UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE FÍSICA

Soluções Localizadas em Modelos de Campos Relativísticos e em Condensados de Bose-Einstein

Wesley Bueno Cardoso

Goiânia - 2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE FÍSICA

Soluções Localizadas em Modelos de Campos Relativísticos e em Condensados de Bose-Einstein

Wesley Bueno Cardoso

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Goiás como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Doutor em Física.

ORIENTADOR: *Prof. Dr. Ardiley Torres Avelar*
CO-ORIENTADOR: *Prof. Dr. Dionisio Bazeia*

Goiânia - 2010

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
GPT/BC/UFG

Cardoso, Wesley Bueno.
C268s Soluções localizadas em modelos de campos relativísticos e em condensados de Bose-Einstein [manuscrito] / Wesley Bueno Cardoso. - 2010.
xi, 95 f. : figs.

Orientador: Prof. Dr. Ardiley Torres Avelar: Co-Orientador: Prof. Dr. Dionisio Bazeia Filho (UFPB).
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Goiás, Física, 2010.
Bibliografia.

1. Teoria de Campos 2. Sólitons 3. Condensados de Bose-Einstein. I.Título

CDU:535

"O único homem que está isento de erros, é aquele que não arrisca acertar."

Albert Einstein

À minha esposa Angelita e à minha filha Alice.

Agradecimentos

- Primeiro a Deus.
- Aos meus pais Wilzon Bueno Cintra e Ivair Cardoso de Jesus Cintra por todo incentivo e carinho demonstrados durante minha vida.
- À minha grande companheira Angelita Freitas de Melo por seu amor, carinho e pela paciência nos momentos de ausência.
- Os mais sinceros agradecimentos ao meu orientador Prof. Dr. Ardiley Torres Avelar e ao co-orientador Prof. Dr. Dionisio Bazeia, pela sugestão do tema, paciência, amizade e orientação exemplar.
- A todos os colaboradores e em especial aqueles que contribuíram diretamente para esse trabalho, tais como, Prof. Dr. Laércio Losano, Prof. Dr. Roberto Menezes e Prof. Dr. Salviano A. Leão.
- Aos Professores do Grupo de Óptica Quântica e Teoria de Campos.
- Aos companheiros de Doutorado.
- Ao Instituto de Física da UFG pela oportunidade.
- À CAPES pela concessão da bolsa.
- Ao CNPq pelo auxílio financeiro através do projeto nº 476965/2008 (Edital MCT).

Resumo

Este trabalho reúne alguns dos resultados obtidos sobre o estudo de sólitons em modelos de campos escalares relativísticos e em condensados de Bose-Einstein. Com o uso de um formalismo de primeira ordem para a equação de movimento de campos relativísticos, introduzido anteriormente por nosso grupo, construímos várias classes de soluções do tipo *lump* para um único campo escalar real. Mostramos que as formas dessas soluções podem ser controladas dependendo de um único parâmetro no potencial de campo utilizado. Em matéria condensada as soluções do tipo *lump* correspondem a sólitons brilhantes, muito estudados no contexto de cristais não-lineares, fibras ópticas, condensados de Bose-Einstein, etc. Em todos esses casos tais soluções são obtidas através da equação não-linear de Schrödinger, responsável por descrever a propagação de pulsos, em cristais ou fibras ópticas, ou a densidade atômica, no caso de condensados. Nesse sentido, nosso objetivo principal consiste no estudo da modulação de sólitons e *breathers* através da equação não-linear de Schrödinger. Nossa concentração é nos condensados de Bose-Einstein nos quais a modulação da densidade atômica pode ser realizada através da ressonância de Feshbach. Estudamos casos onde a não-linearidade é descrita por termos cúbico, cúbio e quíntico e puramente quíntico na equação não-linear de Schrödinger. Investigamos também situações onde dois condensados podem interagir e as ENLS estão acopladas, modulação de *breathers* e o estudo da influência de ruídos caóticos, aleatórios e não-periódicos na não-linearidade do sistema para o comportamento do sóliton. Na maior parte deste trabalho consideramos o condensado aprisionado na forma de charuto, isto é, com liberdade em apenas uma dimensão espacial. Simulações numéricas foram realizadas para verificar a estabilidade das soluções.

Abstract

This work combines some of the results obtained on the study of solitons in relativistic fields and Bose-Einstein condensates. By using a first order formalism to solve the equations of motion of relativistic fields, introduced previously by our group, we construct several classes of lump solutions described by a single real scalar field. We show how these solutions can be controlled depending on a single parameter in the field potential. In condensed matter the solutions of the lump type correspond to bright solitons, very studied in the context of nonlinear crystals, fiber optics, Bose-Einstein condensates, etc. In all these cases, such solutions are obtained via a nonlinear Schrödinger equation, responsible for describing the propagation of pulses in optical fibers or crystals, or the atomic density in condensates. In this sense, our main goal is to study the soliton and breather modulations via nonlinear Schrödinger equation. We concentrate on the Bose-Einstein condensate in which the modulation of atomic density can be accomplished through the Feshbach resonance. We study cases where the nonlinearity is described by terms cubic, cubic and quintic, and purely quintic in the nonlinear Schrödinger equation. Also, situations where two interacting condensates in which the nonlinear Schrödinger equations are coupled, breather modulations, and the study of the soliton behavior under influence of chaotic, random and non-periodic perturbations in the nonlinearity of the system. In many cases we consider the condensate trapped in the cigar-shaped configuration, i.e., with freedom in only one spatial dimension. Numerical simulations are performed to verify the stability of the solutions.

Trabalhos resultantes desta Tese

Segue a lista de trabalhos resultantes desta Tese:

- A. T. Avelar, D. Bazeia, W. B. Cardoso, L. Losano, *Lump-like Structures in Scalar-field Models in 1+1 Dimensions*, Phys. Lett. A **374**, 222 (2009).
- A. T. Avelar, D. Bazeia, W. B. Cardoso, *Solitons with cubic and quintic nonlinearities modulated in space and time*, Phys. Rev. E **79**, 025602(R) (2009).
- W. B. Cardoso, A. T. Avelar, D. Bazeia, *Bright and Dark Solitons in a Periodically Attractive and Expulsive Potential with Nonlinearities Modulated in Space and Time*, Nonlinear Analysis: Real World Applications (2010), doi:*10.1016/j.nonrwa.2010.05.013*
- W. B. Cardoso, A. T. Avelar, D. Bazeia, M. S. Hussein, *Solitons of two-component Bose-Einstein condensates modulated in space and time*, Phys. Lett. A **374**, 2356 (2010).
- W. B. Cardoso, A. T. Avelar, D. Bazeia, *Modulation of breathers in cigar-shaped Bose-Einstein condensates*, Phys. Lett. A **374**, 2640 (2010).
- W. B. Cardoso, S. A. Leão, A. T. Avelar, D. Bazeia, M. S. Hussein, *Nonlinear Schrödinger equation with chaotic, random, and nonperiodic nonlinearity*, submetido.

Trabalhos futuros:

- A. T. Avelar, D. Bazeia, W. B. Cardoso, *Modulation of breathers in the three-dimensional nonlinear Schrödinger equation with varying potential and nonlinearity*, em preparação.
- W. B. Cardoso, S. A. Leão, A. T. Avelar, D. Bazeia, M. S. Hussein, *Non-polynomial Schrödinger equation under chaotic, random, and nonperiodical modulation*, em preparação.

Lista de Abreviações

1D ..... unidimensional ou dimensão 1
3D ..... tridimensional ou dimensão 3
BEC ..... condensados de Bose-Einstein (*Bose-Einstein condensate*)
CQ ..... cúbica e quíntica
DFSP ..... diferenças finitas com separação de passo
GPE ..... equação de Gross-Pitaevskii (*Gross-Pitaevskii equation*)
NLSE ..... equação não-linear de Schrödinger (*nonlinear Schrödinger equation*)
NPSE ..... equação de Schrödinger não-polinomial (*nonpolynomial Schrödinger equation*)
KDV ..... Korteweg-de Vries
SH ..... Serkin e Hasegawa
BPVK ..... Belmonte-Beitia, Pérez-García, Vekslerchik, e Konotop

Lista de Figuras

2.1 Representação gráfica (a) do potencial (2.13) e (b) das soluções tipo *lump* (2.15) e (2.16). Os valores do parâmetro a são $a = 0.5$ para a linha solida (vermelha), $a = 1$ para a linha tracejada (azul) e $a = 1.3$ para a linha ponto-traço (preta). 12

2.2 Gráficos das densidades de energia das soluções tipo *lump* (2.15) em (a) e (2.16) em (b), para os mesmos valores do parâmetro a dados na Fig. 2.1. Em (c) ilustramos como a energia total E_1 e E_a [veja (2.19)] varia com o parâmetro a, com a linha sólida (vermelha) e tracejada (azul), respectivamente. 12

2.3 Ilustração do potencial (2.22) para (a) n ímpar e para (b) n par. Para n ímpar, usamos $n = 1$ na linha sólida (vermelha), $n = 3$ na linha tracejada (azul) e $n = 5$ na linha ponto-traço (preta). Para n par, usamos $n = 2$ na linha sólida, $n = 4$ na linha tracejada (azul) e $n = 6$ na linha traço-ponto (preta). 14

2.4 Soluções tipo lump dadas pela Eq.(2.24) para (a) n ímpar e para (b) n par. Consideramos as mesmas convenções utilizadas na Fig. 2.3. . 14

2.5 Densidades de energia dadas por Eq. (2.25) para (a) n ímpar e para (b) n par. Conside- ramos as mesmas convenções usadas na Fig.3. Em (c) ilustramos a energia total Eq.(2.27) em função de n. 15

2.6 Gráficos do potencial (2.28) para (a) n ímpar e para (b) n par, descritos com as mesmas convenções usadas na Fig. 2.3. 16

2.7 Gráficos das soluções tipo *lump* dados pela Eq. (2.30) para (a) n impar e para (b) n par. Consideramos as mesmas convensões adotadas na Fig. 2.3. 16

2.8 Densidade de energia dada pela Eq. (2.31) para (a) n ímpar e para (b) n par. Consideramos as mesmas convenções usadas na Fig. 2.3. Em (c) mostramos a energia total dada pela Eq. (2.33) em função de n. 17

2.9 Gráficos do potencial (2.34) para (a) $r = 1/3$ com a linha sólida (vermelha), $r = 1$ com a linha tracejada (azul) e $r = 5/3$ com a linha ponto-traço (preta) e para (b) $r = 2/3$ com a linha sólida (vermelha), $r = 4/3$ com a linha tracejada (azul) e $r = 2$ com a linha ponto-traço (preta). 18
2.10 Soluções dadas pela Eq. (2.36) para (a) e (b) com a mesma convenção da Fig. 2.9. 18
2.11 Densidade de energia dada pela Eq. (2.37) para (a) e (b) com a mesma convenção da Fig. 2.9. Em (c) mostramos a energia total calculada uando (2.40) em função de r. Este gráfico é representado removendo a contribuição do pedestal. 19

3.1 Solução tipo sóliton (a) brilhante e (b) escuro da Eq. (3.31). 29
3.2 Solução tipo breather dado pela Eq. (3.34). 30
3.3 Ressonância de Feshbach. Cálculo do comprimento de espalhamento em função do campo magnético para átomos de ^{7}Li no estado (1, 1). Figura retirada da Ref. [44]. 32

4.1 Gráficos de $\Phi(\zeta)$ para o sóliton brilhante (a) (azul, linha sólida) e a $\mathrm{sech}(\zeta)$ (vermelha, linha tracejada), e para o sóliton escuro (b) (azul, linha sólida) e a $\tanh(\zeta)$ (vermelha, linha tracejada). 39
4.2 Gráficos do potencial de armadilhamento $v(x,t)$ dado pela Eq. (4.24) para o sóliton brilhante ressonante (a) e pela Eq. (4.27) para o sóliton escuro ressonante (b), seguindo os intervalos $-3 < x < 3$ e $0 < t < 20$. 39
4.3 Gráficos de $|\Psi(x,t)|^2$ para o sóliton brilhante ressonante, usando $\epsilon = 0.5$ e $\omega_0 = 1$ (a), e do sóliton brilhante com batimento, usando $\epsilon = 0$ (b). Os dados iniciais para a Eq. (4.18) são $\chi(0) = \sqrt{2}$ e $d\chi/dt(0) = 0$. 40
4.4 Gráficos do $|\Psi(x,t)|^2$ para o sóliton escuro ressonante, usando $\epsilon = 0.5$ e $w_0 = 1$ (a) e do sóliton escuro com batimento, usando $\epsilon = 0$ (b). Usamos os dados iniciais para a Eq. (4.18) da mesma forma que a Fig. 4.3. 41
4.5 Gráfico do $|\Psi(x,t)|^2$ para o sóliton escuro quase periódico, com $\varepsilon = 0.5$ e $\omega_0 = \sqrt{2}/2$ na Eq. (4.20) (a). O comportamento quase-periódico é melhor compreendido no painel (b). Usamos os dados iniciais da Eq. (4.18) assim como na Fig. 4.3. 42

4.6 Gráfico do $|\Psi(x,t)|^2$ para o sóliton escuro com batimento se movendo (a). O movimento do centro de massa pode ser melhor observado no painel (b). Usamos os dados iniciais para a Eq. (4.18) conforme aqueles da Fig. 4.3. 42
4.7 Gráfico de $\omega(t)$ nas linhas preta (tracejada) e azul (sólida), para $\alpha = 0.1$ e $\beta = 0$, e para $\alpha = \beta = 0.1$, respectivamente. 45
4.8 Gráfico de $v(x,t)$ na presença de não-linearidade cúbica, com $\lambda = 0.5$ para $\omega(t)$ periódico, como mostrado na Fig. 4.7. A figura (a) corresponde à Eq. (4.38) para sólitons brilhantes e a figura (b) corresponde à Eq. (4.40) para sólitons escuros. 46
4.9 Gráfico de $v(x,t)$ como na Fig. 4.8, porém, agora, para $x \in (-2,2)$, para expor o comportamento do potencial para pequenas distâncias. 47
4.10 Gráficos de $|\Psi(x,t)|^2$ dado por (4.39) para a não-linearidade cúbica, com $\lambda = 0.5$ para o sóliton brilhante (a) periódico ou (b) quase-periódico, com $\alpha = 0.1$ e $\beta = 0$ ou $\alpha = \beta = 0.1$, respectivamente. . 47
4.11 Gráficos de $|\Psi(x,t)|^2$ dado por (4.41) para a não-linearidade cúbica, com $\lambda = 0.5$ para o sóliton escuro (a) periódico ou (b) quase-periódico, com $\alpha = 0.1$ e $\beta = 0$ ou $\alpha = \beta = 0.1$, respectivamente. . 48
4.12 Gráfico de $|\Psi(x,t)|^2$ dado por (4.45) para a não-linearidade cúbica, com $\lambda = 0.5$ para o sóliton brilhante (a) periódico ou (b) quase-periódico, com $\alpha = 0.1$ e $\beta = 0$ ou $\alpha = \beta = 0.1$, respectivamente. . 49
4.13 Gráfico de $|\Psi(x,t)|^2$ dado por (4.47) para a não-linearidade cúbica, com $\lambda = 0.5$ para o sóliton escuro (a) periódico ou (b) quase-periódico, com $\alpha = 0.1$ e $\beta = 0$ ou $\alpha = \beta = 0.1$, respectivamente. . 49

5.1 Gráficos do potencial v_1 para os casos (a) periódico e (b) quase-periódico, considerando $\epsilon = 0.5$ e $\omega_0 = 1$. 55
5.2 Gráficos de $|\psi_1|^2$ (Eq. (5.20)) para os casos (a) periódico e (b) quase-periódico, considerando $n = 1$, $\epsilon = 0.5$ e $\omega_0 = 1$. 56
5.3 Gráficos do potencial $v(x,t)$ (Eq. (5.23)) para os casos (a) periódico e (b) quase-periódico, considerando $\gamma = 6$, $\epsilon = 0.5$ e $\omega_0 = 1$. 57
5.4 Gráficos de $|\psi_1|^2$ (Eq. (5.26)) para os casos (a) periódico e (b) quase-periódico, considerando $\gamma = 6$, $\epsilon = 0.5$ e $\omega_0 = 1$. 57
5.5 Gráficos do potencial $v(x,t)$ (Eq. (5.10)) para os casos (a) periódico e (b) quase-periódico. 59
5.6 Gráficos dos potenciais mostrados na Fig. 5.5 para x pequeno. Em (a) mostramos o caso periódico e em (b) o caso quase-periódico. . . 60

5.7 Gráficos de $|\psi_1|^2$ (Eq. (5.35)) para os casos (a) periódico e (b) quase-periódico. 60
5.8 Gráficos de $|\psi_2|^2$ (Eq. (5.36)) para os casos (a) periódico e (b) quase-periódico. 60

6.1 Solução tipo *breather* da GPE (6.1), no caso de um potencial nulo e não-linearidade cúbica constante. Em (a) mostramos o caso $a=1$ e $b=0$ e em (b) $a=1$ e $b=t$, fazendo o *breather* se mover no espaço. 62
6.2 Gráfico do potencial mostrado em (6.13), usando os parâmetros $a = 1/(1+\cos^2(t))$ e $b = 0$. 66
6.3 Gráfico (a) do *breather* e (b) do seu perfil, para o potencial mostrado na Fig. 6.2. 66
6.4 Gráfico (a) do *breather* e (b) do seu perfil. Aqui estamos usando a e b na mesma forma da Fig. 6.2. 67
6.5 Ilustração (a) do potencial mostrado em (6.14) e (b) da solução *breather* correspondente, considerando a constante e $b = \sin(t)$. 67
6.6 Ilustração do potencial mostrado em (6.15). 68
6.7 Gráficos do perfil da solução breather, mostrando o caso (a) periódico [$b = \sin(t)$] e (b) quase-periódico [$b = \sin(\sqrt{2}t)$]. 68
6.8 Comparação entre a NLSE 1D na linha tracejada (laranja) e a ESNP 1D em linha sólida (azul) considerando $g = -0.1$ e $V = 0$. 69

7.1 Gráficos da não-linearidade perturbada por uma função (a) caótica, (b) aleatória e (c) não-periódica, em um tempo específico. 73
7.2 Ilustração da evolução do sóliton $|\psi(x,t)|^2$ com 10% de perturbação caótica na não-linearidade. Em (a) mostramos a solução e seu perfil (painel superior) e (b) a média na altura máxima da solução. 74
7.3 Gráfico da evolução do sóliton $|\psi(x,t)|^2$ com 50% de perturbação caótica na não-linearidade (veja o texto para mais detalhes). Em (a) é mostrado uma solução específica e seu perfil (painel superior) enquanto em (b) é mostrado a altura máxima média da amplitude da solução. 75
7.4 Gráfico da evolução do sóliton $|\psi(x,t)|^2$ com 10% de perturbação aleatória na não-linearidade (veja o texto para mais detalhes). Em (a) é mostrado uma solução específica e seu perfil (painel superior) enquanto em (b) é mostrado a altura máxima média da amplitude da solução. 75

7.5 Gráfico da evolução do sóliton $|\psi(x,t)|^2$ com 50% de perturbação aleatória na não-linearidade (veja o texto para mais detalhes). Em (a) é mostrado uma solução específica e seu perfil (painel superior) enquanto em (b) é mostrado a altura máxima média da amplitude da solução. 76
7.6 Gráfico da evolução do sóliton $|\psi(x,t)|^2$ com 50% de perturbação não-periódica na não-linearidade (veja o texto para mais detalhes). Em (a) é mostrado uma solução específica e seu perfil (painel superior) enquanto em (b) é mostrado a altura máxima média da amplitude da solução. 76
7.7 Ilustração das energias médias das soluções solitônicas para (a) 10% e (b) 50% de perturbação. O circulo (vermelho) e a caixa (amarela) representam o caso caótico e aleatório, respectivamente. 77

B.1 Mecanismo da ressonância de Feshbach [7]. As curvas inferiores representam o potencial de espalhamento de dois átomos em um dado estado de spin, enquanto a curva superior representa o potencial de interação em um diferente estado de spin. Através do ajuste de um campo magnético externo podemos realizar configurações de ressonância. Em (a) e (b) o estado fundamental é, respectivamente, logo abaixo e logo acima do limiar. 82

Sumário

Resumo **i**

Abstract **ii**

Trabalhos resultantes desta Tese **iii**

Lista de Abreviações **iv**

Lista de Fíguras **ix**

Sumário **xi**

1 Introdução **1**

2 Defeitos em Modelos de Campos Relativísticos **5**
2.1 Teoria de um único campo escalar real 6
2.2 Um modelo simples 10
2.3 Classes de soluções 11
2.3.1 Primeira família 12
2.3.2 Segunda família 14
2.3.3 Terceira família 16
2.4 Comentários finais 18

3 Sólitons em Condensados de Bose-Einstein **20**
3.1 A equação de Gross-Pitaevskii 20
3.2 Redução para o caso unidimensional 25
3.2.1 Regime de acoplamento fraco 27
3.2.2 Sólitons e *breathers* para a NLSE 1D 28
3.3 Detalhes experimentais 30

4 Sólitons em Condensados de Bose-Einstein modulados no espaço e no tempo **33**
4.1 Transformação de Similaridade 34
4.2 Sólitons Brilhantes e Escuros 36
4.3 Sóliton em potenciais atrativos e expulsivos 41
4.3.1 Caso Cúbico 44
4.3.2 Caso Cúbico e Quíntico 48

5 Sólitons em condensados acoplados **51**

6 Modulação de *breathers* em condensados de Bose-Einstein **61**
6.1 Formalismo 62
6.2 Não-linearidades específicas 64
6.3 Simulações numéricas 68

7 Influência de perturbações caóticas, aleatórias e não-periódicas **70**

8 Comentários Finais e Perspectivas **78**

Apêndices **80**

A Temperatura crítica de um gás ideal de Bose **80**

B Ressonância de Feshbach **82**

C Forma adimensional da EGP 3D **84**

D Método numérico **85**

Referências Bibliográficas **88**

Capítulo 1

Introdução

Ondas solitárias são certas soluções especiais de equações de onda não-lineares que se propagam sem mudar sua forma. Isso geralmente ocorre devido ao balanceamento dos efeitos não-lineares e dispersivos do meio[1]. Esse fenômeno foi primeiramente descrito por John Scott Russell em 1844, que observou uma onda solitária no canal da União na Escócia. Ele reproduziu esse fenômeno em um tanque com água e chamou-o de "onda de translação"[1]. Contudo, a comunidade científica da época teve dificuldades em aceitar os experimentos de J. S. Russell, pois eles não tinham um embasamento teórico adequado. Já em 1871, J. V. Boussinesq publicou a primeira descrição matemática para os experimentos de J. S. Russell, e em 1876 Lord Rayleigh (J. W. Strutt) publicou sua teoria para o mesmo experimento, tendo posteriormente admitido que a teoria de Boussinesq veio antes da sua [2]. Em 1895 D. Korteweg e G. de Vries formularam a conhecida equação de Korteweg-de Vries (ou simplesmente equação KDV), que descreve soluções de ondas solitárias em água [3]. O estudo desta equação é um tópico ativo de pesquisas nas áreas de física e matemática. Algumas ondas solitárias exibem uma importante característica adicional: depois de uma colisão entre duas ou mais ondas solitárias, elas assintoticamente recuperam suas formas, exceto por um deslocamento de fase [3]. Nesse caso, as ondas solitárias são chamadas sólitons.

[1] Também é possível ocorrer devido a dissipação.

Em Teoria de Campos, soluções localizadas podem ser encontradas em um formalismo usando campos escalares reais, que são os mais simples dentre os diversos campos disponíveis [4]. Apesar de simples, os campos escalares têm sido utilizados de várias maneiras diferentes, induzindo mecanismos importantes para o desenvolvimento da Física de Partículas e Campos. Modelos descritos por um ou mais campos escalares reais podem ser utilizados na investigação de defeitos topológicos ou não-topológicos. Por defeitos topológicos dizemos aquelas soluções às quais podemos introduzir carga topológica não-nula e defeitos não-topológicos são descritos por soluções que não possuem carga topológica. A carga topológica está definida dependendo das soluções dos campos no infinito (ou nas paredes do domínio). Isso será mais detalhado no capítulo seguinte.

Uma vantagem de se utilizar modelos de campos escalares reais é que sua conexão com problemas em Física da Matéria Condensada se dá de maneira muito simples, tais como, via Equação Não-Linear de Schrödinger (*Nonlinear Schrödinger equation* - NLSE), que aparece na descrição de pulsos propagando em cristais não-lineares [5] e em fibras ópticas não-lineares [6] e também para descrever a excitação coletiva de átomos em Condensados de Bose-Einstein (*Bose-Einstein Condensates* - BECs) [7].

Um problema atual consiste na utilização da NLSE com coeficientes dependentes das variáveis que descrevem a propagação e o perfil das soluções. Essa equação é do tipo diferencial parcial não-linear, não-autônoma e/ou não-homogênea e ainda complexa. Um método usual para resolver tal equação é usar um *ansatz*[2] que leva em conta a separação em coordenadas polares da parte real e imaginária da solução em uma forma apropriada (ver Capítulo 4). Esse *ansatz*, seguido de algumas condições entre as variáveis do problema, transforma a NLSE não-autônoma em uma equação autônoma, de mais fácil solução. Veja por exemplo a Ref. [8] para

[2]O termo “ansatz”é usado para uma forma tentativa (como um “chute”) para a solução de uma equação diferencial.

mais detalhes.

Outro problema interessante consiste em transformar a NLSE não-autônoma em uma equação parcial com coeficientes constantes e, desse modo, obter soluções do tipo *breather*. Essas soluções possuem energia concentrada de forma localizada e oscilatória. Outra característica interessante desse tipo de solução é o fato de que mesmo quando a equação de movimento não possui coeficientes variáveis, elas oscilam. Essas soluções geralmente surgem de um composto de dois ou mais sólitons localizados na mesma posição espacial. Os *breathers* foram originalmente introduzidos na equação de Sine-Gordon [9], mas eles também podem ser encontrados em outros cenários, como por exemplo, controlados pela equação modificada de KDV [10], na equação de Davey-Stewartson [11] e na NLSE [5]. Em diversos sistemas físicos, bem descritos por equações não-lineares, os *breathers* afetam diretamente suas propriedades eletrônicas, magnéticas, ópticas, vibracionais e de transporte, tais como, nas junções Josephson supercondutoras [12, 13], na densidade de carga de sistemas ondulatórios [14], em cristais de 4-metilpiridina [15], em nanopartículas metálicas [16], em polímeros conjugados [17], em guias de osciladores micromecânicos [18], em redes de Heisenberg antiferromagnéticas [19, 20], e em poços quânticos semicondutores [21].

No presente trabalho estudamos soluções da NLSE com diferentes tipos de não-linearidades e com várias configurações para o potencial de aprisionamento das partículas, no caso de BEC. O trabalho divide-se da seguinte forma: no Capítulo 2 fazemos uma revisão do modelo para campos relativísticos descritos por um único campo escalar real e apresentamos um estudo sobre o formalismo de primeira ordem para defeitos não-topológicos, introduzido recentemente por nosso grupo. Mostramos também um estudo sobre novos modelos através de classes de potenciais que fornecem classes de soluções apresentando um efeito de modulação dependendo apenas de um único parâmetro associado com o efeito não-linear do sistema. No

Capítulo 3 estudamos a formação de sólitons em BEC. Para tal, primeiramente descrevemos as condições do sistema em estudo, no qual obtemos a equação de Gross-Pitaevskii (*Gross-Pitaevskii Equation* - GPE), que é a equação responsável pela descrição da dinâmica da densidade de partículas do condensado em condição de alta diluição. Também, no final desse capítulo mostramos o modelo de confinamento forte em duas direções, tornando o sistema quase-unidimensional. No Capítulo 4 mostramos alguns de nossos resultados na descrição de sólitons em sistemas regidos pela GPE com potencial e não-linearidades dependentes das coordenadas espaciais e temporais. Neste sentido, estudamos os casos nos quais o sistema apresenta não-linearidade cúbica, cubica-quíntica, e quíntica. No Capítulo 5 apresentamos um estudo sobre sólitons em condensados acoplados, também considerando o potencial e as não-linearidades dependentes do espaço e do tempo. O Capítulo 6 descreve a modulação de soluções do tipo *breather* em BEC. A influência de perturbações caóticas, aleatórias e não-periódicas na não-linearidade sobre o comportamento das soluções solitônicas é considerada no Capítulo 7. Para finalizar, o Capítulo 8 traz nossos comentários, conclusões e perspectivas.

Capítulo 2

Defeitos em Modelos de Campos Relativísticos

Neste capítulo, apresentamos uma breve descrição da teoria clássica de campos utilizando o formalismo de Lagrange com a finalidade de obter classes de soluções em modelos relativísticos descritos por um único campo escalar real. Tais campos podem ser usados para descrever sistemas com um número infinito de graus de liberdade (sistemas contínuos). Nosso interesse particular é encontrar configurações de campos com energia finita e localizada.

Na física de altas energias, estruturas de defeitos podem ser de natureza topológica ou não-topológica [22, 23]. Defeitos tipo *lump* ("pequeno morro") são estruturas não-topológicas que aparecem em modelos descritos por campos escalares reais em $(1,1)$ dimensão espaço-temporal, isto é, uma dimensão espacial e uma temporal, sob a ação de interações não-lineares. Eles são de interesse em diversas situações, e no presente trabalho focamos nossa atenção na possibilidade de construir estruturas do tipo *lump* com fatores específicos controlados por um único parâmetro, que aparece no potencial para balancear as não-linearidades que definem o modelo.

A presença de não-linearidades dificulta a tarefa de encontrar soluções analíticas explícitas. Contudo, com base em um recente trabalho produzido por nosso grupo [24], que introduz um formalismo de primeira ordem para estruturas do tipo *lump*, podemos reduzir a dificuldade apontada acima.

Um outro tipo de aplicação do uso de *lumps* consiste na descrição da teoria de branas[3] com uma única dimensão extra. Nesse caso, recentes investigações mostram a presença de estados taquiônicos[4] presentes na brana [25]. Embora não seja possível acelerar uma partícula até que ela atinja a velocidade da luz segundo a Teoria da Relatividade Especial, a mesma não impede a existência de partículas com velocidade superior à da luz em seu estado natural (para mais detalhes veja [25]). Também, existem várias outras aplicações bastante interessantes, tais como, o uso de modelos de *lumps* para descrever a presença de sólitons brilhantes em fibras ópticas [26] e excitações localizadas em condensados de Bose-Einstein [27].

2.1 Teoria de um único campo escalar real

Considere um único campo escalar real em $(1,1)$ dimensões espaço-temporal, descrito por $\phi(x,t)$. A lagrangiana de um sistema discreto envolve a soma sobre todos os graus de liberdade, de modo que para um sistema contínuo ela deve ser expressa em termos da integral espacial da densidade de lagrangiana $\mathcal{L}$. Por um lado, a densidade de lagrangiana deve conter um termo cinético, logo deve depender de $\dot{\phi} \equiv \partial\phi/\partial t$. Por outro lado, em contraste com a ideia de ação à distância, podemos supor que o campo ϕ em um ponto x interage consigo mesmo somente em uma vizinhança infinitesimal desse ponto, de modo que $\mathcal{L}$ deve depender de $\phi(x,t)$ e $\phi(x+dx,t)$. Alternativamente, no lugar dessa última quantidade é melhor usar $\phi' \equiv \partial\phi/\partial x$. A densidade de lagrangiana pode apresentar dependência com o próprio campo ϕ. Ela poderia ainda depender explicitamente das coordenadas x e t. Usando esses argumentos, por simplicidade iremos considerar a densidade de

[3]Branas são objetos estendidos que surgem da Teoria das Cordas. Essa teoria diz que tudo, matéria e campo, é formada por membranas, e que o universo flui através de 11 dimensões. Teríamos então 3 dimensões espaciais (altura, largura, comprimento), 1 temporal (tempo) e 7 dimensões recurvadas, sendo a estas atribuídas outras propriedades, como massa e carga elétrica.

[4]Um táquion é uma partícula hipotética cuja velocidade excede a velocidade da luz.

lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}, \phi')$, dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - V(\phi), \tag{2.1}$$

no qual $V(\phi)$ é o potencial, $x^\mu = (t, x)$ e $x_\mu = (t, -x)$. Aqui reescalamos ϕ, x e t para trabalharmos com campos e coordenadas adimensionais. Supomos que o potencial possua os pontos críticos, $\{\bar{\phi}_1, ..., \bar{\phi}_n\}$, tais que $(dV/d\phi)(\bar{\phi}_i) = 0$ e $V(\bar{\phi}_i) = 0$ para $i = 1, 2, ..., n$. A equação de movimento que segue da equação de Euler-Lagrange para a densidade de Lagrangiana acima é dado por

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\phi} = 0, \tag{2.2}$$

e para $\phi = \phi(x)$ sendo a configuração estática (mudança de referencial), temos

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{dV}{d\phi}. \tag{2.3}$$

Integrando a equação de movimento (2.3) obtemos

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm\sqrt{2V + c}, \tag{2.4}$$

onde c é uma constante de integração real.

A densidade de energia da solução estática $\phi = \phi(x)$ é dada por

$$\epsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 + V(\phi). \tag{2.5}$$

Note que (2.5) consiste de dois termos, conhecidos como contribuições gradiente e potencial, respectivamente. Então, as soluções estáticas devem obedecer às seguintes condições de contorno

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{d\phi}{dx} \to 0 \tag{2.6}$$

para assegurar a finitude do termo de gradiente da energia.

A presença desses pontos críticos nos permite distinguir dois tipos de estruturas de defeitos: elas podem ser estruturas topológicas (tipo *kink*, ou seja, uma "pequena

elevação"), que em geral conecta dois pontos críticos distintos porém adjacentes, $\bar{\phi}_i$ e $\bar{\phi}_{i+1}$ com as condições de contorno $\phi(x \to \pm\infty) \to \bar{\phi}_i$ e $\phi(x \to \mp\infty) \to \bar{\phi}_{i+1}$; por outro lado, elas podem ser estruturas não-topológicas (tipo *lump*), que em geral requerem um único ponto crítico, com as seguintes condições de contorno $\phi(x \to \pm\infty) \to \bar{\phi}_i$. Essas condições de contorno implicam que c em (2.4) deve ser nula, como uma condição necessária para a presença de soluções com energia finita, levando a

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm\sqrt{2V}. \tag{2.7}$$

Essas equações de primeira ordem devem ser consideradas com cuidado. A questão é que as soluções topológicas ou tipo *kink* são soluções monotônicas de x, assim sua derivada não muda o sinal e em (2.7) cada sinal identifica uma equação, cuja solução é do tipo *kink* e anti-*kink*, respectivamente. Contudo, as soluções não-topológicas são "diferentes", por não serem monotônicas. De fato, sua primeira derivada muda o sinal no ponto arbitrário x_0, que é o centro da solução. Devido à invariância translacional da teoria podemos considerar $x_0 = 0$, por simplicidade. Então, a derivada da solução tipo *lump* muda o sinal em $x = 0$, e assim temos que entender como aplicar as equações acima (2.7), como sugerido na Ref. [24]:

$$\frac{d\phi}{dx} = \sqrt{2V} \text{ para } x > 0 \ \ \& \ \ \frac{d\phi}{dx} = -\sqrt{2V} \text{ para } x < 0 \tag{2.8}$$

e/ou

$$\frac{d\phi}{dx} = -\sqrt{2V} \text{ para } x > 0 \ \ \& \ \ \frac{d\phi}{dx} = \sqrt{2V} \text{ para } x < 0. \tag{2.9}$$

A presença da conexão e/ou entre os pares de equações acima pode ser entendida com a ajuda da simetria de reflexão: os dois pares de equações aparecem quando o modelo apresenta simetria de reflexão; por outro lado, necessitamos de apenas um único par de equações.

O fato das soluções tipo *lump* serem funções não-monotônicas induz um importante fator para as estruturas não-topológicas: o problema mecânico quântico gera

um modo zero com um nó no centro da estrutura, mostrando que há pelo menos um estado com energia negativa, indicando a instabilidade da solução. Esse fato geralmente dificulta o estudo das soluções não-topológicas. Contudo, como mostrado na Ref. [24] podemos mudar esse cenário, mudando a forma de investigar as soluções do tipo *lump*. Primeiramente reconhecemos que a estrutura tipo *lump* é monotônica para x positivo, e para x negativo, separadamente. Então, para x positivo ou para x negativo o perfil não-topológico é similar ao topológico, e assim podemos usar argumentos de simetria para introduzir o super potencial $W = W(\phi)$ para soluções não-topológicas, observando que as equações são agora mudadas para

$$\frac{d\phi}{dx} = W_\phi \text{ para } x > 0 \ \ \& \ \ \frac{d\phi}{dx} = -W_\phi \text{ para } x < 0 \tag{2.10}$$

e/ou

$$\frac{d\phi}{dx} = -W_\phi \text{ para } x > 0 \ \ \& \ \ \frac{d\phi}{dx} = W_\phi \text{ para } x < 0. \tag{2.11}$$

A eficiência do uso desse super potencial está no fato de que podemos escrever $V(\phi) = W_\phi^2/2$, para potenciais não-negativos. No caso de *lumps* o potencial pode ser negativo, porém, nossos modelos contemplam apenas soluções nas regiões positivas do potencial, como sugerido no formalismo acima. Nesse caso, integrando a Eq.(2.5) e usando as transformações: $(d\phi/dx)^2 = dW/dx$ e $2V = dW/dx$, obtemos a energia associada às soluções tipo *lump* na forma

$$\begin{aligned} E_{\rm l} &= |W(\phi(\infty)) - W(\phi(0))| + |W(\phi(0)) - W(\phi(-\infty))| \\ &= 2|W(\phi(\infty)) - W(\phi(0))| \\ &= 2|W(\phi(0)) - W(\phi(-\infty))|. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Esse formalismo de primeira ordem para estruturas não-topológicas tem duas vantagens importantes sobre o cálculo padrão: primeira, ele nos permite obter a energia de maneira simples e direta, não dependendo da forma explícita das soluções como requerido no caso usual; segunda, trabalhamos com equações de movimento de primeira ordem, no lugar das equações de segunda ordem.

Por razões didáticas, iniciaremos nosso estudo nessa direção com um modelo simples. Esse e os modelos seguintes estão publicados na Ref. [28].

2.2 Um modelo simples

Primeiramente propomos um modelo descrito pelo potencial

$$V_1(\phi) = \frac{1}{2}\phi^2 \left[a + (a-1)\phi - |\phi|\right], \tag{2.13}$$

onde a é um parâmetro positivo, limitado na região $0 \leq a < 2$, que controla o perfil da solução não-topológica. Esse modelo é uma generalização do modelo simétrico invertido [29], obtido aqui fazendo $a = 1$.

O potencial acima possui três zeros, um em $\bar{\phi} = 0$, que é o mínimo local com $d^2V/d\phi^2 = a$, e dois outros, em $\bar{\phi}_1 = -1$ e em $\bar{\phi}_a = a/(2-a)$. Na Fig. 2.1a mostramos o potencial para alguns valores do parâmetro. O máximo do potencial está localizado em $\tilde{\phi}_1 = -2/3$ e em

$$\tilde{\phi}_a = \frac{2a}{3(2-a)}. \tag{2.14}$$

Para procurar soluções do modelo descrito pelo potencial (2.13) seguimos o procedimento descrito na Sec. 2.1. A presença de equações de primeira ordem simplifica os cálculos e, desse modo, podemos escrever

$$\phi_1(x) = -\text{sech}^2\left(\frac{\sqrt{a}x}{2}\right), \tag{2.15}$$

e

$$\phi_a(x) = \frac{a}{2-a}\text{sech}^2\left(\frac{\sqrt{a}x}{2}\right). \tag{2.16}$$

Os subscritos 1 e a estão relacionados com os dois setores do potencial. Eles reduzem-se para os *lumps* $\phi(x) = \pm\text{sech}^2(x/2)$, para $a = 1$. O *lump* $\phi_1(x)$ tem seu mínimo em $\phi_1(0) = -1$, e $\phi_a(x)$ em $\phi_a(0) = a/(2-a)$. Porém *lumps* possuem valores assintóticos $\phi_1(\pm\infty) = \phi_a(\pm\infty) = 0$. Na Fig. 2.1b, mostramos

tais soluções e vemos que elas possuem um perfil bem definido, porém, a solução ϕ_1 possui amplitude constante e largura variada, enquanto ϕ_a varia sua amplitude e largura. Suas densidades de energia, mostradas nas Figs. 2.2a e 2.2b, são dadas por, respectivamente,

$$\rho_1 = a\text{sech}^4\left(\frac{\sqrt{a}x}{2}\right)\tanh^2\left(\frac{\sqrt{a}x}{2}\right), \tag{2.17}$$

$$\rho_a = \frac{a^3}{(a-2)^2}\text{sech}^4\left(\frac{x\sqrt{a}}{2}\right)\tanh^2\left(\frac{x\sqrt{a}}{2}\right). \tag{2.18}$$

As energias E_1 e E_a correspondendo às densidades acima são

$$E_1 = \frac{8}{15}\sqrt{a}, \qquad E_a = \frac{8}{15}(2-a)^2. \tag{2.19}$$

Note que o limite $a \to 1$ leva E_1 e E_a para o mesmo valor $8/15$, assim como mostrado na Fig. 2.2c. As soluções tipo *lump* tem amplitudes e larguras dadas por

$$A_1 = 1, \qquad L_1 = \frac{4}{\sqrt{a}}\,\text{arcsech}(1/\sqrt{2}), \tag{2.20}$$

e

$$A_a = \frac{a}{2-a}, \qquad L_a = \frac{4}{\sqrt{a}}\,\text{arcsech}(1/\sqrt{2}). \tag{2.21}$$

Veja que o limite $a \to 1$ faz com que $A_a \to A_1$. Note também que $L_a = L_1$ para todos os valores de a. Isso é interessante desde que para a solução ϕ_a, o parâmetro a controla a amplitude e a energia, sem mudar a largura correspondente. Essas soluções tipo *lump* são interessantes e podem ter aplicações em vários ramos das ciências não-lineares.

2.3 Classes de soluções

Agora, vamos investigar outros modelos, representando algumas novas famílias dos mesmos. Introduzimos abaixo três delas, cada uma tendo características específicas que tornam as soluções tipo *lump* interessantes para aplicação em física de altas energias e em matéria condensada.

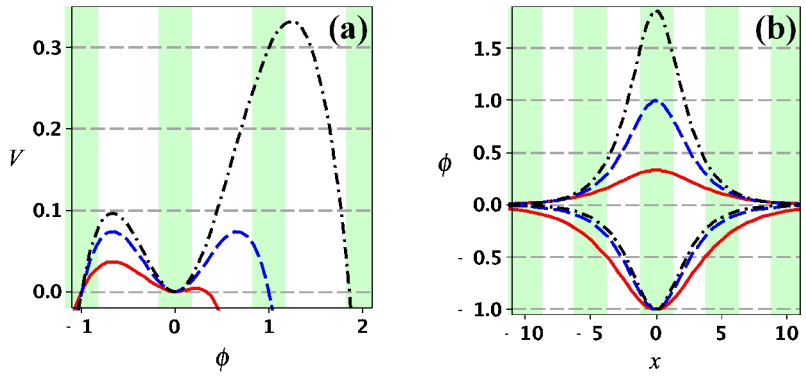

Figura 2.1: Representação gráfica (a) do potencial (2.13) e (b) das soluções tipo *lump* (2.15) e (2.16). Os valores do parâmetro a são $a = 0.5$ para a linha solida (vermelha), $a = 1$ para a linha tracejada (azul) e $a = 1.3$ para a linha ponto-traço (preta).

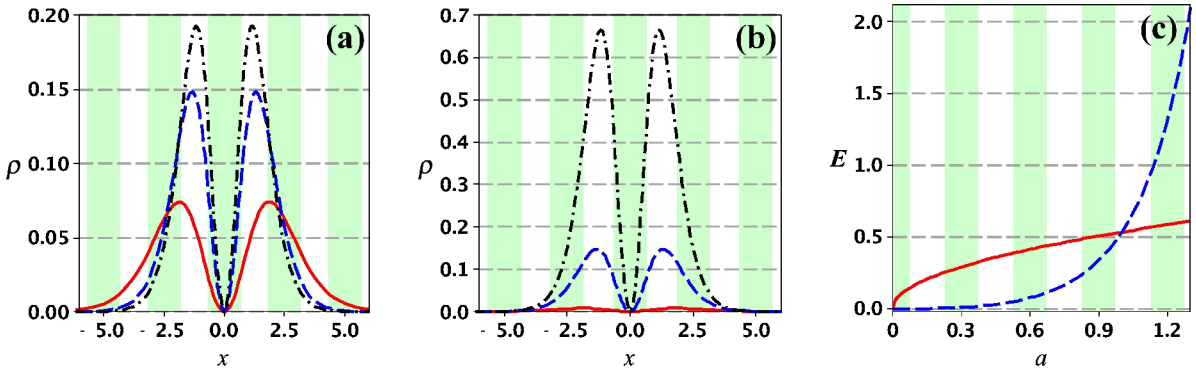

Figura 2.2: Gráficos das densidades de energia das soluções tipo *lump* (2.15) em (a) e (2.16) em (b), para os mesmos valores do parâmetro a dados na Fig. 2.1. Em (c) ilustramos como a energia total E_1 e E_a [veja (2.19)] varia com o parâmetro a, com a linha sólida (vermelha) e tracejada (azul), respectivamente.

2.3.1 Primeira família

Aqui introduzimos a primeira família de modelos, que é descrita pelo potencial

$$V_2(\phi) = \frac{2}{n^2}\phi^2\left(1-\phi^n\right), \tag{2.22}$$

no qual estamos considerando que n é um número inteiro positivo. Note que para $n = 1$ esse potencial recai no modelo ϕ^3, e para $n = 2$ no modelo ϕ^4 invertido [30]. Para outros valores de n obtemos novos modelos, nos quais o potencial apresenta comportamento distinto: um para n par e outro para n ímpar, como ilustramos na

Fig 2.3. Em geral, o máximo local dos potenciais está localizado em

$$\tilde{\phi}_n = k\left(\frac{2}{2+n}\right)^{1/n}, \tag{2.23}$$

onde $k = 1$ para n impar e $k = \pm 1$ para n par.

Esse potencial apresenta dois zeros para n impar (em $\bar{\phi} = 0, 1$) e três zeros para n par (em $\bar{\phi} = 0, \pm 1$), como mostrado na Fig. 2.3. O mínimo localizado em $\phi = 0$ leva a $d^2V/d\phi^2(\phi = 0) = 4/n^2$, que representa a massa clássica (ao quadrado) da excitação bosônica em torno do mínimo $\phi = 0$.

Para obter as soluções seguimos o procedimento apresentado na Sec. 2.1. A família de modelos descritos pelo potencial (2.22) possui soluções tipo *lump* e densidades de energia que podem ser representadas por

$$\phi(x) = \mathrm{sech}^{2/n}(x), \tag{2.24}$$

e

$$\rho(x) = \frac{4}{n^2}\mathrm{sech}^{4/n}(x)\tanh^2(x), \tag{2.25}$$

respectivamente. A amplitude e a largura da solução não-topológica bem definida são $A_n = 1$ e

$$L_n = 2\mathrm{arcsech}\left(2^{-n/2}\right), \tag{2.26}$$

respectivamente. As soluções para alguns valores de n impar e par são mostrados nas Figs. 2.4a e 2.4b, e suas densidades nas Figs. 2.5a e 2.5b.

A energia total é obtida através da Eq. (2.12) e tem a forma

$$E(n) = \frac{\sqrt{\pi}}{2n}\frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3n+4}{2n}\right)}, \tag{2.27}$$

no qual Γ representa a função gama. Na Fig. 2.5c mostramos a energia total em função de n.

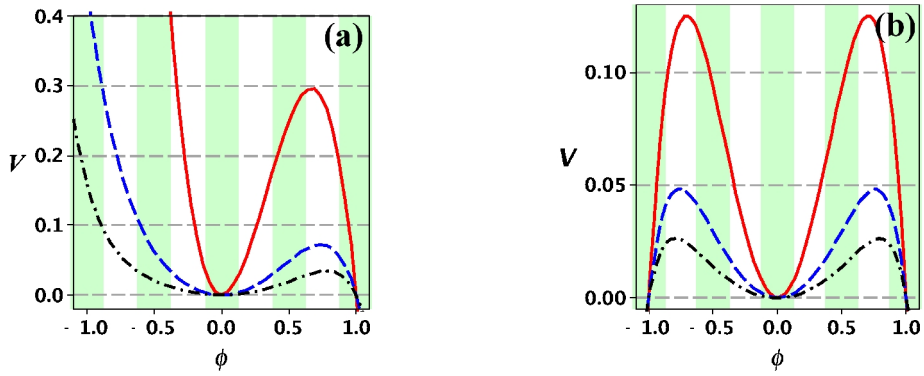

Figura 2.3: Ilustração do potencial (2.22) para (a) n ímpar e para (b) n par. Para n ímpar, usamos $n = 1$ na linha sólida (vermelha), $n = 3$ na linha tracejada (azul) e $n = 5$ na linha ponto-traço (preta). Para n par, usamos $n = 2$ na linha sólida, $n = 4$ na linha tracejada (azul) e $n = 6$ na linha traço-ponto (preta).

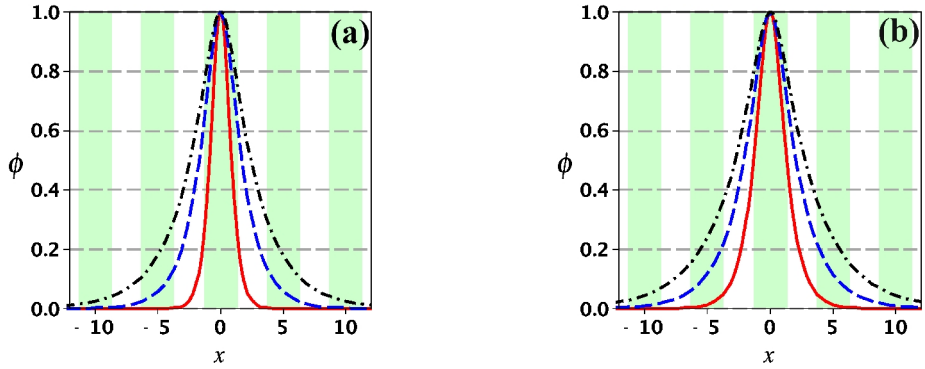

Figura 2.4: Soluções tipo lump dadas pela Eq.(2.24) para (a) n ímpar e para (b) n par. Consideramos as mesmas convenções utilizadas na Fig. 2.3.

2.3.2 Segunda família

A segunda família de modelos é descrita pelo potencial

$$V_3(\phi) = \frac{2}{n^2}\phi^{2+n}\left(1-\phi^n\right), \tag{2.28}$$

onde n é um número inteiro positivo. O máximo local está em

$$\tilde{\phi}_n = k\left(\frac{n+2}{2n+2}\right)^{1/n}, \tag{2.29}$$

com $k = 1$ para n ímpar e $k = \pm 1$ para n par. Na Fig. 2.6 mostramos o potencial (2.28) para n ímpar e par, respectivamente.

Esse potencial apresenta dois zeros para n ímpar (em $\bar{\phi} = 0, 1$) e três para n par (em $\bar{\phi} = 0, \pm 1$) de acordo com a Fig. 2.6. Temos também $d^2V/d\phi^2(\phi = 0) = 0$.

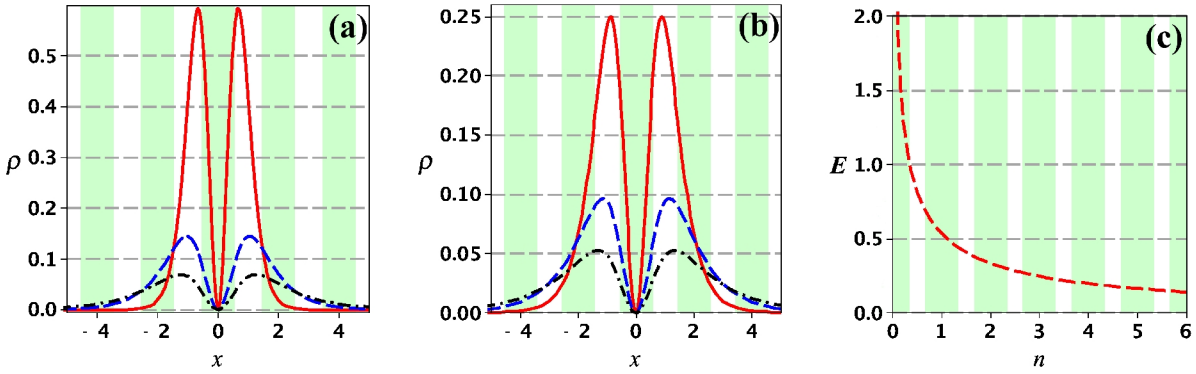

Figura 2.5: Densidades de energia dadas por Eq. (2.25) para (a) n ímpar e para (b) n par. Consideramos as mesmas convenções usadas na Fig.3. Em (c) ilustramos a energia total Eq.(2.27) em função de n.

A família de modelos descrita por (2.28) tem soluções tipo *lump* e densidade de energia dada por

$$\phi(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{1/n}} \tag{2.30}$$

e

$$\rho(x) = \frac{2}{n^2}\left[\left(1+x^2\right)^{-\frac{2+2n}{n}}\left(x^2-1\right)+\left(1+x^2\right)^{-\frac{n+2}{n}}\right]. \tag{2.31}$$

A amplitude e largura da solução não-topológica são $A_n = 1$ e

$$L_n = \sqrt{2^n - 1}, \tag{2.32}$$

respectivamente. As soluções para n ímpar e par estão apresentadas nas Figs. 2.7a e 2.7b, respectivamente. Nas Figs. 2.8a e 2.8b são mostradas suas densidades de energia. Note que nesse caso as soluções tipo *lump* são mais difusas, indo para zero de uma maneira mais lenta, se comparado com o caso formal, para a primeira família de modelos.

As energias totais dessas soluções são dadas por

$$E(n) = \frac{\sqrt{\pi}}{(n+2)}\frac{\Gamma\left(1/2\,\frac{n+4}{n}\right)}{\Gamma\left(2\,/n\right)}, \tag{2.33}$$

onde Γ é a função gama. Elas são mostradas na Fig. 2.8c.

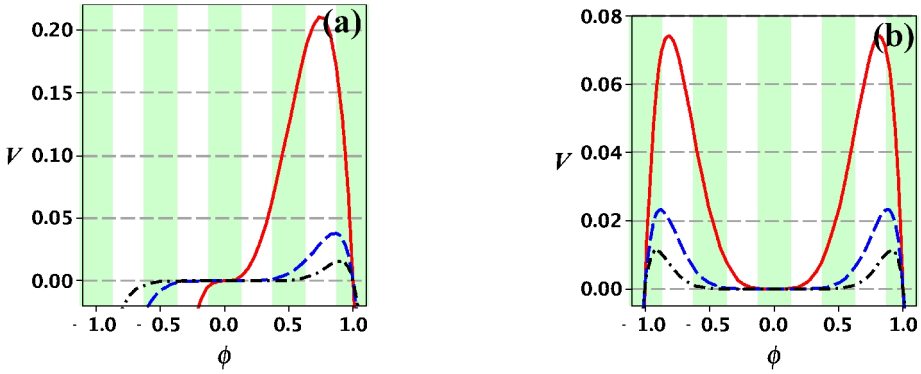

Figura 2.6: Gráficos do potencial (2.28) para (a) n ímpar e para (b) n par, descritos com as mesmas convenções usadas na Fig. 2.3.

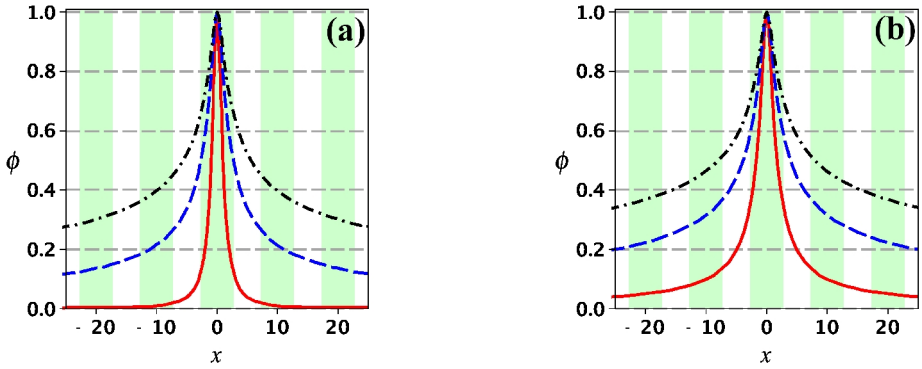

Figura 2.7: Gráficos das soluções tipo *lump* dados pela Eq. (2.30) para (a) n impar e para (b) n par. Consideramos as mesmas convensões adotadas na Fig. 2.3.

2.3.3 Terceira família

Agora introduzimos outra família de modelos, com o potencial

$$V_4(\phi) = \frac{2}{r^2}\phi^{2-r}\left(1-\phi^r\right)\left(1-2\phi^r\right)^2, \tag{2.34}$$

onde tomamos $0 < r \leq 2$, com $r \neq 1/m$ para m par. Alguns máximos locais são dados por $2^{-1/r}$ e por

$$\frac{3+r \pm \sqrt{1+2r+5r^2}}{4(1+r)}. \tag{2.35}$$

Na Fig. 2.9 mostramos o potencial (2.34) para alguns valores específicos de r.

A família de modelos descrito por (2.34) possui soluções tipo *lump* e densidades de energia dadas por

$$\phi(x) = \frac{1}{\left(1+\tanh^2(x)\right)^{1/r}} \tag{2.36}$$

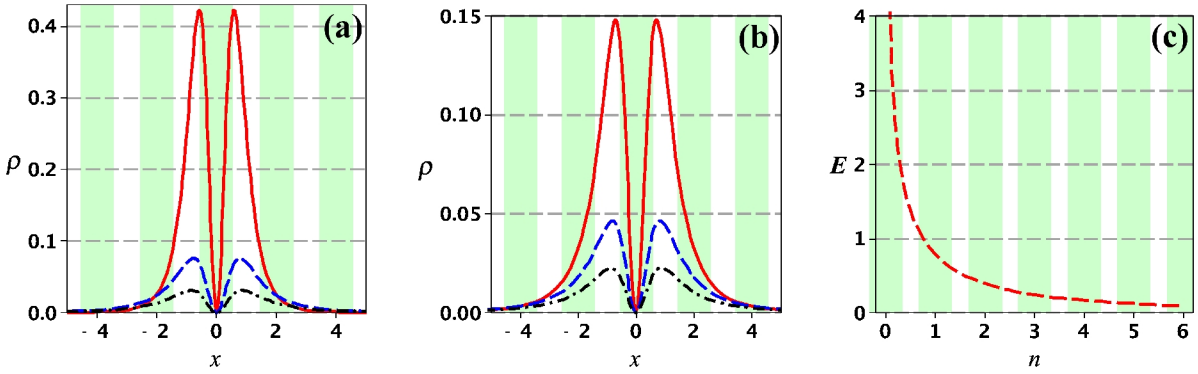

Figura 2.8: Densidade de energia dada pela Eq. (2.31) para (a) n ímpar e para (b) n par. Consideramos as mesmas convenções usadas na Fig. 2.3. Em (c) mostramos a energia total dada pela Eq. (2.33) em função de n.

e

$$\rho(x) = \frac{4}{r^2}\frac{\cosh(x)^{\frac{2(2-r)}{r}}\sinh^2(x)}{(2\cosh^2(x)-1)^{\frac{2r+2}{r}}}. \tag{2.37}$$

Essas estruturas não-topológicas são diferentes daquelas anteriores, pois elas não evanescem assintoticamente, apresentando uma contribuição na forma de um "pedestal". Esse comportamento em estruturas não-topológicas também aparece em outros ramos da Física: plasmas magneticamente confinados podem apresentam soluções similares a essa; veja por exemplo a Ref. [31]. Em Óptica, a técnica de compressão não-linear de pulsos ópticos usualmente leva para um pico pontiagudo e estreito centrado no topo de um pedestal de baixa intensidade, que leva uma larga porção da energia do pulso [32]. Elas são então similares às soluções encontradas acima, com um pulso estreito no topo do pedestal, com a altura do pedestal sendo fracamente controlada pelo parâmetro r.

A amplitude e a largura da solução não-topológica são $A_r = 1$ e

$$L_r = \operatorname{arctanh}(\sqrt{2^r - 1}), \tag{2.38}$$

sem levar em conta o pedestal. As soluções para alguns valores de r são apresentadas na Fig. 2.10a e 2.10b, respectivamente. As Figs. 2.11a e 2.11b mostram as correspondentes densidades de energia, calculadas removendo a contribuição do pedestal.

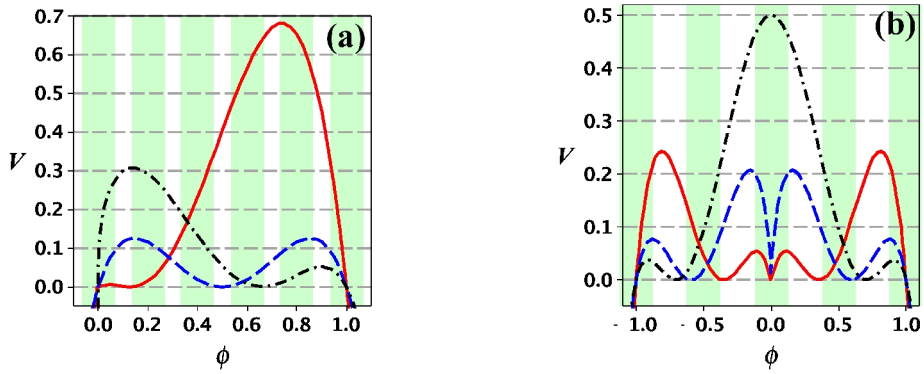

Figura 2.9: Gráficos do potencial (2.34) para (a) $r = 1/3$ com a linha sólida (vermelha), $r = 1$ com a linha tracejada (azul) e $r = 5/3$ com a linha ponto-traço (preta) e para (b) $r = 2/3$ com a linha sólida (vermelha), $r = 4/3$ com a linha tracejada (azul) e $r = 2$ com a linha ponto-traço (preta).

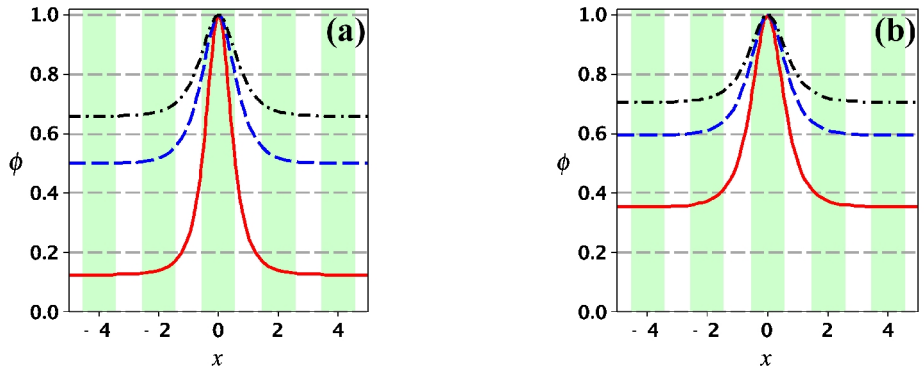

Figura 2.10: Soluções dadas pela Eq. (2.36) para (a) e (b) com a mesma convenção da Fig. 2.9.

Para calcular a energia total fazemos uso da Eq. (2.12) para obter

$$W(0) = \frac{2\sqrt{\pi}(r-1)\Gamma\left(\frac{4-r}{2r}\right)}{r^3\Gamma\left(\frac{2(r+1)}{r}\right)}, \tag{2.39}$$

e

$$W(\infty) = \frac{2^{\frac{7r-4}{2r}}}{16-r^2}\text{hypergeom}\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{4-r}{2r}\right]; \left[\frac{3r+4}{2r}\right]; \frac{1}{2}\right). \tag{2.40}$$

A energia total do sistema é mostrado na Fig. 2.11c, após remover a contribuição do pedestal.

2.4 Comentários finais

Neste capítulo investigamos a presença de estruturas bem definidas do tipo *lump* em modelos relativísticos descritos por um único campo escalar real em $(1, 1)$

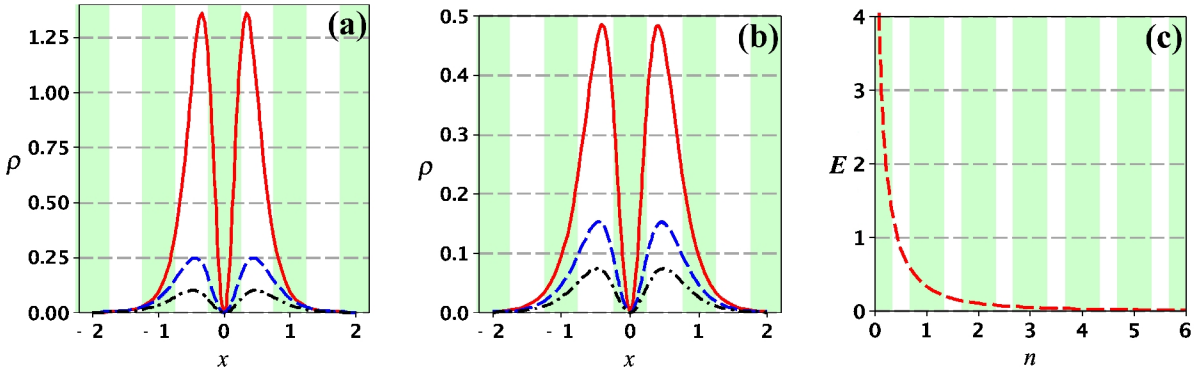

Figura 2.11: Densidade de energia dada pela Eq. (2.37) para (a) e (b) com a mesma convenção da Fig. 2.9. Em (c) mostramos a energia total calculada uando (2.40) em função de r. Este gráfico é representado removendo a contribuição do pedestal.

dimensões espaço-temporal. Essas soluções são provenientes de uma equação de movimento não-linear sob a ação de condições de contorno que as tornam não-topológicas, com perfis bem definido. Elas são usualmente instáveis sob pequenas flutuações, porém elas são de interesse em vários contextos diferentes [24, 25, 26, 27, 33, 34, 35], incluindo a possibilidade de gerar *q-balls*[5], que aparecem quando a simetria discreta é repassada para o caso contínuo, com simetria global [33]. Nesse caso, o potencial deve permitir que a carga de Noether[6] das excitações elementares, apresentadas no modelo, serem maiores que a carga gerada pela solução clássica.

Outras aplicações incluem o uso das excitações tipo *lump* no contexto da teoria de branas, onde elas podem levar a táquions se mantendo na brana [25], e à estruturas não-topológicas gravitacionais [34]. Recentes estudos tratam a respeito da estabilidade de modos fermiônicos, permanecendo em tais estruturas não-topológicas [35]. Contudo, mostramos o uso prático dos modelos tipo *lump* para descrever a presença de excitações localizadas em BECs [27].

[5]Em Teoria de Campos, *q-balls* é um tipo de sóliton não-topológico, esfericamente simétrico.

[6]Com o uso do teorema de Noether, que conecta simetrias contínuas a leis de conservação, mantendo a invariância da ação sob transformações infinitesimais das coordenadas e dos campos, segue uma equação de conservação que tem a forma de uma equação da continuidade, e portanto um termo associado a uma carga, conhecida como carga de Noether.

Capítulo 3

Sólitons em Condensados de Bose-Einstein

Neste capítulo revisamos a teoria dos gases de Bose diluídos não-uniformes com partículas interagentes, resfriados a temperaturas muito baixas. Nessas condições o sistema apresenta-se como um BEC. A existência desse estado da matéria como consequência da mecânica quântica foi inicialmente prevista por Einstein em 1925 [36], no seguimento do trabalho efetuado por Bose em 1924 [37]. A dinâmica da densidade de partículas do condensado é bem descrita por uma aproximação de campo médio, que leva a GPE. Na primeira parte nos concentramos na dedução dessa equação. Em seguida mostramos duas condições para obtermos uma redução da equação tridimensional (3D) para uma equação unidimensional (1D), conhecida por configuração de charuto. Por último mostramos como obter soluções solitônicas em tal configuração.

3.1 A equação de Gross-Pitaevskii

Seguindo as Refs. [7, 38], iniciamos a dedução da equação de GP introduzindo a matriz densidade de uma partícula, dada por

$$n^{(1)}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \langle \hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r})\hat{\Psi}(\mathbf{r}')\rangle, \tag{3.1}$$

no qual $\hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r})$ ($\hat{\Psi}(\mathbf{r})$) é o operador de campo de criação (aniquilação) de uma partícula no ponto $\mathbf{r}$. Essa é uma definição geral que se aplica a qualquer sis-

tema, independente da estatística, em equilíbrio ou fora do equilíbrio térmico. No caso de bósons os operadores de campo devem satisfazer as seguintes relações de comutação:

$$[\hat{\Psi}(\mathbf{r}), \hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r}')] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \qquad [\hat{\Psi}(\mathbf{r}), \hat{\Psi}(\mathbf{r}')] = 0. \tag{3.2}$$

O número total de partículas do sistema é dado por $N = \int d\mathbf{r} n(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r} n^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, em que $n(\mathbf{r}) = \langle \hat{\Psi}^{\dagger}(\mathbf{r})\hat{\Psi}(\mathbf{r})\rangle = n^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ é a densidade diagonal do sistema.

Se o sistema ocupa um estado puro, descrito pela função de onda de N-partículas $\Psi_n(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_N)$, a matriz densidade de uma partícula pode ser escrita, de acordo com a mecânica quântica, na forma

$$n_n^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = N \int d\mathbf{r}_2 ... d\mathbf{r}_N \Psi_n^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_N)\Psi_n(\mathbf{r}', \mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_N), \tag{3.3}$$

correspondendo a uma integração em $N - 1$ variáveis.

A matriz densidade de uma partícula está fortemente conectada com o comportamento de seu autovalor n_i, definido pela solução da equação de autovalor

$$\int d\mathbf{r}' n^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\phi_i(\mathbf{r}') = n_i\phi_i(\mathbf{r}). \tag{3.4}$$

A equação acima provê uma base natural de funções de onda ortonormalizadas de uma única partícula, isto é, $\int d\mathbf{r}\phi_i^*(\mathbf{r})\phi_j(\mathbf{r}) = \delta_{ij}$. Também, podemos obter a condição de normalização multiplicando (3.4) por $\phi_i^*(\mathbf{r})$, encontrando $\sum_i n_i = N$, que segue da relação de completeza $\sum_i \phi_i^*(\mathbf{r})\phi_i(\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$. Desse modo, conhecendo as autofunções ϕ_i e os autovalores n_i podemos escrever a matriz densidade de uma partícula da seguinte forma

$$n^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_i n_i\phi_i^*(\mathbf{r})\phi_i(\mathbf{r}'). \tag{3.5}$$

Os autovalores n_i estão relacionados com o número de ocupação de uma única partícula no correspondente estado ϕ_i. Assim, a condensação de Bose-Einstein ocorre quando um dos estados de uma partícula é ocupado de forma macroscópica, isto é, $n_{i=0} \equiv N_0$ é um número da ordem de N.

Uma consequência maior da diagonalização (3.5) é a possibilidade de identificar, de uma forma não-ambígua, a função de onda de uma única partícula ϕ_i para ambos os sistemas interagentes e não-uniformes. Usando essas funções podemos reescrever o operador de campo na forma

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \sum_i \phi_i \hat{a}_i, \tag{3.6}$$

em que $\hat{a}_i^\dagger$ ($\hat{a}_i$) são os operadores de criação (aniquilação) de uma partícula no estado ϕ_i, obedecendo à seguinte relação de comutação:

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger] = \delta_{ij}, \qquad [\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0. \tag{3.7}$$

É usual separar a contribuição do termo condensado ($i = 0$) dos outros componentes, tal que o operador de campo (3.6) passa a ser dado por

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \phi_0(\mathbf{r})\hat{a}_0 + \sum_{i\neq 0} \phi_i(\mathbf{r})\hat{a}_i. \tag{3.8}$$

O próximo ponto é a introdução da aproximação de Bogoliubov, que consiste em substituir os operadores $\hat{a}_0$ e $\hat{a}_0^\dagger$ por números complexos $\sqrt{N_0}$. Isto é equivalente a tratarmos o componente macroscópico $\phi_0\hat{a}_0$ do operador de campo (3.8) como um campo clássico. Desse modo, temos

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \Psi_0(\mathbf{r}) + \delta\hat{\Psi}(\mathbf{r}), \tag{3.9}$$

no qual definimos $\Psi_0(\mathbf{r}) = \sqrt{N_0}\phi_0$ e $\delta\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \sum_{i\neq 0} \phi_i(\mathbf{r})\hat{a}_i$. No caso de gases de Bose diluídos, a temperaturas muito baixas, podemos desprezar a contribuição do termo $\delta\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ da componente não-condensada. Então o operador de campo coincide exatamente com o campo clássico $\Psi_0(\mathbf{r})$, e o sistema comporta-se como um objeto clássico. Isso é análogo ao limite clássico da eletrodinâmica quântica no qual o campo eletromagnético clássico substitui inteiramente a descrição microscópica dos fótons.

A função $\Psi_0(\mathbf{r})$ é uma quantidade complexa, chamada de função de onda do condensado, caracterizada por um módulo e uma fase:

$$\Psi_0(\mathbf{r}) = |\Psi_0(\mathbf{r})|e^{iS(\mathbf{r})}. \tag{3.10}$$

O módulo determina a contribuição do condensado para a densidade diagonal. A fase $S(\mathbf{r})$ tem um papel na caracterização da coerência e no fenômeno de super fluidez. Nesta condição: $N_0 \gg 1$, o condensado funciona como um reservatório; uma vez que a adição de uma partícula no condensado não muda as propriedades físicas do sistema. Em outras palavras, o estado $|N\rangle$ contém N partículas e os estados $|N+1\rangle \propto \hat{a}_0^\dagger|N\rangle$ e $|N-1\rangle \propto \hat{a}_0|N\rangle$ são equivalentes físicos.

Um gás de Bose com partículas interagindo fracamente requer que a distância de atuação r_0 das forças de interação seja muito menor que a distância média entre as partículas $d = n^{-1/3}$, fixada pela densidade $n = N/V$ do gás, com V sendo o volume. Isso permite-nos considerar apenas configurações envolvendo pares de partículas interagentes e, em alguns casos também configurações com três partículas, sendo que casos com muitas partículas interagindo simultaneamente pode ser satisfatoriamente desprezadas. Outra consequência importante é que a distância entre duas partículas é sempre grande o bastante para justificar o uso de expressões assintóticas para a função de onda do seu movimento relativo, que é fixada pela amplitude de espalhamento. Isso implica que todas as propriedades do sistema podem ser expressas em termos dessa quantidade e não depende de detalhes mais específicos da interação de dois corpos.

Quando consideramos gases a temperaturas abaixo da temperatura crítica para a condensação de Bose-Einstein (ver Apêndice A), os valores relevantes para o momentum sempre satisfazem a desigualdade

$$\frac{pr_0}{\hbar} \ll 1. \tag{3.11}$$

Para tal momentum a amplitude de espalhamento torna-se independente da ener-

gia, bem como do ângulo de espalhamento e pode ser representada pelo seu valor de mais baixa energia, sendo determinada pelo comprimento de espalhamento a. Assim, o comprimento de espalhamento a caracteriza todos os efeitos da interação sobre as propriedades físicas do gás. Em particular, a condição de diluição pode ser escrita na forma

$$|a| \ll d. \tag{3.12}$$

Temos assim uma condição de diluição equivalente dada por $n|a|^3 \ll 1$. Contudo, próximo da ressonância de Feshbach a situação é diferente, a desigualdade (3.11) é ainda válida porém a condição de diluição (3.12) em geral não é satisfeita (ver Apêndice B).

O hamiltoniano do sistema, em termos do operador de campo $\hat{\Psi}$, é escrito na forma

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \int \left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla\hat{\Psi}^\dagger \nabla\hat{\Psi} \right) d\mathbf{r} + \int \hat{\Psi}^\dagger V_{ext}(\mathbf{r}) \hat{\Psi} d\mathbf{r} + \int \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi}^{\dagger\prime} V_{ef}^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\Psi} \hat{\Psi}' d\mathbf{r}' d\mathbf{r} \\ &+ \int \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi}^{\dagger\prime} \hat{\Psi}^{\dagger\prime\prime} V_{ef}^{(3)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}'') \hat{\Psi} \hat{\Psi}' \hat{\Psi}'' d\mathbf{r}'' d\mathbf{r}' d\mathbf{r}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

em que o primeiro termo da direita em (3.13) representa o termo cinético, $V_{ext}(\mathbf{r})$ é um potencial externo gerado pela armadilha magneto-óptica e $V_{ef}^{(i)}(\mathbf{r})$ é o potencial de interação entre i partículas. Até agora não falamos da dependência temporal e, de forma geral, o operador de campo pode depender explicitamente do tempo, isto é, $\hat{\Psi} = \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)$ e também podemos ter $V_{ext} = V_{ext}(\mathbf{r}, t)$ e $V_{ef}^{(i)} = V_{ef}^{(i)}(\mathbf{r}, t)$. A equação de movimento para o operador de campo $\hat{\Psi}$ é obtida substituindo (3.13) na equação de Heisenberg:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = [\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), \hat{H}] = \frac{\delta \hat{H}}{\delta \hat{\Psi}^\dagger}. \tag{3.14}$$

Desse modo obtemos

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\Psi}(\mathbf{r},t) = \left[-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + V_{ext}(\mathbf{r},t) + \int \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}',t)V_{ef}^{(2)}(\mathbf{r},\mathbf{r}',t)\hat{\Psi}(\mathbf{r}',t)d\mathbf{r}' + \int \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}'',t)\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}',t)V_{ef}^{(3)}(\mathbf{r},\mathbf{r}',\mathbf{r}'',t)\hat{\Psi}(\mathbf{r}',t)\hat{\Psi}(\mathbf{r}'',t)d\mathbf{r}'d\mathbf{r}''\right]\hat{\Psi}(\mathbf{r},t). \tag{3.15}$$

Nesse ponto podemos usar a aproximação de Bogoliubov, que consiste em substituir o operador de campo $\hat{\Psi}$ pelo campo clássico Ψ_0. Em seguida, supomos que a função Ψ_0 varia pouco para distâncias da ordem do alcance das forças de interação, tal que podemos substituir $\mathbf{r}'$ e $\mathbf{r}''$ por $\mathbf{r}$ no argumento de Ψ_0 a fim de obtermos a equação

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi_0(\mathbf{r},t) = \left(-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + V_{ext}(\mathbf{r},t) + g_3(\mathbf{r},t)|\Psi_0(\mathbf{r},t)|^2 + g_5(\mathbf{r},t)|\Psi_0(\mathbf{r},t)|^4\right)\Psi_0(\mathbf{r},t), \tag{3.16}$$

em que $g_i(\mathbf{r},t) = \int V_{ef}^{(i)}(\mathbf{r},t)d\mathbf{r}$. Essa é a conhecida equação de Gross-Pitaevskii (originalmente sem o termo quíntico) e foi obtida independentemente por Gross [39] e Pitaevskii [40] em 1961 e é a principal ferramenta teórica para a investigação de gases de Bose diluídos não-uniformes a baixas temperaturas. Ela tem uma forma típica de uma equação de campo médio no qual a função de onda deve ser calculada de maneira autoconsistente. Sua validade é assegurada pela condição de diluição (3.12) dado que a temperatura da amostra é suficientemente baixa.

3.2 Redução para o caso unidimensional

A redução da GPE 3D (3.16) para uma equação unidimensional está relacionada com a forma do aprisionamento do condensado. Esse regime é obtido pelo emprego de uma armadilha do tipo charuto, que confina fortemente duas direções espaciais e deixa a terceira "livre".

A redução da GPE cúbica 3D para 1D foi recentemente apresentada na Ref.[41]

via uma abordagem variacional. Aqui apresentamos uma generalização dessa redução para o caso cúbico-quíntico [42].

Primeiramente, consideramos um BEC diluído constituído por bósons de massa m e confinado na direção longitudinal por um potencial genérico $V(x,t)$ e no plano transversal pelo potencial harmônico

$$U(y,z) = \frac{m}{2}\omega_\perp^2\left(y^2+z^2\right), \tag{3.17}$$

em que $\omega_\perp$ é a frequência na direção transversal do confinamento. O comprimento harmônico característico é dado por $a_\perp = (\hbar/(m\omega_\perp))^{1/2}$. O sistema é bem descrito pela GPE 3D que, em unidades reescaladas, é escrita na forma (veja o Apêndice C)

$$i\frac{\partial\Psi_0}{\partial t} = \left[-\frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{2}\left(y^2+z^2\right) + V(x,t) + 2\pi g_3|\Psi_0|^2 + 3\pi^2 g_5|\Psi_0|^4\right]\Psi_0, \tag{3.18}$$

em que $g_i = 2Na_s^{(i)}/a_\perp$, com N sendo o número de átomos e $a_s^{(i)}$ o comprimento de espalhamento do potencial interatômico. Note que g_i pode depender de x e de t de acordo com a dependência em $a_s^{(i)}$. Essa equação é obtida da densidade de lagrangiana

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{i}{2}\big(\Psi_0^*\frac{\partial\Psi_0}{\partial t} + \Psi_0\frac{\partial\Psi_0^*}{\partial t}\big) - \frac{1}{2}|\nabla\Psi_0|^2 - \frac{1}{2}(y^2+z^2)|\Psi_0|^2 \\ &- V(x,t)|\Psi_0|^2 - \pi g_3|\Psi_0|^4 - \pi^2 g_5|\Psi_0|^6.\end{aligned} \tag{3.19}$$

Neste ponto aplicamos uma abordagem variacional, adotando o seguinte *ansatz* para descrever o estado dado pela GPE 3D:

$$\Psi_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma}\exp\left[-\left(\frac{y^2+z^2}{2\sigma^2}\right)\right]\psi, \tag{3.20}$$

em que $\sigma(x,t)$ e $\psi(x,t)$ são a largura transversal e a função de onda axial, respectivamente.

Inserindo esse *ansatz* em (3.19), realizando a integração sobre y e z e negligenciando as derivadas espaciais da largura transversal (aproximação adiabática [41]),

encontramos a densidade de lagrangiana efetiva

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{L}} &= \frac{i}{2}(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t}+\psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t})-\frac{1}{2}\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|^2-\frac{1}{2\sigma^2}|\psi|^2 \\ &\quad -\frac{\sigma^2}{2}|\psi|^2-V(x,t)|\psi|^2-\frac{1}{2}g_3\frac{|\psi|^4}{\sigma^2}-\frac{1}{3}g_5\frac{|\psi|^6}{\sigma^4}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Por um lado, considerando apenas interações de duas partículas ($g_5 = 0$), a Eq. (3.21) nos leva a um sistema de duas equações de Euler-Lagrange, obtidas pela variação $\bar{\mathcal{L}}$ com relação a σ e ψ^*:

$$\sigma^4 = 1+g|\psi|^2\,, \tag{3.22}$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \Big[-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x,t)\Big]\psi+\frac{1+(3/2)g|\psi|^2}{\sqrt{1+g|\psi|^2}}\psi, \tag{3.23}$$

sendo essa última conhecida como equação de Schrödinger não-polinomial (*non-polynomial Schrödinger equation* - NPSE). Por outro lado, considerando $g_5 \neq 0$ e realizando a variação $\bar{\mathcal{L}}$ com relação a σ e ψ^* obtemos:

$$\sigma^6-(1+g_3|\psi|^2)\sigma^2-\frac{4}{3}g_5|\psi|^4 = 0, \tag{3.24}$$

e

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x,t)\right]\psi+\frac{1}{6}\frac{(144g_5|\psi|^4+12\sqrt{A})^{2/3}+12(1+g_3|\psi|^2)}{(144g_5|\psi|^4+12\sqrt{A})^{1/3}}, \tag{3.25}$$

com $A = -12[1+g_3|\psi|^2(3+3g_3|\psi|^2+g_3^2|\psi|^4)]+108g_5|\psi|^4$. Esta é uma generalização da NPSE (3.23).

3.2.1 Regime de acoplamento fraco

i) *Caso cúbico-quíntico* - Agora, para obtermos o regime de acoplamento fraco devemos considerar $g_3|\psi|^2 \ll 1$ e $g_5|\psi|^4 \ll 1$, tal que podemos expandir, em séries de potência de $g_3|\psi|^2$ e $g_5|\psi|^4$, a largura quadrática σ^2 em (3.24). Em primeira ordem de $g_3|\psi|^2$ e $g_5|\psi|^4$, temos

$$\sigma^2 = 1+\frac{1}{2}g_3|\psi|^2+\frac{2}{3}g_5|\psi|^4, \tag{3.26}$$

e obtemos a equação de GP 1D, com termos cúbico e quíntico para o campo $\psi(x,t)$, na forma

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \Big[-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V'(x,t) + g_3(x,t)|\psi|^2 + g_5(x,t)|\psi|^4 \Big]\psi, \tag{3.27}$$

com $V'(x,t) = V(x,t) + 1$. Note que a Eq. (3.27) tem a forma de uma NLSE 1D com não-linearidades cúbica e quíntica.

ii) *Caso cúbico ($g_5 = 0$)* - No regime de acoplamento fraco: $g_3|\psi|^2 \ll 1$, podemos expandir, em séries de potência de $g_3|\psi|^2$, a largura σ em (3.22). Em primeira ordem de $g_3|\psi|^2$, temos

$$\sigma = 1 + \frac{1}{4}g_3|\psi|^2, \tag{3.28}$$

e obtemos a equação de GP 1D para o campo $\psi(x,t)$ na forma

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \Big[-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V'(x,t) + g_3(x,t)|\psi|^2 \Big]\psi, \tag{3.29}$$

com $V'(x,t) = V(x,t) + 1$. Note que a Eq. (3.29) tem a forma de uma NLSE 1D.

3.2.2 Sólitons e *breathers* para a NLSE 1D

Como exemplo, para obtermos sólitons fundamentais na Eq. (3.29) consideramos uma solução do tipo $\psi(x,t) = \phi(x)e^{-i\mu t}$, em que μ é o potencial químico do condensado e ϕ é uma função real. Como um primeiro exemplo faremos $V'(x,t) = 0$. Assim, obtemos a equação ordinária

$$\mu\phi = -\frac{d^2\phi}{dx^2} + g\phi^3. \tag{3.30}$$

Note que ela é semelhante à equação de movimento na configuração estática obtida no capítulo anterior (Eq. (2.2)). Portanto, podemos empregar o formalismo de primeira ordem mostrado anteriormente a fim de obter

$$\frac{d\phi}{dx} = \sqrt{\frac{g}{2}\phi^4 - \mu\phi^2 + C}, \tag{3.31}$$

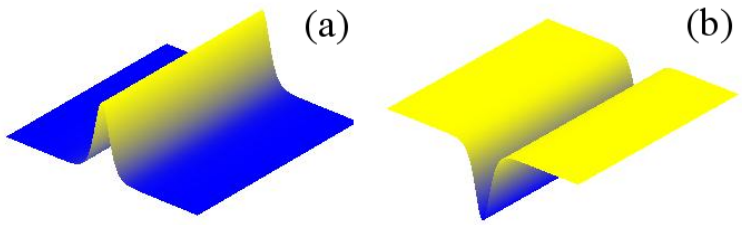

Figura 3.1: Solução tipo sóliton (a) brilhante e (b) escuro da Eq. (3.31).

onde C é uma constante de integração que depende das condições de contorno do sistema. Para sólitons brilhantes, nome dado devido ao fato da semelhança dessas soluções com soluções de pulsos de luz em cristais ou fibras ópticas, as condições de contorno são:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{d\phi}{dx}\to 0 \quad e \quad \phi(x\to\pm\infty)\to 0, \tag{3.32}$$

o que resulta termos $C = 0$ em (3.31). Considerando $\mu = -1$ e $g = -2$ a Eq. (3.31) tem uma solução dada por $\phi(x) = \mathrm{sech}(x)$, que é uma solução tipo sóliton fundamental, isto é, uma solução de mais baixa energia para esse sistema e, como comentado anteriormente, apresenta uma coerência de fase.

Por um lado, sólitons escuros, são soluções semelhantes a um vale sem luz em cristais, que satisfazem as seguintes condições de contorno:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{d\phi}{dx}\to 0 \quad e \quad \phi(x\to\pm\infty)\to\pm 1 \quad ou \quad \phi(x\to\pm\infty)\to\mp 1. \tag{3.33}$$

Aqui, diferente dos sólitons brilhantes, para obtermos os sólitons escuros devemos ter $C \neq 0$ em (3.31). Considerando $\mu = 2$ e $g = 2$ a Eq. (3.31) tem uma solução dada por $\phi(x) = \tanh(x)$. A Figura 3.1a mostra a solução tipo sóliton brilhante enquanto 3.1b mostra um sóliton escuro, dados por $|\psi|^2$, com ψ assumindo os valores acima.

Por outro lado, soluções do tipo *breather* (soluções que oscilam no tempo) podem ser obtidas por várias técnicas. Uma delas é o método do espalhamento inverso [43]. A Eq. (3.29), considerando $V' = 0$, tem uma solução tipo *breather* na forma

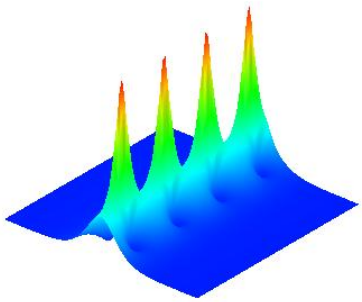

Figura 3.2: Solução tipo breather dado pela Eq. (3.34).

[43]

$$\Phi(x,t) = \frac{4(\cosh(3x) + 3e^{4it}\cosh(x))e^{it/2}}{(\cosh(4x) + 4\cosh(2x) + 3\cos(4t))}. \tag{3.34}$$

A Figura 3.2 mostra uma solução tipo *breather* da Eq. (3.29) considerando $\mu = g = -1$.

3.3 Detalhes experimentais

Quando supomos um confinamento forte em duas direções de propagação, como considerado anteriormente, o sistema se comporta em um regime quase 1D descrito pelas Eqs. (3.29) e (3.27). Como exemplo, descrevemos nas próximas linhas os requisitos necessários para produção e manipulação de condensados de átomos de lítio, seguindo a Ref. [44].

Armadilha magnética - Átomos de ^{7}Li são confinados em uma armadilha magnética com frequências longitudinal e transversal de 70 Hz e 800 Hz, respectivamente. Eles estão no subnível atômico ($F = 2$,$m_F = 2$), onde F e m_F são, respectivamente, o momento angular total e sua projeção, sendo resfriados por evaporação em uma armadilha magnética até uma temperatura de $\sim 1\mu$K.

Armadilha óptica - A armadilha óptica consiste em um único feixe laser, focado, deslocado para o comprimento de onda no vermelho, propagando na direção longitudinal, mais um par de feixes laser deslocados para o azul, focado cilindricamente (“nos pontos finais”), propagando no plano transversal, responsáveis pelo

confinamento longitudinal. O feixe único é produzido por um laser infravermelho de Nd:YAG, com um comprimento de onda de 1064 nm, focado com um raio de intensidade de 47μm e com uma potência de 750 mW. Os feixes das bordas longitudinais são obtidos através da geração de segundo harmônico de um outro laser de Nd:YAG, focado em um raio longitudinal de 22μm por 100μm transversal, com uma potência de 350 mW em cada feixe e separados por 230μm. Os feixes finais criam um potencial tipo caixa na direção longitudinal que auxilia o potencial criado pela armadilha magnética.

Uma vez a armadilha óptica ligada, a armadilha magnética é desligada. Após 50 ms um campo induzido acima de 1000 G é aplicado. Um período de ~ 200 ms permite a estabilização do campo induzido ao valor escolhido acima, transferindo os átomos do estado (2, 2) para o estado (1, 1) por uma troca adiabática com duração de 15 ms e largura de 1 MHz. A pureza da população do estado (1, 1) é medida ser maior que 98%.

Com as interações atrativas entre átomos no estado (2, 2) o número de átomos condensados possível é limitado para uma fração muito pequena do número total. Contudo, interações entre átomos no estado (1, 1) em campo magnético nulo são repulsivas, com um comprimento de espalhamento $a = 5a_0$, onde a_0 é o raio de Bohr. Embora esse fato assegure a estabilidade do condensado, a taxa de sua formação é limitada pela taxa de termalização, com escala de a^2. De fato, para aumentar essa taxa podemos fazer uso da ressonância de Feshbach, ajustada magneticamente, usada para aumentar o valor de a (ver Apêndice B). No caso de átomos de ^{7}Li, eles exibem uma ressonância para um campo externo da ordem de 725 G.

Os átomos são então resfriados por evaporação na armadilha óptica, dependendo da intensidade do feixe infravermelho, e através do ajuste do campo externo de 710 G, onde o comprimento de espalhamento é grande ($\sim 200a_0$) e positivo. O condensado é então formado com aproximadamente 3×10^5 átomos.

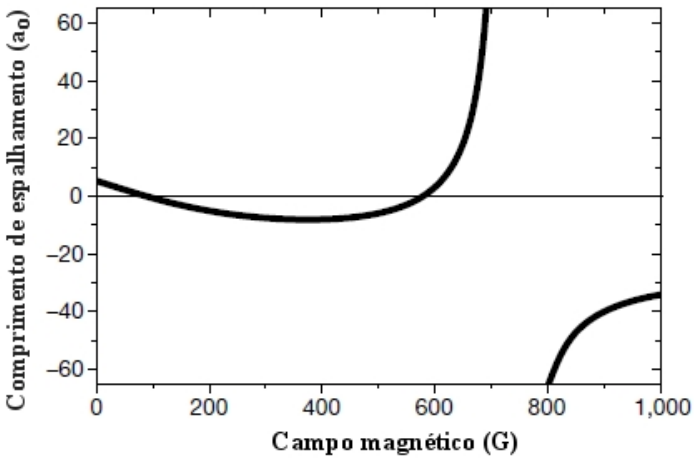

Figura 3.3: Ressonância de Feshbach. Cálculo do comprimento de espalhamento em função do campo magnético para átomos de ^{7}Li no estado (1, 1). Figura retirada da Ref. [44].

Logo após a formação do condensado, com um comprimento de espalhamento grande e positivo, a intensidade do campo é abaixada para 545 G e 630 G, onde a é pequeno e negativo ou pequeno e positivo.

Para $a > 0$ o condensado espalha-se enquanto para $a < 0$ ele localiza-se, formando estruturas localizadas (sólitons brilhantes). Na Ref. [44] esses sólitons tem sido observados por intervalos de tempo excedendo 3 s, uma limitação devido a perda de átomos fazendo com que o pacote de onda se espalhe após esse tempo.

Capítulo 4

Sólitons em Condensados de Bose-Einstein modulados no espaço e no tempo

A NLSE foi estudada em diversas situações. As interações não-lineares são usualmente de natureza cúbica, porém há sistemas que apresentam não-linearidades cúbica e quíntica (CQ). O caso de não-linearidades CQ abre novas possibilidades, havendo muitas aplicações interessantes, especialmente em óptica não-linear, como por exemplo, para descrever a propagação de pulsos em fibras ópticas não-lineares duplamente dopada, quando o tipo de dopante varia ao longo da fibra, com o valor e o sinal dos parâmetros CQ controlados pela não-linearidade, ajustados de acordo com escolhas apropriadas das características dos dois dopantes [45]. Existem outras aplicações, e aqui citamos os BECs, onde uma diversidade de não-linearidades podem aparecer controladas por interações ópticas [46].

A presença de BECs de átomos aprisionados foi experimentalmente realizado em [47, 48, 49]. Em seguida, sólitons escuros e brilhantes em BECs foram formados com átomos de ^{87}Rb repulsivos em [50, 51] e com átomos de ^{7}Li atrativos em [44, 52], respectivamente. Ao longo dos anos, muitos avanços interessantes e motivações foram aparecendo, como podemos ver, por exemplo, nas Refs. [5, 53].

Existem várias linhas de investigações distintas da NLSE. Uma possibilidade interessante foi iniciada em [54], com a introdução de um procedimento que trata com a NLSE com coeficientes variáveis. Ele é baseado em uma transformação de

similaridade, que transforma a NLSE não-autônoma em uma equação estacionária que é fácil de ser resolvida [54, 55]. Em particular, no recente trabalho de Belmonte-Beitia, Pérez-García, Vekslerchik, e Konotop (BPVK) [8] os autores lidam com a NLSE

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + v(x,t)\Psi + g(x,t)|\Psi|^2\Psi, \tag{4.1}$$

onde $v(x,t)$ e $g(x,t)$ são o potencial de aprisionamento e a não-linearidade cúbica, respectivamente, e podem agora variar com dependências das coordenadas espaciais e temporais.

Aqui, mostraremos um tratamento inspirado no procedimento de BPVK [8] para resolver o caso onde a não-linearidade do sistema pode apresentar o termo cúbico e quíntico. Esse resultado foi publicado recentemente como *Rapid Communication* no *Physical Review E* [27]. Focaremos então no caso descrito pela NLSE CQ, dada por

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + v(x,t)\Psi + g_3(x,t)|\Psi|^2\Psi + g_5(x,t)|\Psi|^4\Psi, \tag{4.2}$$

onde $v(x,t)$ é o potencial de aprisionamento, $g_3(x,t)$ e $g_5(x,t)$ controlam os termos não-lineares de natureza cúbica e quíntica, respectivamente. O termo quíntico adicionado em (4.2) simula colisões de três corpos e/ou desvio do comprimento de espalhamento do condensado aprisionado [56].

4.1 Transformação de Similaridade

A ideia é escrever a solução da Eq. (4.2) dada por

$$\Psi(x,t) = \rho(x,t)e^{i\phi(x,t)}\Phi(\zeta(x,t)), \tag{4.3}$$

com a finalidade de reescrever (4.2) na forma estacionária

$$\mu\Phi(\zeta) = -\frac{d^2\Phi(\zeta)}{d\zeta^2} + G_3\Phi(\zeta)^3 + G_5\Phi(\zeta)^5, \tag{4.4}$$

onde μ é o autovalor da equação não-linear acima (conhecido como potencial químico), G_3 e G_5 são constantes reais que controlam as não-linearidades CQ. A substituição da Eq. (4.3) em (4.2) leva a Eq. (4.4); porém é necessário termos:

$$\rho\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho^2(\partial\phi/\partial x))}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial\zeta}{\partial t}+2\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x}=0,$$
$$\frac{\partial\left(\rho^2(\partial\zeta/\partial x)\right)}{\partial x}=0. \tag{4.5}$$

Agora escrevemos $\zeta(x,t)=F(\xi(x,t))$, onde F é uma função a ser determinada, e $\xi(x,t)=\gamma(t)x+\delta(t)$, cuja forma é interessante pois permite-nos determinar a largura das soluções localizadas na forma $1/\gamma(t)$ e sua posição do centro de massa como $-\delta(t)/\gamma(t)$. Usando as Eqs. (4.5) obtemos o novo conjunto de equações:

$$\rho(x,t) = \left(\gamma/(\partial F/\partial\xi)\right)^{1/2}, \tag{4.6}$$
$$\phi(x,t) = -\frac{(\partial\gamma/\partial t)}{4\gamma}x^2-\frac{(\partial\delta/\partial t)}{2\gamma}x+a(t), \tag{4.7}$$
$$v(x,t) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}-\frac{\partial\phi}{\partial t}-\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2-\frac{\mu\gamma^4}{\rho^4}, \tag{4.8}$$
$$g_3(x,t) = G_3\gamma^4\rho^{-6}, \tag{4.9}$$
$$g_5(x,t) = G_5G_3^{-1}\rho^{-2}g_3(x,t)=G_5\gamma^4\rho^{-8}, \tag{4.10}$$

no qual $a(t)$ é uma função arbitrária do tempo. Para encontrarmos $F(\xi)$ usamos a Eq. (4.6), tal que tenhamos soluções da NLSE CQ com energia finita.

Esse é um procedimento geral, e notamos da Eq. (4.10) que se tomarmos o limite $G_5\to 0$ obteremos $g_5(x,t)\to 0$, que nos leva de volta ao caso proposto na Ref. [8]. Esse procedimento pode ser estendido para outras não-linearidades: se adicionarmos na Eq. (4.2) um novo termo $g_7(x,t)|\Psi|^6\Psi$, etc, em (4.4) deveríamos acrescentar $G_7\Phi^7$, etc, com os novos termos não-lineares na forma $g_7(x,t)$=$G_7G_5^{-1}\rho^{-2}g_5(x,t)$= $G_7G_3^{-1}\rho^{-4}g_3(x,t)$=$G_7\gamma^4\rho^{-10}$, e assim por diante.

4.2 Sólitons Brilhantes e Escuros

Ilustraremos o procedimento com exemplos de interesse. Iremos focar nossa atenção no caso de não-linearidades específicas. Essa não é uma tarefa trivial, porém, sabemos que no caso de BEC com interações ópticas controladas temos vários tipos de padrão para a não-linearidade [7, 8, 45, 46, 53, 54, 55, 56, 57, 58]. Desse modo, como um exemplo simples, supomos que a não-linearidade cúbica é dada explicitamente por

$$g_3(x,t) = \gamma e^{\xi^2/b^2}, \tag{4.11}$$

sendo b um parâmetro real – iremos usar ao longo dessa discussão o valor $b = 8$. A partir dessa escolha temos

$$\rho(x,t) = G_3^{1/6}\gamma^{1/2}e^{-\xi^2/6b^2}. \tag{4.12}$$

A não-linearidade quíntica é agora controlada por

$$g_5(x,t) = G_5 G_3^{-4/3} e^{4\xi^2/3b^2}, \tag{4.13}$$

e o potencial dado pela Eq. (4.8) tem a forma

$$v(x,t) = \omega^2 x^2 + f_1 x + f_2 - \mu\gamma^2 G_3^{-2/3} e^{2\xi^2/3b^2}, \tag{4.14}$$

sendo ω, f_1 e f_2 funções dependentes do tempo, tais que

$$\omega^2(t) = \gamma^4 + \frac{1}{4\gamma}\frac{d^2\gamma}{dt^2} - \frac{1}{2\gamma^2}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2, \tag{4.15}$$

$$f_1(t) = 2\gamma^3\delta + \frac{1}{2\gamma}\frac{d^2\delta}{dt^2} - \frac{1}{\gamma^2}\frac{d\gamma}{dt}\frac{d\delta}{dt}, \tag{4.16}$$

$$f_2(t) = \gamma^2 + \gamma^2\delta^2 - \frac{1}{4\gamma^2}\left(\frac{d\delta}{dt}\right)^2 - \frac{da}{dt}. \tag{4.17}$$

Definimos $\chi = 1/\gamma$ com a finalidade de reescrever a Eq. (4.15) na forma da equação de Ermakov-Pinney [8, 59]:

$$\frac{d^2\chi}{dt^2} + 4\omega^2(t)\chi = \frac{4}{\chi^3}, \tag{4.18}$$

cuja solução para γ é dada por

$$\gamma(t) = \left[2y_1^2(t) + 2y_2^2(t)/W^2\right]^{-1/2}, \tag{4.19}$$

onde W é o Wronskiano das duas soluções linearmente independentes y_1 e y_2 da equação de Mathieu: $(d^2y/dt^2)+4\omega^2(t)y=0$. Para mais detalhes o leitor é remetido à Ref. [59].

Escolhemos

$$\omega^2(t) = 1 + \varepsilon\cos(\omega_0 t), \tag{4.20}$$

para obtermos soluções analíticas. Os resultados acima são gerais e podem ser usados para investigar exemplos explícitos, como considerados abaixo.

Sólitons Brilhantes

Uma importante questão que aparece no caso de não-linearidades CQ é que podemos resolver a Eq. (4.4) para sólitons brilhantes e escuros, dependendo dos valores dos parâmetros que controlam as não-linearidades em um sistema específico. Como um primeiro exemplo, vamos considerar um caso simples no qual o autovalor da equação estacionária (4.4) é nulo, $\mu = 0$. Nesse caso, se escolhermos os parâmetros cúbico e quíntico dados por $G_3 = 2$ e $G_5 = -3$, escrevemos a Eq. (4.4) como

$$\frac{d^2\Phi(\zeta)}{d\zeta^2} = 2\Phi^3(\zeta) - 3\Phi^5(\zeta). \tag{4.21}$$

A solução é dada por $\Phi(\zeta) = 1/\sqrt{1+\zeta^2}$. Ela tem uma forma bem definida, sendo do tipo de um sóliton brilhante, tal que a densidade de átomos no condensado apresenta um aglomerado na forma de um "morro", como mostrado na Fig. 4.1a. Para obtermos as condições de contorno corretas, devemos ter $\zeta \to \pm\infty$ quando $x \to \pm\infty$, e desse modo escolhendo $\zeta(x,t) = F(\xi(x,t))$ apropriadamente para fazermos com que essa solução se comporte de acordo com as condições requisitadas. De acordo com as Eqs. (4.6), devemos ter $F(\xi) = G_3^{-1/3}\int d\xi e^{\xi^2/3b^2}$. Note

que a solução do tipo sóltion brilhante é localizada, sendo ela muito próxima de uma secante hiperbólica, que é a solução padrão para sólitons brilhantes, também mostrada na Fig. 4.1a, para comparação.

Como mostrado no Cap. 2, a forma acima para encontrar sólitons brilhantes pode também ser obtida em modelos de campos escalares relativísticos. Seguiremos, por exemplo, a Ref. [24], que sugere várias maneiras distintas de modificar a forma das soluções tipo sólitons brilhantes.

Sólitons Escuros

Para obtermos sólitons escuros devemos escolher um autovalor não-nulo, $\mu \neq 0$. Em seguida para termos soluções analíticas simples vamos considerar, por exemplo, o caso $\mu = 3$, $G_3 = 6$ e $G_5 = -3$. Nesse caso a Eq. (4.4) passa a ser escrita na forma

$$\frac{d^2\Phi(\zeta)}{d\zeta^2} = -3\Phi(\zeta) + 6\Phi^3(\zeta) - 3\Phi^5(\zeta). \tag{4.22}$$

A solução é dada por $\Phi(\zeta) = \zeta/\sqrt{1+\zeta^2}$. Ela tem a forma de um *kink*, como mostrado na Fig. 4.1b, e assim $|\Phi(\zeta)|^2$ é agora um sóliton escuro. É interessante notar que essa solução também aparece em física de altas energias, como reportado anteriormente em [30]. Essa solução é próxima da solução padrão dos sólitons escuros, que são descritos pela tangente hiperbólica, que também é mostrada na Fig. 4.1b, para comparação.

A Eq. (4.21) leva à soluções do tipo sólitons brilhantes. Desse modo, a função de onda que resolve a Eq. (4.2) adquire a forma

$$\Psi(x,t) = \frac{2^{1/6}\gamma^{1/2}e^{i\phi}e^{-\xi^2/6b^2}}{\sqrt{1+\zeta^2}}, \tag{4.23}$$

onde $\phi = \phi(x,t)$ é real, obtido através da Eq. (4.7).

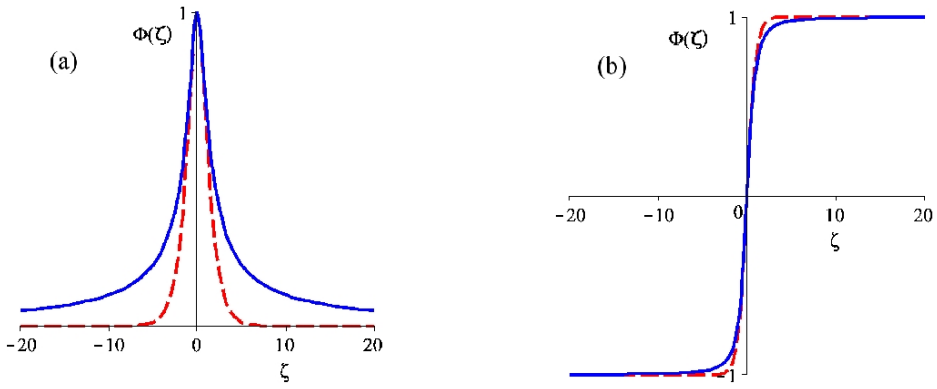

Figura 4.1: Gráficos de $\Phi(\zeta)$ para o sóliton brilhante (a) (azul, linha sólida) e a $\mathrm{sech}(\zeta)$ (vermelha, linha tracejada), e para o sóliton escuro (b) (azul, linha sólida) e a $\tanh(\zeta)$ (vermelha, linha tracejada).

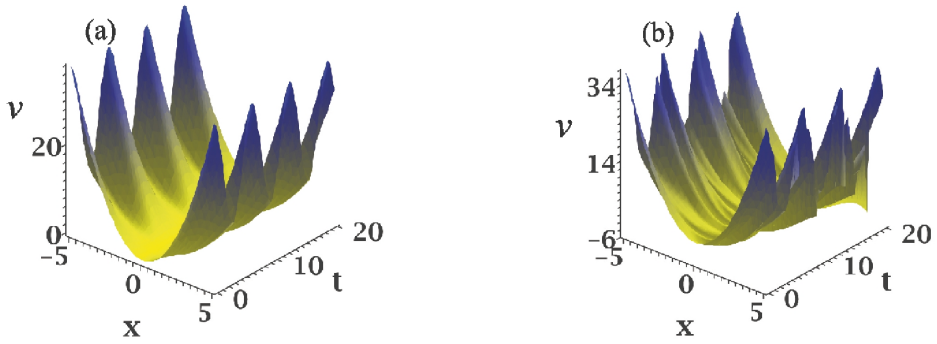

Figura 4.2: Gráficos do potencial de armadilhamento $v(x,t)$ dado pela Eq. (4.24) para o sóliton brilhante ressonante (a) e pela Eq. (4.27) para o sóliton escuro ressonante (b), seguindo os intervalos $-3 < x < 3$ e $0 < t < 20$.

Soluções Específicas

Uma solução específica pode ser construída a fim de obter-se sólitons ressonantes. Ela é dada por $\delta(t) = 0$, $\mu = 0$ e $a(t) = \int \gamma^2(t)dt$. Nesse caso, temos

$$v(x,t) = \omega^2(t)x^2, \tag{4.24}$$

$$g_5(x,t) = -3(2)^{-4/3}e^{4\xi^2/3b^2}, \tag{4.25}$$

com $g_3(x,t)$ dado pela Eq. (4.11). Na Fig. 4.2a mostramos o potencial de confinamento (4.24) na forma padrão, para mostrar seu comportamento em função do espaço e do tempo. Podemos compará-lo com o potencial de aprisionamento para o caso $\mu \neq 0$, Fig. 4.2b, no qual os sólitons escuros aparecem.

Sólitons brilhantes aparecem quando escolhemos adequadamente os valores de

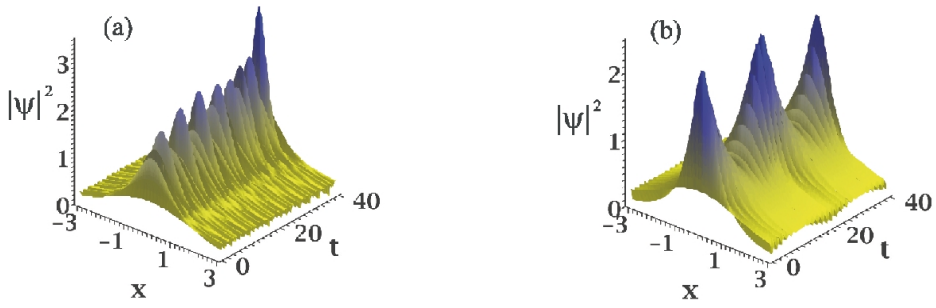

Figura 4.3: Gráficos de $|\Psi(x,t)|^2$ para o sóliton brilhante ressonante, usando $\epsilon = 0.5$ e $\omega_0 = 1$ (a), e do sóliton brilhante com batimento, usando $\epsilon = 0$ (b). Os dados iniciais para a Eq. (4.18) são $\chi(0) = \sqrt{2}$ e $d\chi/dt(0) = 0$.

ε e ω_0 na Eq. (4.20). Na Fig. 4.3 mostramos sólitons ressonantes e soluções tipo *breather* (com a sua amplitude mudando de um valor máximo para um outro intermediário ao longo do tempo), para escolhas específicas dos parâmetros $\epsilon = 0.5$ com $\omega_0 = 1$ e $\epsilon = 0$, respectivamente. Também podemos obter soluções quase periódicas e soluções com o centro de massa do sistema se movendo com relação a coordenada x, as quais que serão mostradas no caso escuro.

Como podemos ver, a Eq. (4.22) nos permite obter sóliton escuros. Assim, a Eq. (4.3) lê-se

$$\Psi(x,t) = \frac{6^{1/6}\gamma^{1/2}e^{i\phi}\zeta e^{-\xi^2/6b^2}}{\sqrt{1+\zeta^2}}. \tag{4.26}$$

Se fizermos $\delta(t) = 0$, $\mu \neq 0$ e $a(t) = \int \gamma^2(t)dt$, obteremos

$$v(x,t) = \omega^2(t)x^2 - \mu\, 6^{-2/3}\gamma^2 e^{2\xi^2/3b^2}, \tag{4.27}$$

$$g_5(x,t) = -\frac{1}{2}\, 6^{-1/3} e^{4\xi^2/3b^2}, \tag{4.28}$$

com $g_3(x,t)$ dado pela Eq. (4.11). Na Fig. 4.2b mostramos o potencial de aprisionamento (4.27) na forma padrão, para a solução ressonante, para mostrar seu comportamento como uma função do espaço e do tempo. Note que para sólitons escuros o potencial de aprisionamento apresenta um comportamento diferente quando comparado com o caso dos sólitons brilhantes – veja a Fig. 4.2. A presença de um autovalor não-nulo μ modifica as formas e a profundidade dos potenciais para o caso de sólitons escuros.

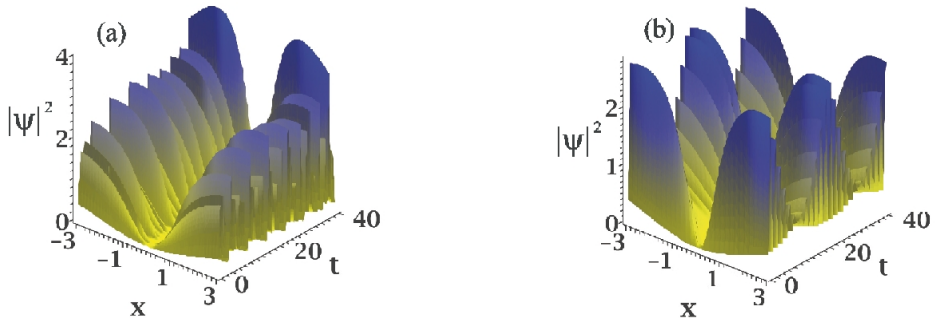

Figura 4.4: Gráficos do $|\Psi(x,t)|^2$ para o sóliton escuro ressonante, usando $\epsilon = 0.5$ e $w_0 = 1$ (a) e do sóliton escuro com batimento, usando $\epsilon = 0$ (b). Usamos os dados iniciais para a Eq. (4.18) da mesma forma que a Fig. 4.3.

Para os sólitons escuros podemos ter também vários tipos de soluções. Os sólitons escuros ressonantes aparecem com uma escolha apropriada de ε e ω_0 na Eq. (4.20), assim como mostrado na Fig. 4.4. Os sólitons escuros com batimento são obtidos fazendo $\varepsilon = 0$ na Eq. (4.20). Neste caso temos $\omega(t) = 1$, e isto nos leva a $\gamma(t) = 2/\sqrt{1 + 15\cos^2(2t)}$. A densidade de probabilidade $|\Psi(x,t)|^2$ para o sóliton escuro com batimento é também mostrado na Fig. 4.4. Se fizermos $\omega_0 = \sqrt{2}/2$ na Eq. (4.20), podemos usar $\gamma(t)$ acima para obter sólitons quase-periódicos, como mostramos explicitamente na Fig. 4.5.

Em seguida escolhemos $\delta(t)=0$, para fixar o centro de massa da solução; contudo, se escolhermos $\delta(t) \neq 0$ podemos fazê-lo mover. Por simplicidade, consideramos o caso $\varepsilon = 0$ na Eq. (4.20), e obtemos $\gamma(t)$ com a mesma forma dada acima. Então, temos $f_1(t) = 0$ em (4.16) e $f_2(t) = 0$ em (4.17) com a introdução de $\tau(t) = \int \gamma^2(t)dt$, que leva a $\delta(t) = \cos(2\tau(t))$ e $a(t) = \tau(t) + (1/4)\sin(4\tau(t))$. Desse modo, temos um sóliton escuro se movendo na forma mostrada explicitamente na Fig. 4.6.

4.3 Sóliton em potenciais atrativos e expulsivos

Nesta seção vamos mostrar soluções tipo sóliton em sistemas descritos pela NLSE não-autônoma com o potencial variando de um perfil atrativo para um perfil

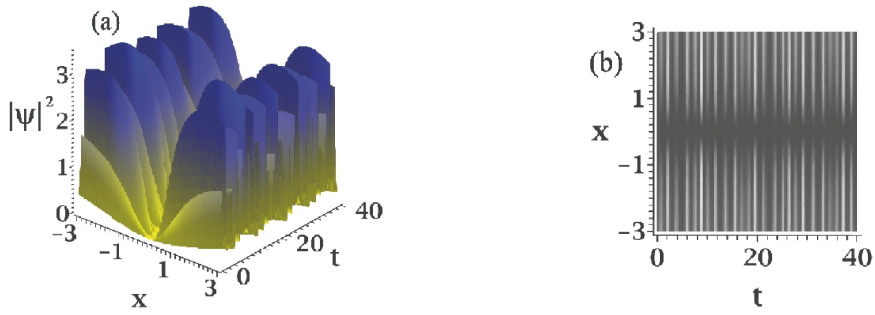

Figura 4.5: Gráfico do $|\Psi(x,t)|^2$ para o sóliton escuro quase periódico, com $\varepsilon = 0.5$ e $\omega_0 = \sqrt{2}/2$ na Eq. (4.20) (a). O comportamento quase-periódico é melhor compreendido no painel (b). Usamos os dados iniciais da Eq. (4.18) assim como na Fig. 4.3.

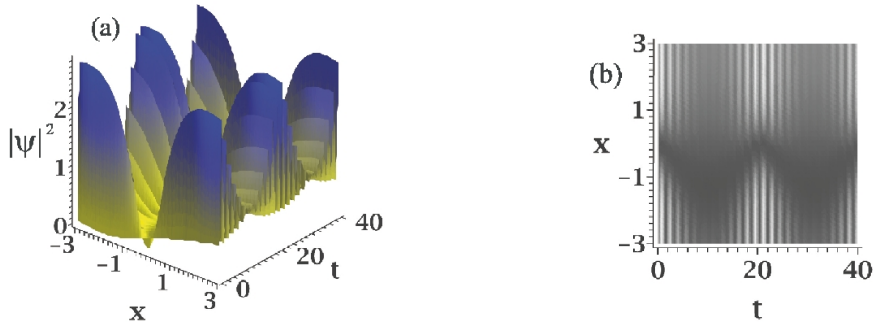

Figura 4.6: Gráfico do $|\Psi(x,t)|^2$ para o sóliton escuro com batimento se movendo (a). O movimento do centro de massa pode ser melhor observado no painel (b). Usamos os dados iniciais para a Eq. (4.18) conforme aqueles da Fig. 4.3.

expulsivo ao longo do tempo[7]. Em particular, na Ref. [52] foi considerado a possibilidade de mudar o potencial, usualmente harmônico e atrativo, para um comportamento completamente distinto, o caso expulsivo. Essa possibilidade iniciou várias investigações com potenciais expulsivos, com uma variedade de interessantes motivações [61, 62, 63, 64].

O sistema considerado aqui suporta sólitons brilhantes e escuros, com uma diversidade de fatores, dependendo dos parâmetros específicos do sistema. Na Ref. [65] os autores apresentaram um estudo muito recente sobre a formação de sólitons brilhantes e escuros na presença de não-linearidade cúbica. Diferente de [65], estamos interessados em investigar o aparecimento de sólitons brilhantes e escuros na presença de não-linearidades com termos cúbico e quíntico.

[7]Esse trabalho foi recentemente aceito para publicação (ver Ref. [60]).

Implementaremos o procedimento focando nossa atenção na NLSE da forma geral

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + v(x,t)\Psi + P(|\Psi|^2)\Psi, \tag{4.29}$$

onde $v(x,t)$ é o potencial e $P(|\Psi|^2)$ é a função polinomial

$$P(|\Psi|^2) = \sum_{n=1}^{N} g_{2n+1}(x,t)|\Psi|^{2n}. \tag{4.30}$$

Os coeficientes $g_{2n+1}(x,t)$ descrevem as não-linearidades presentes no sistema. Aqui estamos usando a notação convencional, no qual x, t e todas as outras quantidades são adimensionais.

Vamos supor a validade da aproximação unidimensional, que é uma aproximação usual quando trabalhamos com a restrição $a_s \ll a_\perp \ll \lambda \ll a_{||}$, com a_s sendo o comprimento de espalhamento, λ a escala espacial do pacote de onda, $a_\perp$ e $a_{||}$ os comprimentos transversal e longitudinal característicos, respectivamente, como mostrado na Seção 3.2.

Usaremos agora a transformação de similaridade, já detalhada na Seção 4.1. Por simplicidade usaremos agora a seguinte conversão: $\gamma(t) = 1/\chi(t)$ e também $\delta = 0$. Novamente, a principal ideia do procedimento é transformar a NLSE não-autônoma (4.29) na seguinte equação estacionária

$$\mu\Phi(\zeta) = -\frac{d^2\Phi(\zeta)}{d\zeta^2} + Q(|\Phi|^2)\Phi(\zeta), \tag{4.31}$$

onde μ é o autovalor da equação acima e $Q(|\Phi|^2)$ tem a forma

$$Q(|\Phi|^2) = \sum_{n=1}^{N} G_{2n+1}|\Phi|^{2n}, \tag{4.32}$$

no qual os coeficientes G_{2n+1} são agora parâmetros constantes e reais.

4.3.1 Caso Cúbico

Como primeiro exemplo, vamos focar no caso em que a não-linearidade cúbica pode ser escrita na forma

$$g_3(x,t) = \mathrm{sgn}(G_3)\,\chi^{-1}\,[1+\lambda\exp(-\xi^2)]^3, \tag{4.33}$$

onde λ é um parâmetro real que controla o comportamento da não-linearidade cúbica – ao longo do texto usaremos $\lambda = 0.5$. Essa não-linearidade pode ser obtida pela aplicação de três feixes laser gaussiano modulado sobre o BEC, como demonstrado experimentalmente na Ref. [46], realizando interações ópticas controladas via ressonância de Feshbach. Para ver isso, expandimos o termo cúbico em (4.33) para obter $1+3\lambda e^{-\xi^2}+3\lambda^2 e^{-2\xi^2}+\lambda^3 e^{-3\xi^2}$, com cada termo gaussiano representando a ação de um feixe laser com intensidade, frequência e cintura (largura a meia altura) ajustados apropriadamente.

Usando (4.33) temos

$$\rho(x,t) = \mathrm{abs}(G_3)^{1/6}\chi^{-1/2}[1+\lambda\exp(-\xi^2)]^{-1/2}, \tag{4.34}$$

e $F(\xi)$ obedece $dF/d\xi = \mathrm{abs}(G_3)^{-1/3}[1+\lambda\exp(-\xi^2)]$. O potencial da Eq. (4.8) deve ter a forma

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \omega(t)x^2 + \frac{\lambda\exp(-\xi^2)[\lambda\exp(-\xi^2)-2]}{\chi^4[1+\lambda\exp(-\xi^2)]^2}x^2 \\ &+ \frac{\lambda\exp(-\xi^2)}{\chi^2[1+\lambda\exp(-\xi^2)]} - \mu\frac{[1+\lambda\exp(-\xi^2)]^2}{\mathrm{abs}(G_3)^{2/3}\chi^2}, \end{aligned} \tag{4.35}$$

onde $\omega(t) = -(1/4\chi)(d^2\chi/dt^2)$. Note que (4.35) é composto por um potencial harmônico dependente do tempo mais um termo composto por uma super-rede óptica [66], e os dois últimos termos podem ser descritos pela ação de dois feixes laser, no qual um deles é dessintonizado para o azul e o outro para o vermelho, dependendo do sinal de μ [38]. Observe que os três últimos termos do potencial (4.35)

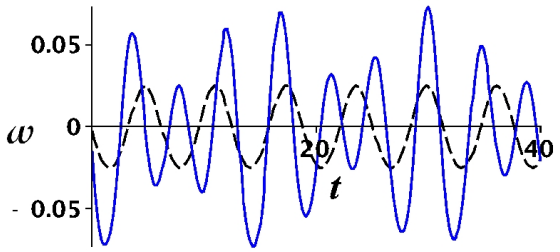

Figura 4.7: Gráfico de $\omega(t)$ nas linhas preta (tracejada) e azul (sólida), para $\alpha = 0.1$ e $\beta = 0$, e para $\alpha = \beta = 0.1$, respectivamente.

contribuem mais significativamente para pequenas distâncias, como mostrado abaixo. As outras não-linearidades são dadas de acordo com a Eq. (4.10).

Existem várias possibilidades para escolher a largura das soluções localizadas. Como exemplo, consideramos

$$\chi(t) = \frac{1}{1 + [1 + \alpha \sin(t) + \beta \sin(\sqrt{2}t)]^2}, \tag{4.36}$$

onde α e β são parâmetros reais. Essa escolha leva a $\omega(t)$ conforme a Fig. 4.7, que ilustra seu perfil periódico ou quase-periódico. A função periódica ou quase-periódica que estamos introduzindo pode ser obtida a partir das técnicas experimentais comentadas acima, onde os feixes laser que produzem o potencial apresentam uma variação com o tempo, por exemplo, veja a Ref. [66] e suas referências.

Os resultados acima são gerais e podem ser usados para investigar sistemas de interesse atual. O caso da não-linearidade cúbica pode ser obtido, por exemplo, em um BEC de espécies atômicas com interações naturalmente grandes, tais como $^{87}\mathrm{Rb}$ [47] e $^{23}\mathrm{Na}$ [49], tendo propriedades favoráveis para descrever a não-linearidade com a forma cúbica apenas. Isso nos leva à equação estacionária

$$\mu\Phi(\zeta) = -\frac{d^2\Phi(\zeta)}{d\zeta^2} + G_3\Phi^3(\zeta). \tag{4.37}$$

Sólitons Brilhantes e Escuros

Exploraremos agora a presença de sólitons brilhantes e escuros nesse sistema. Primeiramente usaremos, para simplificar, os valores $\mu = -1$ e $G_3 = -2$ para