao começo do período das matemáticas ditas modernas. A começar pela Matemática do século XIX, o autor aponta uma das particularidades que moveram o desenvolvimento dessa ciência no citado século:

> A terceira característica particular do desenvolvimento da matemática no século XIX é a considerável expansão do campo de aplicações, fundamentalmente, causada pelo aumento de oportunidades do dispositivo de análise matemática. Nas ciências exatas, depois da mecânica e da óptica, foram incluídos os problemas dos fenômenos termodinâmicos e eletromagnéticos. De repente, as exigências matemáticas da técnica cresceram: a balística, a construção de máquinas e outros. (Ríbnikov, 1987, p. 341, tradução nossa)[77].

O desenvolvimento da Matemática no século XIX colaborou, ainda, para o desenvolvimento financeiro de diversos países. A construção de máquinas a vapor,

---

[76] El surgimiento en las matemáticas de la geometria analítica aligeró sustancialmente la formación del análisis infinitesimal. Por otra parte, se convirtió en un instrumento imprescindible de la contrucción de la mecánica en Newton, Lagrange y Euler, muy efectivo en la resolución de numerosos problemas de las ciencias exactas. En las matemáticas del siglo XVLI, el surgimiento de la geometría analitica significó la aparición de las posibilidades para la creación del análisis de las variables. Esta possibilidad enseguida fue realirada, ya que los problemas más importantes (...) eran tales que provocaban una aguda necesidad del paso urgente al descubrimiento de los metodos y las teorías generales del análisis matemático. (RÍBNIKOV, 1987, p. 167).

[77] La tercera particularidad característica del desarrolo de las matemáticas en el siglo XIX es la ampliación considerable del campo de aplicaciones, en lo fundamenta, condicionada por el aumento de las posibilidades del aparato del análisis matemático. Em las ciencias exactas, tras la mecánica y la óptica, se incluyeron los problemas de los fenómenos termodinámcos y electromagnéticos. Bruscamente crecieron las exigencias matemáticas de la técnica: la balística, la construcción de maquinaria e otros. (RÍBNIKOV, 1987, p. 341).

por exemplo, que mais tarde se tornou fonte de energia para a produção industrial, foi resultado dessas contribuições. Outro exemplo foi o estudo do movimento de projéteis lançados no espaço, que possibilitou avanços tecnológicos no campo do alcance das armas de fogo (RÍBNIKOV, 1987). Tal século foi de grande importância para a Matemática e para a constituição da Álgebra Linear:

> A história da álgebra do século XIX permanece incompleta, se o pesquisador não apresentar (...) a formação da álgebra linear, oriunda da teoria dos sistemas de equações lineares e relacionada à teoria dos determinantes e matrizes. Na segunda metade do século XIX, investigações muito importantes da teoria dos invariantes das equações foram realizadas, isto é, a evidência das funções dos coeficientes que conservam seus valores antes de uma ou outra dada classe de transformações. Nesse caminho de desenvolvimento, cresceu a teoria mais geral das formas, que encontrou aplicação não apenas na álgebra, mas também em outros ramos da matemática: teoria dos números, geometria diferencial, geometria algébrica, mecânica e outras, e, além disso, em suas aplicações. (RÍBNIKOV, 1987, p. 357, tradução nossa)[78].

O autor reforça a ideia discutida na primeira seção do capítulo de sua obra, de que a disciplina de Álgebra Linear é decorrente da ideia de Matriz, determinantes e sistemas de equações lineares. Dito de outro modo, não é possível tratar de Álgebra Linear sem conhecer esses conteúdos. Rybnikov (1987) ainda faz referência a outros conceitos neste trecho, como às transformações lineares, ao falar da conservação de valores, e reforça a variedade de aplicações desses conceitos.

Essa discussão também vem ao encontro do discutido no primeiro capítulo desta dissertação, pois a Matemática foi introduzida no Brasil, de maneira mais significativa, exatamente nessa época, pois em 1850 houve o lançamento do primeiro livro de Matemática escrito por um brasileiro positivista, um marco para o ensino dessa ciência. Tal fato coincide, ainda, com outro marco: a ampliação das aplicações dos conteúdos matemáticos. Deste modo, pode afirmar que há uma relação entre esses eventos, mesmo não ocorrendo no mesmo local.

Antes de finalizar o capítulo, Ríbnikov (1987) discute sobre as transformações da Geometria e o estabelecimento do método axiomático como uma resposta à

[78] La historia del algebra del siglo XIX quedarla incompleta, si el investigador no atendiera, en tercer término, a la formacion del álgebra lineal, surgida de Ia teoria de los sistemas de ecuaciones lineales y relacionada con Ia teoria de determinantes y matrices. En la segunda mitad del siglo XIX se Ilevaron a cabo investigaciones muy importantes de Ia teoria de los invariantes de las ecuaciones, esto es, Ia evidencia de Ias funciones de los coeflcientes que conservan sus valores ante una u otra clase dada de transformaciones. En este camino del desarrollo creció Ia teoria más general de las formas, la cual encontró aplicación no sólo en el algebra, sino también en otras ramas de las matemáticas: la teoria de numeros, Ia geometria diferencial, la geometria algebraica, la mecánica y otras y, además, en sus aplicaciones. (RÍBNIKOV, 1987, p. 357).

necessidade de padronizar e generalizar os resultados alcançados. Ao longo dos capítulos, o autor explicita as relações da Matemática com o desenvolvimento social, com especial olhar sobre os acontecimentos de seu país. Assim, ele finaliza a obra com um capítulo sobre a Matemática na Rússia: como ela se desenvolveu, quais instituições de ensino a ensinavam e quais eram as referências para as pesquisas acadêmicas.

Caraça e Ríbnikov não se concentram no ensino dos conteúdos da Álgebra Linear exclusivamente, pois, em nenhum momento, nas obras analisadas, os autores abordam – ao menos não de forma explícita – os conteúdos que atualmente compõem sua ementa. Afinal de contas, na época dessas publicações, a Álgebra Linear ainda não havia conquistado sua autonomia como disciplina obrigatória.

Entretanto, a partir da análise de suas produções e da parte histórica apresentada no primeiro capítulo da presente pesquisa, é inegável que os conteúdos que a compõem já estavam presentes na temática que deveria ser ensinada no curso de Matemática, o que não foi possível por falta de professores.

Diante dessa escassez de professores para ocupar as cátedras, em 1944 foram ministrados seminários que tratavam da Análise; ou seja, por certo, foram tratados os conteúdos que atualmente compõem a disciplina de Álgebra Linear, posto que histórico apresentado neste capítulo aponta, de forma cristalina, a relação da Análise com os conteúdos da Álgebra Linear.

Outro fato que corrobora com a história contada é o de que, em 1945, com a vinda de membros do grupo Bourbaki para atuar na USP, ocorreram mudanças na matriz curricular do curso de Matemática, e ditas mudanças estão relacionadas à Matemática vigente da época, pois os Bourbakis estavam em contato com o que era desenvolvido na Europa. Tanto o é que André Weil, membro do Bourbaki, é citado por Moore (1995), que alegando que aquele estudou sobre os espaços topológicos definidos por Fréchet, em 1927.

Assim, é possível perceber que o curso da USP passou a oferecer disciplinas de Análise, Geometria Analítica, Álgebra, entre outras áreas da Matemática, considerando que esses franceses, que ministravam aulas naquela Universidade, tinham contato com o que estava sendo desenvolvido na Europa e se interessaram por essas pesquisas. Anos depois, em 1966, com a vinda de outros membros do grupo Bourbaki para atuar na USP, houve oficialmente a inserção da disciplina de Álgebra

Linear no currículo do curso de Matemática da USP, o que testifica ainda mais a afirmativa.

Em virtude disso, os trabalhos de Caraça e Rybnikov consistem em apresentar aos estudantes universitários os conteúdos necessários para resolver problemas da Análise, e, nesse caminho, em busca de soluções para os aludidos problemas, “esbarrou-se” nos conteúdos que atualmente compõem a Álgebra Linear.

No entanto, os autores reforçam a importância de conteúdos elementares da Matemática para a compreensão dos demais, pois os diversos matemáticos que estudaram e colaboraram para a constituição da Álgebra Linear não nutriam a ideia de desenvolver uma nova área na Matemática: o intuito era aprimorar os conceitos de Análise já existentes para resolver novas situações.

Caraça e Rybnikov deram ênfase à parte histórica com o fito de cientificar o leitor da necessidade do desenvolvimento dos conteúdos matemáticos.

De igual modo, a história apresentada na seção anterior desta pesquisa acerca dos conteúdos que compõem a ementa da Álgebra Linear, aponta as razões de sua existência com vistas a solucionar problemas de outras áreas.

Deste modo, e por fim, levantou-se neste capítulo o quanto a Álgebra Linear é recente se comparada a outras disciplinas universitárias, como o Cálculo Integral e Diferencial, a Geometria Analítica e a Análise, pois depreende-se que seus conteúdos que foram aprimorados para resolver problemas do Cálculo, da Geometria e da Análise já existentes naquela época.

Isto posto, o próximo passo, rumo ao objeto desta pesquisa – o ensino da Álgebra Linear –, é conhecer as atuais ementas da disciplina de Álgebra Linear, a fim de relacionar a atual organização dos seus conteúdos com a história apresentada neste capítulo.

3 OS CONTEÚDOS QUE COMPÕEM A ÁLGEBRA LINEAR: UM ESTUDO DAS EMENTAS NOS CURSOS PRESENCIAIS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA NAS UNIVERSIDADES FEDERAIS BRASILEIRAS

São diversas as disciplinas que compõem a matriz curricular do curso de Licenciatura em Matemática e que também perpassam outros cursos. No entanto, elegeu-se nesta pesquisa a Álgebra Linear e, para analisar o movimento de constituição dos conteúdos que compõem a ementa dessa disciplina nos cursos presenciais de licenciatura em Matemática nas Universidades Federais Brasileiras, optamos por um olhar histórico do tema baseado nos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural.

Após percorrer toda essa história, apresentada nos capítulos 1 e 2, foi possível perceber o porquê, quando e como essa disciplina surgiu e para complementar essa análise, o próximo passo definido para esta pesquisa é conhecer a atual organização das ementas dessa disciplina. A intenção é relacionar a atual organização das ementas, com o que foi apresentado nos capítulos anteriores a fim de identificar qual a influência da história sobre essa organização, e, de efeito, poder responder à pergunta de pesquisa: como se deu a constituição dos conteúdos que compõem a ementa da disciplina de Álgebra Linear nos cursos presenciais de Licenciatura em Matemática das Universidades Federais Brasileiras?

Ao longo desta pesquisa, foram estabelecidas algumas relações entre os fatos apresentados, e assim será feito neste capítulo também. Antes de fazer a análise das ementas atuais da disciplina de Álgebra Linear no Brasil, será apresentado o curso de Matemática de uma instituição italiana, a Universidade de Bolonha.

Bolonha, citada no primeiro capítulo desta dissertação, é considerada uma das primeiras universidades no mundo, razão que a tornou referência para a criação de muitas outras instituições de ensino. Essa apresentação será feita em nível de curiosidade para mostrar que os conteúdos que compõem a Álgebra Linear aqui no Brasil também estão presentes na graduação em Matemática de lá.

Outras Universidades apresentadas no primeiro capítulo são, de igual modo, consideradas referências, mas a opção por esta instituição é fundada nos argumentos de Silva (2003), que apresenta elementos históricos de que a Matemática foi ensinada inicialmente na Universidade de Bolonha cujo atual curso de Licenciatura em

Matemática passa ser agora tratado para, após, passar-se às análises das ementas brasileiras.

3.1 ÁLGEBRA LINEAR NA ITÁLIA: O CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE BOLONHA

A Universidade de Bolonha surgiu no século XI ou XII, em data não precisamente sabida (MEIRA, 1991), e foi a responsável por mudar os rumos da história do ensino superior no mundo, visto que essa instituição introduziu o *studium* (o ensino universitário), especificamente o estudo do Direito, perspectiva social tão forte quanto às outras forças da Idade Média – a Religião (Cristianismo medieval) e o Império (o poder dos Príncipes).

"O grande mérito de Bolonha está no ensinamento e difusão da ciência jurídica, (...) [e] esse Direito, sistematizado pelos Glosadores e pós-glosadores, alicerçava-se nos preceitos compilados pelo Imperador Justiniano nas suas Pandectas ou Digestos, no século VI." (MEIRA, 1991, p. 394):

> Bolonha apresenta características especiais, como ponto de atração de estudantes de toda a Europa, que depois regressavam aos seus países, com uma carga cultural que se espalhou pouco a pouco por toda parte. E era tamanha a fluência de estrangeiros, que praticamente coexistiam duas universidades paralelas, a dos ultramontanos e a dos cintramontanos, aquelas constituídas principalmente de estudantes de origem germânica. Mas ao lado destes havia os provindos de outros territórios europeus, da França, da Inglaterra, da Espanha, da Lusitânia, da Suíça. Dela nasceram as primeiras e mais antigas universidades européias: a Montpellier, na França, e a de Oxford, na Inglaterra. (MEIRA, 1991, p. 393).

Ademais, a Escola de Artes da Universidade de Bolonha "se multiplicou em muitas outras, além das já citadas de Paris e Oxford, e assim surgiram a de Montpellier, na França, a de Salamanca, na Espanha, e a de Lisboa (depois transferida para Coimbra), em Portugal, sob o reinado de D. Diniz, em 1290." (MEIRA, 1991, p. 394).

As chamadas Escolas de Artes ou Faculdade de Artes Liberais de Bolonha, como já apresentado, eram as responsáveis pelo ensino da Aritmética e Geometria naquela época e, considerando que essa Universidade é considerada uma das primeiras do mundo e a responsável pela expansão do ensino das Artes, é oportuno discutir sobre o atual curso de Matemática dessa instituição a fim de analisar as semelhanças com os cursos do Brasil, em especial, com a disciplina de Álgebra Linear.

A Universidade de Bolonha oferece o curso de Matemática, modalidade bacharelado, com duração de 3 anos; se o discente tiver interesse em se formar professor, é necessário fazer uma capacitação que exige mais 2 anos de estudos. No site da instituição temos acesso a várias informações sobre o curso, a saber:

> O Programa de Estudo de Matemática visa cumprir o papel de formação de jovens investigadores, de futuros professores (depois de os licenciados terem concluído o processo de Capacitação do Ensino exigido pela legislação em vigor) e de divulgadores científicos; além disso, está emergindo o objetivo preciso de responder à demanda de pessoal com conhecimento matemático adequado e sólido, que emerge cada vez mais em instituições de pesquisa pública e privada, nos setores industrial e bancário, de seguros e financeiro e, em geral, em todos os setores de alta tecnologia.
> O programa de graduação reformado tende a reforçar a característica dos graduados em matemática que são mais apreciados pelo mercado de trabalho: a capacidade de sintetizar e abstrair com a consequente capacidade de propor soluções inovadoras para os problemas, acompanhada de altas habilidades de informática e computacionais. Para equipar o graduado em Matemática com as características supracitadas, o grau em Matemática:
> - inclui atividades de formação destinadas a adquirir conhecimentos fundamentais de Álgebra, Análise Matemática, Geometria, Física Matemática, Análise Numérica, Probabilidade, Ciência da Computação e Física Geral;
> - permite a escolha e ativação de atividades de formação visando a aquisição dos conhecimentos básicos de Estatística Matemática, Lógica Matemática e Pesquisa Operacional;
> - fornece atividades de laboratório computacional e matemático-computacional e a aquisição de conhecimento do idioma inglês.
>
> (UNIBO, 2018, tradução nossa)[79].

[79] Il Corso di Studio in Matematica si propone di assolvere al ruolo di formazione di giovaniri cercatori, difuturi insegnanti (dopo che i laureati avranno completato il processo di Abilitazione all' Insegnamento previsto dalla normativa vigente) e di divulgato riscientifici; si pone inoltr eil preciso obiettivo di rispondere alla richiesta di personale com adeguate e solide conoscenze matematiche che emerge in modo crescente neglienti diri cerca pubblici e privati, nel mondo dell' industria e in quello bancario, assicurativo e finanziario, e generalmente in ognisettore dei servizi ad alto contenuto tecnologico.
Il corso dilaureari formato tende a rafforzare La caratteristica dei laureati in matemática maggiormente apprezzata dal mercato del lavoro: la capacità di sintesi e diastrazione com conseguente capacità di proporre soluzioni innovative dei problemi, accompagnata da elevate abilità informatiche e computazionali. Per dotare il laureato in Matematica delle caratteristiche suddette, la laurea in Matematica:
- Comprende attività formative finalizzate ad acquisire conoscenze fondamentali dell'Algebra, dell' Analisi Matematica, della Geometria, della Fisica Matematica, dell' Analisi Numerica, della Probabilità, dell' Informatica e della Fisica Generale;
- Consente la scelta, e ne disponel' attivazione, di attività formative atte ad acquisire le conoscenzedi base della Statistica Matematica, della Logica Matematica, dellaRicerca Operativa;
- Prevede attività di laboratorio informatico e matematico-computazionale e l'acquisizione della conoscenza della lingua inglese. (Disponível em: <http://corsi.unibo.it/laurea-matematica/Pagine/Presentazione.aspx>).

O curso também conta com uma lista de resultados de aprendizagem esperados. No site da instituição exibem-se, de forma detalhada, essas expectativas, entre elas a relativa ao conhecimento e compreensão da capacidade na área de aprendizagem no âmbito teórico, assim apresentada:

> O graduado:
> - conhece as bases da álgebra, em particular as estruturas algébricas fundamentais;
> - conhece os fundamentos da análise matemática (cálculo diferencial e integral para as funções de uma ou mais variáveis reais) e algumas ferramentas de análise avançadas (transformada de Fourier, espaços de Hilbert e Banach);
> - conhece os fundamentos da álgebra linear, da geometria analítica elementar, da topologia, da geometria diferencial das curvas e das superfícies do espaço, da teoria das funções de uma variável complexa. (UNIBO, 2018, tradução nossa)[80].

Neste trecho, deparamo-nos com a Álgebra Linear e, assim, deu-se continuidade à investigação com a finalidade de compreender a concepção da Universidade de Bolonha acerca da Álgebra Linear e quais conteúdos algébricos a compõem.

Foi localizado o Plano de Estudos do curso, semelhante ao que chamamos de Matriz Curricular. No site, são disponibilizados três planos: primeiro ano de 2017/18; segundo ano de 2016/17 e terceiro ano de 2015/16, tendo sido selecionada o mais recente para efeito de análise na presente pesquisa. No rol de disciplinas do primeiro, segundo e terceiro anos do curso não há nenhuma com o nome Álgebra Linear[81]. Assim, a busca concentrou-se nas ementas das disciplinas no intuito de identificar conteúdos que compõem a Álgebra Linear. Como resultado, tais conteúdos foram encontrados entre as disciplinas do primeiro ano, no curso de Geometria I[82]:

> **Conhecimento e habilidades a serem alcançadas:**
> Após a conclusão do curso, o aluno tem o conhecimento dos primeiros conceitos básicos de álgebra linear (matrizes, sistemas lineares, espaços

---

[80] Il laureato:
- conosce Le basi dell'algebra, in particolare lestrutture algebriche fondamentali;
- conosce Le basi dell'analisi matematica (calcolo differenziale e integrale per Le funzionidi una o più variabili reali) e alcuni strumenti di analisi avanzata (trasformatadi Fourier, spazidi Hilbert e di Banach);
- conosce Le basi dell'algebra lineare, della geometria analitica elementare, della topologia, della geometria differenziale delle curve e delle superficie dello spazio, della teoria delle funzionidi una variabile //complessa. (Disponível em: <http://corsi.unibo.it/laurea-matematica/Pagine/Presentazione.aspx>.

[81] Lista disponível em: <http://corsi.unibo.it/laurea-matematica/Pagine/PianiDidattici.aspx?CodCorso=8010&AnnoAccademico=2017&Orientamento=000&Indirizzo=000&Progressivo=2017>.

[82] Disponível em: <http://www.scienze.unibo.it/it/corsi/insegnamenti/insegnamento/2017/412479>.

> vetoriais, aplicações lineares) e ser capaz de aplicar esse conhecimento para a solução de problemas de geometria analítica.
> **Programa / Conteúdos:**
> Cálculo matricial, determinante de uma matriz. Sistemas lineares e matrizes: método de redução de escala de Gauss.
> Cálculo vetorial e elementos de geometria analítica: Produto escalar, produto vetorial, produto misto de vetores. Geometria analítica do plano e do espaço. Linhas, planos, sua posição relativa. Noções métricas.
> Álgebra elementar linear: Espaços vetoriais, subespaços. Intersecção e soma de espaços vetoriais. Dependência e independência linear. Geradores e bases de um espaço vetorial. Existência de uma base. Tamanho de um espaço vetorial e seus subespaços. Relatório Grassmann. Soma direta de espaços vetoriais. Aplicações lineares. Núcleo e Imagem de uma aplicação linear e seu relacionamento. O espaço vetorial de aplicações lineares. O dual de um espaço vetorial.
> Aplicações lineares e matrizes. Matriz associada a uma aplicação linear e sua dependência das bases escolhidas.
> Redução para formas canônicas de endomorfismos: autovalores e autovetores. Diagonalizability'. Multiplicidade algébrica e geométrica de um autovetor, condições para a diagonalização. (UNIBO, tradução nossa)[83].

Analisando a Geometria II, o enfoque muda, pois “no final do curso o aluno tem conhecimento das noções básicas de topologia geral e da teoria da homotopia. Ele pode usar essas noções nos problemas de reconhecimento de formas e na análise matemática.” (UNIBO, tradução nossa)[84]. Deste modo, os conhecimentos e habilidades a serem alcançados com esses conteúdos não se relacionam com aqueles da Álgebra Linear.

A partir dos dados levantados, observamos, assim, que a Álgebra Linear está presente no curso da Universidade de Bolonha na Geometria I e se difere apenas na

---

[83] Conoscenze e abilità da conseguire:
Al termine del corso, lo studente ha la conoscenza dei primi concetti fondamentali dell'algebra lineare (matrici, sistemi lineari, spazi vettoriali, applicazioni lineari), e sa applicare tali conoscenze alla soluzione di problemi di geometria analitica.
Programma/Contenuti:
Calcolo matriciale, determinante di una matrice. Sistemilineari e matrici: metodo diriduzione a scaladi Gauss.
Calcolo vettoriale e del ementidi geometria analitica: Prodotto scalare, prodotto vettoriale, prodotto misto divettori. Geometria analitica del piano e dellospazio. Rette, piani, loro posizione relativa. Nozioni metriche.
Algebra Lineare elementare: Spazi vettoriali, sottospazi. Intersezione e somma di spazi vettoriali. Dipendenza e indipendenza lineare. Generatori e basi di uno spazio vettoriale. Esistenzadi una base. Dimensione di uno spazio vettoriale e dei suoisottospazi. Relazione di Grassmann. Somma diretta di spazi vettoriali. Applicazioni lineari. Nucleo e Immagine diun'applicazione lineare e loro relazione. Lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari. Il dualedi uno spazio vettoriale.
Applicazioni lineari e matrici. Matrice associata a un'applicazione lineare e sua dipendenza dalle basiscelte.
Riduzione a forme canoniche di endomorfismi: autovalori e autovettori. Diagonalizzabilita'. Molteplicita' algebrica e geometrica di un autovettore, condizioni per la diagonalizzabilita'. (UNIBO, 2018).
[84] Al termine del corso lo studente ha la conoscenza delle nozionidi base di topologia generale e della teoria dell'omotopia. Sa usare queste nozioni nei problemi diri conoscimento delle forme, e nell'analisi matematica. (Disponível em: <http://www.scienze.unibo.it/it/corsi/insegnamenti/insegnamento/2017/323883>).

nomenclatura da disciplina, mas é perceptível que a instituição aborda conhecimentos da Álgebra Linear. A próxima seção destina-se a apresentar e analisar várias ementas brasileiras da disciplina de Álgebra Linear.

3.2 UMA ANÁLISE DAS EMENTAS DE ÁLGEBRA LINEAR DAS UNIVERSIDADES FEDERAIS BRASILEIRAS

Esta seção dedica-se à análise das ementas de diversas universidades brasileiras. Para que isso fosse possível, foi necessária a adoção de critérios para seleção dessas ementas. O primeiro critério estipulado deu-se em relação às instituições, decidindo-se pela análise apenas das Universidades Federais Brasileiras, que totalizam 63 instituições.

Outro critério estabelecido em relação às universidades foi o recorte temporal, em que foram analisadas apenas aquelas que até o ano de 2017 não estavam passando por processo de tramitação em relação à autonomia da instituição. Essa restrição foi necessária, pois algumas universidades federais estão em processo de desmembramento da universidade federal de origem, e, por não terem concluído esse processo para se tornarem universidades federais independentes, ao se proceder à busca na internet por informações sobre os cursos ofertados, não foi encontrado o site da própria instituição.

Exemplo disso são a Universidade Federal de Jataí e a Universidade Federal de Catalão, ambas no estado de Goiás, cujas aprovações pelo Governo Federal ocorreram em março de 2018. Entretanto, por, até então, não disporem de um site próprio, suas informações ainda estavam vinculadas à universidade federal de origem, qual seja, a Universidade Federal de Goiás (UFG).

O curso dessas Universidades Federais a ser analisado é o de Licenciatura em Matemática. Essa escolha deu-se pelo fato de a preocupação desta pesquisa referir-se ao ensino e à aprendizagem dos conteúdos que compõem a ementa de Álgebra Linear, ou seja, a inquietação também abrange a formação inicial do docente de Matemática, o que nos levou a optar pela Licenciatura, especificamente na forma presencial. Essa opção ocorreu devido ao fato de a modalidade presencial ser predominante no Brasil, ao passo que as modalidades a distância ou semipresencial ainda se configuram minoritárias.

Por fim, o último critério adotado: as ementas devem condizer com o objetivo da pesquisa. Deste modo, as ementas analisadas são aquelas que apresentam semelhanças com os conteúdos apresentados no capítulo anterior. Além disso, a disciplina deve constar no rol de disciplinas obrigatórias do curso de Licenciatura em Matemática.

No Brasil, são várias as Universidades mantidas pelo Governo Federal: ao todo, 63 instituições autônomas que possuem seus próprios sites com informações sobre os cursos. Ao analisar os cursos ofertados por essas universidades, nem todas se encaixam nos critérios estabelecidos, pois não oferecem o curso de Licenciatura em Matemática na modalidade presencial. Desta maneira, o número de instituições a ser analisado diminuiu para 55.

Cabe registrar brevemente que, além das Universidades, a União Federal ("Governo Federal") conta, ainda, com a Rede Federal de Educação Profissional, Científica e Tecnológica, instituída pela Lei nº. 11 892, de 29 de dezembro de 2008, composta pelos Institutos Federais (IFs) e uma Universidade mista, que mais à frente será citada. No entanto, essas instituições não compõem o nosso universo de análise, pois, como dito, optou-se por estudar nesta pesquisa apenas as Universidades Federais não vinculadas a essa rede e que ofereçam o curso de Licenciatura em Matemática na modalidade presencial.

O quadro 1 a seguir aponta a quantidade de cursos de Licenciatura em Matemática na modalidade presencial, por estado e região do país, a serem analisados.

Quadro 1 – Quantidade de Cursos Presenciais de Licenciatura em Matemática nas Universidades Federais Brasileiras

Regiões do Brasil	Estados Brasileiros	Quantidade de Cursos Presenciais de Licenciatura em Matemática
Norte	Acre	1
	Amapá	1
	Amazonas	1
	Pará	3
	Rondônia	1
	Roraima	1
	Tocantins	1
Nordeste	Alagoas	1
	Bahia	3
	Ceará	2
	Maranhão	1
	Paraíba	2
	Pernambuco	2
	Piauí	1
	Rio Grande do Norte	1
	Sergipe	1
Centro-Oeste	Goiás	1
	Mato Grosso	1
	Mato Grosso do Sul	2
	Distrito Federal	1
Sudeste	Espírito Santo	1
	Minas Gerais	11
	São Paulo	2
	Rio de Janeiro	4
Sul	Paraná	2
	Rio Grande do Sul	5
	Santa Catarina	2
Total		**55**

Fonte: elaborado pela autora (2018).

Nesse quadro, o estado de Minas Gerais destaca-se dos demais, por contar com 11 Universidades Federais que oferecem o curso de Licenciatura em Matemática, representando 20% do total do país. Todas as 55 instituições foram analisadas a fim de encontrar a Matriz Curricular do referido curso e, assim, verificar se a disciplina de Álgebra Linear é componente obrigatório para, caso positivo, relatar sua ementa, carga horária e referência bibliográfica básica adotada.

Os dados obtidos estavam disponíveis na maioria dos sites das Universidades investigadas. Aquelas instituições que não os disponibilizavam – 18, ao todo – demandaram envio de e-mails para dois endereços eletrônicos diferentes disponíveis em seus sites, com a solicitação dos dados faltantes. Dez universidades responderam aos e-mails e disponibilizaram os dados nos respectivos sites, mas, em uma delas, foi informado que não seria possível encaminhar as referências bibliográficas, visto que tais referências eram estabelecidas de acordo com o professor responsável pela disciplina a cada semestre, ou seja, a não são fixas.

Além dessa, outras 9 instituições estão com dados incompletos, e, em todas essas, não tivemos acesso às referências bibliográficas.

Dessas nove Instituições de Ensino Superior (IES), duas disponibilizavam acesso ao nome e carga horária da disciplina; as outras cinco, o nome, a ementa e a carga horária, e o restante somente o nome das disciplinas. Por isso, as análises quantitativas serão baseadas no total de dados disponíveis por categoria, ou seja, o quantitativo de ementa e carga horária é maior que o de referência bibliográfica.

A apresentação descritiva dos dados será feita por regiões geográficas do país; assim, as universidades federais foram separadas segundo a localidade: Norte, Nordeste, Centro-oeste, Sudeste ou Sul.

Os dados serão exibidos separadamente devido à quantidade de instituições e de disciplinas, pois algumas ofertam duas disciplinas que atendem aos critérios desta pesquisa. Inicia-se pela apresentação das ementas; após, da carga horária e, por fim, das referências bibliográficas. Ao longo da apresentação, será feita uma breve análise dos dados por região e, posteriormente, uma análise dos dados relacionando todas as regiões.

Inicia-se a análise dos dados pela região Norte, dividida em sete estados. Ao todo, há na região dez universidades federais, sendo o estado do Pará com a maior quantidade. Apenas uma delas não oferece o curso presencial de licenciatura em Matemática.

Quadro 2 – Universidades Federais Brasileiras da Região Norte

	Universidade	Sigla	Estados Brasileiros
1	Federal do Acre	UFAC	Acre
2	Federal do Amapá	UNIFAP	Amapá
3	Federal do Amazonas	UFAM	Amazonas
4	Federal Rural da Amazônia	UFRA	
5	Federal do Pará	UFPA	Pará
6	Federal do Oeste do Pará	UFOPA	
7	Federal do Sul e Sudeste do Pará	UNIFESSPA	
8	Federal de Rondônia	UNIR	Rondônia
9	Federal de Roraima	UFRR	Roraima
10	Federal do Tocantins	UFT	Tocantins

Fonte: elaborado pela autora (2018).

A Universidade Rural da Amazônia (UFRA), destacada no quadro, oferece apenas nove cursos de graduação, e a licenciatura em Matemática não compõe essa lista. Essa constatação foi possível visto que todas as instituições pesquisadas possuem sítios que exibem a lista de cursos de graduação ofertados na IES. Nesta região, portanto, 9 foram as instituições analisadas por atenderem a todos os critérios da pesquisa. Assim, a região Norte representa 16,36% do total de cursos analisados.

Quanto às ementas, na maioria dos sites dessas universidades é disponibilizada a matriz curricular dos cursos e as ementas das disciplinas que os compõem. As exceções nesta região foram as Universidades Federais do Amazonas (UFAM) e do Pará (UFPA), que, apesar de disponibilizarem a matriz curricular – inclusive há disciplina com a nomenclatura Álgebra Linear –,não disponibilizam a ementa das disciplinas. O quadro 3 traz as instituições da região Norte com os nomes das disciplinas e as respectivas ementas.

Quadro 3 – Lista de ementas dos cursos de Álgebra Linear das Universidades Federais Brasileiras da região Norte

Estado	Sigla	Disciplina Obrigatória	Ementa
Acre	**UFAC**	**Introdução à Álgebra Linear**[85]	Matrizes sobre corpos. Determinantes e inversão de matrizes. Sistemas lineares e matrizes. Espaços vetoriais. Produtos escalares e Ortogonalidade. Funcionais lineares e espaço dual. Aplicações.

[85] Disponível em: <https://portal.ufac.br/ementario/disciplina.action?d=14643>. Acesso em: 12/05/2018.

		Tópicos de Álgebra Linear[86]	Transformações lineares e Matrizes. Polinômios associados a operadores lineares. Autovalores e autovetores. Diagonalização. Operadores autoadjuntos e ortogonais. Aplicações.
Amapá	**UNIFAP**	**Álgebra Elementar**[87]	Matrizes. Determinantes. Sistemas Lineares. Trigonometria. Números Complexos. Polinômios.
		Álgebra Linear[88]	Espaços Vetoriais. Transformações lineares. Espaços com Produto Interno. Autovalores e Autovetores. Diagonalização de Operadores. O Espaço Dual. Formas Bilineares. Formas Quadráticas.
Amazonas	**UFAM**	**Álgebra Linear I**[89]	Não está disponível.
		Álgebra Linear II[90]	
Pará	**UFOPA**	**Álgebra Linear**[91]	Não está disponível.
	UNIFESSPA	**Álgebra Linear**[92]	Vetores, Espaços Vetoriais, Combinação Linear, Dependências e Independências Lineares, Base e Dimensão, Coordenadas e Isomorfismos Espaciais, Transformações Lineares, Operadores Lineares, Matrizes, Determinantes, Mudança de Base, Diagonalização, Autovalores e Autovetores, Polinômio Minimal e Característico, Teorema de Hamilton-Cayley, Somas diretas de subespaços, Sistemas Lineares Homogêneos, Subespaço Solução, Teorema da decomposição primária.

86 Disponível em: <https://portal.ufac.br/ementario/disciplina.action?d=14522>. Acesso em: 12/05/2018.
87 Disponível em: <www2.unifap.br/matematica/files/2014/01/%C3%81LGEBRA-ELEMENTAR.pdf>. Acesso em: 12/05/2018.
88 Disponível em: <www2.unifap.br/matematica/files/2014/01/%C3%81LGEBRA-LINEAR.pdf>. Acesso em: 12/05/2018.
89 Disponível em: <https://ecampus.ufam.edu.br/ecampus/gradesCurriculares>. Acesso em: 12/05/2018.
90 Disponível em: <https://ecampus.ufam.edu.br/ecampus/gradesCurriculares>. Acesso em: 12/05/2018.
91 Disponível em: <https://sigaa.ufopa.edu.br/sigaa/link/public/curso/curriculo/1256>. Acesso em: 12/05/2018.
92 Disponível em: https://famat.unifesspa.edu.br/legisla%C3%A7%C3%A3o-acad%C3%AAmica.html>. Acesso em: 12/05/2018.

	UFPA	**Álgebra Linear**[93]	Sistemas Lineares, Espaços Vetoriais. Base de um Espaço Vetorial. Transformações Lineares. Matriz de uma transformação linear. Espaços com Produto Interno. Autovalores e Autovetores. Diagonalização.
Rondônia	**UNIR**	**Álgebra Linear I**[94]	Sistemas Lineares, Vetores, Espaço Vetorial, Base e Dimensão de um Espaço Vetorial, Transformações Lineares.
		Álgebra Linear II[95]	Produtos Internos, Matrizes e Operadores Lineares, Vetores Próprios e Diagonalização, Formas Quadráticas.
Roraima	**UFRR**	**Álgebra linear I**[96]	Espaços vetoriais, Transformações lineares, Transformação linear adjunta, Subespaço invariante e Produto interno.
Tocantins	**UFT**	**Álgebra Linear I**[97]	Matrizes. Determinantes. Sistemas de equações lineares. Aplicações.
		Álgebra Linear II[98]	Espaços vetoriais. Espaços vetoriais euclidianos. Transformações lineares. Operadores lineares. Autovalores e autovetores. Funcionais lineares e bilineares.

Fonte: elaborado pela autora (2018).

Para as duas instituições cujas ementas não estavam disponibilizadas, foram enviados e-mails, contudo, não houve resposta.

Ao analisar o conteúdo das ementas disponíveis, em todas elas são citados os conteúdos “Matriz”, “Transformações lineares” e “Espaço Vetorial”; em 57% citam-se “Determinantes”; 86% citam “Sistemas de equações lineares” ou “Sistemas Lineares”; 71% trazem “Produto Interno” ou “Produto Escalar”; em 14% consta “Dimensão” e 71% citam “Autovalores e Autovetores”.

Outro dado a ser analisado é a carga horária das disciplinas oferecidas. A planilha com a carga horária das respectivas disciplinas é apresentada no quadro 4.

---

93 Disponível em: <https://ascom.ufpa.br/index.php/cursos-da-ufpa/547-matematica>. Acesso em: 12/05/2018.
94 Disponível em: <http://www.dmejp.unir.br/?pag=downloads>. Acesso em: 12/05/2018.
95 Disponível em: <http://www.dmejp.unir.br/?pag=downloads>. Acesso em: 12/05/2018.
96Disponível em: <http://www.proeg.ufrr.br/index.php?option=com_content&view=article&id=15&Itemid=11>. Acesso em: 12/05/2018.
97 Disponível em: <https://docs.uft.edu.br/share/s/XX-EiWzFQ3uH9yLjp7VyRA>. Acesso em: 12/05/2018.
98 Disponível em: <https://docs.uft.edu.br/share/s/XX-EiWzFQ3uH9yLjp7VyRA>. Acesso em: 12/05/2018.

Quadro 4 – Lista de carga horária dos cursos de Álgebra Linear das Universidades Federais Brasileiras da região Norte

Estado	Sigla	Disciplina Obrigatória	Carga Horária
Acre	**UFAC**	**Introdução à Álgebra Linear**	60
		Tópicos de Álgebra Linear	60
Amapá	**UNIFAP**	**Álgebra Elementar**	90
		Álgebra Linear	90
Amazonas	**UFAM**	**Álgebra Linear I**	60
		Álgebra Linear II	60
Pará	**UFOPA**	**Álgebra Linear**	68
	UNIFESSPA	**Álgebra Linear**	68
	UFPA	**Álgebra Linear**	60
Rondônia	**UNIR**	**Álgebra Linear I**	60
		Álgebra Linear II	60
Roraima	**UFRR**	**Álgebra Linear I**	90
Tocantins	**UFT**	**Álgebra Linear I**	60
		Álgebra Linear II	60

Fonte: elaborado pela autora (2018).

Das nove instituições analisadas nessa região, há dados de todas, e a carga horária média é de 105h/a. O último item a ser analisado na região Norte trata das referências bibliográficas adotadas como básicas, definidas no Projeto Político do Curso (PPC). O quadro 5 detalha essas referências[99]:

Quadro 5 – Lista de referências bibliográficas básicas dos cursos de Álgebra Linear das Universidades Federais Brasileiras da região Norte

Estado	Sigla	Disciplina Obrigatória	Referências Bibliográficas Básicas
Acre	**UFAC**	**Introdução à Álgebra Linear**	Não está disponível.
		Tópicos de Álgebra Linear	
Amapá	**UNIFAP**	**Álgebra Elementar**	CARMO (1992) LIMA et al. (2006) IEZZI (2002)
		Álgebra Linear	BOLDRINI et al. (1980) CALLIOLI (1989) LEON (1988)
Amazonas	**UFAM**	**Álgebra Linear I**	Não está disponível.
		Álgebra Linear II	

[99] Os dados completos destas obras constam do final da pesquisa, na seção Referências.

Pará	**UFOPA**	**Álgebra Linear**	Não está disponível.
	UNIFESSPA	**Álgebra Linear**	BOLDRINI et al. (1984) CALLIOLI (1989) LIPSCHUTZ (1980)
	UFPA	**Álgebra Linear**	BOLDRINI et al. (1984) CALLIOLI, DOMINGUES, COSTA (1989) LIPSCHUTZ (1980) ANTON (1982)
Rondônia	**UNIR**	**Álgebra Linear I**	CARVALHO (1979) VALLADARES (1990) STEINBRUCH, WINTERLE (1987) BOLDRINI et al. (1980) LIPSCHUTZ (1980) LIMA (1995)
		Álgebra Linear II	
Roraima	**UFRR**	**Álgebra Linear I**	CALLIOLI, DOMINGUES, COSTA (1998) BOLDRINI et al. (1986) LIMA (2000) LEON (1998)
Tocantins	**UFT**	**Álgebra Linear I**	GONÇALVES (1979) LIPSCHUTZ (1994) STEINBRUCH, WINTERLE (1987)
		Álgebra Linear II	

Fonte: elaborado pela autora (2018).

Em relação às referências bibliográficas na região Norte, seis instituições foram analisadas. Verifica-se que em apenas uma das IES não é citado o livro do Boldrini et al. em alguma de suas edições, ou seja, 83% das referências analisadas usam esse autor. Outras obras bastante citadas nessa região são de Callioli e Lipschutz, representando 67% do todo, e Lima, que é citado em metade das IES analisadas nessa região.

A próxima região é a Nordeste, dividida em nove estados, com um total de dezoito universidades financiadas pelo Governo Federal, conforme aponta o quadro 6. O estado da Bahia é o de maior concentração, com 22% das universidades da região.

Quadro 6 – Universidades Federais Brasileiras da Região Nordeste

	Universidade	Sigla	Estados Brasileiros
1	Federal do Alagoas	UFAL	Alagoas
2	Federal da Bahia	UFBA	Bahia
3	Federal do Recôncavo da Bahia	UFRB	
4	Federal do Oeste da Bahia	UFOB	
5	Federal do Sul da Bahia	UFSB	
6	Federal do Cariri	UFCA	Ceará
7	da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira	UNILAB	
8	Federal do Ceará	UFC	
9	Federal do Maranhão	UFMA	Maranhão
10	Federal da Paraíba	UFPB	Paraíba
11	Federal de Campina Grande	UFCG	
12	Federal de Pernambuco	UFPE	Pernambuco
13	Federal Rural de Pernambuco	UFRPE	
14	Federal do Vale do São Francisco	UNIVASF	
15	Federal do Piauí	UFPI	Piauí
16	Federal Rural do Semi-Árido	UFERSA	Rio Grande do Norte
17	Federal do Rio Grande do Norte	UFRN	
18	Federal do Sergipe	UFS	Sergipe

Fonte: elaborado pela autora (2018).

Das 18 instituições presentes nessa região, quatro não serão objeto de análise nesta pesquisa: a UFSB, a UFCA, a UNIVASF e a UFERSA, em destaque no quadro. A UFSB oferece o curso Licenciatura Interdisciplinar: Matemática e Computação e suas tecnologias; a UFCA, o curso de Licenciatura em Interdisciplinaridade em Ciências Naturais e Matemáticas; a UNIVASF, o curso de Formação Pedagógica em Matemática na modalidade Educação a Distância (EAD) – portanto, não se enquadram nos critérios de seleção; por fim, a UFERSA não oferece qualquer tipo de curso de Matemática, restando quatorze instituições a serem analisadas.

Em duas instituições, não foi possível ter acesso às ementas das disciplinas, a saber: a Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB) e a Universidade Federal de Campina Grande (UFCG), ambas por não disponibilizarem dados nos sites, nem responderem aos e-mails de solicitação desses dados. O quadro 7 traz o panorama das ementas das IES da região.

Quadro 7 – Lista de ementas dos cursos de Álgebra Linear das Universidades Federais Brasileiras da região Nordeste

Estado	Sigla	Disciplina Obrigatória	Ementa
Alagoas	**UFAL**	**Álgebra Linear I**[100]	Levar o aluno a entender e reconhecer as estruturas da Álgebra Linear que aparecem em diversas áreas da Matemática, e a trabalhar com essas estruturas, tanto abstrata como concretamente (através de cálculo com representações matriciais). Estabelecer conexões entre as propriedades dos vetores e as estruturas algébricas. Principais conteúdos: Sistemas Lineares e Matrizes: escalonamento, discussão e resolução de um sistema linear, sistemas de Cramer. 2. Espaços Vetoriais: propriedades, subespaços vetoriais, combinações lineares, geradores, espaços vetoriais de dimensão finita. 3. Base e Dimensão: dependência linear, dimensão, coordenadas, mudança de base. 4. Transformações Lineares: núcleo e imagem, isomorfismo de espaços vetoriais. 5. Autovalores, autovetores e aplicações. 6. Produto interno.
Bahia	**UFBA**	**Álgebra Linear A**[101]	Matrizes e sistemas lineares. Espaços vetoriais. Produto interno. Transformações lineares. Diagonalização de operadores.
	UFRB	**Álgebra Linear I**[102]	Não está disponível.
	UFOB	**Álgebra Linear I**[103]	Espaços Vetoriais. Soma e Intersecção de Subespaços. Matriz de Mudança de Base. Transformações Lineares. Representação Matricial. Posto e Nulidade. Álgebra de Transformações Lineares. Autovalores e Autovetores. Diagonalização de Operadores Lineares. Produto Interno. Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Ortogonalidade. Base Ortogonal. Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt.

[100] Disponível em: <http://www.ufal.edu.br/estudante/graduacao/projetos-pedagogicos/campus-arapiraca/mtm-arapiraca.pdf/view>. Acesso em: 12/05/2018.
[101] Disponível em: <http://www.dmat.ufba.br/disciplinas/%C3%A1lgebra-linear>. Acesso em: 12/05/2018.
[102] Disponível em: <https://www.ufrb.edu.br/cfp/documentos/category/92-plano-de-curso-2018-1-matematica>. Acesso em: 12/05/2018.
[103] Disponível em: <https://www.ufob.edu.br/ensino/2014-08-08-14-46-02/cursos>. Acesso em: 12/05/2018.

Ceará	**UNILAB**	**Introdução à Álgebra Linear**[104]	Matrizes, determinantes e sistemas de equações lineares. Espaços vetoriais: base e dimensão, subespaços, mudança e completamento de base. Transformações Lineares: Conceitos básicos, matriz associada a uma transformação linear.
		Álgebra Linear I[105]	Transformações lineares: produto de transformações lineares, núcleo e imagem. Autovalores e autovetores: diagonalização de operadores lineares. Produto interno e Ortogonalidade. Método dos Mínimos Quadráticos.
	UFC	**Álgebra Linear**[106]	Espaço e subespaço vetoriais. Combinação linear. Dependência e independência lineares. Bases e dimensão de um espaço vetorial. Mudança de base. Transformações lineares. Aplicações lineares e matrizes. Teorema do Núcleo e da Imagem.
Maranhão	**UFMA**	**Tópicos de Álgebra Linear**[107]	Matrizes. Cálculo de Determinantes. Sistemas de Equações Lineares. Vetores. Equações da Reta e do Plano. Ângulos. Distância e Intersecções. Geometria Analítica Plana.
Paraíba	**UFPB**	**Introdução à Álgebra Linear**[108]	Matrizes. Determinantes. Sistemas de Equações lineares. Espaços Vetoriais. Transformações Lineares. Diagonalização de Operadores. Espaço com Produto Interno.
	UFCG	**Álgebra Linear I**[109]	Não está disponível.
Pernambuco	**UFPE**	**Álgebra Linear**[110]	Espaços e subespaços vetoriais, bases e dimensão. Sistemas lineares. Transformações e operadores lineares. Autovalores e autovetores. Produto interno. Operadores autoadjuntos e ortogonais.

[104] Disponível em: <http://www.unilab.edu.br/wp-content/uploads/2016/01/CURSO-DE-LICENCIATURA-EM-MATEM%C3%81TICA-SEMESTRAL-JULHO-DE-20161.pdf>. Acesso em: 12/05/2018.
[105] Disponível em: <http://www.unilab.edu.br/wp-content/uploads/2016/01/CURSO-DE-LICENCIATURA-EM-MATEM%C3%81TICA-SEMESTRAL-JULHO-DE-20161.pdf>. Acesso em: 12/05/2018.
[106] Disponível em: <https://si3.ufc.br/sigaa/public/curso/resumo_curriculo.jsf>. Acesso em 12/05/2018.
[107] Disponível em: <http://ice.ufam.edu.br/en/ensino/graduacao/ementas>. Acesso em: 12/05/2018.
[108] Disponível em: <https://sigaa.ufpb.br/sigaa/link/public/curso/curriculo/956>. Acesso em: 12/05/2018.
[109] Disponível em: <http://analytics.lsd.ufcg.edu.br/cursosufcg/#/matematica_lic_d_cg/requisitos>. Acesso em: 12/05/2018.
[110] Disponível em: <https://www.ufpe.br/matematica-licenciatura-caa>. Acesso em: 12/05/2018.

	UFRPE	**Álgebra Linear M I**[111]	Sistemas lineares e matrizes. Espaços e subespaços vetoriais. Base e dimensão. Transformações lineares e aplicações.
		Álgebra Linear M II[112]	Espaços com produto interno. Autovalores e autovetores. Diagonalização. Formas quadráticas. Aplicações às cônicas e quádricas.
Piauí	**UFPI**	**Álgebra Linear I**[113]	Espaços Vetoriais Reais. Transformações Lineares. Espaços com produto interno. Operadores Lineares. Formas Lineares, Bilineares e Quadráticas. Classificação de Cônicas e Quadráticas.
Rio Grande do Norte	**UFRN**	**Álgebra Linear I**[114]	Sistemas lineares e Matrizes, Determinantes, Espaços vetoriais, Transformações lineares, Diagonalização de operadores (ou de matrizes).
Sergipe	**UFS**	**Álgebra Linear I**[115]	Sistemas lineares e noções sobre determinantes. Espaços vetoriais. Aplicações lineares. Matrizes e aplicações lineares. Autovalores e autovetores. Operadores diagonalizáveis.

Fonte: elaborado pela autora (2018).

Ao analisar os conteúdos que compõem as ementas, o termo “Matriz” aparece em 10 (83%) das 12 IES analisadas; “Determinantes” está presente em 42% das IES; “Sistemas de Equações Lineares” ou “Sistemas Lineares” ocorrem em 75% dessas instituições; “Transformação Linear” aparece em 92% delas; “Espaço Vetorial” consta de todas as IES; “Produto Interno” ou “Produto Escalar” aparece 8 vezes, representando 67% das universidades; “Dimensão” está em 42% delas e “Autovalor e Autovetor” em metade das IES.

A seguir, apresentam-se no quadro 8 os dados referentes à carga horária das disciplinas.

[111] Disponível em: <http://lm.ufrpe.br/documentos>. Acesso em: 12/05/2018.
[112] Disponível em: <http://lm.ufrpe.br/documentos>. Acesso em: 12/05/2018.
[113] Disponível em: <http://www.ufpi.br/ppc-s-dos-cursos-de-graduacao>. Acesso em: 12/05/2018.
[114] Disponível em: <https://sigaa.ufrn.br/sigaa/public/curso/ppp.jsf?lc=pt_BR&id=111635066>. Acesso em: 12/05/2018.
[115] Disponível em: <https://www.sigaa.ufs.br/sigaa/documentos/>. Acesso em: 14/05/2018.

Quadro 8 – Lista de carga horária dos cursos de Álgebra Linear das Universidades Federais Brasileiras da região Nordeste

Estado	Sigla	Disciplina Obrigatória	Carga Horária
Alagoas	**UFAL**	**Álgebra Linear I**	80
Bahia	**UFBA**	**Álgebra Linear A**	68
	UFRB	**Álgebra Linear I**	-
	UFOB	**Álgebra Linear I**	60
Ceará	**UNILAB**	**Introdução à Álgebra Linear**	60
		Álgebra Linear I	60
	UFC	**Álgebra Linear**	64
Maranhão	**UFMA**	**Tópicos de Álgebra Linear**	60
Paraíba	**UFPB**	**Introdução à Álgebra Linear**	60
	UFCG	**Álgebra Linear I**	-
Pernambuco	**UFPE**	**Álgebra Linear**	60
	UFRPE	**Álgebra Linear M I**	60
		Álgebra Linear M II	60
Piauí	**UFPI**	**Álgebra Linear I**	90
Rio Grande do Norte	**UFRN**	**Álgebra Linear I**	90
Sergipe	**UFS**	**Álgebra Linear I**	60

Fonte: elaborado pela autora (2018).

O número de instituições a serem analisadas em relação à carga horária também totaliza 12 nesta região. A média de carga horária na região Nordeste é de 77 h/a.

Em relação às referências bibliográficas, foram analisadas 11 instituições, como demonstra o quadro 9, a seguir.

Quadro 9 – Lista de referências bibliográficas básicas dos cursos de Álgebra Linear das Universidades Federais Brasileiras da região Nordeste

Estado	Sigla	Disciplina Obrigatória	Referências Bibliográficas Básicas
Alagoas	**UFAL**	**Álgebra Linear I**	STEINBRUCH, WINTERLE (1987) CALLIOLI, DOMINGUES, COSTA (1991) CARVALHO (2000)

Bahia	**UFBA**	**Álgebra Linear A**	ANTON e RORRES (2001) BOLDRINI et al. (1984) CALLIOLI, DOMINGUES, COSTA (1991) CARVALHO (1972) GONÇALVES (1979) KAPLAN, LEWIS (1974 [1971]). LIMA (1996). LIPSCHUTZ (1974) LIMA (2001). PAIGE, SWIFT (1961) POSTNIKOV (1982)
	UFRB	**Álgebra Linear I**	Não está disponível.
	UFOB	**Álgebra Linear I**	LIMA (2012) BOLDRINI et al. (1986) CALLIOLI, DOMINGUES, COSTA (2010)
Ceará	**UNILAB**	**Introdução à Álgebra Linear**	LIMA et al. (2016) BOLDRINI et al. (1986) LANG (2003)
		Álgebra Linear I	
	UFC	**Álgebra Linear**	Não está disponível.
Maranhão	**UFMA**	**Tópicos de Álgebra Linear**	BOULOS e CAMARGO (1987) BOLDRINI et al. (1986) STEINBRUCH, WINTERLE (1987)
Paraíba	**UFPB**	**Introdução à Álgebra Linear**	BOLDRINI et al. (1980) LAY (1999) STEINBRUCH, WINTERLE (1987)
	UFCG	**Álgebra Linear I**	Não está disponível.
Pernambuco	**UFPE**	**Álgebra Linear**	BOLDRINI et al. (1980) STEINBRUCH, WINTERLE (1987) POOLE (2004)
	UFRPE	**Álgebra Linear M I**	ANTON e RORRES (2012) BOLDRINI et al. (1986)
		Álgebra Linear M II	
Piauí	**UFPI**	**Álgebra Linear I**	BOLDRINI et al. (1980) CALLIOLI, DOMINGUES, COSTA (1977) LIPSCHUTZ (1974) LIMA (1996) HOFFMAN, KUNZE (1979)
Rio Grande do Norte	**UFRN**	**Álgebra Linear I**	HEFEZ, FERNANDES (2016) CALLIOLI, DOMINGUES, COSTA (1991) BOLDRINI et al. (1980)

Sergipe	**UFS**	**Álgebra Linear I**	ANTON e RORRES (2012) HOFFMAN, KUNZE (1979) LANG (2003) LIPSCHUTZ (1974)

Fonte: elaborado pela autora (2018).

Três das 14 universidades federais que oferecem o curso presencial de Licenciatura em Matemática não oferecem acesso às referências bibliográficas.

A partir dos dados, percebe-se que novamente o livro do Boldrini et al. é o mais citado: aparece em 82% das 11 IES. Callioli ocorre em 45% e Lima em 36%. A região Centro-Oeste, dividida em três estados e o Distrito Federal, conta com apenas cinco universidades mantidas pelo Governo Federal (quadro 10), todas com o curso presencial de Licenciatura em Matemática.

Quadro 10 – Universidades Federais Brasileiras da Região Centro-Oeste

	Universidade	**Sigla**	**Estados Brasileiros**
1	Federal de Goiás	UFG	Goiás
2	Federal de Mato Grosso	UFMT	Mato Grosso
3	Federal da Grande Dourados	UFGD	Mato Grosso do Sul
4	Federal de Mato Grosso do Sul	UFMS	
5	de Brasília	UnB	Distrito Federal

Fonte: elaborado pela autora (2018).

Todas as matrizes curriculares dos cursos presenciais de Licenciatura em Matemática dessas instituições estão disponíveis em seus endereços eletrônicos, assim como todas as ementas, expostas no quadro 11.

Quadro 11 – Lista de ementas dos cursos de Álgebra Linear das Universidades Federais Brasileiras da região Centro-Oeste

Estado	Sigla	Disciplina Obrigatória	Ementa
Goiás	**UFG**	**Álgebra Linear I**[116]	Espaços Vetoriais e subespaços; Bases e Dimensão; Aplicações Lineares; Autovalores e Autovetores; Polinômio Característico; Diagonalização de uma Matriz; Autovalores e Autovetores de Matrizes Simétricas; Diagonalização de uma Matriz Simétrica; Produto Interno.
Mato Grosso	**UFMT**	**Álgebra Linear I**[117]	Matrizes e Sistemas Lineares. Espaços Vetoriais Reais. Base e Dimensão. Transformações Lineares. Matrizes de uma Transformação Linear.
		Álgebra Linear II[118]	Espaço com Produto Interno. Determinantes. Valores e Vetores Próprios. Formas Bilineares e Quadrática. Diagonalização de Operadores.
Mato Grosso do Sul	**UFGD**	**Álgebra Linear**[119]	Espaços vetoriais, base e dimensão. Transformações lineares. Matrizes de transformações lineares. Núcleo e imagem. Autovalores e autovetores. Diagonalização de matrizes e operadores. Polinômio característico e mínimo. Subespaços invariantes e decomposição de operadores. Espaços com produto interno e bases ortonormais.
	UFMS	**Álgebra Linear**[120]	Matrizes; sistemas de equações lineares; espaços vetoriais; transformações lineares; espaços com produto interno; diagonalização de operadores.
Distrito Federal	**UnB**	**Introdução à Álgebra Linear**[121]	Sistemas lineares e matrizes; Espaços vetoriais; Produto interno; Transformações lineares; Autovalores e autovetores; Diagonalização de operadores; Aplicações.

Fonte: elaborado pela autora (2018).

---

116 Disponível em: <https://mat.ufg.br/p/333-cursos>. Graduação/Matriz Curricular PPC/Resolução:. Acesso em: 14/05/2018.
117 Disponível em: <http://www.ufmt.br/ufmt/site/ensino/graduacao/Cuiaba>. Acesso em: 14/05/2018.
118 Disponível em: <http://www.ufmt.br/ufmt/site/ensino/graduacao/Cuiaba>. Acesso em: 14/05/2018.
119 Disponível em: <https://portal.ufgd.edu.br/coordenadoria/cograd/estruturas-curriculares-cursos>. Acesso em: 14/05/2018.
120 Disponível em: <https://inma.ufms.br/files/2013/10/Resolu%C3%A7%C3%A3o-COGRAD-48-2018-Novo-Curriculo.pdf>. Acesso em: 14/05/2018.
121 Disponível em: <https://condoc.unb.br/matriculaweb/graduacao/disciplina.aspx?cod=113093>. Acesso em: 14/05/2018.

Nas ementas das cinco instituições, os termos “Matriz”, “Espaço Vetorial”, “Produto Interno” ou “Produto Escalar” são citados em todas elas. O termo “Determinantes” aparece em apenas uma ementa; “Sistemas de Equações Lineares” ou “Sistemas Lineares”, em 60% das IES da região; “Transformação Linear” só não aparece em uma das IES; “Dimensão” e “Autovalor e Autovetor” ocorrem em 60% das IES.

Em relação à carga horária, obteve-se acesso a todas, com média de 76 h/a, como consta na planilha abaixo.

Quadro 12 – Lista de carga horária dos cursos de Álgebra Linear das Universidades Federais Brasileiras da região Centro-Oeste

Estado	Sigla	Disciplina Obrigatória	Carga Horária
Goiás	**UFG**	**Álgebra Linear I**	64
Mato Grosso	**UFMT**	**Álgebra Linear I**	60
		Álgebra Linear II	60
Mato Grosso do Sul	**UFGD**	**Álgebra Linear**	72
	UFMS	**Álgebra Linear**	68
Distrito Federal	**UnB**	**Introdução à Álgebra Linear**	60

Fonte: elaborado pela autora (2018).

A UFMT destaca-se das demais por oferecer duas disciplinas obrigatórias com carga horária de 60 h/a cada, o que contribui para o aumento da média da região. As referências bibliográficas dessa região também estão completas e são expostas no quadro 13.

Quadro 13 – Lista de referências bibliográficas básicas dos cursos de Álgebra Linear das Universidades Federais Brasileiras da região Centro-Oeste

Estado	Sigla	Disciplina Obrigatória	Referências Bibliográficas Básicas
Goiás	**UFG**	**Álgebra Linear I**	BOLDRINI et al. (1986). CALLIOLI, DOMINGUES, COSTA (1978) LIPSCHUTZ (1974)
Mato Grosso	**UFMT**	**Álgebra Linear I**	ANTON e RORRES (2001) BOLDRINI et al. (1980) CALLIOLI, DOMINGUES, COSTA (1990)
		Álgebra Linear II	
Mato Grosso do Sul	**UFGD**	**Álgebra Linear**	LIMA (1998) BOLDRINI et al. (1984) ANTON e RORRES (2012)
	UFMS	**Álgebra Linear**	BOLDRINI et al. (1980) LIPSCHUTZ, LIPSON (2011) CALLIOLI, DOMINGUES, COSTA (2013)
Distrito Federal	**UnB**	**Introdução à Álgebra Linear**	ANTON e RORRES (2012) BOLDRINI et al. (1986). HALMOS (1978)

Fonte: elaborado pela autora (2018).

O livro do Boldrini et al. é citado em todas as IES, os de Callioli e de Anton e Rorres, em 60%, e o de Lima consta em apenas 20% das IES.

A próxima região a ser analisada é a Sudeste, que possui dezenove universidades federais distribuídas entre quatro estados brasileiros, um número relativamente alto ao se comparar com a quantidade de estados. Minas Gerais se sobressai, com quase 58% das IES. Confira-se no quadro 14:

Quadro 14 – Universidades Federais Brasileiras da região Sudeste

	Universidade	Sigla	Estados Brasileiros
1	Federal do Espírito Santo	UFES	Espírito Santo
2	Federal de Minas Gerais	UFMG	Minas Gerais
3	Federal de Ouro Preto	UFOP	
4	Federal de Uberlândia	UFU	
5	Federal de Viçosa	UFV	
6	Federal de Lavras	UFLA	
7	Federal de Itajubá	UNIFEI	
8	Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri	UFVJM	
9	Federal de São João del-Rei	UFSJ	
10	Federal do Triângulo Mineiro	UFTM	
11	Federal de Alfenas	UNIFAL	
12	Federal de Juiz de Fora	UFJF	
13	Federal do ABC	UFABC	São Paulo
14	Federal de São Paulo	UNIFESP	
15	Federal de São Carlos	UFSCar	
16	Federal Rural do Rio de Janeiro	UFRRJ	Rio de Janeiro
17	Federal do Rio de Janeiro	UFRJ	
18	Federal do Estado do Rio de Janeiro	UNIRIO	
19	Federal Fluminense	UFF	

Fonte: elaborado pela autora (2018).

Em destaque no quadro, a Universidade Federal de São Paulo (UNIFESP), que, na área da Matemática, oferece apenas o curso presencial de Bacharelado em Matemática Computacional; portanto, é a única nessa região que não oferta o curso presencial de Licenciatura em Matemática. Entre as dezoito instituições analisadas, todas disponibilizaram, em sites ou por e-mail, as ementas das disciplinas. No quadro 15 abaixo, seguem as ementas das disciplinas obrigatórias de Álgebra Linear.

Quadro 15 – Lista de ementas dos cursos de Álgebra Linear das Universidades Federais Brasileiras da região Sudeste

Estado	Sigla	Disciplina Obrigatória	Ementa
Espírito Santo	**UFES**	**Álgebra Linear**[122]	Sistemas Lineares e Matrizes. Espaços Vetoriais. Transformações Lineares. Diagonalização de Operadores Lineares.

[122] Disponível em: <http://www.matematica.alegre.ufes.br/content/projeto-pedag%C3%B3gico-do-curso>. Acesso em: 14/05/2018.

Minas Gerais	**UFMG**	**Álgebra Linear I**[123]	Espaços Vetoriais. Bases e Dimensão. Espaços com produto interno. Transformações lineares. Autovalores e autovetores. Aplicações à Geometria Analítica.
	UFOP	**Álgebra Linear I**[124]	Espaços Vetoriais. Transformações Lineares. Funcionais Lineares. Produto interno.
	UFU	**Álgebra Linear I**[125]	Matrizes; Espaços Vetoriais; Transformações Lineares; Produtos Internos.
	UFV	**Introdução à Álgebra Linear**[126]	Matrizes. Sistema de equações lineares. Determinantes e matriz inversa. Espaços vetoriais. Transformações lineares. Diagonalização de operadores.
	UFSJ	**Álgebra Linear**[127]	Matrizes e sistemas lineares; Vetores em Rn; Espaços Vetoriais; Transformações lineares; Autovalores e Autovetores.
	UFVJM	**Álgebra Linear**[128]	Sistemas de equações lineares e Matrizes; Determinantes, Espaços Vetoriais; Transformações Lineares.
	UFTM	**Álgebra Linear**[129]	Matrizes. Determinantes. Sistemas lineares. Espaços vetoriais. Transformações lineares. Autovalores e Autovetores. Produto interno.
	UNIFEI	**Álgebra Linear I**[130]	Sistemas lineares e matrizes. Espaço vetorial, subespaços vetoriais, soma e soma diretas, combinações lineares e espaço finitamente gerado. Base e dimensão, transformações lineares, o teorema do núcleo e da imagem e a matriz de uma transformação linear. Produto interno.
	UFLA	**Álgebra Linear**[131]	Espaços vetoriais. Transformações lineares. Núcleo, imagem e soma direta. Autovalores e autovetores. Diagonalização. Espaços com produto interno.

[123] Disponível em: <https://ufmg.br/cursos/graduacao/2345/78164/58952>. Acesso em: 14/05/2018.
[124] Disponível em: <http://www.prograd.ufop.br/index.php/cursos>. Acesso em: 14/05/2018.
[125] Disponível em: <http://www.portal.famat.ufu.br/node/270>. Acesso em: 14/05/2018.
[126] Disponível em: <http://www.mtm.ufv.br/?page_id=9>. Acesso em: 14/05/2018.
[127] Disponível em: <https://ufsj.edu.br/comat/curriculo.php>. Acesso em: 14/05/2018.
[128] Disponível em: <http://www.ufvjm.edu.br/cursos/matematica/1490-projeto-pedagogico-e-estrutura-curricular.html>. Acesso em: 14/05/2018.
[129] Disponível em: <http://uftm.edu.br/matematica/projeto-pedagogico>. Acesso em: 14/05/2018.
[130] Disponível em: <https://sigaa.unifei.edu.br/sigaa/public/curso/ppp.jsf?lc=pt_BR&id=43969935>. Acesso em: 14/05/2018.
[131] Disponível em: <https://sig.ufla.br/modulos/publico/matrizes_curriculares/index.php?cod_matriz_curricular=50&op=abrir>. Acesso em: 14/05/2018.

	UNIFAL	**Álgebra Linear**[132]	Espaços vetoriais; Dependência linear; Base e dimensão; Subespaços e soma direta; Transformações lineares; Núcleo e imagem; Isomorfismo; Matriz de uma transformação linear; Autovalores e autovetores; Subespaços invariantes; Diagonalização de operadores; Espaços com produto interno; Ortogonalidade; Isometrias.
	UFJF	**Álgebra Linear**[133]	Espaços Vetoriais, Espaços com Produto Interno, Transformações Lineares, Diagonalização.
São Paulo	**UFABC**	**Álgebra Linear**[134]	Sistemas de Equações Lineares: Sistemas e matrizes. Matrizes escalonadas. Sistemas homogêneos. Posto e Nulidade de uma matriz. Determinantes. Espaço Vetorial: Definição e exemplos. Subespaços vetoriais. Combinação linear. Dependência e independência linear. Base de um espaço vetorial e mudança de base. Produto interno. Transformações Lineares: Definição de transformação linear e exemplos. Núcleo e imagem de uma transformação linear. Transformações lineares e matrizes. Matriz mudança de base. Autovalores e Autovetores: Polinômio característico. Base de autovetores. Diagonalização de operadores.
	UFSCar	**Álgebra Linear A**[135]	Métodos de eliminação de Gauss para sistemas lineares. Espaços Vetoriais. Subespaços. Bases. Somas diretas. Introdução à programação linear. Transformações lineares. Matrizes de transformações lineares. Núcleo e imagem. Autovalores e autovetores. Diagonalização. Espaços com produto interno. Bases ortonormais. Projeções ortogonais. Movimentos rígidos. Métodos dos mínimos quadrados.
Rio de Janeiro	**UFRRJ**	**Álgebra Linear II**[136]	Vetores no R2 e no R3. Matrizes. Sistemas de equações lineares. Determinantes. Espaços vetoriais reais. Transformações lineares. Autovalores e autovetores.

---

132 Disponível em: <http://www.unifal-mg.edu.br/graduacao/matlic>. Acesso em: 14/05/2018.
133 Disponível em: <http://www.ufjf.br/matematica/curso/licenciatura-em-matematica-noturno/matriz-curricular-licenciatura-em-matematica-noturno/>. Acesso em: 14/05/2018.
134 Disponível em: <http://prograd.ufabc.edu.br/cursos/lm>. Acesso em: 11/05/2018.
135 Disponível em: <http://www.prograd.ufscar.br/cursos/cursos-oferecidos-1/matematica/sao-carlos>. Acesso em: 11/05/2018.
136 Disponível em: <http://cursos.ufrrj.br/grad/matematica/organizacao/disciplinas/obrigatorias/ >. Acesso em: 11/05/2018.

		Álgebra Linear III[137]	Produto interno. Transformações lineares e matrizes. Fatoração de matrizes. Espaços vetoriais sobre C. Matrizes ortogonais e operadores hermitianos. Formas lineares e quadráticas. Classificação das cônicas e quádricas.
	UFRJ	**Álgebra Linear**[138]	Matrizes-sistemas lineares. Resolução numérica de sistemas lineares. Determinante. Matriz Inversa. Espaços e subespaços vetoriais. Base e mudança de base. Operadores lineares. Núcleo e imagem de transformações lineares. Autovalores e autovetores. Diagonalização de operadores: Teorema Espectral. Espaços com produto interno. Redução da equação geral do segundo grau a duas e três variáveis: Identificação de Cônicas e quádricas utilizando a diagonalização.
	UNIRIO	**Álgebra Linear**[139]	Matrizes. Determinantes. Sistemas Lineares. Espaços e Subespaços Vetoriais. Combinações Lineares, Independência Linear, Bases e Dimensão. Transformações Lineares. Núcleo e Imagem. Isomorfismos. Representação matricial de uma Transformação Linear. Mudança de base e coordenadas.
		Álgebra Linear II[140]	Autovetores e autovalores. Polinômio característico. Base de Autovetores, Diagonalização de operadores. Polinômio mínimo. Subespaços invariantes. Espaços Vetoriais com Produto Interno. Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt, Complemento Ortogonal, Espaços complexos com produto Interno, Funcionais lineares, Operadores Auto-Adjuntos, Unitários e Normais, Formas Bilineares, Simétricas e quadráticas. Reconhecimento de cônicas e quádricas.

[137] Disponível em: <http://cursos.ufrrj.br/grad/matematica/organizacao/disciplinas/obrigatorias/ >. Acesso em: 11/05/2018.
[138] Disponível em: <https://www.siga.ufrj.br/sira/temas/zire/frameConsultas.jsp?mainPage=/repositorio-curriculo/A26B74C8-92A4-F799-2D72-BC240BA015D5.html>. Acesso em: 11/05/2018.
[139] Disponível em: <http://em.uniriotec.br/menu/2/disciplinas/al1.html#titulo-disciplina>. Acesso em: 11/05/2018.
[140] Disponível em: <http://em.uniriotec.br/menu/2/disciplinas/al2.html#titulo-disciplina>. Acesso em: 11/05/2018.

	UFF	**Álgebra Linear I**[141]	Sistemas de equações lineares e matrizes. Resolução de sistemas por eliminação de incógnitas de Gauss e Gauss-Jordan. Espaços vetoriais com ênfase nos espaços de dimensão finita: definição, subespaços, independência linear, base e dimensão. Transformações lineares. Teorema do Núcleo e da Imagem. Isomorfismos. Matrizes associadas a uma transformação linear. Mudança de base. Álgebra das transformações lineares.
		Álgebra Linear II[142]	Determinantes. Propriedades de determinantes. Espaços vetoriais com produto interno. Complemento ortogonal. Bases ortonormais. Processos de Gram-Schmidt. Matriz adjunta. Matrizes ortogonais. Semelhança entre matrizes. Diagonalização de matrizes com entradas reais. Diagonalização. Autovalores e autovetores de matrizes com entradas complexas. Diagonalização de matrizes simétricas.

Fonte: elaborado pela autora (2018).

O termo “Matriz” aparece em apenas 89% das IES; “Determinantes” ocorre em 44% delas; “Sistemas de Equações Lineares” ou “Sistemas Lineares” estão presentes em 67% dessas instituições da região. Os conteúdos “Transformação Linear” e “Espaço Vetorial” aparecem em todas as IES analisadas, enquanto “Produto Interno” ou “Produto Escalar” ocorrem em 14,78%; “Dimensão”, em 28%, e “Autovalor e Autovetor” em mais metade das IES, 61%.

Em relação à carga horária, todas foram disponibilizadas. O quadro 16 traz essas informações.

[141] Disponível em: <https://app.uff.br/graduacao/quadrodehorarios#>. Acesso em: 11/05/2018.
[142] Disponível em: <https://app.uff.br/graduacao/quadrodehorarios#>. Acesso em: 11/05/2018.

Quadro 16 – Lista de carga horária dos cursos de Álgebra Linear das Universidades Federais Brasileiras da região Sudeste

Estado	Sigla	Disciplina Obrigatória	Carga Horária
Espírito Santo	**UFES**	**Álgebra Linear**	60
	UFMG	**Álgebra Linear I**	60
	UFOP	**Álgebra Linear I**	60
	UFU	**Álgebra Linear I**	75
	UFV	**Introdução à Álgebra Linear**	60
	UFSJ	**Álgebra Linear**	108
	UFVJM	**Álgebra Linear**	60
	UFTM	**Álgebra Linear**	60
	UNIFEI	**Álgebra Linear I**	64
	UFLA	**Álgebra Linear**	68
	UNIFAL	**Álgebra Linear**	60
	UFJF	**Álgebra Linear**	60
São Paulo	**UFABC**	**Álgebra Linear**	72
	UFSCar	**Álgebra Linear A**	60
Rio de Janeiro	**UFRRJ**	**Álgebra Linear II**	60
		Álgebra Linear III	60
	UFRJ	**Álgebra Linear**	60
	UNIRIO	**Álgebra Linear**	60
		Álgebra Linear II	60
	UFF	**Álgebra Linear I**	68
		Álgebra Linear II	68

Fonte: elaborado pela autora (2018).

A média da região Sudeste é de 75 h/a. As instituições com maior carga horária são aquelas que oferecem duas disciplinas da matéria – UFRRJ, UNIRIO e UFF –, mas a UFSJ destaca-se entre elas, pois oferece apenas uma disciplina, porém com carga horária de 108 h/a.

Das dezoito instituições da região Sudeste, apenas em duas não tivemos acesso às referências bibliográficas, conforme consta no quadro 17.

Quadro 17 – Lista de referências bibliográficas ementas dos cursos de Álgebra Linear das Universidades Federais Brasileiras da região Sudeste

Estado	Sigla	Disciplina Obrigatória	Referências Bibliográficas Básicas
Espírito Santo	**UFES**	**Álgebra Linear**	BOLDRINI et al. (1986) HEFEZ, FERNANDEZ (2012) LEON (2011)

	UFMG	**Álgebra Linear I**	ANTON e RORRES (2001) BOLDRINI et al. (1980) CALIOLI, C. et al. (1995) KOLMAN (1998)
	UFOP	**Álgebra Linear I**	COELHO, LOURENÇO (2005) LIPSCHUTZ (1974) LIMA (1998) LANG (2003)
	UFU	**Álgebra Linear I**	BOLDRINI et al. (1978) CALLIOLI et al. (1977) LIMA (2001) LIMA (1995)
	UFV	**Introdução à Álgebra Linear**	ANTON e RORRES (2001) BOLDRINI et al. (1986) LAY (1999)
	UFSJ	**Álgebra Linear**	BOLDRINI et al. (1978) CALLIOLI, C. A. et al. (1977) LIMA (1995)
	UFVJM	**Álgebra Linear**	ANTON (1982) BOLDRINI et al. (1978) CALLIOLI, C. A. et al. (1977)
	UFTM	**Álgebra Linear**	ANTON e RORRES (2001) CALLIOLI, COSTA, DOMINGUES (1990) BOLDRINI et al. (1986)
	UNIFEI	**Álgebra Linear I**	BOLDRINI et al. (1986). LIMA (1995) HOFFMAN, K.; KUNZE (1976)
	UFLA	**Álgebra Linear**	CALLIOLI, DOMINGUES, COSTA (2000) BOLDRINI et al. (1986) LIMA (2006)
	UNIFAL	**Álgebra Linear**	BOLDRINI et al. (1986) CALLIOLI, DOMINGUES, COSTA (1997) LANG (2003)
	UFJF	**Álgebra Linear**	ANTON e RORRES (2001) BOLDRINI et al. (1986) CALLIOLI, DOMINGUES, COSTA (1990) LIPSCHUTZ (2004) SANTOS (2006) STEINBRUCH, WINTERLE (1987)
São Paulo	**UFABC**	**Álgebra Linear**	ANTON e RORRES (2001) APOSTOL (1996) BOLDRINI et al. (1986)
	UFSCar	**Álgebra Linear A**	Definido semestralmente pelo professor responsável.
Rio de Janeiro	**UFRRJ**	**Álgebra Linear II** **Álgebra Linear III**	PARGA (2011) LEON (2011) LAY (2013)
	UFRJ	**Álgebra Linear**	Não está disponível.

	UNIRIO	**Álgebra Linear**	ANTON e RORRES (2001) BOLDRINI et al. (1980) KOLMAN, HILL (2006) LIMA (2001) STRANG (2010) CALLIOLI, DOMINGUES, COSTA (1990) COELHO, LOURENÇO (2007)
		Álgebra Linear II	BOLDRINI et al. (1980) COELHO, LOURENÇO (2007) KOLMAN, HILL (2006) LIMA (2001) HOFFMAN, KUNZE (1970) STRANG (2010) CALLIOLI, DOMINGUES, COSTA (1990)
	UFF	**Álgebra Linear I**	BOLDRINI et al. (1986) CALLIOLI (1990) ANTON e BUSBY (2006)
		Álgebra Linear II	

Fonte: elaborado pela autora (2018).

As obras mais citadas são: Boldrini et al., com presença em 94% das IES; Callioli, com 63%, e Lima com 44%.

A última região a ser analisada é a Sul. Com apenas três estados, é a menor do país e conta com onze universidades subsidiadas por verbas federais, conforme quadro 18 abaixo.

Quadro 18 – Universidades Federais Brasileiras da Região Sul

	Universidade	**Sigla**	**Estados Brasileiros**
1	Federal da Integração Latino-Americana	UNILA	Paraná
2	Tecnológica Federal do Paraná	UTFPR	
3	Federal do Paraná	UFPR	
4	Federal do Pampa	UNIPAMPA	Rio Grande do Sul
5	Federal do Rio Grande do Sul	UFRGS	
6	Federal de Pelotas	UFPel	
7	Federal de Santa Maria	UFSM	
8	Federal do Rio Grande	FURG	
9	Federal de Ciências da Saúde de Porto Alegre	UFCSPA	
10	Federal de Santa Catarina	UFSC	Santa Catarina
11	Federal da Fronteira Sul	UFFS	

Fonte: elaborado pela autora (2018).

Apenas uma das universidades federais desta região não oferece o curso presencial de Licenciatura em Matemática, a UFCSPA. A UTFPR oferece o curso na modalidade presencial, mas não será analisada, pois faz parte da Rede Federal de Educação Profissional, Científica e Tecnológica. Assim, do mesmo modo que os Institutos Federais, por comporem a citada rede, não serão analisados, a UTFPR igualmente será omitida nesta pesquisa.

Portanto, das 9 que oferecem o curso, todas disponibilizam as ementas dos cursos de graduação, como pode ser conferido no quadro 19 abaixo.

Quadro 19 – Lista de ementas dos cursos de Álgebra Linear das Universidades Federais Brasileiras da região Sul

Estado	Sigla	Disciplina Obrigatória	Ementa
Paraná	**UNILA**	**Álgebra Linear I**[143]	Matrizes: definição, operações matriciais, regras de aritmética matricial, inversa de uma matriz, matrizes especiais (diagonal, triangular e simétrica). Determinantes: definição do determinante de uma matriz, cálculo do determinante através de redução por linhas, propriedades do determinante, expansão em cofatores, regra de Cramer. Sistemas de equações lineares: introdução, resolução de sistemas lineares, eliminação gaussiana. Espaços vetoriais: definição de espaço vetorial arbitrário, subespaços, dependência e independência linear, base e dimensão, espaço vetoriais associados a uma matriz (espaço-linha, espaço-coluna e espaço nulo). Espaços vetoriais com produto interno: definição de produto interno, ângulo e ortogonalidade, bases ortonormais, processo de diagonalização de Gram-Schmidt, melhor aproximação, matrizes ortogonais. Autovalores e autovetores: definição e cálculo, diagonalização, diagonalização ortogonal. Transformações lineares: definição de transformações lineares arbitrárias, núcleo e imagem, inversa de uma transformação linear, matrizes de transformações lineares, semelhança.

[143] Disponível em: <https://www.unila.edu.br/cursos/matematica-licenciatura#field_hosp_alimen_hotsite-tab>. Acesso em: 11/05/2018.

	UFPR	**Álgebra Linear I**[144]	Espaços Vetoriais. Transformações lineares. Diagonalização de operadores. Espaços com produto interno. Operadores autoadjuntos. Formas quadráticas.
Rio Grande do Sul	**UNIPAMPA**	**Introdução à Álgebra Linear**[145]	Matrizes: Operações e Propriedades. Determinantes. Sistemas de Equações Lineares. Aplicações.
		Álgebra Linear[146]	Espaços vetoriais. Transformações lineares. Autovalores e Autovetores. Aplicações.
	UFRGS	**Álgebra Linear I**[147]	Sistema de equações lineares. Matrizes. Fatoração LU. Vetores. Espaços vetoriais. Ortogonalidade. Valores próprios. Aplicações.
	UFPel	**Álgebra Linear I**[148]	Solução de sistemas lineares. Matrizes e Determinantes. Espaços vetoriais. Transformações lineares. Matriz de uma transformação. Autovalores e autovetores.
	UFSM	**Álgebra Linear I**[149]	Sistemas de equações lineares, espaços vetoriais, espaços com produto interno, transformações lineares, autovalores e autovetores.
	FURG	**Álgebra Linear**[150]	Sistemas Lineares, Espaços Vetoriais, Transformações Lineares, Autovalores e Autovetores, Espaços com Produto Interno, Tópicos Adicionais.
Santa Catarina	**UFSC**	**Álgebra Linear I**[151]	Fatoração PA=LU. Espaços vetoriais. Transformações lineares. Introdução aos autovalores e autovetores.
		Álgebra Linear II[152]	Espaços vetoriais com produto interno. Diagonalização de operadores. Introdução à álgebra linear numérica.

144 Disponível em: <http://www.mat.ufpr.br/graduacao/matematica/curriculo/ementas.html#CM120>. Acesso em: 11/05/2018.
145 Disponível em: <http://cursos.unipampa.edu.br/cursos/licenciaturaemmatematicaitaqui/ppcs/>. Acesso em: 11/05/2018.
146 Disponível em: <http://cursos.unipampa.edu.br/cursos/licenciaturaemmatematicaitaqui/ppcs/>. Acesso em: 11/05/2018.
147 Disponível em: <https://www.ufrgs.br/ime/cursos/licenciatura-em-matematica-2/>. Acesso em: 11/05/2018.
148 Disponível em: <https://institucional.ufpel.edu.br/disciplinas/cod/0100170>. Acesso em: 11/05/2018.
149 Disponível em: <https://portal.ufsm.br/ementario/disciplina.html;jsessionid=d1ce4334bc193b2ac2facaee7f47?idDisciplina=76884>. Acesso em: 11/05/2018.
150 Disponível em: <www.furg.br/bin/cursos/tela_qsl_visual.php?cd_curso=102*569>. Acesso em: 11/05/2018.
151 Disponível em: <http://matematica.blumenau.ufsc.br/ementas/>. Acesso em: 11/05/2018.
152 Disponível em: <http://matematica.blumenau.ufsc.br/ementas/>. Acesso em: 11/05/2018.

	UFFS	**Álgebra Linear I**[153]	Matrizes. Determinantes. Sistemas de equações lineares. Espaços vetoriais. Transformações lineares.
		Álgebra Linear II[154]	Espaços com produto interno. Autovalores e autovetores. Diagonalização. Formas canônicas. Formas bilineares.

Fonte: elaborado pela autora (2018).

O termo “Matriz” aparece em cinco delas, representando 56% das IES, enquanto “Sistemas de Equações Lineares” ou “Sistemas Lineares” ocorrem em oito das nove Universidades analisadas na região. Na UFSC, aparece “Fatoração PA = LU”, que trata de uma maneira de resolver sistemas de equações lineares. Ou seja, o termo Matriz não aparece explicitamente nas instituições UFSM, FURG e UFSC, mas seguramente sua definição é revisada para ser usada na resolução de sistemas de equações lineares.

Em prosseguimento com a análise quantitativa, o termo “Determinantes” está em 44% das IES; “Transformação Linear” aparece em 89% delas; “Espaço Vetorial” ocorre em todas as IES; “Produto Interno” ou “Produto Escalar” ocorre seis vezes, 67%, “Dimensão” é visto em 11% das instituições e “Autovalor e Autovetor” em 78% delas.

Quanto à carga horária nesta região, todas as IES a disponibilizaram. Segue a relação no quadro 20.

[153] Disponível em: <http://www.uffs.edu.br/atos-normativos/ppc/ccmch/2015-0001>. Acesso em: 11/05/2018.
[154] Disponível em: <http://www.uffs.edu.br/atos-normativos/ppc/ccmch/2015-0001>. Acesso em: 11/05/2018.

Quadro 20 – Lista de carga horária dos cursos de Álgebra Linear das Universidades Federais Brasileiras da região Sul

Estado	Sigla	Disciplina Obrigatória	Carga Horária
Paraná	**UNILA**	**Álgebra Linear I**	68
	UFPR	**Álgebra Linear I**	60
Rio Grande do Sul	**UNIPAMPA**	**Introdução à Álgebra Linear**	60
		Álgebra Linear	60
	UFRGS	**Álgebra Linear I**	60
	UFPel	**Álgebra Linear I**	68
	UFSM	**Álgebra Linear I**	90
	FURG	**Álgebra Linear**	60
Santa Catarina	**UFSC**	**Álgebra Linear I**	72
		Álgebra Linear II	72
	UFFS	**Álgebra Linear I**	60
		Álgebra Linear II	60

Fonte: elaborado pela autora (2018).

A região Sul tem uma média de 87 h/a, a segunda mais alta de todas as regiões, proporcionalmente, pois, em várias universidades da região, a disciplina de Álgebra Linear é dividida em duas etapas. Das referências bibliográficas, apenas a uma não tivemos acesso, a FURG.

Quadro 21 – Lista de referências bibliográficas dos cursos de Álgebra Linear das Universidades Federais Brasileiras da região Sul

Estado	Sigla	Disciplina Obrigatória	Referências Bibliográficas Básicas
Paraná	**UNILA**	**Álgebra Linear I**	ANTON e RORRES (2012) BOLDRINI et al. (1980) CALLIOLI, DOMINGUES, COSTA (2003)
	UFPR	**Álgebra Linear I**	BOLDRINI et al. (1980) LIMA (1996) LAY (2013) LEON (2011)
Rio Grande do Sul	**UNIPAMPA**	**Introdução à Álgebra Linear**	LAY (2012) LEON (1998)
		Álgebra Linear	CARLEN, CARVALHO (2009) LAY (2012) LEON (2011)
	UFRGS	**Álgebra Linear I**	LAY (2012) STRANG (2013) NICHOLSON (2006)

	UFPel	**Álgebra Linear I**	BOLDRINI et al. (1984) LIPSCHUTZ (1994) NOBLE e DANIEL (1986)
	UFSM	**Álgebra Linear I**	BOLDRINI et al. (1984) LIMA (1996) POOLE (2004)
	FURG	**Álgebra Linear**	Não está disponível.
Santa Catarina	**UFSC**	**Álgebra Linear I**	ANTON e RORRES (2012) BOLDRINI et al. (1986) STEINBRUCH (1987) STRANG (2013)
		Álgebra Linear II	BOLDRINI et al. (1986) CALLIOLI et al. (1990). KOLMAN, HILL (2006) LEON (2011) LIMA (2016) STEINBRUCH (1987)
	UFFS	**Álgebra Linear I** **Álgebra Linear II**	BOLDRINI et al. (1986) COELHO, LOURENÇO (2002) LEON (1999) LIMA (1998) POOLE (2004)

Fonte: elaborado pela autora (2018).

Das obras citadas, Boldrini et al. só não aparece em uma universidade, ocorrendo em 88% delas; em seguida, Leon e Lima, adotados em 50% das instituições analisadas, enquanto Callioli, nessa região, ocorre em apenas 25% delas, situação bem diversa das demais regiões do país. Uma vez finalizada a descrição dos dados analisados por região, passa-se à sua abordagem geral, que relacionará todos os dados encontrados, independentemente da região.

3.2.1 Um olhar geral para as ementas

Com essa análise, é inegável que a disciplina de Álgebra Linear faz parte de todos os cursos presenciais de Licenciatura em Matemática das Universidades Federais Brasileiras. Além disso, é possível estabelecer semelhança entre os conteúdos das ementas, a quantidade de carga horária estabelecida e as obras sugeridas como referência bibliográfica básica.

A seguir, propõe-se um novo olhar para todos esses dados: será estabelecida uma relação geral, começando pela análise da carga horária (CH) das disciplinas. O quadro 22 a seguir relata a média de cada região e a média geral em relação à carga horária definida para a disciplina e seu percentual em relação à carga horária mínima do curso.

Quadro 22 – Média total da carga horária dos cursos de Álgebra Linear das Universidades Federais Brasileiras e percentual sobre a carga horária mínima dos cursos de licenciatura

Região	Média da CH	Percentual da CH
Norte	105,11	**3,75%**
Nordeste	77,67	**2,77%**
Centro-Oeste	76,80	**2,74%**
Sudeste	75,72	**2,70%**
Sul	87,78	**3,13%**
Média das regiões	84,62	**3,02%**

Fonte: elaborado pela autora (2018).

Em relação à carga horária das disciplinas, a média de todos os estados está em torno de 84 h/a, o que representa 3,02% da carga horária mínima definida pelo MEC.

A Resolução CNE/CP nº 2, de 18 de fevereiro de 2002, cujo artigo 1º a seguir se transcreve, "institui a duração e a carga horária dos cursos de licenciatura, de graduação plena, de formação de professores da Educação Básica em nível superior." (MEC, 2002):

> Art. 1º A carga horária dos cursos de Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, em curso de licenciatura, de graduação plena, será efetivada mediante a integralização de, no mínimo, 2800 (duas mil e oitocentas) horas, nas quais a articulação teoria-prática garanta, nos termos dos seus projetos pedagógicos, as seguintes dimensões dos componentes comuns:
> I - 400 (quatrocentas) horas de prática como componente curricular, vivenciadas ao longo do curso;
> II - 400 (quatrocentas) horas de estágio curricular supervisionado a partir do início da segunda metade do curso;
> III - 1800 (mil e oitocentas) horas de aulas para os conteúdos curriculares de natureza científico-cultural;
> IV - 200 (duzentas) horas para outras formas de atividades acadêmico-científico-culturais. (MEC, 2002).

É visível que a Álgebra Linear se sobressai em relação à carga horária definida nos currículos analisados, afinal, ela foi citada em todos os cursos presenciais de Licenciatura em Matemática das Universidades Federais brasileiras analisados.

Ao nos atentarmos para as obras referenciadas, diversas foram elas: ao todo 84 livros diferentes; no entanto, muitos livros do mesmo autor foram citados, alterando-se apenas a edição, perfazendo um total de 33 autores distintos.

Na apresentação por região, destacam-se BOLDRINI et al.; CALLIOLI; LIMA; STEINBRUCH; LIPSCHUTZ; LEON; ANTON e RORRES. Entretanto, ao analisar a média por região, esses valores oscilaram bastante, conforme apresentam os quadros 23 e 24 abaixo. BOLDRINI et al. lidera com 89%; na sequência, aparecem: CALLIOLI, com 52%; LIMA, com 41%; ANTON e RORRES, com 28%; LIPSCHUTZ, com 26%; STEINBRUCH, com 20%, e, por último, LEON, com 17%. Entre tantos autores, definiu-se por analisar aqueles que ocorreram em 50% ou mais IES.

Quadro 23 – Quantidade de vezes que a obra de Boldrini et al. foi citada nas ementas dos cursos de Álgebra Linear das Universidades Federais Brasileiras

	Quantidade de UF	BOLDRINI et al.	Percentual
Norte	6	5	83%
Nordeste	11	9	82%
Centro-Oeste	5	5	100%
Sudeste	16	15	94%
Sul	8	7	88%
Total	46	41	89%

Fonte: elaborado pela autora (2018).

Infere-se com esses dados que Boldrini et al. destacam-se em relação aos demais autores, pois dos 46 cursos analisados[155], esse autor é citado como referência bibliográfica básica em 41 deles, enquanto Callioli aparece em 23 IES, conforme apresenta o quadro 24 abaixo.

Quadro 24 – Quantidade de vezes que a obra de Callioli foi citada nas ementas dos cursos de Álgebra Linear das Universidades Federais Brasileiras

	Quantidade de UF	CALLIOLI	Percentual
Norte	6	4	67%
Nordeste	11	5	45%
Centro-Oeste	5	3	60%
Sudeste	16	10	63%
Sul	8	2	25%
Total	46	24	52%

Fonte: elaborado pela autora (2018).

[155] O total de Universidades Federais analisadas, em relação as referências bibliográficas, é de 46, porque em 9 instituições não houve o acesso a esses dados.

Em virtude desse ressalto, é possível estabelecer uma relação dessas obras com os conteúdos mais recorrentes nas ementas, razão pela qual essas obras serão exploradas a seguir.

O livro do Boldrini et al. (1980) é dividido em quatorze capítulos, e do Callioli (1987) em duas partes, Álgebra Linear e Aplicações. Na primeira, há oito capítulos, e na segunda, seis. Significa dizer que em ambas as obras a quantidade de capítulos é a mesma. Não se discorrerá aqui acerca do objetivo desses livros, tampouco sobre a forma como os conteúdos são apresentados. A intenção é comparar o sumário e conteúdos dessas obras com as ementas apresentadas para identificar suas relações. O quadro 25 sistematiza essa ideia:

Quadro 25 – Comparativo entre os sumários das obras mais citadas como referência bibliográfica básica

	Sumários	
	Boldrini et al. (1980)	**Callioli (1987)**
Capítulos	1 - Matrizes 2 - Sistemas de Equações Lineares 3 - Determinantes e Matriz Inversa 4 - Espaço Vetorial 5 - Transformações Lineares 6 - Autovalores e Autovetores 7 - Diagonalização de Operadores 8 - Produto Interno 9 - Tipos Especiais de Operadores Lineares 10 - Formas Lineares, Bilineares e Quadráticas 11 - Classificação de Cônicas e Quádricas 12 - Resolução de Sistemas de Equações Diferenciais Lineares 13 - Processos Iterativos e Álgebra Linear 14 - Conjuntos Convexos e Programação Linear	**1ª Parte:** 1 - Sistemas Lineares – Matrizes 2 - Espaços Vetoriais 3 - Base e Dimensão 4 - Transformações Lineares 5 - Matriz de uma Transformação Linear 6 - Espaços com Produto Interno 7 - Determinantes 8 - Formas Bilineares e Quadráticas Reais **2ª Parte:** 1 - Grafos e Matrizes 2 - Diagonalização de Operadores Lineares 3 - Polinômios de Lagrange 4 - Sequências Recorrentes Lineares 5 - Equações Diferenciais Lineares com Coeficientes Constantes 6 - Método dos Mínimos Quadrados

Fonte: elaborado pela autora (2018).

O primeiro capítulo do livro de Boldrini et al. (1980) trata exatamente de Matrizes. O autor considera que para apreender os conteúdos que compõem a Álgebra Linear, o sujeito deve conhecer as matrizes. Isso justifica porque o termo

Matriz ocorre explicitamente em 43 das 51[156] Universidades analisadas, conforme aponta o quadro 26 abaixo.

Quadro 26 – Quantidade de ocorrências do termo Matriz nas ementas dos cursos de Álgebra Linear das Universidades Federais Brasileiras

Regiões do Brasil	Total de UF	Ocorrências/Matriz	Percentual
Norte	7	7	**100%**
Nordeste	12	10	**83%**
Centro-Oeste	5	5	**100%**
Sudeste	18	16	**89%**
Sul	9	5	**56%**
Total	51	43	**84%**

Fonte: elaborado pela autora (2018).

A média geral de ocorrência desse termo, considerando todas as ementas das instituições analisadas, é de 84% das IES, mas com uma ressalva: conforme citado anteriormente na análise quantitativa, caso se considere que nas ementas em que aparece o termo SEL também se estuda Matriz, a média total será de 88%, ou seja, em 45 dos 51 cursos analisados a definição de matriz é ensinada.

No livro do Callioli (1987) também ocorre a mesma situação. O primeiro capítulo tem como título Sistemas Lineares – Matrizes, o que reforça a fala anterior de que não é possível ensinar SEL sem a definição de Matriz.

Na obra de Boldrini et al., o autor segue a seguinte sequência para apresentar a ideia de matriz: uma breve introdução, os tipos especiais de matrizes, operações com matrizes e, por fim, processos aleatórios, enquanto na obra do Callioli a discussão se inicia com a resolução de sistemas de equações lineares (SEL), sem citar o uso de matriz para a resolução, e, somente no item 5 do primeiro capítulo, é que se começa a tratar da definição de Matrizes, Operações com Matrizes e Matrizes Inversíveis.

No item 8, o autor discute a Regra de Cramer para a resolução de sistemas de equações lineares e, somente neste momento, evidencia o uso da matriz para a resolução do SEL. Essa organização do Callioli não proporciona relação entre os conceitos, ao passo que apresentar os conteúdos de forma desvinculada não traz contribuições para o processo de ensino e aprendizagem, visto que dessa forma

[156] Do total de 55 universidades federais, em quatro não foi disponibilizada a ementa da disciplina de Álgebra Linear.

torna-se mais difícil apontar os motivos e as necessidades de cada conteúdo para o aluno, discussão sem a qual o aluno não vê sentido em aprendê-los.

Ademais, mostrar tardiamente a relação da matriz com SEL pode causar alguns transtornos em sala de aula, pois resolver SEL sem associá-lo a uma matriz dificultará na visualização da solução. Na obra do Boldrini et al., somente no Capítulo 2 discute-se SEL e, desde o início do capítulo, o autor já faz a relação entre SEL e Matrizes. A matriz ampliada do sistema tem como objetivo facilitar a organização dos dados e a regra de Cramer, por exemplo, reduz consideravelmente as contas quando é aplicada.

Outra constatação com esse dado é a importância da definição de matriz, que inclusive é explicada no relato histórico dos conteúdos que compõem a ementa de Álgebra Linear, visto no capítulo anterior. A ideia de Matriz foi discutida por vários estudiosos, como Leibniz, em 1693, e Euler, em 1798, de forma precária e sem a definição apresentada atualmente, mas ao longo da história é perceptível seu vasto uso para a elaboração e demonstração de outros conceitos que compõem a Álgebra Linear. Este fato justifica o porquê de a definição de matriz ser citada em tantas ementas no Ensino Superior, mesmo sendo um conteúdo que compõe o currículo do Ensino Médio.

A resolução de “Sistemas de Equações Lineares”, conforme discutido, aparece com uma alta média em relação ao todo, e encontrar a solução de sistemas lineares foi um dos temas bastante discutidos e aplicados ao longo da história da Matemática, principalmente para a resolução de problemas da Análise. Nesse sentido, Kleiner (2007) expõe que Euler inspirou a procura por mais soluções em um sistema, e essas ideias baseadas em sua intuição, segundo Dorier (2000), colaboraram para a resolução dos problemas de Cramer, que posteriormente resultou na Regra de Cramer, citada anteriormente no livro de Callioli, que relacionada à definição de Matriz facilita na resolução de SEL. No quadro 27, a seguir, é perceptível que os SEL também foram bastante citados nas ementas.

Quadro 27 – Quantidade de ocorrências do termo Sistemas de Equações Lineares (SEL) nas ementas dos cursos de Álgebra Linear das Universidades Federais Brasileiras

Regiões do Brasil	Total de UF	Ocorrências/SEL	Percentual
Norte	7	6	**86%**
Nordeste	12	9	**75%**
Centro-Oeste	5	3	**60%**
Sudeste	18	12	**67%**
Sul	9	8	**89%**
Total	51	38	**75%**

Fonte: elaborado pela autora (2018).

O segundo capítulo de Boldrini et al. (1980) apresenta sugestões para a resolução desses sistemas; para tanto, reforça a ideia de matrizes. Os itens apresentados pelo autor são uma breve introdução; depois, apresentam-se sistemas e matrizes, operações elementares, forma escada e, por fim, soluções de um sistema de equações lineares. Já na obra de Callioli todos esses conceitos são apresentados nas quatro primeiras seções do primeiro capítulo. Boldrini et al. ainda dá destaque ao conceito de Determinantes e Matriz Inversa no terceiro capítulo, reforçando a importância deste conhecimento para a compreensão dos demais conteúdos que serão tratados em seu livro, enquanto Callioli (1987), somente no capítulo 7, trata de Determinantes e Matriz inversa.

Até o momento, é perceptível que os itens citados nas ementas coincidem com o sumário desses livros, e, para reforçar a ideia de que provavelmente as ementas são organizadas com base nessas obras, segue-se para um conceito que ocorreu em todas as ementas analisadas: o de “Espaço vetorial”.

Quadro 28 – Quantidade de ocorrências do termo Espaço Vetorial nas ementas dos cursos de Álgebra Linear das Universidades Federais Brasileiras

Regiões do Brasil	Total de UF	Ocorrências/Espaço Vetorial	Percentual
Norte	7	7	**100%**
Nordeste	12	12	**100%**
Centro-Oeste	5	5	**100%**
Sudeste	18	18	**100%**
Sul	9	9	**100%**
Total	51	51	**100%**

Fonte: elaborado pela autora (2018).

Na obra do Boldrini et al. (1980), o capítulo 4 trata exclusivamente disso, começando por Vetores no plano e no espaço, para depois tratar dos Espaços vetoriais, Subespaços vetoriais, Combinação linear, Dependência e independência linear, Base de um espaço vetorial e Mudança de base. Já na obra do Callioli (1987), para tratar de todos os itens citados na obra de Boldrini et al. (1980), ele a divide em dois capítulos.

O capítulo 2 começa por uma introdução; depois apresenta-se a definição de Espaço vetorial e, em seguida, as primeiras propriedades. No item 4 deste capítulo, o autor trata de Subespaço Vetorial, Soma de Subespaços, Combinação linear e Espaços vetoriais finitamente gerados. O Capítulo 3 – Base e Dimensão começa pelo conceito de Dimensão linear, apresenta suas propriedades e, após, discute a Base de um espaço vetorial finitamente gerado, a Dimensão, os processos práticos para se determinar uma base de um subespaço, a Dimensão da soma de subespaços, as Coordenadas e a Mudança de base. Mesmo a organização sendo diferente, ambos coincidem com os itens citados em todas as ementas.

Os capítulos seguintes das duas obras tratam das “Transformações Lineares”, item bastante citado nas ementas analisadas, sendo citado em 94% da IES, como se denota no quadro 29.

Quadro 29 – Quantidade de ocorrências do termo Transformação Linear nas ementas dos cursos de Álgebra Linear das Universidades Federais Brasileiras

Regiões do Brasil	Total de UF	Ocorrências/Transformação Linear	Percentual
Norte	7	7	**100%**
Nordeste	12	11	**92%**
Centro-Oeste	5	4	**80%**
Sudeste	18	18	**100%**
Sul	9	8	**89%**
Total	51	48	**94%**

Fonte: elaborado pela autora (2018).

Esse conceito, juntamente com Espaço vetorial, são os destaques nas ementas de Álgebra Linear. Isso porque eles contribuem sobremaneira para o desenvolvimento da Análise, começando pelos estudos de Peano, em 1887, e depois com Cesare Burali-Forti e Roberto Marcolongo, em 1910, e Salvatore Pincherle, na década de 1890, todos influenciados pelas obras de Peano. Hans Hahn em 1927, preocupado com os sistemas lineares, publica um artigo discutindo esses conceitos e, após, lança o Teorema de Hahn-Banach, que relaciona espaço e subespaço vetorial a sistemas lineares e transformações lineares, mostrando a relação desses conteúdos e o porquê de eles fazerem parte da ementa de Álgebra Linear.

Outro conceito matemático que aparece em 38 ementas das 51 instituições analisadas é "Produto Interno" ou "Produto escalar". Sua ocorrência é exposta no quadro 30.

Quadro 30 – Quantidade de ocorrências do termo Produto Escalar ou Produto Interno nas ementas dos cursos de Álgebra Linear das Universidades Federais Brasileiras

Regiões do Brasil	Total de UF	Ocorrências/Produto Interno/Escalar	Percentual
Norte	7	5	**71%**
Nordeste	12	8	**67%**
Centro-Oeste	5	5	**100%**
Sudeste	18	14	**78%**
Sul	9	6	**67%**
Total	51	38	**75%**

Fonte: elaborado pela autora (2018).

O oitavo capítulo de Boldrini et al. (1980), e o sexto de Callioli (1987) tratam exclusivamente dessa aplicação a cada par de vetor.

Boldrini et al. (1980) organiza o capítulo da seguinte forma: faz uma breve introdução e segue para Coeficientes de Fourier; Norma; Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt; Complemento ortogonal; Espaços vetoriais complexos – Produto interno; Produto interno e Estatística e, por fim, O Ajuste de curvas e o Método dos mínimos quadrados. Callioli (1987) começa pela definição de Produto interno, depois de Norma e distância, Ortogonalidade, Isometrias, Operadores autoadjuntos e Espaços hermitianos.

Por fim, outro conteúdo que compõe a ementa de Álgebra Linear e tem um alto índice de ocorrência nas ementas analisadas é "Autovetor e Autovalor", com 63%, como mostra o quadro 31.

Quadro 31 – Quantidade de ocorrências dos termos Autovalores e Autovetores nas ementas dos cursos de Álgebra Linear das Universidades Federais Brasileiras

Regiões do Brasil	Total de UF	Ocorrência/Autovalores e Autovetores	Percentual
Norte	7	5	**71%**
Nordeste	12	6	**50%**
Centro-Oeste	5	3	**60%**
Sudeste	18	11	**61%**
Sul	9	7	**78%**
Total	51	32	**63%**

Fonte: elaborado pela autora (2018).

Há, ainda, um capítulo para tratar do tema no livro de Boldrini et al. (1980). O autor, após uma introdução sobre o assunto, discute Polinômio característico. Já no livro de Callioli (1987), não há um capítulo específico para tratar desse conteúdo.

Os demais conteúdos citados nas ementas ocorrem em menos de 50% das IES, motivo pelo qual não serão objeto de análise.

Seguindo-se com a apresentação dos livros mais citados pelas IES, além dos capítulos do livro de Boldrini et al. (1980), já apresentados, há ainda capítulos que tratam de Diagonalização de Operadores, Tipos especiais de Operadores Lineares, Formas Lineares, Bilineares e Quadráticas, Classificação de Cônicas e Quádricas, Resolução de Sistemas de Equações Diferenciais Lineares, Processos Iterativos e Álgebra Linear e Conjuntos Convexos e Programação Linear. Na obra de Callioli (1987), há capítulos sobre Formas Bilineares e Quadráticas Reais na primeira parte e, na segunda parte, Grafos e Matrizes, Diagonalização de Operadores Lineares, Polinômio de Lagrange, Sequência Recorrentes Lineares, Equações Diferenciais Lineares com Coeficientes Constantes e Método dos Mínimos Quadrados.

Em ambas as obras é perceptível uma preocupação com a exposição e discussão de alguns conteúdos que compõem o currículo do Ensino Médio, como a definição de Matriz, Operações com matrizes, Matriz inversa, Cálculo de determinante, Sistemas de equações lineares e Regra de Cramer. Abordar novamente tais conteúdos no Ensino Superior mostra a sua importância no contexto do estudo da Álgebra Linear.

Ao analisar os quadros 3, 7, 11, 15 e 19, que tratam das ementas das disciplinas, verifica-se que em algumas instituições a disciplina de Álgebra Linear é dividida em duas, ora com o nome de Introdução à Álgebra Linear e Tópicos de

Álgebra Linear, ora como Álgebra Elementar e Álgebra Linear, ou Álgebra Linear I e Álgebra Linear II, ou Introdução à Álgebra Linear e Álgebra Linear I.

Do exame de todo o conteúdo dessas disciplinas, é cristalino que ele contém praticamente os mesmos daquelas instituições que oferecem apenas uma disciplina de Álgebra Linear. Outra situação verificada é que em todas as ementas dessa primeira disciplina oferecida nesses cursos constam Sistemas de Equações Lineares, ou seja, essas disciplinas no início têm o aspecto de revisão ou, talvez, de preparação para os conteúdos da Álgebra Linear. Este fato, no entanto, não a difere das demais, pois, como explanado, o termo Sistemas de equações lineares aparece em 89% das ementas, ou seja, ele também aparece naquelas instituições que oferecem apenas uma disciplina unificada.

O diferencial dessas instituições (que separam a disciplina em duas) em relação às demais (que a unificam) dá-se na carga horária, pois naquelas universidades que oferecem dois cursos de Álgebra Linear a média da carga horária fica em torno de 125h/a, enquanto as que oferecem apenas uma disciplina a média é de 68 h/a, o que representa praticamente a metade.

Para compreender o porquê dessa divisão seria necessária uma investigação mais aprofundada nessas instituições, o que não condiz com o objetivo deste estudo. Nesse caso, registra-se essa comparação a título de questionamento: os alunos dos cursos de Licenciatura em Matemática, modalidade presencial, que cursam duas disciplinas de Álgebra Linear, têm aprendizado diferente daqueles que cursam apenas uma disciplina? Ou, ainda: será necessário o acréscimo de uma disciplina anterior para preparar os alunos para cursarem a Álgebra Linear?

Após analisar as ementas dessas Universidades e a quantidade de vezes que cada item ocorre, é nítido que a diferença nos conteúdos que compõem a disciplina de Álgebra Linear oferecida nas várias Universidades é irrisória, para não dizer inexistente.

O levantamento realizado também deixa explícita a importância de alguns conteúdos do Ensino Médio, como, por exemplo, Matrizes e Sistemas de Equações Lineares. Isso leva à reflexão de que haveria um problema no processo de ensino e aprendizagem desses conceitos no Ensino Médio e, em virtude disso, eles são revisados no Ensino Superior, antes de as definições próprias da Álgebra Linear terem início.

Em contraponto a essa ideia, somos da opinião de que o que deveria ocorrer na Universidade é a apresentação, por exemplo, de novos métodos de resolução de SEL via Matriz para facilitar a resolução dos problemas da Álgebra Linear, recobrando e avançando nos conceitos vistos no Ensino Médio, e não meramente revisando-os. Sabe-se que a compreensão desses conteúdos é importante, visto que não se tratam de conteúdos fáceis e exigem esforço tanto do professor como do aluno, sendo que as dificuldades surgem naturalmente ao longo do processo de ensino e aprendizagem dos conceitos algébricos. Algumas delas podem ser apontadas:

> • Dificuldades devido à natureza do tema álgebra dentro do contexto da Matemática;
> • Dificuldades que surgem dos processos do desenvolvimento cognitivo dos alunos e da estrutura e organização de suas experiências;
> • Dificuldades atribuídas à natureza do currículo, à organização das lições e aos métodos de ensino usados;
> • Dificuldades devido às atitudes afetivas e não racionais para a álgebra. (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014, p. 70).

As dificuldades percebidas no Ensino Superior, assim, não são diferentes daquelas apresentadas no primeiro contato com a Álgebra, na segunda fase do Ensino Fundamental. Os estudantes não conseguem contextualizar a matéria e, com isso, o conhecimento é superficial.

Dito de outro modo, não há apropriação do conhecimento e os discentes não conseguem relacionar os conteúdos algébricos com o cotidiano. Os conhecimentos ficam apenas no empírico, no que se mostra diante dos seus olhos, e esse é outro aspecto importante. A Álgebra precisa ser compreendida inicialmente no plano das ideias, para que depois se possa relacioná-la a objetos concretos, ou seja, é necessário que os conhecimentos saiam do empírico rumo ao teórico para que esse movimento aconteça.

A polonesa Anna Sierpinska, domiciliada no Canadá desde 1990 e atuante no *Department of Mathematics and Statistics na Concordia University*, também defende a ideia de que só há apropriação do conteúdo se o sujeito desenvolver o pensamento teórico. Esse relato está disponível em um dos capítulos da obra de Dorier (2000):

> Devemos assumir que o pensamento teórico é caracterizado por uma reflexão consciente sobre os meios semióticos de representação de conhecimento e sistemas de conceitos em vez de agregados de ideias. Nós assumimos que, no pensamento teórico, o raciocínio é baseado em lógica e conexões semânticas entre conceitos dentro de um sistema; as conexões entre conceitos são feitas com base em suas relações com conceitos mais gerais dos quais são casos especiais e não em associações empíricas. As

> relações entre conceitos e os objetos são mediados pelas relações dos conceitos com outros conceitos. Em particular, as definições dos conceitos, comparações entre conceitos e suas diferenças são construídas com base nas relações desses conceitos com conceitos mais gerais, e não com base em seus exemplos mais comuns. (SIERPINKA apud DORIER, 2000, p. 211, tradução nossa)[157].

Diante disso, reforça-se aqui a ideia de que os alunos têm dificuldades para apreender os conteúdos que compõem a ementa da disciplina de Álgebra Linear porque a forma como o currículo está organizado – influenciada pela constituição histórica dos seus conteúdos – não propicia situações para que eles possam desenvolver seu pensamento além do empírico:

> [o] ensino de álgebra linear em nível universitário é quase universalmente considerado como uma experiência frustrante para professores e estudantes. Muitos entre aqueles que ensinam tal curso se resignaram ao fato de que isso é simplesmente "a natureza da fera" e que não pode ser feito muito para mudar as coisas. Essa atitude pode explicar a razão pela qual, até recentemente, houve uma escassez de trabalhos de pesquisa sobre a aprendizagem da álgebra linear. Ao contrário das noções de cálculo, que foram pesquisadas extensivamente, a maior parte da pesquisa sobre aprendizagem e ensino de álgebra linear é relativamente recente. (HILLEL apud DORIER, 2000, p. 191, tradução nossa)[158].

O relato acima – do professor Joel Hillel, constante da obra de Dorier (2000) – refere-se à realidade americana, igualmente experimentada por muitas universidades brasileiras, pois, ao simplesmente resignar-se, o professor afasta seus alunos, ocasionando dificuldades de cunho afetivo, e os problemas de ensino e aprendizagem só aumentam. Não se descuide, ainda, de mencionar a má formação acadêmica, por não preparar estudantes e professores para um efetivo processo de ensino e aprendizagem, como novamente aponta Hillel, colaborador da professora Sierpinska na obra de Dorier (2000):

---

[157] We shall assume that theoretical thinking is characterized by a conscious reflection on the semiotic means of representation of knowledge and by systems of concepts rather than aggregates of ideas. We further assume that, in theoretical thinking, reasoning is based on logical and semantic connections between concepts within a system; connections between concepts are made on the basis of their relations to more general concepts of which they are special cases rather than on empirical associations. The relations between concepts and objects are mediated by relations of the concepts to other concepts. In particular definitions of concepts, comparisons between concepts and their differentiation are constructed on the basis of the relations of these concepts to more general concepts, and not, on the basis of their most common examples. (DORIER, 2000, p. 211).

[158] The teaching of linear algebra at a university level is almost universally regarded as a frustrating experience for instructors and students alike. Many among those who teach such a course have resigned themselves to the fact that this is simply ‘the nature of the beast’ and that not much can be done to change things. This attitude might explain the reason why, until recently, there was a paucity of research work on the learning of linear algebra. Unlike the notions of calculus, which have been researched extensively, most of the research on learning and teaching linear algebra is relatively recent. (DORIER, 2000, p. 191).

> (...) as dificuldades dos alunos com álgebra linear são simplesmente decorrentes de sua inexperiência com demonstrações e teorias baseadas em demonstrações. De fato, as dificuldades dos alunos relacionadas com a demonstração incluem: não entender a necessidade de demonstrações nem as várias técnicas de demonstração; não sendo capaz de lidar com os quantificadores muitas vezes implícitos; confundindo condições necessárias e suficientes; fazendo generalizações precipitadas com base em evidências muito instáveis e escassas. (HILLEL *apud* DORIER, 2000, p. 191, tradução nossa)[159].

Sabe-se que na Matemática as demonstrações estão sempre presentes e a sua importância é defendida dentro deste contexto. Questiona-se, por outro lado, a forma como elas vêm sendo cobradas dos alunos, pois esse método leva a generalizações que nem sempre são convenientes. Ademais, o processo de generalização faz parte do desenvolvimento do pensamento teórico, pois os alunos precisam generalizar para depois estabelecer conexões. Contudo, ela – generalização – não deve ser apenas empírica, mas sim propiciar um desenvolvimento psíquico do sujeito, ou seja, deve ir além do que é apresentado na forma concreta:

> Saber a álgebra linear neste nível exige que os alunos comecem a pensar sobre os objetos e operações da álgebra, não apenas em termos de relações particulares entre matrizes, vetores e operadores, mas em termos de estruturas inteiras, como, espaços vetoriais sobre campos, álgebras e classes de operadores lineares. Além disso, os alunos precisam ser capazes de apreciar que essas estruturas podem ser transformadas, representadas de maneiras diferentes e consideradas como sendo, ou não, isomórficas. (DORIER, 2000, p. 192, tradução nossa)[160].

Para que os discentes desenvolvam essa habilidade, o professor precisa organizar o ensino de forma que os coloquem em atividade e acreditamos que conhecer o movimento lógico-histórico do que se pretende ensinar instrumentaliza o professor para organizar essas situações.

Como discutido ao longo deste estudo, é preciso mostrar a relação entre os conteúdos para ir além da disciplina de Álgebra Linear, pois como defendido por

---

[159] (...) students' difficulties with linear algebra stem simply from their inexperience with proofs and proof-based theories. Indeed, students' proof related difficulties include: not understanding the need for proofs nor the various proof techniques; not being able to deal with the often implicit quantifiers; confusing necessary and sufficient conditions; making hasty generalizations based on very shaky and sparse evidence. (DORIER, 2000, p. 191).

[160] The other important aspect of being a mathematical theory is its generality. Knowing linear algebra at this level demands that students start thinking about the objects and operations of algebra, not just in terms of relations between particular matrices, vectors and operators, but in terms of whole structures such as, vector spaces over fields, algebras, and classes of linear operators. Furthermore, students need to be able to appreciate that these structures can be transformed, represented in different ways and considered as being, or not being, isomorphic. (DORIER, 2000, p. 192).

Garding (1981), a raiz da Álgebra Linear está na Geometria Euclidiana e Analítica; portanto, é necessário pensar em estabelecer relações entre a Álgebra Linear e as Geometrias, pois, conforme a história nos mostra, a Álgebra Linear foi desenvolvida para resolver problemas de diversas áreas, relação esta que deve ser discutida em sala de aula e que não se evidencia nas ementas analisadas.

O DESVENDAR DESSA JORNADA

> *Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real. (Lobachevsky)*

Essa pesquisa reafirma a ideia de Lobachevsky de que todos os ramos da matemática podem ser aplicados ao mundo real, ao desvendar que os conteúdos que compõem a ementa da disciplina de Álgebra Linear foram e ainda são usados para satisfazer necessidades da humanidade. No entanto, nem todos conseguem vislumbrar essa Matemática no seu dia a dia, e a provável explicação para isso é que não há instrução adequada para revelar o que está intrínseco.

Por mais que a Álgebra Linear se apresente aos alunos como algo de difícil compreensão e sem aplicações práticas, foi possível, com essa pesquisa, confirmar a sua relevância para a formação do professor de Matemática e de tantas outras profissões. É sobre essas constatações que essa seção discorrerá.

A intenção é mostrar a relação dos elementos históricos, apresentados ao longo dos capítulos, com os lógicos, que estão postos nas Universidades, a fim de vislumbrar os motivos e necessidades que levaram estes conteúdos a estarem presentes na Universidade, e, assim, responder como se deu a constituição dos conteúdos que compõem a ementa da disciplina de Álgebra Linear nos cursos de licenciatura em Matemática das Universidades Federais brasileiras.

Na introdução desta dissertação, discutiu-se, inicialmente, o estigma que recai sobre a Álgebra Linear ao ser tida como uma “disciplina problema”, considerando que os alunos não compreendem a sua importância (CELESTINO, 2000).

No entanto, as pesquisas nessa área revelam-se recentes e insuficientes, fato que pode ser comprovado a partir do levantamento bibliográfico realizado pela pesquisadora nos sites BDTD e Capes, bem como de sua experiência enquanto aluna e, posteriormente, como professora da disciplina de Álgebra Linear. Com efeito, na introdução desta pesquisa, já puderam ser apontados elementos históricos da relação da Álgebra Linear com as Geometrias Euclidiana e Analítica consideradas por Garding (1981) como as raízes da Álgebra Linear, pois, no levantamento realizado no site da BDTD, surgem nos resultados estudos com o tema Geometria Algébrica voltados para os conteúdos matemáticos. Portanto, apesar de haver pesquisas que discutem essa relação, elas não tratam do ensino e do aprendizado da Álgebra Linear, o que igualmente não ocorre no contexto universitário vivenciado pela autora.

Essa relação das Geometrias com a Álgebra Linear ficou explícita ao longo do segundo capítulo, quando é apresentado o desenvolvimento histórico dos conteúdos que compõem a ementa da disciplina de Álgebra Linear e analisados os livros de Boldrini et al. (1980) e Callioli (1987), que usam o plano cartesiano, por exemplo, para explicar algumas definições. Contudo, essas obras em específico, por si só, não deixam claro que tudo surgiu a partir da geometria plana, dando a entender que a Geometria é usada apenas como um complemento, ao passo que a história nos apontou que ela se trata de verdadeiro fundamento para a Álgebra Linear.

Outra situação evidenciada como aluna, professora e pesquisadora, reforçada pelo relato histórico, é o quanto os conceitos de matriz, operações com matrizes, determinante, matriz inversa e sistemas de equações lineares são importantes para a compreensão dos demais conceitos que compõem a disciplina. Tão importantes que estão presentes desde o currículo do Ensino Médio, ou seja, não é por acaso que esses conteúdos fazem parte de praticamente todas as ementas analisadas no capítulo três e, também não por acaso, que estão presentes no sumário dos livros de Boldrini et al. (1980) e Callioli (1987).

Observa-se, ainda, uma vasta semelhança entre os conteúdos que compõem a maioria das ementas e os sumários desses livros (os mais citados). Isso nos leva a pensar que as ementas foram criadas baseadas no sumário dessas referências bibliográficas, ou seja, há uma influência desses autores sobre a organização das ementas.

Assim, ancorados no pensamento de que não há acasos, em especial na Ciência, e que as caminhadas são dotadas de motivos e necessidades – daí o ensinamento de Cora Coralina, de que o mais importante não é o ponto de partida, mas sim o caminho percorrido –, construiu-se o capítulo dois, que teve como objetivo mostrar como se deu o processo de desenvolvimento dos conteúdos que atualmente compõem a ementa da disciplina de Álgebra Linear.

Deste modo, considerando que esses conteúdos algébricos surgiram a partir de necessidades – no caso, para resolver algumas questões matemáticas (Análise, Física e Geometrias) em áreas diversas da época (artilharia, guerra, engenharia etc.) –, conclui-se que a Álgebra Linear é uma criação humana no sentido de agrupar, em uma mesma disciplina, conteúdos variados, que se relacionam, mas não surgidos na mesma época, tampouco no mesmo local. A humanidade não poupa esforços para sanar suas necessidades, sendo possível perceber situações em que o homem transformou o meio que vive para melhorar sua condição de vida. Isso porque o homem tem necessidades que excedem as básicas como alimentação, abrigo e reprodução, posto que as cria e recria ao longo de sua história. (MOURA, 2010).

Essa atividade humana, em grupo ou individualmente, em busca de melhores condições de vida, realiza-se segundo o conceito de atividade proposto por Leontiev, explicitado em Longarezi e Franco (2013), que ocorre se houver uma necessidade, um objeto e um motivo:

> O motivo é o que move o sujeito para satisfação de uma necessidade. Sem motivos e necessidades não existe atividade. A atividade supõe satisfação da necessidade e o motivo está relacionado com a satisfação de uma ou várias necessidades. Portanto, tem sua origem em uma necessidade. (LONGAREZI; FRANCO, 2013, p. 89).

Vale dizer que o indivíduo, para estar em atividade, precisa inicialmente de uma necessidade e um motivo que, juntos, serão responsáveis para que ele entre em atividade. Por exemplo, o homem ao se deparar com uma necessidade, adquirir um bem material, ele pode simplesmente ignorá-la e seguir adiante, alegando não ter condições financeiras, que nunca as terá e contentar-se ou adaptar-se àquela situação. Ou, então, encontrar motivos que o coloquem em atividade, como perceber que aquele bem é importante para sua família viver melhor e, diante disso, decide por trabalhar mais horas, economizar em algumas situações e criar uma poupança para este fim. O motivo criado pelo indivíduo será o responsável pela sua forma de agir para que ele consiga sanar a necessidade; desta feita, o motivo sem necessidade e a necessidade sem motivo não são suficientes para estar em atividade.

As necessidades humanas surgem a todo instante e os motivos que levam o homem a agir são modificados com o tempo, porque as necessidades “(...) podem ser interpretadas como sociais ou outras como biológicas, as quais, na maioria das vezes, podem ser comuns tanto aos homens quanto aos animais.” (CEDRO, 2008, p. 33). Logo, o motivo também estará relacionado às questões biológicas ou sociais, pois a necessidade de garantir a sobrevivência da espécie é elementar mas não única, posto que o homem não se contenta somente com isso: ele, a cada dia, mês e ano, cria novas necessidades para garantir, além da sua sobrevivência, a sua existência cultural (MOURA, 2010).

As novas necessidades e motivos vão surgindo e partem de inquietações pessoais. Não significa dizer que são puramente internas dos sujeitos, pelo contrário, a grande maioria advém das interações sociais do sujeito com o meio em que vive e com os demais sujeitos. “Sendo assim, o conceito de necessidade, originalmente biológico, transforma-se para o homem em necessidade histórico-cultural.” (MOURA, 2010, p. 17).

A produção de energia elétrica é um exemplo de atividade humana em busca de melhores condições de vida, pois se usava o fogo para preparar os alimentos, se aquecer e, ainda, como iluminação; no entanto, esses usos causavam transtornos, logo não era conveniente para as necessidades humanas. Moura (2011) cita esse exemplo da energia elétrica para nos ajudar a compreender o conceito de necessidade e perceber que “(...) o desejo de conhecer é do sujeito, mas este desejo está longe de ser fruto de um movimento puramente interno. Antes de ser do sujeito, ele é social” (MOURA, 2011, p. 50, tradução nossa)[161].

E mais: só é possível compreender essa atividade humana ao relacioná-la com a consciência:

> Nas relações entre a consciência e a atividade, a consciência é a forma especificamente humana do reflexo psíquico da realidade, ou seja, é a expressão das relações do indivíduo com o mundo social, cultural e histórico, que abre ao homem um quadro do mundo em que ele mesmo está inserido. A consciência refere-se, assim, à possibilidade humana de compreender o mundo social e individual como passíveis de análise. (MOURA, 2010, p. 20).

Assim, a capacidade do ser humano de refletir sobre sua ação no mundo como ser social e individual é geradora dessas novas necessidades humanas eclodidas com o passar do tempo.

Nesse contexto, ao longo desta dissertação, foi possível identificar esse movimento de constituição das necessidades humanas, pois a criação das Universidades, do curso de Matemática e dos conteúdos que atualmente fazem parte da ementa da disciplina de Álgebra Linear surgiram do processo de reflexão do homem sobre a sua própria atividade.

Ao conhecer parte dos estudos de Cauchy, por exemplo, é possível ver essa relação da consciência com a atividade, pois, após sistematizar o conceito de

---

[161] “El deseo de conocer es del sujeito, mas este deseo está lejos de ser fruto de un movimiento puramente interno. Antes de ser del sujeito, él es social” (MOURA, 2011, p. 50).

Determinante, o matemático deu continuidade aos estudos sobre matriz, pois não se contentou apenas com a primeira definição; no entanto, ele não continuou essa caminhada sozinho. Cauchy, Jacobi, Jordan, Weierstrass e outros matemáticos uniram-se e criaram a Teoria Espectral de Matrizes, mostrando que não se tratava de uma questão apenas individual, mas de uma necessidade de compreender o conhecimento para satisfazer uma questão social e individual.

Vale lembrar que todo o esforço desses matemáticos começou a partir do contato com os estudos de Euler, que os motivaram a investigar sobre o assunto. O empenho de tantos matemáticos é reconhecido atualmente, pois em praticamente todas as ementas são citadas as Matrizes.

No entanto, tudo isso só foi possível porque já havia a escrita, uma criação humana para o desenvolvimento da linguagem, que atualmente pode ser considerada elementar, pois é através dela que há compartilhamento dos conhecimentos com outros sujeitos.

Esse é o processo de humanização fundamentado pela Teoria Histórico-Cultural, em que os sujeitos, por meio da interação social, do contato com seus ascendentes, apropriam-se dos costumes de sua espécie e reproduzem no seu comportamento ações propriamente humanas. Ou, ainda, após a interação e a reflexão, é capaz de identificar as vantagens e desvantagens e modificar o meio para obter melhores condições de vida.

Transpondo essa realidade para o conhecimento matemático, os estudos de alguns cientistas, como os de Euler, inspiraram outros intelectuais que com seus esforços foram capazes de criar outras teorias baseadas nas obras de Euler e trouxeram novas contribuições para a comunidade Matemática.

Outro aspecto apontado nesta pesquisa, que mostra claramente esse movimento de apropriação dos conhecimentos já produzidos, é a história apresentada no primeiro capítulo. A criação da Universidade na Europa e, posteriormente, no Brasil, é uma necessidade social e individual, pois foi necessária uma organização para repassar os diversos conteúdos produzidos pelo homem ao longo de sua existência. A criação da Universidade é uma resposta a esse movimento de constituição, pois saber ler, escrever e contar já não mais satisfazia as necessidades humanas, que se reconfiguravam com a busca por melhores condições de vida, acúmulo de bens de valores, poder e domínio. Estas foram as motivações, por exemplo, para a organização de caravanas de navegação para a descoberta de novas terras durante a Idade Média, sendo o descobrimento do Brasil resultado desses anseios.

No entanto, essa prática marinha carecia de desenvolvimento para navegar nos oceanos, pois eram necessárias embarcações mais sofisticadas e maiores, e a astronomia e os conhecimentos matemáticos foram fundamentais para isso.

Após a chegada em terras desconhecidas, outras necessidades surgiram. No Brasil, por exemplo, a cultura dos nativos não era a mesma dos portugueses, o que, no entendimento dos dominadores, demandou certa padronização da linguagem e dos costumes para que se estabelecesse uma possível uma interação. Os jesuítas, assim, assumiram o papel não somente de catequizar os nativos quanto ao aspecto religioso, como também de ensinar a língua portuguesa e instruir os residentes da classe dominante, o que levou à criação pela Coroa portuguesa de instituições de ensino padronizadas e sistematizadas na Colônia.

No entanto, só essa instrução deixou de ser suficiente. Foi necessário, tempos depois, investir na formação superior dos brasileiros. Alguns estudantes receberam bolsas de estudo para cursarem o ensino superior na Universidade de Coimbra e, depois de formados, deveriam retornar ao Brasil para contribuir com o desenvolvimento do país.

Esse incentivo era uma forma de manter a hegemonia de Portugal na Colônia e impedir o desenvolvimento do ensino superior, porque mesmo com a criação de várias escolas de ensino secundário no Brasil e com ensino superior semelhante ao desenvolvido na Universidade Portuguesa, a comunidade acadêmica no Brasil e a sociedade, de um modo geral, insistiam para que o governo tornasse oficial a criação das Universidades no Brasil, de forma que os estudos brasileiros fossem equiparados aos europeus. Essa insistência na criação da Universidade é uma das respostas à necessidade humana de garantir a existência histórico-cultural de uma determinada sociedade e a difusão e reelaboração de determinados conhecimentos. Moura (2010) elucida a importância desse processo educativo:

> O processo educativo é central à formação do homem em sua especificidade histórica, pois permite que não seja necessário reinventar o mundo a cada nova geração, permite que se conheça o estágio de desenvolvimento humano atual para que se possa superá-lo. (MOURA, 2010, p. 27).

O processo educativo é necessário em uma sociedade para que os conhecimentos desenvolvidos pela humanidade sejam divulgados e aprimorados. Por conta de novas necessidades, os conhecimentos matemáticos foram difundidos no Brasil, até que em 1934 foi criado oficialmente o primeiro curso de Matemática na USP. Nesse sentido, a escola e a Universidade surgem com o propósito de difundir os conhecimentos historicamente construídos pelas diversas civilizações, com ações planejadas dos conceitos sistematizados, para propiciar aos sujeitos um desenvolvimento cultural.

Para que isso seja possível, o sujeito precisa estar em atividade, ou seja, o professor deve organizar o ensino de forma que o aluno sinta necessidade do conhecimento e, assim, construa um motivo para intencionalmente participar da busca pelo conhecimento. “O estudante não é, portanto, mero consumidor da aula ou objeto de trabalho do professor, mas é principalmente sujeito da atividade de aprendizagem” (MOURA, 2010, p. 31).

Por isso, o processo de ensino e aprendizagem deve levar em consideração diversos aspectos, como a seleção dos conceitos e as particularidades do pensamento humano, pois “apropriar-se do conteúdo do conceito e da forma de interação dele com a realidade não é um processo simples, exige uma mediação intencional sobre esses dois aspectos.” (SFORNI, 2004, p. 73).

Pensando nisso e no fato de que os Bourbaki tiveram grande influência sobre a criação do curso de Matemática no Brasil, conforme apresentado no primeiro capítulo, analisaram-se as propostas de Bento de Jesus Caraça e Konstantin Alekseevich Rybnikov para se conhecer perspectivas diferentes sobre a organização dos conteúdos matemáticos. Nas obras de Caraça e Rybnikov, é patente o olhar humanista e universalista para com o ensino e a aprendizagem da Matemática, e essa característica está associada à perspectiva teórica adotada nesta pesquisa.

A organização dos conteúdos nas obras analisadas reforça a importância dos conhecimentos básicos da Matemática, muitas vezes negligenciados na Universidade. No caso da Álgebra Linear, a seleção dos conteúdos prévios é essencial. Essa preocupação é perceptível nas obras de Caraça e Rybnikov, que podem ser usadas como referência para a organização do processo de ensino e aprendizado e como instrumento para a construção de ementas no ensino superior de Licenciatura em Matemática.

Em vista de todas essas informações, há fortes elementos históricos de que os conteúdos que atualmente compõem a ementa da disciplina de Álgebra Linear foram criados para solucionar problemas de outras áreas. Isso explica por que essa disciplina está presente na matriz curricular de tantos cursos de graduação das ciências exatas e o porquê da organização dos sumários dos livros de Boldrini et al. (1980) e de Callioli (1987). Essa conclusão pode ser extraída, por exemplo, da discussão de Leibniz sobre a ideia de matriz (sem usar esse termo) para resolver problemas de Análise. Assim, o matemático chegou a publicar uma prévia da definição de Determinantes, mas por alguns anos esses estudos ficaram parados, pois o foco desse estudioso não era problemas da Álgebra, razão pela qual esses estudos só foram descobertos muitos anos depois. (BOYER, 1974).

Na mesma época, há registros de que Peano também desenvolvia estudos que, de certa forma, detêm ligação com o raciocínio de Leibniz. Se Leibniz e Peano tivessem conhecido os trabalhos um do outro, certamente a definição de matrizes teria sido construída antes de Cauchy a sistematizar. Cauchy é considerado o fundador da Teoria dos Determinantes nos moldes atualmente utilizada (KLEINER, 2007).

Todos os elementos históricos e lógicos apresentados nesta seção reforçam a relevância dos conteúdos que compõem a ementa da disciplina de Álgebra Linear, para a formação do professor de Matemática. Após conhecer o movimento lógico-histórico, entende-se, ainda, que é possível explicar quais os motivos e as necessidades da inserção dessa disciplina na Universidade; esse fato pode ser usado pelo professor, permitindo que o aluno seja capaz de imprimir o sentido daquele conhecimento para a sua formação profissional.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A caminhada foi longa, intensa e percorreu caminhos diversos, até que se pudesse relacioná-los ao objeto de pesquisa e identificar as relações propostas. É chegada a hora de colher os frutos dessa caminhada e isso, longe de significar o fim das inquietações desta pesquisadora, trouxe novos questionamentos.

Ainda são necessárias tantas outras investigações para que haja um amadurecimento desejável que possibilite mudanças mais significativas na atuação docente – da pesquisadora e dos demais –, para que se possa relacionar o ensino da Álgebra Linear com o movimento de constituição dos conteúdos e com a formação inicial do professor de Matemática.

Sabe-se que a preocupação que moveu esta pesquisa diz respeito, deste modo, à atuação docente na disciplina de Álgebra Linear nos cursos de Licenciatura em Matemática, que se configurou no objeto de pesquisa. Com efeito, a experiência da autora, como professora e aluna, mostra que a disciplina está desvinculada do objetivo do curso de Licenciatura em Matemática e, por isso, é considerada de difícil compreensão, o que leva a concluir que há problemas no processo de ensino e aprendizagem da Álgebra Linear.

No entanto, para investigar sobre o processo de ensino e aprendizagem dessa disciplina, optamos por objetivo: analisar o movimento de constituição dos conteúdos que compõem a ementa da disciplina de Álgebra Linear nos Cursos de Licenciatura em Matemática das Universidades Federais Brasileiras, para compreender como ele se deu a fim de usá-lo como instrumentos para a organização do ensino e para uma formação docente capaz de superar os problemas existentes.

Sabe-se, por outro lado, que por trás da formação docente há vários aspectos a serem levados em consideração, entre eles, a necessidade de se conhecer o movimento lógico-histórico da criação da Universidade, o primeiro curso de Matemática no Brasil e a constituição dos conteúdos que atualmente compõem a ementa de Álgebra Linear para, ao final, proceder à análise das ementas.

Para tanto, mesmo detalhando com cuidado toda a jornada que seria percorrida com esta pesquisa, outros aspectos surgiram e mostraram-se tão importantes quanto os citados anteriormente; no entanto, seu estudo não foi possível devido a algumas limitações enfrentadas pela pesquisadora.

Um desses aspectos se refere à proposta de Caraça e Rybnikov, apresentada em suas obras. Após conhecê-las, seria interessante analisar mais minuciosamente os seus conteúdos e relacioná-los aos conteúdos que compõem a ementa da disciplina de Álgebra Linear, a fim de identificar as possíveis contribuições daquelas no seu processo de ensino e aprendizagem. A meu ver, ditas obras poderiam ser usadas na Universidade como uma introdução à disciplina, com o propósito de preparar os alunos para os conteúdos da Álgebra Linear. Por assim pensar, considerando que se trata de conteúdo que ampliaria, por demais, o escopo da atual pesquisa, é que pretendo fazer essa investigação em outro momento.

Outro aspecto não aprofundado, mas que igualmente pode contribuir para responder, na totalidade, à pergunta de pesquisa, diz respeito às obras de Boldrini e Callioli. Ao investigá-las com mais afinco, para além da análise do sumário, será possível compreender os motivos que movem tantas universidades federais a adotarem esses livros como referência bibliográfica básica e organizar suas ementas segundo eles.

Por conta da necessidade de maior aprofundamento nessas obras, observamos que não foi possível responder por completo como se deu a constituição dos conteúdos que compõem a ementa da disciplina de Álgebra Linear nos cursos de licenciatura em Matemática das Universidades Federais brasileiras.

No entanto, todo esse caminho percorrido trouxe novos conhecimentos que, de sua feita, proporcionaram novas reflexões e inquietações na professora pesquisadora, não somente no ensino da Álgebra Linear, mas no ensino de qualquer conhecimento matemático.

A título de exemplo, na sua atuação docente – à frente da disciplina de metodologia do ensino de Matemática, no curso de Licenciatura em Matemática em um campus do Instituto Federal[162] do seu estado –, foram propostas aos discentes a criação e a realização de uma oficina para o ensino de um conceito matemático qualquer, por eles escolhido. O primeiro passo a ser seguido por eles era a pesquisa bibliográfica: pesquisar a história do conceito matemático escolhido para que, antes de avançarem nas atividades das oficinas, conheçam o movimento lógico-histórico da constituição daquele conteúdo e, a partir desse conhecimento, as organizem. A experiência foi interessante, pois muitos dos alunos surpreenderam-se com os

[162] A pesquisadora atua como professora substituta nessa instituição.

motivos e as necessidades que levaram à criação do conhecimento matemático escolhido. O mesmo ocorreu com esta pesquisadora, pois, ao conhecer com mais detalhes o movimento de criação da Universidade no Brasil, compreendeu a importância de discutir a História da Educação no curso de Licenciatura, o que tem contribuído para a sua atuação no Ensino Superior.

Certamente, apreender os caminhos da constituição de qualquer conteúdo, como os definidos nas ementas, sejam eles da Matemática pura ou pedagógicos, traz relevantes contribuições para a organização do ensino, pois será instrumento do professor para responder a perguntas como: “por que esse conteúdo existe?”

Os conhecimentos adquiridos ao cursar as disciplinas da pós-graduação e pesquisar os diversos conteúdos teóricos para a produção dessa dissertação estão presentes na atuação profissional da pesquisadora, nas mais diversas disciplinas, desde as pedagógicas até as da Matemática pura, como, por exemplo, a Geometria Euclidiana, pois identificou-se a sua relação com a formação do professor de Matemática, visto que as demonstrações estudadas naquela disciplina explicam os motivos e as necessidades da criação dos Postulados de Euclides.

Assim, após analisar e compreender boa parte de como se deu o movimento de constituição dos conteúdos que compõem a ementa da disciplina de Álgebra Linear, algumas ideias sobre a organização do seu ensino passam a ser consideradas. Por ocasião do retorno às aulas dessa disciplina, a pesquisadora/professora pretende utilizar as obras de Caraça e Rybnikov, assim como os conhecimentos adquiridos sobre a necessidade de inserção da disciplina no contexto universitário no início e meados do século XX, visando estabelecer uma relação com as necessidades atuais e, por conseguinte, mostrar a relevância desses conteúdos para a formação do professor de Matemática. Como ainda não houve essa oportunidade, não é possível, por ora, averiguar se esses novos conhecimentos provocarão mudanças na sua atuação docente e contribuirão no processo de ensino e aprendizagem da Álgebra Linear.

Em vista do exposto, finaliza-se a pesquisa com a seguinte constatação: a análise do movimento lógico-histórico apresentado ao longo dessa dissertação mostra-nos claramente que a Álgebra Linear começou a ser desenvolvida e ensinada nas Universidades para resolver problemas práticos de diversos intelectuais, ou seja, para sanar problemas da Matemática pura e aplicada. Seus conteúdos sempre estiveram presentes nos cursos de Matemática e em outros das Ciências Exatas, bem como nos atuais cursos de Licenciatura em Matemática, o que demonstra, não gratuitamente, sua relevância na formação dos profissionais das exatas, bem como na formação do professor de Matemática.

Verificou-se, por outro lado, que o ensino dos conteúdos de forma desvinculada não possibilita a necessária relação entre os conceitos matemáticos da disciplina, o que dificulta o processo de ensino e aprendizagem, visto que dessa forma não ficam evidenciados os motivos e as necessidades de cada conteúdo para o aluno, discussão sem a qual ele não vê sentido em aprendê-los.

A consciência acerca desses fatos, por certo, rompe com a ideia de que a disciplina não seria importante para a formação do professor. Contudo, essa percepção, embora seja um importante início para o desvelar das soluções, não é suficiente para afastar por completo os gargalos do processo de ensino e aprendizagem que impedem a apreensão de seus conteúdos pelos alunos.

Desse modo, esta pesquisa não se encerra aqui, pois, não obstante a análise do movimento de constituição dos conteúdos que compõem a ementa da disciplina de Álgebra Linear aponte parte da resolução dos problemas enfrentados em sala de aula, ela, isoladamente, não propicia necessidades e motivos suficientes ao aluno quanto à sua pertinência na formação docente do professor de Matemática, visto que há outras questões que contribuem com a fragilidade dessa formação, a serem solucionadas, para, assim, a Álgebra Linear deixar de ser considerada “disciplina problema”.

REFERÊNCIAS

AMARAL, J. T. **Bento de Jesus Caraça –** Uma visão sobre o valor humano e o valor social da matemática e suas implicações. Tese (Doutorado em Educação)–Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo: São Paulo, 2014.

ANTON, H. **Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: Editora Campus, 1982.

ANTON, H.; BUSBY, R. C. **Álgebra Linear Contemporânea**, 8ª edição. Porto Alegre: Bookman, 2006.

ANTON, H.; RORRES, C. **Álgebra Linear com Aplicações**. 8ª edição. Porto Alegre: Bookman, 2001.

______. **Álgebra Linear com Aplicações**. 10ª Edição. Porto Alegre: Bookman, 2012.

APOSTOL, T. M. **Cálculo II**: Cálculo com funções de várias variáveis e Álgebra Linear com aplicações às equações diferenciais e às Probabilidades. Waltham: Reverté, 1996.

AZEVEDO, F. D. **A cultura brasileira**. 5ª ed. São Paulo: USP, v. I, 1894.

BASTOS, T. R. **A concretização do abstrato:** história da institucionalização das Ciências Matemáticas. Belo Horizonte: Argvmentvm, 1980.

______. **A concretização do abstrato:** história da institucionalização das ciências matemáticas. 1ª. ed. Belo Horizonte: Argvmentvm, v. Único, 2006.

BOLDRINI, J. L. et al. **Álgebra Linear**. São Paulo: Harbra. 1980.

______. **Álgebra Linear**. São Paulo: Harbra. 1984.

______. **Álgebra Linear.** 3. ed. São Paulo: Harbra, 1986.

______. **Álgebra Linear**. São Paulo: Editora Harper & Row do Brasil Ltda., 1978.

BOULOS, P.; CAMARGO, I. **Geometria analítica**: Um Tratamento Vetorial. São Paulo: Mac Graw-Hill. 1987.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** 3. Ed. São Paulo: Blucher. 488 p. 1974.

BRASIL. Decreto nº 11.530, de 18 de Março de 1915. **Reorganiza o ensino secundário e o superior na República**, 1915. Disponível em: <http://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1910-1919/decreto-11530-18-marco-1915-522019-republicacao-97760-pe.html>. Acesso em: 14 out. 2017.

BRASIL. Decreto n. 16.782-A, de 13 de Janeiro de 1925. **Estabelece o concurso da União para a difusão do ensino primário, organiza o Departamento Nacional do Ensino, reforma o ensino secundário e superior e dá outras providências**, 1925. Disponível em: <http://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1920-1929/decreto-16782-a-13-janeiro-1925-517461-publicacaooriginal-1-pe.html>. Acesso em: 14 out. 2017.

BRASIL. Decreto n. 6.283 de 25 de janeiro de 1934. **Cria a Universidade de São Paulo e dá outras providências**. 1934. Disponível em: <http://citrus.uspnet.usp.br/leginf/criacao/decreto6283.htm>. Acesso em: 28 abr. 2017.

BRASIL. Decreto n. 8.659, de 5 de Abril de 1911. **Aprova a Lei Orgânica do Ensino Superior e do Fundamental na República.** Disponível em: <http://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1910-1919/decreto-8659-5-abril-1911-517247-publicacaooriginal-1-pe.html>. Acesso em: 14 out. 2017.

BRASIL. Decreto n. 981, de 8 de Novembro de 1890. **Aprova o Regulamento da Instrução Primária e Secundaria do Distrito Federal.** Disponível em: <http://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1824-1899/decreto-981-8-novembro-1890-515376-publicacaooriginal-1-pe.html>. Acesso em: 15 out. 2017.

BRASIL. Decreto-Lei n. 12.511, de 21 de janeiro de 1942. **Reorganiza a Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo.** Disponível em: <http://www.al.sp.gov.br/repositorio/legislacao/decreto.lei/1942/decreto.lei-12511-21.01.1942.html>. Acesso em: 15 maio 2017.

BRASIL. Decreto-lei n. 9.092, de 26 de março de 1946. **Amplia o regime didático das faculdades de filosofia, e dá outras providências.** 1946. Disponível em: <http://www2.camara.leg.br/legin/fed/declei/1940-1949/decreto-lei-9092-26-marco-1946-416948-publicacaooriginal-1-pe.html>. Acesso em: 31 out. 2017.

CALLIOLI, C. A; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. C. F **Álgebra Linear e aplicações**. São Paulo: Atual, 1977.

______. **Álgebra Linear e Aplicações**. São Paulo: Nova Edição, 1989.

______. **Álgebra Linear e Aplicações**. 6. ed. São Paulo: Atual, 1990.

______. **Álgebra Linear e Aplicações**. São Paulo: Atual, 1991.

______ **Álgebra Linear e Aplicações**. 6. ed. São Paulo: Atual, 1995.

______. **Álgebra Linear e aplicações**. 6. ed. São Paulo: Atual, 1997.

______. **Álgebra Linear e Aplicações**. São Paulo: Atual, 1998.

______. **Álgebra Linear e aplicações**. 7. ed. São Paulo: Atual, 2000.

______. **Álgebra Linear e Aplicações**, 6. ed. São Paulo: Atual, 2010.

______. **Álgebra Linear e Aplicações**. 6. Ed. Reform. São Paulo: Atual, 2013. 352 p.

CARAÇA, B. J. **Lições de álgebra e análise**. Vol. I. 4ª edição. Depositório Geral Livraria Sá da Costa: Lisboa, 1959.

______. **Lições de álgebra e análise**. Vol. II – Fasc. 1º. Funções, limites, continuidade. Depositório Geral Livraria Sá da Costa. Lisboa, 1954.

CARLEN, E. A.; CARVALHO, M. C. **Álgebra Linear**: desde o início. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

CARMO, M. P. **Trigonometria, Números Complexos**. Coleção do professor de Matemática. SBM. 1992.

CARVALHO, J P. **Introdução à Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S. A. 1972.

CARVALHO, J. P. **Álgebra Linear**. LTC, RJ, 2000.

______. Álgebra Linear. Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico S.A e Editora Universidade de Brasília, 1979.

CAVALARI, M. F. **As contribuições de Chaim Samuel Honig para o desenvolvimento da Matemática Brasileira**. Tese (Doutorado em Educação Matemática)–Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho: Rio Claro, 2012.

CAVALARI, M. F. Um histórico do Curso de Matemática da Faculdade de Filosofia Ciências e Letras (FFCL) da Universidade de São Paulo (USP). **Revista Brasileira de História da Matemática**, Vol. 12, n. 25 (agosto/2012 – dezembro/2012) - p. 15-30: Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2012.

CEDRO, W. L. **O motivo e a atividade de aprendizagem do professor de Matemática:** uma perspectiva histórico-cultural. Tese (Doutorado em Educação)–Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo: São Paulo, 2008.

CELESTINO, M. R. **Ensino-aprendizagem da Álgebra Linear:** as pesquisas brasileiras na década de 90. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)–Pontifícia Universidade Católica de São Paulo: São Paulo, 2000.

CHARLE, C.; VERGER, J. **História das Universidades**. Tradução de Elcio Fernandes. 1ª. ed. São Paulo: Universidade Estadual Paulista, v. I, 1996.

COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. **Um curso de Álgebra Linear**. São Paulo: EDUSP, 2002.

______. **Um curso de Álgebra Linear**. São Paulo: EDUSP, 2005.

______. **Um curso de Álgebra Linear.** São Paulo: EDUSP, 2007.

CUNHA, L. A. **A Universidade Temporã:** da Colônia à Era de Vargas. 1ª. ed. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, v. 1, 1980.

D'AMBROSIO, U. **Uma história concisa da Matemática no Brasil.** 2ª. ed. Petrópolis: Vozes, v. Único, 2011.

DEMIDOV, S. S.; LASKOVAYA, T. A.; RYBNIKOV, A. K.; RYBNIKOV, K. K. Creative Path of Konstantin Alekseevich Rybnikov (18.08.1913–20.08.2004), Chebyshevskii Sb. 15:4 (2014), 148–179. Disponível em: <http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=cheb&paperid=363& option_lang=eng>. Acesso em: 19/05/2018.

DORIER, J. L. **On the Teaching of Linear Algebra**. [S.l.]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, v. 23, 2000.

______. Genèse se des premiers espaces vectoriels de fonctions. **Revue d'histoire des mathématiques**, 2, p. 265–307. Paris, 1996.

EVES, Howard W. **Introdução à história da Matemática.** Campinas: Editora da Unicamp, 643 p. 2004.

FAZENDA, I. **Metodologia da Pesquisa Educacional**. São Paulo: Cortez, 2000.

FONSECA, T. N. D. L. **As reformas pombalinas no Brasil**. 1ª. ed. Belo Horizonte: Mazza Edições, v. I, 2011. 272 p.

GARDING, L. **Encontro com a Matemática.** Tradução de Célio Alvarenga e Maria Manuela Alvarenga. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 232p. 1981.

GILLISPIE, C. C. **Dicionário de biografias científicas**. Tradução Carlos Almeida Pereira. Rio de Janeiro: Contraponto, 2007.

GONÇALVES, A. **Introdução à Álgebra**. Rio de Janeiro: MPA/SBM, 1979.

HALMOS, P. R. **Espaços Vetoriais de Dimensão Finita**. Rio de Janeiro: Ed. Campus Ltda., 1978.

HEFEZ, A.; FERNANDES, C. S. **Introdução à álgebra linear**. 1ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

______. **Álgebra Linear**. Livro texto do PROFMAT. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016.

HILLEL, J. Modes of Description and the Problem of Representation in Linear Algebra. *In:* DORIER, J. L. **On the Teaching of Linear Algebra**. [S.l.]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, v. 23, 2000.

HOFFMAN, K.; KUNZE, R. **Álgebra Linear**. Tradução de Adalberto P. Bergamasco. São Paulo: Polígono S.A., 1970.

______. **Álgebra Linear**. 2ª Ed. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1979.

______. **Álgebra Linear**. Rio de Janeiro, LTC editora, 1976.

IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar**. Vol.4. São Paulo: Atual, 2012.

KAPLAN, Wilfred; LEWIS, Donald J. **Cálculo e Álgebra Linear**, volume III. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora (1974 [1971]).

KLEINER, I. **A History of Abstract Algebra.** Boston: Birkhäuser, 2007. 168p.

KOLMAN, B. **Introdução à Álgebra Linear com Aplicações**. 6 ed. Rio de Janeiro: Prentice Hall do Brasil, 1998.

KOLMAN, B.; HILL, D. R. **Introdução à Álgebra Linear com Aplicações**. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

KOPNIN, P. V. **A dialética como Lógica e Teoria do Conhecimento.** Tradução de Paulo Bezerra. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. A. **Fundamentos de Metodologia Científica**. São Paulo: Atlas, 2002.

LANG. S. **Álgebra Linear**. Traduzido da 3ª Edição em Inglês. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2003.

LAY, D. C. **Álgebra Linear e suas Aplicações**, 4a edição. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

______. **Álgebra Linear e suas Aplicações**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

______. **Álgebra Linear e suas Aplicações**. 2ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 1999.

LEITE, S. **História da Companhia de Jesus no Brasil.** Belo Horizonte: Ed. Itatiaia, 2006.

LEMME, P. O manifesto dos Pioneiros da Educação Nova e suas repercussões na realidade educacional brasileira**. Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, v. 86, n. 212, p. 163-178, jan/abr: Brasília, 2005.

LEON, S. J. **Álgebra linear com aplicações**. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999.

LIMA, E. L. **Álgebra Linear**. Coleção Matemática Universitária: IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1995.

______. **Álgebra Linear**. Coleção Matemática Universitária: IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1996.

______. **Álgebra Linear com Aplicações**. Rio de Janeiro: LTC, 1998.

______. **Álgebra Linear**. Coleção Matemática Universitária: IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1998.

______ **Álgebra Linear**. Coleção Matemática Universitária: IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2000.

______. **Álgebra Linear**. Coleção Matemática Universitária: IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2001.

______. **Geometria analítica e álgebra linear**. Coleção Matemática Universitária: IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2001.

______. **Álgebra linear com aplicações**. 8ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

______. **Álgebra Linear**. Coleção Matemática Universitária: IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2012.

______. **Álgebra Linear**. Coleção Matemática Universitária: IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2014.

______. **Álgebra Linear**. 9ª ed. Coleção Matemática Universitária: IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2016.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Vol.3. Cidade: Publicação SBM, 2006.

LIPSCHUTZ, S. **Álgebra Linear**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1980.

______. **Álgebra Linear**. Porto Alegre: Bookman, 2004.

______. **Álgebra Linear**: Teoria e Problemas. 3a ed. São Paulo: Makron Books, 1994.

______. **Álgebra Linear**. Rio de Janeiro, McGraw-Hill do Brasil. 1974.

LIPSCHUTZ, S.; LIPSON, M. **Álgebra Linear**. 4. Ed. Porto Alegre: Bookman, 2011. 432 p.

LONGAREZI, A.; FRANCO, P. A. N. Leontiev: a vida e a obra do psicólogo da atividade. In: LONGAREZI, A. P. R. **Ensino desenvolvimental:** vida, pensamento e obra dos principais representantes russos. Uberlândia: EDUFU, 2013.

LOPES, E. M. T.; FARIA FILHO, L. M. D.; VEIGA, C. G. **500 anos de Educação no Brasil**. 3ª. ed., v. I. Belo Horizonte: Autêntica, 2003. 608 p.

MOORE, G. H. **The Axiomatization of Linear Algebra:** 1875 – 1940. Historia Mathematica, v. 22, n. 3, p. 262 - 303. Ontário, 1995.

MORETTI, V. D.; RADFORD, L. História do Conceito culturalmente significada e a Organização da Atividade de Ensino de Matemática**. Anais do VI SIPEM**. Pirenópolis: 2015.

MOURA, M. O. D. **A Atividade pedagógica na Teoria Histórico-Cultural**. Brasília: Liber livro, 2010. 178 p.

______. Educar con las matemática: saber específico y saber pedagógico. **Revista Educación y Pedagogía**, Medellín, v. 23, n. 59, p. 47-57, enero-abril 2011. ISSN 59.

______. **Educação escolar e pesquisa na Teoria Histórico-Cultural.** 1ª. ed. v. único. São Paulo: Edições Loyola, 2017.

NICHOLSON, W. Keith. **Álgebra Linear**. Mac Graw-Hill. Sao Paulo. 2006.

NITRINI, S. M. **Anuário 1934-1935 FFCL-FFLCH/USP**. São Paulo: FFLCH-USP, 2009.

NOBLE, B.; DANIEL, J. W. **Álgebra Linear Aplicada**, 2ª ed. Prentice Hall do Brasil, Rio de Janeiro, 1986.

OLIVEIRA, B. **A dialética do Singular-Particular-Universal**. [S.l.]: Petrópolis: Vozes, 2005.

OLIVEIRA, M. C. A.; SILVA, M. C. L.; VALENTE, W. R. **O Movimento da Matemática Moderna:** história de uma revolução curricular. 1ª. ed. v. único. Juiz de Fora: UFJF, 2011.

OLIVEIRA, V. C. A. **Sobre a produção de significados para a noção de Transformações Linear em Álgebra Linear**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)–Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista: Rio Claro, 2002.

PAIGE, Lowell J.; SWIFT, J. Dean. **Elements of linear algebra**. Toronto, Blaisdell Publishing Company. 1961.

PARGA, P. **Álgebra Linear Básica**. 3a edição. EDUR. Belo Horizonte: Seropédica, 2011.

PIMENTA, S. E.; ANASTASIOU, L. **Docência no Ensino Superior**. São Paulo: Cortez, 2005.

PIRES, R. C. **A presença de Nicolas Bourbaki na Universidade de São Paulo**. Tese (Doutorado em Educação Matemática)–Pontifícia Universidade Católica de São Paulo: São Paulo, 2006.

POOLE, David. **Álgebra linear**. 1. ed. São Paulo: Thomson, 2004.

POSTNIKOV, Mikhail. **Lectures in Geometry, second semester**: linear algebra and differential geometry. Moscovo, Mir (Peace Publishers). 1982.

REVUZ, A. **Matemática moderna, Matemática viva**. Tradução de A. Simões Neto. Rio de Janeiro: Fundo de Cultura, 1967.

RIBNIKOV, K. **Historia de las Matemáticas.** Tradução de Valdés Castro. Moscou: Editorial Mir. 488 p., 1987.

SANTOS, R. J. **Álgebra Linear e Aplicações**. Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2006.

SFORNI, M. S. F. **Aprendizagem conceitual e organização do ensino:** contribuições da Teoria da Atividade. Araraquara: JM Editora, 2004.

SIERPINSKA, A. On Some Aspects of Students' Thinking In Linear Algebra. *In:* DORIER, J.L. **On the Teaching of Linear Algebra**. [S.l.]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, v. 23, 2000.

SILVA, C. P. **A matemática no Brasil:** história de seu desenvolvimento. 3ª. ed. São Paulo: Edgard Blucher, v. Único, 2003.

SOUSA, M. C. **O ensino da Álgebra numa perspectiva lógico-histórica:** um estudo das elaborações correlatas de professores do Ensino Fundamental. Tese (Doutorado em Educação)–Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas: Campinas, 2004.

SOUSA, M. C.; PANOSSIAN, M. L.; CEDRO, W. L. **Do movimento lógico e histórico à organização do ensino:** o percurso dos conceitos algébricos. Campinas: Mercado de Letras, 2014.

STEINBRUCH, A. e WINTERLE, P. **Álgebra Linear**. 2a ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 1987.

STEINBRUCH, A. **Álgebra Linear**. São Paulo, McGraw-Hill, 1987.

STRANG, G. **Álgebra Linear e suas aplicações**. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

STRANG, Gilbert. **Introdução à Álgebra Linear**. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

TAVARES, A. L. **Brasil- França, ao longo de 5 séculos**. Rio de Janeiro: Biblioteca do Exército, 1979.

TUBINO, M. J. G. et al. **A Universidade Ontem e Hoje**. 1ª. ed. São Paulo: IBRASA, v. I, 1984.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. **Anuário da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras – 1939–1949**. Volumes I e II, São Paulo: Secção de Publicações, 1953.

VALENTE, W. R. **Uma história da matemática escolar no Brasil, 1730-1930.** 2ª. ed. São Paulo: Annablume. FAPESP, v. Único, 2007.
VALLADARES, Renato J. C. **Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S.A, 1990.

VYGOTSKI, L. S. **Obras escogidas.** Tomo III. Tradução de Lydia Kuper. Madrid: Visor Dist. S. A., 1995.

WAERDEN, B. L. V. D. **Modern algebra**. New York: F. Ungar, 1949-1950.

ZANELLA, A. V. E. A. Questões de Método em Textos de Vygotski: contribuições à pesquisa em psicologia. [S.l.]. **Psicologia & Sociedade,** 19 (2): 25-33, 2007.

ZOTTI, S. A. **Sociedade, educação e currículo no Brasil:** dos jesuítas aos anos de 1980. 1ª ed. Campinas: Autores Associados. Brasília, DF: Editora Plano, v. único, 2004.