

Refinamentos de métodos assintóticos no modelo de regressão Lindley-Unitária

Pedro Ricelly Gama de Oliveira

DISSERTAÇÃO APRESENTADA

A

FACULDADE DE ADMINISTRAÇÃO, CIÊNCIAS
CONTÁBEIS E CIÊNCIAS ECONÔMICAS (FACE)

DA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

PARA

OBTENÇÃO DO TÍTULO

DE

MESTRE EM ECONOMIA

Programa de Pós-Graduação em Economia

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Tatiane Ferreira do Nascimento Melo da Silva

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da Capes

Goiânia, 2021



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
FACULDADE DE ADMINISTRAÇÃO, CIÊNCIAS CONTÁBEIS E CIÊNCIAS ECONÔMICAS

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

☒ Dissertação ☐ Tese

2. Nome completo do autor

Pedro Ricelly Gama de Oliveira

3. Título do trabalho

Refinamentos de Métodos Assintóticos no modelo de regressão Lindley-Unitária

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento ☒ SIM ☐ NÃO¹

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);

b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.

O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.



Documento assinado eletronicamente por **Tatiane Ferreira Do Nascimento Melo Da Silva, Professor do Magistério Superior**, em 26/02/2021, às 20:45, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **PEDRO RICELLY GAMA DE OLIVEIRA, Discente**, em 01/03/2021, às 15:47, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1906034** e o código CRC **3E96E59F**.

Referência: Processo nº 23070.006113/2021-23

SEI nº 1906034

Refinamentos de métodos assintóticos no modelo de regressão Lindley-Unitária

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação devidamente corrigida
e defendida por Pedro Ricelly Gama de Oliveira e
aprovada pela Comissão Julgadora.

Banca Examinadora:

- Prof^ª. Dr^a. Tatiane Ferreira do Nascimento Melo da Silva - IME-UFG
- Prof. Dr. Tiago Moreira Vargas - IME-UFG
- Prof. Dr. Francisco Bruno de Lima Holanda - FACE-UFG

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Oliveira, Pedro Ricelly Gama de
Refinamentos de métodos assintóticos no modelo de regressão
Lindley-Unitária [manuscrito] / Pedro Ricelly Gama de Oliveira. -
2021.
CVII, 107 f.

Orientador: Profa. Dra. Tatiane Ferreira do Nascimento Melo da
Silva.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás,
Faculdade de Administração, Ciências Contábeis e Ciências
Econômicas (FACE), Programa de Pós-Graduação em Economia, Goiânia,
2021.

Bibliografia. Apêndice.
Inclui gráfico, tabelas.

1. Correção de viés. 2. Matriz de covariância de segunda ordem. 3.
Regressão Lindley-Unitária. 4. Teste de Wald modificado. I. Silva,
Tatiane Ferreira do Nascimento Melo da, orient. II. Título.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

FACULDADE DE ADMINISTRAÇÃO, CIÊNCIAS CONTÁBEIS E CIÊNCIAS ECONÔMICAS

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº 7 da sessão de Defesa de Dissertação de Pedro Ricelly Gama de Oliveira, que confere o título de Mestre em Economia, na área de concentração em Economia Aplicada.

Aos vinte e cinco dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e vinte e um, a partir das 14 horas, por meio de videoconferência, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada “Refinamentos de Métodos Assintóticos no modelo de regressão Lindley-Unitária”. Os trabalhos foram instalados pela Orientadora, Professora Doutora Tatiane Ferreira do Nascimento Melo da Silva (PPGECON/UFG) com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor Francisco Bruno de Lima Holanda (PPGECON/UFG), membro titular interno e Professor Doutor Tiago Moreira Vargas (IME/UFG), membro titular externo. Durante a arguição os membros da banca não fizeram sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido o candidato aprovado pelos seus membros. Proclamados os resultados pela Professora Doutora Tatiane Ferreira do Nascimento Melo da Silva, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos vinte e cinco dias do mês de fevereiro do ano de dois mil e vinte e um.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

Documento assinado eletronicamente por **Tiago Moreira Vargas, Professor do Magistério Superior**, em 25/02/2021, às 15:25, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Tatiane Ferreira Do Nascimento Melo Da Silva, Professor do Magistério Superior**, em 25/02/2021, às 15:32, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Francisco Bruno De Lima Holanda, Professor do Magistério Superior**, em 25/02/2021, às 18:43, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1848960** e o código CRC **A9056AF9**.

Quem tem um amigo tem tudo
(Emicida e Wilson das Neves)

À minha mãe, Vanuza

Agradecimentos

Lenine canta que “o que eu sou, eu sou em par, não cheguei sozinho”, por isso agradeço a todos que fizeram par comigo nessa jornada do mestrado. Primeiro a minha família: Vanuza, minha mãe, Fabio, meu irmão, Edilson, meu pai e Ricardo, meu amor. Obrigado pelo apoio de sempre, mas sobretudo por nunca duvidarem de que eu sou capaz, isso é muito poderoso.

Agradeço à minha orientadora, Tatiane Melo, pelo suporte fundamental na execução deste trabalho. Expresso aqui minha admiração não só pelo conhecimento técnico, trajetória acadêmica e especial capacidade de transmitir conhecimento, mas também pela positividade com que lida com as dificuldades da pesquisa e pela gentileza no trato com as pessoas, é uma mulher inspiradora.

Agradeço também aos demais professores do PPGECON pelas lições aprendidas durante o curso, foi uma experiência desafiadora e, ao mesmo tempo, enriquecedora.

Em nome de Felipe Pureza, que muito me ajudou nesta trajetória, minha gratidão aos queridos da minha turma. Pudemos nos apoiar durante o processo e isso foi fundamental para que não deixássemos ninguém para trás, levo vocês comigo.

Por fim, agradeço à Universidade Federal de Goiás pela acolhida e oportunidade e à Capes pelo auxílio financeiro.

Resumo

Modelos de regressão são amplamente utilizados em Economia, principalmente quando os dados envolvidos são taxas e proporções. O modelo de regressão Lindley-Unitária é definido para dados restritos ao intervalo $(0,1)$. Em problemas regulares, a inferência baseada na teoria assintótica pode não ser confiável quando a amostra é pequena. É o caso da estimativa de máxima verossimilhança e do teste de Wald. Correções de vieses nos estimadores de máxima verossimilhança e ajuste feito na estatística de teste são uma forma amplamente utilizada para resolver tais problemas. Nesta dissertação, obtemos uma expressão para corrigir o viés e uma fórmula para a matriz de covariância de segunda ordem para os estimadores de máxima verossimilhança no modelo de regressão Lindley-Unitária. Evidências numéricas mostram que os estimadores corrigidos são menos viesados e que o teste de Wald baseado na covariância de segunda ordem é mais preciso. Finalmente, duas aplicações para dados econômicos são apresentadas, nas quais as correções levaram a diferentes inferências.

Palavras-chave: Correção de viés; Matriz de covariância de segunda ordem; Regressão Lindley-Unitária; Teste de Wald modificado.

Abstract

Regression models are widely used in Economics, particularly when the data involved are rates and proportions. The Unit-Lindley regression model is defined for data restricted to the $(0,1)$ range. In regular problems, inference based on asymptotic theory can be unreliable when the sample is small. This is the case of the maximum likelihood estimation and the Wald test. Corrections of biases in the maximum likelihood estimators and adjustment made in the test statistic are a widely used way to solve such problems. In this dissertation, we obtain an expression to correct the bias and a formula for the second-order covariance matrix for the maximum likelihood estimators in the Unit-Lindley regression model. Numerical evidence shows that the corrected estimators are less biased and that the Wald test based on second-order covariance is more accurate. Finally, two applications to economic data are presented, in which corrections led to different inferences.

Keywords: Bias correction; Second-order covariance matrix; Unit-Lindley regression; Modified Wald test.

Sumário

1	Introdução	1
2	O modelo de regressão Lindley-Unitária	5
3	Estimador de máxima verossimilhança corrigido	9
3.1	Correção de viés	9
3.2	Simulação	10
4	Teste de Wald modificado	13
4.1	Matriz de covariâncias de segunda ordem	14
4.2	Simulação	16
5	Aplicações	21
5.1	Crescimento econômico brasileiro	21
5.2	Impacto da COVID-19 sobre o mercado de trabalho	24
6	Conclusões	31
A	Vetor escore e matriz de informação de Fisher	33
A.1	Vetor escore	33
A.2	Matriz de informação observada	37
A.3	Matriz de informação de Fisher	40

B	Derivação da correção de viés	45
C	Matriz de covariâncias de segunda ordem	51
C.1	Forma matricial de $\gamma^{(1)}$	52
C.2	Forma matricial de $\gamma^{(2)}$	59
C.3	Forma matricial de $\gamma^{(3)}$	64
D	Programa em R	71
	Referências Bibliográficas	85

Capítulo 1

Introdução

Na prática, muitas vezes precisamos modelar dados de proporções, porcentagens, dados restritos no intervalo $(0,1)$. Em Economia, por exemplo, um interesse pode ser a taxa de crescimento econômico dos países. Um modelo de regressão amplamente utilizado na modelagem de dados de taxa e proporção é o Beta, proposto por [Ferrari & Cribari-Neto \(2004\)](#). Esses autores modelam a variável resposta considerando uma parametrização usando os parâmetros de média e dispersão com estrutura similar aos modelos lineares generalizados ([McCullagh & Nelder, 1989](#)). Nos últimos anos, várias distribuições de dados restritos ao intervalo $(0,1)$ foram propostas como alternativas à distribuição Beta, veja, por exemplo, [Gómez-Déniz et al. \(2014\)](#), [Jodrá & Jiménez-Gamero \(2016\)](#), [Altun & Cordeiro \(2019\)](#) e [Guedes et al. \(2019\)](#).

[Mazucheli et al. \(2019\)](#) propuseram a distribuição Lindley-Unitária que foi obtida a partir de uma transformação na distribuição Lindley ([Lindley, 1958](#)). Esses autores utilizaram o modelo Lindley-Unitária para analisar dados de acesso de pessoas em domicílios brasileiros com abastecimento inadequado de água e esgoto. A distribuição Lindley tem boas propriedades estatísticas, como curtose e assimetria mais flexíveis e fornece um melhor ajuste aos dados do que a distribuição exponencial, que é semelhante, porém mais difundida ([Ghitany et al., 2008](#)).

Geralmente, estimadores de máxima verossimilhança (EMV), em modelos estatísticos, são viesados quando a amostra é pequena. Esse viés, em geral, é de ordem n^{-1} , com n sendo o tamanho da amostra. Assim, uma correção no viés é necessária quando a amostra de dados é pequena. A formulação de expressões que permitem corrigir o viés possibilita a obtenção de

estimadores mais precisos. [Cox & Snell \(1968\)](#) propuseram uma expressão geral para o viés de ordem n^{-1} do EMV. Desde então, a fórmula proposta por esses autores tem sido aplicada a diversos modelos. [Cordeiro & McCullagh \(1991\)](#) forneceram fórmulas matriciais para correção de viés em modelos lineares generalizados. [Cordeiro & Vasconcellos \(1997\)](#) obtiveram fórmulas para correção de viés em modelos de regressão não linear com erros normais. Correções de viés para modelos de regressão não linear com erros t -Student podem ser encontradas em [Vasconcellos & Cordeiro \(2000\)](#). Recentemente, [Mazucheli et al. \(2018\)](#), [Melo et al. \(2018\)](#) e [Melo et al. \(2020\)](#) obtiveram fórmulas de correção de viés para os parâmetros de distribuição Gama-Unitária, modelo elíptico com parametrização geral e modelo de regressão de Dirichlet multivariado, respectivamente.

Além do EMV ser tipicamente tendencioso quando a amostra é pequena, temos que as aproximações assintóticas de primeira ordem para a matriz de covariância do EMV podem ser imprecisas. Uma alternativa para resolver esse problema é usar a teoria assintótica de alta ordem, que pode tornar os métodos inferenciais tradicionais mais precisos em amostras pequenas. Nesta linha podemos citar [Shenton & Bowman \(1977\)](#) e [Peers & Iqbal \(1985\)](#). Nesses trabalhos é possível encontrar a matriz de covariância do EMV de ordem n^{-2} (matriz de covariância de segunda ordem). Na literatura, existem vários trabalhos envolvendo refinamentos assintóticos de matrizes de covariância de segunda ordem, ver, por exemplo, [Rocha et al. \(2010\)](#), [Lemonte \(2011\)](#), [Cordeiro et al. \(2014\)](#), [Magalhães \(2016\)](#) e [Lemonte \(2020\)](#).

O presente estudo segue duas linhas importantes na inferência estatística para o modelo de regressão Lindley-Unitária. A primeira é obter a expressão para a correção de viés do EMV neste modelo, cujo objetivo é reduzir o viés desses estimadores em pequenas amostras. [Mazucheli et al. \(2019\)](#) obtiveram a correção de viés para o parâmetro de distribuição Lindley-Unitária. Aqui, obtemos a correção de viés para os parâmetros no modelo de regressão com variável resposta de distribuição Lindley-unitária. A outra linha é obter uma fórmula para a matriz de covariância de segunda ordem do EMV. A partir desta matriz de covariância, propomos um teste de Wald modificado para o modelo Lindley-Unitária. Sabe-se que, quando a amostra é pequena, o teste usual de Wald apresenta aproximações assintóticas de primeira ordem distorcidas.

Além de uma forma compacta simples dos refinamentos assintóticos do EMV, apresentamos estudos de simulação de Monte Carlo e duas aplicações empíricas a dados reais. Na primeira aplicação, consideramos a taxa de crescimento econômico do Brasil e o comércio internacional. Trabalhos recentes investigam os determinantes do crescimento econômico em países da Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) ([de la Fuente-Mella et al., 2020](#)), África ([Oyebowale & Algarhi, 2020](#)) e Zona do Euro ([Pegkas et al., 2020](#)). Para os países em desenvolvimento, os fatores macroeconômicos que determinam o crescimento incluem os exógenos, como ajuda externa e investimento estrangeiro direto, bem como políticas fiscais e monetárias, comércio internacional, capital físico e humano, recursos naturais e fatores geopolíticos e financeiros ([Chirwa & Odhiambo, 2016](#)). Episódios de crescimento acelerado, nos quais há aumento de 2% ou mais no crescimento per capita, também são de particular interesse ([Hausmann et al., 2005](#)), como é o caso do Brasil entre as décadas de 1960 e 1970.

A segunda aplicação trata de um dos efeitos da pandemia de COVID-19 sobre o mercado de trabalho brasileiro, o aumento do desalento. Na literatura econômica, o efeito desalento ocorre em momentos de recessão nos quais a probabilidade de conseguir uma ocupação é mais baixa assim como o salário esperado, fazendo que os trabalhadores deixem de procurar emprego ([Gonzaga & Reis, 2011](#)). O percentual de desalentados no Brasil apresenta tendência de crescimento desde 2015, porém com a adoção de medidas de enfrentamento da pandemia, a expectativa era de que esse indicador atingisse níveis inéditos ([Mattei & Heinen, 2020](#)), o que de fato se verificou por meio dos dados da Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua (PNADc) que mostram que o número de pessoas desalentadas é o maior desde o início da série em 2012. Fato que está em linha com o aumento da população desalentada em razão da pandemia documentado para os Estados Unidos ([Coibion et al., 2020](#)), e com a redução da busca por emprego verificada na Suécia apesar do aumento no desemprego ([Hensvik et al., 2021](#)). Ainda para os Estados Unidos, uma análise desagregada por níveis geográficos mostrou que o colapso no mercado de trabalho ocorreu independentemente de quando as medidas restritivas foram implementadas, e que há evidências de que o espalhamento da doença explica esse colapso nos estados ([Forsythe et al., 2020](#)).

Esta dissertação está estruturada da seguinte forma: no Capítulo 2 apresentamos o modelo de regressão Lindley-Unitária; no Capítulo 3 obtemos a correção de viés no modelo de

regressão Lindley-Unitária; no Capítulo 4 apresentamos uma modificação para o teste de Wald; o Capítulo 5 contém as aplicações para dados reais e apresentamos conclusões no Capítulo 6. Além disso, apresentamos três apêndices (A, B, C) com detalhes do desenvolvimento dos resultados teóricos obtidos e um quarto apêndice (D) com o programa utilizado nas simulações.

Capítulo 2

O modelo de regressão Lindley-Unitária

A distribuição Lindley foi proposta por [Lindley \(1958\)](#), sua função de densidade de probabilidade (f.d.p) é dada por

$$f(x|\theta) = \frac{\theta^2}{\theta + 1}(x + 1)e^{-x\theta}, \quad x > 0, \quad \theta \geq 0,$$

e função de densidade acumulada (f.d.a):

$$F(x|\theta) = 1 - \left(1 + \frac{\theta x}{1 + \theta}\right) e^{-x\theta}. \quad (2.1)$$

[Mazucheli et al. \(2019\)](#) propuseram a distribuição Lindley-Unitária (UL). Os autores usaram a transformação $Y = X/(1 + X)$ em [\(2.1\)](#), que resultou nas seguintes f.d.a e f.d.p, respectivamente:

$$F(y|\theta) = 1 - \left[1 - \frac{\theta y}{(1 + \theta)(y - 1)}\right] \exp\left(-\frac{\theta y}{1 - y}\right), \quad 0 < y < 1, \quad \theta > 0$$

e

$$f(y|\theta) = \frac{\theta^2}{1 + \theta}(1 - y)^{-3} \exp\left(-\frac{\theta y}{1 - y}\right), \quad 0 < y < 1, \quad \theta > 0. \quad (2.2)$$

Além disso, Mazucheli et al. (2019) reparametrizaram (2.2) em termos da sua média obtendo o seguinte resultado:

$$f(y|\mu) = \frac{(1-\mu)^2}{\mu(1-y)^3} \exp \left[-\frac{y(1-\mu)}{\mu(1-y)} \right], \quad 0 < y < 1, \quad 0 < \mu < 1.$$

Sejam $Y_1, \dots, Y_n$ variáveis aleatórias independentes, com $Y_i \sim \text{UL}(\mu_i), i = 1, \dots, n$. O modelo de regressão é definido assumindo que a média de Y_i satisfaz a seguinte relação funcional:

$$g(\mu_i) = \mathbf{X}_i^\top \boldsymbol{\beta} = \eta_i, \quad (2.3)$$

onde a função de ligação $g : (0, 1) \rightarrow \Re$ é conhecida, estritamente monótona e duas vezes diferenciável, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^\top$ é o vetor p -dimensional de parâmetros desconhecidos ($p < n$) e $\mathbf{X}_i^\top = (x_{i1}, \dots, x_{ip})$ são observações de p covariáveis conhecidas. O modelo, portanto, possui p parâmetros desconhecidos, que podem ser estimados, por exemplo, por máxima verossimilhança. Podemos escrever o logaritmo da função de verossimilhança do modelo na forma

$$\ell(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^n l_i(\mu_i)$$

com

$$l_i(\mu_i) = 2 \log(1 - \mu_i) - \log(\mu_i) - 3 \log(1 - y_i) - \frac{y_i(1 - \mu_i)}{\mu_i(1 - y_i)}.$$

Então,

$$\ell(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^n \left[2 \log(1 - \mu_i) - \log(\mu_i) - 3 \log(1 - y_i) - \frac{y_i(1 - \mu_i)}{\mu_i(1 - y_i)} \right].$$

O vetor escore, a matriz de informação observada e esperada são dados, respectivamente, por

$$U_\beta(\boldsymbol{\beta}) = X^\top \mathbf{v}, \quad J(\boldsymbol{\beta}) = X^\top M X \quad \text{e} \quad I(\boldsymbol{\beta}) = X^\top Q X, \quad (2.4)$$

onde X é a matriz de covariáveis, o i -ésimo elemento do vetor $\mathbf{v}$ é

$$v_i = \left[\frac{y_i(1 - \mu_i) - \mu_i(1 + \mu_i)(1 - y_i)}{\mu_i^2(1 - \mu_i)(1 - y_i)} \right] h'(\eta_i),$$

e os i -ésimos elementos das matrizes diagonais $M = \text{diag}\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ e $Q = \text{diag}\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ são dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned} m_i &= \left[\frac{2}{(1 - \mu_i)^2} - \frac{1}{\mu_i^2} + \frac{2y_i}{\mu_i^3(1 - y_i)} \right] h'(\eta_i)^2 + \left[\frac{2}{1 - \mu_i} + \frac{1}{\mu_i} - \frac{y_i}{\mu_i^2(1 - y_i)} \right] h''(\eta_i), \\ q_i &= \left[\frac{1 + 2\mu_i - \mu_i^2}{\mu_i^2(1 - \mu_i)^2} \right] h'(\eta_i)^2. \end{aligned}$$

Denotamos $h'(\eta_i)$ e $h''(\eta_i)$ como as derivadas de primeira e segunda ordem, respectivamente, de $h(\eta_i) = g^{-1}(\eta_i)$ com respeito a β_j , com $i = 1, 2, \dots, n$ e $j = 1, 2, \dots, p$. Quando a função de ligação é logito nós temos

$$h'(\eta_i) = \frac{e^{\eta_i}}{(1 + e^{\eta_i})^2} \quad \text{e} \quad h''(\eta_i) = \frac{e^{\eta_i}(1 - e^{\eta_i})}{(1 + e^{\eta_i})^3}.$$

O estimador de máxima verossimilhança para o vetor $\boldsymbol{\beta}$, $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_p)^\top$, pode ser obtido igualando $U_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\beta})$ ao vetor de zeros e resolvendo o sistema resultante. Mas, este sistema não tem solução fechada, assim o cálculo do estimador de máxima verossimilhança deve ser realizado numericamente usando um algoritmo de otimização não linear, como o método quase-Newton de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS). O cálculo de todas as quantidades deste capítulo é apresentado no Apêndice A.

Capítulo 3

Estimador de máxima verossimilhança corrigido

Em problemas regulares, a inferência baseada em teoria assintótica pode ser pouco confiável quando a amostra é pequena ou até mesmo de tamanho moderado. Este é o caso da estimação por máxima verossimilhança. Para superar esse problema obtemos a correção de viés dos estimadores de máxima verossimilhança no modelo de regressão Lindley-Unitária.

3.1 Correção de viés

Nesta seção, temos uma expressão geral para o viés de segunda ordem dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros desconhecidos do modelo de regressão Lindley-Unitária. Usamos a expressão matricial geral dada por [Cordeiro & Klein \(1994\)](#):

$$B_{\hat{\beta}}(\beta) = I(\beta)^{-1} W \text{vec} [I(\beta)^{-1}] ,$$

onde $\text{vec}(\cdot)$ é o operador vec , que transforma uma matriz em um vetor empilhando as colunas da matriz uma embaixo da outra, $I(\beta)$ é a matriz de informação de Fisher definida em (2.4) e $W = (W^{(1)}, \dots, W^{(p)})$ é uma matriz com dimensão $p \times p^2$, sendo que cada vetor tem (t,s)-ésimo elemento dado por

$$w_{ts}^{(r)} = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{-2}{\mu_i^2(1-\mu_i)^3} h'(\eta_i)^3 + \left[\frac{\mu_i^2 - 2\mu_i - 1}{2\mu_i^2(1-\mu_i)^2} \right] h'(\eta_i) h''(\eta_i) \right\} x_{ir} x_{is} x_{it}, \quad (3.1)$$

onde x_{ir} é o (i,r) -ésimo elemento da matriz X . Além disso, $h'(\eta_i)$ e $h''(\eta_i)$ são as primeira e segunda derivadas de $h(\eta_i) = g^{-1}(\eta_i)$, respectivamente. Os detalhes dos cálculos de (3.1) podem ser vistos no Apêndice B.

Note que o vetor de viés de segunda ordem $B_{\hat{\beta}}(\beta)$ envolve somente operações algébricas simples entre matrizes e vetores. Esta expressão pode ser facilmente calculada usando software com suporte para operações matriciais, como, por exemplo, o R (R Core Team, 2020).

O estimador de máxima verossimilhança corrigido será dado por

$$\hat{\beta}_{BC} = \hat{\beta} - \hat{B}_{\hat{\beta}}(\beta),$$

onde $\hat{B}_{\hat{\beta}}(\beta)$ denota o valor de $B_{\hat{\beta}}(\theta)$ avaliado em $\hat{\beta}$.

3.2 Simulação

Nesta seção, apresentamos um estudo de simulação de Monte Carlo cujo objetivo é avaliar o desempenho da correção de viés dos estimadores de máxima verossimilhança, em pequenas amostras, no modelo de regressão Lindley-Unitária.

O modelo considerado é apresentado em (2.3). As simulações foram realizadas utilizando o software R (R Core Team, 2020) e foram baseadas em 10.000 (dez mil) amostras de Monte Carlo. Foram consideradas amostras de tamanhos $n = 10, 20, 30, 50$. Os valores das covariáveis foram gerados a partir da distribuição uniforme $U(-0.5, 0.5)$ e mantidos fixos nas réplicas de Monte Carlo. Consideramos o modelo com três, quatro, cinco e seis covariáveis ($p = 3, 4, 5, 6$). Os valores verdadeiros dos parâmetros foram fixados como $\beta = (0, -2, 1)^\top$ quando $p = 3$. Para o caso em que $p = 4$, consideramos $\beta = (0, -2, 1, 0.5)^\top$. Quando $p = 5$, fixamos $\beta = (0, -2, 1, 0.5, 0.5)^\top$. Quando $p = 6$, definimos $\beta = (0, -2, 1, 0.5, 0.5, 1.5)^\top$. Na estimação dos parâmetros usamos o método quase-Newton de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS). Neste estudo de simulação consideramos a função de ligação logito, ou seja, $g(\mu) = \eta = \mu/(1 - \mu)$.

Apresentamos nas Tabelas 3.1 e 3.2 os vieses e a raiz quadrada do erro quadrático médio (EQM) das estimativas de máxima verossimilhança (EMV) sem ($\hat{\beta}$) e com correção ($\hat{\beta}_{BC}$)

para diferentes tamanhos de amostras e covariáveis.

Tabela 3.1: Vieses e $\sqrt{EQM}$ das estimativas sem ($\hat{\beta}$) e com correção ($\hat{\beta}_{BC}$); $n = 10$ e 20 .

		$n = 10$				$n = 20$			
p	β	$\hat{\beta}$		$\hat{\beta}_{BC}$		$\hat{\beta}$		$\hat{\beta}_{BC}$	
		Viés	$\sqrt{EQM}$	Viés	$\sqrt{EQM}$	Viés	$\sqrt{EQM}$	Viés	$\sqrt{EQM}$
3	β_1	0,23	1,26	0,01	1,24	-0,04	0,75	-0,01	0,75
	β_2	-0,38	1,26	-0,02	1,18	-0,04	0,7	-0,01	0,70
	β_3	-0,34	1,27	-0,01	1,21	0,06	0,74	0,02	0,74
4	β_1	0,30	1,31	0,02	1,28	0,00	0,74	0,00	0,75
	β_2	-0,49	1,35	-0,02	1,23	-0,04	0,71	0,00	0,71
	β_3	-0,40	1,34	-0,02	1,26	0,06	0,79	0,01	0,79
	β_4	-0,01	1,10	0,00	1,10	-0,03	0,68	-0,01	0,68
5	β_1	0,18	1,38	-0,03	1,37	0,00	0,78	-0,01	0,79
	β_2	-0,75	1,58	-0,02	1,38	-0,04	0,71	0,00	0,71
	β_3	-0,42	1,35	-0,02	1,28	0,05	0,85	0,00	0,86
	β_4	0,15	1,09	0,00	1,08	-0,01	0,67	-0,01	0,67
	β_5	-0,47	1,54	-0,01	1,45	0,06	0,76	0,01	0,77
6	β_1	0,89	2,08	0,06	1,82	-0,10	0,99	-0,03	0,98
	β_2	-1,03	1,79	-0,08	1,42	-0,08	0,75	-0,02	0,75
	β_3	-1,08	2,17	-0,07	1,82	0,15	0,94	0,03	0,93
	β_4	0,18	1,28	0,02	1,23	-0,01	0,68	-0,01	0,69
	β_5	0,05	1,70	0,01	1,64	-0,09	0,86	-0,03	0,85
	β_6	0,73	1,90	0,06	1,70	-0,16	0,93	-0,04	0,92

Observamos nestas tabelas que o viés das estimativas são moderadas quando o tamanho da amostra é pequeno. Por exemplo, na Tabela 3.1 ($p = 5$) quando $n = 10$ temos que o viés para $\hat{\beta}_2$ é $-0,75$. Também observamos que as estimativas corrigidas pelo viés estão mais próximas dos valores reais dos parâmetros do que as estimativas não ajustadas. Na situação descrita acima temos um viés igual a $-0,02$ para o estimador corrigido. Além disso, a raiz quadrada do erro quadrático médio das estimativas corrigidas são menores do que as das estimativas não corrigidas. Vale ressaltar que à medida que a amostra cresce os vieses e as raízes quadradas

Tabela 3.2: Vieses e $\sqrt{EQM}$ das estimativas sem ($\hat{\beta}$) e com correção ($\hat{\beta}_{BC}$); $n = 30$ e 50 .

		$n = 30$				$n = 50$			
p	β	$\hat{\beta}$		$\hat{\beta}_{BC}$		$\hat{\beta}$		$\hat{\beta}_{BC}$	
		Viés	$\sqrt{EQM}$	Viés	$\sqrt{EQM}$	Viés	$\sqrt{EQM}$	Viés	$\sqrt{EQM}$
3	β_1	-0,02	0,58	-0,01	0,58	-0,02	0,43	0,00	0,43
	β_2	0,02	0,54	0,00	0,54	-0,01	0,40	0,00	0,40
	β_3	0,04	0,54	0,01	0,54	0,02	0,41	0,00	0,41
4	β_1	-0,01	0,57	0,00	0,57	-0,01	0,43	0,00	0,43
	β_2	0,03	0,55	0,00	0,55	0,00	0,41	0,00	0,41
	β_3	0,04	0,57	0,00	0,57	0,02	0,42	0,00	0,42
	β_4	-0,01	0,54	-0,01	0,54	0,00	0,39	-0,01	0,39
5	β_1	-0,01	0,61	-0,01	0,61	-0,01	0,45	0,00	0,45
	β_2	0,04	0,56	0,02	0,56	0,00	0,42	0,01	0,42
	β_3	0,03	0,60	-0,01	0,60	0,01	0,45	-0,01	0,45
	β_4	-0,01	0,55	-0,01	0,55	0,00	0,41	-0,01	0,41
	β_5	0,06	0,62	0,01	0,62	0,02	0,46	0,01	0,46
6	β_1	0,01	0,61	0,00	0,61	-0,01	0,44	0,00	0,44
	β_2	0,04	0,57	0,01	0,57	0,00	0,42	0,00	0,42
	β_3	0,03	0,60	0,01	0,60	0,02	0,43	0,00	0,43
	β_4	-0,01	0,55	-0,02	0,55	0,00	0,40	-0,01	0,40
	β_5	0,04	0,60	-0,01	0,61	0,00	0,44	0,00	0,44
	β_6	0,04	0,60	0,00	0,60	0,00	0,43	0,00	0,43

EQM diminuem, o que era esperado.

Enfim, as simulações de Monte Carlo indicam que as EMV corrigidas têm um comportamento, em pequenas amostras, superior à estimativa sem correção.

Capítulo 4

Teste de Wald modificado

Considere a partição do vetor de parâmetros p -dimensional $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta}_1^\top, \boldsymbol{\beta}_2^\top)^\top$. O interesse consiste em testar as hipóteses

$$\mathcal{H}_0 : \boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\beta}_1^{(0)} \text{ versus } \mathcal{H}_1 : \boldsymbol{\beta}_1 \neq \boldsymbol{\beta}_1^{(0)},$$

em que $\boldsymbol{\beta}_1^\top = (\beta_1, \dots, \beta_q)^\top$ é um vetor q -dimensional de parâmetros de interesse e $\boldsymbol{\beta}_2^\top = (\beta_{q+1}, \dots, \beta_p)^\top$, um vetor de parâmetros de perturbação $(p - q)$ -dimensional, sendo $\boldsymbol{\beta}_1^{(0)}$ um vetor especificado. Sejam $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^\top, \hat{\boldsymbol{\beta}}_2^\top)^\top$ e $\check{\boldsymbol{\beta}} = (\check{\boldsymbol{\beta}}_1^\top, \check{\boldsymbol{\beta}}_2^\top)^\top$ as estimativas de máxima verossimilhança irrestrita e restrita de $\boldsymbol{\beta}$ a $\mathcal{H}_0$, respectivamente.

A estatística de Wald é dada por

$$W = \left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1 - \boldsymbol{\beta}_1^{(0)} \right)^\top \left\{ \hat{I}^{\boldsymbol{\beta}_1 \boldsymbol{\beta}_1} \right\}^{-1} \left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_1 - \boldsymbol{\beta}_1^{(0)} \right),$$

em que $\hat{I}^{\boldsymbol{\beta}_1 \boldsymbol{\beta}_1}$ é a submatriz $I^{\boldsymbol{\beta}_1 \boldsymbol{\beta}_1}$ avaliada em $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, sendo $I^{\boldsymbol{\beta}_1 \boldsymbol{\beta}_1}$ componente da inversa da matriz de informação de Fisher particionada da forma

$$I(\boldsymbol{\beta})^{-1} = \begin{bmatrix} I^{\boldsymbol{\beta}_1 \boldsymbol{\beta}_1} & I^{\boldsymbol{\beta}_1 \boldsymbol{\beta}_2} \\ I^{\boldsymbol{\beta}_2 \boldsymbol{\beta}_1} & I^{\boldsymbol{\beta}_2 \boldsymbol{\beta}_2} \end{bmatrix}.$$

Para construir o teste de Wald modificado, segundo [Magalhães \(2016\)](#), substituímos $\hat{I}^{\boldsymbol{\beta}_1 \boldsymbol{\beta}_1}$

pela submatriz $\widehat{\text{Cov}}_2^{11}(\hat{\beta})$. Esta submatriz é uma partição da inversa da matriz de covariâncias de segunda ordem $\text{Cov}_2^{-1}(\hat{\beta})$ avaliada em $\hat{\beta}$. Aqui, $\text{Cov}_2^{11}(\hat{\beta})$ é a submatriz superior à esquerda de $\text{Cov}_2^{-1}(\hat{\beta})$ referente aos parâmetros de interesse β_1 .

A estatística de teste de Wald modificado é dado por

$$W_c = \left(\hat{\beta}_1 - \beta_1^{(0)} \right)^\top \left\{ \widehat{\text{Cov}}_2^{11}(\hat{\beta}) \right\}^{-1} \left(\hat{\beta}_1 - \beta_1^{(0)} \right),$$

sendo que [Magalhães \(2016\)](#) verificou, de forma geral, que a estatística W_c tem a mesma ordem de convergência do teste de Wald original.

4.1 Matriz de covariâncias de segunda ordem

Usamos a seguinte notação tensorial para cumulantes de derivadas do logaritmo da função de verossimilhança ([Lawley, 1956](#)): $\kappa_{bs,d} = E[(\partial^2 \ell / \partial \beta_b \partial \beta_s)(\partial \ell / \partial \beta_d)]$, $\kappa_{ab,cd} = E[(\partial^2 \ell / \partial \beta_a \partial \beta_b)(\partial^2 \ell / \partial \beta_c \partial \beta_d)] - \kappa_{ab}\kappa_{cd}$, e suas derivadas $\kappa_{bc}^{(ad)} = \partial^2 \kappa_{bc} / \partial \beta_a \partial \beta_d$ e $\kappa_{bcd}^{(a)} = \partial \kappa_{bcd} / \partial \beta_a$. Adicionalmente, temos que $\kappa_{b,sd} = \kappa_{sd}^{(b)} - \kappa_{bsd}$.

Uma fórmula para a covariância de segunda ordem, $\text{Cov}_2(\hat{\beta})$, é fornecida por [Peers & Iqbal \(1985\)](#). De [Magalhães \(2016\)](#) temos a forma matricial

$$\text{Cov}_2(\hat{\beta}) = I(\beta)^{-1} + I(\beta)^{-1} \{ \Gamma + \Gamma^\top \} I(\beta)^{-1},$$

em que o elemento (a,b) de Γ é dado por $\gamma_{ab} = -\frac{1}{2}\gamma_{ab}^{(1)} + \frac{1}{4}\gamma_{ab}^{(2)} + \frac{1}{2}\gamma_{ab}^{(3)}$, e

$$\begin{aligned} \gamma_{ab}^{(1)} &= \sum_{c,d=1}^p \kappa^{cd} \left\{ 2\kappa_{bc}^{(ad)} - \kappa_{bcd}^{(a)} + \kappa_{ac,bd} \right\}, \\ \gamma_{ab}^{(2)} &= \sum_{r,s,c,d=1}^p \kappa^{rs} \kappa^{cd} \left\{ \kappa_{arc} [3\kappa_{bsd} + 2\kappa_{b,sd} + 8\kappa_{bs,d}] + 2\kappa_{ar,c} [2\kappa_{b,sd} + \kappa_{bd,s}] \right\}, \\ \gamma_{ab}^{(3)} &= \sum_{r,s,c,d=1}^p \kappa^{rs} \kappa^{cd} \left\{ \kappa_{bc}^{(a)} \left(\kappa_{sd}^{(r)} + \kappa_{r,sd} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Após alguns cálculos, veja Apêndice C, temos que para o modelo Lindley-Unitária a forma matricial de Γ é dada por

$$\Gamma = X^\top \left[\frac{1}{2} T Z_D + \frac{1}{4} (\Lambda \odot Z \odot Z) \right] X + \frac{1}{2} X^\top [(\Delta \odot Z Z_D) \Upsilon \odot X], \quad (4.1)$$

onde “ $\odot$ ” denota o produto direto de matrizes (ou produto Hadamard¹), $Z = X I(\boldsymbol{\beta})^{-1} X^\top = \{z_{ij}\}$, $Z_D = \text{diag}\{z_{11}, z_{22}, \dots, z_{nn}\}$, Υ é uma matriz $(n \times p)$ de uns, $T = \text{diag}\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$, com $t_i = 2\xi_i - \lambda_i + \phi_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Além disso, temos que os (i, j) -ésimos elementos das matrizes Λ e Δ são, respectivamente, $\nu_i(3\nu_j + 10\tau_j) + 6\tau_i\tau_j$ e $\delta_i(\delta_j + \tau_j)$, para $j = 1, 2, \dots, n$,

¹Sejam duas matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, do tipo $m \times n$, o produto de Hadamard de A e B é a matriz, $m \times n$, $A \circ B = (a_{ij}b_{ij})$

onde

$$\begin{aligned}
\xi_i &= 2 \left[\frac{3\mu_i^4 - 12\mu_i^3 - 2\mu_i^2 + 8\mu_i - 3}{\mu_i^4(1 - \mu_i)^4} \right] h'(\eta_i)^4 + 10 \left[\frac{\mu_i^3 - 3\mu_i^2 - \mu_i + 1}{\mu_i^3(1 - \mu_i)^3} \right] h'(\eta_i)^2 h''(\eta_i) \\
&\quad + 2 \left[\frac{\mu_i^2 - 2\mu_i - 1}{\mu_i^2(1 - \mu_i)^2} \right] [h''(\eta_i)^2 + h'(\eta_i)h'''(\eta_i)], \\
\lambda_i &= \frac{12(\mu_i^4 - 4\mu_i^3 + \mu_i^2 + 2\mu_i - 1)}{\mu_i^4(1 - \mu_i)^4} h'(\eta_i)^4 + \frac{6(3\mu_i^3 - 9\mu_i^2 - \mu_i + 3)}{\mu_i^3(1 - \mu_i)^3} h'(\eta_i)^2 h''(\eta_i) \\
&\quad + \frac{3(\mu_i^2 - 2\mu_i - 1)}{\mu_i^2(1 - \mu_i)^2} [h''(\eta_i)^2 + h'(\eta_i)h'''(\eta_i)], \\
\phi_i &= \frac{(1 + 2\mu_i - \mu_i^2)}{\mu_i^2(1 - \mu_i)^2} \left[\frac{2}{\mu_i} h'(\eta_i)^2 - h''(\eta_i) \right]^2, \\
\nu_i &= \frac{4(\mu_i^3 - 3\mu_i^2 + 1)}{\mu_i^3(1 - \mu_i)^3} h'(\eta_i)^3 + \frac{3(\mu_i^2 - 2\mu_i - 1)}{\mu_i^2(1 - \mu_i)^2} h'(\eta_i)h''(\eta_i), \\
\delta_i &= \frac{2(\mu_i^3 - 3\mu_i^2 - \mu_i + 1)}{\mu_i^3(1 - \mu_i)^3} h'(\eta_i)^3 + \frac{2(\mu_i^2 - 2\mu_i - 1)}{\mu_i^2(1 - \mu_i)^2} h'(\eta_i)h''(\eta_i), \\
\tau_i &= \frac{(\mu_i^2 - 2\mu_i - 1)}{\mu_i^2(1 - \mu_i)^2} \left[\frac{2}{\mu_i} h'(\eta_i)^2 - h''(\eta_i) \right] h'(\eta_i).
\end{aligned}$$

A expressão que derivamos para Γ em (4.1) envolve apenas operações simples entre matrizes. Portanto, Γ pode ser facilmente calculado utilizando o software R.

4.2 Simulação

Nesta seção comparamos, via simulação de Monte Carlo, as matrizes de covariância de primeira, $I(\hat{\beta})^{-1}$, e segunda, $\text{Cov}_2(\hat{\beta})$, ordens com a matriz de covariância amostral (empírica) para amostras pequenas. Além disso, avaliamos a performance do teste de Wald (W) e sua versão corrigida (W_c) também em amostras de tamanho pequeno.

Foram realizadas 10.000 (dez mil) réplicas de Monte Carlo, baseadas no modelo em (2.3) e usando o software R (R Core Team, 2020), com os tamanhos de amostra $n = 10, 20, 30, 50$. Já os valores das covariáveis foram obtidos de uma distribuição uniforme $U(-0.5, 0.5)$. A função de ligação considerada neste caso foi a logito, isto é, $g(\mu) = \eta = \mu/(1 - \mu)$. Além disso, consideramos o modelo possuindo de duas a seis covariáveis ($p = 2, 3, 4, 5, 6$) e testamos um e dois parâmetros ($q = 1, 2$), sendo os valores dos parâmetros definidos como $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = -2$, $\beta_3 = 1$, $\beta_4 = \beta_5 = 0.5$, e $\beta_6 = 1.5$ para $q = 1$. Quando $q = 2$ adotamos $\beta_1 = \beta_2 = 0$, $\beta_3 = -2$, $\beta_4 = 1$, e $\beta_5 = \beta_6 = 0.5$.

Na Tabela 4.1 temos as variâncias amostrais (Var_A), as variâncias de segunda ordem (Var_2) e as variâncias de primeira ordem (Var_1) de $\hat{\beta}$. Lembre-se de que $\text{Var}_1(\hat{\beta}) = I(\hat{\beta})^{-1}$. Observamos nesta tabela que as variâncias de segunda ordem estão muito mais próximas das variâncias da amostra do que as variâncias de primeira ordem, quando a amostra é pequena. Por exemplo, para $\hat{\beta}_5$ com $p = 5$ e $n = 10$, as variâncias da amostra e de segunda ordem são iguais a 2,14, enquanto a variância de primeira ordem é 1,59. Também observamos que à medida que o número de covariáveis (p) aumenta, a diferença entre a variância de primeira ordem e as variâncias da amostra também aumenta. Além disso, como esperado, quando aumentamos o tamanho da amostra, essas variâncias ficam mais próximas umas das outras.

As taxas de rejeição nula dos testes de Wald (W) e Wald corrigido (W_c) são exibidas nas Tabelas 4.2 e 4.3 para os diferentes n e p ; valores das entradas são porcentagens. Apresentamos as taxas de rejeição de $\mathcal{H}_0 : \beta_1 = \beta_1^{(0)}$. Quando $q = 1$ (Tabela 4.2) consideramos $\beta_1^{(0)} = 0$ e para $q = 2$ (Tabela 4.3) temos $\beta_1^{(0)} = (0, 0)^\top$. Todos os testes foram realizados nos seguintes níveis nominais: $\alpha = 1\%, 5\%$ e 10% . O teste de Wald é claramente liberal quando a amostra é pequena. Por exemplo, para o caso em que $p = 6$ e $q = 2$, o teste de Wald exibe taxas de rejeição iguais a 7,5% ($\alpha = 1\%$), 16,8% ($\alpha = 5\%$) e 24,5% ($\alpha = 10\%$). O teste baseado na estatística de Wald corrigida apresenta melhor desempenho do que o teste baseado na estatística de Wald original em todos os casos, com taxas de rejeição próximas aos níveis nominais. Por exemplo, quando $p = 5$, $q = 2$, $n = 20$ e $\alpha = 1\%$, as taxas de rejeição são 1,2% (W_c) e 2,0% (W). Ou ainda, quando $p = 3$, $q = 1$, e $n = 10$, as taxas de rejeição são 1,0%, 5,1%, 10,1% ($\alpha = 1\%, 5\%, 10\%$) para W_c e 2,1%, 7,2%, 13,2% ($\alpha = 1\%, 5\%, 10\%$) para W . No geral, o teste com melhor desempenho é aquele que emprega W_c como estatística de

teste.

Tabela 4.1: Variâncias amostrais (Var_A), de segunda ordem (Var_2) e de primeira ordem (Var_1) de $\hat{\beta}$.

$p = 3$									
	$n = 10$			$n = 20$			$n = 30$		
	Var_A	Var_2	Var_1	Var_A	Var_2	Var_1	Var_A	Var_2	Var_1
$\hat{\beta}_1$	1,53	1,55	1,30	0,56	0,54	0,49	0,34	0,33	0,31
$\hat{\beta}_2$	1,44	1,50	1,21	0,49	0,50	0,46	0,29	0,30	0,28
$\hat{\beta}_3$	1,50	1,54	1,29	0,55	0,55	0,54	0,29	0,29	0,28
$p = 4$									
	$n = 10$			$n = 20$			$n = 30$		
	Var_A	Var_2	Var_1	Var_A	Var_2	Var_1	Var_A	Var_2	Var_1
$\hat{\beta}_1$	1,64	1,68	1,37	0,55	0,56	0,50	0,33	0,33	0,31
$\hat{\beta}_2$	1,58	1,63	1,26	0,50	0,51	0,46	0,30	0,31	0,28
$\hat{\beta}_3$	1,63	1,69	1,38	0,62	0,64	0,57	0,32	0,33	0,30
$\hat{\beta}_4$	1,21	1,26	1,00	0,46	0,45	0,40	0,29	0,29	0,27
$p = 5$									
	$n = 10$			$n = 20$			$n = 30$		
	Var_A	Var_2	Var_1	Var_A	Var_2	Var_1	Var_A	Var_2	Var_1
$\hat{\beta}_1$	1,88	1,91	1,52	0,62	0,61	0,54	0,37	0,36	0,33
$\hat{\beta}_2$	1,93	1,97	1,52	0,50	0,52	0,45	0,31	0,32	0,29
$\hat{\beta}_3$	1,64	1,70	1,37	0,73	0,74	0,65	0,36	0,35	0,32
$\hat{\beta}_4$	1,17	1,24	0,96	0,45	0,46	0,40	0,31	0,31	0,28
$\hat{\beta}_5$	2,14	2,14	1,59	0,58	0,59	0,51	0,38	0,38	0,35

Tabela 4.2: Taxas de rejeição nula: $q = 1$ e diferentes valores de n e p ; entradas são porcentagens.

p	n	$\alpha = 1\%$		$\alpha = 5\%$		$\alpha = 10\%$	
		W	W_c	W	W_c	W	W_c
2	10	1,5	0,9	7,0	4,9	12,4	9,6
	20	1,4	1,1	6,2	5,3	11,2	10,1
	30	1,2	1,1	5,7	5,1	11,0	10,2
	50	1,1	1,0	5,9	5,4	10,6	10,2
3	10	2,1	1,0	7,2	5,1	13,2	10,1
	20	1,5	1,1	6,3	5,1	12,1	10,4
	30	1,5	1,2	6,3	5,5	11,5	10,4
	50	1,3	1,1	6,1	5,6	11,0	10,4
4	10	2,4	1,2	7,6	5,2	13,5	9,9
	20	1,4	1,0	6,0	4,8	11,7	9,7
	30	1,3	1,1	5,7	4,7	11,0	9,8
	50	1,1	0,9	5,4	4,9	10,7	10,0
5	10	2,3	1,0	8,2	5,1	14,4	10,3
	20	1,6	1,0	6,4	5,0	12,3	9,8
	30	1,4	1,0	6,5	5,5	12,1	10,7
	50	1,4	1,2	5,9	5,2	11,0	10,2
6	10	4,6	2,0	11,6	7,0	18,0	12,0
	20	1,7	1,1	7,2	5,2	12,6	10,2
	30	1,6	1,0	6,2	4,9	11,7	9,9
	50	1,3	1,0	5,9	5,1	10,8	9,8

Tabela 4.3: Taxas de rejeição nula: $q = 2$ e diferentes valores de n e p ; entradas são porcentagens.

p	n	$\alpha = 1\%$		$\alpha = 5\%$		$\alpha = 10\%$	
		W	W_c	W	W_c	W	W_c
3	10	2,6	1,4	8,6	5,3	14,7	10,2
	20	1,4	1,0	6,5	5,3	12,0	9,9
	30	1,4	1,1	6,2	5,1	11,6	10,3
	50	1,2	1,0	5,4	4,9	11,1	10,2
4	10	3,5	1,8	9,9	6,1	15,6	10,7
	20	1,7	1,1	7,0	5,0	13,1	10,3
	30	1,4	1,1	6,3	5,2	12,0	10,1
	50	1,4	1,0	5,8	5,0	11,3	10,2
5	10	4,7	2,2	12,4	7,6	18,8	13,0
	20	2,0	1,2	7,3	5,1	13,2	10,0
	30	1,6	1,1	6,7	5,3	12,6	10,3
	50	1,4	1,1	6,0	5,0	11,2	9,9
6	10	7,5	3,1	16,8	9,0	24,5	14,9
	20	2,2	1,1	7,9	5,5	14,1	10,4
	30	1,8	1,1	7,0	5,1	12,7	10,2
	50	1,4	1,1	6,4	5,1	11,9	10,1

Capítulo 5

Aplicações

5.1 Crescimento econômico brasileiro

Um tópico de interesse da literatura de crescimento econômico é modelar a taxa ou outra medida de crescimento econômico dos países. Nesse aspecto, investigações que utilizam várias metodologias têm buscado determinar quais são os fatores que determinam o crescimento econômico em diferentes partes do mundo e graus de desenvolvimento

Em uma análise dos membros da Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), [de la Fuente-Mella et al. \(2020\)](#) verificaram por meio da utilização da metodologia de fronteira estocástica que quanto maior a eficiência país, maior é seu produto interno. Países africanos tiveram os determinantes do crescimento econômico analisados por [Oyebowale & Algarhi \(2020\)](#) com o uso de dados em painel, sendo que um de seus resultados aponta para variáveis como taxa de crescimento das exportações, gastos governamentais e formação bruta de capital como sendo explicativas do crescimento no longo prazo. Investimento, capital humano e abertura comercial foram identificadas como variáveis que afetam positivamente o crescimento de países da Zona do Euro durante o período de 1995-2016, enquanto que a dívida pública apresenta efeito negativo sobre esse crescimento ([Pegkas et al., 2020](#)).

Uma revisão da literatura apontou que os fatores que explicam o crescimento dos países diferem de acordo com o grau de desenvolvimento desses, mas que há aspectos comuns a países desenvolvidos e em desenvolvimento, entre os quais estão capital físico e humano, política fiscal

e monetária bem como o comércio internacional (Chirwa & Odhiambo, 2016). Além disso, episódios de aceleração do crescimento costumam estar relacionados com aumentos dos níveis de investimentos, comércio internacional e a choques externos (Hausmann et al., 2005).

Os dados usados nesta seção foram retirados da Penn World Table 6.1 (Heston et al., 2002), e foram utilizados para modelar a Taxa de Crescimento Real do PIB per capita (preços constantes) em função da abertura comercial a preços constantes (OPENK) no Brasil de 1962 até 1973. Os dados são apresentados na Tabela 5.1.

Tabela 5.1: Crescimento econômico e abertura comercial do Brasil entre 1962 e 1973

Ano	Taxa de Crescimento	Abertura Comercial
1962	1,880416938	8,5737086395
1963	2,282231609	8,6931966618
1964	1,047667603	7,3130515467
1965	3,395681501	6,4187921626
1966	1,304709236	7,5862737888
1967	2,538537661	7,4114346477
1968	8,385837934	8,0806190712
1969	5,639604713	8,5947377681
1970	7,067004727	9,1648847960
1971	8,587231161	9,7411041085
1972	9,167427795	10,582333486
1973	10,84509499	11,085335153

Fonte: Penn World Table 6.1

Nós consideramos o seguinte modelo de regressão Lindley-Unitária para ajustar esses dados:

$$\text{logit}(\mu_i) = \beta_0 + \beta_1 \text{OPENK}_i, \quad (5.1)$$

onde μ_i é a média e $\text{logit}(\cdot)$ é a função de ligação logito, com $i = 1, 2, \dots, 12$.

As estimativas de máxima verossimilhança foram $\hat{\beta}_0 = 35,45$ e $\hat{\beta}_1 = -6,11$. As estimativas com correção de viés foram $\hat{\beta}_0 = 36,64$ e $\hat{\beta}_1 = -6,13$. Embora as estimativas corrigidas estejam próximas das estimativas originais, quando usamos o Critério de Informação de Akaike (AIC) (Montgomery et al., 2012) obtivemos um valor de 18,10 para o caso do modelo cujas

estimativas não foram corrigidas e $-46,86$ para a versão corrigida, indicando que a regressão com as estimativas corrigidas forneceu o melhor ajuste.

As variâncias de primeira e segunda ordem de $\hat{\beta}_0$ foram, respectivamente, $\text{Var}_1(\hat{\beta}_0) = 428,86$ e $\text{Var}_2(\hat{\beta}_0) = 505,26$. Observamos uma grande diferença entre as variâncias de primeira e segunda ordem. Para $\hat{\beta}_1$ não houve diferença significativa, pois $\text{Var}_1(\hat{\beta}_1) = 3,29$ e $\text{Var}_2(\hat{\beta}_1) = 3,85$.

A fim de detectar possíveis desvios dos pressupostos para variáveis de resposta no modelo (5.1), bem como outliers, apresentamos o gráfico de envelope na Figura 5.1. Como pode ser visto, todos os resíduos permaneceram dentro das bandas de confiança indicando que não temos características incomuns, e assim a hipótese de distribuição Lindley-Unitária não parece ser inadequada.

Executando o teste $\mathcal{H}_0 : \beta_1 = 0 \times \mathcal{H}_1 : \beta_1 \neq 0$, obtivemos os seguintes valores respectivos para as estatísticas de Wald não corrigidas e corrigidas: $W = 2,93$ (valor $p = 0,087$) e $W_c = 2,49$ (valor $p = 0,115$). No nível de significância de 10 %, o teste de Wald corrigido não rejeitou a hipótese nula, enquanto o teste de Wald não corrigido rejeitou a hipótese nula. Os testes levaram a diferentes conclusões, sendo que a conclusão obtida pelo teste ajustado foi compatível com a obtida em [Veloso et al. \(2008\)](#). Esses autores discutem o episódio particularmente interessante da história brasileira entre 1968 e 1973, conhecido como o “milagre” econômico, período em que houve crescimento acelerado com baixa inflação e superávits no balanço de pagamentos. Uma das explicações para esse fenômeno, segundo [Veloso et al. \(2008\)](#), seria o ambiente externo favorável do período. A partir disso, esses autores verificaram que a variável OPENK não era significativa para a explicação do “milagre” econômico.

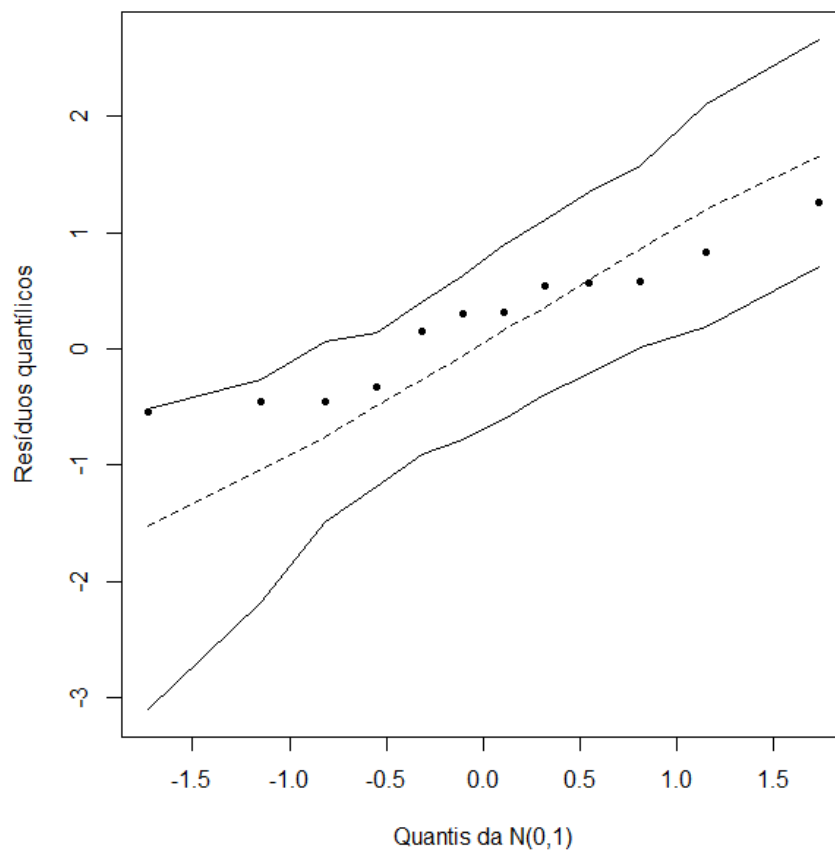


Figura 5.1: Gráfico de envelope para modelo de regressão Lindley-Unitária

5.2 Impacto da COVID-19 sobre o mercado de trabalho

Algumas métricas do comportamento do mercado de trabalho são particularmente estudadas em momentos de crise. O efeito desalento é um deles, no qual os trabalhadores que perderam seus empregos durante uma recessão saem da força de trabalho, uma vez que consideram que os custos de procurar novo emprego são maiores que a probabilidade de consegui-lo (Gonzaga & Reis, 2011). A população desalentada no Brasil cresce desde 2015, chegando a

representar 4,1% da força de trabalho ampliada no início de 2020 ([Mattei & Heinen, 2020](#)), portanto a expectativa era de que a pandemia causada pela Covid-19 reforçasse tal tendência.

Investigações de outros países reforçam resultados nesse sentido. Com base em uma grande pesquisa domiciliar americana, [Coibion et al. \(2020\)](#) analisaram como o mercado de trabalho dos Estados Unidos vem sendo afetado pela pandemia de Covid-19 e seus resultados indicam para a redução da taxa de participação na força de trabalho, em outras palavras, o aumento de trabalhadores em idade ativa que deixaram de trabalhar e de procurar novos empregos. [Coibion et al. \(2020\)](#) avançam na análise dos dados para identificar os motivos dessas pessoas deixaram de procurar trabalho e encontram como o principal deles a aposentadoria, sugerindo que a onda de infecções levou a aposentadorias serem antecipadas.

A procura por emprego na Suécia em tempos de pandemia foi analisada com base em dados em tempo real de um site de vagas de emprego ([Hensvik et al., 2021](#)). Os resultados de [Hensvik et al. \(2021\)](#) mostram a forte redução da busca por trabalho apesar do crescente número de desempregados, o que caracteriza o efeito desalento, bem como mudança nos tipos de ocupação procurada pelos trabalhadores para vagas na área de saúde, ocupações cuja demanda de trabalho é mais resiliente a crises ou ainda cuja maior parte da carga horária possa ser desenvolvida em casa.

Outra análise, com base em dados em tempo real e também em dados de seguro-desemprego, foi realizada por [Forsythe et al. \(2020\)](#). Seu objetivo foi investigar, no nível estadual dos Estados Unidos, se os efeitos da pandemia no mercado de trabalho foram percebidos de acordo com as medidas restritivas de combate à doença pelos estados, mas não encontraram tal associação. As evidências encontradas por [Forsythe et al. \(2020\)](#) são fortes no sentido de que os danos ao mercado de trabalho foram gerais e não causados por medidas restritivas, bem como há evidências modestas de que o espalhamento precoce do vírus é preditor do colapso no mercado de trabalho do estado.

Os dados usados nesta seção foram retirados da PNADc ([IBGE, 2020](#)) com resultados para o 3º trimestre de 2020 e do Ministério da Saúde do Brasil ([Brasil, 2021](#)) em 18/01/2021. O objetivo é modelar o percentual de pessoas desalentadas na população, na força de trabalho ou desalentada em função dos óbitos acumulados por 100 mil habitantes (obitosacum100mil)

e óbitos acumulados (obitosacum) ambos em razão da Covid-19 por unidade da federação. Os dados são apresentados na Tabela 5.2.

Tabela 5.2: Percentual de pessoas desalentadas na população, na força de trabalho ou desalentada em 2020 e óbitos por Covid-19 nas unidades da federação brasileira até 18/01/2021.

UF	Percentual de desalentados	Óbitos acumulados (100 mil habitantes)	Óbitos acumulados
Acre	0,125	95	837
Alagoas	0,216	79	2629
Amazonas	0,073	152	6308
Amapá	0,072	119	1005
Bahia	0,114	65	9667
Ceará	0,114	112	10223
Distrito Federal	0,013	147	4427
Espírito Santo	0,026	138	5534
Goiás	0,031	101	7107
Maranhão	0,208	65	4613
Minas Gerais	0,048	64	13483
Mato Grosso do Sul	0,032	97	2686
Mato Grosso	0,020	136	4743
Pará	0,078	86	7412
Paraíba	0,130	97	3902
Pernambuco	0,100	105	10031
Piauí	0,117	90	2961
Paraná	0,021	79	9054
Rio de Janeiro	0,028	161	27805
Rio Grande do Norte	0,131	91	3179
Rondônia	0,033	114	2031
Roraima	0,081	134	811
Rio Grande do Sul	0,023	88	9967
Santa Catarina	0,013	83	5919
Sergipe	0,109	116	2662
São Paulo	0,025	109	49987
Tocantins	0,071	84	1316

Fonte: Pnad Contínua 3º trimestre - IBGE e Painel Coronavírus - Ministério da Saúde

A hipótese é que a gravidade da doença nos estados representada pelo indicador de óbitos faria com que as pessoas deixassem de procurar emprego por medo do contágio. Nós consideramos o seguinte modelo de regressão Lindley-Unitária para ajustar esses dados:

$$\text{logit}(\mu_i) = \beta_0 + \beta_1 \text{obitosacum100mil}_i + \beta_2 \text{obitosacum}_i, \quad (5.2)$$

onde $\text{logit}(\cdot)$ é a função de ligação logito, com $i = 1, 2, \dots, 27$.

As estimativas de máxima verossimilhança foram $\hat{\beta}_0 = -0,01151$, $\hat{\beta}_1 = -0.00003$ e $\hat{\beta}_2 = -1,20956$. As estimativas com correção de viés foram $\hat{\beta}_0 = -0,01119$, $\hat{\beta}_1 = -0.00002$ e $\hat{\beta}_2 = -1,23448$. Embora as estimativas corrigidas estejam próximas das estimativas originais, quando usamos o Critério de Informação de Akaike (AIC) ([Montgomery et al., 2012](#)) obtivemos um valor de 34,99 para o caso do modelo cujas estimativas não foram corrigidas e $-85,92$ para a versão corrigida, indicando que a regressão com as estimativas corrigidas forneceu o melhor ajuste.

Para detectar possíveis desvios dos pressupostos para variáveis resposta no modelo (5.2), assim como outliers, apresentamos o gráfico de envelopes na Figura 5.2. Observamos que todos os resíduos permaneceram dentro das bandas de confiança indicando que não temos características incomuns, e assim a hipótese de distribuição Lindley-Unitária não parece ser inadequada.

Realizamos o teste $\mathcal{H}_0 : \beta_1 = 0 \times \mathcal{H}_1 : \beta_1 \neq 0$, obtivemos os seguintes valores respectivos para as estatísticas de Wald não corrigidas e corrigidas: $W = 2,774$ (valor- $p = 0,096$) e $W_c = 2,522$ (valor- $p = 0,112$). Ao nível de 10%, o teste de Wald corrigido não rejeitou a hipótese nula, enquanto o teste de Wald não corrigido rejeitou a hipótese nula.

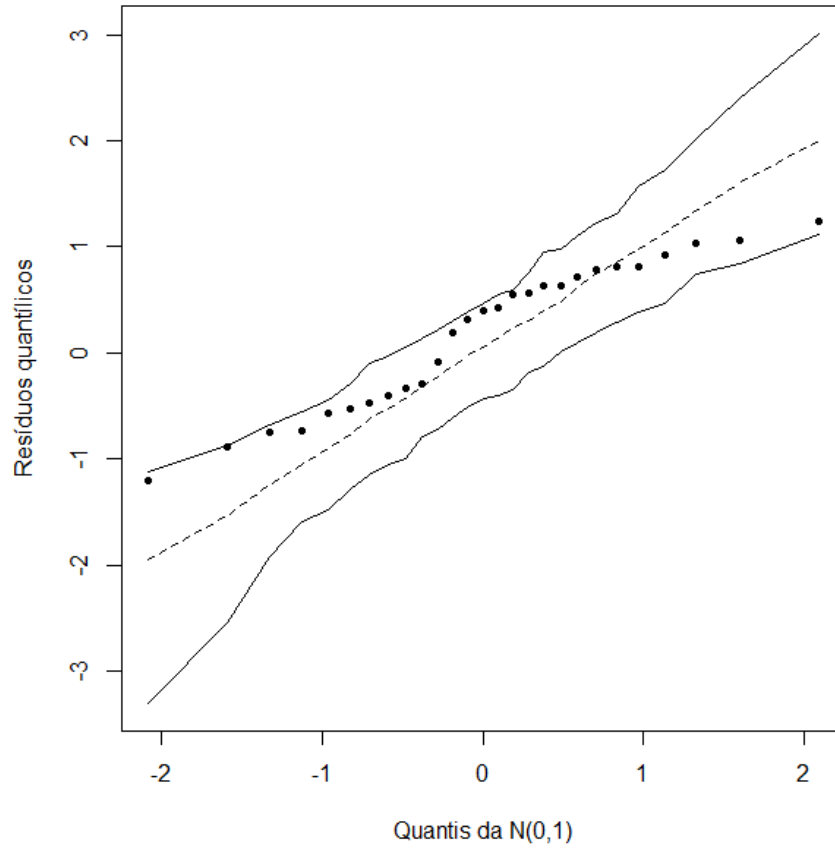


Figura 5.2: Gráfico de envelope para modelo de regressão Lindley-Unitária.

Como indicado na estatística de Wald corrigida retiramos a variável *obitosacum100mil* e obtemos

$$\text{logit}(\mu_i) = \beta_0 + \beta_2 \text{obitosacum}_i,$$

e quando realizamos o teste $\mathcal{H}_0 : \beta_2 = 0 \times \mathcal{H}_1 : \beta_2 \neq 0$, as estatísticas de Wald não corrigida e corrigida foram, respectivamente: $W = 2,91$ (valor- $p = 0,088$) e $W_c = 2,24$ (valor- $p = 0,134$). Novamente, ao nível de 10%, o teste de Wald corrigido não rejeitou a hipótese nula, enquanto

o teste de Wald não corrigido rejeitou a hipótese nula.

Se considerarmos, em (5.2), $\mathcal{H}_0 : (\beta_1, \beta_2)^\top = (0, 0)^\top \times \mathcal{H}_1 : (\beta_1, \beta_2)^\top \neq (0, 0)^\top$, temos os seguintes valores para as estatísticas de Wald não corrigida e corrigida, respectivamente, $W = 5,292$ (valor- $p = 0,071$) e $W_c = 4,446$ (valor- $p = 0,108$). Que corroboram com os resultados obtidos anteriormente.

A partir desses resultados temos que, se usássemos W , teríamos o modelo completo e usando W_c temos que nenhuma das variáveis explicativas consideradas são importantes para o modelo, de modo que há evidências de que os óbitos por Covid-19 no Brasil não explicam a desistência na busca por emprego no país.

Capítulo 6

Conclusões

Modelar dados como proporções e porcentagens é bastante comum na literatura em diversas áreas de estudo, inclusive em Economia. O modelo de regressão Lindley-Unitária surge como uma alternativa na modelagem de dados estatísticos com valores no intervalo $(0,1)$, com base na distribuição de Lindley que possui boas propriedades estatísticas. A inferência baseada na teoria assintótica é bastante confiável, exceto quando a amostra é pequena, caso em que a teoria assintótica de alta ordem é uma opção.

As contribuições teóricas desta pesquisa são duas, ambas para os casos com pequenas amostras: a primeira é a expressão para corrigir o viés do estimador de máxima verossimilhança no modelo de regressão Lindley-Unitária; e a segunda é a fórmula da matriz de covariância de segunda ordem, através da qual um teste de Wald modificado é proposto. Esses resultados são facilmente implementados em softwares que suportam cálculos matriciais, como R ([R Core Team, 2020](#)).

Utilizamos experimentos de Monte Carlo para investigar o desempenho de tais refinamentos e descobrimos que os estimadores corrigidos apresentaram vieses menores do que os não corrigidos, e o teste de Wald baseado na covariância de segunda ordem apresentou taxas de rejeição mais próximas dos níveis nominais esperados.

Por fim, ilustramos o uso prático dos resultados teóricos sobre dados econômicos em duas aplicações. Na primeira, em que a variável resposta foi a Taxa de Crescimento Real do PIB per

capita do Brasil no período do “milagre” econômico e a covariável foi a Abertura Comercial a preços constantes, o teste de Wald corrigido levou a uma inferência diferente da obtida pela estatística original. Já na segunda, a variável resposta foi o percentual de pessoas desalentadas na população, na força de trabalho ou desalentada no Brasil em 2020 e teve como variáveis explicativas os óbitos por Covid-19 nas unidades da federação brasileira, situação na qual também tivemos que o teste de Wald corrigido levou a uma inferência diferente da obtida pela estatística original.

Apêndice A

Vetor escore e matriz de informação de Fisher

Neste apêndice, obtemos matricialmente o vetor escore, a matriz de informação observada e a matriz de informação de Fisher (esperada) apresentadas no Capítulo 2.

A.1 Vetor escore

A função de verossimilhança é dada por

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\mu}|\mathbf{y}) &= \prod_{i=1}^n f(y_i | \mu_i) \\ &= \prod_{i=1}^n \left\{ \frac{(1 - \mu_i)^2}{\mu_i(1 - y_i)^3} \exp \left[-\frac{y_i(1 - \mu_i)}{\mu_i(1 - y_i)} \right] \right\} \\ &= \prod_{i=1}^n \left[\frac{(1 - \mu_i)^2}{\mu_i(1 - y_i)^3} \right] \exp \left[-\sum_{i=1}^n \frac{y_i(1 - \mu_i)}{\mu_i(1 - y_i)} \right]. \end{aligned}$$

O logaritmo da função de verossimilhança é

$$\begin{aligned} \ell(\boldsymbol{\beta}) &= \log L(\boldsymbol{\mu}|\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \log \left[\frac{(1 - \mu_i)^2}{\mu_i(1 - y_i)^3} \right] - \sum_{i=1}^n \frac{y_i(1 - \mu_i)}{\mu_i(1 - y_i)} \\ &= \sum_{i=1}^n \left[2 \log(1 - \mu_i) - \log(\mu_i) - 3 \log(1 - y_i) - \frac{y_i(1 - \mu_i)}{\mu_i(1 - y_i)} \right]. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\ell(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^n l_i(\mu_i), \quad (\text{A.1})$$

com

$$\ell_i(\mu_i) = 2 \log(1 - \mu_i) - \log(\mu_i) - 3 \log(1 - y_i) - \frac{y_i(1 - \mu_i)}{\mu_i(1 - y_i)}.$$

A primeira derivada de (A.1) com relação a β_j é dada por

$$\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ell_i(\mu_i)}{\partial \beta_j},$$

com

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell_i(\mu_i)}{\partial \beta_j} &= \frac{\partial}{\partial \beta_j} \left[2 \log(1 - \mu_i) - \log(\mu_i) - 3 \log(1 - y_i) - \frac{y_i(1 - \mu_i)}{\mu_i(1 - y_i)} \right] \\ &= \left[2 \frac{1}{1 - \mu_i} (-1) \frac{\partial \mu_i}{\partial \beta_j} - \frac{1}{\mu_i} \frac{\partial \mu_i}{\partial \beta_j} - \frac{y_i}{1 - y_i} \frac{\partial}{\partial \beta_j} \left(\frac{1 - \mu_i}{\mu_i} \right) \right]. \end{aligned}$$

Mas,

$$\frac{\partial}{\partial \beta_j} \left[\frac{1 - \mu_i}{\mu_i} \right] = \frac{\partial}{\partial \beta_j} \left[\frac{1}{\mu_i} - 1 \right] = \frac{\partial}{\partial \beta_j} \left[\frac{1}{\mu_i} \right] - \frac{\partial}{\partial \beta_j} [1] = -\frac{1}{\mu_i^2}.$$

Logo,

$$\frac{\partial \ell_i(\mu_i)}{\partial \beta_j} = \left[-\frac{2}{1 - \mu_i} - \frac{1}{\mu_i} + \frac{y_i}{1 - y_i} \frac{1}{\mu_i^2} \right] \frac{\partial \mu_i}{\partial \beta_j}.$$

De (2.3) podemos escrever $\mu_i = g^{-1}(\eta_i)$. Faça $g^{-1}(\cdot) = h(\cdot)$, então

$$\mu_i = h(\eta_i).$$

Daí,

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial \beta_j} = h'(\eta_i) \frac{\partial \eta_i}{\partial \beta_j}, \quad (\text{A.2})$$

onde $h'(\eta_i)$ denota a derivada de primeira ordem de $h(\eta_i)$ com relação a β_j . Além disso,

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial \beta_j} = \frac{\partial (\mathbf{X}_i^\top \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_j}.$$

Sabemos que,

$$\mathbf{X}_i^\top \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} x_{i1} & x_{i2} & \dots & x_{ip} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} = x_{i1}\beta_1 + x_{i2}\beta_2 + \dots + x_{ip}\beta_p.$$

Logo,

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial \beta_j} = \frac{\partial (\mathbf{X}_i^\top \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_j} = \frac{\partial}{\partial \beta_j} [x_{i1}\beta_1 + x_{i2}\beta_2 + \dots + x_{ip}\beta_p] = x_{ij}.$$

Voltando em (A.2) temos que,

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial \beta_j} = h'(\eta_i) x_{ij}. \quad (\text{A.3})$$

Após esses cálculos podemos concluir que

$$\frac{\partial \ell_i(\mu_i)}{\partial \beta_j} = \left[-\frac{2}{1 - \mu_i} - \frac{1}{\mu_i} + \frac{y_i}{\mu_i^2(1 - y_i)} \right] h'(\eta_i) x_{ij}.$$

Portanto, o vetor escore é definido como

$$U_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\beta}) = \begin{bmatrix} U_{\beta_1}(\boldsymbol{\beta}) \\ U_{\beta_2}(\boldsymbol{\beta}) \\ \vdots \\ U_{\beta_p}(\boldsymbol{\beta}) \end{bmatrix},$$

onde cada elemento é dado por

$$U_{\beta_j}(\boldsymbol{\beta}) = \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \ell_i(\mu_i)}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^n \left[-\frac{2}{1-\mu_i} - \frac{1}{\mu_i} + \frac{y_i}{\mu_i^2(1-y_i)} \right] h'(\eta_i) x_{ij}.$$

Vamos reescrever $U_{\beta_j}(\boldsymbol{\beta})$ da seguinte forma:

$$U_{\beta_j}(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^n v_i x_{ij},$$

com

$$v_i = \left[-\frac{2}{1-\mu_i} - \frac{1}{\mu_i} + \frac{y_i}{\mu_i^2(1-y_i)} \right] h'(\eta_i).$$

Após alguns cálculos podemos escrever

$$v_i = \left[\frac{y_i(1-\mu_i) - \mu_i(1+\mu_i)(1-y_i)}{\mu_i^2(1-\mu_i)(1-y_i)} \right] h'(\eta_i).$$

Logo,

$$\begin{aligned} U_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\beta}) &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n v_i x_{i1} \\ \sum_{i=1}^n v_i x_{i2} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n v_i x_{ip} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 x_{11} + v_2 x_{21} + \dots + v_n x_{n1} \\ v_1 x_{12} + v_2 x_{22} + \dots + v_n x_{n2} \\ \vdots \\ v_1 x_{1p} + v_2 x_{2p} + \dots + v_n x_{np} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1p} & x_{2p} & \dots & x_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{X}^\top \mathbf{v}, \end{aligned}$$

onde

$$X^\top = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1p} & x_{2p} & \dots & x_{np} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}.$$

Portanto, o vetor escore é

$$U_\beta(\boldsymbol{\beta}) = X^\top \mathbf{v}.$$

A.2 Matriz de informação observada

Para obter a matriz de informação observada precisamos da derivada de segunda ordem $\partial^2 \ell(\boldsymbol{\beta}) / \partial \boldsymbol{\beta}^2$. Ou seja,

$$J(\boldsymbol{\beta}) = -\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}^2}.$$

Aqui, denotaremos o (j, k) -ésimo elemento da matriz $J(\boldsymbol{\beta})$ por $J_{jk}(\boldsymbol{\beta}) = J_{jk}$. Logo, para $j, k = 1, 2, \dots, p$ temos

$$\begin{aligned} J_{jk}(\boldsymbol{\beta}) &= -\frac{\partial}{\partial \beta_j} \left[\frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_k} \right] \\ &= -\frac{\partial}{\partial \beta_j} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial \ell_i(\mu_i)}{\partial \beta_k} \right] = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \beta_j} \left[\frac{\partial \ell_i(\mu_i)}{\partial \beta_k} \right] \\ &= -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \beta_j} \left\{ \left[-\frac{2}{1-\mu_i} - \frac{1}{\mu_i} + \frac{y_i}{\mu_i^2(1-y_i)} \right] h'(\eta_i) x_{ik} \right\} \\ &= -\sum_{i=1}^n \left\{ \left[\frac{-(-1)(-2)}{(1-\mu_i)^2} + \frac{1}{\mu_i^2} - \frac{2\mu_i(1-y_i)y_i}{[\mu_i^2(1-y_i)]^2} \right] \frac{\partial \mu_i}{\partial \beta_j} h'(\eta_i) x_{ik} \right. \\ &\quad \left. + \left[-\frac{2}{1-\mu_i} - \frac{1}{\mu_i} + \frac{y_i}{\mu_i^2(1-y_i)} \right] h''(\eta_i) \frac{\partial \eta_i}{\partial \beta_j} x_{ik} \right\}. \end{aligned}$$

Vimos que

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial \beta_j} = h'(\eta_i) \frac{\partial \eta_i}{\partial \beta_j} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \eta_i}{\partial \beta_j} = x_{ij}.$$

Logo,

$$J_{jk}(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^n \left\{ \left[\frac{2}{(1-\mu_i)^2} - \frac{1}{\mu_i^2} + \frac{2y_i}{\mu_i^3(1-y_i)} \right] h'(\eta_i)^2 + \left[\frac{2}{1-\mu_i} + \frac{1}{\mu_i} - \frac{y_i}{\mu_i^2(1-y_i)} \right] h''(\eta_i) \right\} x_{ij}x_{ik}.$$

Faça,

$$m_i = \left[\frac{2}{(1-\mu_i)^2} - \frac{1}{\mu_i^2} + \frac{2y_i}{\mu_i^3(1-y_i)} \right] h'(\eta_i)^2 + \left[\frac{2}{1-\mu_i} + \frac{1}{\mu_i} - \frac{y_i}{\mu_i^2(1-y_i)} \right] h''(\eta_i). \quad (\text{A.4})$$

Então,

$$J_{jk}(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^n m_i x_{ij}x_{ik} = m_1 x_{1j}x_{1k} + m_2 x_{2j}x_{2k} + \dots + m_n x_{nj}x_{nk}.$$

Neste caso,

$$J_{11} = m_1 x_{11}x_{11} + m_2 x_{21}x_{21} + \dots + m_n x_{n1}x_{n1}$$

$$J_{12} = m_1 x_{11}x_{12} + m_2 x_{21}x_{22} + \dots + m_n x_{n1}x_{n2}$$

$$\vdots = \vdots$$

$$J_{1p} = m_1 x_{11}x_{1p} + m_2 x_{21}x_{2p} + \dots + m_n x_{n1}x_{np}$$

$$J_{21} = m_1 x_{12}x_{11} + m_2 x_{22}x_{21} + \dots + m_n x_{n2}x_{n1}$$

$$J_{22} = m_1 x_{12} x_{12} + m_2 x_{22} x_{22} + \dots + m_n x_{n2} x_{n2}$$

$$\vdots = \vdots$$

$$J_{2p} = m_1 x_{12} x_{1p} + m_2 x_{22} x_{2p} + \dots + m_n x_{n2} x_{np}$$

$$\vdots = \vdots$$

$$J_{p1} = m_1 x_{1p} x_{1k} + m_2 x_{2p} x_{21} + \dots + m_n x_{np} x_{n1}$$

$$J_{p2} = m_1 x_{1p} x_{1k} + m_2 x_{2p} x_{22} + \dots + m_n x_{np} x_{n2}$$

$$\vdots = \vdots$$

$$J_{pp} = m_1 x_{1p} x_{1p} + m_2 x_{2p} x_{2p} + \dots + m_n x_{np} x_{np}.$$

Para escrever a matriz de informação observada matricialmente considere

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix} = \text{diag}\{m_1, m_2, \dots, m_n\}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
X^\top MX &= \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1p} & x_{2p} & \dots & x_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} m_1 x_{11} & m_2 x_{21} & \dots & m_n x_{n1} \\ m_1 x_{12} & m_2 x_{22} & \dots & m_n x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_1 x_{1p} & m_2 x_{2p} & \dots & m_n x_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n m_i x_{i1}^2 & \sum_{i=1}^n m_i x_{i1} x_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^n m_i x_{i1} x_{ip} \\ \sum_{i=1}^n m_i x_{i2} x_{i1} & \sum_{i=1}^n m_i x_{i2}^2 & \dots & \sum_{i=1}^n m_i x_{i2} x_{ip} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n m_i x_{ip} x_{i1} & \sum_{i=1}^n m_i x_{ip} x_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^n m_i x_{ip}^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & \dots & J_{1p} \\ J_{21} & J_{22} & \dots & J_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{p1} & J_{p2} & \dots & J_{pp} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Portanto, a matriz de informação observada é dada por

$$J(\boldsymbol{\beta}) = X^\top MX.$$

A.3 Matriz de informação de Fisher

Denotaremos a matriz de informação de Fisher por

$$I(\boldsymbol{\beta}) = E[J(\boldsymbol{\beta})] = E[X^\top MX] = X^\top E[M]X = X^\top QX,$$

onde

$$Q = E(M) = \begin{bmatrix} E(m_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E(m_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & E(m_n) \end{bmatrix} = \text{diag} \{E(m_1), E(m_2), \dots, E(m_n)\}.$$

De (A.4) temos que

$$E(m_i) = \left[\frac{2}{(1 - \mu_i)^2} - \frac{1}{\mu_i^2} + \frac{2}{\mu_i^3} E \left(\frac{Y_i}{1 - Y_i} \right) \right] h'(\eta_i)^2 + \left[\frac{2}{1 - \mu_i} + \frac{1}{\mu_i} - \frac{1}{\mu_i^2} E \left(\frac{Y_i}{1 - Y_i} \right) \right] h''(\eta_i).$$

Agora vamos obter $E[Y_i/(1 - Y_i)]$. Para isso, vamos mostrar que a f.d.p. da Lindley-Unitária pertence à família exponencial. Sabemos que $Y_i \sim \text{UL}(\mu_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Mazucheli et al. (2019) mostraram que a distribuição Lindley-Unitária pertence à família exponencial, ou seja, a função densidade de probabilidade pode ser escrita como:

$$f(y_i|\mu_i) = \exp[Q(\mu_i)T(y_i|\mu_i) + D(\mu_i) + S(y_i|\mu_i)],$$

com

$$Q(\mu_i) = 1 - \frac{1}{\mu_i}, \quad T(y_i|\mu_i) = \frac{y_i}{1 - y_i}, \quad D(\mu_i) = \log \left[\frac{(1 - \mu_i)^2}{\mu_i} \right] \quad \text{e} \quad S(y_i|\mu_i) = \log[(1 - y_i)^{-3}].$$

Neste caso, temos que

$$E \left(\frac{Y_i}{1 - Y_i} \right) = E[T(y_i|\mu_i)] = -\frac{D'(\mu_i)}{Q'(\mu_i)},$$

onde $D'(\mu_i)$ e $Q'(\mu_i)$ são as derivadas de primeira ordem de $D(\mu_i)$ e $Q(\mu_i)$, respectivamente, com relação a μ_i . A equação (A.3) pode ser demonstrada usando o fato

$$\int f(y_i|\mu_i) dy_i = 1 \Rightarrow \int \frac{\partial f(y_i|\mu_i)}{\partial \mu_i} dy_i = \frac{\partial}{\partial \mu_i}(1) = 0.$$

Temos que

$$\frac{\partial f(y_i|\mu_i)}{\partial \mu_i} = [Q'(\mu_i)T(y_i|\mu_i) + D'(\mu_i)] f(y_i|\mu_i).$$

Logo,

$$\int \frac{\partial f(y_i|\mu_i)}{\partial \mu_i} dy_i = \int [Q'(\mu_i)T(y_i|\mu_i) + D'(\mu_i)] f(y_i|\mu_i) dy_i = 0. \quad (\text{A.5})$$

Mas, por definição de esperança temos

$$\int [Q'(\mu_i)T(y_i|\mu_i) + D'(\mu_i)] f(y_i|\mu_i) dy_i = E [Q'(\mu_i)T(y_i|\mu_i) + D'(\mu_i)]. \quad (\text{A.6})$$

Então, por [\(A.5\)](#) e [\(A.6\)](#)

$$E [Q'(\mu_i)T(y_i|\mu_i) + D'(\mu_i)] = 0 \Rightarrow Q'(\mu_i)E [T(y_i|\mu_i)] + D'(\mu_i) = 0.$$

Logo,

$$E [T(y_i|\mu_i)] = -\frac{D'(\mu_i)}{Q'(\mu_i)}.$$

Portanto,

$$E \left(\frac{Y_i}{1 - Y_i} \right) = -\frac{D'(\mu_i)}{Q'(\mu_i)}.$$

Agora precisamos calcular $D'(\mu_i)$ e $Q'(\mu_i)$,

$$D'(\mu_i) = \frac{d}{d\mu_i} \left\{ \log \left[\frac{(1 - \mu_i)^2}{\mu_i} \right] \right\} = \frac{\mu_i}{(1 - \mu_i)^2} \frac{2(1 - \mu_i)(-1)\mu_i - 1(1 - \mu_i)^2}{\mu_i^2} = -\frac{(1 + \mu_i)}{\mu_i(1 - \mu_i)}$$

e

$$Q'(\mu_i) = \frac{d}{d\mu_i} \left(1 - \frac{1}{\mu_i} \right) = 0 + \frac{1}{\mu_i^2} = \frac{1}{\mu_i^2}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
 E\left(\frac{Y_i}{1-Y_i}\right) &= -\frac{D'(\mu_i)}{Q'(\mu_i)} = -\frac{-\frac{(1+\mu_i)}{\mu_i(1-\mu_i)}}{\frac{1}{\mu_i^2}} \\
 &= \frac{1+\mu_i}{\mu_i(1-\mu_i)} \mu_i^2 \\
 &= \frac{\mu_i(1+\mu_i)}{1-\mu_i}.
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 E(m_i) &= \left[\frac{2}{(1-\mu_i)^2} - \frac{1}{\mu_i^2} + \frac{2}{\mu_i^3} E\left(\frac{Y_i}{1-Y_i}\right) \right] h'(\eta_i)^2 + \left[\frac{2}{1-\mu_i} + \frac{1}{\mu_i} - \frac{1}{\mu_i^2} E\left(\frac{Y_i}{1-Y_i}\right) \right] h''(\eta_i) \\
 &= \left[\frac{2}{(1-\mu_i)^2} - \frac{1}{\mu_i^2} + \frac{2}{\mu_i^3} \frac{\mu_i(1+\mu_i)}{1-\mu_i} \right] h'(\eta_i)^2 + \left[\frac{2}{1-\mu_i} + \frac{1}{\mu_i} - \frac{1}{\mu_i^2} \frac{\mu_i(1+\mu_i)}{1-\mu_i} \right] h''(\eta_i) \\
 &= \left[\frac{2}{(1-\mu_i)^2} - \frac{1}{\mu_i^2} + \frac{2}{\mu_i^2} \frac{1+\mu_i}{1-\mu_i} \right] h'(\eta_i)^2 + \left[\frac{2}{1-\mu_i} + \frac{1}{\mu_i} - \frac{1}{\mu_i} \frac{1+\mu_i}{1-\mu_i} \right] h''(\eta_i) \\
 &= \left[\frac{2\mu_i^2 - (1-\mu_i)^2 + 2(1+\mu_i)(1-\mu_i)}{\mu_i^2(1-\mu_i)^2} \right] h'(\eta_i)^2 + \left[\frac{2\mu_i + 1 - \mu_i - 1 - \mu_i}{\mu_i(1-\mu_i)} \right] h''(\eta_i).
 \end{aligned}$$

Então,

$$E(m_i) = \left[\frac{1+2\mu_i-\mu_i^2}{\mu_i^2(1-\mu_i)^2} \right] h'(\eta_i)^2. \tag{A.8}$$

Portanto,

$$Q = \text{diag} \left\{ \left[\frac{1+2\mu_1-\mu_1^2}{\mu_1^2(1-\mu_1)^2} \right] h'(\eta_1)^2, \left[\frac{1+2\mu_2-\mu_2^2}{\mu_2^2(1-\mu_2)^2} \right] h'(\eta_2)^2, \dots, \left[\frac{1+2\mu_n-\mu_n^2}{\mu_n^2(1-\mu_n)^2} \right] h'(\eta_n)^2 \right\}.$$

Apêndice B

Derivação da correção de viés

Neste apêndice, obtemos $w_{ts}^{(r)}$ utilizado no fator de correção de viés apresentado no Capítulo 3. Como vimos anteriormente, Cordeiro e Klein (1994) obtiveram a seguinte expressão para correção de viés

$$B_{\hat{\beta}}(\beta) = I(\beta)^{-1} W \text{vec} [I(\beta)^{-1}] ,$$

com $W = (W^{(1)}, \dots, W^{(p)})$, sendo que cada $W^{(r)}$ tem (t,s)-ésimo elemento dado por

$$w_{ts}^{(r)} = \kappa_{ts}^{(r)} - \frac{1}{2} \kappa_{tsr} ,$$

onde $\kappa_{ts}^{(r)}$ e κ_{tsr} são notações tensoriais para os cumulantes das derivadas da log-verossimilhança introduzidas por Lawley (1956):

$$\kappa_{ts}^{(r)} = \frac{\partial \kappa_{ts}}{\partial \beta_r} \quad \text{e} \quad \kappa_{rst} = E \left[\frac{\partial^3 l(\beta)}{\partial \beta_r \partial \beta_s \partial \beta_t} \right] .$$

Temos que $-\kappa_{ts}$ é o (t, s) -ésimo elemento da matriz de informação de Fisher I .

Então,

$$\kappa_{ts}^{(r)} = \frac{\partial}{\partial \beta_r} \kappa_{ts} = \frac{\partial}{\partial \beta_r} \left[- \sum_{i=1}^n E(m_i) x_{it} x_{is} \right] = - \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial E(m_i)}{\partial \beta_r} x_{it} x_{is} \right] . \quad (\text{B.1})$$

Vimos, no Apêndice A, que

$$E(m_i) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1 + 2\mu_i - \mu_i^2}{\mu_i^2(1 - \mu_i)^2} \right] h'(\eta_i)^2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(m_i)}{\partial \beta_r} &= \frac{\partial}{\partial \beta_r} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\frac{1 + 2\mu_i - \mu_i^2}{\mu_i^2(1 - \mu_i)^2} \right] h'(\eta_i)^2 \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta_r} \left[\frac{1 + 2\mu_i - \mu_i^2}{\mu_i^2(1 - \mu_i)^2} \right] h'(\eta_i)^2 + \left[\frac{1 + 2\mu_i - \mu_i^2}{\mu_i^2(1 - \mu_i)^2} \right] \frac{\partial}{\partial \beta_r} h'(\eta_i)^2 \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ \left[\frac{\mu_i^2(2 - 2\mu_i)(1 - \mu_i)^2 - (1 + 2\mu_i - \mu_i^2)[2\mu_i(1 - \mu_i)^2 + 2\mu_i^2(1 - \mu_i)(-1)]}{\mu_i^4(1 - \mu_i)^4} \right] \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial \mu_i}{\partial \beta_r} h'(\eta_i)^2 + \left[\frac{1 + 2\mu_i - \mu_i^2}{\mu_i^2(1 - \mu_i)^2} \right] 2 h'(\eta_i) h''(\eta_i) \frac{\partial \eta_i}{\partial \beta_r} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{2h'(\eta_i)x_{ir}}{\mu_i^3(1 - \mu_i)^3} [\mu_i + 3\mu_i^2 - \mu_i^3 - 1] h'(\eta_i)^2 + \left[\frac{1 + 2\mu_i - \mu_i^2}{\mu_i^2(1 - \mu_i)^2} \right] 2 h'(\eta_i) h''(\eta_i) x_{ir} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n 2 h'(\eta_i) \left\{ \left[\frac{\mu_i + 3\mu_i^2 - \mu_i^3 - 1}{\mu_i^3(1 - \mu_i)^3} \right] h'(\eta_i)^2 + \left[\frac{1 + 2\mu_i - \mu_i^2}{\mu_i^2(1 - \mu_i)^2} \right] h''(\eta_i) \right\} x_{ir}. \end{aligned}$$

Voltando em (B.1) temos

$$\kappa_{ts}^{(r)} = - \sum_{i=1}^n 2 h'(\eta_i) \left\{ \left[\frac{\mu_i + 3\mu_i^2 - \mu_i^3 - 1}{\mu_i^3(1 - \mu_i)^3} \right] h'(\eta_i)^2 + \left[\frac{1 + 2\mu_i - \mu_i^2}{\mu_i^2(1 - \mu_i)^2} \right] h''(\eta_i) \right\} x_{it}x_{is}x_{ir}.$$

Agora, para encontrar $w_{ts}^{(r)}$ precisamos calcular κ_{rst} . Temos que

$$\kappa_{rst} = E \left[\frac{\partial^3 l(\beta)}{\partial \beta_r \partial \beta_s \partial \beta_t} \right] = E \left[\frac{\partial}{\partial \beta_r} \left(\frac{\partial^2 l(\beta)}{\partial \beta_s \partial \beta_t} \right) \right] = -E \left(\frac{\partial J_{st}}{\partial \beta_r} \right). \quad (\text{B.2})$$

Mas,

$$\frac{\partial J_{st}}{\partial \beta_r} = \frac{\partial}{\partial \beta_r} \sum_{i=1}^n m_i x_{is} x_{it} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial m_i}{\partial \beta_r} x_{is} x_{it}. \quad (\text{B.3})$$

Derivando (A.4) com relação a β_r obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_i}{\partial \beta_r} &= \left[\frac{-2(2)(1-\mu_i)(-1)}{(1-\mu_i)^4} - \frac{-2\mu_i}{\mu_i^4} + \frac{-3\mu_i^2(1-y_i)2y_i}{\mu_i^6(1-y_i)^2} \right] \frac{\partial \mu_i}{\partial \beta_r} h'(\eta_i)^2 \\ &\quad + \left[\frac{2}{(1-\mu_i)^2} - \frac{1}{\mu_i^2} + \frac{2y_i}{\mu_i^3(1-y_i)} \right] 2h'(\eta_i)h''(\eta_i)x_{ir} \\ &\quad + \left[\frac{-(-1)2}{(1-\mu_i)^2} + \frac{-1(1)}{\mu_i^2} - \frac{-2\mu_i(1-y_i)y_i}{\mu_i^4(1-y_i)^2} \right] \frac{\partial \mu_i}{\partial \beta_r} h''(\eta_i) \\ &\quad + \left[\frac{2}{1-\mu_i} + \frac{1}{\mu_i} - \frac{y_i}{\mu_i^2(1-y_i)} \right] h'''(\eta_i) x_{ir} \\ &= \left[\frac{4}{(1-\mu_i)^3} + \frac{2}{\mu_i^3} - \frac{6y_i}{\mu_i^4(1-y_i)} \right] h'(\eta_i)^3 x_{ir} \\ &\quad + \left[\frac{2}{(1-\mu_i)^2} - \frac{1}{\mu_i^2} + \frac{2y_i}{\mu_i^3(1-y_i)} \right] 3h'(\eta_i)h''(\eta_i)x_{ir} \\ &\quad + \left[\frac{2}{1-\mu_i} + \frac{1}{\mu_i} - \frac{y_i}{\mu_i^2(1-y_i)} \right] h'''(\eta_i) x_{ir}. \end{aligned}$$

Voltando em (B.3) temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J_{st}}{\partial \beta_r} = & \sum_{i=1}^n \left\{ 2 \left[\frac{2}{(1-\mu_i)^3} + \frac{1}{\mu_i^3} - \frac{3y_i}{\mu_i^4(1-y_i)} \right] h'(\eta_i)^3 \right. \\
& + 3 \left[\frac{2}{(1-\mu_i)^2} - \frac{1}{\mu_i^2} + \frac{2y_i}{\mu_i^3(1-y_i)} \right] h'(\eta_i) h''(\eta_i) \\
& \left. + \left[\frac{2}{1-\mu_i} + \frac{1}{\mu_i} - \frac{y_i}{\mu_i^2(1-y_i)} \right] h'''(\eta_i) \right\} x_{ir} x_{is} x_{it}.
\end{aligned}$$

Por (B.2),

$$\begin{aligned}
\kappa_{rst} = & -E \left(\frac{\partial J_{st}}{\partial \beta_r} \right) \\
= & - \sum_{i=1}^n \left\{ 2 \left[\frac{2}{(1-\mu_i)^3} + \frac{1}{\mu_i^3} - \frac{3}{\mu_i^4} E \left(\frac{Y_i}{1-Y_i} \right) \right] h'(\eta_i)^3 \right. \\
& + 3 \left[\frac{2}{(1-\mu_i)^2} - \frac{1}{\mu_i^2} + \frac{2}{\mu_i^3} E \left(\frac{Y_i}{1-Y_i} \right) \right] h'(\eta_i) h''(\eta_i) \\
& \left. + \left[\frac{2}{1-\mu_i} + \frac{1}{\mu_i} - \frac{1}{\mu_i^2} E \left(\frac{Y_i}{1-Y_i} \right) \right] h'''(\eta_i) \right\} x_{ir} x_{is} x_{it}.
\end{aligned}$$

Sabemos que $E[Y_i/(1-Y_i)] = \mu_i(1+\mu_i)/(1-\mu_i)$ logo,

$$\begin{aligned}
\kappa_{rst} = & - \sum_{i=1}^n \left\{ 2 \left[\frac{2}{(1-\mu_i)^3} + \frac{1}{\mu_i^3} - \frac{3(1+\mu_i)}{\mu_i^3(1-\mu_i)} \right] h'(\eta_i)^3 \right. \\
& + 3 \left[\frac{2}{(1-\mu_i)^2} - \frac{1}{\mu_i^2} + \frac{2(1+\mu_i)}{\mu_i^2(1-\mu_i)} \right] h'(\eta_i) h''(\eta_i) \\
& \left. + \left[\frac{2}{1-\mu_i} + \frac{1}{\mu_i} - \frac{(1+\mu_i)}{\mu_i(1-\mu_i)} \right] h'''(\eta_i) \right\} x_{ir} x_{is} x_{it}.
\end{aligned}$$

Desse modo, é possível obter $w_{ts}^{(r)}$:

$$\begin{aligned}
w_{ts}^{(r)} &= \kappa_{ts}^{(r)} - \frac{1}{2} \kappa_{tsr} \\
&= \sum_{i=1}^n \left\{ -2 \left[\frac{\mu_i + 3\mu_i^2 - \mu_i^3 - 1}{\mu_i^3(1-\mu_i)^3} h'(\eta_i)^3 + \frac{1 + 2\mu_i - \mu_i^2}{\mu_i^2(1-\mu_i)^2} h'(\eta_i) h''(\eta_i) \right] \right. \\
&\quad + \left[\frac{2}{(1-\mu_i)^3} + \frac{1}{\mu_i^3} - \frac{3(1+\mu_i)}{\mu_i^3(1-\mu_i)} \right] h'(\eta_i)^3 \\
&\quad + \left[\frac{3}{(1-\mu_i)^2} - \frac{3}{2\mu_i^2} + \frac{3(1+\mu_i)}{\mu_i^2(1-\mu_i)} \right] h'(\eta_i) h''(\eta_i) \\
&\quad \left. + \left[\frac{1}{1-\mu_i} + \frac{1}{2\mu_i} - \frac{(1+\mu_i)}{2\mu_i(1-\mu_i)} \right] h'''(\eta_i) \right\} x_{ir} x_{is} x_{it}.
\end{aligned}$$

Portanto, após algumas manipulações algébricas, temos

$$w_{ts}^{(r)} = \sum_{i=1}^n \left\{ -\frac{2}{\mu_i^2(1-\mu_i)^3} h'(\eta_i)^3 + \left[\frac{\mu_i^2 - 2\mu_i - 1}{2\mu_i^2(1-\mu_i)^2} \right] h'(\eta_i) h''(\eta_i) \right\} x_{ir} x_{is} x_{it}.$$

Apêndice C

Matriz de covariâncias de segunda ordem

Neste apêndice, obtemos matricialmente a quantidade Γ apresentada no Capítulo 4. De [Magalhães \(2016\)](#) temos que

$$\text{Cov}_2(\hat{\beta}) = I(\beta)^{-1} + I(\beta)^{-1} \{ \Gamma + \Gamma^\top \} I(\beta)^{-1},$$

onde (a,b) -ésimo elemento de Γ é dado por:

$$\gamma_{ab} = -\frac{1}{2}\gamma_{ab}^{(1)} + \frac{1}{4}\gamma_{ab}^{(2)} + \frac{1}{2}\gamma_{ab}^{(3)},$$

com

$$\begin{aligned}\gamma_{ab}^{(1)} &= \sum_{c,d}^p \kappa^{cd} \left\{ 2\kappa_{bc}^{(ad)} - \kappa_{bcd}^{(a)} + \kappa_{ac,bd} \right\}, \\ \gamma_{ab}^{(2)} &= \sum_{r,s,c,d}^p \kappa^{rs} \kappa^{cd} \left\{ \kappa_{arc} [3\kappa_{bsd} + 2\kappa_{b,sd} + 8\kappa_{bs,d}] + 2\kappa_{ar,c} [2\kappa_{b,sd} + \kappa_{bd,s}] \right\}, \\ \gamma_{ab}^{(3)} &= \sum_{r,s,c,d}^p \kappa^{rs} \kappa^{cd} \left\{ \kappa_{bc}^{(a)} \left(\kappa_{sd}^{(r)} + \kappa_{r,sd} \right) \right\}.\end{aligned}$$

Podemos escrever Γ na seguinte forma matricial:

$$\Gamma = -\frac{1}{2}\gamma^{(1)} + \frac{1}{4}\gamma^{(2)} + \frac{1}{2}\gamma^{(3)},$$

onde os (a,b) -ésimos elementos de $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$ e $\gamma^{(3)}$, são, respectivamente, $\gamma_{ab}^{(1)}$, $\gamma_{ab}^{(2)}$ e $\gamma_{ab}^{(3)}$.

C.1 Forma matricial de $\gamma^{(1)}$

Vimos que

$$\gamma_{ab}^{(1)} = \sum_{c,d}^p \kappa^{cd} \left\{ 2\kappa_{bc}^{(ad)} - \kappa_{bcd}^{(a)} + \kappa_{ac,bd} \right\},$$

com

$$\begin{aligned} \kappa_{bc}^{(ad)} = & \sum_{i=1}^n \left\{ 2 \left[\frac{3\mu_i^4 - 12\mu_i^3 - 2\mu_i^2 + 8\mu_i - 3}{\mu_i^4(1-\mu_i)^4} \right] h'(\eta_i)^4 + 10 \left[\frac{\mu_i^3 - 3\mu_i^2 - \mu_i + 1}{\mu_i^3(1-\mu_i)^3} \right] h'(\eta_i)^2 h''(\eta_i) \right. \\ & \left. + 2 \left[\frac{\mu_i^2 - 2\mu_i - 1}{\mu_i^2(1-\mu_i)^2} \right] [h''(\eta_i)^2 + h'(\eta_i)h'''(\eta_i)] \right\} x_{ia}x_{ib}x_{ic}x_{id}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_{bcd}^{(a)} = & \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{12(\mu_i^4 - 4\mu_i^3 + \mu_i^2 + 2\mu_i - 1)}{\mu_i^4(1-\mu_i)^4} h'(\eta_i)^4 + \frac{6(3\mu_i^3 - 9\mu_i^2 - \mu_i + 3)}{\mu_i^3(1-\mu_i)^3} h'(\eta_i)^2 h''(\eta_i) \right. \\ & \left. + \frac{3(\mu_i^2 - 2\mu_i - 1)}{\mu_i^2(1-\mu_i)^2} [h''(\eta_i)^2 + h'(\eta_i)h'''(\eta_i)] \right\} x_{ia}x_{ib}x_{ic}x_{id}, \end{aligned}$$

$$\kappa_{ac,bd} = \sum_{i=1}^p \left\{ \frac{(1 + 2\mu_i - \mu_i^2)}{\mu_i^2(1-\mu_i)^2} \left[\frac{2}{\mu_i} h'(\eta_i)^2 - h''(\eta_i) \right]^2 \right\} x_{ia}x_{ib}x_{ic}x_{id}.$$

Vamos reescrever essas quantidades da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\kappa_{bc}^{(ad)} &= \sum_{i=1}^n \xi_i x_{ia} x_{ib} x_{ic} x_{id}, \\ \kappa_{bcd}^{(a)} &= \sum_{i=1}^n \lambda_i x_{ia} x_{ib} x_{ic} x_{id}, \\ \kappa_{ac,bd} &= \sum_{i=1}^p \phi_i x_{ia} x_{ib} x_{ic} x_{id},\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\xi_i &= 2 \left[\frac{3\mu_i^4 - 12\mu_i^3 - 2\mu_i^2 + 8\mu_i - 3}{\mu_i^4(1 - \mu_i)^4} \right] h'(\eta_i)^4 + 10 \left[\frac{\mu_i^3 - 3\mu_i^2 - \mu_i + 1}{\mu_i^3(1 - \mu_i)^3} \right] h'(\eta_i)^2 h''(\eta_i) \\ &\quad + 2 \left[\frac{\mu_i^2 - 2\mu_i - 1}{\mu_i^2(1 - \mu_i)^2} \right] [h''(\eta_i)^2 + h'(\eta_i)h'''(\eta_i)],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_i &= \frac{12(\mu_i^4 - 4\mu_i^3 + \mu_i^2 + 2\mu_i - 1)}{\mu_i^4(1 - \mu_i)^4} h'(\eta_i)^4 + \frac{6(3\mu_i^3 - 9\mu_i^2 - \mu_i + 3)}{\mu_i^3(1 - \mu_i)^3} h'(\eta_i)^2 h''(\eta_i) \\ &\quad + \frac{3(\mu_i^2 - 2\mu_i - 1)}{\mu_i^2(1 - \mu_i)^2} [h''(\eta_i)^2 + h'(\eta_i)h'''(\eta_i)],\end{aligned}$$

$$\phi_i = \frac{(1 + 2\mu_i - \mu_i^2)}{\mu_i^2(1 - \mu_i)^2} \left[\frac{2}{\mu_i} h'(\eta_i)^2 - h''(\eta_i) \right]^2.$$

Logo,

$$\gamma_{ab}^{(1)} = \sum_{c,d=1}^p \kappa^{cd} \left\{ \sum_{i=1}^n [2\xi_i - \lambda_i + \phi_i] x_{ia} x_{ib} x_{ic} x_{id} \right\} = \sum_{c,d}^p \sum_{i=1}^n \kappa^{cd} t_i x_{ia} x_{ib} x_{ic} x_{id},$$

com,

$$\begin{aligned}
t_i &= 2\xi_i - \lambda_i + \phi_i \\
&= 4 \left[\frac{3\mu_i^4 - 12\mu_i^3 - 2\mu_i^2 + 8\mu_i - 3}{\mu_i^4(1 - \mu_i)^4} \right] h'(\eta_i)^4 + 20 \left[\frac{\mu_i^3 - 3\mu_i^2 - \mu_i + 1}{\mu_i^3(1 - \mu_i)^3} \right] h'(\eta_i)^2 h''(\eta_i) \\
&\quad + 4 \left[\frac{\mu_i^2 - 2\mu_i - 1}{\mu_i^2(1 - \mu_i)^2} \right] [h''(\eta_i)^2 + h'(\eta_i)h'''(\eta_i)] - \frac{12(\mu_i^4 - 4\mu_i^3 + \mu_i^2 + 2\mu_i - 1)}{\mu_i^4(1 - \mu_i)^4} h'(\eta_i)^4 \\
&\quad - \frac{6(3\mu_i^3 - 9\mu_i^2 - \mu_i + 3)}{\mu_i^3(1 - \mu_i)^3} h'(\eta_i)^2 h''(\eta_i) - \frac{3(\mu_i^2 - 2\mu_i - 1)}{\mu_i^2(1 - \mu_i)^2} [h''(\eta_i)^2 + h'(\eta_i)h'''(\eta_i)] \\
&\quad + \frac{(1 + 2\mu_i - \mu_i^2)}{\mu_i^2(1 - \mu_i)^2} \left[\frac{2}{\mu_i} h'(\eta_i)^2 - h''(\eta_i) \right]^2 \\
&= \frac{1}{\mu_i^4(1 - \mu_i)^4} \left[12\mu_i^4 - 48\mu_i^3 - 8\mu_i^2 + 32\mu_i - 12 - 12\mu_i^4 + 48\mu_i^3 - 12\mu_i^2 - 24\mu_i + 12 \right] h'(\eta_i)^4 \\
&\quad + \frac{1}{\mu_i^3(1 - \mu_i)^3} \left[20\mu_i^3 - 60\mu_i^2 - 20\mu_i + 20 - 18\mu_i^3 + 54\mu_i^2 + 6\mu_i - 18 \right] h'(\eta_i)^2 h''(\eta_i) \\
&\quad + \frac{1}{\mu_i^2(1 - \mu_i)^2} \left[4\mu_i^2 - 8\mu_i - 4 - 3\mu_i^2 + 6\mu_i + 3 \right] [h''(\eta_i)^2 + h'(\eta_i)h'''(\eta_i)] \\
&\quad + \frac{1}{\mu_i^2(1 - \mu_i)^2} \left[1 + 2\mu_i - \mu_i^2 \right] \left[\frac{2}{\mu_i} h'(\eta_i)^2 - h''(\eta_i) \right]^2.
\end{aligned}$$

Simplificando temos que

$$\begin{aligned}
t_i &= \frac{(-20\mu_i^2 + 8\mu_i)}{\mu_i^4(1 - \mu_i)^4} h'(\eta_i)^4 + \frac{(2\mu_i^3 - 6\mu_i^2 - 14\mu_i + 2)}{\mu_i^3(1 - \mu_i)^3} h'(\eta_i)^2 h''(\eta_i) \\
&\quad + \frac{(\mu_i^2 - 2\mu_i - 1)}{\mu_i^2(1 - \mu_i)^2} [h''(\eta_i)^2 + h'(\eta_i)h'''(\eta_i)] + \frac{(1 + 2\mu_i - \mu_i^2)}{\mu_i^2(1 - \mu_i)^2} \left[\frac{2}{\mu_i} h'(\eta_i)^2 - h''(\eta_i) \right]^2.
\end{aligned}$$

Com essa simplificação podemos escrever $\gamma^{(1)}$ na forma matricial. Temos que

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad I = I(\beta) = X^\top Q X = - \begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & \dots & \kappa_{1p} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & \dots & \kappa_{2p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \kappa_{p1} & \kappa_{p2} & \dots & \kappa_{pp} \end{bmatrix}.$$

Então,

$$I^{-1} = I(\beta)^{-1} = (X^\top Q X)^{-1} = - \begin{bmatrix} \kappa^{11} & \kappa^{12} & \dots & \kappa^{1p} \\ \kappa^{21} & \kappa^{22} & \dots & \kappa^{2p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \kappa^{p1} & \kappa^{p2} & \dots & \kappa^{pp} \end{bmatrix}.$$

Faça $Z = X I^{-1} X^\top$, ou seja,

$$\begin{aligned} Z &= - \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa^{11} & \kappa^{12} & \dots & \kappa^{1p} \\ \kappa^{21} & \kappa^{22} & \dots & \kappa^{2p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \kappa^{p1} & \kappa^{p2} & \dots & \kappa^{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{1p} & x_{2p} & \dots & x_{np} \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} \sum_{c=1}^p x_{1c} \kappa^{c1} & \sum_{c=1}^p x_{1c} \kappa^{c2} & \dots & \sum_{c=1}^p x_{1c} \kappa^{cp} \\ \sum_{c=1}^p x_{2c} \kappa^{c1} & \sum_{c=1}^p x_{2c} \kappa^{c2} & \dots & \sum_{c=1}^p x_{2c} \kappa^{cp} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{c=1}^p x_{nc} \kappa^{c1} & \sum_{c=1}^p x_{nc} \kappa^{c2} & \dots & \sum_{c=1}^p x_{nc} \kappa^{cp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{1p} & x_{2p} & \dots & x_{np} \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} \sum_{c=1}^p \sum_{d=1}^p x_{1c} x_{1d} \kappa^{cd} & \sum_{c=1}^p \sum_{d=1}^p x_{1c} x_{2d} \kappa^{cd} & \dots & \sum_{c=1}^p \sum_{d=1}^p x_{1c} x_{nd} \kappa^{cd} \\ \sum_{c=1}^p \sum_{d=1}^p x_{2c} x_{1d} \kappa^{cd} & \sum_{c=1}^p \sum_{d=1}^p x_{2c} x_{2d} \kappa^{cd} & \dots & \sum_{c=1}^p \sum_{d=1}^p x_{2c} x_{nd} \kappa^{cd} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{c=1}^p \sum_{d=1}^p x_{nc} x_{1d} \kappa^{cd} & \sum_{c=1}^p \sum_{d=1}^p x_{nc} x_{2d} \kappa^{cd} & \dots & \sum_{c=1}^p \sum_{d=1}^p x_{nc} x_{nd} \kappa^{cd} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$Z = - \sum_{c=1}^p \sum_{d=1}^p \kappa^{cd} \begin{bmatrix} x_{1c}x_{1d} & x_{1c}x_{2d} & \dots & x_{1c}x_{nd} \\ x_{2c}x_{1d} & x_{2c}x_{2d} & \dots & x_{2c}x_{nd} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{nc}x_{1d} & x_{nc}x_{2d} & \dots & x_{nc}x_{nd} \end{bmatrix}.$$

Considere

$$\begin{aligned} Z_D &= \text{diag}(Z) \\ &= - \sum_{c=1}^p \sum_{d=1}^p \kappa^{cd} \begin{bmatrix} x_{1c}x_{1d} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_{2c}x_{2d} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_{nc}x_{nd} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e

$$T = \text{diag}\{t_1, t_2, \dots, t_n\} = \begin{bmatrix} t_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_n \end{bmatrix}.$$

Daí,

$$X^\top T = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{1p} & x_{2p} & \dots & x_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11}t_1 & x_{21}t_2 & \dots & x_{n1}t_n \\ x_{12}t_1 & x_{22}t_2 & \dots & x_{n2}t_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{1p}t_1 & x_{2p}t_2 & \dots & x_{np}t_n \end{bmatrix}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
Z_D X &= - \sum_{c=1}^p \sum_{d=1}^p \kappa^{cd} \begin{bmatrix} x_{1c}x_{1d} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_{2c}x_{2d} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_{nc}x_{nd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{bmatrix} \\
&= - \sum_{c=1}^p \sum_{d=1}^p \kappa^{cd} \begin{bmatrix} x_{11}x_{1c}x_{1d} & x_{12}x_{1c}x_{1d} & \dots & x_{1p}x_{1c}x_{1d} \\ x_{21}x_{2c}x_{2d} & x_{22}x_{2c}x_{2d} & \dots & x_{2p}x_{2c}x_{2d} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{n1}x_{nc}x_{nd} & x_{n2}x_{nc}x_{nd} & \dots & x_{np}x_{nc}x_{nd} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Então, $X^\top T Z_D X$ é igual a

$$\begin{aligned}
&- \sum_{c=1}^p \sum_{d=1}^p \kappa^{cd} \begin{bmatrix} x_{11}t_1 & x_{21}t_2 & \dots & x_{n1}t_n \\ x_{12}t_1 & x_{22}t_2 & \dots & x_{n2}t_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{1p}t_1 & x_{2p}t_2 & \dots & x_{np}t_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11}x_{1c}x_{1d} & x_{12}x_{1c}x_{1d} & \dots & x_{1p}x_{1c}x_{1d} \\ x_{21}x_{2c}x_{2d} & x_{22}x_{2c}x_{2d} & \dots & x_{2p}x_{2c}x_{2d} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{n1}x_{nc}x_{nd} & x_{n2}x_{nc}x_{nd} & \dots & x_{np}x_{nc}x_{nd} \end{bmatrix} \\
&= - \sum_{c=1}^p \sum_{d=1}^p \sum_{i=1}^n \kappa^{cd} t_i \begin{bmatrix} x_{i1}x_{i1} & x_{i1}x_{i2} & \dots & x_{i1}x_{ip} \\ x_{i2}x_{i1} & x_{i2}x_{i2} & \dots & x_{i2}x_{ip} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{ip}x_{i1} & x_{ip}x_{i2} & \dots & x_{ip}x_{ip} \end{bmatrix} x_{ic}x_{id}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\gamma^{(1)} = -X^\top T Z_D X = \begin{bmatrix} \gamma_{11}^{(1)} & \gamma_{12}^{(1)} & \dots & \gamma_{1p}^{(1)} \\ \gamma_{21}^{(1)} & \gamma_{22}^{(1)} & \dots & \gamma_{2p}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \gamma_{p1}^{(1)} & \gamma_{p2}^{(1)} & \dots & \gamma_{pp}^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Daí, o (a,b) -ésimo elemento de $\gamma^{(1)}$ é

$$\gamma_{ab}^{(1)} = \sum_{c=1}^p \sum_{d=1}^p \sum_{i=1}^n \kappa^{cd} t_i x_{ia} x_{ib} x_{ic} x_{id}.$$

Portanto, a forma matricial de $\gamma^{(1)}$ é

$$\gamma^{(1)} = -X^{\top} T Z_D X.$$

C.2 Forma matricial de $\gamma^{(2)}$

Temos que

$$\gamma_{ab}^{(2)} = \sum_{r,s,c,d}^p \kappa^{rs} \kappa^{cd} \{ \kappa_{arc} [3\kappa_{bsd} + 2\kappa_{b,sd} + 8\kappa_{bs,d}] + 2\kappa_{ar,c} [2\kappa_{b,sd} + \kappa_{bd,s}] \},$$

com

$$\kappa_{arc} = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{4(\mu_i^3 - 3\mu_i^2 + 1)}{\mu_i^3(1 - \mu_i)^3} h'(\eta_i)^3 + \frac{3(\mu_i^2 - 2\mu_i - 1)}{\mu_i^2(1 - \mu_i)^2} h'(\eta_i) h''(\eta_i) \right\} x_{ia} x_{ir} x_{ic},$$

$$\kappa_{bsd} = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{4(\mu_i^3 - 3\mu_i^2 + 1)}{\mu_i^3(1 - \mu_i)^3} h'(\eta_i)^3 + \frac{3(\mu_i^2 - 2\mu_i - 1)}{\mu_i^2(1 - \mu_i)^2} h'(\eta_i) h''(\eta_i) \right\} x_{ib} x_{is} x_{id},$$

$$\kappa_{b,sd} = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{(\mu_i^2 - 2\mu_i - 1)}{\mu_i^2(1 - \mu_i)^2} \left[\left(\frac{2}{\mu_i} \right) h'(\eta_i)^2 - h''(\eta_i) \right] h'(\eta_i) \right\} x_{ib} x_{is} x_{id},$$

$$\kappa_{bs,d} = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{(\mu_i^2 - 2\mu_i - 1)}{\mu_i^2(1 - \mu_i)^2} \left[\left(\frac{2}{\mu_i} \right) h'(\eta_i)^2 - h''(\eta_i) \right] h'(\eta_i) \right\} x_{ib} x_{is} x_{id},$$

$$\kappa_{ar,c} = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{(\mu_i^2 - 2\mu_i - 1)}{\mu_i^2(1 - \mu_i)^2} \left[\left(\frac{2}{\mu_i} \right) h'(\eta_i)^2 - h''(\eta_i) \right] h'(\eta_i) \right\} x_{ia} x_{ir} x_{ic},$$

$$\kappa_{bd,s} = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{(\mu_i^2 - 2\mu_i - 1)}{\mu_i^2(1 - \mu_i)^2} \left[\left(\frac{2}{\mu_i} \right) h'(\eta_i)^2 - h''(\eta_i) \right] h'(\eta_i) \right\} x_{ib} x_{id} x_{is}.$$

Vamos reescrever essas quantidades da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\kappa_{arc} &= \sum_{i=1}^n \nu_i x_{ia} x_{ir} x_{ic}, & \kappa_{bsd} &= \sum_{i=1}^n \nu_i x_{ib} x_{is} x_{id}, & \kappa_{b,sd} &= \sum_{i=1}^n \tau_i x_{ib} x_{is} x_{id}, \\ \kappa_{bs,d} &= \sum_{i=1}^n \tau_i x_{ib} x_{is} x_{id}, & \kappa_{ar,c} &= \sum_{i=1}^n \tau_i x_{ia} x_{ir} x_{ic}, & \kappa_{bd,s} &= \sum_{i=1}^n \tau_i x_{ib} x_{is} x_{id},\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\nu_i &= \frac{4(\mu_i^3 - 3\mu_i^2 + 1)}{\mu_i^3(1 - \mu_i)^3} h'(\eta_i)^3 + \frac{3(\mu_i^2 - 2\mu_i - 1)}{\mu_i^2(1 - \mu_i)^2} h'(\eta_i) h''(\eta_i), \\ \tau_i &= \frac{(\mu_i^2 - 2\mu_i - 1)}{\mu_i^2(1 - \mu_i)^2} \left[\left(\frac{2}{\mu_i} \right) h'(\eta_i)^2 - h''(\eta_i) \right] h'(\eta_i).\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\gamma_{ab}^{(2)} &= \sum_{r,s,c,d=1}^p \kappa^{rs} \kappa^{cd} \left\{ \sum_{i,j=1}^n [\nu_i(3\nu_j + 2\tau_j + 8\tau_j) + 2\tau_i(2\tau_j + \tau_j)] x_{ia} x_{jb} x_{ic} x_{jd} x_{ir} x_{js} \right\} \\ &= \sum_{r,s,c,d=1}^p \kappa^{rs} \kappa^{cd} \left\{ \sum_{i,j=1}^n [\nu_i(3\nu_j + 10\tau_j) + 6\tau_i\tau_j] x_{ia} x_{jb} x_{ic} x_{jd} x_{ir} x_{js} \right\} \\ &= \sum_{r,s,c,d=1}^p \sum_{i,j=1}^n \kappa^{rs} \kappa^{cd} \Lambda_{ij} x_{ia} x_{jb} x_{ic} x_{jd} x_{ir} x_{js},\end{aligned}$$

com

$$\Lambda_{ij} = \nu_i(3\nu_j + 10\tau_j) + 6\tau_i\tau_j.$$

Além disso, vimos que

$$Z = - \sum_{c,d} \kappa^{cd} \begin{bmatrix} x_{1c}x_{1d} & x_{1c}x_{2d} & \dots & x_{1c}x_{nd} \\ x_{2c}x_{1d} & x_{2c}x_{2d} & \dots & x_{2c}x_{nd} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{nc}x_{1d} & x_{nc}x_{2d} & \dots & x_{nc}x_{nd} \end{bmatrix}.$$

Daí, usando o produto direto, temos

$$\begin{aligned}
 Z \odot Z &= \sum_{r,s,c,d} \kappa^{rs} \kappa^{cd} \begin{bmatrix} x_{1c}x_{1d} & x_{1c}x_{2d} & \dots & x_{1c}x_{nd} \\ x_{2c}x_{1d} & x_{2c}x_{2d} & \dots & x_{2c}x_{nd} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{nc}x_{1d} & x_{nc}x_{2d} & \dots & x_{nc}x_{nd} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} x_{1r}x_{1s} & x_{1r}x_{2s} & \dots & x_{1r}x_{ns} \\ x_{2r}x_{1s} & x_{2r}x_{2s} & \dots & x_{2r}x_{ns} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{nr}x_{1s} & x_{nr}x_{2s} & \dots & x_{nr}x_{ns} \end{bmatrix} \\
 &= \sum_{r,s,c,d} \kappa^{rs} \kappa^{cd} \begin{bmatrix} x_{1c}x_{1d}x_{1r}x_{1s} & x_{1c}x_{2d}x_{1r}x_{2s} & \dots & x_{1c}x_{nd}x_{1r}x_{ns} \\ x_{2c}x_{1d}x_{2r}x_{1s} & x_{2c}x_{2d}x_{2r}x_{2s} & \dots & x_{2c}x_{nd}x_{2r}x_{ns} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{nc}x_{1d}x_{nr}x_{1s} & x_{nc}x_{2d}x_{nr}x_{2s} & \dots & x_{nc}x_{nd}x_{nr}x_{ns} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Seja

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \dots & \Lambda_{1n} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \dots & \Lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Lambda_{n1} & \Lambda_{n2} & \dots & \Lambda_{nn} \end{bmatrix}.$$

Então,

$$\Lambda \odot Z \odot Z = \sum_{r,s,c,d} \kappa^{rs} \kappa^{cd} \begin{bmatrix} \Lambda_{11}x_{1c}x_{1d}x_{1r}x_{1s} & \Lambda_{12}x_{1c}x_{2d}x_{1r}x_{2s} & \dots & \Lambda_{1n}x_{1c}x_{nd}x_{1r}x_{ns} \\ \Lambda_{21}x_{2c}x_{1d}x_{2r}x_{1s} & \Lambda_{22}x_{2c}x_{2d}x_{2r}x_{2s} & \dots & \Lambda_{2n}x_{2c}x_{nd}x_{2r}x_{ns} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Lambda_{n1}x_{nc}x_{1d}x_{nr}x_{1s} & \Lambda_{n2}x_{nc}x_{2d}x_{nr}x_{2s} & \dots & \Lambda_{nn}x_{nc}x_{nd}x_{nr}x_{ns} \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
(\Lambda \odot Z \odot Z)X &= \sum_{r,s,c,d} \kappa^{rs} \kappa^{cd} \begin{bmatrix} \Lambda_{11}x_{1c}x_{1d}x_{1r}x_{1s} & \Lambda_{12}x_{1c}x_{2d}x_{1r}x_{2s} & \dots & \Lambda_{1n}x_{1c}x_{nd}x_{1r}x_{ns} \\ \Lambda_{21}x_{2c}x_{1d}x_{2r}x_{1s} & \Lambda_{22}x_{2c}x_{2d}x_{2r}x_{2s} & \dots & \Lambda_{2n}x_{2c}x_{nd}x_{2r}x_{ns} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Lambda_{n1}x_{nc}x_{1d}x_{nr}x_{1s} & \Lambda_{n2}x_{nc}x_{2d}x_{nr}x_{2s} & \dots & \Lambda_{nn}x_{nc}x_{nd}x_{nr}x_{ns} \end{bmatrix} \\
&\quad \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{bmatrix} \\
&= \sum_{r,s,c,d} \kappa^{rs} \kappa^{cd} \sum_j \begin{bmatrix} \Lambda_{1j}x_{1c}x_{1r}x_{jd}x_{js}x_{j1} & \Lambda_{1j}x_{1c}x_{1r}x_{jd}x_{js}x_{j2} & \dots & \Lambda_{1j}x_{1c}x_{1r}x_{jd}x_{js}x_{jp} \\ \Lambda_{2j}x_{2c}x_{2r}x_{jd}x_{js}x_{j1} & \Lambda_{2j}x_{2c}x_{2r}x_{jd}x_{js}x_{j2} & \dots & \Lambda_{2j}x_{2c}x_{2r}x_{jd}x_{js}x_{jp} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Lambda_{nj}x_{nc}x_{nr}x_{jd}x_{js}x_{j1} & \Lambda_{nj}x_{nc}x_{nr}x_{jd}x_{js}x_{j2} & \dots & \Lambda_{nj}x_{nc}x_{nr}x_{jd}x_{js}x_{jp} \end{bmatrix} \\
&= \sum_{r,s,c,d} \sum_j \kappa^{rs} \kappa^{cd} \begin{bmatrix} \Lambda_{1j}x_{1c}x_{1r}x_{j1} & \Lambda_{1j}x_{1c}x_{1r}x_{j2} & \dots & \Lambda_{1j}x_{1c}x_{1r}x_{jp} \\ \Lambda_{2j}x_{2c}x_{2r}x_{j1} & \Lambda_{2j}x_{2c}x_{2r}x_{j2} & \dots & \Lambda_{2j}x_{2c}x_{2r}x_{jp} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Lambda_{nj}x_{nc}x_{nr}x_{j1} & \Lambda_{nj}x_{nc}x_{nr}x_{j2} & \dots & \Lambda_{nj}x_{nc}x_{nr}x_{jp} \end{bmatrix} x_{jd}x_{js}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
X^\top(\Lambda \odot Z \odot Z)X &= \sum_{r,s,c,d} \sum_j \kappa^{rs} \kappa^{cd} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{1p} & x_{2p} & \dots & x_{np} \end{bmatrix} \\
&\quad \begin{bmatrix} \Lambda_{1j}x_{1c}x_{1r}x_{j1} & \Lambda_{1j}x_{1c}x_{1r}x_{j2} & \dots & \Lambda_{1j}x_{1c}x_{1r}x_{jp} \\ \Lambda_{2j}x_{2c}x_{2r}x_{j1} & \Lambda_{2j}x_{2c}x_{2r}x_{j2} & \dots & \Lambda_{2j}x_{2c}x_{2r}x_{jp} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Lambda_{nj}x_{nc}x_{nr}x_{j1} & \Lambda_{nj}x_{nc}x_{nr}x_{j2} & \dots & \Lambda_{nj}x_{nc}x_{nr}x_{jp} \end{bmatrix} x_{jd}x_{js} \\
&= \sum_{r,s,c,d} \sum_{i,j} \kappa^{rs} \kappa^{cd} \begin{bmatrix} x_{ic}x_{ir}x_{i1}\Lambda_{ij}x_{j1} & x_{ic}x_{ir}x_{i1}\Lambda_{ij}x_{j2} & \dots & x_{ic}x_{ir}x_{i1}\Lambda_{ij}x_{jp} \\ x_{ic}x_{ir}x_{i2}\Lambda_{ij}x_{j1} & x_{ic}x_{ir}x_{i2}\Lambda_{ij}x_{j2} & \dots & x_{ic}x_{ir}x_{i2}\Lambda_{ij}x_{jp} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{ic}x_{ir}x_{ip}\Lambda_{ij}x_{j1} & x_{ic}x_{ir}x_{ip}\Lambda_{ij}x_{j2} & \dots & x_{ic}x_{ir}x_{ip}\Lambda_{ij}x_{jp} \end{bmatrix} x_{jd}x_{js} \\
&= \sum_{r,s,c,d} \sum_{i,j} \kappa^{rs} \kappa^{cd} \Lambda_{ij} \begin{bmatrix} x_{i1}x_{j1} & x_{i1}x_{j2} & \dots & x_{i1}x_{jp} \\ x_{i2}x_{j1} & x_{i2}x_{j2} & \dots & x_{i2}x_{jp} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{ip}x_{j1} & x_{ip}x_{j2} & \dots & x_{ip}x_{jp} \end{bmatrix} x_{ic}x_{ir}x_{jd}x_{js}.
\end{aligned}$$

Assim, o (a,b) -ésimo elemento de $X^\top(\Lambda \odot Z \odot Z)X$ é igual a

$$\sum_{r,s,c,d=1}^p \sum_{i,j=1}^n \kappa^{rs} \kappa^{cd} \Lambda_{ij} x_{ia} x_{jb} x_{ic} x_{jd} x_{ir} x_{js}.$$

Portanto, a forma matricial de $\gamma^{(2)}$ é

$$\gamma^{(2)} = X^\top(\Lambda \odot Z \odot Z)X.$$

C.3 Forma matricial de $\gamma^{(3)}$

Sabemos que

$$\gamma_{ab}^{(3)} = \sum_{r,s,c,d}^p \kappa^{rs} \kappa^{cd} \left\{ \kappa_{bc}^{(a)} \left(\kappa_{sd}^{(r)} + \kappa_{r,sd} \right) \right\},$$

com

$$\begin{aligned} \kappa_{bc}^{(a)} &= \sum_{i=1}^n \left\{ \left[\frac{2(\mu_i^3 - 3\mu_i^2 - \mu_i + 1)}{\mu_i^3(1 - \mu_i)^3} h'(\eta_i)^3 + \frac{2(\mu_i^2 - 2\mu_i - 1)}{\mu_i^2(1 - \mu_i)^2} h'(\eta_i) h''(\eta_i) \right] \right\} x_{ia} x_{ib} x_{ic}, \\ \kappa_{sd}^{(r)} &= \sum_{i=1}^n \left\{ \left[\frac{2(\mu_i^3 - 3\mu_i^2 - \mu_i + 1)}{\mu_i^3(1 - \mu_i)^3} h'(\eta_i)^3 + \frac{2(\mu_i^2 - 2\mu_i - 1)}{\mu_i^2(1 - \mu_i)^2} h'(\eta_i) h''(\eta_i) \right] \right\} x_{ir} x_{is} x_{id}, \\ \kappa_{r,sd} &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{(\mu_i^2 - 2\mu_i - 1)}{\mu_i^2(1 - \mu_i)^2} \left[\left(\frac{2}{\mu_i} \right) h'(\eta_i)^2 - h''(\eta_i) \right] h'(\eta_i) \right\} x_{ir} x_{is} x_{id}. \end{aligned}$$

Vamos reescrever essas quantidades da seguinte forma:

$$\kappa_{bc}^{(a)} = \sum_{i=1}^n w_i x_{ia} x_{ib} x_{ic}, \quad \kappa_{sd}^{(r)} = \sum_{j=1}^n w_j x_{jr} x_{js} x_{jd}, \quad \kappa_{r,sd} = \sum_{j=1}^n s_j x_{jr} x_{js} x_{jd},$$

onde

$$\begin{aligned} \delta_i &= \frac{2(\mu_i^3 - 3\mu_i^2 - \mu_i + 1)}{\mu_i^3(1 - \mu_i)^3} h'(\eta_i)^3 + \frac{2(\mu_i^2 - 2\mu_i - 1)}{\mu_i^2(1 - \mu_i)^2} h'(\eta_i) h''(\eta_i), \\ \tau_i &= \frac{(\mu_i^2 - 2\mu_i - 1)}{\mu_i^2(1 - \mu_i)^2} \left[\left(\frac{2}{\mu_i} \right) h'(\eta_i)^2 - h''(\eta_i) \right] h'(\eta_i). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\gamma_{ab}^{(3)} &= \sum_{r,s,c,d=1}^p \kappa^{rs} \kappa^{cd} \left\{ \sum_{i,j=1}^n [\delta_i(\delta_j + \tau_j)] x_{ia} x_{ib} x_{ic} x_{jd} x_{jr} x_{js} \right\} \\ &= \sum_{r,s,c,d=1}^p \sum_{i,j=1}^n \kappa^{rs} \kappa^{cd} \Delta_{ij} x_{ia} x_{ib} x_{ic} x_{jd} x_{jr} x_{js},\end{aligned}$$

com

$$\Delta_{ij} = \delta_i(\delta_j + \tau_j).$$

Escrevendo $\gamma^{(3)}$ na forma matricial. Sabemos que

$$Z = - \sum_{c,d} \kappa^{cd} \begin{bmatrix} x_{1c}x_{1d} & x_{1c}x_{2d} & \dots & x_{1c}x_{nd} \\ x_{2c}x_{1d} & x_{2c}x_{2d} & \dots & x_{2c}x_{nd} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{nc}x_{1d} & x_{nc}x_{2d} & \dots & x_{nc}x_{nd} \end{bmatrix}$$

e

$$Z_D = \text{diag}(Z) = - \sum_{r,s} \kappa^{rs} \begin{bmatrix} x_{1r}x_{1s} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_{2r}x_{2s} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_{nr}x_{ns} \end{bmatrix}$$

Daí, temos

$$\begin{aligned}
 ZZ_D &= \sum_{r,s,c,d} \kappa^{rs} \kappa^{cd} \begin{bmatrix} x_{1c}x_{1d} & x_{1c}x_{2d} & \dots & x_{1c}x_{nd} \\ x_{2c}x_{1d} & x_{2c}x_{2d} & \dots & x_{2c}x_{nd} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{nc}x_{1d} & x_{nc}x_{2d} & \dots & x_{nc}x_{nd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1r}x_{1s} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_{2r}x_{2s} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_{nr}x_{ns} \end{bmatrix} \\
 &= \sum_{r,s,c,d} \kappa^{rs} \kappa^{cd} \begin{bmatrix} x_{1c}x_{1d}x_{1r}x_{1s} & x_{1c}x_{2d}x_{2r}x_{2s} & \dots & x_{1c}x_{nd}x_{nr}x_{ns} \\ x_{2c}x_{1d}x_{1r}x_{1s} & x_{2c}x_{2d}x_{2r}x_{2s} & \dots & x_{2c}x_{nd}x_{nr}x_{ns} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{nc}x_{1d}x_{1r}x_{1s} & x_{nc}x_{2d}x_{2r}x_{2s} & \dots & x_{nc}x_{nd}x_{nr}x_{ns} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Seja

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \dots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \dots & \Delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \dots & \Delta_{nn} \end{bmatrix}.$$

Então,

$$\Delta \odot ZZ_D = \sum_{r,s,c,d} \kappa^{rs} \kappa^{cd} \begin{bmatrix} \Delta_{11}x_{1c}x_{1d}x_{1r}x_{1s} & \Delta_{12}x_{1c}x_{2d}x_{2r}x_{2s} & \dots & \Delta_{1n}x_{1c}x_{nd}x_{nr}x_{ns} \\ \Delta_{21}x_{2c}x_{1d}x_{1r}x_{1s} & \Delta_{22}x_{2c}x_{2d}x_{2r}x_{2s} & \dots & \Delta_{2n}x_{2c}x_{nd}x_{nr}x_{ns} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Delta_{n1}x_{nc}x_{1d}x_{1r}x_{1s} & \Delta_{n2}x_{nc}x_{2d}x_{2r}x_{2s} & \dots & \Delta_{nn}x_{nc}x_{nd}x_{nr}x_{ns} \end{bmatrix}.$$

Seja Υ uma matriz $n \times p$ de uns. Desse modo, podemos escrever $(\Delta \odot ZZ_D)\Upsilon$ como

$$\begin{aligned}
& \sum_{r,s,c,d} \kappa^{rs} \kappa^{cd} \begin{bmatrix} \Delta_{11}x_{1c}x_{1d}x_{1r}x_{1s} & \Delta_{12}x_{1c}x_{2d}x_{2r}x_{2s} & \dots & \Delta_{1n}x_{1c}x_{nd}x_{nr}x_{ns} \\ \Delta_{21}x_{2c}x_{1d}x_{1r}x_{1s} & \Delta_{22}x_{2c}x_{2d}x_{2r}x_{2s} & \dots & \Delta_{2n}x_{2c}x_{nd}x_{nr}x_{ns} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Delta_{n1}x_{nc}x_{1d}x_{1r}x_{1s} & \Delta_{n2}x_{nc}x_{2d}x_{2r}x_{2s} & \dots & \Delta_{nn}x_{nc}x_{nd}x_{nr}x_{ns} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \\
&= \sum_{r,s,c,d} \kappa^{rs} \kappa^{cd} \sum_j \begin{bmatrix} \Delta_{1j}x_{1c}x_{jd}x_{jr}x_{js} & \Delta_{1j}x_{1c}x_{jd}x_{jr}x_{js} & \dots & \Delta_{1j}x_{1c}x_{jd}x_{jr}x_{js} \\ \Delta_{2j}x_{2c}x_{jd}x_{jr}x_{js} & \Delta_{2j}x_{2c}x_{jd}x_{jr}x_{js} & \dots & \Delta_{2j}x_{2c}x_{jd}x_{jr}x_{js} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Delta_{nj}x_{nc}x_{jd}x_{jr}x_{js} & \Delta_{nj}x_{nc}x_{jd}x_{jr}x_{js} & \dots & \Delta_{nj}x_{nc}x_{jd}x_{jr}x_{js} \end{bmatrix} \\
&= \sum_{r,s,c,d} \kappa^{rs} \kappa^{cd} \sum_j \begin{bmatrix} \Delta_{1j}x_{1c} & \Delta_{1j}x_{1c} & \dots & \Delta_{1j}x_{1c} \\ \Delta_{2j}x_{2c} & \Delta_{2j}x_{2c} & \dots & \Delta_{2j}x_{2c} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Delta_{nj}x_{nc} & \Delta_{nj}x_{nc} & \dots & \Delta_{nj}x_{nc} \end{bmatrix} x_{jd}x_{jr}x_{js}.
\end{aligned}$$

Daí, $(\Delta \odot ZZ_D)\Upsilon \odot X$ será igual a

$$\begin{aligned}
&= \sum_{r,s,c,d} \sum_j \kappa^{rs} \kappa^{cd} \begin{bmatrix} \Delta_{1j}x_{1c} & \Delta_{1j}x_{1c} & \dots & \Delta_{1j}x_{1c} \\ \Delta_{2j}x_{2c} & \Delta_{2j}x_{2c} & \dots & \Delta_{2j}x_{2c} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Delta_{nj}x_{nc} & \Delta_{nj}x_{nc} & \dots & \Delta_{nj}x_{nc} \end{bmatrix} x_{jd}x_{jr}x_{js} \odot \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{bmatrix} \\
&= \sum_{r,s,c,d} \sum_j \kappa^{rs} \kappa^{cd} \begin{bmatrix} \Delta_{1j}x_{1c}x_{11} & \Delta_{1j}x_{1c}x_{12} & \dots & \Delta_{1j}x_{1c}x_{1p} \\ \Delta_{2j}x_{2c}x_{21} & \Delta_{2j}x_{2c}x_{22} & \dots & \Delta_{2j}x_{2c}x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Delta_{nj}x_{nc}x_{n1} & \Delta_{nj}x_{nc}x_{n2} & \dots & \Delta_{nj}x_{nc}x_{np} \end{bmatrix} x_{jd}x_{jr}x_{js}.
\end{aligned}$$

Agora temos que

$$\begin{aligned}
X^\top [(\Delta \odot ZZ_D) \Upsilon \odot X] &= \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{1p} & x_{2p} & \dots & x_{np} \end{bmatrix} \\
&\quad \sum_{r,s,c,d} \sum_j \kappa^{rs} \kappa^{cd} \begin{bmatrix} \Delta_{1j} x_{1c} x_{11} & \Delta_{1j} x_{1c} x_{12} & \dots & \Delta_{1j} x_{1c} x_{1p} \\ \Delta_{2j} x_{2c} x_{21} & \Delta_{2j} x_{2c} x_{22} & \dots & \Delta_{2j} x_{2c} x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Delta_{nj} x_{nc} x_{n1} & \Delta_{nj} x_{nc} x_{n2} & \dots & \Delta_{nj} x_{nc} x_{np} \end{bmatrix} x_{jd} x_{jr} x_{js} \\
&= \sum_{r,s,c,d} \sum_{i,j} \kappa^{rs} \kappa^{cd} \begin{bmatrix} \Delta_{ij} x_{i1} x_{ic} x_{i1} & \Delta_{ij} x_{i1} x_{ic} x_{i2} & \dots & \Delta_{ij} x_{i1} x_{ic} x_{ip} \\ \Delta_{ij} x_{i2} x_{ic} x_{i1} & \Delta_{ij} x_{i2} x_{ic} x_{i2} & \dots & \Delta_{ij} x_{i2} x_{ic} x_{ip} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Delta_{ij} x_{ip} x_{ic} x_{i1} & \Delta_{ij} x_{ip} x_{ic} x_{i2} & \dots & \Delta_{ij} x_{ip} x_{ic} x_{ip} \end{bmatrix} x_{jd} x_{jr} x_{js} \\
&= \sum_{r,s,c,d} \sum_{i,j} \kappa^{rs} \kappa^{cd} \Delta_{ij} \begin{bmatrix} x_{i1} x_{i1} & x_{i1} x_{i2} & \dots & x_{i1} x_{ip} \\ x_{i2} x_{i1} & x_{i2} x_{i2} & \dots & x_{i2} x_{ip} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_{ip} x_{i1} & x_{ip} x_{i2} & \dots & x_{ip} x_{ip} \end{bmatrix} x_{ic} x_{jd} x_{jr} x_{js}.
\end{aligned}$$

Assim, o (a,b) -ésimo elemento de $X^\top [(\Delta \odot ZZ_D) \Upsilon \odot X]$ é igual a

$$\sum_{r,s,c,d=1}^p \sum_{i,j=1}^n \kappa^{rs} \kappa^{cd} \Delta_{ij} x_{ia} x_{ib} x_{ic} x_{jd} x_{jr} x_{js}.$$

Logo, a forma matricial de $\gamma^{(3)}$ é

$$\gamma^{(3)} = X^\top [(\Delta \odot ZZ_D) \Upsilon \odot X].$$

Portanto,

$$\Gamma = \frac{1}{2}X^\top TZ_D X + \frac{1}{4}X^\top (\Lambda \odot Z \odot Z)X + \frac{1}{2}X^\top [(\Delta \odot ZZ_D) \Upsilon \odot X].$$

Ou ainda,

$$\Gamma = X^\top \left[\frac{1}{2}TZ_D + \frac{1}{4}(\Lambda \odot Z \odot Z) \right] X + \frac{1}{2}X^\top [(\Delta \odot ZZ_D) \Upsilon \odot X].$$

Apêndice D

Programa em R

```
##### Teste de Wald
##### Autor: Pedro Ricelly
##### Lindley Unitaria
##### Data da 1 versao: 19/08/2020
##### Data da ultima versao: 14/10/2020

## Limpando a memoria
rm(list=ls())

## Biblioteca para gerar a Lindley
library(LindleyR)

## Numero de replicas de Monte Carlo
REP = 10000

## Numero de parametros ## p = 2, 3, 4, 5, 6
p = 2

## Numero de parametros testados ## q = 1, 2
q = 1

## Definicao de psi_H0
psi_H0 = rep(0,q)
```

```

## Calculo dos quantis
quantil90 = qchisq(0.90,q)
quantil95 = qchisq(0.95,q)
quantil99 = qchisq(0.99,q)

## Vetor de parametros verdadeiro

### Quando q = 1
if(p==2 && q==1){beta.verd = matrix(c(0,-2),p,1)}
if(p==3 && q==1){beta.verd = matrix(c(0,-2,1),p,1)}
if(p==4 && q==1){beta.verd = matrix(c(0,-2,1,0.5),p,1)}
if(p==5 && q==1){beta.verd = matrix(c(0,1,1,5,-4),p,1)}
if(p==6 && q==1){beta.verd = matrix(c(0,-2,1,0.5,0.5,1.5),p,1)}

### Quando q = 2
if(p==3 && q==2){beta.verd = matrix(c(0,0,-2),p,1)}
if(p==4 && q==2){beta.verd = matrix(c(0,0,-2,1),p,1)}
if(p==5 && q==2){beta.verd = matrix(c(0,0,1,1,5),p,1)}
if(p==6 && q==2){beta.verd = matrix(c(0,0,-2,1,0.5,0.5),p,1)}

##### FUNCAO LOG-VEROSSIMILHANCA A SER MAXIMIZADA
log.ver <- function(beta)
{
  eta      = X%*%beta
  mi       = exp(eta)/(exp(eta) + 1)
  l.beta = sum(2*log(1 - mi) - log(mi) - 3*log(1 - Y)
             - (Y*(1 - mi))/(mi*(1 - Y)))

  return(-l.beta)
}

```

```
##### FUNCAO PARA CALCULAR O VALOR DA FUNCAO LOG-VEROSSIMILHANCA
```

```
log.ver2 <- function(beta)
{
  eta      = X%*%beta
  mi       = exp(eta)/(exp(eta) + 1)
  l.beta = sum(2*log(1 - mi) - log(mi) - 3*log(1 - Y)
              - (Y*(1 - mi))/(mi*(1 - Y)) )

  return(l.beta)
}
```

```
##### FUNCAO PARA CALCULAR A INVERSA DA INFORMACAO DE FISHER
```

```
Inv.I.Fisher <- function(vP1, X)
{
  beta      = vP1
  eta       = X%*%beta
  mi        = exp(eta)/(exp(eta) + 1)
  h.linha   = exp(eta)/((exp(eta) + 1)^2)
  vP        = ((1 + 2*mi - mi^2)/(mi^2*(1 - mi)^2))*(h.linha^2)
  P         = diag(c(vP))

  ### Preenchimento das matrizes de informacao esperada (Fisher) e
  sua inversa
  I.Fisher   = t(X)%*%P%*%X
  Inv.I.Fisher = solve(I.Fisher)

  return(Inv.I.Fisher)
}
```

```
##### FUNCAO PARA O CALCULO DA CORRECAO DE VIES
```

```
Corr.Vies <- function(vP1, X, p, n)
{
  beta.hat      = vP1
```

```

eta.hat          = X%%beta.hat
mi.hat           = exp(eta.hat)/(exp(eta.hat) + 1)
h.linha.hat      = exp(eta.hat)/((exp(eta.hat) + 1)^2)
h.2.linhas.hat   = (exp(eta.hat)*(1 - exp(eta.hat)))/
                  ((exp(eta.hat) + 1)^3)
Inv.I.Fisher.hat = Inv.I.Fisher(beta.hat, X)
vec.Inv.I.Fisher.hat = matrix(c(Inv.I.Fisher.hat))

w.hat           = array(matrix(0,p,p),dim = c(p,p,p))
w.hat.aux       = array(matrix(0,p,p),dim = c(p,p,p,n))

for (r in 1:p)
{
  for (t in 1:p)
  {
    for (s in 1:p)
    {
      for (i in 1:n)
      {
        w.hat.aux[t,s,r,i] = ( ((-2/(mi.hat[i]^2*(1 - mi.hat[i])^3))*
                                (h.linha.hat[i]^3)) + (((mi.hat[i]^2 -
                                2*mi.hat[i] - 1)/(2*mi.hat[i]^2*(1 - mi.hat[i])^2))
                                *h.linha.hat[i]*h.2.linhas.hat[i]) )
                                *X[i,r]*X[i,s]*X[i,t]
      }
      w.hat[t,s,r] = sum(w.hat.aux[t,s,r,])
    }
  }
}

if(p==2){W.hat = cbind(w.hat[, ,1],w.hat[, ,2])}
if(p==3){W.hat = cbind(w.hat[, ,1],w.hat[, ,2],w.hat[, ,3])}
if(p==4){W.hat = cbind(w.hat[, ,1],w.hat[, ,2],w.hat[, ,3],w.hat[, ,4])}
if(p==5){W.hat = cbind(w.hat[, ,1],w.hat[, ,2],w.hat[, ,3],w.hat[, ,4],w.hat[, ,5])}
if(p==6){W.hat = cbind(w.hat[, ,1],w.hat[, ,2],w.hat[, ,3],w.hat[, ,4],w.hat[, ,5],
                        w.hat[, ,6])}
if(p==7){W.hat = cbind(w.hat[, ,1],w.hat[, ,2],w.hat[, ,3],w.hat[, ,4],w.hat[, ,5],

```

```

w.hat[, , 6], w.hat[, , 7]))}

B.beta.hat = Inv.I.Fisher.hat%*%W.hat%*%vec.Inv.I.Fisher.hat

return(B.beta.hat)
}

##### ESTATISTICA DE WALD
Wald <- function(vP1, X, p, psi_H0)
{
  beta.hat          = vP1
  psi_hat           = beta.hat[1:q]
  Inv.I.Fisher.hat = Inv.I.Fisher(beta.hat, X)

  W = t(psi_hat - psi_H0)%*%solve(Inv.I.Fisher.hat[1:q, 1:q])%*%
    (psi_hat - psi_H0)

  return(W)
}

##### FUNCAO PARA CALCULAR A COVARIANCIA DE 2a ORDEM
Cov.2.Matricial <- function(vP1, X, p, n)
{
  beta.hat          = vP1
  psi_hat           = beta.hat[1:q]
  eta.hat           = X%*%beta.hat
  mi.hat            = exp(eta.hat)/(exp(eta.hat) + 1)
  h.linha.hat       = exp(eta.hat)/((exp(eta.hat) + 1)^2)
  h.2.linhas.hat    = (exp(eta.hat)*(1 - exp(eta.hat)))/
    ((exp(eta.hat) + 1)^3)
  h.3.linhas.hat    = (exp(eta.hat)/(1 + exp(eta.hat))^4)*
    (1 - 4*exp(eta.hat) + exp(2*eta.hat))

```

```

Inv.I.Fisher.hat = Inv.I.Fisher(beta.hat, X)

u = numeric(n)
w = numeric(n)
t = numeric(n)
A = matrix(0,n,n)
B = matrix(0,n,n)

for (i in 1:n)
{
  t[i] = ((-20*mi.hat[i]^2+8*mi.hat[i])/((mi.hat[i]^4)*
    (1 - mi.hat[i])^4))*h.linha.hat[i]^4 +
    ((2*mi.hat[i]^3 - 6*mi.hat[i]^2 - 14*mi.hat[i] + 2)/
    ((mi.hat[i]^3)*(1 - mi.hat[i])^3))*
    (h.linha.hat[i]^2*h.2.linhas.hat[i]) +
    ((mi.hat[i]^2 - 2*mi.hat[i] - 1)/
    ((mi.hat[i]^2)*(1 - mi.hat[i])^2))*
    (h.2.linhas.hat[i]^2 + h.linha.hat[i]*h.3.linhas.hat[i]) +
    ((1 + 2*mi.hat[i] - mi.hat[i]^2)/
    ((mi.hat[i]^2)*(1 - mi.hat[i])^2))*
    ((2/mi.hat[i])*h.linha.hat[i]^2 - h.2.linhas.hat[i])^2

  w[i] = 2*((mi.hat[i]^3-3*mi.hat[i]^2-mi.hat[i]+1)/
    (mi.hat[i]^3*(1-mi.hat[i])^3))*h.linha.hat[i]^3 +
    2*((mi.hat[i]^2-2*mi.hat[i]-1)/(mi.hat[i]^2*
    (1-mi.hat[i])^2))*h.linha.hat[i]*h.2.linhas.hat[i]

  u[i] = (((mi.hat[i]^2-2*mi.hat[i]-1)/(mi.hat[i]^2*
    (1-mi.hat[i])^2))*((2/mi.hat[i])*h.linha.hat[i]^2 -
    h.2.linhas.hat[i])*h.linha.hat[i])
}
for (i in 1:n)
{
  for (j in 1:n)

```

```

{
  A[i, j] = (4*((mi.hat[i]^3-3*mi.hat[i]^2+1)/
    (mi.hat[i]^3*(1-mi.hat[i]^3))*h.linha.hat[i]^3 +
    3*((mi.hat[i]^2-2*mi.hat[i]-1)/
    (mi.hat[i]^2*(1-mi.hat[i]^2))*h.linha.hat[i]*
    h.2.linhas.hat[i])*(3*(4*((mi.hat[j]^3-3*mi.hat[j]^2+1)/
    (mi.hat[j]^3*(1-mi.hat[j]^3))*h.linha.hat[j]^3 +
    3*((mi.hat[j]^2-2*mi.hat[j]-1)/(mi.hat[j]^2*
    (1-mi.hat[j]^2))*h.linha.hat[j]*h.2.linhas.hat[j])) +
    10*(((mi.hat[j]^2-2*mi.hat[j]-1)/(mi.hat[j]^2*
    (1-mi.hat[j]^2))*((2/mi.hat[j])*h.linha.hat[j]^2 -
    h.2.linhas.hat[j])*h.linha.hat[j])) +
    6*(((mi.hat[i]^2-2*mi.hat[i]-1)/(mi.hat[i]^2*
    (1-mi.hat[i]^2))*((2/mi.hat[i])*h.linha.hat[i]^2 -
    h.2.linhas.hat[i])*h.linha.hat[i]))*
    (((mi.hat[j]^2-2*mi.hat[j]-1)/(mi.hat[j]^2*
    (1-mi.hat[j]^2))*((2/mi.hat[j])*h.linha.hat[j]^2 -
    h.2.linhas.hat[j])*h.linha.hat[j]))

  B[i, j] = w[i]*(w[j]+u[j])

}
}

T.1 = diag(t)

Z_2 = X%>%Inv.I.Fisher.hat%>%t(X)

Z_d = diag(diag(X%>%Inv.I.Fisher.hat%>%t(X)))

gama.1.hat = -t(X)%>%T.1%>%Z_d%>%X

gama.2.hat = t(X)%%%(A*Z_2*Z_2)%%X

M.1 = matrix(1,n,p)

gama.3.hat = t(X)%%%(B*Z_2%>%Z_d)%%M.1*X)

```

```

Gama.hat = - 0.5*gama.1.hat + 0.25*gama.2.hat + 0.5*gama.3.hat

Cov.hat = Inv.I.Fisher.hat + Inv.I.Fisher.hat%%
          (Gama.hat + t(Gama.hat))%%Inv.I.Fisher.hat

return(Cov.hat)

}

##### INICIO DO LOOP DO TAMANHO DE AMOSTRA #####

ta = c(10,20,30,50)  ## Tamanho amostral

for (n in ta)
{

  ##### Matrix X: gerada a partir de uma distribuicao Uniforme
  X      = matrix(0,n,p)
  for (j in 1:p)
  {
    set.seed(33*j) ## Fixando a semente para geracao dos nr aleatorios
    X[,j] = runif(n, min = -0.5, max = 0.5)
  }

  ## Vetor eta verdadeiro
  eta.verd = X%%beta.verd

  ## Funcao de ligacao logit:  $g(mi) = \log(mi/(1 - mi)) = X \beta = \eta$ 
  mi.verd = exp(eta.verd)/(exp(eta.verd) + 1)

  ## Inicializacao de vetores, matrizes e arrays para estimacao e
  ## calculo da correcao de vies
  beta.hat.aux      = matrix(0,p,REP)

```

```

B.beta.hat      = matrix(0,p,REP)
beta.hat.BC.aux = matrix(0,p,REP)
vies.aux        = matrix(0,p,REP)
vies.BC.aux     = matrix(0,p,REP)
EQM.aux         = matrix(0,p,REP)
EQM.BC.aux      = matrix(0,p,REP)
beta.hat        = matrix(0,p,REP)
W               = numeric(REP)
W.C             = numeric(REP)
Cov.hat.1.ordem = array(matrix(0,p,p),dim = c(p,p,REP))
Cov.hat.2.ordem = array(matrix(0,p,p),dim = c(p,p,REP))

#### INICIO DA SIMULACAO DE MONTE CARLO
for (mc in 1:REP)
{
  Z      = matrix(0,n)
  Y      = matrix(0,n)
  teta   = matrix(0,n)

  ## Geracao de numeros aleatorios
  for (i in 1:n)
  {
    set.seed(33*mc*i) ## Fixando a semente para geracao dos nr aleatorios
    teta[i] = (1 - mi.verd[i])/(mi.verd[i])
    ## Gerando a Lindley:          Z.i ~ L(teta.i)
    Z[i] = rlindley(1, theta = teta[i])
    ## Gerando a Lindley Unitaria: Y.i ~ UL(teta.i)
    Y[i] = Z[i]/(1 + Z[i])
  }

  ## Chute inicial para beta
  beta.inic = solve(t(X)%*%X)%*%t(X)%*%Y

  ## Preenchimento de uma matriz com todos os betas estimados
  ## (para todas as replicas)
  beta.hat.aux[,mc] = optim(beta.inic, log.ver, NULL, method = "BFGS")$par

```

```

##### CORRECAO DE VIES
B.beta.hat[,mc] = Corr.Vies(beta.hat.aux[,mc], X, p, n)
beta.hat.BC.aux[,mc] = beta.hat.aux[,mc] - B.beta.hat[,mc]

### Vieses e EQM dos estimadores sem e com correcao
vies.aux[,mc] = beta.hat.aux[,mc] - beta.verd
vies.BC.aux[,mc] = beta.hat.BC.aux[,mc] - beta.verd
EQM.aux[,mc] = (beta.hat.aux[,mc] - beta.verd)^2
EQM.BC.aux[,mc] = (beta.hat.BC.aux[,mc] - beta.verd)^2

## Preenchimento de uma matriz com todos os betas estimados
## (para todas as replicas)
## Irrestrito
beta.hat[,mc] = beta.hat.aux[,mc]

##### TESTE DE WALD
W[mc] = Wald(beta.hat[,mc], X, p, psi_H0)

##### TESTE DE WALD MODIFICADO (USANDO A COVARIANCIA DE SEGUNDA ORDEM)
psi_hat = beta.hat[1:q,mc]
Cov.hat = Cov.2.Matricial(beta.hat[,mc], X, p, n)
W.C[mc] = t(psi_hat - psi_H0)%*%solve(Cov.hat[1:q,1:q])%*%(psi_hat - psi_H0)

##### COVARIANCIAS DE 1 E 2 ORDEM
Cov.hat.1.ordem[,mc] = Inv.I.Fisher(beta.hat[,mc], X)
Cov.hat.2.ordem[,mc] = Cov.hat

}## Fim da simulacao de Monte Carlo

cont_W_90 = length(W[W>=quantil90])
cont_W_95 = length(W[W>=quantil95])
cont_W_99 = length(W[W>=quantil99])

cont_W.C_90 = length(W.C[W.C>=quantil90])
cont_W.C_95 = length(W.C[W.C>=quantil95])
cont_W.C_99 = length(W.C[W.C>=quantil99])

```

```

## Media dos betas
EMV      = apply(beta.hat,1,mean)

beta.hat.BC = (rowSums(beta.hat.BC.aux[, 1:REP]))/REP

vies      = (rowSums(vies.aux[, 1:REP]))/REP

vies.BC   = (rowSums(vies.BC.aux[, 1:REP]))/REP

EQM       = (rowSums(EQM.aux[, 1:REP]))/REP

EQM.BC    = (rowSums(EQM.BC.aux[, 1:REP]))/REP

viesRel.BC = 100*vies.BC/beta.verd

viesRel    = 100*vies/beta.verd

##### CALCULO DAS COVARIANCIAS DE 1a, 2a ORDEM E COVARIANCIA AMOSTRAL
M.Cov.hat.1.ordem = matrix(0,p,p)
M.Cov.hat.2.ordem = matrix(0,p,p)
Cov.Amostral      = matrix(0,p,p)
Cov.Amostral.aux  = array(matrix(0,p,p),dim = c(p,p,REP))

for (a in 1:p)
{
  for (b in 1:p)
  {
    M.Cov.hat.1.ordem[a,b] = sum(Cov.hat.1.ordem[a,b,])/REP
    M.Cov.hat.2.ordem[a,b] = sum(Cov.hat.2.ordem[a,b,])/REP

    for (mc in 1:REP)
    {
      Cov.Amostral.aux[a,b,mc] = (beta.hat[a,mc] - EMV[a])*
                                (beta.hat[b,mc] - EMV[b])
    }
  }
}

```

```

Cov.Amostral[a,b] = sum(Cov.Amostral.aux[a,b,])/REP
}
}

##### CALCULO DAS TAXAS DE REJEICAO DOS TESTES
Taxa_W_90 = (cont_W_90/REP)*100
Taxa_W_95 = (cont_W_95/REP)*100
Taxa_W_99 = (cont_W_99/REP)*100
Taxa_W = c(Taxa_W_90,Taxa_W_95,Taxa_W_99)

Taxa_W.C_90 = (cont_W.C_90/REP)*100
Taxa_W.C_95 = (cont_W.C_95/REP)*100
Taxa_W.C_99 = (cont_W.C_99/REP)*100
Taxa_W.C = c(Taxa_W.C_90,Taxa_W.C_95,Taxa_W.C_99)

## IMPRESSAO DOS RESULTADOS
Estimativas <- data.frame(Verd = beta.verd,Bias = round(vies,2),
                           RMSE = round(sqrt(EQM),2),Bias.Corr = round(vies.BC,2),
                           RMSE.Corr = round(sqrt(EQM.BC),2))

VVarAmos = matrix(round(diag(Cov.Amostral),2),p,1)
VVar2ord = matrix(round(diag(M.Cov.hat.2.ordem),2),p,1)
VVar1ord = matrix(round(diag(M.Cov.hat.1.ordem),2),p,1)

Variancia <- data.frame(Var.A = VVarAmos,Var.2 = VVar2ord,Var.1 = VVar1ord)

alfa = matrix(c("10%", "5%", "1%"),3,1)
TR <- data.frame(alfa = alfa,Taxa_W = matrix(round(Taxa_W,1),3,1),
                 Taxa_W.C = matrix(round(Taxa_W.C,1),3,1))

print(".....")
print("#####TAMANHO_AMOSTRAL#####")
print(n)

```

```

print(".....")
print("#####_CORRECAO_DE_VIES_#####")
print(round(Estimativas,4))

```

```

print(".....")
print("#####_TAXAS_DE_REJEICAO_#####")
print(TR)

```

```

print(".....")
print("##_VARIaNCIAS_AMOSTRAL, _1a_E_2a_ORDEM_###")
print(Variancia)

```

```

}## Fim do loop do tamanho de amostra

```


Referências Bibliográficas

- Altun, E. & Cordeiro, G. M. (2019). The unit-improved second-degree Lindley distribution : inference and regression modeling. *Computational Statistics*. 1
- Brasil (2021). *COVID-19 - Painel Coronavírus*. Ministério da Saúde, URL: https://susanalitico.saude.gov.br/extensions/covid-19_html/covid-19_html.html. Acesso em 18/01/2021. 25
- Chirwa, T. G. & Odhiambo, N. M. (2016). Macroeconomic determinants of economic growth: A review of international literature. *South East European Journal of Economics and Business*, 11(2), 33–47. 3, 22
- Coibion, O., Gorodnichenko, Y., & Weber, M. (2020). *Labor markets during the COVID-19 crisis: A preliminary view*. Technical report, National Bureau of Economic Research. 3, 25
- Cordeiro, G. M., Botter, D. A., Cavalcanti, A. B., & Barroso, L. P. (2014). Covariance matrix of the bias-corrected maximum likelihood estimator in generalized linear models. *Statistical Papers*, 55(3), 643–652. 2
- Cordeiro, G. M. & Klein, R. (1994). Bias correction in ARMA models. *Statistics and Probability Letters*, 19(3), 169–176. 9
- Cordeiro, G. M. & McCullagh, P. (1991). Bias Correction in Generalized Linear Models. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 53(3), 629–643. 2
- Cordeiro, G. M. & Vasconcellos, K. L. (1997). Bias correction for a class of multivariate nonlinear regression models. *Statistics and Probability Letters*, 35(2), 155–164. 2

- Cox, D. R. & Snell, E. J. (1968). A General Definition of Residuals. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 30(2), 248–265. [2](#)
- de la Fuente-Mella, H., Vallina-Hernandez, A. M., & Fuentes-Solís, R. (2020). Stochastic analysis of the economic growth of OECD countries. *Economic Research-Ekonomska Istrazivanja*, 33(1), 2189–2202. [3](#), [21](#)
- Ferrari, S. L. & Cribari-Neto, F. (2004). Beta regression for modelling rates and proportions. *Journal of Applied Statistics*, 31(7), 799–815. [1](#)
- Forsythe, E., Kahn, L. B., Lange, F., & Wiczer, D. (2020). Labor demand in the time of covid-19: Evidence from vacancy postings and ui claims. *Journal of Public Economics*, 189, 104238. [3](#), [25](#)
- Ghitany, M. E., Atieh, B., & Nadarajah, S. (2008). Lindley distribution and its application. *Mathematics and Computers in Simulation*, 78(4), 493–506. [1](#)
- Gómez-Déniz, E., Sordo, M. A., & Calderín-Ojeda, E. (2014). The Log-Lindley distribution as an alternative to the beta regression model with applications in insurance. *Insurance: Mathematics and Economics*, 54(1), 49–57. [1](#)
- Gonzaga, G. & Reis, M. C. (2011). Oferta de trabalho e ciclo econômico: Os efeitos trabalhador adicional e desalento no Brasil. *Revista Brasileira de Economia*, 65(2), 127–148. [3](#), [24](#)
- Guedes, A. C., Cribari-Neto, F., & Espinheira, P. L. (2019). Modified likelihood ratio tests for unit gamma regressions. *Journal of Applied Statistics*, 4763. [1](#)
- Hausmann, R., Pritchett, L., & Rodrik, D. (2005). Growth accelerations. *Journal of Economic Growth*. *Journal of Economic Growth*, 10(4), 303–329. [3](#), [22](#)
- Hensvik, L., Le Barbanchon, T., & Rathelot, R. (2021). Job search during the covid-19 crisis. *Journal of Public Economics*, 194, 104349. [3](#), [25](#)
- Heston, A., Summers, R., & Aten, B. (2002). *Penn World Table Version 6.1*. Technical report, Center for International Comparisons of Production, Income and Prices at the University of Pennsylvania. [22](#)

- IBGE (2020). Indicadores IBGE - Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua 3º trimestre de 2020. *Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE*, (pp.49). [25](#)
- Jodrá, P. & Jiménez-Gamero, M. D. (2016). A note on the Log-Lindley distribution. *Insurance: Mathematics and Economics*, 71, 189–194. [1](#)
- Lawley, D. N. (1956). A General Method for Approximating to the Distribution of Likelihood Ratio Criteria. *Biometrika*, 43(3/4), 295. [14](#)
- Lemonte, A. J. (2011). Covariance matrix formula for Birnbaum-Saunders regression models. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 81(7), 899–908. [2](#)
- Lemonte, A. J. (2020). Covariance matrix of maximum likelihood estimators in censored exponential regression models. *Communications in Statistics - Theory and Methods*. [2](#)
- Lindley, D. V. (1958). Fiducial Distributions and Bayes' Theorem. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 20(1), 102–107. [1](#), [5](#)
- Magalhães, T. M. (2016). *Refinamento de propriedades assintóticas do estimador de máxima verossimilhança*. PhD thesis, Universidade de São Paulo. [2](#), [13](#), [14](#), [51](#)
- Mattei, L. & Heinen, V. L. (2020). Impactos da crise da Covid-19 no mercado de trabalho brasileiro. *Brazilian Journal of Political Economy*, 40(4), 647–668. [3](#), [25](#)
- Mazucheli, J., Menezes, A. F. B., & Chakraborty, S. (2019). On the one parameter unit-Lindley distribution and its associated regression model for proportion data. *Journal of Applied Statistics*, 46(4), 700–714. [1](#), [2](#), [5](#), [6](#)
- Mazucheli, J., Menezes, A. F. B., & Dey, S. (2018). Improved maximum-likelihood estimators for the parameters of the unit-gamma distribution. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 47(15), 3767–3778. [2](#)
- McCullagh, P. & Nelder, J. (1989). *Generalized Linear Models, Second Edition*. Chapman & Hall/CRC Monographs on Statistics & Applied Probability. Taylor & Francis. [1](#)

- Melo, T. F. N., Ferrari, S. L. P., & Patriota, A. G. (2018). Improved estimation in a general multivariate elliptical model. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, 32(1), 44–68. [2](#)
- Melo, T. F. N., Vargas, T. M., Lemonte, A. J., & Moreno–Arenas, G. (2020). On improved estimation in multivariate dirichlet regressions. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 49(23), 5765–5777. [2](#)
- Montgomery, D. C., Vining, G. G., & Peck, E. A. (2012). *Introduction to linear regression analysis*. Wiley. [22](#), [27](#)
- Oyebowale, A. Y. & Algarhi, A. S. (2020). Macroeconomic determinants of economic growth in Africa. *International Review of Applied Economics*, 00(00), 1–19. [3](#), [21](#)
- Peers, H. W. & Iqbal, M. (1985). Asymptotic Expansions for Confidence Limits in the Presence of Nuisance Parameters, with Applications. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 47(3), 547–554. [2](#), [14](#)
- Pegkas, P., Staikouras, C., & Tsamadias, C. (2020). On the determinants of economic growth: Empirical evidence from the Eurozone countries. *International Area Studies Review*, 23(2), 210–229. [3](#), [21](#)
- Rocha, A. V., Simas, A. B., & Cordeiro, G. M. (2010). Second-order asymptotic expressions for the covariance matrix of maximum likelihood estimators in dispersion models. *Statistics and Probability Letters*, 80(7-8), 718–725. [2](#)
- Shenton, L. & Bowman, K. O. (1977). *Maximum Likelihood Estimation in Small Samples*. Griffin’s statistical monographs & courses. C. Griffin. [2](#)
- R Core Team (2020). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL: <https://www.R-project.org/>. [10](#), [17](#), [31](#)
- Vasconcellos, K. L. & Cordeiro, G. M. (2000). Bias corrected estimates in multivariate student t regression models. *Communications in Statistics Part B: Simulation and Computation*, 29(4), 797–822. [2](#)

- Veloso, F. A., Villela, A., & Giambiagi, F. (2008). Determinantes do "milagre" econômico brasileiro (1968-1973): uma análise empírica. *Revista Brasileira de Economia*, 62(2), 221–246. [23](#)