

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

LUCIENE VIANA GUEDES

**Superfícies de Weingarten Lineares
Hiperbólicas em $\mathbb{R}^3$**

Goiânia
2009

LUCIENE VIANA GUEDES

Superfícies de Weingarten Lineares Hiperbólicas em $\mathbb{R}^3$

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria e Topologia.

Orientador: Prof. Dr. Walteson Pereira Ferreira

Goiânia
2009

LUCIENE VIANA GUEDES

Superfícies de Weingarten Lineares Hiperbólicas em $\mathbb{R}^3$

Dissertação defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 25 de Agosto de 2009, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Walterson Pereira Ferreira
Instituto de Matemática e Estatística – UFG
Presidente da Banca

Prof. Dr. Levi Lopes de Lima
Departamento de Matemática - UFC

Profa. Dra. Rosângela Maria da Silva
Instituto de Matemática e Estatística - UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Luciene Viana Guedes

Graduou-se em Bacharel em Matemática pela UFG - Universidade Federal de Goiás - e em Licenciatura Plena em Matemática pela UEG - Universidade Estadual de Goiás. Durante a graduação, foi monitora e bolsista PIVIC do CNPq. Durante o Mestrado, foi professora Substituta na UFG e bolsista da CAPES.

Dedico este trabalho à Deus e
a minha Família.

Agradecimentos

À Deus que sempre me guia pelo melhor caminho, me capacita e envia os teus anjos para comigo lutarem. A Ti toda honra e toda a glória!

Aos meus amados pais Conceição e Lucinaldo. Vocês fizeram de mim aquilo que sou e serei.

À minha tia Luci Vanda por ter me lembrado de quem eu era, nos momentos em que eu me olhei e não me enxerguei. Quando nada parecia meu, você me apresentou lentes de Deus que me fizeram buscar o melhor. Obrigada por existir em minha vida.

Ao professor Walterson, meu orientador, pelos ensinamentos, pela paciência e pelo tempo dedicado à minha orientação.

Ao meu irmão Fernando pela risada e pela briga de sempre.

Ao Lucas Moreira, companheiro de luta e crescimento. Você fez as coisas ficarem mais leves e lúcidas, quando tudo parecia pesado e obscuro.

Aos avós, tios e primos que ficaram esperando as visitas que nunca chegaram. Vocês acompanharam meus passos mesmo quando foi preciso correr para caminharmos juntos. Amo vocês, família.

Ao amigos que se acostumaram com os parabéns atrasados e corridos. Que aceitaram tantos “hoje eu não posso ir sem questionar”.

À todos os professores, funcionários e amigos do Instituto de Matemática e Estatística da UFG.

À CAPES, pela ajuda financeira durante o curso.

“Para ser grande, sê inteiro: nada teu exagera ou exclui. Sê todo em cada coisa. Põe quanto és no mínimo que fazes. Assim em cada lago a lua toda brilha, porque alta vive.”

Fernando Pessoa,
Poemas Reunidos.

Resumo

Guedes, Luciene Viana. **Superfícies de Weingarten Lineares Hiperbólicas em $\mathbb{R}^3$** . Goiânia, 2009. 70p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Este trabalho foi baseado nos artigos [1] de Juan A. Aledo Sánchez e José M. Espinar e [2] de Rafael López. Nestes artigos eles estudaram superfícies de Weingarten lineares hiperbólicas, ou seja, superfícies cuja curvatura média H e a curvatura Gaussiana K satisfazem uma relação linear da forma $aH + bK = c$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Tais superfícies são ditas hiperbólicas quando o discriminante $\Delta := a^2 + 4bc < 0$. Obteremos uma representação para as superfícies de Weingarten lineares hiperbólicas em termos das suas aplicações de Gauss e também apresentaremos, no caso $a \neq 0$, uma classificação de superfícies de Weingarten lineares de rotação hiperbólicas. Como consequência obteremos, no caso $a \neq 0$, uma família de superfícies de Weingarten lineares hiperbólicas de rotação completas em $\mathbb{R}^3$. Isto contrasta com o Teorema de Hilbert que diz que não existe superfície completa com curvatura Gaussiana constante negativa imersa em $\mathbb{R}^3$.

Palavras-chave

Superfícies linear Weingarten hiperbólicas em $\mathbb{R}^3$.

Abstract

Guedes, Luciene Viana. **Hyperbolic linear Weingarten surfaces in $\mathbb{R}^3$** . Goiânia, 2009. 70p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

The present work has been based by the [1] from Juan A. Aledo Sánchez and José M. Espinar and [2] from Rafael López articles. In those articles they studied hiperbolic linear Weingarten surfaces in $\mathbb{R}^3$ space, this is, surface whose mean curvature H and Gaussian curvature K satisfy a relation of the form $aH + bK = c$, where $a, b, c \in \mathbb{R}$. A such surface is said to be hiperbolic when the discriminant $\Delta := a^2 + 4bc < 0$. We obtain a representation for rotational hyperbolic linear Weingarten surfaces in terms of its Gauss map and we also present, in the case $a \neq 0$, a classification of linear Weingarten surfaces of hyperbolic rotation. As a consequence we obtain, in the case $a \neq 0$, a family of complete hyperbolic linear Weingarten surfaces in $\mathbb{R}^3$. This contrasts with Hilbert's theorem that there do not exist complete surfaces with constant negative Gaussian curvature immersed in $\mathbb{R}^3$.

Keywords

Hyperbolic linear Weingarten surfaces in $\mathbb{R}^3$.

Sumário

Introdução	10
1 Preliminares	12
1.1 Imersões	12
1.2 Superfícies de Weingarten	13
1.3 Superfícies Paralelas	16
1.4 Superfícies Lorentzianas	22
1.5 Equações Diferenciais Ordinárias	23
2 Representação	25
3 Classificação	38
3.1 O caso $z_0 < a/2$	45
3.2 O caso $z_0 = a/2$	53
3.3 O caso $a/2 < z_0 < -2b/a$	53
3.4 O caso $z_0 > -2b/a$	58
Referências Bibliográficas	70

Introdução

Nesta dissertação estudaremos superfícies de Weingarten lineares. Nos basearemos nos artigos “Hyperbolic linear Weingarten surfaces in $\mathbb{R}^3$ ” que tem como autores Juan A. Aledo Sánchez e José M. Espinar [1], e “Rotational linear Weingarten surfaces of hyperbolic type” sob a autoria de Rafael López [2]. O primeiro artigo citado foi publicado em 2007, no número 38(2), 291 – 300, no Bulletin Brazilian Mathematical Society e o segundo artigo foi publicado em 2008, no número 167, 283 – 301, no Israel Journal of Mathematics.

Iremos estudar neste trabalho superfícies de Weingarten lineares hiperbólicas em $\mathbb{R}^3$. Estas, por definição, são imersões de uma superfície orientável M em $\mathbb{R}^3$ tais que as suas curvaturas principais, k_1 e k_2 , satisfazem uma relação da forma $W(k_1, k_2) = 0$, o que implica em uma relação da forma $U(H, K) = 0$, onde H e K são, respectivamente, as curvaturas média e Gaussiana de M .

Vamos estudar superfícies de Weingarten que satisfazem o caso em que U é do tipo linear, ou seja, $U(H, K) = aH + bK - c$, onde a , b e c são constante reais. Os primeiros exemplos de superfícies de Weingarten lineares são as superfícies com curvatura média constante ($b = 0$) e as superfícies com curvatura Gaussiana constante ($a = 0$). Embora estes dois tipos de superfícies citados no exemplo anterior serem bastante estudados na literatura, a classificação de superfícies de Weingarten linear está quase totalmente em aberto. O comportamento de uma superfície de Weingarten linear e suas propriedades dependem fortemente do sinal do discriminante $\Delta = a^2 + 4bc$. Tais superfícies são ditas hiperbólicas (respectivamente elípticas) quando $\Delta < 0$ (respectivamente $\Delta > 0$). A relação $\Delta = 0$ caracteriza as superfícies tubulares.

O foco deste trabalho é o estudo de superfícies de Weingarten lineares hiperbólicas. Exemplos de superfícies de Weingarten lineares hiperbólicas são superfícies com curvatura Gaussiana constante negativa ($a = 0$ e $bc < 0$). Sendo assim, uma expectativa é encontrar nas superfícies de Weingarten lineares hiperbólicas, propriedades semelhantes às superfícies com $K = \text{constante} < 0$. Além disso, entre todas as superfícies de Weingarten hiperbólicas, as classes das superfícies de rotação são particularmente interessantes, pois neste caso, sem perda de generalidade assumindo $c = 1$ na relação linear ($aH + bK = 1$) a equação torna-se uma equação diferencial ordinária.

Nesta dissertação são apresentados três capítulos. No capítulo 1, enunciamos alguns resultados importantes de geometria, equações diferenciais e superfícies que se relacionam de alguma maneira com as superfícies de Weingarten e que foram fundamentais para a compreensão deste trabalho.

No capítulo 2, abordaremos as superfícies de Weingarten lineares do tipo hiperbólicas e faremos uma representação (de Weierstrass) de tais superfícies em termos das suas aplicações de Gauss. Em [7], Gálvez, Martínez e Milán fazem esta representação para superfícies de Weingarten lineares do tipo elíptico.

Finalmente, no capítulo 3, veremos que o estudo de superfícies de Weingarten lineares hiperbólicas de rotação se reduz ao conhecimento de soluções de um dado sistema de equações diferenciais ordinárias, para uma dada condição inicial. Este estudo será baseado na análise da curva perfil que define tais superfícies. Apresentaremos uma classificação de superfícies de Weingarten lineares de rotação cuja curva perfil possui uma reta tangente paralela ao eixo de rotação. Segue abaixo um resumo da classificação que faremos:

Sejam a e b números reais sob a condição $a^2 + 4b < 0$ e $a \neq 0$. Então as superfícies de Weingarten lineares hiperbólicas de rotação satisfazendo $aH + bK = 1$ podem ser parametrizadas por um parâmetro z_0 , com $a, z_0 > 0$ e $z_0 \neq -2b/a$ tal que:

- 1. Se $0 < z_0 < a/2$, a superfície tem curvatura Gaussiana positiva e não é completa.*
- 2. Se $z_0 = a/2$, a superfície é um cilindro.*
- 3. Se $a/2 < z_0 < -2b/a$, a superfície tem curvatura Gaussiana negativa e não é completa.*
- 4. Se $z_0 > -2b/a$ e também $z_0 > a$, superfície é periódica e completa.*

Assim obteremos uma família de superfícies de Weingarten lineares hiperbólicas de rotação completas em $\mathbb{R}^3$. Isto contrasta com o Teorema de Hilbert que diz que não existe superfície completa com curvatura Gaussiana constante negativa imersa em $\mathbb{R}^3$.

Preliminares

Neste capítulo abordaremos de forma concisa algumas definições e resultados, dos quais faremos uso no decorrer deste trabalho. Deixaremos de mencionar algumas demonstrações, no entanto, estas estarão indicadas e poderão ser encontradas nas referências. Estabeleceremos também grande parte da terminologia a ser utilizada.

1.1 Imersões

Definimos uma superfície como sendo uma variedade diferenciável M de dimensão 2.

Definição 1.1 *Uma métrica Riemanniana em uma superfície M é uma escolha de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ em cada $T_p M$, $p \in M$, que varia diferenciavelmente com o ponto p no seguinte sentido: Para alguma parametrização (logo, para todas) $X : \mathcal{U} \rightarrow M$ em torno de p , as funções*

$$E(u, v) = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle_{X(u, v)} ; F(u, v) = \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle_{X(u, v)} ; G(u, v) = \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle_{X(u, v)}$$

são diferenciáveis no aberto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$.

Definição 1.2 *Seja M uma superfície. Uma aplicação diferenciável $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dita uma **imersão** se para todo $p \in M$, a aplicação $dX_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva. Se, além disto, X é um homeomorfismo sobre $X(M) \subset \mathbb{R}^3$, onde $X(M)$ tem a topologia induzida por $\mathbb{R}^3$, diz-se que X é um **mergulho**.*

Dada uma superfície M e $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão. Daremos a M a métrica induzida por X , isto é, para todo $p \in M$, definimos

$$\langle V, W \rangle_p = \langle dX_p(V), dX_p(W) \rangle,$$

para todo $V, W \in T_p M$.

Observação 1.3 Dadas uma superfície M e uma imersão $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, diremos que X ou $X(M) = S$ é uma superfície imersa em $\mathbb{R}^3$.

1.2 Superfícies de Weingarten

Ao longo de todo este trabalho, M sempre vai indicar uma superfície orientável.

Definição 1.4 Seja $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão. X é dita uma **imersão de Weingarten** se as suas curvaturas principais, k_1 e k_2 , satisfazem uma relação da forma

$$F(k_1, k_2) = 0.$$

Sendo H e K as curvaturas média e Gaussiana, respectivamente, de M temos:

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K} \text{ e } k_2 = H - \sqrt{H^2 - K},$$

assim,

$$F(k_1, k_2) = F(H + \sqrt{H^2 - K}, H - \sqrt{H^2 - K}) = U(H, K) = 0.$$

Diz-se que X é **de Weingarten linear** se U satisfaz uma relação linear entre H e K , ou seja,

$$U(H, K) = aH + bK - c = 0, \tag{1-1}$$

onde a , b e c são constantes reais não todas nulas, ou ainda, quando

$$aH + bK = c. \tag{1-2}$$

Neste trabalho, vamos estudar superfícies de Weingarten que satisfazem o caso em que U é do tipo linear.

Exemplo 1.5 As superfícies com curvatura média constante ($b = 0$) e as superfícies cuja curvatura Gaussiana é constante ($a = 0$) são superfícies de Weingarten lineares.

Apesar desses dois tipos de superfícies citados no exemplo anterior serem bastante estudados na literatura, a classificação das superfícies de Weingarten linear está quase totalmente em aberto.

O comportamento de uma superfície de Weingarten linear e suas propriedades qualitativas dependem do sinal de um discriminante que envolve as constantes reais a , b e c . Vejamos como se expressa esse discriminante.

Observação 1.6 Seja $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão de Weingarten linear satisfazendo (1-1). Como toda superfície $S = X(M) \subset \mathbb{R}^3$ é localmente um gráfico, existem coordenadas locais (u, v) , tais que, nestas coordenadas X se exprime na forma

$$X(u, v) = (u, v, z(u, v)).$$

Denotemos por:

$$p = z_u, \quad q = z_v, \quad r = z_{uu}, \quad s = z_{uv}, \quad t = z_{vv},$$

assim obtemos

$$X_u = (1, 0, p), \quad X_v = (0, 1, q), \quad X_{uu} = (0, 0, r), \quad X_{uv} = (0, 0, s), \quad X_{vv} = (0, 0, t)$$

e,

$$N = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}(-p, -q, 1).$$

Daí, os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental são dados por:

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = 1 + p^2, \quad F = \langle X_u, X_v \rangle = pq, \quad G = \langle X_v, X_v \rangle = 1 + q^2,$$

$$e = \langle X_{uu}, N \rangle = \frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad f = \langle X_{uv}, N \rangle = \frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad g = \langle X_{vv}, N \rangle = \frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Portanto

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}$$

e

$$H = \frac{1}{2} \frac{Eg - 2fF + Ge}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \frac{r(1+q^2) - 2spq + t(1+p^2)}{(1+p^2+q^2)^{3/2}}.$$

Assim, a relação de Weingarten (1-1) equivale a equação diferencial parcial de segunda ordem para z , dada por:

$$\Psi(p, q, r, s, t) = a \frac{r(1+q^2) - 2spq + t(1+p^2)}{2(1+p^2+q^2)^{3/2}} + b \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2} - c = 0, \quad (1-3)$$

cujos discriminante é calculado por:

$$\bar{\Delta} = \Psi_r \Psi_t - \frac{1}{4} \Psi_s^2.$$

Veja referência [10].

Agora vamos verificar como o discriminante $\bar{\Delta}$ se relaciona com os coeficientes a, b e c .

Definindo $P = 1 + p^2 + q^2$ e derivando (1-3) em relação à r, s e t , respectivamente, obtemos

$$\Psi_r = a \frac{(1 + q^2)}{2P^{\frac{3}{2}}} + b \frac{t}{P^2}$$

$$\Psi_t = a \frac{(1 + p^2)}{2P^{\frac{3}{2}}} + b \frac{r}{P^2}$$

$$\frac{1}{2}\Psi_s = a \frac{-pq}{2P^{\frac{3}{2}}} + b \frac{-s}{P^2},$$

Assim, $\bar{\Delta}$ se expressa como

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} &= \Psi_r \Psi_t - \left(\frac{1}{2} \Psi_s \right)^2 \\ &= \left(a \frac{(1 + q^2)}{2P^{\frac{3}{2}}} + b \frac{t}{P^2} \right) \left(a \frac{(1 + p^2)}{2P^{\frac{3}{2}}} + b \frac{r}{P^2} \right) - \left(a \frac{-pq}{2P^{\frac{3}{2}}} + b \frac{-s}{P^2} \right)^2 \\ &= a^2 \frac{(1 + q^2)(1 + p^2)}{4P^3} + ab \frac{r(1 + q^2)}{2P^2 P^{\frac{3}{2}}} + ba \frac{t(1 + p^2)}{2P^2 P^{\frac{3}{2}}} + b^2 \frac{rt}{P^2 P^2} \\ &\quad - \left(a^2 \frac{p^2 q^2}{4P^3} + 2ab \frac{spq}{2P^2 P^{\frac{3}{2}}} + b^2 \frac{s^2}{P^2 P^2} \right) \\ &= \frac{1}{P^2} \left[a^2 \frac{(1 + q^2)(1 + p^2) - p^2 q^2}{4P} + ab \frac{1}{2} \frac{r(1 + q^2) - 2spq + t(1 + p^2)}{(1 + p^2 + q^2)^{3/2}} + b^2 \frac{rt - s^2}{P^2} \right] \\ &= \frac{1}{P^2} \left[\frac{a^2}{4} + b(aH + bK) \right] \\ &= \frac{1}{P^2} \left[\frac{a^2 + 4bc}{4} \right], \end{aligned}$$

onde a última igualdade decorre da equação (1-2).

Dizemos que uma solução $z = z(u, v)$ da equação (1-3) é:

- Elíptica se $\bar{\Delta} > 0$ e
- Hiperbólica se $\bar{\Delta} < 0$

Veja referência [10].

Segue-se então a seguinte definição.

Definição 1.7 Uma imersão $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ de Weingarten linear satisfazendo $aH + bK = c$ é dita **hiperbólica (WLH)** se o seu discriminante $\Delta = a^2 + 4bc < 0$.

Exemplo 1.8 As superfícies com curvatura Gaussiana constante negativa ($a = 0$) são superfícies WLH.

As superfícies em que $\Delta > 0$ são ditas superfícies de Weingarten lineares elípticas e são estudadas em [7], onde também é feita uma representação de Weierstrass para tais superfícies em termos da aplicação de Gauss, assim como faremos neste trabalho no capítulo 2 para superfícies de Weingarten lineares hiperbólicas.

1.3 Superfícies Paralelas

Nesta seção apresentaremos algumas definições e resultados sobre superfícies paralelas e veremos que superfícies de Weingarten lineares são localmente paralelas a uma superfície mínima ou a uma superfície de curvatura Gaussiana constante.

Definição 1.9 *Sejam $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão e $X_l(p) = X(p) + lN(p)$, onde $p \in M$, $N : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação Normal de Gauss de X e l é uma constante real. Diz-se que X_l é a **superfície paralela** a X , a uma distância l .*

Observação 1.10 *Uma superfície paralela a uma superfície imersa pode ter singularidades.*

O item (a) do resultado a seguir caracteriza os pontos onde uma tal superfície é regular.

Teorema 1.11 *Sejam $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão e $N : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação normal de Gauss associada. Sejam H e K , respectivamente, a curvatura média e a curvatura Gaussiana de X . Dado $l \in \mathbb{R}$, seja $X_l : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ a superfície paralela a X , a uma distância l . Então:*

- (a) X_l é regular no ponto $p \in M$ se, e somente se, $1 - 2lH(p) + l^2K(p) \neq 0$.
- (b) Se $p \in M$ é um ponto regular de X_l , então as curvaturas Gaussiana K_l e média H_l (a menos de sinal) de X_l são dadas por

$$K_l(p) = \frac{K(p)}{1 - 2lH(p) + l^2K(p)} \quad e \quad H_l(p) = \frac{H(p) - lK(p)}{1 - 2lH(p) + l^2K(p)}. \quad (1-4)$$

Prova. Dado $p \in M$, seja $\tilde{X} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}$ um sistema de coordenadas locais em p , onde $p = \tilde{X}(q)$, com $q = (u_0, v_0) \in \mathcal{U}$ tal que

$$N = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}.$$

Portanto, nas coordenadas (u, v) temos $X_l(u, v) = X(u, v) + lN(u, v)$. Indiquemos por $Y(u, v) = X_l(u, v)$.

Como N_u e $N_v \in T_p X$, podemos exprimir

$$\begin{aligned} N_u &= a_{11}X_u + a_{21}X_v \\ N_v &= a_{12}X_u + a_{22}X_v. \end{aligned} \tag{1-5}$$

Assim, façamos o seguinte produto vetorial para verificar a condição de regularidade

$$\begin{aligned} Y_u \times Y_v &= (X_u + lN_u) \times (X_v + lN_v) \\ &= (X_u + la_{11}X_u + la_{21}X_v) \times (X_v + la_{12}X_u + la_{22}X_v) \\ &= X_u \times X_v + la_{22}X_u \times X_v + la_{11}X_u \times X_v + l^2a_{11}a_{22}X_u \times X_v + l^2a_{21}a_{12}X_v \times X_u \\ &= (X_u \times X_v)(1 + l(a_{22} + a_{11}) + l^2(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})). \end{aligned}$$

Sendo H e K dadas como se segue,

$$H = -\frac{a_{11} + a_{22}}{2} \quad e \quad K = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12},$$

obtemos a seguinte expressão

$$Y_u \times Y_v = (X_u \times X_v)(1 - 2lH + l^2K). \tag{1-6}$$

Como, por hipótese, X é uma superfície regular, isto é, $(X_u \times X_v) \neq 0$, para a regularidade de Y , devemos ter que

$$1 - 2lH + l^2K \neq 0.$$

Logo, segue a demonstração do item (a).

Para a prova do item (b), suponhamos que $1 - 2lH(p) + l^2K(p) \neq 0$, assim

$$\begin{aligned} N_u \times N_v &= (a_{11}X_u + a_{21}X_v) \times (a_{12}X_u + a_{22}X_v) \\ &= a_{11}a_{22}X_u \times X_v + a_{21}a_{12}X_v \times X_u \\ &= K(X_u \times X_v). \end{aligned} \tag{1-7}$$

Analogamente, $\bar{N}_u \times \bar{N}_v = K_l(Y_u \times Y_v)$, onde $\bar{N}(u, v)$ é a aplicação normal de Gauss de Y . De (1-6), segue que

$$\bar{N} = N \quad ou \quad \bar{N} = -N.$$

Considerando a orientação de X_l dada por $\bar{N} = N$, tem-se:

$$\begin{aligned} K(X_u \times X_v) &= N_u \times N_v \\ &= \bar{N}_u \times \bar{N}_v \\ &= K_l(Y_u \times Y_v) \\ &= K_l(X_u \times X_v)(1 - 2lH + l^2K), \end{aligned}$$

da equação acima, obtemos

$$K_l = \frac{K}{1 - 2lH + l^2K}.$$

Por outro lado, sendo $\bar{N}(u, v)$ a aplicação normal de Gauss de Y , também podemos exprimir

$$\begin{aligned} \bar{N}_u &= \bar{a}_{11}Y_u + \bar{a}_{21}Y_v \\ \bar{N}_v &= \bar{a}_{12}Y_u + \bar{a}_{22}Y_v. \end{aligned} \tag{1-8}$$

Assim, realizando o produto vetorial da primeira equação dada acima por Y_v , tem-se

$$\bar{N}_u \times Y_v = \bar{a}_{11}Y_u \times Y_v.$$

Lembrando que $Y_v = X_v + lN_v$ e pela equação (1-6) obtemos

$$N_u \times (X_v + lN_v) = \bar{a}_{11}(X_u \times X_v)(1 - 2lH + l^2K).$$

Efetutando os produtos vetoriais e utilizando as equações (1-5) e (1-7), obtemos

$$(a_{11} + lK)(X_u \times X_v) = \bar{a}_{11}(X_u \times X_v)(1 - 2lH + l^2K)$$

ou ainda,

$$\bar{a}_{11} = \frac{a_{11} + lK}{1 - 2lH + l^2K}.$$

De modo análogo, fazendo o produto vetorial da segunda equação dada no sistema (1-8) por Y_u e novamente utilizando (1-6) obtemos

$$N_v \times (X_u + lN_u) = -\bar{a}_{22}(X_u \times X_v)(1 - 2lH + l^2K),$$

ou ainda, por (1-5) e (1-7) temos que

$$(a_{22} + lK)(X_u \times X_v) = -\bar{a}_{22}(X_u \times X_v)(1 - 2lH + l^2K),$$

obtendo

$$\bar{a}_{22} = \frac{a_{22} + lK}{1 - 2lH + l^2K}.$$

Finalmente, temos

$$\begin{aligned} H_l &= -\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{(a_{11} + lK + a_{22} + lK)}{(1 - 2lH + l^2K)} \\ &= \frac{H - lK}{(1 - 2lH + l^2K)}. \end{aligned}$$

Considerando a orientação dada por $\tilde{N} = -N$, temos

$$K_l = \frac{K}{1 - 2lH + l^2K} \quad \text{e} \quad H_l = -\frac{H - lK}{1 - 2lH + l^2K}.$$

□

Corolário 1.12 *Toda superfície paralela a uma superfície imersa de curvatura Gaussiana nula, também tem curvatura Gaussiana nula nos pontos regulares.*

Corolário 1.13 *Seja $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão de Weingarten linear. Então a superfície $X_l : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, paralela a X , a uma distância l , nos pontos regulares, também é de Weingarten linear.*

Prova. Como X é de Weingarten linear, existem $a, b, c \in \mathbb{R}$ tal que $aH + bK = c$ e, além disso, em pontos regulares, as curvaturas Gaussiana K_l e média H_l de X_l são dadas por (1-4). Vejamos que, X satisfaz $aH + bK = c$ se, e somente se,

$$-c + 2\left(\frac{a}{2} - cl\right)H_l + (b + al - cl^2)K_l = 0. \quad (1-9)$$

De fato, substituindo as expressões de K_l e H_l na segunda igualdade acima temos,

$$-c + 2\left(\frac{a}{2} - cl\right)\left(\frac{H - lK}{1 - 2lH + l^2K}\right) + (b + al - cl^2)\left(\frac{K}{1 - 2lH + l^2K}\right) = 0$$

se, e somente se,

$$-c(1 - 2lH + l^2K) + (a - 2cl)(H - lK) + (b + al - cl^2)K = 0$$

que é equivalente à,

$$aH + bK = c.$$

Agora, tomando

$$\bar{a} := 2\left(\frac{a}{2} - cl\right), \quad \bar{b} := b + al - cl^2 \quad \text{e} \quad \bar{c} := c,$$

obtemos que X_l satisfaz,

$$\bar{a}H_l + \bar{b}K_l = \bar{c}.$$

□

Também é válido o seguinte teorema que nos diz onde encontrar superfícies de Weingarten linear.

Teorema 1.14 *Seja $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão de Weingarten linear satisfazendo $aH + bK = c$, onde a, b e c são constantes reais satisfazendo $\Delta = a^2 + 4bc \neq 0$. Então X é localmente paralela a uma superfície que é mínima nos pontos regulares ou X é localmente paralela a uma superfície que tem curvatura Gaussiana constante nos pontos regulares.*

Prova. Sejam $l \in M$ e $X_l : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $X_l(p) = X(p) + lN(p)$ a superfície paralela a X , a uma distância l . Temos pelo Corolário 1.13 que X_l é, nos pontos regulares, de Weingarten linear, assim por (1-9) segue que

$$-c + 2\left(\frac{a}{2} - cl\right)H_l + (b + al - cl^2)K_l = 0.$$

Dividiremos a prova em dois casos:

Primeiro caso: Se $a \neq 0$ e $c = 0$, podemos supor $b \neq 0$ e tomando $l = -\frac{b}{a}$, obtemos

$$aH_l + bK_l + a\left(-\frac{b}{a}\right)K_l = 0,$$

e portanto $H_l = 0$, ou seja, X_l é uma superfície mínima.

Segundo caso: Se $c \neq 0$, podemos supor $a \neq 0$ e tomamos $l = \frac{a}{2c}$, obtemos

$$-c + bK_l + \frac{a^2K_l}{2c} - \left(\frac{a^2K_l}{4c}\right) = 0$$

A equação acima se reduz a

$$-4c^2 + K_l(a^2 + 4bc) = 0,$$

como $c \neq 0$ e $\Delta = a^2 + 4bc \neq 0$, temos que X_l é uma superfície com curvatura Gaussiana constante

$$K_l = \frac{4c^2}{a^2 + 4bc}.$$

□

Agora iremos observar sob quais condições a superfície $X_l = X + lN$ paralela a X dada na demonstração do Teorema 1.14 é uma superfície regular.

Observação 1.15 Para a análise da regularidade, seja $D = 1 - 2lH + l^2K$.

No primeiro caso, em que consideramos $a \neq 0$, $c = 0$ e $l = -\frac{b}{a}$ e X_l é uma superfície mínima, temos

$$\begin{aligned} D &= 1 - 2lH + l^2K \\ &= 1 + 2\frac{b}{a}H + \frac{b^2}{a^2}K \\ &= \frac{a^2 + 2abH + b^2K}{a^2} \\ &= \frac{a^2 + b(2aH + bK)}{a^2}. \end{aligned}$$

Como $aH + bK = 0$, segue que

$$H = -\frac{bK}{a},$$

portanto,

$$D = \frac{a^2 - b^2K}{a^2}.$$

Se existe $p \in M$ tal que $D(p) = 0$, então da equação acima obtemos

$$K(p) = \frac{a^2}{b^2}.$$

Substituindo a expressão encontrada de K em H , obtemos

$$H(p) = -\frac{a}{b},$$

e, portanto,

$$H^2(p) - K(p) = \frac{a^2}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} = 0,$$

sendo assim p é um ponto umbílico. Portanto se $p \in M$ não é ponto umbílico, temos $D(p) \neq 0$. Assim X_l é regular fora dos pontos umbílicos.

Para o segundo caso, em que consideramos $c \neq 0$, $a \neq 0$ e $l = \frac{a}{2c}$ temos:

$$\begin{aligned}
 D &= 1 - 2lH + l^2K \\
 &= 1 - 2\frac{a}{2c}H + \frac{a^2}{4c^2}K \\
 &= \frac{4c^2 - 4acH + a^2K}{4c^2} \\
 &= \frac{4c(c - aH) + a^2K}{4c^2} \\
 &= \frac{4cbK + a^2K}{4c^2} \\
 &= \frac{K(a^2 + 4bc)}{4c^2}.
 \end{aligned}$$

Como $\Delta = a^2 + 4bc \neq 0$, segue que $D = 0$ se, e somente se, $K(p) = 0$. Portanto a superfície X_l é regular nos pontos onde $K(p) \neq 0$.

1.4 Superfícies Lorentzianas

Nesta seção apresentaremos algumas definições e resultados sobre superfícies Lorentzianas que nos serão úteis na representação dada no capítulo 2.

Definição 1.16 Seja V um espaço vetorial real. Uma **forma bilinear** é uma aplicação $\sigma : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz

- $\sigma(au_1 + bu_2, v) = a\sigma(u_1, v) + b\sigma(u_2, v)$
- $\sigma(u, av_1 + bv_2) = a\sigma(u, v_1) + b\sigma(u, v_2)$

para quaisquer $u, u_1, u_2, v, v_1, v_2 \in V$ e a e b números reais.

σ é dita:

- a) **Simétrica** se $\sigma(u, v) = \sigma(v, u)$.
- b) **Não-degenerada** se $\sigma(u, v) = 0$, para todo $u \neq 0 \Rightarrow v = 0$.
- c) **Positiva-definida** se $u \neq 0 \Rightarrow \sigma(u, u) > 0$.
- d) **Negativa-definida** se $u \neq 0 \Rightarrow \sigma(u, u) < 0$.
- e) **Indefinida** se existem u e $v \in V$ tais que $\sigma(u, u) > 0$ e $\sigma(v, v) < 0$.

Definição 1.17 O **índice** de uma forma bilinear σ é a maior dimensão de um subespaço vetorial de V restrita ao qual a forma é negativa-definida.

Definição 1.18 Uma **métrica Lorentziana** em uma superfície M é uma escolha que associa a cada $p \in M$ uma forma bilinear, simétrica, não-degenerada e de índice 1 no espaço $T_p M$, que varia diferenciavelmente com o ponto p no seguinte sentido: Para alguma parametrização (logo, para todas) $X : \mathcal{U} \rightarrow M$ em torno de p , as funções

$$E(u, v) = \sigma \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right)_{X(u, v)} ; \quad F(u, v) = \sigma \left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right)_{X(u, v)} ; \quad G(u, v) = \sigma \left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right)_{X(u, v)}$$

são diferenciáveis no aberto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$.

Definição 1.19 Diz-se que duas métricas σ e $\bar{\sigma}$ em uma superfície M são **conformemente equivalentes** se

$$\sigma = \rho \bar{\sigma},$$

onde $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e positiva.

Definição 1.20 Diz-se que (u, v) são **coordenadas isotérmicas locais** em uma superfície Lorentziana M se, nas coordenadas (u, v) tem-se

$$\sigma = \rho(du^2 - dv^2), \quad (1-10)$$

onde $\rho = \rho(u, v)$ é uma função diferenciável e positiva.

Teorema 1.21 Se M é uma superfície Lorentziana, então para cada $p \in M$, existe um sistema de coordenadas isotérmicas locais (u, v) numa vizinhança de $p \in M$.

A demonstração deste resultado encontra-se em [8], pg.14.

1.5 Equações Diferenciais Ordinárias

Nesta seção apresentaremos alguns resultados sobre equações diferenciais ordinárias que nos serão úteis na classificação dada no capítulo 3.

Teorema 1.22 (Teorema de Existência e Unicidade de Soluções) Se o campo $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, então dados $t_0 \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in \Omega$ quaisquer, existe uma única solução do problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1-11)$$

definida num intervalo aberto $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$, para certo $\alpha = \alpha(t_0, x_0) > 0$.

Definição 1.23 Dizemos que uma solução $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ do (PVI) (1-11) é **maximal** se, dada qualquer solução $\bar{x} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ de (1-11) definida num intervalo $J \subset \mathbb{R}$, necessariamente $J \subseteq I$ e $\bar{x}(t) = x(t)$, para cada $t \in J$.

Se $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma solução maximal do (PVI) (1-11), dizemos que I é o intervalo maximal de definição da solução.

Teorema 1.24 Se o campo $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 no aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, então dados $t_0 \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in \Omega$, quaisquer, existe uma única solução de (1-11), definida num intervalo maximal necessariamente aberto $I(t_0, x_0)$, contendo t_0 .

Teorema 1.25 Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto contendo x_0 , $f \in C^1(\Omega)$ e $[t_0, r_2)$ o intervalo maximal à direita da solução de (1-11). Se $r_2 < \infty$, então dado qualquer compacto $K \subset \Omega$, existe $t \in (t_0, r_2)$, tal que $x(t) \notin K$.

Este teorema é válido para o intervalo maximal à esquerda $(r_1, t_0]$ da solução do PVI (1-11).

O corolário abaixo segue imediatamente do Teorema 1.25.

Corolário 1.26 Sob as hipóteses do Teorema 1.25 se $r_2 < \infty$ e se existe $\lim_{t \rightarrow r_2^-} x(t)$, então $\lim_{t \rightarrow r_2^-} x(t) \in \partial\Omega$.

As demonstrações dos resultados acima de Equações Diferenciais Ordinárias encontram-se em [9].

Representação

Vamos obter uma representação de Weierstrass para superfícies WLH em termos das suas aplicações de Gauss. Em [7], Gálvez, Martínez e Milán fazem esta representação para superfícies de Weingarten lineares do tipo elíptico. Como no Capítulo 1, M indicará uma superfície orientável.

Lema 2.1 *Seja $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície imersa satisfazendo $aH + bK = c$, onde $a^2 + 4bc < 0$ com a , b e c constantes reais e seja N a aplicação normal de Gauss associada. Então $\sigma = \frac{a}{2}I + bII$ é uma métrica Lorentziana em M , onde I e II são as primeira e segunda formas fundamentais de X .*

Prova. Sejam (u, v) coordenadas locais em M definidas em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Portanto nas coordenadas locais (u, v) temos a primeira e a segunda forma fundamental de M , respectivamente, dadas por:

$$I_q(V, W) = \langle dX_q(V), dX_q(W) \rangle$$

$$II_q(V, W) = -\langle dN_q(V), dX_q(W) \rangle$$

onde $q \in \Omega$, V e $W \in \mathbb{R}^2$. Seja $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o operador linear auto-adjunto associado a II_q , ou seja,

$$I_q(A(V), W) = II_q(V, W) = -\langle dN_q(V), dX_q(W) \rangle.$$

Consideremos $\{e_1, e_2\}$ uma base ortonormal, na métrica I_q , de direções principais de X . Temos

$$A(e_1) = \lambda_1 e_1 \quad \text{e} \quad A(e_2) = \lambda_2 e_2,$$

onde λ_1 e λ_2 são as curvatura principais associadas.

Temos

$$\begin{aligned}\sigma(e_i, e_j) &= \frac{a}{2}I(e_i, e_j) + bII(e_i, e_j) \\ &= \frac{a}{2}\delta_{ij} + b\lambda_i\delta_{ij} \\ &= \left(\frac{a + 2b\lambda_i}{2}\right)\delta_{ij}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\det(\sigma) &= \left(\frac{a + 2b\lambda_1}{2}\right)\left(\frac{a + 2b\lambda_2}{2}\right) \\ &= \frac{a^2 + 2ab(\lambda_1 + \lambda_2) + 4b^2\lambda_1\lambda_2}{4} \\ &= \frac{a^2 + 4abH + 4b^2K}{4} \\ &= \frac{a^2 + 4b(aH + bK)}{4} \\ &= \frac{a^2 + 4bc}{4} < 0,\end{aligned}$$

portanto σ é métrica Lorentziana. □

Observação 2.2 *Sejam M uma superfície Lorentziana orientável, $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão e $N : M \rightarrow S^2$ a aplicação normal de Gauss de X . Seja $\omega = N \times N_v du + N \times N_u dv$, onde (u, v) são parâmetros isotérmicos em M e compatíveis com a orientação de M . Então ω define uma 1-forma diferencial em M .*

Teorema 2.3 *Seja $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície imersa satisfazendo $aH + bK = c$, onde $a^2 + 4bc < 0$ com a, b e c constantes reais. Sejam N a aplicação normal de Gauss associada a X e (u, v) parâmetros isotérmicos locais para a métrica σ . Então X pode ser representada em termos de N , como*

$$\begin{aligned}X_u &= \frac{-a}{2c}N_u + \frac{d}{2c}N \times N_v, \\ X_v &= \frac{-a}{2c}N_v + \frac{d}{2c}N \times N_u,\end{aligned}\tag{2-1}$$

onde $d = \sqrt{|a^2 + 4bc|}$, isto é,

$$X(p) = -\frac{a}{2c}N(p) + \frac{d}{2c} \int_{\gamma_p} (N \times N_v du + N \times N_u dv) + C, \quad p \in M,$$

onde γ_p é uma curva diferenciável qualquer ligando um ponto p_0 fixo de M ao ponto p em M e $C \in \mathbb{R}^3$ é um vetor constante.

Prova. Como (u, v) são parâmetros isotérmicos locais para a métrica $\sigma = \frac{a}{2}I + bII$, temos que $\sigma = \rho(du^2 - dv^2)$ onde ρ é uma função diferenciável e positiva. Inicialmente mostraremos que

$$\begin{aligned}\frac{a}{2}(N \times X_u) - b(N \times N_u) &= \frac{\rho X_v}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ \frac{a}{2}(N \times X_v) - b(N \times N_v) &= \frac{\rho X_u}{\sqrt{EG - F^2}}.\end{aligned}$$

Sejam $E = \langle X_u, X_u \rangle$, $F = \langle X_u, X_v \rangle$ e $G = \langle X_v, X_v \rangle$ os coeficientes da primeira forma fundamental de X e

$$N = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} = \frac{X_u \times X_v}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Temos assim

$$\begin{aligned}N \times X_u &= \frac{X_u \times X_v}{\sqrt{EG - F^2}} \times X_u, \\ N \times X_v &= \frac{X_u \times X_v}{\sqrt{EG - F^2}} \times X_v.\end{aligned}$$

Das equações acima e utilizando a identidade

$$(v_1 \times v_2) \times v_3 = \langle v_1, v_3 \rangle v_2 - \langle v_2, v_3 \rangle v_1, \quad (2-2)$$

para todo v_1, v_2 e v_3 em $\mathbb{R}^3$ obtemos

$$\begin{aligned}N \times X_u &= \frac{EX_v - FX_u}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ N \times X_v &= \frac{FX_v - GX_u}{\sqrt{EG - F^2}}.\end{aligned} \quad (2-3)$$

Por outro lado, temos

$$N_u = a_{11}X_u + a_{21}X_v,$$

$$N_v = a_{12}X_u + a_{22}X_v,$$

onde

$$a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \quad a_{12} = \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \quad a_{21} = \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \quad a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2},$$

$e = \langle X_{uu}, N \rangle$, $f = \langle X_{uv}, N \rangle$ e $g = \langle X_{vv}, N \rangle$, são os coeficientes da segunda forma fundamental de X . Temos

$$\begin{aligned} N \times N_u &= \frac{X_u \times X_v}{\sqrt{EG - F^2}} \times \left(\frac{(fF - eG)X_u + (eF - fE)X_v}{EG - F^2} \right), \\ N \times N_v &= \frac{X_u \times X_v}{\sqrt{EG - F^2}} \times \left(\frac{(gF - fG)X_u + (fF - gE)X_v}{EG - F^2} \right). \end{aligned}$$

Efetuada os produtos vetoriais do lado direito das equações acima utilizando a identidade (2-2), obtemos

$$\begin{aligned} N \times N_u &= \frac{fX_u - eX_v}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ N \times N_v &= \frac{gX_u - fX_v}{\sqrt{EG - F^2}}. \end{aligned} \tag{2-4}$$

Por (2-3) e (2-4), temos

$$\begin{aligned} \frac{a}{2}(N \times X_u) - b(N \times N_u) &= \frac{a}{2} \left(\frac{EX_v - FX_u}{\sqrt{EG - F^2}} \right) - b \left(\frac{fX_u - eX_v}{\sqrt{EG - F^2}} \right), \\ \frac{a}{2}(N \times X_v) - b(N \times N_v) &= \frac{a}{2} \left(\frac{FX_v - GX_u}{\sqrt{EG - F^2}} \right) - b \left(\frac{gX_u - fX_v}{\sqrt{EG - F^2}} \right). \end{aligned}$$

Reagrupando os termos obtemos

$$\begin{aligned} \frac{a}{2}(N \times X_u) - b(N \times N_u) &= \left[\left(\frac{aE + 2be}{2} \right) X_v - \left(\frac{aF + 2bf}{2} \right) X_u \right] \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}, \\ \frac{a}{2}(N \times X_v) - b(N \times N_v) &= \left[\left(\frac{aF + 2bf}{2} \right) X_v - \left(\frac{aG + 2bg}{2} \right) X_u \right] \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}. \end{aligned} \tag{2-5}$$

Temos

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{a}{2}I + bII \\ &= \frac{a}{2}(Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2) + b(edu^2 + 2fdudv + gdv^2) \\ &= \frac{aE + 2be}{2}du^2 + (aF + 2bf)dudv + \frac{aG + 2bg}{2}dv^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sigma\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}\right) = \frac{aE + 2be}{2} = \rho \quad (2-6)$$

$$\sigma\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right) = aF + 2bf = 0 \quad (2-7)$$

$$\sigma\left(\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v}\right) = \frac{aG + 2bg}{2} = -\rho \quad (2-8)$$

Substituindo (2-6), (2-7) e (2-8) em (2-5), finalmente obtemos

$$\begin{aligned} \frac{a}{2}(N \times X_u) - b(N \times N_u) &= \frac{\rho X_v}{\sqrt{EG - F^2}} \\ \frac{a}{2}(N \times X_v) - b(N \times N_v) &= \frac{\rho X_u}{\sqrt{EG - F^2}}. \end{aligned} \quad (2-9)$$

Agora, por (2-6), (2-7) e (2-8), temos

$$-\rho^2 = \left(\frac{aE + 2be}{2}\right) \left(\frac{aG + 2bg}{2}\right) - (aF + 2bf)^2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} -4\rho^2 &= a^2(EG - F^2) + 2ab(Eg + eG - 2fF) + 4b^2(eg - f^2) - \\ &\quad - (3a^2F^2 + 12abfF + 12b^2f^2). \end{aligned} \quad (2-10)$$

Agora observamos que pelas expressões de ρ temos

$$3a^2F^2 + 12abfF + 12b^2f^2 = 3(aF + 2bf)^2 = 0. \quad (2-11)$$

Substituindo (2-11) em (2-10), obtemos

$$-4\rho^2 = a^2(EG - F^2) + 2ab(Eg + eG - 2fF) + 4b^2(eg - f^2),$$

o que nos dá

$$-4\rho^2 = (EG - F^2) \left(a^2 + 2ab \frac{Eg + eG - 2fF}{EG - F^2} + 4b^2 \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \right).$$

Logo,

$$-4\rho^2 = (EG - F^2) (a^2 + 4abH + 4b^2K) = (EG - F^2) (a^2 + 4bc).$$

Portanto, sendo $\Delta = a^2 + 4bc < 0$, obtemos

$$\rho = \frac{\sqrt{|a^2 + 4bc|(EG - F^2)}}{2}.$$

Definindo $d = \sqrt{|a^2 + 4bc|}$ e substituindo a expressão de ρ encontrada acima em (2-9) obtemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{2}X_v &= \frac{a}{2}(N \times X_u) - b(N \times N_v) \\ \frac{d}{2}X_u &= \frac{a}{2}(N \times X_v) - b(N \times N_u),\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}X_u &= \frac{a}{d}(N \times X_v) - \frac{2b}{d}(N \times N_v) \\ X_v &= \frac{a}{d}(N \times X_u) - \frac{2b}{d}(N \times N_u).\end{aligned}\tag{2-12}$$

Assim,

$$\begin{aligned}N \times X_u &= N \times \left(\frac{a}{d}(N \times X_v) - \frac{2b}{d}b(N \times N_v) \right) \\ N \times X_v &= N \times \left(\frac{a}{d}(N \times X_u) - \frac{2b}{d}b(N \times N_u) \right).\end{aligned}$$

Das equações acima e utilizando a identidade (2-2) obtemos

$$\begin{aligned}N \times X_u &= \frac{-a}{d}X_v + \frac{2b}{d}N_v \\ N \times X_v &= \frac{-a}{d}X_u + \frac{2b}{d}N_u.\end{aligned}$$

Substituindo as equações acima em (2-12), obtemos

$$\begin{aligned}X_u(a^2 + d^2) &= 2abN_u - 2bdN \times N_v \\ X_v(a^2 + d^2) &= 2abN_v - 2bdN \times N_u.\end{aligned}\tag{2-13}$$

Como por hipótese $\Delta = a^2 + 4bc < 0$ segue que $d^2 + a^2 = -4bc$, substituindo em (2-13) e isolando X_u e X_v , obtemos (2-1).

Do sistema (2-1) temos

$$dX = -\frac{a}{2c}dN + \frac{d}{2c}\omega, \quad \text{onde} \quad \omega = N \times N_v du + N \times N_u dv.$$

Portanto,

$$X(p) = -\frac{a}{2c}N(p) + \frac{d}{2c} \int_{\gamma_p} (N \times N_v du + N \times N_u dv) + C, \quad p \in M,$$

onde γ_p é uma curva diferenciável qualquer ligando um ponto p_0 fixo de M ao ponto p em M e $C \in \mathbb{R}^3$ é um vetor constante. □

Teorema 2.4 *Sejam M uma superfície simplesmente conexa Lorentziana, $N : M \rightarrow S^2$ uma aplicação diferenciável e $a, b, c \in \mathbb{R}$ tal que $a^2 + 4bc < 0$. Sejam (u, v) coordenadas isotérmicas locais para M e suponhamos que*

$$N \times (N_{uu} - N_{vv}) = 0. \quad (2-14)$$

Então o sistema

$$\begin{aligned} X_u &= \frac{-a}{2c}N_u + \frac{d}{2c}N \times N_v \\ X_v &= \frac{-a}{2c}N_v + \frac{d}{2c}N \times N_u, \end{aligned}$$

onde $d = \sqrt{|a^2 + 4bc|}$ determina uma superfície $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$X(p) = -\frac{a}{2c}N(p) + \frac{d}{2c} \int_{\gamma_p} (N \times N_v du + N \times N_u dv) + C, \quad p \in M$$

onde γ_p é uma curva diferenciável qualquer ligando um ponto p_0 fixo de M ao ponto p em M e $C \in \mathbb{R}^3$ é um vetor constante. Nos pontos regulares a superfície X tem aplicação normal de Gauss N , satisfaz $aH + bK = c$ e a estrutura conforme dada por $\sigma = \frac{a}{2}I + bII$ é a mesma de M .

Prova. Derivando (2-1), obtemos

$$\begin{aligned} X_{uv} &= \frac{-a}{2c}N_{uv} + \frac{d}{2c}N \times N_{vv} \\ X_{vu} &= \frac{-a}{2c}N_{vu} + \frac{d}{2c}N \times N_{uu}. \end{aligned} \quad (2-15)$$

Como por (2-14) temos que $N \times N_{uu} = N \times N_{vv}$, das equações acima obtemos

$$X_{uv} = X_{vu}.$$

Portanto o sistema (2-1) é integrável, isto é, tem soluções.

Suponhamos que X satisfaz (2-1). Fazendo em (2-1) o produto interno por N obtemos

$$\langle N, X_u \rangle = \langle N, X_v \rangle = 0.$$

Portanto, nos pontos regulares, N é a aplicação normal de Gauss de X .

Seja X uma solução regular de (2-1) e sejam

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \quad e$$

$$II = edu^2 + 2fdudv + gdv^2.$$

a primeira e segunda forma fundamental de X , respectivamente. Temos

$$\sigma = \left(\frac{aE + 2be}{2} \right) du^2 + (aF + 2bf)dudv + \left(\frac{aG + 2bg}{2} \right) dv^2$$

onde os coeficientes da primeira e da segunda forma fundamental de X são dados por

$$\begin{aligned} E &= \langle X_u, X_u \rangle \\ &= \left\langle \frac{-a}{2c}N_u + \frac{d}{2c}N \times N_v, \frac{-a}{2c}N_u + \frac{d}{2c}N \times N_v \right\rangle \\ &= \frac{a^2}{4c^2} \langle N_u, N_u \rangle - \frac{ad}{2c^2} \langle N_u, N \times N_v \rangle + \frac{d^2}{4c^2} \langle N_v, N_v \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= \langle X_u, X_v \rangle \\ &= \left\langle \frac{-a}{2c}N_u + \frac{d}{2c}N \times N_v, \frac{-a}{2c}N_v + \frac{d}{2c}N \times N_u \right\rangle \\ &= \frac{1}{4c^2} \langle N_u, N_v \rangle (a^2 + d^2), \end{aligned}$$

como $d^2 = -a^2 - 4bc$, obtemos

$$F = -\frac{b}{c} \langle N_u, N_v \rangle.$$

$$\begin{aligned} G &= \langle X_v, X_v \rangle \\ &= \left\langle \frac{-a}{2c}N_v + \frac{d}{2c}N \times N_u, \frac{-a}{2c}N_v + \frac{d}{2c}N \times N_u \right\rangle \\ &= \frac{a^2}{4c^2} \langle N_v, N_v \rangle - \frac{ad}{2c^2} \langle N, N_u \times N_v \rangle + \frac{d^2}{4c^2} \langle N_u, N_u \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e &= -\langle X_u, N_u \rangle \\
&= -\left\langle \frac{-a}{2c} N_u + \frac{d}{2c} N \times N_v, N_u \right\rangle \\
&= \frac{a}{2c} \langle N_u, N_u \rangle + \frac{d}{2c} \langle N, N_u \times N_v \rangle,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f &= -\langle X_u, N_v \rangle \\
&= -\left\langle \frac{-a}{2c} N_u + \frac{d}{2c} N \times N_v, N_v \right\rangle \\
&= \frac{a}{2c} \langle N_u, N_v \rangle,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g &= -\langle X_v, N_v \rangle \\
&= -\left\langle \frac{-a}{2c} N_v + \frac{d}{2c} N \times N_u, N_v \right\rangle \\
&= \frac{a}{2c} \langle N_v, N_v \rangle - \frac{d}{2c} \langle N, N_u \times N_v \rangle.
\end{aligned}$$

Assim obtemos

$$aF + 2bf = \frac{-ab}{c} \langle N_u, N_v \rangle + 2b \frac{a}{2c} \langle N_u, N_v \rangle,$$

ou seja,

$$aF + 2bf = 0. \quad (2-16)$$

E ainda,

$$\begin{aligned}
aE + 2be &= \frac{a^3}{4c^2} \langle N_u, N_u \rangle + \frac{a^2 d}{2c^2} \langle N, N_u \times N_v \rangle + \frac{ad^2}{4c^2} \langle N_v, N_v \rangle + \frac{ab}{c} \langle N_u, N_u \rangle + \frac{bd}{c} \langle N, N_u \times N_v \rangle \\
&= \left(\frac{a^3 + 4abc}{4c^2} \right) \langle N_u, N_u \rangle + \left(\frac{a^2 d + 2bdc}{2c^2} \right) \langle N, N_u \times N_v \rangle + \frac{ad^2}{4c^2} \langle N_v, N_v \rangle \\
&= \frac{-ad^2}{4c^2} \langle N_u, N_u \rangle + d \left(\frac{a^2 + 2bc}{2c^2} \right) \langle N, N_u \times N_v \rangle + \frac{ad^2}{4c^2} \langle N_v, N_v \rangle \quad (2-17)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
aG + 2bg &= \frac{a^3}{4c^2} \langle N_v, N_v \rangle - \frac{a^2 d}{2c^2} \langle N, N_u \times N_v \rangle + \frac{ad^2}{4c^2} \langle N_u, N_u \rangle + \frac{ab}{c} \langle N_v, N_v \rangle - \frac{bd}{c} \langle N, N_u \times N_v \rangle \\
&= \left(\frac{a^3 + 4abc}{4c^2} \right) \langle N_v, N_v \rangle - \left(\frac{a^2 d + 2bdc}{2c^2} \right) \langle N, N_u \times N_v \rangle + \frac{ad^2}{4c^2} \langle N_u, N_u \rangle \\
&= \frac{-ad^2}{4c^2} \langle N_v, N_v \rangle - d \left(\frac{a^2 + 2bc}{2c^2} \right) \langle N, N_u \times N_v \rangle + \frac{ad^2}{4c^2} \langle N_u, N_u \rangle.
\end{aligned}$$

Assim

$$aE + 2be = -(aG + 2bg).$$

Definamos

$$\rho := \frac{aE + 2be}{2} = -\frac{aG + 2bg}{2}. \quad (2-18)$$

Assim $\sigma = \rho(du^2 - dv^2)$ e, portanto, a estrutura conforme dada por σ é conformemente equivalente a de M .

Para mostrarmos que X satisfaz relação linear de Weingarten observamos que

$$\begin{aligned}
X_u \times X_v &= \left(\frac{-a}{2c} N_u + \frac{d}{2c} N \times N_v \right) \times \left(\frac{-a}{2c} N_v + \frac{d}{2c} N \times N_u \right) \\
&= \frac{a^2}{4c^2} N_u \times N_v - \frac{ad}{4c^2} N_u \times (N \times N_u) - \frac{ad}{4c^2} (N \times N_v) \times N_v + \\
&\quad + \frac{d^2}{4c^2} (N \times N_v) \times (N \times N_u). \quad (2-19)
\end{aligned}$$

Pela identidade (2-2) segue que

$$N_u \times (N \times N_u) = \langle N_u, N_u \rangle N - \langle N_u, N \rangle N_u = \langle N_u, N_u \rangle N. \quad (2-20)$$

$$(N \times N_v) \times N_v = \langle N, N_v \rangle N_v - \langle N_v, N_v \rangle N = -\langle N_v, N_v \rangle N. \quad (2-21)$$

e

$$\begin{aligned}
(N \times N_v) \times (N \times N_u) &= \langle N, N \times N_u \rangle N_v - \langle N_v, N \times N_u \rangle N \\
&= -\langle N \times N_u, N_v \rangle N \\
&= -\det(N, N_u, N_v) N. \quad (2-22)
\end{aligned}$$

Substituindo as equações de (2-20) à (2-22) em (2-19), obtemos

$$X_u \times X_v = \frac{1}{4c^2} (a^2 N_u \times N_v + ad (\langle N_v, N_v \rangle - \langle N_u, N_u \rangle) N - d^2 \det(N, N_u, N_v) N). \quad (2-23)$$

Agora vamos obter a expressão de $EG - F^2$ em termos de N . Para isto temos que

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= \langle X_u \times X_v, X_u \times X_v \rangle \\ &= \frac{1}{16c^4} \left(a^4 \langle N, N_u \times N_v \rangle^2 + 2a^3 d (\langle N_v, N_v \rangle - \langle N_u, N_u \rangle) \langle N, N_u \times N_v \rangle - \right. \\ &\quad \left. - 2a^2 d^2 \langle N_u \times N_v, \langle N, N_u \times N_v \rangle N \rangle - 2ad^3 (\langle N_v, N_v \rangle - \langle N_u, N_u \rangle) \langle N, N_u \times N_v \rangle + \right. \\ &\quad \left. + a^2 d^2 (\langle N_v, N_v \rangle - \langle N_u, N_u \rangle)^2 + d^4 \langle N, N_u \times N_v \rangle^2 \right) \\ &= \frac{1}{16c^4} \left((a^2 - d^2)^2 \langle N, N_u \times N_v \rangle^2 + 2ad (\langle N_v, N_v \rangle - \langle N_u, N_u \rangle) \langle N, N_u \times N_v \rangle (a^2 - d^2) \right. \\ &\quad \left. + a^2 d^2 (\langle N_v, N_v \rangle - \langle N_u, N_u \rangle)^2 \right) \\ &= \frac{1}{16c^4} \left((a^2 - d^2) \langle N, N_u \times N_v \rangle + ad (\langle N_v, N_v \rangle - \langle N_u, N_u \rangle) \right)^2, \end{aligned}$$

assim,

$$EG - F^2 = \frac{1}{16c^4} \left((a^2 - d^2) \langle N, N_u \times N_v \rangle + ad (\langle N_v, N_v \rangle - \langle N_u, N_u \rangle) \right)^2. \quad (2-24)$$

Por (2-17) e (2-18) segue que

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2} (aE + 2be) \\ &= \frac{d}{8c^2} (-ad \langle N_u, N_u \rangle + (2a^2 + 4bc) \langle N, N_u \times N_v \rangle + ad \langle N_v, N_v \rangle) \\ &= \frac{d}{8c^2} ((2a^2 + 4bc) \langle N, N_u \times N_v \rangle + ad (\langle N_v, N_v \rangle - \langle N_u, N_u \rangle)) \end{aligned}$$

Sendo $d^2 = -a^2 - 4bc$ obtemos $a^2 - d^2 = 2a^2 + 4bc$, assim

$$16c^4 (EG - F^2) = \frac{64c^4 \rho^2}{d^2}$$

ou seja

$$\rho^2 = \frac{d^2 (EG - F^2)}{4}. \quad (2-25)$$

Por (2-16) e (2-18) temos que

$$e = \frac{2\rho - aE}{2b}, \quad f = \frac{-aF}{2b}, \quad g = \frac{-aG - 2\rho}{2b}.$$

Assim

$$\begin{aligned}
 Eg - 2fF + Ge &= E \left(\frac{-aG - 2\rho}{2b} \right) - 2F \left(\frac{-aF}{2b} \right) + G \left(\frac{2\rho - aE}{2b} \right) \\
 &= \frac{1}{2b} (-aEG - 2\rho E + 2aF^2 + 2\rho G - aEG) \\
 &= \frac{1}{2b} (-2\rho(E - G) - 2a(EG - F^2)).
 \end{aligned} \tag{2-26}$$

E ainda,

$$\begin{aligned}
 eg - f^2 &= \left(\frac{2\rho - aE}{2b} \right) \left(\frac{-aG - 2\rho}{2b} \right) - \left(\frac{-aF}{2b} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{4b^2} (-2\rho aG - 4\rho^2 + a^2 EG + 2aE\rho - a^2 F^2) \\
 &= \frac{1}{4b^2} (-4\rho^2 + a^2(EG - F^2) + 2a\rho(E - G)).
 \end{aligned} \tag{2-27}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{1}{4b^2} \left(\frac{-4\rho^2 + 2a\rho(E - G)}{EG - F^2} + a^2 \right) \\
 H &= \frac{1}{2} \frac{Eg - 2fF + Ge}{EG - F^2} = \frac{1}{4b} \left(\frac{-2\rho(E - G)}{EG - F^2} - 2a \right).
 \end{aligned}$$

Portanto, pelas expressões de H e K dadas acima e por (2-25) obtemos

$$\begin{aligned}
 aH + bK &= \frac{a}{4b} \left(\frac{-2\rho(E - G)}{EG - F^2} - 2a \right) + \frac{b}{4b^2} \left(\frac{-4\rho^2 + 2a\rho(E - G)}{EG - F^2} + a^2 \right) \\
 &= \frac{-a\rho(E - G)}{2b(EG - F^2)} - \frac{a^2}{2b} - \frac{\rho^2}{b(EG - F^2)} + \frac{a\rho(E - G)}{2b(EG - F^2)} + \frac{a^2}{4b} \\
 &= \frac{-\rho^2}{b(EG - F^2)} - \frac{a^2}{4b}.
 \end{aligned}$$

Substituindo (2-25) na equação acima obtemos

$$aH + bK = c.$$

Pela Observação (2.2) temos que $\omega = N \times N_v du + N \times N_u dv$ é uma 1-forma diferencial definida globalmente em M . Como por (2-14)

$$N \times N_{uu} = N \times N_{vv},$$

temos que

$$\frac{\partial}{\partial v}(N \times N_v) = \frac{\partial}{\partial u}(N \times N_u).$$

Portanto, ω é uma 1-forma fechada em M . Como M é simplesmente conexa, temos que ω é exata. Assim, a superfície X definida pelo sistema (2-1) é dada por

$$X(p) = -\frac{a}{2c}N(p) + \frac{d}{2c} \int_{\gamma_p} (N \times N_v du + N \times N_u dv) + C, \quad p \in M,$$

onde γ_p é uma curva diferenciável qualquer ligando um ponto p_0 fixo de M ao ponto p em M e $C \in \mathbb{R}^3$ é um vetor constante.

□

Observação 2.5 A condição para que a superfície X dada no Teorema 2.4 seja uma superfície regular é, por (2-23), que

$$a^2 N_u \times N_v + ad (\langle N_v, N_v \rangle - \langle N_u, N_u \rangle) N - d^2 \det(N, N_u, N_v) N \neq 0.$$

Por (2-24) a condição acima é equivalente à

$$(a^2 - d^2) \langle N, N_u \times N_v \rangle + ad (\langle N_v, N_v \rangle - \langle N_u, N_u \rangle) \neq 0.$$

Classificação

Neste capítulo apresentaremos uma classificação de superfícies de rotação de Weingarten lineares do tipo hiperbólico cuja curva perfil possui uma reta tangente paralela ao eixo de rotação. Como consequência obteremos uma família de superfícies de Weingarten lineares hiperbólicas completas em $\mathbb{R}^3$.

Sem perda de generalidade, vamos assumir $c = 1$ na relação linear Weingarten (1-2), isto é, suporemos que a relação é

$$aH + bK = 1. \quad (3-1)$$

A condição de hiperbolicidade torna-se

$$\Delta = a^2 + 4b < 0.$$

Suporemos também que $a \neq 0$, isto é, excluiremos os caso de superfícies com curvatura Gaussiana constante negativa.

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva diferenciável no plano (x, z) dada por $\alpha(s) = (x(s), 0, z(s))$ com $z(s) > 0$ para todo s no intervalo I , onde s é o comprimento de arco ao longo de α . Considerando $\theta = \theta(s)$ o ângulo entre $\alpha'(s)$ e o eixo x temos que $\alpha'(s) = (\cos \theta(s), 0, \sin \theta(s))$.

A superfície de rotação S obtida através da rotação de α em torno do eixo x possui a seguinte parametrização:

$$X(s, \phi) = (x(s), z(s) \cos \phi, z(s) \sin \phi).$$

Sendo assim, os coeficientes da primeira e da segunda forma fundamental de X são dados por:

$$\begin{aligned} E = \langle X_s, X_s \rangle &= 1, \quad F = \langle X_s, X_\phi \rangle = 0, \quad G = \langle X_\phi, X_\phi \rangle = z^2, \\ e = \langle X_{ss}, N \rangle &= x''z' - x'z'', \quad f = \langle X_{s\phi}, N \rangle = 0, \quad g = \langle X_{\phi\phi}, N \rangle = x'z, \end{aligned}$$

com N dado por

$$N = (z'(s), -x'(s) \cos \phi, -x'(s) \sin \phi).$$

Como $F = f = 0$ temos

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{e}{E} \\ &= x''z' - x'z'' \\ &= -\sin \theta(s) \theta'(s) \sin \theta(s) - \cos \theta(s) \cos \theta(s) \theta'(s) \\ &= -\theta'(s) \end{aligned}$$

e

$$k_2 = \frac{g}{G} = \frac{x'}{z} = \frac{\cos \theta(s)}{z(s)}.$$

Assim, H e K são dadas por:

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos \theta(s)}{z(s)} - \theta'(s) \right) = \frac{\cos \theta(s) - z(s) \theta'(s)}{2z(s)}$$

e

$$K = k_1 k_2 = \frac{-\cos \theta(s) \theta'(s)}{z(s)}. \quad (3-2)$$

Substituindo as expressões de H e K dadas acima em (3-1) obtemos

$$a \frac{\cos \theta(s) - z(s) \theta'(s)}{2z(s)} - b \frac{\cos \theta(s) \theta'(s)}{z(s)} = 1. \quad (3-3)$$

Logo,

$$\theta'(s) = \frac{a \cos \theta(s) - 2z(s)}{az(s) + 2b \cos \theta(s)}, \quad (3-4)$$

se $az(s) + 2b \cos \theta(s) \neq 0$.

Observamos que de fato temos $az(s) + 2b \cos \theta(s) \neq 0$, para todo s em I . Suponhamos que para algum s em I temos $az(s) + 2b \cos \theta(s) = 0$. Neste caso

$$\cos \theta(s) = -\frac{az(s)}{2b}. \quad (3-5)$$

Segue de (3-4) que

$$\theta'(s)(az(s) + 2b \cos \theta(s)) = a \cos \theta(s) - 2z(s),$$

assim

$$a \cos \theta(s) - 2z(s) = 0, \quad (3-6)$$

substituindo (3-5) em (3-6) obtemos

$$\frac{a^2 z(s)}{2b} + 2z(s) = 0,$$

ou ainda

$$\frac{z(s)}{2b}(a^2 + 4b) = 0,$$

o que é uma contradição pois temos $a^2 + 4b < 0$, $b < 0$ e consideramos $z(s) > 0$. Portanto temos que $az(s) + 2b \cos \theta(s) \neq 0$, para todo s em I .

Portanto o estudo de superfícies de rotação WLH se reduz ao conhecimento das soluções da equação anterior para condições iniciais dadas. Podemos supor que $\alpha(0) = (0, 0, z_0)$, onde $z_0 > 0$ e $\alpha'(0) = (1, 0, 0)$. Temos que a curva α é governada pelo seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} x' = \cos \theta \\ z' = \sin \theta \\ \theta' = \frac{a \cos \theta - 2z}{az + 2b \cos \theta} \end{cases}, \quad (3-7)$$

sob as condições iniciais

$$x(0) = 0, \quad z(0) = z_0, \quad \theta(0) = 0 \quad (3-8)$$

definido no domínio $\Omega = \left\{ (x, \theta, z) : x, \theta, z \in \mathbb{R}, \text{ e } z \neq \frac{-2b \cos \theta}{a} \right\}$. Note que o sistema (3-7) - (3-8) satisfaz o Teorema de Existência e Unicidade 1.22.

Ao trocarmos a curva α por $\tilde{\alpha}(s) = (x(s), 0, -z(s))$, a superfície obtida pela rotação da curva $\tilde{\alpha}$ em torno do eixo x será a mesma obtida pela rotação da curva α . Sendo assim, a curva $\tilde{\alpha}$ será solução do sistema ao trocarmos os parâmetros (a, b, z_0) por $(-a, b, -z_0)$. Daí podemos escolher o parâmetros a e z_0 com o mesmo sinal. Ao longo deste trabalho vamos assumir que a e z_0 são ambos positivos.

Teorema 3.1 *Uma integral primeira do sistema de equações diferenciais (3-7) é dada por $G(x, \theta, z) = z^2 - az \cos \theta - b \cos^2 \theta$. Além disso, $G(x(s), \theta(s), z(s)) = z_0^2 - az_0 - b$, ao longo da solução $(x(s), \theta(s), z(s))$ de (3-7), satisfazendo as condições iniciais (3-8).*

Prova. Devemos mostrar que G é uma função constante ao longo das soluções $(x(s), \theta(s), z(s))$ do sistema (3-7). Desta forma

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial s}(x(s), \theta(s), z(s)) &= 2z(s)z'(s) - az'(s)\cos\theta(s) + az(s)\sin\theta(s)\theta'(s) + 2b\cos\theta(s)\sin\theta(s)\theta'(s) \\
&= 2z(s)\sin\theta(s) - a\sin\theta(s)\cos\theta(s) + az\sin\theta(s)\theta'(s) + 2b\cos\theta(s)\sin\theta(s)\theta'(s) \\
&= 2z(s)\sin\theta(s) - a\sin\theta(s)\cos\theta(s) + \sin\theta(s)\theta'(s)(az(s) + 2b\cos\theta(s)) \\
&= 2z(s)\sin\theta(s) - a\sin\theta(s)\cos\theta(s) + \\
&\quad \sin\theta(s)\left(\frac{a\cos\theta(s) - 2z(s)}{az(s) + 2b\cos\theta(s)}\right)(az(s) + 2b\cos\theta(s)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $G(x(s), \theta(s), z(s)) = c'$, onde c' é constante.

Em $s = 0$, temos $G(0, 0, z_0) = z_0^2 - az_0 - b = c$. Se $(x(s), \theta(s), z(s))$ é uma solução de (3-7) satisfazendo as condições iniciais (3-8).

□

Definição 3.2 Uma curva $\alpha(s) = (x(s), 0, z(s))$ é dita uma **curva perfil** de uma superfície WLH de rotação se ela é a projeção no plano (x, z) de uma solução do sistema (3-7) com $z(s) > 0$ para todo s no seu domínio.

No lema seguinte provaremos que nossa solução têm simetria com os pontos críticos da função z .

Lema 3.3 (Simetria) Seja $\alpha(s) = (x(s), 0, z(s))$ uma curva perfil de uma superfície WLH de rotação. Se para algum $s_1 \in \mathbb{R}$, tem-se $\sin\theta(s_1) = 0$, então α é simétrica com respeito ao eixo $x = x(s_1)$.

Prova. Sabemos que $(x(s), \theta(s), z(s))$ é solução de (3-7). Sem perda de generalidade, vamos assumir que $x(s_1) = 0$. Sendo

$$\alpha(s) = (x(s), z(s)) \text{ e } \alpha'(s) = (x'(s), z'(s)),$$

tem-se

$$\alpha(s_1) = (0, z(s_1)) \text{ e } \alpha'(s_1) = (\cos\theta(s_1), 0).$$

Então é suficiente mostrar que

$$\begin{aligned}
x(s_1 + s) &= -x(s_1 - s), \\
\theta(s_1 + s) &= -\theta(s_1 - s), \\
z(s_1 + s) &= z(s_1 - s).
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que cada par de três funções é solução do mesmo sistema de equações diferenciais para as mesmas condições iniciais, e utilizando o Teorema de Existência e Unicidade de Soluções 1.22, estas deverão coincidir. Para isto, definamos

$$\gamma(s) := (\bar{x}(s), \bar{\theta}(s), \bar{z}(s)) = (-x(s_1 + s), -\theta(s_1 + s), z(s_1 + s))$$

e

$$\beta(s) := (\hat{x}(s), \hat{\theta}(s), \hat{z}(s)) = (x(s_1 - s), \theta(s_1 - s), z(s_1 - s)).$$

Derivando as duas equações dadas acima em relação a s , obtemos

$$\gamma'(s) = (\bar{x}'(s), \bar{\theta}'(s), \bar{z}'(s)) = (-x'(s_1 + s), -\theta'(s_1 + s), z'(s_1 + s))$$

e

$$\beta'(s) = (\hat{x}'(s), \hat{\theta}'(s), \hat{z}'(s)) = (-x'(s_1 - s), -\theta'(s_1 - s), -z'(s_1 - s))$$

Observe por (3-7) que

$$\begin{aligned} -x'(s_1 + s) &= -\cos \theta(s_1 + s) = -\cos(-\theta(s_1 + s)), \\ -z'(s_1 + s) &= -\operatorname{sen} \theta(s_1 + s) = \operatorname{sen}(-\theta(s_1 + s)). \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \bar{x}'(s) &= -\cos \bar{\theta}(s), \\ \bar{z}'(s) &= -\operatorname{sen} \bar{\theta}(s). \end{aligned}$$

Analogamente, por (3-7) segue que

$$\begin{aligned} -x'(s_1 - s) &= -\cos \theta(s_1 - s), \\ -z'(s_1 - s) &= -\operatorname{sen} \theta(s_1 - s). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \hat{x}'(s) &= -\cos \hat{\theta}(s), \\ \hat{z}'(s) &= -\operatorname{sen} \hat{\theta}(s). \end{aligned}$$

Ainda por (3-7) temos que

$$-\theta'(s_1 + s) = \frac{-a \cos \theta(s + s_1) + 2z(s + s_1)}{az(s + s_1) + 2b \cos \theta(s + s_1)}.$$

Logo

$$\bar{\theta}'(s) = \frac{-a \cos(-\bar{\theta}(s)) + 2\bar{z}(s)}{a\bar{z}(s) + 2b \cos \bar{\theta}(s)} = -\frac{a \cos(\bar{\theta}(s)) - 2\bar{z}(s)}{a\bar{z}(s) + 2b \cos \bar{\theta}(s)}.$$

De modo análogo, por (3-7) temos que

$$-\theta'(s_1 - s) = \frac{-a \cos \theta(s_1 - s) + 2z(s_1 - s)}{az(s_1 - s) + 2b \cos \theta(s_1 - s)}.$$

Portanto

$$\hat{\theta}'(s) = \frac{-a \cos(\hat{\theta}(s)) + 2\hat{z}(s)}{a\hat{z}(s) + 2b \cos \hat{\theta}(s)} = -\frac{a \cos(\bar{\theta}(s)) - 2\bar{z}(s)}{a\bar{z}(s) + 2b \cos \bar{\theta}(s)}.$$

Logo $\gamma(s)$ e $\beta(s)$ são soluções de um mesmo sistema de equações diferenciais ordinárias. Além disso, fazendo $s = 0$ obtemos

$$\gamma(0) = (0, 0, z(s_1)) = \beta(0).$$

Portanto pelo Teorema de Existência Unicidade de Soluções 1.22 elas coincidem. $\square$

Se $(x(s), \theta(s), z(s))$ é a solução de (3-7) - (3-8) definida no intervalo maximal $I(z_0) = (r_1, r_2)$ onde $r_1 < 0 < r_2$ temos pelo Lema de Simetria 3.3 que $r_1 = -r_2$. Portanto o intervalo maximal de definição da solução de (3-7) - (3-8) é da forma

$$I(z_0) = (-r, r), \text{ com } r > 0.$$

Agora vamos considerar a projeção do sistema (3-7) no plano (θ, z) , isto é o sistema

$$\begin{cases} z' = \sin \theta \\ \theta' = \frac{a \cos \theta - 2z}{az + 2b \cos \theta} \end{cases}, \quad (3-9)$$

sob as condições iniciais

$$z(0) = z_0, \quad \theta(0) = 0 \quad (3-10)$$

definido no conjunto aberto

$$\Omega_0 = \left\{ (\theta, z) : \theta, z \in \mathbb{R} \text{ e } z \neq -\frac{2b \cos \theta}{a} \right\}.$$

Observemos que ao sistema mencionado anteriormente está associado o campo de vetores

$$V(\theta, z) = \left(\frac{a \cos \theta - 2z}{az + 2b \cos \theta}, \operatorname{sen} \theta \right)$$

definido em Ω_0 .

Devido a periodicidade das funções seno e cosseno é suficiente estudar o sistema (3-9) para $\theta \in [0, 2\pi]$. Observemos que na região

$$\left\{ (\theta, z) : z > 0, \theta \in [0, 2\pi] \text{ e } z \neq \frac{-2b \cos \theta}{a} \right\}$$

temos as seguintes singularidades:

$$P_1 = \left(0, \frac{a}{2} \right) \quad \text{e} \quad P_2 = \left(2\pi, \frac{a}{2} \right).$$

Seja $A = JV(\theta, z)$ a matriz jacobiana de V . Temos

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-a \operatorname{sen} \theta (az + 2b \cos \theta) - (a \cos \theta - 2z)(-2b \operatorname{sen} \theta)}{(az + 2b \cos \theta)^2} & \frac{-2(az + 2b \cos \theta) - (a \cos \theta - 2z)a}{(az + 2b \cos \theta)^2} \\ \cos \theta & 0 \end{bmatrix}$$

Em $P_1 = \left(0, \frac{a}{2} \right)$ obtemos

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4/\Delta \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

os auto-valores de A são

$$\lambda_i = \pm \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}, \quad i = 1, 2.$$

Assim, $P_1 = \left(0, \frac{a}{2} \right)$ é um ponto de sela. Os auto-vetores associados são

1) Para λ_1 temos

$$v_1 = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{-\Delta}\pi}{8} \right).$$

2) Para λ_2 temos

$$v_2 = \left(\frac{-\pi}{2\sqrt{-\Delta}}, \frac{\pi}{4} \right).$$

Para o ponto P_2 a matriz jacobiana é a mesma de P_1 . Portanto P_2 é também um ponto de sela com os mesmos auto-valores e auto-vetores associados.

Seja $\beta(s) = (\theta(s), z(s))$ a solução de (3-9)-(3-10) definida no intervalo maximal

$I(z_0) = (-r, r), r > 0$. Definamos

$$\hat{r} = \sup \{0 < t < r : z(s) > 0, \forall s \in [0, t]\} \quad \text{e} \quad \hat{I}(z_0) = (-\hat{r}, \hat{r}). \quad (3-11)$$

Observação 3.4 Temos $\hat{r} \leq r$ e se $\hat{r} < r$ então $z(\hat{r}) = 0$.

Prova. Suponhamos $\hat{r} < r$. Pela definição de $\hat{r}$ temos $z(\hat{r}) \geq 0$. Se $z(\hat{r}) > 0$ então por continuidade existe $\bar{s} < r$ tal que $z(s) > 0$ para todo s em $[0, \bar{s}]$. O que é uma contradição. Portanto, se $\hat{r} < r$ temos $z(\hat{r}) = 0$. $\square$

Assim, $\hat{I}(z_0) = (-\hat{r}, \hat{r})$ é o intervalo maximal da solução de (3-9)-(3-10), tal que $z(s) > 0$, para todo s no intervalo $\hat{I}$.

A partir de agora faremos uma análise detalhada as soluções do sistema (3-9)-(3-10). O esboço do retrato de fase encontra-se no final de deste capítulo (Fig. 3-1).

Observemos que sendo $\Delta = a^2 + 4b < 0$ temos $b < 0$ e como estamos considerando $a > 0$ temos

$$a^2 < -4b,$$

portanto

$$z_0 < \frac{a}{2} < \frac{-2b}{a}.$$

Dividiremos a nossa análise das soluções de (3-9)-(3-10) nos seguintes casos:

$$z_0 < a/2 \quad , \quad a/2 < z_0 < -2b/a \quad , \quad z_0 = a/2 \quad \text{e} \quad z_0 > -2b/a.$$

3.1 O caso $z_0 < a/2$

Veremos que no caso em que a condição inicial $z_0 < a/2$ é satisfeita a superfície de WLH de rotação obtida não poderá ser estendida à uma superfície completa.

O Lema a seguir nos diz que, neste caso, as funções θ' , z' e z'' são negativas na proximidade do zero.

Lema 3.5 Seja $\beta(s) = (\theta(s), z(s))$ com $\beta(0) = (0, z_0)$ e $z_0 < a/2$ a solução do sistema (3-9)-(3-10) definida no intervalo maximal $I(z_0) = (-r, r)$. Então existe $\delta > 0$ tal que:

(a) $\theta'(s) < 0$ e $z''(s) < 0$ para todo s no intervalo $[0, \delta)$.

(b) $z'(s) < 0$ para todo s no intervalo $(0, \delta)$.

Prova. Temos por (3-4) que

$$\theta'(0) = \frac{a - 2z_0}{az_0 + 2b}. \quad (3-12)$$

Sendo

$$z_0 < \frac{a}{2} < \frac{-2b}{a}, \quad \text{temos} \quad a - 2z_0 > 0 \quad \text{e} \quad az_0 + 2b < 0.$$

Assim obtemos

$$\theta'(0) < 0.$$

Pela continuidade de θ' existe $\delta_1 > 0$ tal que $\theta'(s) < 0$ para todo s no intervalo $[0, \delta_1)$. Por outro lado, sendo

$$z'(s) = \sin \theta(s),$$

temos

$$z''(0) = \cos \theta(0) \theta'(0) = \theta'(0) < 0.$$

Pela continuidade de z'' existe $\delta_2 > 0$ tal que $z''(s) < 0$ para todo s no intervalo $[0, \delta_2)$. E ainda, sendo $z''(s) < 0$ para todo s no intervalo $[0, \delta_2)$, temos que $z'(s)$ é estritamente decrescente neste intervalo. Assim tomando $0 < s < \delta_2$, temos

$$z'(s) < z'(0) = 0.$$

Portanto $z'(s) < 0$ para todo s no intervalo $(0, \delta_2)$. Tomando $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$, segue-se os itens (a) e (b). $\square$

Proposição 3.6 *Seja $\beta(s) = (\theta(s), z(s))$ com $\beta(0) = (0, z_0)$ e $z_0 < a/2$ a solução do sistema (3-9)-(3-10) definida no intervalo maximal $I(z_0) = (-r, r)$. Então:*

- (a) $z'(s) < 0$, para todo s no intervalo $(0, \hat{r})$.
- (b) $\theta'(s) < 0$, para todo s no intervalo $[0, \hat{r})$.
- (c) $z''(s) < 0$, para todo s no intervalo $[0, \hat{r})$.

Prova. Para a prova do item (a) suporemos por contradição, que existe $0 < \bar{s} < \hat{r}$ tal que $z'(\bar{s}) \geq 0$.

Temos pelo Lema 3.5 que existe $\delta > 0$ tal que $z'(s) < 0$ para todo s em $(0, \delta)$. Assim pelo Teorema do Valor Intermediário existe pelo menos um s_1 em $(0, \bar{s}]$, tal que $z'(s_1) = 0$. Consideremos s_1 o primeiro valor onde z' se anula, isto é, $s_1 = \inf \{s > 0 : z'(s) = 0\}$.

Devemos ter $z''(s_1) \geq 0$. De fato, supondo por contradição que $z''(s_1) < 0$, teríamos, para todo s suficientemente próximo de s_1 , que

$$\text{se } s > s_1 \quad \text{então} \quad z'(s) < 0 \quad \text{e} \quad \text{se } s < s_1 \quad \text{então} \quad z'(s) > 0.$$

Esta última desigualdade é uma contradição, pois pela definição de s_1 temos $z'(s) < 0$, para todo s no intervalo $(0, s_1)$. Portanto

$$z''(s_1) \geq 0.$$

Mostraremos que $\theta'(s) < 0$, para todo s no intervalo $[0, s_1]$.

Pelo Lema 3.5 podemos supor $\theta'(s) < 0$ para todo s em $[0, \delta)$. Suponhamos por contradição, que existe um $0 < s \leq s_1$ tal que $\theta'(s) \geq 0$. Seja $0 < \bar{s} \leq s_1$ o primeiro ponto onde $\theta'(\bar{s}) = 0$. Temos

$$0 = \theta'(\bar{s}) = \frac{a \cos \theta(\bar{s}) - 2z(\bar{s})}{az(\bar{s}) + 2b \cos \theta(\bar{s})}$$

o que nos dá

$$\cos \theta(\bar{s}) = \frac{2z(\bar{s})}{a}. \quad (3-13)$$

Agora definamos a função quadrática

$$f(z_0) := z_0^2 - az_0 - b$$

que tem discriminante dado por $\Delta = a^2 + 4b < 0$ e cujo gráfico é uma parábola que não toca o eixo das abscissas. Temos ainda

$$f'(z_0) = 2z_0 - a, \quad \text{o que nos diz que } z_0 = \frac{a}{2} \quad \text{é um ponto crítico de } f.$$

Além disso,

$$f''(a/2) = 2 > 0 \quad \text{nos diz que } z_0 = \frac{a}{2} \quad \text{é um ponto de mínimo absoluto de } f.$$

Desta maneira, sendo $z_0 < \frac{a}{2}$ temos

$$-f(z_0) < -f(a/2) = \frac{a^2 + 4b}{4}. \quad (3-14)$$

Pelo Teorema 3.1 temos que $H(x(s), \theta(s), z(s)) = z_0^2 - az_0 - b$, assim obtemos

$$z^2(s) - az(s) \cos \theta(s) - b \cos^2 \theta(s) = f(z_0).$$

Avaliando a expressão dada acima em $\bar{s}$ e substituindo $\cos \theta(\bar{s})$ conforme foi dado em (3-13) obtemos

$$-z^2(\bar{s}) \left(1 + \frac{4b}{a^2} \right) = f(z_0),$$

e conforme foi observado em (3-14), segue

$$z^2(\bar{s}) \left(\frac{a^2 + 4b}{a^2} \right) = -f(z_0) < -f(a/2) = \frac{a^2 + 4b}{4},$$

assim

$$z^2(\bar{s}) > \frac{a^2}{4} > z_0^2 = z^2(0).$$

Desta forma, obtemos $0 < \bar{s} \leq s_1$ com $z(0) < z(\bar{s})$, o que nos dá uma contradição, pois sendo $z' < 0$ em $(0, s_1)$ temos que z é estritamente decrescente em $[0, s_1]$. Portanto $\theta'(s) < 0$ em $[0, s_1]$.

Agora, sendo

$$z'(s_1) = \text{sen } \theta(s_1) = 0,$$

temos que

$$\cos \theta(s_1) = \pm 1.$$

Como

$$z''(s_1) = \theta'(s_1) \cos \theta(s_1) \geq 0$$

e

$$\theta'(s_1) < 0,$$

segue que

$$\cos \theta(s_1) = -1.$$

Pelo Teorema 3.1, temos

$$z^2(s) - az(s) \cos \theta(s) - b \cos^2 \theta(s) = z_0^2 - az_0 - b.$$

Avaliando a expressão acima em s_1 obtemos

$$z^2(s_1) + az(s_1) + az_0 - z_0^2 = 0$$

e assim

$$z(s_1) = -z_0 < 0 \quad \text{ou} \quad z(s_1) = -a + z_0 < 0.$$

O que é uma contradição, pois em $\hat{I}(z_0)$, temos $z(s) > 0$. Portanto $z'(s) < 0$ para todo s no intervalo $(0, \hat{r})$.

Passemos agora a prova do item (b). Pelo Lema 3.5 temos que existe $\delta > 0$ tal que $\theta'(s) < 0$ para todo s em $[0, \delta)$. De modo análogo ao que fizemos no item (a), suponhamos por contradição, que existe um $0 < \bar{s} \leq \hat{r}$ tal que $\theta'(\bar{s}) \geq 0$. Seja $0 < s_2 \leq \bar{s}$ o primeiro

ponto onde $\theta'(s_2) = 0$. Temos

$$0 = \theta'(s_2) = \frac{a \cos \theta(s_2) - 2z(s_2)}{az(s_2) + 2b \cos \theta(s_2)}$$

o que nos dá

$$\cos \theta(s_2) = \frac{2z(s_2)}{a}. \quad (3-15)$$

De modo análogo, pelo Teorema 3.1, temos ao substituírmos $\cos \theta(s_2)$ conforme dado em (3-13) e observado em (3-14), segue

$$z^2(s_2) \left(\frac{a^2 + 4b}{a^2} \right) = -f(z_0) < -f(a/2) = \frac{a^2 + 4b}{4},$$

assim

$$z^2(s_2) > \frac{a^2}{4} > z_0^2 = z(0)^2.$$

Desta forma, obtemos $0 < s_2 < \hat{r}$ com $z(0) < z(s_2)$, o que nos dá uma contradição, pois sendo $z' < 0$ em $[0, r]$, temos que z é decrescente neste intervalo. Portanto $\theta'(s) < 0$ para todo s no intervalo $[0, \hat{r})$.

Na demonstração do item (c) vamos supor por contradição que existe $0 \leq \bar{s} < \hat{r}$ tal que $z''(\bar{s}) = 0$. Então

$$0 = z''(\bar{s}) = \cos \theta(\bar{s}) \theta'(\bar{s}).$$

Como $\theta'(s) < 0$, para todo s no intervalo $[0, \hat{r})$, segue que $\cos \theta(\bar{s}) = 0$. Mais ainda, sendo

$$\theta'(s) = \frac{a \cos \theta(s) - 2z(s)}{az(s) + 2b \cos \theta(s)}$$

temos que $a \cos \theta(s) - 2z(s)$ não troca de sinal em $[0, \hat{r})$. Como em $s = 0$ temos $a - 2z_0 > 0$, segue que $a \cos \theta(s) - 2z(s) > 0$ para todo s em $[0, \hat{r})$. Sendo $\cos \theta(\bar{s}) = 0$ obtemos $-z(\bar{s}) > 0$, o que nos leva a uma contradição. Portanto $z''(s) < 0$ para todo s em $[0, \hat{r})$. $\square$

Corolário 3.7 *Seja $\beta(s) = (\theta(s), z(s))$ com $\beta(0) = (0, z_0)$ e $z_0 < a/2$ a solução do sistema (3-9)-(3-10) definida no intervalo maximal $I(z_0) = (-r, r)$. Então:*

(a) $z'(s) > 0$, para todo s no intervalo $(-\hat{r}, 0)$.

(b) $\theta'(s) < 0$, para todo s no intervalo $(-\hat{r}, 0]$.

(c) $z''(s) < 0$, para todo s no intervalo $(-\hat{r}, 0]$.

Prova. Temos pelo Lema de Simetria 3.3 que

$$\begin{aligned}\theta(s) &= -\theta(-s), \\ z(s) &= z(-s).\end{aligned}$$

Portanto, o corolário segue da Proposição 3.6. $\square$

Lema 3.8 *Seja $\beta(s) = (\theta(s), z(s))$ com $\beta(0) = (0, z_0)$ e $z_0 < a/2$ a solução do sistema (3-9)-(3-10) definida no intervalo maximal $I(z_0) = (-r, r)$. Seja $\hat{I}(z_0) = (-\hat{r}, \hat{r})$ como definido em (3-11). Então $\hat{r} < r$.*

Prova. Pela Proposição 3.6 temos que $\theta' < 0$ e $z' < 0$ em $(0, \hat{r})$, assim θ e z são funções estritamente decrescentes em $[0, \hat{r})$. Além disso $z(s) > 0$ e $-\pi/2 < \theta(s) < 0$ para todo s em $(0, \hat{r})$, logo existem os limites

$$\lim_{s \rightarrow r^-} \theta(s) = \theta_1 \quad \text{e} \quad \lim_{s \rightarrow r^-} z(s) = z_1,$$

com $-\pi/2 \leq \theta_1 < 0$ e $z_1 \geq 0$.

Temos pela definição de $\hat{r}$ que $\hat{r} \leq r$. Suponhamos por contradição que $\hat{r} = r$. Temos duas possibilidades para o ponto (θ_1, z_1) , a saber:

- (a) $(\theta_1, z_1) \in \Omega_0$ ou
- (b) (θ_1, z_1) satisfaz $z_1 = -2b \cos \theta_1 / a$.

Suponha que $(\theta_1, z_1) \in \Omega_0$. Então pelo Corolário 1.26 não podemos ter $\hat{r} = r < +\infty$.

Por outro lado se $\hat{r} = r = +\infty$ e desde que $\lim_{s \rightarrow +\infty} \beta(s) = (\theta_1, z_1)$ segue que (θ_1, z_1) é uma singularidade do campo $V(\theta, z)$, o que é uma contradição, pois as únicas singularidades do campo $V(\theta, z)$ na região

$$\left\{ (\theta, z) : z \geq 0, \theta \in [0, 2\pi] \text{ e } z \neq \frac{-2b \cos \theta}{a} \right\}$$

são os pontos $P_1 = (0, a/2)$ e $P_2 = (0, 2\pi)$. Portanto não ocorre o item (a).

Para o item (b) observamos pelo Teorema 3.1 que

$$z^2(s) - az(s) \cos \theta(s) - b \cos^2 \theta(s) = z_0^2 - az_0 - b.$$

Fazendo $s \rightarrow r^-$ na expressão acima obtemos

$$z_1^2 - az_1 - az_0 \cos \theta_1 - b \cos^2 \theta_1 = z_0^2 - az_0 - b. \quad (3-16)$$

Como estamos supondo que (θ_1, z_1) satisfaz $z_1 = 2b \cos \theta_1 / a$, temos

$$\cos \theta_1 = \frac{-az_1}{2b}. \quad (3-17)$$

Substituindo (3-17) em (3-16) obtemos

$$z_1^2 + \frac{a^2 z_1^2}{2b} - \frac{a^2 z_1^2}{4b} = z_0^2 - az_0 - b,$$

ou ainda,

$$\frac{4bz_1^2 + 2a^2 z_1^2 - a^2 z_1^2}{4b} = f(z_0).$$

Assim,

$$z_1^2 = \frac{4bf(z_0)}{a^2 + 4b}$$

e conforme a inequação (3-14), segue

$$z_1^2 = \frac{4bf(z_0)}{a^2 + 4b} > \frac{4bf(a/2)}{a^2 + 4b} = -b.$$

Como a função z é decrescente em $(0, \hat{r})$ segue que

$$-b < z_1^2 < z_0^2 < \frac{a^2}{4}.$$

O que é uma contradição. Portanto temos que $\hat{r} < r$. □

Teorema 3.9 *Seja $\alpha(s) = (x(s), 0, z(s))$ uma curva perfil de uma superfície WLH de rotação definida no intervalo $[-\hat{r}, \hat{r}]$. Assuma que a condição inicial $0 < z_0 < a/2$ é satisfeita. Então*

- (a) *A curva α é o gráfico de uma função $z = h(x)$ definida em um intervalo da forma $[-x_1, x_1]$ do eixo x , e, portanto, α é mergulhada.*
- (b) *A curva α intercepta o eixo x nos pontos $x = \pm x_1$.*
- (c) *A curva α é côncava.*

Prova. Para a demonstração deste teorema vamos transferir as informações encontradas no plano (θ, z) dadas nos resultados anteriores para o plano (x, z) .

Para o primeiro item observamos que $\theta(s)$ pertence ao intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ para todo s em $[-\hat{r}, \hat{r}]$, logo $x'(s) = \cos \theta(s) > 0$ em $[-\hat{r}, \hat{r}]$ e, portanto, x é estritamente crescente em $[-\hat{r}, \hat{r}]$.

Então seja $x_1 = x(\hat{r})$. Assim $x : [-\hat{r}, \hat{r}] \rightarrow [-x_1, x_1]$ tem uma função inversa $\psi : [-x_1, x_1] \rightarrow [-\hat{r}, \hat{r}]$. Logo $s = \psi(x)$ e $z = z(\psi(x)) = h(x)$, x no intervalo $[-x_1, x_1]$. Portanto α é um gráfico.

No item (b) observamos que temos $\hat{r} < r$ e, portanto, pela Observação 3.4 temos $z(-\hat{r}) = z(\hat{r}) = 0$, isto é, $h(-x_1) = h(x_1) = 0$.

Para o item (c) observamos que $\alpha(0) = (0, 0, z_0)$, $\alpha'(0) = (x'(0), 0, 0)$ e pelo Corolário 3.7 temos $z'(s) > 0$ em $(-\hat{r}, 0)$. Portanto

$$h'(x) = \frac{dz}{ds}(\psi(x)) \cdot \frac{d\psi}{dx}(x) > 0$$

em $(-x_1, 0)$ e $h'(x) < 0$ em $(0, x_1)$. Além disto, a curvatura da curva α é dada por

$$k = \theta'(s) = \theta'(\psi(x)) < 0,$$

para todo x em $(-x_1, x_1)$ e, portanto, a curva α é côncava. □

Teorema 3.10 *Seja S uma superfície WLH de rotação com curva perfil $\alpha(s) = (x(s), 0, z(s))$ com s em $(-\hat{r}, \hat{r})$ e a condição inicial satisfazendo $0 < z_0 < a/2$. Então, S tem as seguintes propriedades:*

- (a) *A superfície S é mergulhada.*
- (b) *A curvatura Gaussiana de S é positiva.*
- (c) *A superfície S não pode ser estendida a uma superfície completa.*

Prova. O primeiro item segue imediatamente do resultado anterior, pois sendo α mergulhada, tem-se S mergulhada.

Para o item (b) temos pela equação (3-2)

$$K = k_1 k_2 = \frac{-\cos \theta(s) \theta'(s)}{z(s)},$$

sendo $z(s) > 0$, $x'(s) = \cos \theta(s) > 0$ e $\theta'(s) < 0$ para todo s no intervalo $(-\hat{r}, \hat{r})$ obtemos $K > 0$.

Se estendida a superfície terá singularidades pois ela cortará o eixo de rotação fazendo um ângulo diferente de $\pm \frac{\pi}{2}$. □

3.2 O caso $z_0 = a/2$

Veremos que no caso em que a condição inicial $z_0 = a/2$ é satisfeita a superfície de WLH de rotação obtida será um cilindro.

Teorema 3.11 *Seja $\alpha(s) = (x(s), 0, z(s))$ uma curva perfil de uma superfície WLH de rotação. Assuma a condição inicial $z_0 = \frac{a}{2}$. Então α parametriza uma reta e S é um cilindro.*

Prova. Dado o sistema (3-7)-(3-8), temos que

$$\begin{cases} x(s) = s \\ z(s) = a/2 \\ \theta(s) = 0 \end{cases}, \quad (3-18)$$

é solução do sistema referido acima, pois

$$\begin{cases} x'(s) = 1 \\ z'(s) = 0 \\ \theta'(s) = 0 \end{cases}, \quad (3-19)$$

onde $z(0) = z_0 = a/2$.

Assim $\alpha(s) = (s, 0, a/2)$ é uma reta e ao fazermos a rotação em torno do eixo x obtemos um cilindro. $\square$

3.3 O caso $a/2 < z_0 < -2b/a$

Veremos que no caso em que a condição inicial $a/2 < z_0 < -2b/a$ é satisfeita a superfície de WLH de rotação obtida não poderá ser estendida à uma superfície completa.

Lema 3.12 *Seja $\beta(s) = (\theta(s), z(s))$ com $\beta(0) = (0, z_0)$ e $a/2 < z_0 < -2b/a$ a solução do sistema (3-9)-(3-10) definida no intervalo maximal $I(z_0) = (-r, r)$. Então existe $\delta > 0$ tal que:*

(a) $\theta'(s) > 0$ e $z''(s) > 0$ para todo s no intervalo $[0, \delta)$.

(b) $z'(s) > 0$ para todo s no intervalo $(0, \delta)$.

Prova. Temos por (3-4) que

$$\theta'(0) = \frac{a - 2z_0}{az_0 + 2b}. \quad (3-20)$$

Sendo

$$\frac{a}{2} < z_0 < \frac{-2b}{a}, \quad \text{temos} \quad a - 2z_0 < 0 \quad \text{e} \quad az_0 + 2b < 0.$$

Assim obtemos

$$\theta'(0) > 0.$$

Pela continuidade de θ' existe $\delta_1 > 0$ tal que $\theta'(s) > 0$ para todo s no intervalo $[0, \delta_1)$. Por outro lado, sendo

$$z'(s) = \sin \theta(s),$$

temos

$$z''(0) = \cos \theta(0) \theta'(0) = \theta'(0) > 0.$$

Sendo $z''(0) > 0$, a continuidade de z'' nos diz que, existe $\delta_2 > 0$, tal que $z''(s) > 0$ para todo s no intervalo $[0, \delta_2)$. E ainda, sendo $z''(s) > 0$ para todo s em $[0, \delta_2)$, temos que $z'(s)$ é estritamente crescente neste intervalo. Assim tomando $0 \leq s < \delta_2$, temos

$$z'(s) > z'(0) = 0.$$

Portanto $z'(s) > 0$ para todo s no intervalo $(0, \delta_2)$. Tomando $\delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$, segue-se os itens (a) e (b). $\square$

Proposição 3.13 *Seja $\beta(s) = (\theta(s), z(s))$ com $\beta(0) = (0, z_0)$ e $a/2 < z_0 < -2b/a$ a solução do sistema (3-9)-(3-10) definida no intervalo maximal $I(z_0) = (-r, r)$. Então:*

- (a) $z'(s) > 0$ para todo s no intervalo $(0, r)$.
- (b) $\theta'(s) > 0$ para todo s no intervalo $[0, r)$.
- (c) $z''(s) > 0$ para todo s no intervalo $[0, r)$.

Prova. Para a prova do item (a) suporemos por contradição que existe $0 < \bar{s} < r$ tal que $z'(\bar{s}) \leq 0$.

Temos pelo Lema (3.12) que existe $\delta > 0$ tal que $z'(s) > 0$ para todo s em $(0, \delta)$. Assim pelo Teorema do Valor Intermediário existe pelo menos um s_1 em $(0, \bar{s}]$, tal que $z'(s_1) = 0$. Consideremos s_1 o primeiro valor onde z' se anula, isto é, $s_1 = \inf \{s > 0 : z'(s) = 0\}$.

Devemos ter $z''(s_1) \leq 0$. De fato, supondo por contradição que $z''(s_1) > 0$, teríamos para todo s suficientemente próximo de s_1 que

$$\text{se } s > s_1 \quad \text{então} \quad z'(s) > 0 \quad \text{e} \quad \text{se } s < s_1 \quad \text{então} \quad z'(s) < 0,$$

esta última desigualdade é uma contradição, pois, pela definição de s_1 temos $z'(s) > 0$ para todo s no intervalo $(0, s_1)$. Portanto

$$z''(s_1) \leq 0.$$

Mostraremos que $\theta'(s) > 0$ para todo s no intervalo $[0, s_1]$.

Pelo Lema (3.12) podemos supor que $\theta'(s) > 0$ para todo s em $[0, \delta)$. Suponhamos por contradição, que existe um s em $[0, s_1]$ tal que $\theta'(s) \geq 0$, então seja $0 < \bar{s} \leq s_1$ o primeiro ponto onde $\theta'(\bar{s}) = 0$. Assim

$$0 = \theta'(\bar{s}) = \frac{a \cos \theta(\bar{s}) - 2z(\bar{s})}{az(\bar{s}) + 2b \cos \theta(\bar{s})}$$

donde

$$\cos \theta(\bar{s}) = \frac{2z(\bar{s})}{a} \leq 1, \quad (3-21)$$

e assim

$$z(\bar{s}) \leq \frac{a}{2} < z(0),$$

o que é uma contradição pois z é estritamente crescente em $[0, s_1]$. Logo temos $\theta'(s) > 0$ para todo s no intervalo $[0, s_1]$.

Por outro lado, no intervalo $[0, s_1]$, a função $x'(s) = \cos \theta(s)$ não se anula. De fato, se

$$\cos \theta(s) = 0, \quad \text{para algum } s \text{ em } [0, s_1],$$

então

$$\theta'(s) = -2/a < 0,$$

o que é uma contradição pois $\theta'(s) > 0$ em $[0, s_1]$.

Como $x'(0) = 1 > 0$, temos $x'(s) = \cos \theta(s) > 0$ em $[0, s_1]$. Assim, $z''(s_1) = \theta'(s_1) \cos \theta(s_1) > 0$, mas como já vimos, temos $z''(s_1) \leq 0$. Logo chegamos a uma contradição. Portanto, $z'(s) > 0$ para todo s no intervalo $(0, r)$.

Passemos agora à demonstração do item (b). Inicialmente mostraremos que θ' não se anula em $[0, r)$. Suponhamos, por contradição, que existe um $0 < \bar{s} < r$ tal que

$$0 = \theta'(\bar{s}) = \frac{a \cos \theta(\bar{s}) - 2z(\bar{s})}{az(\bar{s}) + 2b \cos \theta(\bar{s})}$$

desta forma

$$\cos \theta(\bar{s}) = \frac{2z(\bar{s})}{a} \leq 1. \quad (3-22)$$

e assim

$$z(\bar{s}) \leq \frac{a}{2} < z(0),$$

o que é uma contradição pois z é estritamente crescente em $[0, r)$. Assim, temos $\theta'(s) \neq 0$ para todo s no intervalo $[0, r)$.

Como $\theta'(s) > 0$ para todo s no intervalo $[0, \delta)$, por continuidade segue que $\theta'(s) > 0$ para todo s no intervalo $[0, r)$.

Na demonstração do item (c) temos

$$z''(s) = \cos \theta(s) \theta'(s). \quad (3-23)$$

Do item (b) temos $\theta'(s) > 0$, para todo s em intervalo $[0, r)$. Por outro lado, a função $x'(s) = \cos \theta(s)$ não se anula em $[0, r)$. De fato, se

$$\cos \theta(s) = 0 \quad \text{para algum } s,$$

então

$$\theta'(s) = -2/a < 0,$$

o que é uma contradição pois $\theta'(s) > 0$ em $[0, r)$. Como em $s = 0$ temos $x'(0) = 1 > 0$, temos $x'(s) = \cos \theta(s) > 0$ em $[0, r)$. Portanto por (3-23) temos $z''(s) > 0$ para todo s em $[0, r)$. $\square$

Corolário 3.14 *Seja $\beta(s) = (\theta(s), z(s))$ com $\beta(0) = (0, z_0)$ e $a/2 < z_0 < -2b/a$ a solução do sistema (3-9)-(3-10) definida no intervalo maximal $I(z_0) = (-r, r)$. Então:*

(a) $z'(s) < 0$, para todo s no intervalo $(-\hat{r}, 0)$.

(b) $\theta'(s) > 0$, para todo s no intervalo $(-\hat{r}, 0]$.

(c) $z''(s) > 0$, para todo s no intervalo $(-\hat{r}, 0]$.

Prova. Temos pelo Lema de Simetria 3.3 que

$$\theta(s) = -\theta(-s),$$

$$z(s) = z(-s).$$

Portanto, o corolário segue da Proposição 3.13. $\square$

Lema 3.15 *Seja $\beta(s) = (\theta(s), z(s))$ com $\beta(0) = (0, z_0)$ e $a/2 < z_0 < -2b/a$ a solução do sistema (3-9)-(3-10) definida no intervalo maximal $I(z_0) = (-r, r)$. Seja $\hat{I}(z_0) = (-\hat{r}, \hat{r})$ como definido em (3-11). Então $r < +\infty$ e $\hat{r} = r$.*

Prova. Suponhamos, por contradição, que $r = +\infty$. Pela Proposição 3.13 temos que z é estritamente crescente e z'' é positiva no intervalo $(0, +\infty)$, logo

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} z(s) = +\infty.$$

O denominador de θ' é dado por

$$D(s) = az(s) + 2b \cos \theta(s).$$

Assim em $s = 0$ temos

$$D(0) = az_0 + 2b < 0$$

e

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} D(s) = \lim_{s \rightarrow +\infty} (az(s) + 2b \cos \theta(s)) = +\infty.$$

Portanto, o denominador de θ' se anula em algum ponto $\bar{s}$ em $(0, r)$. O que é um absurdo, pois, neste caso, $z(\bar{s})$ seria um ponto da fronteira de Ω_0 . Logo $r < +\infty$.

Por outro lado, temos pela definição de $\hat{r}$ que $\hat{r} \leq r$ e pela Observação 3.4 temos que se $\hat{r} < r$ então $z(\hat{r}) = 0$. Como z é estritamente crescente em $[0, r)$ e

$$z(0) = z_0 > 0 \quad \text{temos} \quad z(s) > 0$$

para todo s no intervalo $(0, r)$. Portanto, pela definição de $\hat{r}$, temos $\hat{r} = r$. □

Teorema 3.16 *Seja $\alpha(s) = (x(s), 0, z(s))$ uma curva perfil de uma superfície WLH de rotação definida no intervalo maximal $I(z_0) = (-r, r)$. Assuma que a condição inicial $a/2 < z_0 < -2b/a$ é válida. Então*

(a) *A curva α é um gráfico sobre um intervalo $(-x_1, x_1)$ do eixo x , sendo que α é mergulhada.*

(b) *A curva α é convexa.*

Prova. Para a demonstração deste teorema vamos transferir as informações encontradas no plano (θ, z) dadas nos resultados anteriores para o plano (x, z) .

Para o item (a), como $a/2 < z_0 < -2b/a$, observamos que $\theta(s)$ pertence ao intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ para todo s em $(-r, r)$, logo $x'(s) = \cos \theta(s) > 0$ em $(-r, r)$ e, portanto, x é estritamente crescente em $(-r, r)$.

Então seja $x_1 = \lim_{s \rightarrow r^-} x(s)$. Assim $x : (-r, r) \rightarrow (-x_1, x_1)$ tem uma função inversa $\xi : (-x_1, x_1) \rightarrow (-r, r)$. Logo $s = \xi(x)$ e $z = z(\xi(x)) = h(x)$, x no intervalo $(-x_1, x_1)$. Portanto α é um gráfico.

Para o item (b) observamos que $\alpha(0) = (0, 0, z_0)$, $\alpha'(0) = (1, 0, 0)$ e pelo Corolário 3.14 temos que $z'(s) < 0$ para todo s em $(-r, 0)$. Assim

$$h'(x) = \frac{dz}{ds}(\xi(x)) \cdot \frac{d\xi}{dx}(x) < 0$$

em $(-x_1, 0)$ e $h'(x) > 0$ em $(0, x_1)$. Além disto, a curvatura da curva α é dada por

$$k = \theta'(s) = \theta'(\xi(x)) > 0,$$

para todo x em $(-x_1, x_1)$ e, portanto, a curva α é convexa. $\square$

Teorema 3.17 *Seja S uma superfície WLH de rotação com curva perfil $\alpha(s) = (x(s), 0, z(s))$ definida no intervalo maximal $I(z_0) = (-r, r)$. Assuma que a condição inicial $a/2 < z_0 < -2b/a$ é válida. Então S tem as seguintes propriedades:*

- (a) *A superfície S é mergulhada.*
- (b) *A curvatura Gaussiana de S é negativa.*
- (c) *A superfície S não pode ser estendida a uma superfície completa.*

Prova. O primeiro item segue imediatamente do resultado anterior, pois sendo α mergulhada, tem-se S mergulhada.

Para o item (b) temos pela equação (3-2)

$$K = k_1 k_2 = \frac{-\cos \theta(s) \theta'(s)}{z(s)},$$

sendo $z(s) > 0$, $x'(s) = \cos \theta(s) > 0$ e $\theta'(s) > 0$ para todo s no intervalo $(-r, r)$ obtemos $K < 0$.

A superfície S gerada, neste caso, tem uma fronteira em $\mathbb{R}^3$, logo não pode ser estendida a uma superfície completa. $\square$

3.4 O caso $z_0 > -2b/a$

Veremos que no caso em que a condição inicial $z_0 > -2b/a$ e $z_0 > a$ é satisfeita a superfície de WLH de rotação obtida será uma superfície completa.

Pelo Teorema 3.1, temos que

$$z(s)^2 - az(s) \cos \theta(s) - b \cos^2 \theta(s) = z_0^2 - az_0 - b$$

como $z_0 > a/2$ temos, pelo Teorema de Existência e Unicidade, que

$$z(s) = \frac{a \cos \theta(s) + \sqrt{(a^2 + 4b) \cos^2 \theta(s) + 4(z_0^2 - az_0 - b)}}{2} \quad (3-24)$$

Lema 3.18 *O intervalo maximal $I(z_0) = (-r, r)$ das soluções $\alpha(s) = (x(s), \theta(s), z(s))$ de (3-9)-(3-10) é $\mathbb{R}$.*

Este resultado segue se provarmos que as derivadas x' , z' e θ' são limitadas.

Prova. Do sistema (3-9), vemos que é suficiente mostrar para θ' . Desta forma, vamos encontrar números negativos m e M , tais que $m \leq \theta'(s) \leq M$ para todo s em $I(z_0)$. Note que, $\theta'(0) < 0$, pois

$$\theta'(0) = \frac{a - 2z_0}{az_0 + 2b}.$$

Sendo,

$$z_0 > \frac{-2b}{a} > \frac{a}{2} \quad \text{temos} \quad az_0 + 2b > 0 \quad \text{e} \quad a - 2z_0 < 0.$$

Portanto

$$\theta'(0) < 0.$$

Primeiramente vamos mostrar a existência de constantes δ_1 e η_1 , com $\eta_1 < 0 < \delta_1$ independentes de s , tais que

$$az(s) + 2b \cos \theta(s) \geq \delta_1 \quad \text{e} \quad a \cos \theta(s) - 2z(s) \geq \eta_1.$$

Dada a função

$$f(z_0) = z_0^2 - az_0 - b, \quad \text{tem-se} \quad f\left(\frac{-2b}{a}\right) = \frac{b(a^2 + 4b)}{a^2}.$$

Sendo f uma função estritamente crescente para $z_0 > \frac{a}{2}$ e como $z_0 > -\frac{2b}{a}$ existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$z_0^2 - az_0 - b = f(-2b/a) + \varepsilon = \frac{b(a^2 + 4b)}{a^2} + \varepsilon. \quad (3-25)$$

De (3-24), tem-se

$$\begin{aligned}
 z(s) &= \frac{1}{2} \left(a \cos \theta(s) + \sqrt{(a^2 + 4b) \cos^2 \theta(s) + \frac{4b(a^2 + 4b)}{a^2} + 4\epsilon} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(a \cos \theta(s) + \sqrt{(a^2 + 4b) \left((\cos^2 \theta(s) - 1) + \frac{(a^2 + 4b)^2}{a^2} \right) + 4\epsilon} \right) \\
 &\geq \frac{1}{2} \left(a \cos \theta(s) + \sqrt{\frac{(a^2 + 4b)^2}{a^2} + 4\epsilon} \right).
 \end{aligned}$$

Como

$$\sqrt{\frac{(a^2 + 4b)^2}{a^2} + 4\epsilon} = -\frac{(a^2 + 4b)}{a} + \epsilon',$$

para algum $\epsilon' > 0$. Temos

$$z(s) \geq \frac{1}{2} \left(a \cos \theta(s) - \frac{(a^2 + 4b)}{a} + \epsilon' \right).$$

Usando a condição de hiperbolicidade $\Delta = a^2 + 4b < 0$, obtemos

$$az(s) + 2b \cos \theta(s) \geq \frac{(a^2 + 4b)}{2} (\cos \theta(s) - 1) + \frac{a}{2} \epsilon' \geq \frac{a}{2} \epsilon' := \delta_1.$$

Por outro lado, utilizando (3-24) novamente, temos

$$a \cos \theta(s) - 2z(s) = -\sqrt{(a^2 + 4b) \cos^2 \theta(s) + 4f(z_0)}.$$

Como $(a^2 + 4b) \cos^2 \theta(s) + 4f(z_0) \leq 4f(z_0)$, obtemos

$$a \cos \theta(s) - 2z(s) \geq -2\sqrt{f(z_0)} := \eta_1.$$

De forma análoga provemos que existem δ_2 e η_2 , com $\eta_2 < 0 < \delta_2$, independentes de s , tais que

$$az(s) + 2b \cos \theta(s) \leq \delta_2 \text{ e } a \cos \theta(s) - 2z(s) \leq \eta_2.$$

Utilizando (3-24), temos

$$\begin{aligned}
 az(s) + 2b \cos \theta(s) &= \frac{1}{2} \left((a^2 + 4b) \cos \theta(s) + a \sqrt{(a^2 + 4b) \cos^2 \theta(s) + 4f(z_0)} \right) \\
 &\leq \frac{-(a^2 + 4b) + a \sqrt{f(z_0)}}{2} := \delta_2
 \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$a \cos \theta(s) - 2z(s) = -\sqrt{(a^2 + 4b) \cos^2 \theta(s) + 4f(z_0)} \leq -\sqrt{a^2 + 4b + 4f(-2b/a)} := \eta_2.$$

Assim, mostramos que

$$0 < \delta_1 \leq az(s) + 2b \cos \theta(s) \leq \delta_2 \quad \text{e} \quad \eta_1 \leq a \cos \theta(s) - 2z(s) \leq \eta_2 < 0,$$

para todo s em $I(z_0)$. Portanto

$$m := \frac{\eta_1}{\delta_1} \leq \theta'(s) = \frac{a \cos \theta(s) - 2z(s)}{az(s) + 2b \cos \theta(s)} \leq \frac{\eta_2}{\delta_2} := M, \quad (3-26)$$

para todo s em $I(z_0)$.

Mostraremos agora que $I(z_0) = (-r, r) = \mathbb{R}$.

Suponhamos por contradição que $r < +\infty$. Temos

$$\alpha(s) = \alpha(0) + \int_0^s \alpha'(u) du, \quad s \in I(z_0).$$

Temos

$$\begin{aligned} |\alpha(s_1) - \alpha(s_2)| &= \left| \alpha(0) + \int_0^{s_1} \alpha'(u) du - \alpha(0) - \int_0^{s_2} \alpha'(u) du \right| \\ &= \left| \int_{s_2}^{s_1} \alpha'(u) du \right| \\ &\leq \left| \int_{s_2}^{s_1} |\alpha'(u)| du \right| \\ &\leq C |s_1 - s_2|. \end{aligned}$$

Portanto

$$|\alpha(s_1) - \alpha(s_2)| \leq C |s_1 - s_2|, \quad \forall s_1 \text{ e } s_2 \text{ em } (-r, r),$$

onde C é uma constante positiva.

Assim, pelo Critério de Cauchy, segue que existe o limite

$$\lim_{s \rightarrow r^-} \alpha(s) = (\hat{x}, \hat{\theta}, \hat{z})$$

e ainda, pelo Corolário 1.26 temos que $(\hat{x}, \hat{\theta}, \hat{z}) \in \partial\Omega$, ou seja,

$$\hat{z} = -\frac{2b}{a} \cos \hat{\theta}. \quad (3-27)$$

Temos pelo Teorema 3.1 que

$$z^2(s) - az(s) \cos \theta(s) - b \cos^2 \theta(s) = z_0^2 - az_0 - b = f(z_0).$$

Fazendo $s \rightarrow r^-$ na expressão acima obtemos

$$\hat{z}^2 - a\hat{z} \cos \hat{\theta} - b \cos^2 \hat{\theta} = f(z_0).$$

Assim substituindo (3-27) na expressão acima obtemos

$$\frac{4b^2}{a^2} \cos^2 \hat{\theta} + 2b \cos^2 \hat{\theta} - b \cos^2 \hat{\theta} = f(z_0).$$

ou ainda,

$$\frac{b}{a^2} (a^2 + 4b) \cos^2 \hat{\theta} = f(z_0),$$

e conforme foi observado em (3-25), segue

$$\frac{b}{a^2} (a^2 + 4b) \cos^2 \hat{\theta} = f(z_0) > b \frac{a^2 + 4b}{4},$$

logo,

$$\cos^2 \hat{\theta} > 1,$$

o que é uma contradição. Portanto $I(z_0) = (-r, r) = \mathbb{R}$.

□

Observação 3.19 Da equação (3-26) a função θ dada no Lema 3.18 satisfaz

$$m \leq \theta'(s) \leq M,$$

com $m, M < 0$ e, portanto,

$$ms \leq \theta(s) \leq Ms$$

para todo s em $\mathbb{R}$. Logo o gráfico da função θ fica entre duas retas que passam pela origem e têm coeficientes angulares negativos m e M .

Uma vez que a derivada de θ é negativa, obtemos que θ é estritamente decrescente e

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \theta(s) = -\infty.$$

Assim, seja $T > 0$ o primeiro número real tal que $\theta(T) = -2\pi$. Provaremos que α é

invariante pelas translações $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dadas por

$$L(x, z) = (x + x(T), z)$$

e

$$L(x, z) = (x - x(T), z)$$

e que a função z é periódica de período T , ou seja, $z(s + T) = z(s)$ para todo $s \in \mathbb{R}$.

Lema 3.20 *Seja $\alpha(s) = (x(s), 0, z(s))$ uma curva perfil de uma superfície WLH de rotação com $\alpha(0) = (0, 0, z_0)$ e $z_0 > -2b/a$ definida no intervalo maximal $I(z_0) = (-r, r) = \mathbb{R}$ e seja $T > 0$ o primeiro número real tal que $\theta(T) = -2\pi$. Então:*

$$\begin{aligned} x(s + T) &= x(s) + x(T), \\ z(s + T) &= z(s), \\ \theta(s + T) &= \theta(s) - 2\pi \end{aligned} \tag{3-28}$$

e

$$\begin{aligned} x(s - T) &= x(s) - x(T), \\ z(s - T) &= z(s), \\ \theta(s - T) &= \theta(s) + 2\pi \end{aligned} \tag{3-29}$$

Prova. Definamos

$$\gamma(s) = (\bar{x}(s), \bar{\theta}(s), \bar{z}(s)) = (x(s + T), \theta(s + T), z(s + T))$$

e

$$\beta(s) = (\hat{x}(s), \hat{\theta}(s), \hat{z}(s)) = (x(s) + x(T), \theta(s) - 2\pi, z(s)).$$

Temos que γ é uma curva que é solução do sistema (3-7) satisfazendo a condição inicial

$$\gamma(0) = (x(T), -2\pi, z(T)).$$

Por outro lado, temos β também é uma curva que é solução do sistema (3-7), pois sendo

$$\beta'(s) = (\hat{x}'(s), \hat{\theta}'(s), \hat{z}'(s)) = (x'(s), \theta'(s), z'(s))$$

temos por (3-7) que

$$\begin{aligned}\hat{x}'(s) &= x'(s) = \cos \theta(s) = \cos (\theta(s) - 2\pi) = \cos \hat{\theta}(s) \\ \hat{z}'(s) &= z'(s) = \operatorname{sen} \theta(s) = \operatorname{sen} (\theta(s) - 2\pi) = \operatorname{sen} \hat{\theta}(s) \\ \hat{\theta}'(s) &= \theta'(s) = \frac{a \cos \theta(s) - 2z(s)}{az(s) + 2b \cos \theta(s)} = \frac{a \cos (\theta(s) - 2\pi) - 2z(s)}{az(s) + 2b \cos (\theta(s) - 2\pi)} = \frac{a \cos \hat{\theta}(s) - 2\hat{z}(s)}{a\hat{z}(s) + 2b \cos \hat{\theta}(s)}\end{aligned},$$

sendo $\cos (\theta(s) - 2\pi) = \cos \theta(s)$ e $\operatorname{sen} (\theta(s) - 2\pi) = \operatorname{sen} \theta(s)$, temos que β também é uma curva que é solução do sistema (3-7) satisfazendo a condição inicial

$$\beta(0) = (x(T), -2\pi, z_0).$$

Assim, temos apenas que mostrar que $z(T) = z_0$, pois, se β e γ satisfazem a mesma condição inicial, temos como consequência imediata do Teorema de Existência e Unicidade de Soluções 1.22, que as curvas β e γ coincidem. Para isto, fazendo $s = 0$ e $s = T$ em (3-24) segue imediatamente o resultado (3-25).

Para obtermos (3-25) basta observamos por (3-24) que

$$\begin{aligned}x(s) &= x((s - T) + T) = x(s - T) + x(T), \\ z(s) &= z((s - T) + T) = z(s - T), \\ \theta(s) &= \theta((s - T) + T) = \theta(s - T) - 2\pi,\end{aligned}$$

o que nos dá

$$\begin{aligned}x(s - T) &= x(s) - x(T), \\ z(s - T) &= z(s), \\ \theta(s - T) &= \theta(s) + 2\pi.\end{aligned}$$

□

Observação 3.21 Com a notação introduzida na Observação 3.19 seja

$$G = \{L_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : L_n(x, z) = (x + nx(T), z), n \in \mathbb{Z}\}. \quad (3-30)$$

Temos, $L_0 = I_d$ e $L_{n_1} \circ L_{n_2} = L_{n_1+n_2}$ para todo n_1 e n_2 em $\mathbb{Z}$. Disso decorre que G com a operação de composição é um grupo.

Teorema 3.22 *Seja $\alpha(s) = (x(s), 0, z(s))$ uma curva perfil de uma superfície WLH de rotação com $\alpha(0) = (0, 0, z_0)$ e $z_0 > -2b/a$ e também $z_0 > a$ definida no intervalo maximal $I(z_0) = (-r, r) = \mathbb{R}$ e seja $T > 0$ o primeiro número real tal que $\theta(T) = -2\pi$. Então:*

- (a) *A curva α é invariante pelo grupo G de translações definido em (3-30).*
- (b) *A função altura de α , isto é, $z = z(s)$ é periódica de período T .*
- (c) *No intervalo $[0, T]$ a função z assume um máximo absoluto apenas nos pontos $s = 0$ e $s = T$, igual a z_0 , e um mínimo absoluto apenas num ponto $0 < s = T_2 < T$, igual a $z_0 - a$. Além disso, α é simétrica com respeito ao eixo vertical $x = 0$ e $x = x(T_2)$.*
- (d) *A curva α tem auto-intersecções e sua curvatura tem um sinal constante.*
- (e) *No intervalo $[0, T]$ a parte de α entre o primeiro ponto de máximo absoluto e o primeiro ponto mínimo absoluto a função $z = z(s)$ é estritamente decrescente e a curva α tem exatamente um ponto de tangente vertical. Entre este ponto de mínimo absoluto e o próximo ponto de máximo absoluto a função $z = z(s)$ é estritamente crescente e a curva α tem exatamente um ponto de tangente vertical.*
- (f) *O vetor velocidade α' gira em torno da origem, recobrindo todo o círculo unitário.*

Prova. Para a demonstração deste teorema vamos transferir as informações dadas no plano (θ, z) para o plano (x, z) .

Os itens (a) e (b) seguem imediatamente do Lema 3.20, pois temos

$$x(s+T) = x(s) + x(T), \quad z(s+T) = z(s), \quad x(s-T) = x(s) - x(T) \quad \text{e} \quad z(s-T) = z(s)$$

para todo s em $\mathbb{R}$. Sendo assim temos que a curva α é invariante por translações na direção do eixo x e a função $z = z(s)$ é periódica de período T .

Para o item (c) temos, pela Observação 3.19, que θ é estritamente decrescente em $\mathbb{R}$. Assim, sejam $0 < T_1 < T_2 < T_3 < T$ pontos em $[0, T]$ tais que

$$\theta(T_1) = -\pi/2, \quad \theta(T_2) = -\pi \quad \text{e} \quad \theta(T_3) = -3\pi/2.$$

Como $x'(s) = \cos \theta(s)$ e $z'(s) = \sin \theta(s)$ o comportamento da curva α no intervalo $[0, T]$ é dado pela tabela seguinte:

s	θ	$x(s)$	$z(s)$
$[0, T_1]$	$[-\pi/2, 0]$	crescente	decrésciente
$[T_1, T_2]$	$[-\pi, -\pi/2]$	decrésciente	decrésciente
$[T_2, T_3]$	$[-3\pi/2, -\pi]$	decrésciente	crescente
$[T_3, T]$	$[-2\pi, -3\pi/2]$	crescente	crescente

Temos $z'(T_2) = \text{sen } \theta(T_2) = 0$ e pela tabela acima temos que z é decrescente no intervalo $[0, T_2]$ e z é crescente no intervalo $[T_2, T]$. Portanto, T_2 é um ponto de mínimo absoluto de z no intervalo $[0, T]$. Por (3-24) temos

$$z(s) = \frac{a \cos \theta(s) + \sqrt{(a^2 + 4b) \cos^2 \theta(s) + 4(z_0^2 - az_0 - b)}}{2}.$$

Seja T_2 o ponto de mínimo da função z no intervalo $[0, T]$. Sendo $\theta(T_2) = -\pi$, obtemos

$$z(T_2) = \frac{-a + \sqrt{(2z_0 - a)^2}}{2}$$

Como $z_0 > a/2$, obtemos

$$z(T_2) = z_0 - a.$$

Como $z(0) = z(T) = z_0$ segue que $s = 0$ e $s = T$ são pontos de máximo absoluto de z em $[0, T]$.

E ainda, temos pelo Lema de Simetria (3.3) que se $\alpha(s) = (x(s), 0, z(s))$ é uma curva perfil de uma superfície WLH de rotação e se para algum $s_1 \in \mathbb{R}$, tem-se

$$z'(s_1) = \text{sen } \theta(s_1) = 0,$$

então α é simétrica com respeito ao eixo $x = x(s_1)$. Como $z'(0) = z'(T_2) = 0$, segue que a curva α é simétrica em relação aos eixos $x = 0$ e $x = x(T_2)$.

Para o item (d) temos que a curvatura da curva α é dada por

$$k(s) = \theta'(s).$$

Vimos pela Observação 3.19 que $\theta'(s) < 0$ para todo s real, sendo assim a sua curvatura tem sinal constante.

Para mostrarmos que a curva α tem auto-intersecções é suficiente provarmos que $x(T) \neq 0$ para toda condição inicial $z_0 > -2b/a$ e $z_0 > a$. Temos

$$\alpha(s) = (x(s), 0, z(s)), \quad s \in \mathbb{R}, \quad \text{onde}$$

$$x(s) = \int_0^s \cos \theta(u) du,$$

$$z(s) = z_0 + \int_0^s \text{sen } \theta(u) du$$

e a curvatura de α é dada por

$$k(s) = \theta'(s) = \frac{a \cos \theta(s) - 2z(s)}{az(s) + 2b \cos \theta(s)}.$$

Se supormos que $x(T) = 0$ a curva α será uma curva fechada e convexa e, portanto, pelo Teorema dos Quatro Vértices existem, pelo menos, quatro pontos em $[0, T)$ tal que

$$k'(s) = \theta''(s) = 0.$$

Temos

$$\theta''(s) = -\frac{2 \sin^2 \theta(s) (a^2 + 4b) (az(s) \cos \theta(s) + b \cos^2 \theta(s) - z^2(s))}{(az(s) + 2b \cos \theta(s))^3}.$$

Assim,

$$k'(s) = \theta''(s) = 0 \quad \text{em } [0, T)$$

se, e somente se,

$$s = 0, \quad s = T_2 \quad \text{ou}$$

$$b \cos^2 \theta(s) + az(s) \cos \theta(s) - z^2(s) = 0.$$

Olhando a equação acima como uma equação do segundo grau em $\cos \theta(s)$, temos que o seu discriminante é dado por

$$\hat{\Delta} = z^2(s)(a^2 + 4b),$$

como $z(s) > 0$ e $a^2 + 4b < 0$, temos que $\hat{\Delta} < 0$. Portanto a equação quadrática acima não tem solução real. O que contraria o Teorema dos Quatro Vértices. Portanto, temos $x(T) \neq 0$ para toda condição inicial $z_0 > -2b/a$ e $z_0 > a$, sendo assim, a curva α tem auto-intersecções.

Agora, temos que $\alpha'(s) = (x'(s), 0, z'(s)) = (\cos \theta(s), 0, \sin \theta(s))$, assim

$$\alpha'(T_1) = (0, -1) \quad \text{e} \quad \alpha'(T_3) = (0, 1).$$

e $x'(s) = \cos \theta(s) \neq 0$ para todo s em $[0, T]$ com $s \neq T_1$ e $s \neq T_2$. Portanto segue o item (e).

Finalmente, para o item (f) temos que $\lim_{s \rightarrow +\infty} \theta(s) = -\infty$ e sendo $\theta(0) = 0$ segue que

$$\theta([0, +\infty)) = [-\infty, 0),$$

portanto a curva $\alpha'(s) = (\cos \theta(s), 0, \sin \theta(s))$ recobre o círculo infinitas vezes. $\square$

Teorema 3.23 *Seja S uma superfície WLH de rotação com curva perfil $\alpha(s) = (x(s), 0, z(s))$ com $\alpha(0) = (0, 0, z_0)$. Assuma que α é solução de (3-9)-(3-10), com $z_0 > -2b/a$ e também $z_0 > a$. Então S tem as seguintes propriedades:*

- (a) *A superfície S tem auto-intersecções.*
- (b) *A superfície S é invariante pelo grupo de rotações em torno do eixo- x e pelo grupo G de translações definido em (3-30) e tem infinitas simetrias.*
- (c) *A superfície S é completa.*
- (d) *A parte de α entre dois pontos verticais consecutivos e que contém um máximo da função $z = z(s)$ corresponde com pontos de S com curvatura Gaussiana positiva; se esta parte contém um mínimo ela corresponde com os pontos de S com curvatura Gaussiana negativa S .*

Prova. Como a curva perfil α apresenta auto-intersecções, temos que a superfície gerada pela rotação da curva α em torno do eixo x também têm auto-intersecções.

Temos pelo item (b) do teorema anterior que a curva α tem simetria vertical, portanto S também tem infinitas simetrias verticais.

A superfície S é completa pois, neste caso, ela é um subconjunto fechado em $\mathbb{R}^3$.

Para o item (d) pela equação (3-2) que

$$K = k_1 k_2 = \frac{-\cos \theta(s) \theta'(s)}{z(s)}.$$

Inicialmente temos que $\theta'(s) < 0$ para todo s real. Na parte de α entre dois pontos verticais consecutivos e que contém um máximo da função $z = z(s)$ temos $z(s) > 0$ e $x'(s) = \cos \theta(s) > 0$. Portanto, nesta parte, S tem curvatura Gaussiana positiva.

Por outro lado, na parte que contém um mínimo temos $z(s) > 0$, $x'(s) = \cos \theta(s) > 0$. Portanto, nesta parte, S tem curvatura Gaussiana negativa. $\square$

Corolário 3.24 *Seja $\alpha = \alpha(s) = (x(s), z(s))$ uma curva perfil da superfície WLH de rotação S . Assuma que α é solução de (3-9)-(3-10), com $\alpha(0) = (0, z_0)$ e $z_0 > -2b/a$ definida no intervalo maximal $I(z_0) = (-r, r) = \mathbb{R}$. Então o gráfico de α fica entre as retas $z = z_0 - a$ e $z = z_0$, isto é,*

$$z_0 - a \leq z(s) \leq z_0,$$

onde $z(s)$ atinge os valores de máximo e mínimo absolutos apenas em um conjunto discreto de pontos.

Prova. Como vimos no item (b) do Teorema 3.22 a função z é periódica de período T e pelo item (c) do mesmo teorema, no intervalo $[0, T]$ a função z assume um máximo

absoluto, apenas nos pontos $s = 0$ e $s = T$, igual a z_0 , e um mínimo absoluto apenas no pontos $s = T_2$, com $\theta(T_2) = -\pi$. . Como a função z é periódica de período T segue que o máximo absoluto de z é z_0 , e o mínimo absoluto de z é $z_0 - a$, ou seja,

$$z_0 - a \leq z(s) \leq z_0,$$

e $z(s)$ atinge os valores de máximo e mínimo absolutos apenas em um conjunto discreto de pontos. $\square$

Como foi anunciado na introdução e com o objetivo de distinguir das superfícies com curvatura Gaussiana constante negativa, temos o seguinte corolário.

Corolário 3.25 *Existe uma família a 1-parâmetro de superfícies WLH de rotação que são completas e com auto-intersecção em $\mathbb{R}^3$. Além disso, estas superfícies são periódicas.*

Prova. A prova segue imediatamente do Teorema 3.22. $\square$

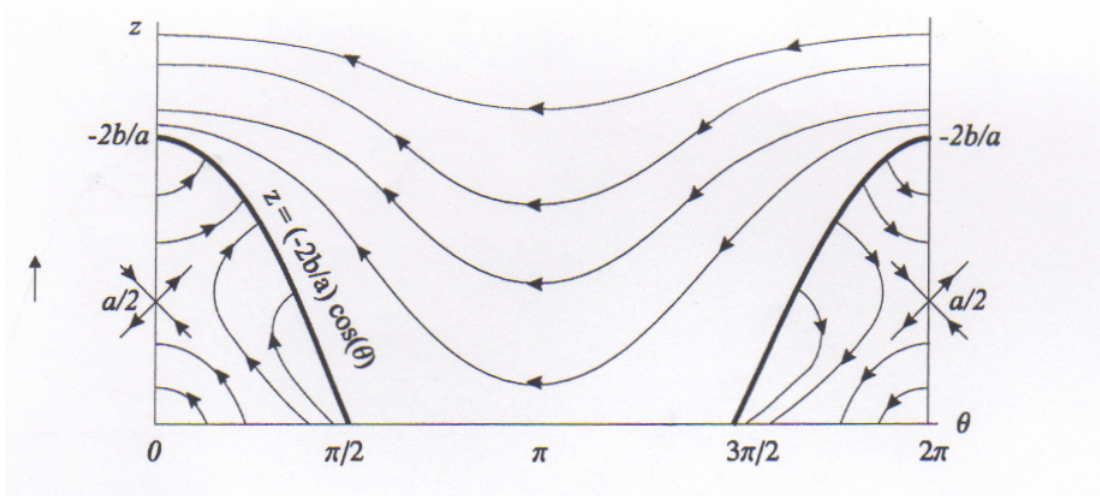


Figura 3.1: Retrato de Fase do sistema (3-8) extraído da referência [2]

Referências Bibliográficas

- [1] ALEDO J. A. S., ESPINAR J. M. - *Hyperbolic linear Weingarten surfaces in $\mathbb{R}^3$* , Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, 38(2), 291 – 300, (2007);
- [2] LÓPEZ R. - *Rotational linear Weingarten surfaces of hyperbolic type*, Israel Journal of Mathematics, 167, 283 – 301, (2008);
- [3] CORRO A. V., FERREIRA W., TENENBLAT K. - *Ribaucour transformations for constant mean curvature and linear weingarten surfaces*, Pacific J. Math., 212, 265 – 296, (2003);
- [4] CARMO M. P. - *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro (2005);
- [5] CARMO M. P. - *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro (1988);
- [6] TENENBLAT K. - *Introdução à Geometria Diferencial*, Universidade de Brasília, Brasília (1988);
- [7] GÁLVEZ J. A., MARTÍNEZ A., MILÁN F. - *Linear Weingarten Surfaces in $\mathbb{R}^3$* . Monatsh Math ,(2003), 138, 133 – 144;
- [8] WEINSTEIN T. - *An Introduction to Lorentz Surfaces*, Walter de Gruiter. Berlin, New York, (1996).
- [9] DOERING I. C., LOPES O. A. - *Equações Diferenciais Ordinárias*. Coleção Matemática Universitária, Rio de Janeiro, (2007);
- [10] HOPF. H., -*Differential Geometry in the Large*, Lecture Notes in Math., vol 1000, Springer-Verlag, Berlin, (1983).