

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE FÍSICA

**Tratamento de sistemas abertos via reservatórios
térmicos bosônico e fermiônico**

Dannilo Iágor Evangelista de Araújo

Goiânia - 2019

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE
TESES E
DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: Dissertação Tese

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

Nome completo do autor: Dannilo Iágor Evangelista de Araújo

Título do trabalho: **Tratamento de sistemas abertos via reservatórios térmicos bosônico e fermiônico.**

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

Dannilo Iágor E. de Araújo
Assinatura do(a) autor(a)²

Ciente e de acordo:

[Assinatura]
Assinatura do(a) orientador(a)²

Data: 29 / 04 / 19

¹Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente
- Submissão de artigo em revista científica
- Publicação como capítulo de livro
- Publicação da dissertação/tese em livro

²A assinatura deve ser escaneada.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE FÍSICA

Tratamento de sistemas abertos via reservatórios térmicos bosônico e fermiônico

Dannilo Iágor Evangelista de Araújo

*Dissertação apresentada como requisito
para o título de Mestre em Física.*

ORIENTADOR: *Prof. Dr. Norton Gomes de Almeida*

Goiânia - 2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Evangelista de Araújo, Dannilo Iágor

Tratamento de sistemas abertos via reservatórios térmicos bosônico e fermiônico [manuscrito] / Dannilo Iágor Evangelista de Araújo. - 2019.

84 f.: il.

Orientador: Prof. Norton Gomes de Almeida.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Física (IF), Programa de Pós-Graduação em Física, Goiânia, 2019.

Bibliografia. Apêndice.

Inclui siglas, abreviaturas, símbolos, gráfico, lista de figuras.

1. Reservatórios térmicos. 2. Equação Mestra. 3. Resposta Negativa. 4. Temperatura Negativa. 5. Sistemas abertos. I. Gomes de Almeida, Norton, orient. II. Título.

CDU 53



Universidade Federal de Goiás
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Física

Ata Nº 179 de defesa de dissertação de Dannilo Iágor Evangelista de Araújo para obtenção do título de Mestre em Física.

Aos 15 dias do mês de abril de 2019, às 09h00min, no Anfiteatro I do Instituto de Física, reuniu-se a Banca Examinadora designada pela Coordenadoria do Programa de Pós-Graduação do Instituto de Física da Universidade Federal de Goiás, composta pelo **Prof. Dr. Norton Gomes de Almeida** (orientador – IF/UFG), **Prof. Dr. Agnaldo Rosa de Almeida** (UNUCET/UEG) e **Prof. Dr. Guilherme Colherinhas de Oliveira** (CEPAE/UFG), para julgar a dissertação de mestrado de **Dannilo Iágor Evangelista de Araújo**, intitulada: **“Tratamento de sistemas abertos via reservatórios térmicos bosônico e fermiônico”**. O Presidente abriu os trabalhos agradecendo a presença dos membros da Banca Examinadora e concedeu a palavra a Dannilo Iágor Evangelista de Araújo, que expôs detalhadamente seu trabalho. Em seguida, os membros da Banca fizeram suas considerações e procederam à arguição do candidato. Concluída essa etapa, a Banca, em sessão fechada, deu prosseguimento ao julgamento do trabalho, atribuindo os seguintes conceitos:

Prof. Dr. Norton Gomes de Almeida (orientador)

Aprovado

Prof. Dr. Agnaldo Rosa de Almeida
(UNUCET/UEG)

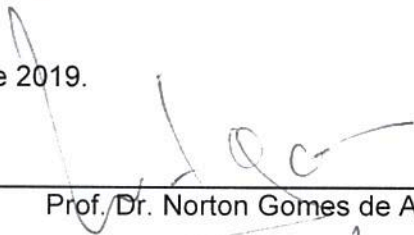
Aprovado

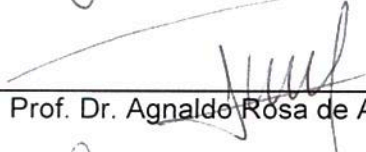
Prof. Dr. Guilherme Colherinhas de Oliveira
(CEPAE/UFG)

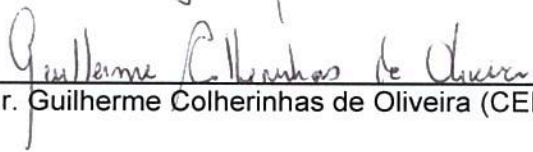
Aprovado

Novamente em sessão aberta, o presidente da Banca anunciou o resultado final do julgamento, declarando o candidato Dannilo Iágor Evangelista de Araújo Aprovado pela Banca Examinadora. Nada mais havendo a tratar, a sessão foi encerrada e lavrou-se a presente ata que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora.

Goiânia, 15 de abril de 2019.


Prof. Dr. Norton Gomes de Almeida (Orientador)


Prof. Dr. Agnaldo Rosa de Almeida (UNUCET/UEG)


Prof. Dr. Guilherme Colherinhas de Oliveira (CEPAE/UFG)

“Existem apenas dois dias do ano em que nada pode ser feito.

Um é chamado de ontem e o outro de amanhã.”

Dalai Lama

Agradecimentos

- A Deus acima de todas as coisas;
- Aos meus pais pela educação, carinho e apoio ao longo de toda a minha vida;
- Ao Prof. Dr. Norton Gomes de Almeida pela orientação, paciência e dedicação.

O presente trabalho foi realizado com o financiamento do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Sumário

| | |
|---|-----------|
| Resumo | 4 |
| Resumo | iv |
| Abstract | v |
| Introdução | 1 |
| 1 Quantização do Campo Eletromagnético | 3 |
| 1.1 Equações de Maxwell e transformações de <i>gauge</i> | 3 |
| 1.2 Transformações de calibre e equação de onda eletromagnética | 5 |
| 1.3 Encontrando os campos: $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ | 7 |
| 1.4 Hamiltoniana para o campo eletromagnético | 10 |
| 1.5 Quantização e Estado de Fock | 12 |
| 2 Dissipação, Reservatórios e Cálculo da Equação Mestra | 16 |
| 2.1 Aproximação de Born, de Born-Markov e de Markov | 18 |
| 2.2 Tipos de Reservatórios | 22 |
| 2.2.1 Reservatório Térmico Bosônico | 22 |
| 2.2.2 Reservatório Térmico Fermiônico | 30 |
| 2.2.3 Equação Mestra para um átomo de dois níveis acoplado a um Reservatório Térmico Fermiônico | 31 |
| 2.2.4 Reservatório Térmico de Vácuo Comprimido | 35 |
| 2.3 Fock comprimido | 40 |
| 3 Aplicações da Equação Mestra | 42 |
| 3.1 <i>Cooling by Heating</i> - CBH | 42 |
| 3.2 Modelo anti-Jaynes-Cummings generalizado | 43 |
| 3.3 Temperatura negativa na escala absoluta | 49 |
| 3.4 Resposta Negativa com uma cavidade ótica e campo de ondas viajantes | 51 |

| | |
|---|-----------|
| Conclusões | 56 |
| Apêndice | 57 |
| A Modelo de Jaynes-Cummings | 57 |
| A.1 Descrição para um átomo de dois níveis | 57 |
| B Cálculo da média do produto dos operadores $\hat{\Gamma}(t)$ e $\hat{\Gamma}^\dagger(t)$ na representação de interação | 60 |
| B.1 Caso Bosônico | 60 |
| B.2 Caso Fermiônico | 64 |
| B.3 Caso Vácuo Comprimido | 67 |
| C Cálculo de α e β | 70 |
| Bibliografia | 73 |

Lista de Figuras

- 3.1 Energia média para o sistema atômico $\langle \hat{\mathcal{H}}_S/\omega_0 \rangle$ (linha hachurada multiplicada por um fator 10 por questões de clareza) e bosônico ($\langle \hat{\mathcal{H}}_R/\nu \rangle$) em função do número médio comum de fótons térmicos ou fônons $n_{\text{th}} = m_{\text{th}}$, para $k = 1$ [1]. 48
- 3.2 Energia média para o sistema atômico $\langle \hat{\mathcal{H}}_S/\omega_0 \rangle$ (linha hachurada multiplicada por um fator 10 por questões de clareza) e bosônico ($\langle \hat{\mathcal{H}}_R/\nu \rangle$) em função do número médio comum de fótons térmicos ou fônons $n_{\text{th}} = m_{\text{th}}$, para $k = 2$ [1]. 48
- 3.3 As figuras (a), (c), (e) mostram os gráficos da energia média do átomo $\langle \hat{\sigma}_z \rangle$ em função da cooperatividade C , as figuras (b), (d), (f) representam os gráficos da temperatura efetiva do sistema reescalada $k_B T/\omega_0$ em função dos valores de C . Onde o número médio de fótons térmicos são $n = 0, 0.5$ e 2.0 . Inversão de população ocorre para o valor linear do AJCM $k = 1$ (linha azul sólida), e os valores não-lineares de AJCM $k = 2$ (linha tracejada vermelha) e $k = 3$ (linha pontilhada verde). Ref. [2]. 50
- 3.4 Representação pictórica do experimento proposto na Ref. [3]. Um campo de entrada de intensidade ε colide com um divisor de feixe, onde os dois feixes resultantes refletido ε_c e transmitido ε_p , campo de controle e de condução, respectivamente, são direcionados para o átomo de três níveis dentro de uma cavidade ótica. Um polarizador S e uma lente L são colocados no campo de controle ε_c para ajustar sua polarização e a frequência de Rabi para interagir apropriadamente com uma transição atômica específica. 51
- 3.5 Gráfico do número médio de fótons do campo de saída em função da intensidade normalizada do campo de entrada $|\varepsilon/\kappa|^2$ para determinados valores da cooperatividade C , para os parâmetros, $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = \Gamma/2 = \kappa/2$, $\Delta_1 = \Delta_c = 0$, $\Delta_p = 1.1g$, $\Omega_c = 8\varepsilon$ e $\Omega_p = -0.8i\sqrt{\kappa_A}\varepsilon$. Ref. [3]. 54

Resumo

Desenvolvemos este trabalho com o objetivo de resolver a Equação Mestra para ambos os reservatórios térmicos: bosônico e fermiônico, bem como a equação mestra em reservatórios de vácuo e de Fock comprimidos. O reservatório térmico bosônico é modulado por uma coleção de osciladores harmônicos acoplados e o reservatório térmico fermiônico por uma coleção de átomos de dois níveis. Fizemos uso do modelo de Jaynes-Cummings e das aproximações de Born, Born-Markov e de Markov. Ao final discutimos a aplicação da equação mestra para dois fenômenos distintos, *Cooling by Heating* (CBH) analisando gráficos da energia média para o sistema atômico em função do número médio de fótons e da energia média do sistema bosônico em função do número médio de fônons, observamos a temperatura negativa na escala absoluta decorrente da inversão de população de estados em função da cooperatividade, analisamos também uma assinatura de resposta negativa em um sistema de três níveis interagindo em uma cavidade ótica, que vem como resultado da diminuição da intensidade do campo de saída quando o campo de entrada é incrementado.

Palavras-Chave: Reservatórios térmicos, equação mestra, resposta negativa, temperatura negativa, sistemas abertos.

Abstract

We developed this work with the objective to resolve the master equation for both thermal reservoir: bosonic and fermionic, as well as the master equation in reservoirs of vacuum and of Fock compressed. The bosonic thermal reservoir is modeled by a collection of coupled harmonic oscillators and the fermionic reservoir by a collection of two-level atoms. We use the Jaynes-Cummings model and the Bohr, Bohr-Markov and Markov approaches. In the end we discussed the application to the master equation for two distinct phenomena, Cooling by Heating (CBH) analyzing average energy graphs to the atomic system versus number of photons, and the average energy of the bosonic system as a function of the mean number of phonons, we observed the negative temperature in the absolute scale due to the inversion of population of states in function of cooperativity, we also analyzed a signature of negative response in a three level system interacting in a optical cavity, that comes as a result of decrease in the output field intensity when the input field intensity is increased.

Keywords: Thermal reservoirs, master equation, negative response, negative temperature, open systems.

Introdução

Resposta Negativa tem sido um tema recorrente em Física, como por exemplo, índice de refração negativo [4, 5], temperatura negativa na escala absoluta (escala Kelvin) [6–8], *Cooling by Heating* (CBH) [9, 10], diminuição da intensidade do campo de saída quando o campo de entrada é aumentado [3], por exemplo o conceito de temperatura negativa tem sido amplamente discutido [2, 6–8, 11–17]. E, em geral temperaturas negativas podem ser observadas em estados que invertam sua população quando há uma certa injeção de energia. Desde os anos 50 o tema vem sendo debatido e monitorado em diversos trabalhos [18, 19], já tendo sido observada em experimentos utilizando gases quânticos ultrafrios [20]. Porém mesmo diante de tais observações o conceito de temperatura negativa ainda não foi completamente aceito pela comunidade científica [21–27].

Um efeito bem interessante que ilustra o conceito de resposta negativa mencionada acima é o denominado por *Cooling by Heating* (CBH) [1, 9, 10]. Nesse efeito um dado sistema físico em contato com seu reservatório diminui sua energia quando há um aumento de temperatura do seu reservatório, para o estudo da temperatura negativa quanto do efeito CBH podemos fazer uso de técnicas bem conhecidas de hamiltonianos engenheirados [28, 29]. Nossa proposta é usar ferramentas e técnicas para a solução da Equação Mestre [30, 31] para ambos os reservatórios térmicos, bosônico e fermiônico, para ambos os sistemas: bosônico (modelado por uma coleção de osciladores harmônicos) [32–35] e fermiônico (modelado por uma coleção de átomos de dois níveis) [36, 37].

A presente dissertação está organizada da seguinte forma: inicialmente, apresentamos os campos elétrico e magnético seguindo a abordagem clássica utilizando os potenciais escalar

e vetor em seguida mostramos a quantização do campo eletromagnético usando a base de Fock ou de número, útil para a descrição de tal sistema. Na sequência, apresentamos as ferramentas para tratar modelos de sistemas abertos que se resumem na resolução da Equação Mestra, para ambos os reservatórios térmicos, bosônico e fermiônico, bem como a equação mestra em estados comprimidos de vácuo e de Fock. Ao final mostramos a aplicação das equações mestra para ambos os reservatórios para fenômenos que exibam resposta negativa, como o *Cooling by Heating*, observando gráficos da energia média para ambos os sistemas atômico e bosônico em função do número médio de fótons térmicos. Temperatura negativa como resultado da inversão de população e um resultado bastante interessante que consiste na observação da diminuição do campo de saída de um feixe incidindo em uma cavidade ótica como resultado do incremento no campo de entrada.

Capítulo 1

Quantização do Campo Eletromagnético

Nesse capítulo apresentaremos inicialmente os campos clássicos: elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, faremos uso dos potenciais: escalar $[\Phi(\mathbf{r}, t)]$ e vetor $[\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)]$. Ao final mostraremos como quantizar os campos usando o formalismo dos operadores de criação e aniquilação usando a base de Fock ou de número.

1.1 Equações de Maxwell e transformações de *gauge*

O campo eletromagnético no vácuo é descrito por duas quantidades físicas fundamentais: os campos elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, em que \mathbf{r} é o vetor posição e t , o tempo.

Na ausência de fontes de radiação eletromagnética $\rho(\mathbf{r}, t) = 0$ (densidade de cargas) e $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = 0$ (densidade de corrente), as equações de Maxwell podem ser escritas como [38],

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t), \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (1.4)$$

onde ϵ_0 e μ_0 são constantes denominadas por permissividade elétrica e permeabilidade magnética do vácuo.

Para obtermos $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ há duas formas: a primeira resume-se na integração direta

das equações de Maxwell. A segunda forma é descrever os campos através dos potenciais escalar $\Phi(\mathbf{r}, t)$ e vetor $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ [38].

Um resultado importante do cálculo vetorial afirma que o divergente do rotacional de uma função vetorial é sempre nulo,

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0. \quad (1.5)$$

Logo, da Eq.(1.4) podemos, sem perda de generalidade, escrever o campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ como [38],

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t). \quad (1.6)$$

Substituindo este resultado na Eq.(1.3),

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)) \quad (1.7)$$

implica que,

$$\nabla \times \left[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right] = 0. \quad (1.8)$$

onde $\Phi(\mathbf{r}, t)$ é o potencial escalar.

Outro resultado do cálculo vetorial afirma que, quando o rotacional de um vetor ou de uma função vetorial é nulo, podemos escrever o vetor ou a função vetorial como o gradiente de uma função escalar. Logo a Eq.(1.8) resulta em [38],

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \Phi(\mathbf{r}, t), \quad (1.9)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (1.10)$$

sendo $\Phi(\mathbf{r}, t)$ é o potencial escalar e o sinal negativo foi escolhido por conveniência, para recuperar o caso eletrostático [39].

1.2 Transformações de calibre e equação de onda eletromagnética

Utilizando os potenciais escalar e vetor as equações de Maxwell Eqs.(1.1)-(1-4), se condensam em duas equações. De fato, substituindo a Eq.(1.10) na Eq.(1.1),

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \nabla \cdot \left[-\nabla\Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right] \quad (1.11)$$

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)) = 0. \quad (1.12)$$

Substituindo as Eqs.(1.6) e (1.10) na Eq.(1.2),

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[-\nabla\Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right] \\ &= -\epsilon_0\mu_0 \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla \left(\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\mathbf{r}, t) \right) \right], \end{aligned} \quad (1.13)$$

usando a seguinte identidade vetorial [38]:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{F} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2\mathbf{F} \quad (1.14)$$

e lembrando que a velocidade da luz c de uma onda eletromagnética no vácuo é dada por,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}, \quad (1.15)$$

sendo as constantes μ_0 e ϵ_0 a permeabilidade magnética e a permissividade elétrica no vácuo.

Podemos reescrever a Eq.(1.13) como,

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)) - \nabla^2\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= -\epsilon_0\mu_0 \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla \left(\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\mathbf{r}, t) \right) \right] \\ \nabla^2\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}\Phi(\mathbf{r}, t) \right). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Podemos notar da Eq.(1.6) que $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ é invariante sob a transformação,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}'(\mathbf{r}, t) &= \nabla \times \mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) \\ &= \nabla \times \left[\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla\Lambda(\mathbf{r}, t) \right] \\ &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \underbrace{\nabla \times \nabla\Lambda(\mathbf{r}, t)}_{=0} \\ &= \mathbf{B}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Logo, podemos fazer uma transformação do tipo,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \longrightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla\Lambda(\mathbf{r}, t), \quad (1.18)$$

chamada transformação de calibre, sendo $\Lambda(\mathbf{r}, t)$ é uma função escalar. Uma dada transformação no potencial vetor $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ implica uma transformação no potencial escalar $\Phi(\mathbf{r}, t)$ para que o campo elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ seja invariante. Logo, da Eq.(1.10), uma transformação de calibre interessante para $\Phi(\mathbf{r}, t)$ é do tipo [38],

$$\Phi(\mathbf{r}, t) \longrightarrow \Phi'(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t}\Lambda(\mathbf{r}, t) \quad (1.19)$$

De fato, note que,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) &= -\nabla\Phi'(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) \\ &= -\nabla\left[\Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t}\Lambda(\mathbf{r}, t)\right] - \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla\Lambda(\mathbf{r}, t)\right) \\ &= -\nabla\Phi(\mathbf{r}, t) + \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\nabla\Lambda(\mathbf{r}, t)} - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\nabla\Lambda(\mathbf{r}, t)} \\ &= -\nabla\Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \\ &= \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Para lidarmos com a Eq.(1.16) utilizaremos o calibre de Coulomb que é muito conveniente para a descrição quântica do campo eletromagnético, tal *gauge* é definido por [38],

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0, \\ \Phi(\mathbf{r}, t) = \text{const.} \end{cases} \quad (1.21)$$

Utilizando este resultado na Eq.(1.16) obteremos:

$$\nabla^2\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (1.22)$$

que é denotada como a equação de onda eletromagnética para uma região livre de fontes de carga. Resolvendo esta equação com o auxílio das condições de contorno, obteremos o potencial vetor, tal que o mesmo irá fornecer os campos elétrico e magnético.

1.3 Encontrando os campos: $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$

A atuação do operador escalar ∇^2 (laplaciano) em uma função vetorial, como apresentado na Eq.(1.22), significa nada mais do que o laplaciano atuando nas componentes $A_j(\mathbf{r}, t)$ do potencial vetor $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$. Ou seja,

$$\nabla^2 A_j(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} A_j(\mathbf{r}, t). \quad (1.23)$$

Uma solução possível para a Eq.(1.23) é do tipo,

$$A_j(\mathbf{r}, t) = A_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + A_0^* e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad j=x, y, z. \quad (1.24)$$

sendo A_0 uma constante que pode ser real ou complexa.

Substituindo (1.24) na equação de onda, temos para a componente espacial:

$$\begin{aligned} \nabla A_j(\mathbf{r}, t) &= \nabla [A_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + A_0^* e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}] \\ &= i\mathbf{k} A_j(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$\nabla = i\mathbf{k} \Leftrightarrow \nabla^2 = -k^2 \quad (1.26)$$

Da mesma forma encontramos para a componente temporal,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} A_j(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} [A_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + A_0^* e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}] \\ &= -i\omega A_j(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (1.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega \Leftrightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\omega^2 \quad (1.28)$$

Combinando os resultados (1.26) e (1.28) podemos inferir que as soluções da equação de onda são definidas pela norma do vetor de onda $|\mathbf{k}|$,

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) A_j(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_k = kc. \quad (1.29)$$

onde ω_k é a frequência angular do campo eletromagnético também conhecida como módulo de vibração do campo [38].

Condições de contorno e modo de expansão do campo

O potencial vetor numa cavidade que será representada pela região cúbica de lado L , pode ser expandido em termos de uma série de Fourier [40],

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, j} \mathbf{e}_j \left[A_{\mathbf{k}, j} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)} + A_{\mathbf{k}, j}^* e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)} \right]. \quad (1.30)$$

as componentes do vetor de onda \mathbf{k} (que dá a direção de propagação de onda), satisfazem as condições periódicas de contorno:

$$\begin{cases} e^{ik_x x} = e^{ik_x(x+L)} \Rightarrow e^{ik_x L} = 1 & \Leftrightarrow k_x = 2\pi/L, & n_x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ e^{ik_y y} = e^{ik_y(y+L)} \Rightarrow e^{ik_y L} = 1 & \Leftrightarrow k_y = 2\pi/L, & n_y = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \\ e^{ik_z z} = e^{ik_z(z+L)} \Rightarrow e^{ik_z L} = 1 & \Leftrightarrow k_z = 2\pi/L, & n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (1.31)$$

Tal que o vetor de onda \mathbf{k} possa ser escrito, de acordo com as Eqs.(1.31), como,

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L} (n_x \mathbf{e}_x + n_y \mathbf{e}_y + n_z \mathbf{e}_z). \quad (1.32)$$

Uma observação importante decorre do fato de que o calibre de Coulomb implica que,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \nabla \cdot \left\{ \sum_{\mathbf{k}, j} \mathbf{e}_j \left[A_{\mathbf{k}, j} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)} + A_{\mathbf{k}, j}^* e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)} \right] \right\} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (1.33)$$

resulta que tal condição será satisfeita apenas se [41],

$$\mathbf{k} \cdot (\mathbf{e}_j A_{\mathbf{k}, j}) = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{e}_j A_{\mathbf{k}, j}^*) = 0. \quad (1.34)$$

Logo, os termos $\mathbf{e}_j A_{\mathbf{k}, j}$ são perpendiculares ao vetor de onda \mathbf{k} . Assim, existem duas direções independentes que serão representadas por, $A_{\mathbf{k}, 1}$ e $A_{\mathbf{k}, 2}$ ou, de forma compactada como, $A_{\mathbf{k}, \lambda}$ ($\lambda = 1$ ou 2) para todo \mathbf{k} . Finalmente o potencial vetor $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ pode ser escrito como,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \mathbf{e}_{\mathbf{k}, \lambda} \left[A_{\mathbf{k}, \lambda} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)} + A_{\mathbf{k}, \lambda}^* e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)} \right]. \quad (1.35)$$

Substituindo (1.35) na Eq.(1.10) encontraremos o campo elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\underbrace{\nabla\Phi(\mathbf{r}, t)}_{=0} - \frac{\partial}{\partial t} A(\mathbf{r}, t) \\
&= -\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \mathbf{e}_{\mathbf{k}, \lambda} \left[A_{\mathbf{k}, \lambda} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)} + A_{\mathbf{k}, \lambda}^* e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)} \right] \right\} \\
&= -\left\{ \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \mathbf{e}_{\mathbf{k}, \lambda} \left[A_{\mathbf{k}, \lambda} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)} (-i\omega_k) + A_{\mathbf{k}, \lambda}^* e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)} (i\omega_k) \right] \right\} \\
\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= i \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \omega_k \mathbf{e}_{\mathbf{k}, \lambda} \left[A_{\mathbf{k}, \lambda} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)} - A_{\mathbf{k}, \lambda}^* e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)} \right], \tag{1.36}
\end{aligned}$$

Para encontrarmos $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, usaremos a expressão dada pela Eq.(1.35),

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \\
&= \nabla \times \left\{ \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \mathbf{e}_{\mathbf{k}, \lambda} \left[A_{\mathbf{k}, \lambda} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)} + A_{\mathbf{k}, \lambda}^* e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)} \right] \right\} \\
&= \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \left\{ \left[\nabla \times (\mathbf{e}_{\mathbf{k}, \lambda} A_{\mathbf{k}, \lambda} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}) \right] e^{-i\omega_k t} + \left[\nabla \times (\mathbf{e}_{\mathbf{k}, \lambda} A_{\mathbf{k}, \lambda}^* e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}) \right] e^{i\omega_k t} \right\}. \tag{1.37}
\end{aligned}$$

Note que,

$$\nabla \times (\mathbf{e}_{\mathbf{k}, \lambda} A_{\mathbf{k}, \lambda} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}) = i(\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}, \lambda}) A_{\mathbf{k}, \lambda} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \tag{1.38}$$

$$\nabla \times (\mathbf{e}_{\mathbf{k}, \lambda} A_{\mathbf{k}, \lambda}^* e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}) = i(\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}, \lambda}) A_{\mathbf{k}, \lambda}^* e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \tag{1.39}$$

Substituindo esses dois últimos resultados (1.38) e (1.39) em $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, encontraremos:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{c} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \omega_k (\mathbf{e}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}, \lambda}) \left[A_{\mathbf{k}, \lambda} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)} - A_{\mathbf{k}, \lambda}^* e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)} \right] \tag{1.40}$$

utilizamos o fato de que:

$$\mathbf{k} = k \mathbf{e}_{\mathbf{k}}, \quad \text{onde} \quad k = \frac{\omega_k}{c}. \tag{1.41}$$

1.4 Hamiltoniana para o campo eletromagnético

A energia total ou a hamiltoniana \mathcal{H} do campo eletromagnético é [39],

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{1}{2} \int_V \left[\epsilon_0 |\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|^2 + \frac{1}{\mu_0} |\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)|^2 \right] dV \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \underbrace{\int_V \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}^*(\mathbf{r}, t) dV}_{=I_E} + \frac{1}{2\mu_0} \underbrace{\int_V \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{B}^*(\mathbf{r}, t) dV}_{=I_B}.\end{aligned}\quad (1.42)$$

Recordando os campos encontrados na seção anterior, bem como os seus complexos. Temos:

- Campo elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ e o seu complexo $\mathbf{E}^*(\mathbf{r}, t)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= i \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \omega_k \mathbf{e}_{\mathbf{k}, \lambda} \left[A_{\mathbf{k}, \lambda} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)} - A_{\mathbf{k}, \lambda}^* e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)} \right] \\ &= i \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \omega_k \mathbf{e}_{\mathbf{k}, \lambda} \left[\underbrace{A_{\mathbf{k}, \lambda} e^{-i\omega_k t}}_{A_{\mathbf{k}, \lambda}(t)} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} - \underbrace{A_{\mathbf{k}, \lambda}^* e^{i\omega_k t}}_{A_{\mathbf{k}, \lambda}(t)} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right] \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= i \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \omega_k \mathbf{e}_{\mathbf{k}, \lambda} \left[A_{\mathbf{k}, \lambda}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} - A_{\mathbf{k}, \lambda}^*(t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right]\end{aligned}\quad (1.43)$$

$$\mathbf{E}^*(\mathbf{r}, t) = -i \sum_{\mathbf{k}', \lambda'} \omega_{k'} \mathbf{e}_{\mathbf{k}', \lambda'} \left[A_{\mathbf{k}', \lambda'}^*(t) e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} - A_{\mathbf{k}', \lambda'}(t) e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} \right]\quad (1.44)$$

- Campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ e o seu complexo $\mathbf{B}^*(\mathbf{r}, t)$:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{c} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \omega_k (\mathbf{e}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}, \lambda}) \left[A_{\mathbf{k}, \lambda}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} - A_{\mathbf{k}, \lambda}^*(t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right]\quad (1.45)$$

$$\mathbf{B}^*(\mathbf{r}, t) = -\frac{i}{c} \sum_{\mathbf{k}', \lambda'} \omega_{k'} (\mathbf{e}_{\mathbf{k}'} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}', \lambda'}) \left[A_{\mathbf{k}', \lambda'}^*(t) e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} - A_{\mathbf{k}', \lambda'}(t) e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} \right]\quad (1.46)$$

onde fizemos a seguinte substituição:

$$\begin{cases} A_{\mathbf{k}, \lambda} e^{-i\omega_k t} = A_{\mathbf{k}, \lambda}(t), \\ A_{\mathbf{k}, \lambda}^* e^{i\omega_k t} = A_{\mathbf{k}, \lambda}^*(t). \end{cases}\quad (1.47)$$

Logo, a integração para o campo elétrico I_E é calculada como,

$$\begin{aligned}
I_E &= \sum_{\mathbf{k},\lambda} \sum_{\mathbf{k}',\lambda'} \omega_k \omega_{k'} (\mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}',\lambda'}) \left[A_{\mathbf{k},\lambda}(t) A_{\mathbf{k}',\lambda'}^*(t) \int_V dV e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} - \right. \\
&\quad - A_{\mathbf{k},\lambda}(t) A_{\mathbf{k}',\lambda'}(t) \int_V dV e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} - A_{\mathbf{k},\lambda}^*(t) A_{\mathbf{k}',\lambda'}^*(t) \int_V dV e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} + \\
&\quad \left. + A_{\mathbf{k},\lambda}^*(t) A_{\mathbf{k}',\lambda'}(t) \int_V dV e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} \right] \\
&= V \sum_{\mathbf{k},\lambda} \sum_{\mathbf{k}',\lambda'} \omega_k \omega_{k'} \left\{ (\mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}',\lambda'}) \left[A_{\mathbf{k},\lambda}(t) A_{\mathbf{k}',\lambda'}^*(t) + A_{\mathbf{k},\lambda}^*(t) A_{\mathbf{k}',\lambda'}(t) \right] \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \right. \\
&\quad \left. - (\mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}',\lambda'}) \left[A_{\mathbf{k},\lambda}(t) A_{\mathbf{k}',\lambda'}(t) + A_{\mathbf{k},\lambda}^*(t) A_{\mathbf{k}',\lambda'}^*(t) \right] \delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'} \right\}. \tag{1.48}
\end{aligned}$$

Lembrando que \mathbf{k}' é um índice mudo. Usando as relações,

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{-\mathbf{k}',\lambda} = -\mathbf{e}_{\mathbf{k}',\lambda}, \\ (\mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda'}) = \delta_{\lambda,\lambda'}. \end{cases} \tag{1.49}$$

encontraremos finalmente,

$$I_E = V \sum_{\mathbf{k},\lambda} \omega_k^2 \left[\left(A_{\mathbf{k},\lambda} A_{\mathbf{k},\lambda}^* + A_{\mathbf{k},\lambda}^* A_{\mathbf{k},\lambda} \right) + \left(A_{-\mathbf{k},\lambda} A_{\mathbf{k},\lambda} e^{-2i\omega_k t} + A_{-\mathbf{k},\lambda}^* A_{\mathbf{k},\lambda}^* e^{2i\omega_k t} \right) \right]. \tag{1.50}$$

A integração para o campo magnético I_B ,

$$\begin{aligned}
I_B &= \frac{1}{c^2} \sum_{\mathbf{k}',\lambda} \sum_{\mathbf{k},\lambda} \omega_k \omega_{k'} (\mathbf{e}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda}) \cdot (\mathbf{e}_{\mathbf{k}'} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}',\lambda'}) \left[\right. \\
&\quad + A_{\mathbf{k},\lambda}(t) A_{\mathbf{k}',\lambda'}^*(t) \int_V e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} dV - A_{\mathbf{k},\lambda}(t) A_{\mathbf{k}',\lambda'}(t) \int_V e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} dV - \\
&\quad \left. - A_{\mathbf{k},\lambda}^*(t) A_{\mathbf{k}',\lambda'}^*(t) \int_V e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} dV + A_{\mathbf{k},\lambda}^*(t) A_{\mathbf{k}',\lambda'}(t) \int_V e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} dV \right] \\
&= \frac{V}{c^2} \sum_{\mathbf{k}',\lambda} \sum_{\mathbf{k},\lambda'} \left\{ (\mathbf{e}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda}) \cdot (\mathbf{e}_{\mathbf{k}'} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}',\lambda'}) \left[A_{\mathbf{k},\lambda}(t) A_{\mathbf{k}',\lambda'}^*(t) + A_{\mathbf{k},\lambda}^*(t) A_{\mathbf{k}',\lambda'}(t) \right] \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} - \right. \\
&\quad \left. - (\mathbf{e}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda}) \cdot (\mathbf{e}_{\mathbf{k}'} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}',\lambda'}) \left[A_{\mathbf{k},\lambda}(t) A_{\mathbf{k}',\lambda'}(t) + A_{\mathbf{k},\lambda}^*(t) A_{\mathbf{k}',\lambda'}^*(t) \right] \delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'} \right\}. \tag{1.51}
\end{aligned}$$

Usando a seguinte identidade vetorial [38],

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \quad (1.52)$$

assim concluímos que,

$$(\mathbf{e}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda}) \cdot (\mathbf{e}_{\mathbf{k}'} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k}',\lambda'}) = \delta_{\lambda,\lambda'} \quad (1.53)$$

Substituindo (1.53) juntamente com a Eq.(1.49) na Eq.(1.51),

$$\begin{aligned} I_B &= \frac{V}{c^2} \sum_{\mathbf{k},\lambda} \omega_k^2 \left[\left(A_{\mathbf{k},\lambda} A_{\mathbf{k},\lambda}^* + A_{\mathbf{k},\lambda}^* A_{\mathbf{k},\lambda} \right) - \left(A_{-\mathbf{k},\lambda} A_{\mathbf{k},\lambda} e^{-2i\omega_k t} + A_{-\mathbf{k},\lambda}^* A_{\mathbf{k},\lambda}^* e^{2i\omega_k t} \right) \right] \\ &= V \epsilon_0 \mu_0 \sum_{\mathbf{k},\lambda} \omega_k^2 \left[\left(A_{\mathbf{k},\lambda} A_{\mathbf{k},\lambda}^* + A_{\mathbf{k},\lambda}^* A_{\mathbf{k},\lambda} \right) - \left(A_{-\mathbf{k},\lambda} A_{\mathbf{k},\lambda} e^{-2i\omega_k t} + A_{-\mathbf{k},\lambda}^* A_{\mathbf{k},\lambda}^* e^{2i\omega_k t} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.54)$$

Substituindo as Eqs.(1.50) e (1.54) dentro da Eq.(1.42), encontraremos finalmente que a hamiltoniana \mathcal{H} do campo eletromagnético pode ser escrita como,

$$\mathcal{H} = \epsilon_0 V \sum_{\mathbf{k},\lambda} \omega_k^2 (A_{\mathbf{k},\lambda} A_{\mathbf{k},\lambda}^* + A_{\mathbf{k},\lambda}^* A_{\mathbf{k},\lambda}). \quad (1.55)$$

Classicamente a ordem dos termos $A_{\mathbf{k},\lambda}$ e $A_{\mathbf{k},\lambda}^*$ no produto não tem importância, ordem essa que só será relevante quando estivermos analisando o análogo quântico de \mathcal{H} . A hamiltoniana foi escrita dessa forma principalmente para evidenciar que queremos buscar o análogo quântico que será dado pelo hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}$, assim teremos de associar $A_{\mathbf{k},\lambda}$ e $A_{\mathbf{k},\lambda}^*$ aos operadores $\hat{Q}_{\mathbf{k},\lambda}$ e $\hat{P}_{\mathbf{k},\lambda}$, operadores de posição e momento respectivamente.

1.5 Quantização e Estado de Fock

Quantização

Inicialmente associaremos formalmente $A_{\mathbf{k},\lambda}$ e $A_{\mathbf{k},\lambda}^*$ às coordenadas de posição $Q_{\mathbf{k},\lambda}$ e momento $P_{\mathbf{k},\lambda}$ de um oscilador harmônico da seguinte forma [40]:

$$A_{\mathbf{k},\lambda} = \frac{1}{\sqrt{4\epsilon_0 V \omega_k^2}} (\omega_k Q_{\mathbf{k},\lambda} + iP_{\mathbf{k},\lambda}), \quad (1.56)$$

$$A_{\mathbf{k},\lambda}^* = \frac{1}{\sqrt{4\epsilon_0 V \omega_k^2}} (\omega_k Q_{\mathbf{k},\lambda} - iP_{\mathbf{k},\lambda}). \quad (1.57)$$

Substituindo esses valores ((1.56)-(1.57)) na Eq.(1.55), a hamiltoniana \mathcal{H} será escrita como,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k},\lambda} (P_{\mathbf{k},\lambda}^2 + \omega_k^2 Q_{\mathbf{k},\lambda}^2). \quad (1.58)$$

A hamiltoniana escrita como na Eq.(1.58), possui a forma de infinitos osciladores harmônicos independentes, ambos tendo massa unitária. Assim, da mesma forma como no caso do oscilador harmônico, as coordenadas da posição e do momento ($Q_{\mathbf{k},\lambda}$ e $P_{\mathbf{k},\lambda}$) serão associados aos operadores de posição e momento $\hat{Q}_{\mathbf{k},\lambda}$ e $\hat{P}_{\mathbf{k},\lambda}$ que obedecem as seguintes regras de comutação [40],

$$[\hat{Q}_{\mathbf{k},\lambda}, \hat{Q}_{\mathbf{k}',\lambda'}] = 0, \quad (1.59-1)$$

$$[\hat{P}_{\mathbf{k},\lambda}, \hat{P}_{\mathbf{k}',\lambda'}] = 0, \quad (1.59-2)$$

$$[\hat{Q}_{\mathbf{k},\lambda}, \hat{P}_{\mathbf{k}',\lambda'}] = i\hbar\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\delta_{\lambda,\lambda'}. \quad (1.59-3)$$

Logo a hamiltoniana será substituída pelo o seu análogo quântico chamado de hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}$, ou seja:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k},\lambda} (\hat{P}_{\mathbf{k},\lambda}^2 + \omega_k^2 \hat{Q}_{\mathbf{k},\lambda}^2). \quad (1.60)$$

Tal como é feito para o oscilador harmônico, o hamiltoniano do campo eletromagnético poderá ser posto em termos dos operadores de aniquilação $\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}$ e de criação $\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger$,

$$\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_k}} (\omega_k \hat{Q}_{\mathbf{k},\lambda} + i\hat{P}_{\mathbf{k},\lambda}), \quad (1.61)$$

$$\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_k}} (\omega_k \hat{Q}_{\mathbf{k},\lambda} - i\hat{P}_{\mathbf{k},\lambda}). \quad (1.62)$$

A partir das regras de comutação dadas pelas Eqs.(1.59-1) a (1.59-3) observe que [40],

$$[\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}, \hat{a}_{\mathbf{k}',\lambda'}] = 0, \quad (1.63)$$

$$[\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}',\lambda'}] = 0, \quad (1.64)$$

$$[\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}, \hat{a}_{\mathbf{k}',\lambda'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\delta_{\lambda,\lambda'}. \quad (1.65)$$

Estado de Fock ou estado de número

Juntando a Eqs.(1.60) com as Eqs.(1.61) e (1.62),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\hat{P}_{\mathbf{k},\lambda}^2 + \omega_k^2 \hat{Q}_{\mathbf{k},\lambda}^2 \right) &= \hbar\omega_k \left(\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},\lambda} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \hbar\omega_k \left(\hat{n}_{\mathbf{k},\lambda} + \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (1.66)$$

onde $\hat{n}_{\mathbf{k},\lambda} = \hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}$ é chamado de operador de número.

Logo, o hamiltoniano (1.58) será escrito como,

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k},\lambda} \hbar\omega_k \left(\hat{n}_{\mathbf{k},\lambda} + \frac{1}{2} \right). \quad (1.67)$$

Na base $\{|n_{\mathbf{k},\lambda}\rangle\}$ a descrição do estado do campo eletromagnético será dada em termo da base dos autoestados dos operadores Fock ou de número $\hat{n}_{\mathbf{k},\lambda}$. Ou seja, uma vez definidos os modos do campo eletromagnético através do vetor de onda \mathbf{k} e da polarização λ , teremos de resolver a equação de autovalores dada por,

$$\hat{n}_{\mathbf{k},\lambda} |n_{\mathbf{k},\lambda}\rangle = \hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},\lambda} |n_{\mathbf{k},\lambda}\rangle \quad (1.68)$$

$$= n_{\mathbf{k},\lambda} |n_{\mathbf{k},\lambda}\rangle. \quad (1.69)$$

Assim os autovalores do hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}$ (1.67) são $\hbar\omega_k \left(n_{\mathbf{k},\lambda} + \frac{1}{2} \right)$ onde $n_{\mathbf{k},\lambda}$ é um inteiro ($n_{\mathbf{k},\lambda} = 0, 1, 2, \dots, \infty$). O estado fundamental do oscilador (ou estado de vácuo do modo do campo) é definido por [40],

$$\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda} |0\rangle = 0. \quad (1.70)$$

Das Eqs.(1.70)-(1.67) teremos que a energia do estado fundamental é dada por [39],

$$\langle 0 | \hat{\mathcal{H}} | 0 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_k. \quad (1.71)$$

A aplicação dos operadores de aniquilação e criação no estado de número resulta em [40],

$$\hat{a}_{\mathbf{k}',\lambda'} |n_{\mathbf{k},\lambda}\rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k}',\lambda'}} |n_{\mathbf{k},\lambda} - 1\rangle, \quad (1.72)$$

$$\hat{a}_{\mathbf{k}',\lambda'}^\dagger |n_{\mathbf{k},\lambda}\rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k}',\lambda'} + 1} |n_{\mathbf{k},\lambda} + 1\rangle. \quad (1.73)$$

Logo como a própria nomenclatura dos operadores sugere; o operador de aniquilação $\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}$ destrói estados (modos do campo) enquanto o de criação gera um novo modo.

Isolando o termo entre parênteses da Eq.(1.62) e substituindo na Eq.(1.57) encontraremos,

$$A_{\mathbf{k},\lambda} \rightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_k}} \hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}, \quad (1.74)$$

$$A_{\mathbf{k},\lambda}^* \rightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_k}} \hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger. \quad (1.75)$$

Assim, os análogos quânticos do potencial vetor, bem como dos campos elétrico e magnético serão representados respectivamente por [39],

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=1}^2 \mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_k}} \left[\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t)} + \hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t)} \right], \quad (1.76)$$

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=1}^2 \mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda} \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2\epsilon_0 V}} \left[\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t)} - \hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t)} \right], \quad (1.77)$$

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{c} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=1}^2 (\mathbf{e}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda}) \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2\epsilon_0 V}} \left[\hat{a}_{\mathbf{k},\lambda} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t)} - \hat{a}_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t)} \right], \quad (1.78)$$

Onde $\sum_{\mathbf{k},\lambda} = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=1}^2$ [39].

No próximo capítulo mostraremos como tratar modelos de sistemas abertos usando o formalismo da Equação mestra.

Capítulo 2

Dissipação, Reservatórios e Cálculo da Equação Mestra

A Dissipação em sistemas quânticos é um problema inevitável [42–45], porém de interesse fundamental [46–49], existem dois modelos que ajudam a lidar com esses problemas em Óptica Quântica, o primeiro é o modelo de oscilador harmônico amortecido que é útil para descrever um modo do campo eletromagnético sem dissipação e o outro é dado por um átomo de dois níveis amortecidos. Basicamente um oscilador é amortecido por conta da sua interação com um sistema grande e complexo denotado por *ambiente*.

Se olharmos para o modelo de ambiente, consistindo do acoplamento de um dado sistema não amortecido rotulado pela letra S com um reservatório denominado por R , o hamiltoniano será escrito como [32],

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_S + \hat{\mathcal{H}}_R + \hat{\mathcal{H}}_{SR}, \quad (2.1)$$

sendo $\hat{\mathcal{H}}_S$, $\hat{\mathcal{H}}_R$ e $\hat{\mathcal{H}}_{SR}$, os hamiltonianos do sistema, reservatório e de interação entre S e R , respectivamente.

O operador densidade para o sistema composto $S \otimes R$ denominado pela função $\hat{\chi}(t)$ será escrito em termos do operador densidade reduzido $\hat{\rho}(t)$ por,

$$\hat{\rho}(t) \equiv \text{tr}_R[\hat{\chi}(t)], \quad (2.2)$$

onde o traço é realizado sobre os estados do reservatório R .

Na representação de Schrödinger a média de um operador \hat{O} qualquer pertencente ao espaço de Hilbert \mathbb{H}_S do sistema S é calculada conhecendo-se apenas $\hat{\rho}(t)$ e não o operador $\hat{\chi}(t)$ necessariamente,

$$\langle \hat{O} \rangle = \text{tr}_{S \otimes R}[\hat{O}\hat{\chi}(t)] = \text{tr}_S \left\{ \underbrace{\text{tr}_R[\hat{\chi}(t)]}_{\hat{\rho}(t)} \right\} = \text{tr}_S[\hat{O}\hat{\rho}(t)]. \quad (2.3)$$

Queremos uma equação para o operador $\hat{\rho}(t)$ que exiba as características de R . Para o operador $\hat{\chi}(t)$ a equação de Liouville-von Neumann será escrita como,

$$\frac{d}{dt}\hat{\chi}(t) = \frac{1}{i\hbar}[\hat{\mathcal{H}}, \hat{\chi}(t)], \quad (2.4)$$

sendo $\hat{\mathcal{H}}$, o hamiltoniano total dado pela Eq.(2.1). Dividindo a evolução desse sistema em duas partes, uma que evolui de forma mais rápida dada pela soma $\hat{\mathcal{H}}_S + \hat{\mathcal{H}}_R$ e uma mais lenta dada por $\hat{\mathcal{H}}_{SR}$. Podemos escrever, [50]

$$\hat{\chi}(t) \equiv e^{\frac{i}{\hbar}(\hat{\mathcal{H}}_S + \hat{\mathcal{H}}_R)t} \hat{\chi}(t) e^{-\frac{i}{\hbar}(\hat{\mathcal{H}}_S + \hat{\mathcal{H}}_R)t}. \quad (2.5)$$

Derivando a Eq.(2.5) com relação ao tempo,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\chi}(t) &= \frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}(\hat{\mathcal{H}}_S + \hat{\mathcal{H}}_R)t} (\hat{\mathcal{H}}_S + \hat{\mathcal{H}}_R) \hat{\chi}(t) e^{-\frac{i}{\hbar}(\hat{\mathcal{H}}_S + \hat{\mathcal{H}}_R)t} + e^{\frac{i}{\hbar}(\hat{\mathcal{H}}_S + \hat{\mathcal{H}}_R)t} \frac{d\hat{\chi}(t)}{dt} e^{-\frac{i}{\hbar}(\hat{\mathcal{H}}_S + \hat{\mathcal{H}}_R)t} + \\ &+ e^{\frac{i}{\hbar}(\hat{\mathcal{H}}_S + \hat{\mathcal{H}}_R)t} \hat{\chi}(t) \left[-\frac{i}{\hbar} (\hat{\mathcal{H}}_S + \hat{\mathcal{H}}_R) \right] e^{-\frac{i}{\hbar}(\hat{\mathcal{H}}_S + \hat{\mathcal{H}}_R)t} \\ &= \frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}(\hat{\mathcal{H}}_S + \hat{\mathcal{H}}_R)t} \left[(\hat{\mathcal{H}}_S + \hat{\mathcal{H}}_R) \hat{\chi}(t) - \hat{\chi}(t) (\hat{\mathcal{H}}_S + \hat{\mathcal{H}}_R) \right] e^{-\frac{i}{\hbar}(\hat{\mathcal{H}}_S + \hat{\mathcal{H}}_R)t} + \frac{d\hat{\chi}(t)}{dt} \\ &= -\frac{1}{i\hbar} \left[(\hat{\mathcal{H}}_S + \hat{\mathcal{H}}_R), \hat{\chi}(t) \right] + \frac{1}{i\hbar} \left[\hat{\mathcal{H}}, \hat{\chi}(t) \right] \\ \frac{d}{dt}\hat{\chi}(t) &= \frac{1}{i\hbar} \left[\hat{\mathcal{H}}_{SR}(t), \hat{\chi}(t) \right]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde $\hat{\mathcal{H}}_{SR}(t)$ dependerá explicitamente do tempo,

$$\hat{\mathcal{H}}_{SR}(t) \equiv e^{\frac{i}{\hbar}(\hat{\mathcal{H}}_S + \hat{\mathcal{H}}_R)t} \hat{\mathcal{H}}_{SR} e^{-\frac{i}{\hbar}(\hat{\mathcal{H}}_S + \hat{\mathcal{H}}_R)t}. \quad (2.7)$$

Integrando a Eq.(2.6) com relação ao tempo encontraremos,

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{d}{dt'} \hat{\chi}(t') dt' &= \int_0^t \frac{1}{i\hbar} \left[\hat{\mathcal{H}}_{SR}(t'), \hat{\chi}(t') \right] dt' \\ \hat{\chi}(t) &= \hat{\chi}(0) + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t \left[\hat{\mathcal{H}}_{SR}(t'), \hat{\chi}(t') \right] dt'. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Substituindo a Eq.(2.8) na Eq.(2.6) encontraremos,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\chi}(t) &= \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{\mathcal{H}}_{SR}(t),\hat{\chi}(0) + \frac{1}{i\hbar}\int_0^t\left[\hat{\mathcal{H}}_{SR}(t'),\hat{\chi}(t')\right]dt'\right] \\ &= \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{\mathcal{H}}_{SR}(t),\hat{\chi}(0)\right] - \frac{1}{\hbar^2}\int_0^t\left[\hat{\mathcal{H}}_{SR}(t),\left[\hat{\mathcal{H}}_{SR}(t'),\hat{\chi}(t')\right]\right]dt'. \end{aligned} \quad (2.9)$$

A solução da Eq.(2.9) não é direta e muito menos trivial, podemos reduzir o problema a um modelo simplificado abordando tal problema utilizando as aproximações, *Aproximações de Born* [51–53], *de Born-Markov* [54–56] e de *Markov* [57, 58] como serão vistas logo abaixo.

2.1 Aproximação de Born, de Born-Markov e de Markov

Inicialmente admitiremos que a interação entre S e R será realizada em um instante de tempo t igual a 0, onde não haverá nenhuma correlação entre S e R nesse instante de tempo. Dessa forma, o operador densidade inicial do sistema composto $S \otimes R$ poderá ser fatorizado da forma $\hat{\chi}(0) \equiv \hat{\chi}(0)$, podendo ser escrito como [32],

$$\hat{\chi}(0) = \hat{\rho}(0)\hat{R}_0, \quad (2.10)$$

sendo \hat{R}_0 o operador densidade do reservatório em $t = 0$. Da Eq.(2.2) podemos mostrar que,

$$e^{\frac{i}{\hbar}\hat{\mathcal{H}}_S t} \text{tr}_R [\hat{\chi}(t)] e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{\mathcal{H}}_S t} = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{\mathcal{H}}_S t} \hat{\rho}(t) e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{\mathcal{H}}_S t}, \quad (2.11)$$

resulta em,

$$\text{tr}_R \left[\hat{\chi}(t) \right] = \hat{\rho}(t). \quad (2.12)$$

Realizando o traço sobre o reservatório R , a Eq.(2.9) dá a equação mestra,

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}_R \left[\frac{d}{dt} \hat{\chi}(t) \right] &= \mathrm{tr}_R \left\{ \frac{1}{i\hbar} \left[\hat{\mathcal{H}}_{SR}(t), \hat{\chi}(t) \right] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t \left[\hat{\mathcal{H}}_{SR}(t), \left[\hat{\mathcal{H}}_{SR}(t'), \hat{\chi}(t') \right] \right] dt' \right\} \\
&= \frac{1}{i\hbar} \mathrm{tr}_R \left\{ \left[\hat{\mathcal{H}}_{SR}(t), \hat{\chi}(0) \right] \right\} - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t \mathrm{tr}_R \left\{ \left[\hat{\mathcal{H}}_{SR}(t), \left[\hat{\mathcal{H}}_{SR}(t'), \hat{\chi}(t') \right] \right] \right\} dt' \\
&= \frac{1}{i\hbar} \mathrm{tr}_R \left\{ \left[\hat{\mathcal{H}}_{SR}(t), \hat{\rho}(0) \hat{R}_0 \right] \right\} - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t \mathrm{tr}_R \left\{ \left[\hat{\mathcal{H}}_{SR}(t), \left[\hat{\mathcal{H}}_{SR}(t'), \hat{\chi}(t') \right] \right] \right\} dt' \\
\frac{d}{dt} \underbrace{\mathrm{tr}_R \left[\hat{\chi}(t) \right]}_{=\hat{\rho}(t)} &= \frac{1}{i\hbar} \left\{ \mathrm{tr}_R \left[\hat{\mathcal{H}}_{SR}(t) \hat{R}_0 \right] \hat{\rho}(0) - \hat{\rho}(0) \mathrm{tr}_R \left[\hat{R}_0 \hat{\mathcal{H}}_{SR}(t) \right] \right\} - \\
&\quad - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t \mathrm{tr}_R \left\{ \left[\hat{\mathcal{H}}_{SR}(t), \left[\hat{\mathcal{H}}_{SR}(t'), \hat{\chi}(t') \right] \right] \right\} dt', \tag{2.13}
\end{aligned}$$

onde por simplicidade façamos $\mathrm{tr}_R \left[\hat{\mathcal{H}}_{SR}(t) \hat{R}_0 \right] = 0$, de tal maneira que,

$$\mathrm{tr}_R \left[\hat{\mathcal{H}}_{SR}(t), \hat{\chi}(0) \right] = 0. \tag{2.14}$$

Finalmente encontraremos,

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t \mathrm{tr}_R \left\{ \left[\hat{\mathcal{H}}_{SR}(t), \left[\hat{\mathcal{H}}_{SR}(t'), \hat{\chi}(t') \right] \right] \right\} dt' \tag{2.15}$$

Após o instante de tempo ($t = 0$), as correlações entre o S (sistema) e o R (reservatório) v ao surgir. O reservatório R é um sistema grande tal que os seus estados não devem ser virtualmente afetados pelo seu acoplamento com S . De certa forma poderemos escrever o operador densidade para o sistema composto $S \otimes R$ como,

$$\hat{\chi}(t) = \hat{\rho}(t) \hat{R}_0 + O(\hat{\mathcal{H}}_{SR}), \tag{2.16}$$

sendo $O(\hat{\mathcal{H}}_{SR})$ termos da ordem do hamiltoniano do sistema acoplado $\hat{\mathcal{H}}_{SR}$.

A *aproximação de Born* [51–53] negligencia os termos de ordem mais alta em $\hat{\mathcal{H}}_{SR}$. Assim podemos escrever a Eq.(2.15) na representação de interação como,

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t \mathrm{tr}_R \left\{ \left[\hat{\mathcal{H}}_{SR}(t), \left[\hat{\mathcal{H}}_{SR}(t'), \hat{\rho}(t') \hat{R}_0 \right] \right] \right\} dt'. \tag{2.17}$$

A chamada *aproximação de Born-Markov* [54–56], simplesmente troca o operador $\hat{\rho}(t')$ por $\hat{\rho}(t)$ de tal forma que obteremos a equação mestra,

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t \text{tr}_R \left\{ \left[\hat{\mathcal{H}}_{SR}(t), \left[\hat{\mathcal{H}}_{SR}(t'), \hat{\rho}(t) \hat{R}_0 \right] \right] \right\} dt'. \quad (2.18)$$

Como o reservatório é um grande sistema mantido em equilíbrio térmico, não é esperado que ele preserve a menor mudança trazida através da sua interação com o sistema S . O hamiltoniano de interação para o nosso modelo será dado especificando [32],

$$\hat{\mathcal{H}}_{SR} = \hbar \sum_i \hat{s}_i \hat{\Gamma}_i, \quad \hat{s}_i \in \mathbb{H}_S \quad \text{e} \quad \hat{\Gamma}_i \in \mathbb{H}_R. \quad (2.19)$$

Sendo \mathbb{H}_S e \mathbb{H}_R espaços de Hilbert do sistema S e do reservatório R , respectivamente. Assim,

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_{SR}(t) &= \hbar \sum_i e^{\frac{i}{\hbar}(\hat{\mathcal{H}}_S + \hat{\mathcal{H}}_R)t} \hat{s}_i \hat{\Gamma}_i e^{-\frac{i}{\hbar}(\hat{\mathcal{H}}_S + \hat{\mathcal{H}}_R)t} \\ &= \hbar \sum_i \left(e^{\frac{i}{\hbar}\hat{\mathcal{H}}_S t} \hat{s}_i e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{\mathcal{H}}_S t} \right) \left(e^{\frac{i}{\hbar}\hat{\mathcal{H}}_R t} \hat{\Gamma}_i e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{\mathcal{H}}_R t} \right) \\ \hat{\mathcal{H}}_{SR}(t) &= \hbar \sum_i \hat{s}_i(t) \hat{\Gamma}_i(t). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Substituindo o resultado da Eq.(2.20) na Eq.(2.17)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) &= -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t \text{tr}_R \left\{ \left[\hat{\mathcal{H}}_{SR}(t), \left[\hat{\mathcal{H}}_{SR}(t'), \hat{\rho}(t') \hat{R}_0 \right] \right] \right\} dt' \\ &= -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t \text{tr}_R \left[\hat{\mathcal{H}}_{SR}(t) \hat{\mathcal{H}}_{SR}(t') \hat{\rho}(t') \hat{R}_0 - \hat{\mathcal{H}}_{SR}(t) \hat{\rho}(t') \hat{R}_0 \hat{\mathcal{H}}_{SR}(t') - \right. \\ &\quad \left. - \hat{\mathcal{H}}_{SR}(t') \hat{\rho}(t') \hat{R}_0 \hat{\mathcal{H}}_{SR}(t) + \hat{\rho}(t') \hat{R}_0 \hat{\mathcal{H}}_{SR}(t') \hat{\mathcal{H}}_{SR}(t) \right] dt' \\ \frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) &= -\int_0^t \text{tr}_R \left[\sum_i \hat{s}_i(t) \hat{\Gamma}_i(t) \sum_j \hat{s}_j(t') \hat{\Gamma}_j(t') \hat{\rho}(t') \hat{R}_0 - \right. \\ &\quad - \sum_i \hat{s}_i(t) \hat{\Gamma}_i(t) \hat{\rho}(t') \hat{R}_0 \sum_j \hat{s}_j(t') \hat{\Gamma}_j(t') - \sum_j \hat{s}_j(t') \hat{\Gamma}_j(t') \hat{\rho}(t') \hat{R}_0 \sum_i \hat{s}_i(t) \hat{\Gamma}_i(t) + \\ &\quad \left. + \hat{\rho}(t') \hat{R}_0 \sum_j \hat{s}_j(t') \hat{\Gamma}_j(t') \sum_i \hat{s}_i(t) \hat{\Gamma}_i(t) \right] dt' \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) &= - \sum_{ij} \int_0^t \text{tr}_R \left\{ \hat{s}_i(t)\hat{s}_j(t')\hat{\rho}(t')\text{tr}_R \left[\hat{\Gamma}_i(t)\hat{\Gamma}_j(t')\hat{R}_0 \right] - \right. \\
&\quad - \hat{s}_i(t)\hat{\rho}(t')\hat{s}_j(t')\text{tr}_R \left[\hat{\Gamma}_i(t)\hat{R}_0\hat{\Gamma}_j(t') \right] - \hat{s}_j(t')\hat{\rho}(t')\hat{s}_i(t)\text{tr}_R \left[\hat{\Gamma}_j(t')\hat{R}_0\hat{\Gamma}_i(t) \right] + \\
&\quad \left. + \hat{\rho}(t')\hat{s}_j(t')\hat{s}_i(t)\text{tr}_R \left[\hat{R}_0\hat{\Gamma}_j(t')\hat{\Gamma}_i(t) \right] \right\}. \tag{2.22}
\end{aligned}$$

Fazendo uso da seguinte propriedade¹ [59],

$$\text{tr}[\hat{\rho}\hat{A}] = \langle \hat{A} \rangle, \tag{2.23}$$

assim poderemos reescrever a Eq.(2.21) como,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) &= - \sum_{ij} \int_0^t \left\{ \left(\hat{s}_i(t)\hat{s}_j(t')\hat{\rho}(t') - \hat{s}_j(t')\hat{\rho}(t')\hat{s}_i(t) \right) \langle \hat{\Gamma}_i(t)\hat{\Gamma}_j(t') \rangle_R + \right. \\
&\quad \left. + \left(\hat{\rho}(t')\hat{s}_j(t')\hat{s}_i(t) - \hat{s}_i(t)\hat{\rho}(t')\hat{s}_j(t') \right) \langle \hat{\Gamma}_j(t')\hat{\Gamma}_i(t) \rangle_R \right\} dt', \tag{2.24}
\end{aligned}$$

onde fizemos as seguintes substituições,

$$\begin{aligned}
\text{tr}_R \left[\hat{\Gamma}_j(t')\hat{R}_0\hat{\Gamma}_i(t) \right] &= \text{tr}_R \left[\hat{\Gamma}_i(t)\hat{\Gamma}_j(t')\hat{R}_0 \right] = \text{tr}_R \left[\hat{R}_0\hat{\Gamma}_i(t)\hat{\Gamma}_j(t') \right] \\
&= \langle \hat{\Gamma}_i(t)\hat{\Gamma}_j(t') \rangle_R \tag{2.25}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{tr}_R \left[\hat{\Gamma}_i(t)\hat{R}_0\hat{\Gamma}_j(t') \right] &= \text{tr}_R \left[\hat{\Gamma}_j(t')\hat{\Gamma}_i(t)\hat{R}_0 \right] = \text{tr}_R \left[\hat{R}_0\hat{\Gamma}_j(t')\hat{\Gamma}_i(t) \right] \\
&= \langle \hat{\Gamma}_j(t')\hat{\Gamma}_i(t) \rangle_R. \tag{2.26}
\end{aligned}$$

¹Podemos definir o *traço* de um operador qualquer, \hat{X} como a soma dos seus elementos diagonais,

$$\text{tr}[\hat{X}] = \sum_{a'} \langle a' | \hat{X} | a' \rangle$$

Sabendo que o operador densidade $\hat{\rho}$ e o valor esperado de um operador qualquer $\langle \hat{A} \rangle$, são dados por,

$$\hat{\rho} = |a'\rangle\langle a'| \quad e \quad \langle \hat{A} \rangle = \langle a' | \hat{A} | a' \rangle$$

logo,

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle a' | \hat{A} | a' \rangle = \langle a' | \sum_{b'} |b'\rangle\langle b'| \hat{A} \sum_{b''} |b''\rangle\langle b''| a' \rangle = \sum_{b'} \sum_{b''} \langle b'' | \overbrace{\langle a' | a' \rangle}^{=\hat{\rho}} | b' \rangle \langle b' | \hat{A} | b'' \rangle = \sum_{b'} \sum_{b''} \langle b'' | \hat{\rho} | b' \rangle \langle b' | \hat{A} | b'' \rangle$$

Assim,

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_{b''} \langle b'' | \hat{\rho} \hat{A} | b'' \rangle = \text{tr}[\hat{\rho}\hat{A}].$$

Para chegarmos nestes resultados Eqs.(2.24) e (2.25), fizemos uso da propriedade do *traço*, [59]

$$\text{tr}(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) = \text{tr}(\hat{C}\hat{A}\hat{B}) = \text{tr}(\hat{B}\hat{C}\hat{A}), \quad (2.27)$$

juntamente com a Eq.(2.23).

Todas as propriedades do reservatório dentro da Eq.(2.24) são dadas através das duas funções de correlação Eqs.((2.25) e (2.26)). A troca de $\hat{\rho}(t')$ por $\hat{\rho}(t)$ se justifica se estas duas funções de correlação decaem muito rapidamente na escala de tempo na qual $\hat{\rho}(t)$ varia. Idealmente façamos,

$$\langle \hat{\Gamma}_i(t)\hat{\Gamma}_j(t') \rangle_R \propto \delta(t - t'), \quad (2.28)$$

onde, a aproximação dada na Eq.(2.28) é conhecida como *aproximação de Markov* [57,58].

2.2 Tipos de Reservatórios

2.2.1 Reservatório Térmico Bosônico

O reservatório R será modelado como uma coleção de osciladores harmônicos com frequência ω_j e o hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}_R$ será dado por [32],

$$\hat{\mathcal{H}}_R \equiv \sum_j \hbar\omega_j \hat{r}_j^\dagger \hat{r}_j, \quad (2.29)$$

sendo \hat{r}_j^\dagger e \hat{r}_j são operadores de criação e aniquilação. O sistema S é um oscilador harmônico com frequência ω_0 e o hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}_S$, é escrito em termos dos operadores de criação e aniquilação \hat{a}^\dagger e \hat{a} ,

$$\hat{\mathcal{H}}_S \equiv \hbar\omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a}. \quad (2.30)$$

O sistema $S + R$ é caracteristicamente bosônico pois os seus operadores de criação ($\hat{a}^\dagger, \hat{r}_j^\dagger$) e de aniquilação (\hat{a}, \hat{r}_j) satisfazem as relações de comutação,

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad \text{e} \quad [\hat{r}_j, \hat{r}_k^\dagger] = \delta_{j,k}. \quad (2.31)$$

a atuação destes operadores na base ortonormal de número ou de Fock resulta em,

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = n |n\rangle \quad \text{e} \quad \hat{r}_j^\dagger \hat{r}_j |n_l, n_j, \dots\rangle = n_j |n_l, n_j, \dots\rangle, \quad (2.32)$$

bem como,

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad (2.33-1)$$

$$\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad (2.33-2)$$

$$\hat{r}_j|n_l, n_j, \dots\rangle = \sqrt{n_j}|n_l, n_j-1, \dots\rangle, \quad (2.33-3)$$

$$\hat{r}_j^\dagger|n_l, n_j, \dots\rangle = \sqrt{n_j+1}|n_l, n_j+1, \dots\rangle. \quad (2.33-4)$$

O hamiltoniano de interação para o sistema composto $S \otimes R$ é dado por,

$$\hat{\mathcal{H}}_{SR} = \hat{\mathcal{H}}_{S \otimes R} = \sum_j \hbar \left(\kappa_j^* \hat{a} \hat{r}_j^\dagger + \kappa_j \hat{a}^\dagger \hat{r}_j \right) = \hbar \left(\hat{a} \hat{\Gamma}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{\Gamma} \right), \quad (2.34)$$

onde utilizamos a aproximação de onda girante (vide Apêndice A), sabendo que os operadores $\hat{\Gamma}$ e $\hat{\Gamma}^\dagger$ são dados por,

$$\hat{\Gamma} = \sum_j \kappa_j \hat{r}_j \quad \text{e} \quad \hat{\Gamma}^\dagger = \sum_j \kappa_j^* \hat{r}_j^\dagger. \quad (2.35)$$

Assumindo que o reservatório esteja em equilíbrio térmico a temperatura T , o estado \hat{R}_0 do reservatório R escrito como um estado de Gibbs [60],

$$\hat{R}_0 = \frac{e^{\beta \hat{\mathcal{H}}_R}}{\text{tr}_R \left(e^{-\beta \hat{\mathcal{H}}_R} \right)} \quad (2.36)$$

sendo $\beta = 1/k_B T$, k_B é a constante de Boltzmann.

Substituindo a Eq.(2.29) na Eq.(2.36) encontraremos uma forma explícita para \hat{R}_0 como,

$$\begin{aligned} \hat{R}_0 &= \frac{e^{-\beta \sum_j \hbar \omega_j \hat{r}_j^\dagger \hat{r}_j}}{\text{tr}_R \left(e^{-\beta \sum_j \hbar \omega_j \hat{r}_j^\dagger \hat{r}_j} \right)} = \frac{\prod_j e^{-\beta \hbar \omega_j \hat{r}_j^\dagger \hat{r}_j}}{\text{tr}_R \left(\prod_j e^{-\beta \hbar \omega_j \hat{r}_j^\dagger \hat{r}_j} \right)} \\ &= \frac{\prod_j e^{-\beta \hbar \omega_j \hat{r}_j^\dagger \hat{r}_j}}{\text{tr}_{R_j} \left(e^{-\beta \hbar \omega_j \hat{r}_j^\dagger \hat{r}_j} \right)} = \prod_j \frac{e^{-\beta \hbar \omega_j \hat{r}_j^\dagger \hat{r}_j}}{e^{-\beta \hbar \omega_j n_j}} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\hat{R}_0 = \prod_j e^{-\beta \hbar \omega_j \hat{r}_j^\dagger \hat{r}_j} (1 - e^{-\beta \hbar \omega_j n_j}). \quad (2.37)$$

Note que

$$\begin{aligned} \text{tr}_R \left(\prod_j e^{-\beta \hbar \omega_j \hat{r}_j^\dagger \hat{r}_j} \right) &= \text{tr}_{R_j} \left(e^{-\beta \hbar \omega_j \hat{r}_j^\dagger \hat{r}_j} \right) = \sum_j \langle n_j | e^{-\beta \hbar \omega_j \hat{r}_j^\dagger \hat{r}_j} | n_j \rangle \\ &= e^{-\beta \hbar \omega_j n_j} = \frac{1}{1 - e^{-\beta \hbar \omega_j}} \quad (\text{Série geométrica}). \end{aligned} \quad (2.38)$$

A comparação da Eq.(2.33) com a Eq.(2.20) é imediata se definirmos os operadores como na referência [32],

$$\hat{s}_1 = \hat{a}, \quad (2.39)$$

$$\hat{s}_2 = \hat{a}^\dagger = \hat{s}_1^\dagger, \quad (2.40)$$

$$\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}^\dagger \equiv \sum_j \kappa_j^* \hat{r}_j^\dagger, \quad (2.41)$$

$$\hat{\Gamma}_2 = \hat{\Gamma} \equiv \sum_j \kappa_j \hat{r}_j = \hat{\Gamma}_1^\dagger, \quad (2.42)$$

onde \hat{a} , \hat{a}^\dagger , \hat{r}_j e \hat{r}_j^\dagger são soluções das equações de movimento de Heisenberg [59]. Os operadores na representação de interação serão dadas por,

$$\hat{s}_1(t) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}}_S t} \hat{s}_1 e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}}_S t} = e^{i\omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} t} \hat{a} e^{-i\omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} t} = \hat{a} e^{-i\omega_0 t}, \quad (2.43)$$

$$\hat{s}_2(t) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}}_S t} \hat{s}_2 e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}}_S t} = e^{i\omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} t} \hat{a}^\dagger e^{-i\omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} t} = \hat{a}^\dagger e^{i\omega_0 t}, \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_1(t) &= \hat{\Gamma}^\dagger(t) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}}_R t} \hat{\Gamma}^\dagger e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}}_R t} = e^{i \sum_n \omega_n \hat{r}_n^\dagger \hat{r}_n t} \sum_j \kappa_j^* \hat{r}_j^\dagger e^{-i \sum_m \omega_m \hat{r}_m^\dagger \hat{r}_m t} \\ &= \sum_j \kappa_j^* \hat{r}_j^\dagger e^{i\omega_j t}, \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\hat{\Gamma}_2(t) = \hat{\Gamma}(t) = \sum_j \kappa_j \hat{r}_j e^{-i\omega_j t}. \quad (2.46)$$

Voltando na Eq.(2.24),

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\rho}}(t) &= - \sum_{i,j} \int_0^t dt' \left\{ \left[\hat{s}_i(t) \hat{s}_j(t') \hat{\rho}(t') - \hat{s}_j(t') \hat{\rho}(t') \hat{s}_i(t) \right] \langle \hat{\Gamma}_i(t) \hat{\Gamma}_j(t') \rangle_R + \right. \\ &\quad \left. + \left[\hat{\rho}(t') \hat{s}_j(t') \hat{s}_i(t) - \hat{s}_i(t) \hat{\rho}(t') \hat{s}_j(t') \right] \langle \hat{\Gamma}_j(t') \hat{\Gamma}_i(t) \rangle_R \right\}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

E fazendo a soma na Eq.(2.24) correr sobre os índices $i = 1, 2$ e $j = 1, 2$, podemos escrever,²,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\rho}}(t) &= - \int_0^t dt' \left\{ \left[\hat{s}_1(t) \hat{s}_1(t') \hat{\rho}(t') - \hat{s}_1(t') \hat{\rho}(t') \hat{s}_1(t) \right] \langle \hat{\Gamma}^\dagger(t) \hat{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R + \text{h.c} + \right. \\ &\quad + \left[\hat{s}_1(t) \hat{s}_2(t') \hat{\rho}(t') - \hat{s}_2(t') \hat{\rho}(t') \hat{s}_1(t) \right] \langle \hat{\Gamma}^\dagger(t) \hat{\Gamma}(t') \rangle_R + \text{h.c} + \\ &\quad + \left[\hat{s}_2(t) \hat{s}_1(t') \hat{\rho}(t') - \hat{s}_1(t') \hat{\rho}(t') \hat{s}_2(t) \right] \langle \hat{\Gamma}(t) \hat{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R + \text{h.c} + \\ &\quad \left. + \left[\hat{s}_2(t) \hat{s}_2(t') \hat{\rho}(t') - \hat{s}_2(t') \hat{\rho}(t') \hat{s}_2(t) \right] \langle \hat{\Gamma}(t) \hat{\Gamma}(t') \rangle_R + \text{h.c} \right\}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

²Onde o termo abreviado “h.c” representa o hermitiano conjugado.

Substituindo os operadores descritos pelas Eqs.((2.42)-(2.45)) na Eq.(2.48),

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\rho}}(t) = & - \int_0^t dt' \left\{ \left[\hat{a}\hat{a}\hat{\rho}(t') - \hat{a}\hat{\rho}(t')\hat{a} \right] e^{-i\omega_0(t+t')} \langle \hat{\Gamma}^\dagger(t)\hat{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R + \text{h.c} \right. \\
& + \left[\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{\rho}(t') - \hat{a}^\dagger\hat{\rho}(t')\hat{a}^\dagger \right] e^{i\omega_0(t+t')} \langle \hat{\Gamma}(t)\hat{\Gamma}(t') \rangle_R + \text{h.c} \\
& + \left[\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\rho}(t') - \hat{a}^\dagger\hat{\rho}(t')\hat{a} \right] e^{-i\omega_0(t-t')} \langle \hat{\Gamma}^\dagger(t)\hat{\Gamma}(t') \rangle_R + \text{h.c} \\
& \left. + \left[\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho}(t') - \hat{a}\hat{\rho}(t')\hat{a}^\dagger \right] e^{i\omega_0(t-t')} \langle \hat{\Gamma}(t)\hat{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R + \text{h.c} \right\}, \tag{2.49}
\end{aligned}$$

as funções de correlação do reservatório são dadas explicitamente por (vide Apêndice B),

$$\langle \hat{\Gamma}^\dagger(t)\hat{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R = \sum_{j,k} \kappa_j^* \kappa_k^* e^{i\omega_j t} e^{i\omega_k t'} \text{tr}_R \left(\hat{r}_j^\dagger \hat{r}_k^\dagger \hat{R}_0 \right) = 0, \tag{2.50}$$

$$\langle \hat{\Gamma}(t)\hat{\Gamma}(t') \rangle_R = \sum_{j,k} \kappa_j \kappa_k e^{-i\omega_j t} e^{-i\omega_k t'} \text{tr}_R \left(\hat{r}_j \hat{r}_k \hat{R}_0 \right) = 0, \tag{2.51}$$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\Gamma}^\dagger(t)\hat{\Gamma}(t') \rangle_R &= \sum_{j,k} \kappa_j^* \kappa_k e^{i\omega_j t} e^{-i\omega_k t'} \text{tr}_R \left(\hat{r}_j^\dagger \hat{r}_k \hat{R}_0 \right) \\
&= \sum_j |\kappa_j|^2 e^{i\omega_j(t-t')} \bar{n}(\omega_j, \beta), \tag{2.52}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\Gamma}(t)\hat{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R &= \sum_{j,k} \kappa_j \kappa_k^* e^{-i\omega_j t} e^{i\omega_k t'} \text{tr}_R \left(\hat{r}_j \hat{r}_k^\dagger \hat{R}_0 \right) \\
&= \sum_j |\kappa_j|^2 e^{-i\omega_j(t-t')} [1 + \bar{n}(\omega_j, \beta)]. \tag{2.53}
\end{aligned}$$

com,

$$\text{tr}_R \left(\hat{r}_j^\dagger \hat{r}_k \hat{R}_0 \right) = \bar{n}(\omega_j, \beta) \delta_{j,k}, \tag{2.54}$$

e

$$\text{tr}_R \left(\hat{r}_j \hat{r}_k^\dagger \hat{R}_0 \right) = [1 + \bar{n}(\omega_j, \beta)] \delta_{j,k}, \tag{2.55}$$

onde,

$$\bar{n}(\omega_j, \beta) = \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_j} - 1}, \tag{2.56}$$

é o número médio de fótons seguindo a *estatística de Bose-Einstein* [37, 61].

Assim a Eq.(2.49) poderá ser escrita como,

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\rho}}(t) = & - \int_0^t dt' \left\{ \left[\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\rho}(t') - \hat{a}^\dagger\hat{\rho}(t')\hat{a} \right] e^{-i\omega_0(t-t')} \langle \hat{\Gamma}^\dagger(t)\hat{\Gamma}(t') \rangle_R + \text{h.c} + \right. \\
& \left. + \left[\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho}(t') - \hat{a}\hat{\rho}(t')\hat{a}^\dagger \right] e^{i\omega_0(t-t')} \langle \hat{\Gamma}(t)\hat{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R + \text{h.c} \right\}. \tag{2.57}
\end{aligned}$$

Os termos não-nulos das funções de correlação Eq.(2.51) e Eq.(2.52) envolvem uma soma sobre osciladores do reservatório R . Mudaremos esta soma por uma integração, pela introdução de uma densidade de estados $g(\omega)$ tais que $g(\omega)d\omega$ dá o número de osciladores com frequência no intervalo ω a $\omega + d\omega$. Fazendo a mudança de variável,

$$\tau = t - t', \quad (2.58)$$

a Eq.(2.57) poderá ser escrita como,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\rho}}(t) = & - \int_0^t dt' \left\{ \left[\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\rho}(t-\tau) - \hat{a}^\dagger\hat{\rho}(t-\tau)\hat{a} \right] e^{-i\omega_0\tau} \langle \hat{\Gamma}^\dagger(t)\hat{\Gamma}(t-\tau) \rangle_R + \text{h.c.} + \right. \\ & \left. + \left[\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho}(t-\tau) - \hat{a}\hat{\rho}(t-\tau)\hat{a}^\dagger \right] e^{i\omega_0\tau} \langle \hat{\Gamma}(t)\hat{\Gamma}^\dagger(t-\tau) \rangle_R + \text{h.c.} \right\}, \end{aligned} \quad (2.59)$$

as funções de correlação do reservatório, não-nulas, são,

$$\begin{aligned} \langle \hat{\Gamma}^\dagger(t)\hat{\Gamma}(t') \rangle_R &= \sum_j |\kappa_j|^2 e^{i\omega_j(t-t')} \bar{n}(\omega_j, \beta) \\ &= \int_0^\infty d\omega e^{i\omega\tau} g(\omega) |\kappa(\omega)|^2 \bar{n}(\omega, \beta) \\ &= \langle \hat{\Gamma}^\dagger(t)\hat{\Gamma}(t-\tau) \rangle_R, \end{aligned} \quad (2.60)$$

e

$$\begin{aligned} \langle \hat{\Gamma}(t)\hat{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R &= \sum_j |\kappa_j|^2 e^{-i\omega_j(t-t')} [\bar{n}(\omega_j, \beta) + 1] \\ &= \int_0^\infty d\omega e^{-i\omega\tau} g(\omega) |\kappa(\omega)|^2 [\bar{n}(\omega, \beta) + 1] \\ &= \langle \hat{\Gamma}(t)\hat{\Gamma}^\dagger(t-\tau) \rangle_R. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Da Eq.(2.59) faremos a integração no tempo antes da integração nas frequências para obtermos uma forma explícita para as funções de correlação do reservatório R . Usaremos a *aproximação de Born-Markov* trocando $\hat{\rho}(t-\tau)$ por $\hat{\rho}(t)$ uma vez que τ (veja Eq.(2.58)) é

muito menor do que a escala de tempo da evolução de $\hat{\rho}(t)$. Logo encontraremos,

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\rho}}(t) &= \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega e^{-i(\omega-\omega_0)\tau} g(\omega) |\kappa(\omega)|^2 \left(\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} \right) + \\
&+ \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega e^{-i(\omega-\omega_0)\tau} g(\omega) |\kappa(\omega)|^2 \bar{n}(\omega, \beta) \left(\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{\rho}\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a} \right) + \\
&+ \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega e^{i(\omega-\omega_0)\tau} g(\omega) |\kappa(\omega)|^2 \left(\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a} \right) + \\
&+ \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega e^{i(\omega-\omega_0)\tau} g(\omega) |\kappa(\omega)|^2 \bar{n}(\omega, \beta) \left(\hat{a}^\dagger\hat{\rho}\hat{a} + \hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a} \right). \quad (2.62)
\end{aligned}$$

Para simplificar o cálculo faremos uso das seguintes substituições na Eq.(2.62) [32],

$$\alpha \equiv \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega e^{-i(\omega-\omega_0)\tau} g(\omega) |\kappa(\omega)|^2 \quad (2.63)$$

$$\beta \equiv \int_0^t d\tau \int_0^\infty d\omega e^{-i(\omega-\omega_0)\tau} g(\omega) |\kappa(\omega)|^2 \bar{n}(\omega, T), \quad (2.64)$$

que resultará em,

$$\dot{\hat{\rho}}(t) = \alpha \left(\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} \right) + \beta \left(\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{\rho}\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a} \right) + \text{h.c.} \quad (2.65)$$

Os cálculos de α e β estão feitos em detalhes no Apêndice C, de onde obtemos os resultados,

$$\alpha = \pi g(\omega_0) |\kappa(\omega_0)|^2 + i\Delta \quad \text{e} \quad \beta = \pi g(\omega_0) |\kappa(\omega_0)|^2 \bar{n}(\omega_0, T) + i\Delta', \quad (2.66)$$

onde,

$$\Delta \equiv \text{VP} \int_0^\infty d(\omega) \frac{|\kappa(\omega)|^2}{\omega_0 - \omega}, \quad (2.67)$$

$$\Delta' \equiv \text{VP} \int_0^\infty d(\omega) \frac{|\kappa(\omega)|^2}{\omega_0 - \omega} \bar{n}(\omega, T). \quad (2.68)$$

Levando estes resultados Eqs.(2.66), (2.66) e (2.67) na Eq.(2.65), encontraremos que a equação mestra para um reservatório bosônico será escrita como,

$$\dot{\hat{\rho}}(t) = \left(\frac{\gamma}{2} + i\Delta \right) \left(\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} \right) + \left(\frac{\gamma}{2} \bar{n} + i\Delta' \right) \left(\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{\rho}\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a} \right) + \text{h.c.}, \quad (2.69)$$

sendo,

$$\frac{\gamma}{2} \equiv \pi g(\omega_0) |\kappa(\omega)|^2 \quad \text{e} \quad \bar{n} \equiv \bar{n}(\omega_0, \beta), \quad (2.70)$$

Desenvolvendo um pouco mais a Eq.(2.69), encontraremos,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\rho}}(t) = & \left(\frac{\gamma}{2} + i\Delta\right) \left(\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho}\right) + \left(\frac{\gamma}{2}\bar{n} + i\Delta'\right) \left(\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{\rho}\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}\hat{a}^\dagger\right) + \\ & + \left(\frac{\gamma}{2} - i\Delta\right) \left(\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) + \left(\frac{\gamma}{2}\bar{n} - i\Delta'\right) \left(\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{\rho}\hat{a} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\rho}\right). \end{aligned} \quad (2.71)$$

Desenvolvendo os termos

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\rho}}(t) = & \frac{\gamma}{2}\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \frac{\gamma}{2}\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} + i\Delta\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - i\Delta\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} + \frac{\gamma}{2}\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \frac{\gamma}{2}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a} - i\Delta\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger + i\Delta\hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a} + \\ & + \frac{\gamma}{2}\bar{n}\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger + \frac{\gamma}{2}\bar{n}\hat{a}^\dagger\hat{\rho}\hat{a} - \frac{\gamma}{2}\bar{n}\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \frac{\gamma}{2}\bar{n}\hat{\rho}\hat{a}\hat{a}^\dagger + i\Delta'\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger + i\Delta'\hat{a}^\dagger\hat{\rho}\hat{a} - i\Delta'\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - i\Delta'\hat{\rho}\hat{a}\hat{a}^\dagger + \\ & + \frac{\gamma}{2}\bar{n}\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger + \frac{\gamma}{2}\bar{n}\hat{a}^\dagger\hat{\rho}\hat{a} - \frac{\gamma}{2}\bar{n}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a} - \frac{\gamma}{2}\bar{n}\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\rho} - i\Delta'\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - i\Delta'\hat{a}^\dagger\hat{\rho}\hat{a} + i\Delta'\hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a} + i\Delta'\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\rho}, \end{aligned}$$

organizando os termos semelhantes,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\rho}}(t) = & \frac{\gamma}{2} \left(2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) - i\Delta \left[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{\rho}\right] + \gamma\bar{n}\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger + \gamma\bar{n}\hat{a}^\dagger\hat{\rho}\hat{a} - \\ & - \frac{\gamma}{2}\bar{n}\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \frac{\gamma}{2}\bar{n}\hat{\rho}\hat{a}\hat{a}^\dagger - \frac{\gamma}{2}\bar{n}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{\gamma}{2}\bar{n}\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\rho} + i\Delta' \left(\hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\rho}\right) - \\ & - i\Delta' \left(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{a}\hat{a}^\dagger\right) \\ = & -i\Delta \left[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{\rho}\right] + \frac{\gamma}{2} \left(2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) - i\Delta' \hat{\rho} \overbrace{\left(\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\right)}^{=[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]} + \\ & + i\Delta' \underbrace{\left(\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\right)}_{=[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]} \hat{\rho} + \gamma\bar{n}\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger + \gamma\bar{n}\hat{a}^\dagger\hat{\rho}\hat{a} - \frac{\gamma}{2}\bar{n}\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \frac{\gamma}{2}\bar{n}\hat{\rho}\hat{a}\hat{a}^\dagger - \frac{\gamma}{2}\bar{n}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a} - \frac{\gamma}{2}\bar{n}\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\rho} \\ = & -i\Delta \left[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{\rho}\right] + \frac{\gamma}{2} \left(2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}\right) + \gamma\bar{n}\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger + \gamma\bar{n}\hat{a}^\dagger\hat{\rho}\hat{a} - \gamma\bar{n}\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \frac{\gamma}{2}\bar{n}\hat{\rho} - \\ & - \gamma\bar{n}\hat{\rho}\hat{a}\hat{a}^\dagger + \frac{\gamma}{2}\bar{n}\hat{\rho}, \end{aligned} \quad (2.72)$$

finalmente encontraremos que a equação mestra, na figura de interação, é dada por [32],

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\rho}}(t) = & -i\Delta \left[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{\rho}(t)\right] + \frac{\gamma}{2} \left[2\hat{a}\hat{\rho}(t)\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t)\hat{a}^\dagger\hat{a}\right] + \\ & + \gamma\bar{n} \left[\hat{a}\hat{\rho}(t)\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{\rho}(t)\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t)\hat{a}\hat{a}^\dagger\right], \end{aligned} \quad (2.73)$$

Na representação de Schrödinger se recordarmos o seguinte resultado [62],

$$\hat{\rho}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{\mathcal{H}}_S t} \hat{\rho}(t) e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{\mathcal{H}}_S t} \quad (2.74)$$

Derivando a expressão Eq.(2.73) com relação ao tempo encontraremos,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\rho}}(t) &= \frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}\hat{\mathcal{H}}_S t} \left[\hat{\mathcal{H}}_S \hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t) \hat{\mathcal{H}}_S \right] e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{\mathcal{H}}_S t} + e^{\frac{i}{\hbar}\hat{\mathcal{H}}_S t} \dot{\hat{\rho}}(t) e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{\mathcal{H}}_S t} \\ &= \frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}\hat{\mathcal{H}}_S t} [\hat{\mathcal{H}}_S, \hat{\rho}(t)] e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{\mathcal{H}}_S t} + e^{\frac{i}{\hbar}\hat{\mathcal{H}}_S t} \dot{\hat{\rho}}(t) e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{\mathcal{H}}_S t}. \end{aligned} \quad (2.75)$$

agora multiplicando a esquerda por $e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{\mathcal{H}}_S t}$ e a direita por $e^{\frac{i}{\hbar}\hat{\mathcal{H}}_S t}$, encontraremos que,

$$\dot{\hat{\rho}}(t) = -\frac{i}{\hbar} [\hat{\mathcal{H}}_S, \hat{\rho}(t)] + e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{\mathcal{H}}_S t} \dot{\hat{\rho}}(t) e^{\frac{i}{\hbar}\hat{\mathcal{H}}_S t}. \quad (2.76)$$

Observe que a Eq.(2.72) pode ser escrita como,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\rho}}(t) &= e^{i\omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} t} \left\{ -i\Delta[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{\rho}(t)] + \frac{\gamma}{2} [2\hat{a} \hat{\rho}(t) \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t) \hat{a}^\dagger \hat{a}] \right. \\ &\quad \left. + \gamma \bar{n} [\hat{a} \hat{\rho}(t) \hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{\rho}(t) \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t) \hat{a} \hat{a}^\dagger] \right\} e^{-i\omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} t}, \end{aligned} \quad (2.77)$$

onde utilizamos o fato de que

$$\begin{aligned} e^{-i\omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} t} \hat{a} \hat{\rho} \hat{a}^\dagger e^{i\omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} t} &= e^{-i\omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} t} \hat{a} \left(e^{i\omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} t} \hat{\rho} e^{-i\omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} t} \right) \hat{a}^\dagger e^{i\omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} t} \\ &= \left(e^{-i\omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} t} \hat{a} e^{i\omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} t} \right) \hat{\rho} \left(e^{-i\omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} t} \hat{a}^\dagger e^{i\omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} t} \right) \\ &= \hat{a} \hat{\rho} \hat{a}^\dagger. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Da mesma podemos fazer, sem perda de generalidade,

$$\begin{aligned} e^{-i\omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} t} \dot{\hat{\rho}}(t) e^{i\omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} t} &= -i\Delta[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{\rho}(t)] + \frac{\gamma}{2} [2\hat{a} \hat{\rho}(t) \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t) \hat{a}^\dagger \hat{a}] \\ &\quad + \gamma \bar{n} [\hat{a} \hat{\rho}(t) \hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{\rho}(t) \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t) \hat{a} \hat{a}^\dagger]. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Substituindo o resultado encontrado na Eq.(2.73) obteremos,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\rho}}(t) + i\omega_0 [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{\rho}] &= -i\Delta[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{\rho}(t)] + \frac{\gamma}{2} [2\hat{a} \hat{\rho}(t) \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t) \hat{a}^\dagger \hat{a}] \\ &\quad + \gamma \bar{n} [\hat{a} \hat{\rho}(t) \hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{\rho}(t) \hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t) \hat{a} \hat{a}^\dagger] \end{aligned} \quad (2.80)$$

e, finalmente, com um pouco de álgebra, encontraremos a equação mestra para o reservatório bosônico na representação de Schrödinger,

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\rho}} &= -i\omega'_0[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{\rho}] + \frac{\gamma}{2} [2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}] \\ &+ \gamma\bar{n} [\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{\rho}\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}\hat{a}^\dagger],\end{aligned}\quad (2.81)$$

sendo, $\omega'_0 = \omega_0 + \Delta$.

Podemos tornar a expressão (2.80) mais usual fazendo,

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\rho}} &= -i\omega'_0[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{\rho}] + \frac{\gamma}{2} (2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}) + 2\frac{\gamma}{2}\bar{n} (\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{\rho}\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}\hat{a}^\dagger) \\ &= -i\omega'_0[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{\rho}] + \frac{\gamma}{2} (2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}) + \\ &+ \frac{\gamma}{2}\bar{n} [2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} + 2\hat{a}^\dagger\hat{\rho}\hat{a} - (\hat{a}\hat{a}^\dagger - 1)\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{\rho}(1 + \hat{a}\hat{a}^\dagger)] \\ &= -i\omega'_0[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{\rho}] + \frac{\gamma}{2} (2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}) + \frac{\gamma}{2}\bar{n} (2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}) + \\ &+ \frac{\gamma}{2}\bar{n} (2\hat{a}^\dagger\hat{\rho}\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}\hat{a}^\dagger).\end{aligned}$$

Agrupando os termos, encontraremos finalmente que,

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\rho}} &= -i\omega'_0[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{\rho}] + \frac{\gamma}{2}(\bar{n} + 1) (2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}) \\ &+ \frac{\gamma}{2}\bar{n} (2\hat{a}^\dagger\hat{\rho}\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}\hat{a}^\dagger).\end{aligned}\quad (2.82)$$

2.2.2 Reservatório Térmico Fermiônico

Podemos modelar nosso reservatório como uma coleção de férmions não interagentes. Admitindo que cada átomo de dois níveis obedece a mesma álgebra dos férmions [36], iremos considerar aqui um reservatório fermiônico modelado por uma coleção de átomos de dois níveis que não interagem. O hamiltoniano para o reservatório R será dado por,

$$\hat{\mathcal{H}}_R = \frac{\hbar}{2} \sum_j \omega_j \hat{\sigma}_{z,j}^{(R)}, \quad (2.83)$$

O que caracteriza um sistema fermiônico é a relação de anticomutação entre os operadores de levantamento $\hat{\sigma}_{+,j}$ e abaixamento $\hat{\sigma}_{-,j}$ para os sistemas de dois níveis,

$$\{\hat{\sigma}_{+,j}, \hat{\sigma}_{-,l}\} = \mathbf{1}\delta_{j,l}, \quad (2.84)$$

$$\{\hat{\sigma}_{+,j}, \hat{\sigma}_{+,j}\} = \{\hat{\sigma}_{-,j}, \hat{\sigma}_{-,j}\} = \mathbf{0}. \quad (2.85)$$

Podemos definir um operador $\hat{N} = \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_-$ (operador número) que pode ser escrito na forma [36],

$$\hat{N}|n\rangle = \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- |n\rangle = n|n\rangle, \quad \text{sendo } n = 0 \text{ ou } 1. \quad (2.86)$$

O estado \hat{R}_0 do reservatório R dado por um estado de Gibbs,

$$\hat{R}_0 = \frac{e^{-\beta \hat{\mathcal{H}}_R}}{\text{tr}_R \left(e^{-\beta \hat{\mathcal{H}}_R} \right)}, \quad (2.87)$$

substituindo a Eq.(2.83) na Eq.(2.87), encontraremos uma forma explícita para \hat{R}_0 como³,

$$\begin{aligned} \hat{R}_0 &= \frac{e^{-(\beta \hbar / 2) \sum_j \omega_j \hat{\sigma}_{z,j}^{(R)}}}{\text{tr}_R \left[e^{-(\beta \hbar / 2) \sum_j \omega_j \hat{\sigma}_{z,j}^{(R)}} \right]} = \frac{\prod_j e^{-(\beta \hbar / 2) \omega_j \hat{\sigma}_{z,j}^{(R)}}}{\text{tr}_R \left[\prod_j e^{-(\beta \hbar / 2) \omega_j \hat{\sigma}_{z,j}^{(R)}} \right]} \\ &= \frac{\prod_j e^{-(\beta \hbar / 2) \omega_j \hat{\sigma}_{z,j}^{(R)}}}{\prod_j \text{tr}_{R_j} \left[e^{-(\beta \hbar / 2) \omega_j \hat{\sigma}_{z,j}^{(R)}} \right]} = \prod_j \frac{e^{-(\beta \hbar / 2) \omega_j \hat{\sigma}_{z,j}^{(R)}}}{e^{(\beta \hbar / 2) \omega_j} + e^{-(\beta \hbar / 2) \omega_j}}, \end{aligned} \quad (2.88)$$

para chegarmos na Eq.(2.88), utilizamos o fato de que,

$$\begin{aligned} \text{tr}_R \left[\prod_j e^{-(\beta \hbar / 2) \omega_j \hat{\sigma}_{z,j}^{(R)}} \right] &= \text{tr}_{R_j} \left[e^{-(\beta \hbar / 2) \omega_j \hat{\sigma}_{z,j}^{(R)}} \right] \\ &= \langle g_j | e^{-(\beta \hbar / 2) \omega_j \hat{\sigma}_{z,j}^{(R)}} | g_j \rangle + \langle e_j | e^{-(\beta \hbar / 2) \omega_j \hat{\sigma}_{z,j}^{(R)}} | e_j \rangle \\ &= e^{(\beta \hbar / 2) \omega_j} + e^{-(\beta \hbar / 2) \omega_j}. \end{aligned} \quad (2.89)$$

onde a base é dada pelos estados $|g_j\rangle$ (fundamental) e $|e_j\rangle$ (excitado).

2.2.3 Equação Mestra para um átomo de dois níveis acoplado a um Reservatório Térmico Fermiônico

Nosso sistema de interesse S será representado por um átomo de dois níveis acoplado a um reservatório fermiônico (reservatório R). O hamiltoniano para o sistema S ,

$$\hat{\mathcal{H}}_S = \frac{\hbar}{2} \omega_0 \hat{\sigma}_z^{(S)}. \quad (2.90)$$

O hamiltoniano de interação $S \otimes R$ será escrito como,

$$\hat{\mathcal{H}}_{SR} = \hbar \sum_j \left[\kappa_j^* \hat{\sigma}_-^{(S)} \hat{\sigma}_{+,j}^{(R)} + \kappa_j \hat{\sigma}_+^{(S)} \hat{\sigma}_{-,j}^{(R)} \right] \quad (2.91)$$

³Todos os cálculos envolvendo os operadores $\hat{\sigma}_+$, $\hat{\sigma}_-$ e $\hat{\sigma}_z$ estão feitos em detalhes no Apêndice A.

sendo, κ_j uma constante de acoplamento, $\hat{\sigma}_+$ ($\hat{\sigma}_-$) são os operadores de levantamento (abaixamento) para o sistema de dois níveis.

A identificação com a Eq.(2.20) se dá ao fazermos as seguintes substituições,

$$\hat{s}_1 = \hat{\sigma}_-^{(S)}, \quad (2.92)$$

$$\hat{s}_2 = \hat{\sigma}_+^{(S)} = \hat{s}_1^\dagger, \quad (2.93)$$

$$\hat{\Gamma}_1 = \sum_j \kappa_j^* \hat{\sigma}_{+,j}^{(R)}, \quad (2.94)$$

$$\hat{\Gamma}_2 = \sum_j \kappa_j \hat{\sigma}_{-,j}^{(R)} = \hat{\Gamma}_1^\dagger. \quad (2.95)$$

Na representação de interação,

$$\hat{s}_1(t) = e^{i[\omega_0\sigma_z^{(S)}/2]t} \hat{\sigma}_-^{(S)} e^{-i[\omega_0\sigma_z^{(S)}/2]t} = \hat{\sigma}_-^{(S)} e^{-i\omega_0 t}, \quad (2.96)$$

$$\hat{s}_2(t) = e^{i[\omega_0\sigma_z^{(S)}/2]t} \hat{\sigma}_+^{(S)} e^{-i[\omega_0\sigma_z^{(S)}/2]t} = \hat{\sigma}_+^{(S)} e^{i\omega_0 t}, \quad (2.97)$$

$$\hat{\Gamma}_1(t) = \hat{\Gamma}_1^\dagger(t) = e^{i\sum_l [\omega_l \hat{\sigma}_{z,l}^{(R)}/2]t} \sum_j \kappa_j^* \hat{\sigma}_{+,j}^{(R)} e^{-i\sum_l [\omega_l \hat{\sigma}_{z,l}^{(R)}/2]t} = \sum_j \kappa_j^* \hat{\sigma}_{+,j}^{(R)} e^{i\omega_j t}, \quad (2.98)$$

$$\hat{\Gamma}_2(t) = \hat{\Gamma}_2(t) = \sum_j \kappa_j \hat{\sigma}_{-,j}^{(R)} e^{-i\omega_j t}. \quad (2.99)$$

Substituindo as equações (2.95) a (2.98) na Eq.(2.48), encontraremos,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\rho}}(t) = & - \int_0^t dt' \left\{ \left[\hat{\sigma}_-^{(S)} \hat{\sigma}_-^{(S)} \hat{\rho}(t') - \hat{\sigma}_-^{(S)} \hat{\rho}(t') \hat{\sigma}_-^{(S)} \right] e^{-i\omega_0(t+t')} \langle \hat{\Gamma}_1^\dagger(t) \hat{\Gamma}_1(t') \rangle_R + \text{h.c.} + \right. \\ & + \left[\hat{\sigma}_-^{(S)} \hat{\sigma}_+^{(S)} \hat{\rho}(t') - \hat{\sigma}_+^{(S)} \hat{\rho}(t') \hat{\sigma}_-^{(S)} \right] e^{-i\omega_0(t-t')} \langle \hat{\Gamma}_1^\dagger(t) \hat{\Gamma}_1(t') \rangle_R + \text{h.c.} + \\ & + \left[\hat{\sigma}_+^{(S)} \hat{\sigma}_-^{(S)} \hat{\rho}(t') - \hat{\sigma}_-^{(S)} \hat{\rho}(t') \hat{\sigma}_+^{(S)} \right] e^{i\omega_0(t-t')} \langle \hat{\Gamma}_1(t) \hat{\Gamma}_1^\dagger(t') \rangle_R + \text{h.c.} + \\ & \left. + \left[\hat{\sigma}_+^{(S)} \hat{\sigma}_+^{(S)} \hat{\rho}(t') - \hat{\sigma}_+^{(S)} \hat{\rho}(t') \hat{\sigma}_+^{(S)} \right] e^{i\omega_0(t+t')} \langle \hat{\Gamma}_1(t) \hat{\Gamma}_1^\dagger(t') \rangle_R + \text{h.c.} \right\}. \quad (2.100) \end{aligned}$$

Similarmente ao caso do reservatório bosônico encontraremos agora,

$$\langle \hat{\Gamma}(t) \hat{\Gamma}(t') \rangle_R = \sum_{j,l} \kappa_j \kappa_l e^{-i\omega_j t} e^{-i\omega_l t'} \text{tr}_R \left[\hat{\sigma}_{-,j}^{(R)} \hat{\sigma}_{-,l}^{(R)} \hat{R}_0 \right] = 0, \quad (2.101)$$

$$\langle \hat{\Gamma}^\dagger(t) \hat{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R = \sum_{j,l} \kappa_j^* \kappa_l^* e^{i\omega_j t} e^{i\omega_l t'} \text{tr}_R \left[\hat{\sigma}_{+,j}^{(R)} \hat{\sigma}_{+,l}^{(R)} \hat{R}_0 \right] = 0, \quad (2.102)$$

$$\langle \hat{\Gamma}^\dagger(t) \hat{\Gamma}(t') \rangle_R = \sum_j |\kappa_j|^2 e^{i\omega_j(t-t')} \bar{n}(\omega_j, \beta), \quad (2.103)$$

$$\langle \hat{\Gamma}(t) \hat{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R = \sum_j |\kappa_j|^2 e^{-i\omega_j(t-t')} [1 - \bar{n}(\omega_j, \beta)], \quad (2.104)$$

com

$$\mathrm{tr}_R \left[\hat{\sigma}_{+,j}^{(R)} \hat{\sigma}_{-,l}^{(R)} \hat{R}_0 \right] = \bar{n}(\omega_j, \beta) \delta_{j,l}, \quad (2.105)$$

e

$$\mathrm{tr}_R \left[\hat{\sigma}_{-,j}^{(R)} \hat{\sigma}_{+,l}^{(R)} \hat{R}_0 \right] = [1 - \bar{n}(\omega_j, \beta)] \delta_{j,l}, \quad (2.106)$$

onde,

$$\bar{n}(\omega_j, \beta) = \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega_j} + 1}, \quad (2.107)$$

é o número médio de estados na estatística de Fermi-Dirac [37, 61] (que já era esperado por se tratar de um sistema fermiônico).

Substituindo as Eqs.((2.88)-(2.91)) na Eq.(2.100), a equação mestra resultará em,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\rho}}(t) = & - \int_0^t dt' \left\{ \left[\hat{\sigma}_-^{(S)} \hat{\sigma}_+^{(S)} \hat{\rho}(t') - \hat{\sigma}_+^{(S)} \hat{\rho}(t') \hat{\sigma}_-^{(S)} \right] e^{-i\omega_0(t-t')} \langle \hat{\Gamma}^\dagger(t) \hat{\Gamma}(t') \rangle_R + \text{h.c.} + \right. \\ & \left. + \left[\hat{\sigma}_+^{(S)} \hat{\sigma}_-^{(S)} \hat{\rho}(t') - \hat{\sigma}_-^{(S)} \hat{\rho}(t') \hat{\sigma}_+^{(S)} \right] e^{i\omega_0(t-t')} \langle \hat{\Gamma}(t) \hat{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R + \text{h.c.} \right\}. \end{aligned} \quad (2.108)$$

que pode ser escrita,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\rho}}(t) = & - \int_0^t d\tau \left\{ \left[\hat{\sigma}_-^{(S)} \hat{\sigma}_+^{(S)} \hat{\rho}(t-\tau) - \hat{\sigma}_+^{(S)} \hat{\rho}(t-\tau) \hat{\sigma}_-^{(S)} \right] e^{-i\omega_0\tau} \langle \hat{\Gamma}^\dagger(t) \hat{\Gamma}(t-\tau) \rangle_R + \text{h.c.} + \right. \\ & \left. + \left[\hat{\sigma}_+^{(S)} \hat{\sigma}_-^{(S)} \hat{\rho}(t-\tau) - \hat{\sigma}_-^{(S)} \hat{\rho}(t-\tau) \hat{\sigma}_+^{(S)} \right] e^{i\omega_0\tau} \langle \hat{\Gamma}(t) \hat{\Gamma}^\dagger(t-\tau) \rangle_R + \text{h.c.} \right\}, \end{aligned} \quad (2.109)$$

sendo,

$$\langle \hat{\Gamma}^\dagger(t) \hat{\Gamma}(t-\tau) \rangle_R = \int_0^{+\infty} d\omega e^{i(\omega-\omega_0)\tau} g(\omega) |\kappa(\omega)|^2 \bar{n}(\omega, \beta), \quad (2.110)$$

$$\langle \hat{\Gamma}(t) \hat{\Gamma}^\dagger(t-\tau) \rangle_R = \int_0^{+\infty} d\omega e^{-i(\omega-\omega_0)\tau} g(\omega) |\kappa(\omega)|^2 [1 - \bar{n}(\omega, \beta)]. \quad (2.111)$$

usaremos agora o complexo das variáveis α e β , e os mesmos Δ , Δ' , $\gamma/2$ da seção (2.1.1), substituindo estes resultados na Eq.(2.109) encontraremos,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\rho}}(t) = & \left(\frac{\gamma}{2} - i\Delta \right) \left[\hat{\sigma}_-^{(S)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_+^{(S)} - \hat{\rho} \hat{\sigma}_+^{(S)} \hat{\sigma}_-^{(S)} \right] + \left(\frac{\gamma}{2} + i\Delta \right) \left[\hat{\sigma}_-^{(S)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_+^{(S)} - \hat{\sigma}_+^{(S)} \hat{\sigma}_-^{(S)} \hat{\rho} \right] + \\ & + \left(\frac{\gamma}{2} \bar{n} - i\Delta' \right) \left[\hat{\sigma}_+^{(S)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_-^{(S)} - \hat{\sigma}_-^{(S)} \hat{\sigma}_+^{(S)} \hat{\rho} + \hat{\rho} \hat{\sigma}_+^{(S)} \hat{\sigma}_-^{(S)} - \hat{\sigma}_-^{(S)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_+^{(S)} \right] + \\ & + \left(\frac{\gamma}{2} \bar{n} + i\Delta' \right) \left[\hat{\sigma}_+^{(S)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_-^{(S)} - \hat{\rho} \hat{\sigma}_-^{(S)} \hat{\sigma}_+^{(S)} + \hat{\sigma}_+^{(S)} \hat{\sigma}_-^{(S)} \hat{\rho} - \hat{\sigma}_-^{(S)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_+^{(S)} \right]. \end{aligned} \quad (2.112)$$

desenvolvendo um pouco mais,

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\rho}}(t) &= \gamma\hat{\sigma}_-\hat{\rho}\hat{\sigma}_+ - \frac{\gamma}{2}\left(\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\right) - i\Delta\left(\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\right) + \\ &+ \gamma\bar{n}\hat{\sigma}_+\hat{\rho}\hat{\sigma}_- - \frac{\gamma}{2}\bar{n}\left(\hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+\right) + \frac{\gamma}{2}\bar{n}\left(\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\right) - \\ &- \gamma\bar{n}\hat{\sigma}_-\hat{\rho}\hat{\sigma}_+ + i\Delta'\left(\hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+\right) + i\Delta'\left(\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\right),\end{aligned}\quad (2.113)$$

e sabendo que $\{\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_-\} = \hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- + \hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+ = 1$, chegamos em

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\rho}}(t) &= -i\Delta\left[\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-, \hat{\rho}\right] + \frac{\gamma}{2}\left(2\hat{\sigma}_-\hat{\rho}\hat{\sigma}_+ - \hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\right) + \\ &+ \frac{\gamma}{2}\bar{n}\left[\hat{\sigma}_+\hat{\rho}\hat{\sigma}_- - (1 - \hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-)\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- - \hat{\sigma}_-\hat{\rho}\hat{\sigma}_+\right] + \\ &+ \frac{\gamma}{2}\bar{n}\left[\hat{\sigma}_+\hat{\rho}\hat{\sigma}_- - \hat{\rho}\hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+ + (1 - \hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+)\hat{\rho} - \hat{\sigma}_-\hat{\rho}\hat{\sigma}_+\right].\end{aligned}\quad (2.114)$$

e finalmente,

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\rho}}(t) &= -i\Delta\left[\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-, \hat{\rho}(t)\right] + \frac{\gamma}{2}\left[2\hat{\sigma}_-\hat{\rho}(t)\hat{\sigma}_+ - \hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t)\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\right] + \\ &+ \gamma\bar{n}\left[\hat{\sigma}_+\hat{\rho}(t)\hat{\sigma}_- - \hat{\sigma}_-\hat{\rho}(t)\hat{\sigma}_+ - \hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+\hat{\rho}(t) + \hat{\rho}(t)\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\right].\end{aligned}\quad (2.115)$$

Usando o hamiltoniano encontrado na Eq.(2.90) e a Eq.(2.73), temos a equação mestra para o reservatório térmico fermiônico na representação de Schrödinger,

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\rho}} &= -i\omega'_0\left[\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-, \hat{\rho}\right] + \frac{\gamma}{2}\left[2\hat{\sigma}_-\hat{\rho}\hat{\sigma}_+ - \hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\right] + \\ &+ \gamma\bar{n}\left[\hat{\sigma}_+\hat{\rho}\hat{\sigma}_- - \hat{\sigma}_-\hat{\rho}\hat{\sigma}_+ - \hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\right],\end{aligned}\quad (2.116)$$

sendo $\omega'_0 = \omega_0 + \Delta$.

Assim como fizemos para o reservatório bosônico podemos escrever a equação mestra na representação de Schrödinger de uma forma mais usual segue,

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\rho}} &= -i\omega'_0\left[\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-, \hat{\rho}\right] + \frac{\gamma}{2}\left[2\hat{\sigma}_-\hat{\rho}\hat{\sigma}_+ - \hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\right] + \\ &+ \frac{\gamma}{2}\bar{n}\left[2\hat{\sigma}_+\hat{\rho}\hat{\sigma}_- - 2\hat{\sigma}_-\hat{\rho}\hat{\sigma}_+ - (1 - \hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-)\hat{\rho} - \hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+\hat{\rho} + \hat{\rho}(1 - \hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+) + \hat{\rho}\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\right] \\ &= -i\omega'_0\left[\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-, \hat{\rho}\right] + \frac{\gamma}{2}\left[2\hat{\sigma}_-\hat{\rho}\hat{\sigma}_+ - \hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\right] - \\ &- \frac{\gamma}{2}\bar{n}\left[2\hat{\sigma}_-\hat{\rho}\hat{\sigma}_+ - \hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\right] + \frac{\gamma}{2}\bar{n}\left[2\hat{\sigma}_+\hat{\rho}\hat{\sigma}_- - \hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+\right]\end{aligned}\quad (2.117)$$

Finalmente encontraremos que,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\rho}} &= -i\omega'_0 [\hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_-, \hat{\rho}] + \frac{\gamma}{2} (1 - \bar{n}) [2\hat{\sigma}_- \hat{\rho} \hat{\sigma}_+ - \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_- \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{\sigma}_+ \hat{\sigma}_-] + \\ &+ \frac{\gamma}{2} \bar{n} [2\hat{\sigma}_+ \hat{\rho} \hat{\sigma}_- - \hat{\sigma}_- \hat{\sigma}_+ \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{\sigma}_- \hat{\sigma}_+]. \end{aligned} \quad (2.118)$$

2.2.4 Reservatório Térmico de Vácuo Comprimido

Considere um sistema quântico S interagindo com um reservatório térmico de vácuo comprimido R . Nosso sistema S será de um átomo de dois níveis interagindo com um reservatório de vácuo comprimido. O operador de estado para o reservatório será escrito por,

$$\begin{aligned} \hat{R}_0 &= |\xi\rangle\langle\xi| \\ &= \prod_j \hat{S}_j(\xi) |0_j\rangle\langle 0_j| \hat{S}_j^\dagger(\xi) \end{aligned} \quad (2.119)$$

no qual $\hat{S}_j(\xi)$ é chamado de operador de compressão descrito por [63],

$$\hat{S}_j(\xi) = \exp\left(\xi^* \hat{b}_j \hat{b}_j - \xi \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j^\dagger\right) \quad (2.120)$$

sendo $\xi = r e^{i\theta}$, r é fator de compressão e θ o ângulo associado a direção de compressão, \hat{b}_j e \hat{b}_j^\dagger são os operadores de destruição e aniquilação, respectivamente. É simples mostrar que [64],

$$\hat{S}_j^\dagger(\xi) = \hat{S}_j^{-1}(\xi) = \hat{S}_j(-\xi) \quad (2.121)$$

As propriedades das transformações unitárias do operador de compressão atuando nos operadores \hat{b}_j e \hat{b}_j^\dagger são as seguintes⁴,

$$\hat{S}_j^\dagger(\xi) \hat{b}_j \hat{S}_j(\xi) = \hat{b}_j \cosh(r) - \hat{b}_j^\dagger e^{i\theta} \sinh(r), \quad (2.122)$$

$$\hat{S}_j^\dagger(\xi) \hat{b}_j^\dagger \hat{S}_j(\xi) = \hat{b}_j^\dagger \cosh(r) - \hat{b}_j e^{-i\theta} \sinh(r). \quad (2.123)$$

⁴Tais propriedades são obtidas fazendo uso do *lema de Baker-Hausdorff* [59],

$$e^{i\hat{G}\lambda} \hat{A} e^{-i\hat{G}\lambda} = \hat{A} + i\lambda [\hat{G}, \hat{A}] + \left(\frac{i^2 \lambda^2}{2!}\right) [\hat{G}, [\hat{G}, \hat{A}]] + \dots + \left(\frac{i^n \lambda^n}{n!}\right) [\hat{G}, [\hat{G}, [\hat{G}, \dots [\hat{G}, \hat{A}]] \dots]] + \dots,$$

O hamiltoniano total será escrito por [65],

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_S + \hat{\mathcal{H}}_R + \hat{\mathcal{H}}_{SR} \quad (2.124)$$

$$= \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_z^{(S)} + \hbar \sum_j \left(\omega_j \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j + \frac{1}{2} \right) + \hbar \sum_j \kappa_j \left(\hat{\sigma}_-^{(S)} \hat{b}_j^\dagger + \hat{\sigma}_+^{(S)} \hat{b}_j \right) \quad (2.125)$$

onde κ_j é uma constante de acoplamento e $\hat{\sigma}_+$ ($\hat{\sigma}_-$), são os operadores de levantamento (abaiamento).

Podemos comparar o hamiltoniano dado pela Eq.(2.124) com aquele escrito na Eq.(2.19) se fizermos as seguintes substituições,

$$\hat{s}_1 = \hat{\sigma}_-^{(S)}, \quad (2.126)$$

$$\hat{s}_2 = \hat{\sigma}_+^{(S)} = \hat{s}_1^\dagger, \quad (2.127)$$

$$\hat{\Gamma}_1 = \sum_j \kappa_j \hat{b}_j^\dagger = \hat{\Gamma}^\dagger \quad (2.128)$$

$$\hat{\Gamma}_2 = \sum_j \kappa_j \hat{b}_j = \hat{\Gamma}_1^\dagger = \hat{\Gamma}. \quad (2.129)$$

Tais operadores na representação de interação serão dados por,

$$\hat{s}_1(t) = e^{i[\omega_0\sigma_z^{(S)}/2]t} \hat{\sigma}_-^{(S)} e^{-i[\omega_0\sigma_z^{(S)}/2]t} = \hat{\sigma}_-^{(S)} e^{-i\omega_0 t}, \quad (2.130)$$

$$\hat{s}_2(t) = e^{i[\omega_0\sigma_z^{(S)}/2]t} \hat{\sigma}_+^{(S)} e^{-i[\omega_0\sigma_z^{(S)}/2]t} = \hat{\sigma}_+^{(S)} e^{i\omega_0 t}, \quad (2.131)$$

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_1(t) &= \hat{\Gamma}^\dagger(t) = e^{i\sum_n \omega_n \hat{b}_n^\dagger \hat{b}_n t} \sum_j \kappa_j \hat{b}_j^\dagger e^{-i\sum_m \omega_m \hat{b}_m^\dagger \hat{b}_m t} \\ &= \sum_j \kappa_j \hat{b}_j^\dagger e^{i\omega_j t}, \end{aligned} \quad (2.132)$$

$$\hat{\Gamma}_2(t) = \hat{\Gamma}(t) = \sum_j \kappa_j \hat{b}_j e^{-i\omega_j t}. \quad (2.133)$$

Substituindo as Eqs.(2.113)-(2.116) na Eq.(2.48) encontraremos,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\rho}}(t) &= - \int_0^t dt' \left\{ \left[\hat{\sigma}_-^{(S)} \hat{\sigma}_-^{(S)} \hat{\rho}(t') - \hat{\sigma}_-^{(S)} \hat{\rho}(t') \hat{\sigma}_-^{(S)} \right] e^{-i\omega_0(t+t')} \langle \hat{\Gamma}^\dagger(t) \hat{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R + \text{h.c.} + \right. \\ &+ \left[\hat{\sigma}_-^{(S)} \hat{\sigma}_+^{(S)} \hat{\rho}(t') - \hat{\sigma}_+^{(S)} \hat{\rho}(t') \hat{\sigma}_-^{(S)} \right] e^{-i\omega_0(t-t')} \langle \hat{\Gamma}^\dagger(t) \hat{\Gamma}(t') \rangle_R + \text{h.c.} + \\ &+ \left[\hat{\sigma}_+^{(S)} \hat{\sigma}_-^{(S)} \hat{\rho}(t') - \hat{\sigma}_-^{(S)} \hat{\rho}(t') \hat{\sigma}_+^{(S)} \right] e^{i\omega_0(t-t')} \langle \hat{\Gamma}(t) \hat{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R + \text{h.c.} + \\ &+ \left. \left[\hat{\sigma}_+^{(S)} \hat{\sigma}_+^{(S)} \hat{\rho}(t') - \hat{\sigma}_+^{(S)} \hat{\rho}(t') \hat{\sigma}_+^{(S)} \right] e^{i\omega_0(t+t')} \langle \hat{\Gamma}(t) \hat{\Gamma}(t') \rangle_R + \text{h.c.} \right\}. \end{aligned} \quad (2.134)$$

onde novamente as funções de correlação do reservatório serão dadas explicitamente (ver Apêndice B) por [64],

$$\begin{aligned}\langle \hat{\Gamma}^\dagger(t) \hat{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R &= - \sum_{j,l} \kappa_j \kappa_l e^{i\omega_j t} e^{i\omega_l t'} \text{tr}_R \left(\hat{R}_0 \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_l^\dagger \right) \\ &= - \sum_{j,l} \kappa_j \kappa_l e^{i\omega_j t} e^{i\omega_l t'} e^{-i\theta} \cosh(r) \sinh(r) \delta_{j,l},\end{aligned}\quad (2.135)$$

$$\begin{aligned}\langle \hat{\Gamma}(t) \hat{\Gamma}(t') \rangle_R &= - \sum_{j,l} \kappa_j \kappa_l e^{-i\omega_j t} e^{-i\omega_l t'} \text{tr}_R \left(\hat{R}_0 \hat{b}_j \hat{b}_l \right) \\ &= - \sum_{j,l} \kappa_j \kappa_l e^{i\omega_j t} e^{i\omega_l t'} e^{i\theta} \cosh(r) \sinh(r) \delta_{j,l},\end{aligned}\quad (2.136)$$

$$\begin{aligned}\langle \hat{\Gamma}^\dagger(t) \hat{\Gamma}(t') \rangle_R &= \sum_{j,l} \kappa_j \kappa_l e^{i\omega_j t} e^{-i\omega_l t'} \text{tr}_R \left(\hat{R}_0 \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_l \right) \\ &= \sum_{j,l} \kappa_j \kappa_l e^{i\omega_j t} e^{-i\omega_l t'} \sinh^2(r) \delta_{j,l},\end{aligned}\quad (2.137)$$

$$\begin{aligned}\langle \hat{\Gamma}(t) \hat{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R &= \sum_{j,l} \kappa_j \kappa_l e^{-i\omega_j t} e^{i\omega_l t'} \text{tr}_R \left(\hat{R}_0 \hat{b}_j \hat{b}_l^\dagger \right) \\ &= \sum_{j,l} \kappa_j \kappa_l e^{-i\omega_j t} e^{i\omega_l t'} \cosh^2(r) \delta_{j,l}.\end{aligned}\quad (2.138)$$

Fazendo a mesma abordagem como mostrada nas seções anteriores, onde mudamos as somas sobre os osciladores do reservatório por uma integração através da introdução de uma densidade de estados $g(\omega)$, onde novamente $g(\omega)d\omega$ informa o número de osciladores com frequência no intervalo ω a $\omega + d\omega$. Fazendo a seguinte mudança de variável,

$$\tau = t - t' \quad \Longleftrightarrow \quad t' = t - \tau. \quad (2.139)$$

Assim a Eq.(2.135) poderá ser escrita como,

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\rho}}(t) &= - \int_0^t d\tau \left\{ \left[\hat{\sigma}_-^{(S)} \hat{\sigma}_-^{(S)} \hat{\rho}(t - \tau) - \hat{\sigma}_-^{(S)} \hat{\rho}(t - \tau) \hat{\sigma}_-^{(S)} \right] e^{-i\omega_0(2t-\tau)} \langle \hat{\Gamma}^\dagger(t) \hat{\Gamma}^\dagger(t - \tau) \rangle_R + \text{h.c.} + \right. \\ &+ \left[\hat{\sigma}_-^{(S)} \hat{\sigma}_+^{(S)} \hat{\rho}(t - \tau) - \hat{\sigma}_+^{(S)} \hat{\rho}(t - \tau) \hat{\sigma}_-^{(S)} \right] e^{-i\omega_0\tau} \langle \hat{\Gamma}^\dagger(t) \hat{\Gamma}(t - \tau) \rangle_R + \text{h.c.} + \\ &+ \left[\hat{\sigma}_+^{(S)} \hat{\sigma}_-^{(S)} \hat{\rho}(t - \tau) - \hat{\sigma}_-^{(S)} \hat{\rho}(t - \tau) \hat{\sigma}_+^{(S)} \right] e^{i\omega_0\tau} \langle \hat{\Gamma}(t) \hat{\Gamma}^\dagger(t - \tau) \rangle_R + \text{h.c.} + \\ &+ \left. \left[\hat{\sigma}_+^{(S)} \hat{\sigma}_+^{(S)} \hat{\rho}(t - \tau) - \hat{\sigma}_+^{(S)} \hat{\rho}(t - \tau) \hat{\sigma}_+^{(S)} \right] e^{i\omega_0(2t-\tau)} \langle \hat{\Gamma}(t) \hat{\Gamma}(t - \tau) \rangle_R + \text{h.c.} \right\}.\end{aligned}\quad (2.140)$$

Tendo agora que,

$$\langle \hat{\Gamma}^\dagger(t) \hat{\Gamma}^\dagger(t - \tau) \rangle_R = - \int_0^{+\infty} d\omega e^{i\omega(2t-\tau)} g(\omega) \kappa^2(\omega) e^{-i\theta} \cosh(r) \sinh(r), \quad (2.141)$$

$$\langle \hat{\Gamma}(t) \hat{\Gamma}(t - \tau) \rangle_R = - \int_0^{+\infty} d\omega e^{-i\omega(2t-\tau)} g(\omega) \kappa^2(\omega) e^{i\theta} \cosh(r) \sinh(r), \quad (2.142)$$

$$\langle \hat{\Gamma}^\dagger(t) \hat{\Gamma}(t - \tau) \rangle_R = \int_0^{+\infty} d\omega e^{i\omega\tau} g(\omega) \kappa^2(\omega) \sinh^2(r), \quad (2.143)$$

$$\langle \hat{\Gamma}(t) \hat{\Gamma}^\dagger(t - \tau) \rangle_R = \int_0^{+\infty} d\omega e^{-i\omega\tau} g(\omega) \kappa^2(\omega) \cosh^2(r). \quad (2.144)$$

Substituindo as Eqs.(2.124)-(2.127) dentro da Eq.(2.109) e fazendo as seguintes substituições,

$$\alpha = \int_0^t d\tau \int_0^{+\infty} d\omega e^{-i(\omega-\omega_0)\tau} g(\omega) \kappa^2(\omega) \quad (2.145)$$

$$\beta = \int_0^t d\tau \int_0^{+\infty} d\omega e^{-i(\omega-\omega_0)\tau} \tilde{n}(\omega, t) g(\omega) \kappa^2(\omega) \quad (2.146)$$

sendo,

$$\tilde{n}(\omega, t) = e^{2i(\omega-\omega_0)t} \quad (2.147)$$

De forma análoga ao que fora feito no Apêndice C encontramos que,

$$\alpha = \pi g(\omega_0) k^2(\omega_0) + i\Delta = \frac{\gamma}{2} + i\Delta, \quad (2.148)$$

$$\beta = \pi g(\omega_0) k^2(\omega_0) \tilde{n}(\omega_0, t) + i\Delta' = \frac{\gamma}{2} + i\Delta'. \quad (2.149)$$

Substituindo estes resultados na Eq.(2.140) encontraremos finalmente que⁵,

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\rho}}(t) &= -i\Delta[\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-, \hat{\rho}(t)] [\cosh^2(r) + \sinh^2(r)] - \\
&- \frac{\gamma}{2} \left[\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\hat{\rho}(t) - 2\hat{\sigma}_-\hat{\rho}(t)\hat{\sigma}_+ + \hat{\rho}(t)\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- \right] \cosh^2(r) - \\
&- \frac{\gamma}{2} \left[\hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+\hat{\rho}(t) - 2\hat{\sigma}_+\hat{\rho}(t)\hat{\sigma}_- + \hat{\rho}(t)\hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+ \right] \sinh^2(r) - \\
&- (\gamma + 2i\Delta') \hat{\sigma}_-\hat{\rho}(t)\hat{\sigma}_- e^{-i\theta} \cosh(r) \sinh(r) - \\
&- (\gamma - 2i\Delta') \hat{\sigma}_+\hat{\rho}(t)\hat{\sigma}_+ e^{i\theta} \cosh(r) \sinh(r).
\end{aligned} \tag{2.150}$$

Fazendo as substituições

$$N = \sinh^2(r), \tag{2.151}$$

$$M = -\cosh(r) \sinh(r) e^{-i\theta}. \tag{2.152}$$

e lembrando que as funções hiperbólicas ($\sinh^2(r)$ e $\cosh^2(r)$) se relacionam através da expressão,

$$\cosh^2(r) - \sinh^2(r) = 1. \tag{2.153}$$

Substituindo todos esses resultados na Eq.(2-142) e escrevendo a equação mestra na representação de Schrödinger como nas seções anteriores, agora com $\hat{\mathcal{H}}_S = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\hat{\sigma}_z^{(S)}$, encontraremos,

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\rho}} &= -i\omega'_0[\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-, \hat{\rho}] + \frac{\gamma}{2} (N + 1) [2\hat{\sigma}_-\hat{\rho}\hat{\sigma}_+ - \hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-] + \\
&+ \frac{\gamma}{2} N [2\hat{\sigma}_+\hat{\rho}\hat{\sigma}_- - \hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+] - \\
&+ (\gamma + 2i\Delta') M \hat{\sigma}_-\hat{\rho}\hat{\sigma}_- + (\gamma - 2i\Delta') M^* \hat{\sigma}_+\hat{\rho}\hat{\sigma}_+,
\end{aligned} \tag{2.154}$$

onde $\omega'_0 = \omega_0 + \Delta(1 + 2N)$.

Esta equação descreve a evolução do campo em uma cavidade acoplada através de um espelho parcialmente transmissor a um campo externo que é o estado de vácuo comprimido.

Os parâmetros M e N se relacionam um ao outro da seguinte maneira $|M|^2 = N(N + 1)$.

⁵Para chegarmos nesta expressão usamos o fato de que,

$$\hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_- = \hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_+ = 0.$$

No caso particular quando $r \Rightarrow 0$ que corresponde a uma compressão nula a Eq.(2.150) será a equação para um átomo dentro de um reservatório térmico com temperatura igual a zero. Ou seja,

$$\hat{\rho} = -i\omega'_0[\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-, \hat{\rho}] + \frac{\gamma}{2}(2\hat{\sigma}_-\hat{\rho}\hat{\sigma}_+ - \hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-), \quad (2.155)$$

que basicamente é a mesma Eq.(2.113) obtida para um número médio de fótons térmicos \bar{n} igual a zero,

$$\bar{n}(\omega_j, T) = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega_j}{k_B T}} + 1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T \Rightarrow 0. \quad (2.156)$$

2.3 Fock comprimido

Para o caso Fock comprimido basta mudarmos a base de vácuo $|0_j\rangle$ para a base de Fock (ou de número) $|n_j\rangle$, as funções de correlação serão dadas por,

$$\langle \hat{\Gamma}^\dagger(t)\hat{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R = - \sum_{j,l} \kappa_j \kappa_l e^{i\omega_j t} e^{i\omega_l t'} (1 + 2n_j) e^{-i\theta} \cosh(r) \sinh(r) \delta_{j,l}, \quad (2.157)$$

$$\langle \hat{\Gamma}(t)\hat{\Gamma}(t') \rangle_R = - \sum_{j,l} \kappa_j \kappa_l e^{i\omega_j t} e^{i\omega_l t'} (1 + 2n_j) e^{i\theta} \cosh(r) \sinh(r) \delta_{j,l}, \quad (2.158)$$

$$\langle \hat{\Gamma}^\dagger(t)\hat{\Gamma}(t') \rangle_R = \sum_{j,l} \kappa_j \kappa_l e^{i\omega_j t} e^{-i\omega_l t'} \left\{ \sinh^2(r) + n_j [\sinh^2(r) + \cosh^2(r)] \right\} \delta_{j,l}, \quad (2.159)$$

$$\langle \hat{\Gamma}(t)\hat{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R = \sum_{j,l} \kappa_j \kappa_l e^{-i\omega_j t} e^{i\omega_l t'} \left\{ \cosh^2(r) + n_j [\sinh^2(r) + \cosh^2(r)] \right\} \delta_{j,l}. \quad (2.160)$$

que podem ser escritas em termos da densidade de estado como,

$$\langle \hat{\Gamma}^\dagger(t)\hat{\Gamma}^\dagger(t-\tau) \rangle_R = - \int_0^{+\infty} d\omega e^{i\omega(2t-\tau)} g(\omega) \kappa^2(\omega) (1 + 2n_j) e^{-i\theta} \cosh(r) \sinh(r), \quad (2.161)$$

$$\langle \hat{\Gamma}(t)\hat{\Gamma}(t-\tau) \rangle_R = - \int_0^{+\infty} d\omega e^{-i\omega(2t-\tau)} g(\omega) \kappa^2(\omega) (1 + 2n_j) e^{i\theta} \cosh(r) \sinh(r), \quad (2.162)$$

$$\langle \hat{\Gamma}^\dagger(t)\hat{\Gamma}(t-\tau) \rangle_R = \int_0^{+\infty} d\omega e^{i\omega\tau} g(\omega) \kappa^2(\omega) \left\{ \sinh^2(r) + n_j [\sinh^2(r) + \cosh^2(r)] \right\}, \quad (2.163)$$

$$\langle \hat{\Gamma}(t)\hat{\Gamma}^\dagger(t-\tau) \rangle_R = \int_0^{+\infty} d\omega e^{-i\omega\tau} g(\omega) \kappa^2(\omega) \left\{ \cosh^2(r) + n_j [\sinh^2(r) + \cosh^2(r)] \right\} \quad (2.164)$$

Substituindo as funções de correlação Eqs.(2.156)-(2.159) na Eq.(2.129), encontraremos a equação mestra para o estado de Fock comprimido na representação de interação como,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\rho}}(t) = & -i\Delta (2N + 1) (1 + 2n_j) [\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-, \hat{\rho}(t)] + \\ & + \frac{\gamma}{2} \left[(N + 1) + (2N + 1) n_j \right] \left[2\hat{\sigma}_-\hat{\rho}(t)\hat{\sigma}_+ - \hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t)\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- \right] + \\ & + \frac{\gamma}{2} \left[N + (2N + 1) n_j \right] \left[2\hat{\sigma}_+\hat{\rho}(t)\hat{\sigma}_- - \hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t)\hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+ \right] - \\ & + M (\gamma + 2i\Delta') (1 + 2n_j) \hat{\sigma}_-\hat{\rho}(t)\hat{\sigma}_- + M^* (\gamma - 2i\Delta') (1 + 2n_j) \hat{\sigma}_+\hat{\rho}(t)\hat{\sigma}_+, \end{aligned} \quad (2.165)$$

que pode ser escrita na representação de Schrödinger da seguinte forma,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\rho}} = & -i\omega'_0[\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-, \hat{\rho}] + \frac{\gamma}{2} \left[(N + 1) + (2N + 1) n_j \right] [2\hat{\sigma}_-\hat{\rho}\hat{\sigma}_+ - \hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\hat{\rho}(t) - \hat{\rho}\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-] + \\ & + \frac{\gamma}{2} \left[N + (2N + 1) n_j \right] [2\hat{\sigma}_+\hat{\rho}\hat{\sigma}_- - \hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+] - \\ & + M (\gamma + 2i\Delta') (1 + 2n_j) \hat{\sigma}_-\hat{\rho}\hat{\sigma}_- + M^* (\gamma - 2i\Delta') (1 + 2n_j) \hat{\sigma}_+\hat{\rho}\hat{\sigma}_+. \end{aligned} \quad (2.166)$$

onde agora teremos $\omega'_0 = \omega_0 + \Delta (2N + 1) (1 + 2n_j)$.

É imediato mostrar que para uma compressão nula ($r \Rightarrow 0$) e $n_j = 0$, recuperaremos a equação para um átomo dentro de um reservatório térmico com temperatura igual a zero, ou seja,

$$\dot{\hat{\rho}} = -i\omega'_0[\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-, \hat{\rho}] + \frac{\gamma}{2} (2\hat{\sigma}_-\hat{\rho}\hat{\sigma}_+ - \hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-). \quad (2.167)$$

De forma geral, a equação para a evolução do operador densidade reduzido $\hat{\rho}(t) \equiv \text{tr}_R[\hat{\chi}(t)]$, pode ser colocada na forma da equação mestra de Lindblad, que na representação de Schrödinger é escrita como [66],

$$\dot{\hat{\rho}}(t) = -\frac{i}{\hbar}[\hat{\mathcal{H}}(t), \hat{\rho}(t)] + \sum_n \frac{1}{2} [2C_n\hat{\rho}(t)C_n^\dagger - \hat{\rho}(t)C_n^\dagger C_n - C_n^\dagger C_n\hat{\rho}(t)], \quad (2.168)$$

onde $C_n = \sqrt{\gamma_n}A_n$, são os operadores de colapso, A_n são os operadores através dos quais o reservatório R se une ao sistema S no hamiltoniano de interação $\hat{\mathcal{H}}_{SR}$, γ_n as taxas de decaimento correspondentes. Tal abordagem será vista com mais detalhes no próximo capítulo.

Capítulo 3

Aplicações da Equação Mestra

No presente capítulo mostraremos a aplicação da equação mestra para o reservatório bosônico e fermiônico como abordadas nos artigos recentes que evidenciam a assinatura de resposta negativa em sistemas relativamente comuns, os artigos abordados serão, *Cooling by heating in the quantum optics domain* [1], *Feasible platform to study negative temperatures* [2] e *Negative response with an optical cavity and traveling wave fields* [3].

3.1 *Cooling by Heating* - CBH

O fenômeno denotado por *Cooling by Heating* (tradução livre, Resfriamento por Aquecimento)(CBH) ocorre quando um dado sistema físico diminui sua energia quando se aumenta a temperatura do seu reservatório. Tal ideia foi proposta inicialmente pelos cientistas Mari e Eisert [9], utilizando um esquema baseado em um sistema optico-mecânico. Outro trabalho Cleuren *et al.* [10], foi apresentado o conceito de *cooling*(resfriamento) baseado em um esquema para resfriar um sistema alimentado por fótons. Os detalhes de ambos os trabalhos acima não serão detalhados na presente dissertação por conterem ideias que fogem da nossa proposta.

Para tal sistema que permita ser resfriado pelo aumento da temperatura de seu reservatório, inicialmente é importante notar que todos os sistemas que termalizam com o ambiente não exibirão tal fenômeno (sistemas simples como um átomo de dois níveis ou um simples modo bosônico interagindo com um reservatório térmico não apresentam tal fenômeno) [1]. O CBH vem como o resultado da atuação direta de muitas forças externas que são usadas para tirar

o sistema do equilíbrio térmico com o seu ambiente. Faremos uso do modelo bem conhecido na literatura chamado de modelo de *anti-Jaynes-Cummings generalizado*.

3.2 Modelo anti-Jaynes-Cummings generalizado

No presente trabalho faremos uso de um modelo mais geral do que o modelo de Jaynes-Cummings (JCM) (ver Apêndice A). O modelo conhecido como *modelo anti-Jaynes-Cummings generalizado* (AJCM) [67], consiste basicamente em um íon de dois níveis aprisionado, que oscila entre os estados excitado $|e\rangle$ e fundamental $|g\rangle$ com uma frequência ω_0 e uma frequência de aprisionamento ν (modo bosônico), no regime de acoplamento, onde a frequência de Rabi Ω (que consiste no acoplamento do átomo-bóson) é muito menor do que as frequências de transição atômica e bosônica. Na representação de Schrödinger, o hamiltoniano total para tal sistema poderá ser escrito por [1, 2],

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_S + \hat{\mathcal{H}}_R + \hat{\mathcal{H}}_{SR}(t) \quad (3.1)$$

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z + \nu\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{\Omega}{2}[\hat{\sigma}_-e^{i(k_L\hat{x}+\omega_L t)} + \hat{\sigma}_+e^{-i(k_L\hat{x}+\omega_L t)}], \quad (\hbar = 1). \quad (3.2)$$

sendo Ω (frequência de Rabi) a constante de acoplamento íon-laser ($\Omega \ll \omega_0 \ll \nu$) muito menor que as frequências de transição atômica (ω_0) e bosônica (ν), ω_L é a frequência de condução do laser, $\hat{\sigma}_+$ e $\hat{\sigma}_-$ são operadores de Pauli de levantamento e abaixamento para o sistema iônico de dois níveis, $\hat{\sigma}_z = \hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- - \hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+$, \hat{a} e \hat{a}^\dagger são os operadores de aniquilação e criação no espaço de Fock para o modo bosônico.

Os operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger podem ser escritos em termos dos operadores posição \hat{x} e momento \hat{p} , como,

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\nu}{2\hbar}} \left(\hat{x} + i\frac{\hat{p}}{m\nu} \right), \quad (3.3)$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\nu}{2\hbar}} \left(\hat{x} - i\frac{\hat{p}}{m\nu} \right). \quad (3.4)$$

Podemos encontrar uma expressão para \hat{x} somando \hat{a} e \hat{a}^\dagger como,

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\nu}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) = \frac{1}{\sqrt{2m\nu}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) = \eta_L(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (\hbar = 1) \quad (3.5)$$

onde η_L é o parâmetro de Lamb-Dick [68] definido por,

$$\eta_L = \frac{1}{\sqrt{2m\nu}}. \quad (3.6)$$

Recordando a Eq.(2.7) nosso hamiltoniano de interação será dado por,

$$\hat{\mathcal{H}}_{SR}(t) = \hat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t) = e^{i(\hat{\mathcal{H}}_S + \hat{\mathcal{H}}_R)t} \hat{\mathcal{H}}_{SR}(t) e^{-i(\hat{\mathcal{H}}_S + \hat{\mathcal{H}}_R)t}, \quad (\hbar = 1). \quad (3.7)$$

No limite onde o parâmetro de Lamb-Dick é $\eta_L \ll 1$, note que,

$$e^{ik_L \hat{x}} = e^{i\eta_L(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)} = 1 + i\eta_L(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) - \frac{\eta_L^2}{2!}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 - \dots, \quad (3.8)$$

$$e^{-ik_L \hat{x}} = e^{-i\eta_L(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)} = 1 - i\eta_L(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) - \frac{\eta_L^2}{2!}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 - \dots. \quad (3.9)$$

Assim substituindo $\hat{\mathcal{H}}_S$ e $\hat{\mathcal{H}}_R$ como dados na Eq.(3.1), teremos,

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_{SR}(t) &= \frac{\Omega}{2} \left[e^{i\frac{\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z t} \hat{\sigma}_- e^{-i\frac{\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z t} e^{i\omega_L t} + e^{i\frac{\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z t} \hat{\sigma}_+ e^{-i\frac{\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z t} e^{-i\omega_L t} \right] \\ &+ i\eta_L \frac{\Omega}{2} e^{i\frac{\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z t} \hat{\sigma}_- e^{-i\frac{\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z t} e^{i\nu\hat{a}^\dagger\hat{a}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) e^{-i\nu\hat{a}^\dagger\hat{a}} e^{i\omega_L t} \\ &- i\eta_L \frac{\Omega}{2} e^{i\frac{\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z t} \hat{\sigma}_+ e^{-i\frac{\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z t} e^{i\nu\hat{a}^\dagger\hat{a}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) e^{-i\nu\hat{a}^\dagger\hat{a}} e^{-i\omega_L t} \\ &- \eta_L^2 \frac{\Omega}{4} e^{i\frac{\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z t} \hat{\sigma}_- e^{-i\frac{\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z t} e^{i\nu\hat{a}^\dagger\hat{a}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 e^{-i\nu\hat{a}^\dagger\hat{a}} e^{i\omega_L t} \\ &- \eta_L^2 \frac{\Omega}{4} e^{i\frac{\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z t} \hat{\sigma}_+ e^{-i\frac{\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z t} e^{i\nu\hat{a}^\dagger\hat{a}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 e^{-i\nu\hat{a}^\dagger\hat{a}} e^{-i\omega_L t} \\ &- \dots \end{aligned} \quad (3.10)$$

Lembrando das Eqs.((2.42)-(2.43)) e ((2.95)-(2.96)) teremos que,

$$e^{i\nu\hat{a}^\dagger\hat{a}} \hat{a} e^{-i\nu\hat{a}^\dagger\hat{a}} = \hat{a} e^{-i\nu t}, \quad (3.11)$$

$$e^{i\nu\hat{a}^\dagger\hat{a}} \hat{a}^\dagger e^{-i\nu\hat{a}^\dagger\hat{a}} = \hat{a}^\dagger e^{i\nu t}, \quad (3.12)$$

$$e^{i\frac{\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z t} \hat{\sigma}_- e^{-i\frac{\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z t} = \hat{\sigma}_- e^{-i\omega_0 t}, \quad (3.13)$$

$$e^{i\frac{\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z t} \hat{\sigma}_+ e^{-i\frac{\omega_0}{2}\hat{\sigma}_z t} = \hat{\sigma}_+ e^{i\omega_0 t}. \quad (3.14)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{H}}_{SR}(t) &= \frac{\Omega}{2} [\hat{\sigma}_- e^{i(\omega_L - \omega_0)t} + \hat{\sigma}_+ e^{-i(\omega_L - \omega_0)t}] \\
&+ i\eta_L \frac{\Omega}{2} [\hat{\sigma}_- e^{i(\omega_L - \omega_0)t} (\hat{a} e^{-i\nu t} + \hat{a}^\dagger e^{i\nu t})] \\
&- i\eta_L \frac{\Omega}{2} [\hat{\sigma}_+ e^{-i(\omega_L - \omega_0)t} (\hat{a} e^{-i\nu t} + \hat{a}^\dagger e^{i\nu t})] \\
&- \eta_L^2 \frac{\Omega}{4} [\hat{\sigma}_- e^{i(\omega_L - \omega_0)t} (\hat{a}^2 e^{-2i\nu t} + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} + (\hat{a}^\dagger)^2 e^{2i\nu t})] \\
&- \eta_L^2 \frac{\Omega}{4} [\hat{\sigma}_+ e^{-i(\omega_L - \omega_0)t} (\hat{a}^2 e^{-2i\nu t} + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} + (\hat{a}^\dagger)^2 e^{2i\nu t})] \\
&- \dots - \dots
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Ajustando a frequência ω_L tal que, $\delta = \omega_L - \omega_0 = k\nu$, na ressonância com o íon de dois níveis, encontraremos

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{H}}_{SR}(t) &= \frac{\Omega}{2} (\hat{\sigma}_- e^{i\delta t} + \hat{\sigma}_+ e^{-i\delta t}) \\
&+ i\eta_L \frac{\Omega}{2} [\hat{\sigma}_- \hat{a} e^{i(\delta - \nu)t} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger e^{i(\delta + \nu)t}] - i\eta_L \frac{\Omega}{2} [\hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger e^{-i(\delta - \nu)t} + \hat{\sigma}_+ \hat{a} e^{-i(\delta + \nu)t}] \\
&- \eta_L^2 \frac{\Omega}{4} [\hat{\sigma}_- \hat{a}^2 e^{i(\delta - 2\nu)t} + \hat{\sigma}_- \hat{a}\hat{a}^\dagger e^{i\delta t} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger\hat{a} e^{i\delta t} + (\hat{a}^\dagger)^2 e^{i(\delta + 2\nu)t}] \\
&- \eta_L^2 \frac{\Omega}{4} [\hat{\sigma}_+ (\hat{a}^\dagger)^2 e^{-i(\delta - 2\nu)t} + \hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger\hat{a} e^{-i\delta t} + \hat{\sigma}_+ \hat{a}\hat{a}^\dagger e^{-i\delta t} + \hat{a}^2 e^{-i(\delta + 2\nu)t}] \\
&- \dots - \dots
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Usando a aproximação de onda-girante (ou seja, descartando os termos que oscilam fortemente com o tempo) poderemos remover a dependência temporal de $\hat{\mathcal{H}}_{SR}$, tal que a Eq.(3.16) poderá ser escrita da seguinte forma [1, 2, 68],

$$\hat{\mathcal{H}}_{SR} = \hat{\mathcal{H}}_I = g_k \hat{\sigma}_- \hat{a}^k + g_k^* \hat{\sigma}_+ (\hat{a}^\dagger)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{3.17}$$

Na expressão (3.17), podemos reunir as seguintes interações,

$$\begin{aligned}
\text{Interação } carrier &, \quad \left(\delta = 0, k = 0, g_0 = \frac{\Omega}{2} \right), \\
\text{Primeira } blue \text{ sideband} &, \quad \left(\delta = \nu, k = 1, g_1 = i\eta_L \frac{\Omega}{2} \right), \\
\text{Segunda } blue \text{ sideband} &, \quad \left(\delta = 2\nu, k = 2, g_2 = -\eta_L^2 \frac{\Omega}{4} \right).
\end{aligned}$$

Experimentalmente (3.17) fora modelado para um grande número de sistemas, por exemplo em íons aprisionados [1,68–70], um átomo de dois níveis bombeado por um campo eletromagnético clássico e interagindo com um modo do campo [71], entre muitos outros sistemas. A dinâmica deste modelo para um acoplamento fraco (usando as aproximações de Born e Markov) entre o sistema-reservatório pode ser descrita resolvendo a seguinte equação mestra [1,30] para o hamiltoniano escrito como na Eq.(3.17),

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\rho}}(t) = & -i[\hat{\mathcal{H}}_I, \hat{\rho}] + \kappa(n_{\text{th}} + 1)\hat{\mathcal{D}}[\hat{a}]\hat{\rho} + \kappa n_{\text{th}}\hat{\mathcal{D}}[\hat{a}^\dagger]\hat{\rho} + \\ & + \gamma(m_{\text{th}} + 1)\hat{\mathcal{D}}[\hat{\sigma}_-]\hat{\rho} + \gamma m_{\text{th}}\hat{\mathcal{D}}[\hat{\sigma}_+]\hat{\rho}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

sendo κ e γ as taxas de emissão espontânea para o modo vibracional e os níveis internos do íon, respectivamente, n_{th} é o número médio de fônons do reservatório acoplado ao modo vibracional, m_{th} é o número médio de fótons dos níveis do íon. A atuação do operador $\hat{\mathcal{D}}$ em um operador $\hat{\mathcal{O}}$, qualquer, é dada por [72],

$$\hat{\mathcal{D}}[\hat{\mathcal{O}}]\hat{\rho} \equiv 2\hat{\mathcal{O}}\hat{\rho}\hat{\mathcal{O}}^\dagger - \hat{\mathcal{O}}^\dagger\hat{\mathcal{O}}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{\mathcal{O}}^\dagger\hat{\mathcal{O}}. \quad (3.19)$$

No próximas seções iremos proceder com a solução numérica da equação mestra Eq.(3.26) [31] para obtermos o estado assintótico do sistema (ou seja, $\dot{\hat{\rho}}(t) = 0$ para $t \rightarrow \infty$) com o objetivo de podermos calcular as correspondentes propriedades termodinâmicas. Para podermos fazer isso, é importante notar que a equação mestra pode dar origem a um conjunto infinito de equações diferenciais acopladas para os elementos da matriz densidade de todo o sistema. Para isso devemos truncar a base de Fock (que é infinita) em alguma parte, que depende do número médio de excitações do modo vibracional (devido ao campo de bósons). Essa truncagem depende do número médio de excitações do modo vibracional, ou seja, os elementos de matriz correspondentes aos estados altamente excitados de Fock devem ser virtualmente nulos, isso comparado com o número médio de excitações do modo vibracional. Antes de procedermos o estudo numérico da Eq.(3.26) que fora feito inicialmente por S. M. Tan [73], assumiremos inicialmente que para o reservatório, $n_{\text{th}} = m_{\text{th}} = n$. Usando o hamiltoniano como escrito na Eq.(3.17), podemos observar o efeito CBH, por exemplo, olhando apenas para a variação da

energia interna ou também para a variação da energia vibracional do íon, e para ambas as variações de energia interna e vibracional do íon, iremos discutir abaixo ambas as situações.

Variação da energia interna do íon

Partindo da Eq.(3.26) podemos escolher $k = 0$ *interação Carrier*, onde o hamiltoniano de interação será proporcional a $\hat{\sigma}_x$, que nada mais é do que um simples íon de dois níveis bombeado por um campo clássico. Descartando o modo vibracional no sistema, podemos, sem perda de generalidade, anular a taxa de emissão espontânea ($\kappa = 0$) a energia interna média do íon,

$$E_a = \langle \hat{\mathcal{H}} \rangle = \langle \hat{\mathcal{H}}_S + \hat{\mathcal{H}}_{int} \rangle = \langle \hat{\mathcal{H}}_S \rangle, \quad (3.20)$$

no estado assintótico como função da temperatura do reservatório [1].

Podemos definir a função resposta denotada por C_a , da energia interna, com respeito a temperatura do seu reservatório T ,

$$C_a = \frac{\partial E_a}{\partial T}, \quad (3.21)$$

que basicamente trata-se do calor específico; porém a temperatura é a do reservatório, que é diferente da temperatura efetiva do sistema uma vez que este não esteja em equilíbrio térmico com o seu reservatório. Tendo a solução assintótica para a energia interna E_a , encontraremos que [1],

$$C_a = -2k_B m_{th}(m_{th} + 1) \left[\ln \left(\frac{m_{th} + 1}{m_{th}} \right) \right]^2 \left\{ \frac{2(g_0/\gamma)^2 - (2m_{th} + 1)^2}{[2(g_0/\gamma)^2 - (2m_{th} + 1)^2]^2} \right\}. \quad (3.22)$$

Da equação acima temos que para $C_a \leq 0$ [1],

$$m_{th} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{g_0}{\gamma} - \frac{1}{2}. \quad (3.23)$$

Note que, $C_a \rightarrow 0$ quando $m_{th} \rightarrow 0$ ou $m_{th} \rightarrow \infty$. Para um conjunto de N átomos não interagentes, teremos que a função resposta denotada por C_N será proporcional a C_a , tal que¹,

$$C_N = N C_a, \quad (3.24)$$

¹O hamiltoniano para N átomos idênticos não interagentes é obtido substituindo o operador $\hat{\sigma}_+$ por $S_+ = \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_+^i$ na Eq.(3.17) para $k = 0$ sendo $S_- = (S_+)^{\dagger}$. Onde $\hat{\sigma}_+^i$ é o operador de Pauli atuando no i -ésimo átomo. O cálculo da função resposta para N átomos será idêntico aquele realizado para um único átomo.

de tal forma que a resposta negativa possa ser observada para um aglomerado qualquer de íons de dois níveis.

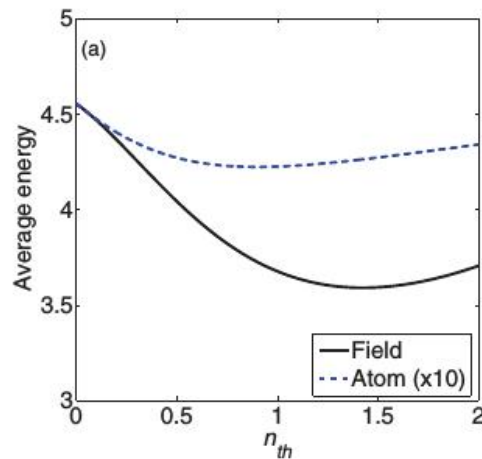


Figura 3.1: Energia média para o sistema atômico $\langle \hat{\mathcal{H}}_S/\omega_0 \rangle$ (linha hachurada multiplicada por um fator 10 por questões de clareza) e bosônico ($\langle \hat{\mathcal{H}}_R/\nu \rangle$) em função do número médio comum de fótons térmicos ou fônons $n_{th} = m_{th}$, para $k = 1$ [1].

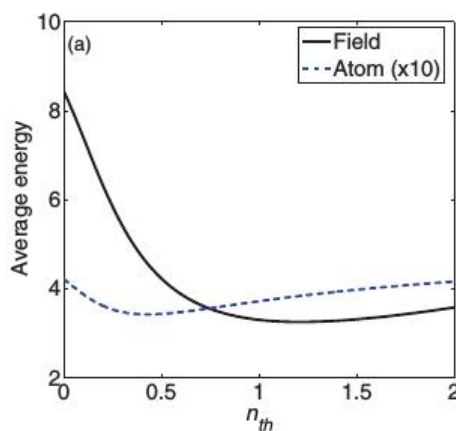


Figura 3.2: Energia média para o sistema atômico $\langle \hat{\mathcal{H}}_S/\omega_0 \rangle$ (linha hachurada multiplicada por um fator 10 por questões de clareza) e bosônico ($\langle \hat{\mathcal{H}}_R/\nu \rangle$) em função do número médio comum de fótons térmicos ou fônons $n_{th} = m_{th}$, para $k = 2$ [1].

Variação da energia vibracional e interna do íon

Considerando o íon acoplado ao modo vibracional, usando a energia média de um sistema individual ao invés da energia total não muda as nossas considerações, uma vez que existe regiões onde a função resposta C_a (Eq.(3.22)) torna-se negativa para ambos os sistemas si-

multaneamente e $\langle \hat{\mathcal{H}}_I \rangle = 0$ em todos os casos mencionados aqui, sendo $\hat{\mathcal{H}}_I$ o hamiltoniano de interação dado pela Eq.(3.17). Tal resultado pode ser visto nas Figs.(3.1)-(3.2) para $k = 1$ e $k = 2$, respectivamente. Os gráficos (3.1) e (3.2) representam a energia média para ambos os sistemas, bosônico ($\langle \hat{\mathcal{H}}_R/\nu \rangle$) e atômico ($\langle \hat{\mathcal{H}}_S/\omega_0 \rangle$). Sendo a energia para o estado fundamental $|g\rangle$ considerada como igual a zero [1].

De acordo com a Fig.(3.1), o efeito CBH ocorre para, $n_{\text{th}} = m_{\text{th}} \lesssim 1.4$ e $\lesssim 0.9$ para os sistemas atômico e bosônico, respectivamente, para os parâmetros $\kappa = 0.1\gamma$ e $g_1 = 1.0\gamma$. Da mesma forma da Fig.(3.2), o efeito CBH ocorre para $n_{\text{th}} = m_{\text{th}} \lesssim 0.4$ e $\lesssim 1.2$ para os sistemas atômico e bosônico, respectivamente, para os parâmetros $\kappa = 0.1\gamma$ e $g_2 = 0.2\gamma$, sendo κ e γ as taxas de emissão espontânea para o modo vibracional e os níveis internos do íon, a constante de acoplamento $g_1 = i\Omega\eta_L/2$ e Ω é a frequência de Rabi.

3.3 Temperatura negativa na escala absoluta

Usando o modelo anti-Jaynes-Cummings como visto na seção anterior com o hamiltoniano na representação dado por,

$$\hat{\mathcal{H}}_I = g_k \hat{\sigma}_- \hat{a}^k + g_k^* \hat{\sigma}_+ (\hat{a}^\dagger)^k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.25)$$

onde a dinâmica sistema é resolvendo a equação mestra,

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\rho}}(t) = & -i[\hat{\mathcal{H}}_I, \hat{\rho}] + \kappa(n_{\text{th}} + 1)\hat{\mathcal{D}}[\hat{a}]\hat{\rho} + \kappa n_{\text{th}}\hat{\mathcal{D}}[\hat{a}^\dagger]\hat{\rho} + \\ & + \gamma(m_{\text{th}} + 1)\hat{\mathcal{D}}[\hat{\sigma}_-]\hat{\rho} + \gamma m_{\text{th}}\hat{\mathcal{D}}[\hat{\sigma}_+]\hat{\rho}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

que as taxas de emissão espontânea para o modo vibracional e para os níveis internos do íon por κ e γ , respectivamente. A intenção aqui é investigar como a energia e a correspondente temperatura efetiva para o sistema de dois níveis variam de acordo com a cooperatividade $C_k = g_k^2/\gamma\kappa$. Os gráficos mostrados na Fig.(3.3)(a)-(f) foram analisados no estado assintótico do sistema ou seja, $\dot{\hat{\rho}} = 0$ para $t \rightarrow \infty$, $k = 0, 1, 2$, e 3 . Sendo $n_{\text{th}} = m_{\text{th}} = n$, para n variando de $0, 0.5$, e 2.0 , onde n_{th} é o número médio de fônons do reservatório acoplado ao modo vibracional, m_{th} é o número médio de fótons dos níveis do íon.

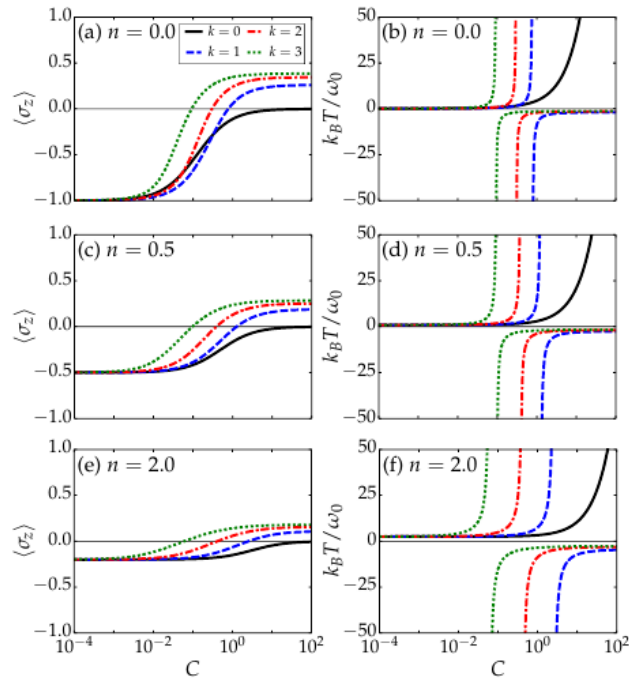


Figura 3.3: As figuras (a), (c), (e) mostram os gráficos da energia média do átomo $\langle \hat{\sigma}_z \rangle$ em função da cooperatividade C , as figuras (b), (d), (f) representam os gráficos da temperatura efetiva do sistema reescalada $k_B T / \omega_0$ em função dos valores de C . Onde o número médio de fótons térmicos são $n = 0, 0.5$ e 2.0 . Inversão de população ocorre para o valor linear do AJCM $k = 1$ (linha azul sólida), e os valores não-lineares de AJCM $k = 2$ (linha tracejada vermelha) e $k = 3$ (linha pontilhada verde). Ref. [2].

Observe nas figuras, (3.3)(a),(c),(e) que todos os estados assintóticos terminam com população invertida $\langle \hat{\sigma}_z \rangle > 0$, o que implica em temperatura negativa, observe também que o ambiente para os sistemas atômico e bosônico suprime suavemente a inversão de população evitando assim que o sistema de dois níveis alcance temperaturas negativas maiores. As figuras, (3.3)(b),(d),(f) apresentam os gráficos da temperatura reescalada $k_B T / \omega_0$ em função da cooperatividade. A não linearidade do modelo de anti-Jaynes-Cummings ($k = 2$ e 3) permite obter populações invertidas para pequenos valores da cooperatividade, observe também que para valores suficientemente altos de C , a temperatura negativa aproxima-se de $0K$ para todos os valores de $k = 1, 2$ e 3 .

3.4 Resposta Negativa com uma cavidade ótica e campo de ondas viajantes

Na presente seção estaremos interessados na resposta negativa apresentada pela intensidade do campo eletromagnético usando um modo simples de um campo ótico e um átomo de três níveis em uma configuração do tipo Λ dentro da cavidade. A proposta, um campo de ondas viajantes de intensidade $\varepsilon_{in} = \varepsilon$, entra em uma caixa escura e um campo de saída de amplitude ε_{out} deixa a caixa escura, tal que que algumas situações possam surgir como, um aumento no campo de entrada ε , como consequência da redução do campo de saída ε_{out} , ou de modo inverso, diminuindo ε , o campo de saída ε_{out} será aumentado. Tal investigação será dada principalmente em canais dissipativos, investigando os regimes dos parâmetros que otimizam tal efeito. Dispositivos que trabalham nesse regime de resposta negativa, encontra aplicação principalmente em sistemas de segurança, como dispositivos eletrônicos sensíveis a mudanças abruptas do campo de entrada. Na Fig.(3.4), temos uma representação do sistema

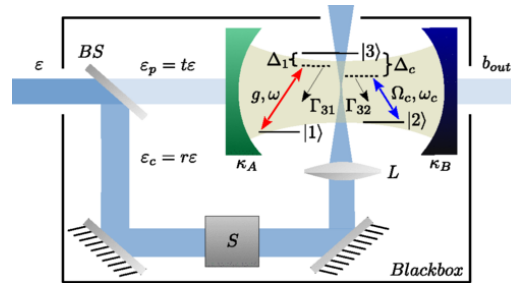


Figura 3.4: Representação pictórica do experimento proposto na Ref. [3]. Um campo de entrada de intensidade ε colide com um divisor de feixe, onde os dois feixes resultantes refletido ε_c e transmitido ε_p , campo de controle e de condução, respectivamente, são direcionados para o átomo de três níveis dentro de uma cavidade ótica. Um polarizador S e uma lente L são colocados no campo de controle ε_c para ajustar sua polarização e a frequência de Rabi para interagir apropriadamente com uma transição atômica específica.

físico correspondendo ao protocolo útil para implementar uma resposta negativa com campos luminosos e cavidades óticas. A proposta dada é a de um campo de condução de intensidade ε , que servirá como nossa entrada, entrando em uma caixa escura ou será transmitido ou refletido por um divisor de feixes, dos quais r e t são os coeficientes de reflexão e transmissão, respectivamente. O feixe transmitido $\varepsilon_p = t\varepsilon$, será usado como o campo de condução, é envi-

ado através da parede que fica a esquerda de uma cavidade ótica com perdas de constante de amortecimento κ_A e o feixe refletido $\varepsilon_c = r\varepsilon$, será usado como um campo de controle, é direcionado para a entrada da cavidade ótica, ambos interagindo com um átomo de três níveis em uma configuração Λ . O campo de saída emerge da caixa escura da parede à direita com uma constante de amortecimento κ_B . É interessante notar que um aumento no campo de entrada ε , causará um aumento em ambos os campos de controle ε_c e de condução ε_p , respectivamente. A relação existente entre ambos os modos de saída e intracavidade serão dadas por,

$$\hat{a}_{out} = \sqrt{2\kappa_A}\hat{a} - \varepsilon_p, \quad (3.27)$$

$$\hat{b}_{out} = \sqrt{2\kappa_B}\hat{a}, \quad (3.28)$$

sendo, \hat{a}_{out} e \hat{b}_{out} operadores de aniquilação para os modos da esquerda e direita do campo de saída, respectivamente, \hat{a} é o operador de aniquilação para o modo da intracavidade. Logo, conhecendo a dinâmica do campo da intracavidade, o feixe transmitido poderá ser obtido diretamente.

Neste sistema um simples átomo de três níveis em uma configuração Λ tem dois estados fundamentais $|1\rangle$ e $|2\rangle$ e um estado excitado $|3\rangle$. Este átomo de três níveis interage com um modo da cavidade de frequência ω induzindo transições do tipo $|1\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ com frequência de Rabi que será denotada por g . O campo de controle de frequência ω_c induz transições do tipo $|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$ com frequência de Rabi Ω_c , definida por,

$$\Omega_c = \frac{\mu}{\hbar}\varepsilon_c = r\mu\sqrt{\frac{\omega_c\langle n \rangle}{2\hbar\epsilon_0 V_c}}, \quad (3.29)$$

onde V_c é o volume quantizado com relação ao campo de controle e pode ser diminuído usando uma lente para passar o feixe, ϵ_0 é a permissividade elétrica do vácuo, μ é o elemento de matriz do dipolo atômico de transição, $\langle n \rangle$ é o número médio de fótons do campo de entrada. O hamiltoniano correspondente ao campo de condução sobre o modo da cavidade através da parede esquerda,

$$\hat{\mathcal{H}}_p = \Omega_p\hat{a}e^{i\omega_p t} + \Omega_p^*\hat{a}^\dagger e^{-i\omega_p t}, \quad (3.30)$$

sendo a frequência de Rabi do campo de prova dada por $\Omega_p = -i\sqrt{2\kappa_A}\varepsilon_p$. Estabelecendo o estado $|1\rangle$ como sendo o nível de referência, o hamiltoniano total ($\hbar = 1$),

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}} &= \hat{\mathcal{H}}_S + \hat{\mathcal{H}}_R + \hat{\mathcal{H}}_{SR} \\ &= \hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}_{\text{int}}\end{aligned}\quad (3.31)$$

onde o hamiltoniano livre (ou seja, sem interação) $\hat{\mathcal{H}}_0$ e o hamiltoniano de interação $\hat{\mathcal{H}}_{SR} = \hat{\mathcal{H}}_{\text{int}}$ [3],

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \hat{\mathcal{H}}_S + \hat{\mathcal{H}}_R = \omega_3\hat{\sigma}_{33} + \omega_2\hat{\sigma}_{22} + \omega\hat{a}^\dagger\hat{a}, \quad (3.32)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{int}} = \hat{\mathcal{H}}_{SR} = g\hat{a}\hat{\sigma}_{31} + \Omega_c\hat{\sigma}_{32}e^{-i\omega_c t} + \Omega_p\hat{a}e^{i\omega_p t} + \Omega_p^*\hat{a}^\dagger e^{-i\omega_p t}, \quad (3.33)$$

sendo $\hat{\sigma}_{ij} = |i\rangle\langle j|$, com $i, j = 1, 2$, e 3 . Na representação de interação o hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}_{\text{int}}$ será escrito como,

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}}_{SR}(t) &= e^{i(\hat{\mathcal{H}}_S + \hat{\mathcal{H}}_R)t}\hat{\mathcal{H}}_{SR}e^{-i(\hat{\mathcal{H}}_S + \hat{\mathcal{H}}_R)t} \\ &= e^{i\hat{\mathcal{H}}_0 t}\hat{\mathcal{H}}_{\text{int}}e^{-i\hat{\mathcal{H}}_0 t} = \hat{\mathcal{H}}_I(t).\end{aligned}\quad (3.34)$$

Logo,

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}}_I(t) &= g\hat{a}\hat{\sigma}_{31}e^{i(\omega_3 - \omega)t} + \Omega_c\hat{\sigma}_{32}e^{i[(\omega_3 - \omega_2) - \omega_c]t} + \Omega_p\hat{a}e^{i(\omega_p - \omega)t} + \Omega_p^*\hat{a}^\dagger e^{-i(\omega_p - \omega)t} \\ &= g\hat{a}\hat{\sigma}_{31}e^{i\Delta_1 t} + \Omega_c\hat{\sigma}_{32}e^{i\Delta_c t} + \Omega_p\hat{a}e^{i\Delta_p t} + \Omega_p^*\hat{a}^\dagger e^{-i\Delta_p t}.\end{aligned}\quad (3.35)$$

$e^{-i\hat{\mathcal{H}}_0 t} = e^{-i[\Delta_p\hat{a}^\dagger\hat{a} - \Delta_1\hat{\sigma}_{33} - (\Delta_1 - \Delta_c)\hat{\sigma}_{22} - \Delta_p\hat{\sigma}_{11}]t}$, poderemos eliminar a dependência temporal do hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}_I(t)$,

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}}_I &= \Delta_1\hat{\sigma}_{33} + (\Delta_1 - \Delta_c)\hat{\sigma}_{22} + \Delta_p\hat{\sigma}_{11} - \Delta_p\hat{a}^\dagger\hat{a} + \\ &+ g\hat{a}\hat{\sigma}_{31} + \Omega_c\hat{\sigma}_{32} + \Omega_p\hat{a} + \Omega_p^*\hat{a}^\dagger.\end{aligned}\quad (3.36)$$

e a equação mestra para $\hat{\mathcal{H}}_I$ será [3];

$$\dot{\hat{\rho}} = -i[\hat{\mathcal{H}}_I, \hat{\rho}] + \kappa\hat{\mathcal{D}}[\hat{a}] + \Gamma_{31}\hat{\mathcal{D}}[\hat{\sigma}_{13}] + \Gamma_{32}\hat{\mathcal{D}}[\hat{\sigma}_{23}] + \gamma_2\hat{\mathcal{D}}[\hat{\sigma}_{22}] + \gamma_3\hat{\mathcal{D}}[\hat{\sigma}_{33}], \quad (3.37)$$

sendo Γ_{ij} a taxa de decaimento da polarização atômica do estado $|i\rangle \leftrightarrow |j\rangle$, γ_i é a defasagem atômica do estado $|i\rangle \rightarrow |j\rangle$, κ representa a taxa de decaimento do campo na cavidade, ou seja, $\kappa = \kappa_A + \kappa_B$ e \hat{D} atua em um operador qualquer da mesma forma como está escrito na Eq.(3.19). Um resultado interessante (Fig.(3.5)) é o gráfico do número médio de fótons

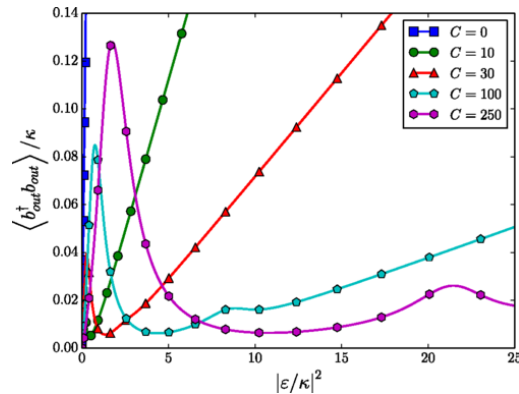


Figura 3.5: Gráfico do número médio de fótons do campo de saída em função da intensidade normalizada do campo de entrada $|\varepsilon/\kappa|^2$ para determinados valores da cooperatividade C , para os parâmetros, $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = \Gamma/2 = \kappa/2$, $\Delta_1 = \Delta_c = 0$, $\Delta_p = 1.1g$, $\Omega_c = 8\varepsilon$ e $\Omega_p = -0.8i\sqrt{\kappa_A}\varepsilon$. Ref. [3].

da saída $\langle b_{\text{out}}^\dagger b_{\text{out}} \rangle / \kappa$ em função da intensidade do campo reescalado $|\varepsilon/\kappa|^2$. Para alguns valores da cooperatividade C dada por $C = g^2/2\kappa\Gamma$, com parâmetros, $\Gamma_{31} = \Gamma_{32} = \Gamma/2 = \kappa/2$, $\Delta_1 = \Delta_c = 0$, $\Delta_p = 1.1g$, $\Omega_c = 8\varepsilon$ e $\Omega_p = -0.8i\sqrt{\kappa_A}\varepsilon$, como na Fig.(3.5).

Observe na Fig.(3.5) dois picos que ocorrem para valores da cooperatividade iguais a $C = 100$ e $C = 250$, respectivamente, que é uma assinatura de resposta negativa. Começando no primeiro pico, a transmissão diminui como consequência do aumento do campo de condução devido ao movimento para a direita do primeiro pico. Assim, incrementando novamente, desde que o sistema permita uma ressonância de dois fótons, até que ele caia na sequência. Finalmente, a transmissão começa a aumentar para grandes valores do campo de entrada, até que para um grande valor do campo de entrada, o número médio de fótons dentro da cavidade aumenta linearmente com $|\varepsilon/\kappa|^2$.

No presente capítulo nosso objetivo foi mostrar como as técnicas desenvolvidas ao longo dos capítulos anteriores principalmente do capítulo 2, são de suma importância no estudo de sistemas abertos no contexto quântico de cavidades.

Ferramentas como as aproximações de Born, Born-Markov e de Markov, e principalmente na resolução da equação mestra para o hamiltoniano na representação de interação para sistemas bosônicos e fermiônicos, onde observamos também a assinatura de resposta negativa em ambos os sistemas abordados, evidenciando assim um tema que a muito vem sendo debatido e observado em Óptica Quântica.

Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho obtivemos a equação mestra para ambos os reservatórios térmicos, bosônico (simulado por uma coleção de osciladores harmônicos acoplados) e fermiônico (simulado por uma coleção de átomos de dois níveis). Ambas as equações mestra foram obtidas de forma analítica usando hamiltonianos bem conhecidos, utilizamos também as aproximações de Born, Born-Markov e de Markov, mostramos também a forma dessas equações em estados comprimidos de vácuo e de Fock. Ao final mostramos a aplicação das equações mestra para fenômenos que exibam resposta negativa, como o *Cooling by Heating*, observando gráficos da energia média para ambos os sistemas atômico e bosônico em função do número médio de fótons térmicos, da mesma forma a temperaturas negativas podem ser observadas em estados que invertam sua população quando há uma certa injeção de energia. Por último estudamos um resultado bastante interessante de assinatura de resposta negativa que consiste na observação da diminuição do campo de saída de um feixe incidindo em uma cavidade ótica como resultado do incremento no campo de entrada. Futuramente, pretendo aplicar as técnicas aqui estudadas para investigar, via simulação numérica, quantos átomos são necessários para simular um reservatório fermiônico composto por um sistemas de dois níveis. Outra possível aplicação seria o estudo do efeito *cooling by heating* (CBH), descrito no capítulo anterior, ocorrendo quando o sistema de interesse interage com um reservatório fermiônico, especialmente no regime em que o reservatório se encontra a uma temperatura efetiva negativa. Finalmente, uma outra aplicação igualmente interessante seria o estudo comparativo das propriedades estatísticas dos sistemas envolvidos no fenômeno CBH ocorrendo a temperaturas positivas e negativas.

Apêndice A

Modelo de Jaynes-Cummings

Considere uma cavidade óptica e um átomo com uma frequência igual a ω_a que pode estar ou não em ressonância com o modo do campo dentro da cavidade. O fóton γ (modo do campo eletromagnético) dentro da cavidade tem energia igual a $\hbar\omega_c$, que corresponde ao espaçamento entre os níveis de energia do oscilador (átomo). O autoestado de energia $|n\rangle$ pode ser descrito como o estado do modo da cavidade com precisamente n fótons.

Para o autoestado $|n\rangle$, podemos usar os operadores de aniquilação \hat{a} e de criação \hat{a}^\dagger que são definidos na base de número ou de Fock $|n\rangle$, $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$, sendo n um número inteiro real e positivo. Os operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger possuem as seguintes propriedades,

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad (\text{A.1-1})$$

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad (\text{A.1-2})$$

$$\hat{a} |0\rangle = 0, \quad (\text{A.1-3})$$

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = n |n\rangle. \quad (\text{A.1-4})$$

$|0\rangle$ é o estado de vácuo.

A.1 Descrição para um átomo de dois níveis

A descrição de um átomo de dois níveis pode ser realizada da mesma forma que em um sistema de spin 1/2. Para tal sistema um estado qualquer pode ser escrito com a combinação linear dos estados $|e\rangle$ (estado fundamental) e $|g\rangle$ (estado excitado), representada como um vetor

bidimensional no espaço de Hilbert dada por:

$$\alpha|e\rangle + \beta|g\rangle \equiv \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

sendo α e β dois números quaisquer. Os estados $|g\rangle$ e $|e\rangle$ são escritos matricialmente como:

$$|g\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e \quad |e\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Para tal sistema, uma base útil é aquela dada pelo conjunto formado pelas matrizes de Pauli,

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

os operadores de transição eletrônica $\hat{\sigma}_+$ (“levantamento”), $\hat{\sigma}_-$ (“abaixamento”) e $\hat{\sigma}_z$ podem ser escritos na base $\{|g\rangle, |e\rangle\}$ como,

$$\hat{\sigma}_+ = |e\rangle\langle g| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_- = |g\rangle\langle e| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

$$\hat{\sigma}_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|. \quad (\text{A.6})$$

Os autoestados de energia são dados por,

$$\hat{\sigma}_z|g\rangle = (|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|)|g\rangle = -|g\rangle, \quad (\text{A.7-1})$$

$$\hat{\sigma}_+|g\rangle = (|e\rangle\langle g|)|g\rangle = |e\rangle, \quad (\text{A.7-2})$$

$$\hat{\sigma}_-|g\rangle = (|g\rangle\langle e|)|g\rangle = 0, \quad (\text{A.7-3})$$

$$\hat{\sigma}_+|e\rangle = (|e\rangle\langle g|)|e\rangle = 0, \quad (\text{A.7-4})$$

$$\hat{\sigma}_-|e\rangle = (|g\rangle\langle e|)|e\rangle = |g\rangle, \quad (\text{A.7-5})$$

$$\hat{\sigma}_z|e\rangle = (|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|)|e\rangle = |e\rangle. \quad (\text{A.7-6})$$

O processo de interação pode ocorrer por exemplo quando um fóton é absorvido pelo átomo, sendo levado do estado fundamental para o estado excitado. Um operador útil para descrever esse processo é dado pelo produto, $\hat{\sigma}_+\hat{a}$. O processo inverso ou seja, o átomo voltando para o estado fundamental, emitindo um fóton é dado por, $\hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger$.

O hamiltoniano de interação para esse sistema $\hat{\mathcal{H}}_{int}$ é dado por,

$$\hat{\mathcal{H}}_{int} = \hbar\Omega(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (\text{A.8})$$

$$= \hbar\Omega \left[\underbrace{(\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger)}_{\substack{\text{Termos de onda} \\ \text{girante.}}} + \underbrace{(\hat{\sigma}_+\hat{a}^\dagger + \hat{\sigma}_-\hat{a})}_{\substack{\text{Termos de onda} \\ \text{contra-girante.}}} \right] \quad (\text{A.9})$$

usando a aproximação de onda girante (descartando os termos que oscilam muito rápido no tempo), encontraremos:

$$\hat{\mathcal{H}}_{int} = \hbar\Omega(\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger). \quad (\text{A.10})$$

sendo Ω a constante de acoplamento que determina a intensidade da interação (frequência de Rabi).

Logo o hamiltoniano total $\hat{\mathcal{H}}_{total}$ na representação de Schrödinger para o sistema átomo-campo é escrito como,

$$\hat{\mathcal{H}}_{total} = \hat{\mathcal{H}}_{campo} + \hat{\mathcal{H}}_{átomo} + \hat{\mathcal{H}}_{int} \quad (\text{A.11})$$

$$\hat{\mathcal{H}}_{total} = \hbar\omega_c \left(\hat{a}\hat{a}^\dagger + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar\omega_a}{2} \hat{\sigma}_z + \hbar\Omega(\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger). \quad (\text{A.12})$$

Tal modelo é conhecido como *modelo de Jaynes-Cummings*.

Os autovalores para o hamiltoniano do átomo de 2-níveis na base $\{|e\rangle, |g\rangle\}$ são dados respectivamente por,

$$\hat{\mathcal{H}}_{átomo}|e\rangle = \frac{\hbar\omega_a}{2} \hat{\sigma}_z |e\rangle = \frac{\hbar\omega_a}{2} |e\rangle, \quad (\text{A.13})$$

$$\hat{\mathcal{H}}_{átomo}|g\rangle = \frac{\hbar\omega_a}{2} \hat{\sigma}_z |g\rangle = -\frac{\hbar\omega_a}{2} |g\rangle. \quad (\text{A.14})$$

O espaço de Hilbert para o sistema composto átomo-campo é dado pelo produto tensorial de ambos os espaços de Hilbert do átomo e do campo:

$$\mathbb{H}_{total} = \mathbb{H}_{átomo} \otimes \mathbb{H}_{campo}, \quad (\text{A.15})$$

com uma base ortonormal dada por,

$$\{|e\rangle \otimes |n\rangle, |g\rangle \otimes |n\rangle\}; \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty. \quad (\text{A.16})$$

Apêndice B

Cálculo da média do produto dos operadores $\hat{\Gamma}(t)$ e $\hat{\Gamma}^\dagger(t)$ na representação de interação

B.1 Caso Bosônico

O operador $\hat{\Gamma} = \sum_j \kappa_j \hat{r}_j$ poderá ser escrito na representação de interação como,

$$\hat{\Gamma}(t) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}}_R t} \hat{\Gamma} e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}}_R t} = \sum_j \kappa_j \hat{r}_j e^{-i\omega_j t}, \quad (\text{B.1})$$

e

$$\hat{\Gamma}^\dagger(t) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}}_R t} \hat{\Gamma}^\dagger e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{H}}_R t} = \sum_j \kappa_j^* \hat{r}_j^\dagger e^{i\omega_j t}. \quad (\text{B.2})$$

Logo,

$$\begin{aligned} \langle \hat{\Gamma}(t) \hat{\Gamma}(t') \rangle_R &= \text{tr}_R \left[\hat{\Gamma}(t) \hat{R}_0 \hat{\Gamma}(t') \right] = \text{tr}_R \left[\hat{R}_0 \hat{\Gamma}(t) \hat{\Gamma}(t') \right] = \text{tr}_R \left[\hat{\Gamma}(t) \hat{\Gamma}(t') \hat{R}_0 \right] \\ &= \text{tr}_R \left[\hat{R}_0 \sum_j \kappa_j \hat{r}_j e^{-i\omega_j t} \sum_l \kappa_l \hat{r}_l e^{-i\omega_l t'} \right] \\ &= \sum_{j,l} \kappa_j \kappa_l e^{-i\omega_j t} e^{-i\omega_l t'} \text{tr}_R \left(\hat{r}_j \hat{r}_l \hat{R}_0 \right) \\ &= \sum_{j,l} \kappa_j \kappa_l e^{-i\omega_j t} e^{-i\omega_l t'} \text{tr}_R \left[\hat{r}_j \hat{r}_l \prod_j e^{-\beta \hbar \omega_j \hat{r}_j^\dagger \hat{r}_j} (1 - e^{-\beta \hbar \omega_j}) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j,l} \kappa_j \kappa_l e^{-i\omega_j t} e^{-i\omega_l t'} \text{tr}_{R_j} \left[\hat{r}_j^\dagger \hat{r}_l e^{-\beta \hbar \omega_j \hat{r}_j^\dagger \hat{r}_j} (1 - e^{-\beta \hbar \omega_j}) \right] \\
&= \sum_{j,l} \kappa_j \kappa_l e^{-i\omega_j t} e^{-i\omega_l t'} \langle n_j | \langle n_l | \dots \langle n_2 | \langle n_1 | \hat{r}_j^\dagger \hat{r}_l e^{-\beta \hbar \omega_j \hat{r}_j^\dagger \hat{r}_j} (1 - e^{-\beta \hbar \omega_j}) | n_1 \rangle | n_2 \rangle \dots | n_l \rangle | n_j \rangle \\
&= \sum_{j,l} \kappa_j \kappa_l e^{-i\omega_j t} e^{-i\omega_l t'} \langle n_j | \langle n_l | \dots \langle n_2 | \langle n_1 | \hat{r}_j^\dagger \hat{r}_l e^{-\beta \hbar \omega_j n_j} (1 - e^{-\beta \hbar \omega_j}) | n_1 \rangle | n_2 \rangle \dots | n_l \rangle | n_j \rangle \\
&= \sum_{j,l} \kappa_j \kappa_l e^{-i\omega_j t} e^{-i\omega_l t'} \sqrt{n_j} \sqrt{n_l} \{ \langle n_k | \} \{ | n_k - 1 \rangle \} \\
&\qquad \qquad \qquad \langle \hat{\Gamma}(t) \hat{\Gamma}(t') \rangle_R = 0.
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Onde utilizamos a série geométrica

$$e^{-\beta \hbar \omega_j n_j} = \frac{1}{1 - e^{-\beta \hbar \omega_j}}, \tag{B.5}$$

sendo $\{ | n_k \rangle \} = | n_1 \rangle | n_2 \rangle \dots | n_l \rangle | n_j \rangle$.

Da mesma forma encontraremos:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\Gamma}^\dagger(t) \hat{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R &= \text{tr}_R \left[\hat{\Gamma}^\dagger(t) \hat{R}_0 \hat{\Gamma}^\dagger(t') \right] = \text{tr}_R \left[\hat{R}_0 \hat{\Gamma}^\dagger(t) \hat{\Gamma}^\dagger(t') \right] = \text{tr}_R \left[\hat{\Gamma}^\dagger(t) \hat{\Gamma}^\dagger(t') \hat{R}_0 \right] \\
&= \text{tr}_R \left[\hat{R}_0 \sum_j \kappa_j^* \hat{r}_j^\dagger e^{i\omega_j t} \sum_l \kappa_l^* \hat{r}_l^\dagger e^{i\omega_l t'} \right] \\
&= \sum_{j,l} \kappa_j^* \kappa_l^* e^{i\omega_j t} e^{i\omega_l t'} \text{tr}_R \left(\hat{r}_j^\dagger \hat{r}_l^\dagger \hat{R}_0 \right) \\
&= \sum_{j,l} \kappa_j^* \kappa_l^* e^{i\omega_j t} e^{i\omega_l t'} \text{tr}_R \left[\hat{r}_j^\dagger \hat{r}_l^\dagger \prod_j e^{-\beta \hbar \omega_j \hat{r}_j^\dagger \hat{r}_j} (1 - e^{-\beta \hbar \omega_j}) \right] \\
&\qquad \qquad \qquad \langle \hat{\Gamma}^\dagger(t) \hat{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R = 0.
\end{aligned} \tag{B.6}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j,l} \kappa_j^* \kappa_l^* e^{i\omega_j t} e^{i\omega_l t'} \text{tr}_{R_j} \left[\hat{r}_j^\dagger \hat{r}_l^\dagger e^{-\beta \hbar \omega_j \hat{r}_j^\dagger \hat{r}_j} (1 - e^{-\beta \hbar \omega_j}) \right] \\
&= \sum_{j,l} \kappa_j^* \kappa_l^* e^{i\omega_j t} e^{i\omega_l t'} \langle n_j | \langle n_l | \dots \langle n_2 | \langle n_1 | \hat{r}_j^\dagger \hat{r}_l^\dagger e^{-\beta \hbar \omega_j \hat{r}_j^\dagger \hat{r}_j} (1 - e^{-\beta \hbar \omega_j}) | n_1 \rangle | n_2 \rangle \dots | n_l \rangle | n_j \rangle \\
&= \sum_{j,l} \kappa_j^* \kappa_l^* e^{i\omega_j t} e^{i\omega_l t'} \langle n_j | \langle n_l | \dots \langle n_2 | \langle n_1 | \hat{r}_j^\dagger \hat{r}_l^\dagger e^{-\beta \hbar \omega_j n_j} (1 - e^{-\beta \hbar \omega_j}) | n_1 \rangle | n_2 \rangle \dots | n_l \rangle | n_j \rangle \\
&= \sum_{j,l} \kappa_j^* \kappa_l^* e^{i\omega_j t} e^{i\omega_l t'} \sqrt{n_j + 1} \sqrt{n_l + 1} \{ \langle n_k | \} \{ | n_k + 1 \rangle \}
\end{aligned}$$

$$\langle \hat{\Gamma}^\dagger(t) \hat{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R = 0. \tag{B.7}$$

O desenvolvimento de $\langle \hat{\Gamma}^\dagger(t)\hat{\Gamma}(t') \rangle_R$ e $\langle \hat{\Gamma}(t)\hat{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R$, será feito da seguinte forma, respectivamente,

$$\langle \hat{\Gamma}^\dagger(t)\hat{\Gamma}(t') \rangle_R = \sum_{j,l} \kappa_j^* \kappa_l e^{i\omega_j t} e^{-i\omega_l t'} \text{tr}_R \left(\hat{r}_j^\dagger \hat{r}_l \hat{R}_0 \right), \quad (\text{B.8})$$

e

$$\langle \hat{\Gamma}(t)\hat{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R = \sum_{j,l} \kappa_j \kappa_l^* e^{-i\omega_j t} e^{i\omega_l t'} \text{tr}_R \left(\hat{r}_j \hat{r}_l^\dagger \hat{R}_0 \right). \quad (\text{B.9})$$

Se $j \neq l$ teremos,

$$\begin{aligned} \langle \hat{\Gamma}^\dagger(t)\hat{\Gamma}(t') \rangle_R &= \sum_{j,l} \kappa_j^* \kappa_l e^{i\omega_j t} e^{-i\omega_l t'} \langle n_j | \langle n_l | \dots \langle n_2 | \langle n_1 | \hat{r}_j^\dagger \hat{r}_l e^{-\beta \hbar \omega_j \hat{r}_j^\dagger \hat{r}_j} (1 - e^{-\beta \hbar \omega_j}) | n_1 \rangle | n_2 \rangle \dots | n_l \rangle | n_j \rangle \\ &= \sum_{j,l} \kappa_j^* \kappa_l e^{i\omega_j t} e^{-i\omega_l t'} \sqrt{n_j + 1} \sqrt{n_l} e^{-\beta \hbar \omega_j n_j} (1 - e^{-\beta \hbar \omega_j}) \dots \langle n_l | n_l - 1 \rangle \dots \langle n_j | n_j + 1 \rangle \\ \langle \hat{\Gamma}(t)\hat{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R &= \sum_{j,l} \kappa_j \kappa_l^* e^{-i\omega_j t} e^{i\omega_l t'} \langle n_j | \langle n_l | \dots \langle n_2 | \langle n_1 | \hat{r}_j \hat{r}_l^\dagger e^{-\beta \hbar \omega_j \hat{r}_j^\dagger \hat{r}_j} (1 - e^{-\beta \hbar \omega_j}) | n_1 \rangle | n_2 \rangle \dots | n_l \rangle | n_j \rangle \\ &= \sum_{j,l} \kappa_j \kappa_l^* e^{-i\omega_j t} e^{i\omega_l t'} \sqrt{n_j} \sqrt{n_l + 1} e^{-\beta \hbar \omega_j n_j} (1 - e^{-\beta \hbar \omega_j}) \dots \langle n_l | n_l + 1 \rangle \dots \langle n_j | n_j - 1 \rangle \end{aligned}$$

$$\langle \hat{\Gamma}^\dagger(t)\hat{\Gamma}(t') \rangle_R = 0 \quad \text{e} \quad \langle \hat{\Gamma}(t)\hat{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R = 0. \quad (\text{B.10})$$

Se $j = l$ teremos,

$$\begin{aligned} \langle \hat{\Gamma}^\dagger(t)\hat{\Gamma}(t') \rangle_R &= \sum_j |\kappa_j|^2 e^{i\omega_j(t-t')} \text{tr}_R \left[\prod_j e^{-\beta \hbar \omega_j \hat{r}_j^\dagger \hat{r}_j} (1 - e^{-\beta \hbar \omega_j}) \hat{r}_j^\dagger \hat{r}_j \right] \\ &= \sum_j |\kappa_j|^2 e^{i\omega_j(t-t')} \text{tr}_{R_j} \left[e^{-\beta \hbar \omega_j \hat{r}_j^\dagger \hat{r}_j} (1 - e^{-\beta \hbar \omega_j}) \hat{r}_j^\dagger \hat{r}_j \right] \\ &= \sum_j |\kappa_j|^2 e^{i\omega_j(t-t')} \langle n_j | e^{-\beta \hbar \omega_j \hat{r}_j^\dagger \hat{r}_j} (1 - e^{-\beta \hbar \omega_j}) \hat{r}_j^\dagger \hat{r}_j | n_j \rangle \\ &= \sum_j |\kappa_j|^2 e^{i\omega_j(t-t')} n_j e^{-\beta \hbar \omega_j n_j} (1 - e^{-\beta \hbar \omega_j}). \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Observe que,

$$n_j e^{-\beta \hbar \omega_j n_j} = -\frac{1}{\hbar \omega_j} \frac{\partial}{\partial \beta} e^{-\beta \hbar \omega_j n_j}, \quad (\text{B.12})$$

onde,

$$e^{-\beta \hbar \omega_j n_j} = \frac{1}{1 - e^{-\beta \hbar \omega_j}}, \quad (\text{B.13})$$

que é a série geométrica. Substituindo a Eq.(B.13) na Eq.(B.12) encontraremos

$$n_j e^{-\beta \hbar \omega_j n_j} = -\frac{1}{\hbar \omega_j} \left[-\frac{\hbar \omega_j e^{-\beta \hbar \omega_j}}{(1 - e^{-\beta \hbar \omega_j})^2} \right] = \frac{e^{-\beta \hbar \omega_j}}{(1 - e^{-\beta \hbar \omega_j})^2}, \quad (\text{B.14})$$

levando esse resultado na Eq.(B.11) resulta em

$$\begin{aligned} \langle \hat{\Gamma}^\dagger(t) \hat{\Gamma}(t') \rangle_R &= \sum_j |\kappa_j|^2 e^{i\omega_j(t-t')} \frac{e^{-\beta \hbar \omega_j}}{1 - e^{-\beta \hbar \omega_j}} \\ &= \sum_j |\kappa_j|^2 e^{i\omega_j(t-t')} \bar{n}(\omega_j, \beta), \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

com,

$$\bar{n}(\omega_j, \beta) = \text{tr}_R \left(\hat{r}_j^\dagger \hat{r}_j \hat{R}_0 \right) \delta_{j,l}. \quad (\text{B.16})$$

Da mesma forma encontraremos

$$\begin{aligned} \langle \hat{\Gamma}(t) \hat{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R &= \sum_j |\kappa_j|^2 e^{-i\omega_j(t-t')} \text{tr}_R \left[\prod_j e^{-\beta \hbar \omega_j \hat{r}_j^\dagger \hat{r}_j} (1 - e^{-\beta \hbar \omega_j}) \hat{r}_j \hat{r}_j^\dagger \right] \\ &= \sum_j |\kappa_j|^2 e^{-i\omega_j(t-t')} \text{tr}_R \left[\prod_j e^{-\beta \hbar \omega_j \hat{r}_j^\dagger \hat{r}_j} (1 - e^{-\beta \hbar \omega_j}) (1 + \hat{r}_j^\dagger \hat{r}_j) \right] \\ &= \sum_j |\kappa_j|^2 e^{-i\omega_j(t-t')} (1 + n_j) e^{-\beta \hbar \omega_j n_j} (1 - e^{-\beta \hbar \omega_j}) \\ &= \sum_j |\kappa_j|^2 e^{-i\omega_j(t-t')} [1 + \bar{n}(\omega_j, \beta)]. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Na Eq.(B.17) usamos o fato de que,

$$[\hat{r}_j, \hat{r}_j^\dagger] = 1 \quad \implies \quad \hat{r}_j \hat{r}_j^\dagger = 1 + \hat{r}_j^\dagger \hat{r}_j. \quad (\text{B.18})$$

B.2 Caso Fermiônico

Da mesma forma como para o reservatório térmico bosônico encontraremos de forma similar para o reservatório térmico fermiônico,

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\Gamma}(t) \hat{\Gamma}(t') \rangle_R &= \sum_{j,l} \kappa_j \kappa_l e^{-i\omega_j t} e^{-i\omega_l t'} \text{tr}_R \left[\hat{\sigma}_{-,j}^{(R)} \hat{\sigma}_{-,l}^{(R)} \hat{R}_0 \right] \\
&= \sum_{j,l} \kappa_j \kappa_l e^{-i\omega_j t} e^{-i\omega_l t'} \text{tr}_R \left[\hat{\sigma}_{-,j}^{(R)} \hat{\sigma}_{-,l}^{(R)} \prod_j \frac{e^{-(\beta\hbar/2)\omega_j \hat{\sigma}_{z,j}^{(R)}}}{e^{(\beta\hbar/2)\omega_j} + e^{-(\beta\hbar/2)\omega_j}} \right] \\
&= \sum_{j,l} \kappa_j \kappa_l e^{-i\omega_j t} e^{-i\omega_l t'} \text{tr}_{R_j} \left[\frac{\hat{\sigma}_{-,j}^{(R)} \hat{\sigma}_{-,l}^{(R)} e^{-(\beta\hbar/2)\omega_j \hat{\sigma}_{z,j}^{(R)}}}{e^{(\beta\hbar/2)\omega_j} + e^{-(\beta\hbar/2)\omega_j}} \right] \\
&= \sum_{j,l} \kappa_j \kappa_l e^{-i\omega_j t} e^{-i\omega_l t'} \left[\langle g_j | \langle g_l | \frac{\hat{\sigma}_{-,j}^{(R)} \hat{\sigma}_{-,l}^{(R)} e^{-(\beta\hbar/2)\omega_j \hat{\sigma}_{z,j}^{(R)}}}{e^{(\beta\hbar/2)\omega_j} + e^{-(\beta\hbar/2)\omega_j}} | g_l \rangle | g_j \rangle + \right. \\
&\quad \left. + \langle e_j | \langle e_l | \frac{\hat{\sigma}_{-,j}^{(R)} \hat{\sigma}_{-,l}^{(R)} e^{-(\beta\hbar/2)\omega_j \hat{\sigma}_{z,j}^{(R)}}}{e^{(\beta\hbar/2)\omega_j} + e^{-(\beta\hbar/2)\omega_j}} | e_l \rangle | e_j \rangle \right] \\
&= \sum_{j,l} \kappa_j \kappa_l e^{-i\omega_j t} e^{-i\omega_l t'} \left\{ \frac{e^{(\beta\hbar/2)\omega_j}}{e^{(\beta\hbar/2)\omega_j} + e^{-(\beta\hbar/2)\omega_j}} \left[\underbrace{\langle g_j | \hat{\sigma}_{-,j}^{(R)} | g_j \rangle}_{=0} \langle g_l | \hat{\sigma}_{-,j}^{(R)} | g_l \rangle \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{e^{-(\beta\hbar/2)\omega_j}}{e^{(\beta\hbar/2)\omega_j} + e^{-(\beta\hbar/2)\omega_j}} \left[\underbrace{\langle e_j | \hat{\sigma}_{-,j}^{(R)} | e_j \rangle}_{=|g_j\rangle} \langle e_l | \hat{\sigma}_{-,j}^{(R)} | e_l \rangle \right] \right\} \\
\langle \hat{\Gamma}(t) \hat{\Gamma}(t') \rangle_R &= 0. \tag{B.19}
\end{aligned}$$

Da mesma forma

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\Gamma}^\dagger(t) \hat{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R &= \sum_{j,l} \kappa_j^* \kappa_l^* e^{i\omega_j t} e^{i\omega_l t'} \text{tr}_R \left[\hat{\sigma}_{+,j}^{(R)} \hat{\sigma}_{+,l}^{(R)} \hat{R}_0 \right] \\
&= \sum_{j,l} \kappa_j^* \kappa_l^* e^{i\omega_j t} e^{i\omega_l t'} \text{tr}_{R_j} \left[\hat{\sigma}_{+,j}^{(R)} \hat{\sigma}_{+,l}^{(R)} \prod_j \frac{e^{-(\beta\hbar/2)\omega_j \hat{\sigma}_{z,j}^{(R)}}}{e^{(\beta\hbar/2)\omega_j} + e^{-(\beta\hbar/2)\omega_j}} \right] \\
&= \sum_{j,l} \kappa_j^* \kappa_l^* e^{i\omega_j t} e^{i\omega_l t'} \left[\langle g_j | \langle g_l | \frac{\hat{\sigma}_{+,j}^{(R)} \hat{\sigma}_{+,l}^{(R)} e^{-(\beta\hbar/2)\omega_j \hat{\sigma}_{z,j}^{(R)}}}{e^{(\beta\hbar/2)\omega_j} + e^{-(\beta\hbar/2)\omega_j}} | g_j \rangle | g_l \rangle + \right. \\
&\quad \left. + \langle e_j | \langle e_l | \frac{\hat{\sigma}_{+,j}^{(R)} \hat{\sigma}_{+,l}^{(R)} e^{-(\beta\hbar/2)\omega_j \hat{\sigma}_{z,j}^{(R)}}}{e^{(\beta\hbar/2)\omega_j} + e^{-(\beta\hbar/2)\omega_j}} | e_l \rangle | e_j \rangle \right] \\
&= \sum_{j,l} \kappa_j^* \kappa_l^* e^{i\omega_j t} e^{i\omega_l t'} \left\{ \frac{e^{(\beta\hbar/2)\omega_j}}{e^{(\beta\hbar/2)\omega_j} + e^{-(\beta\hbar/2)\omega_j}} \left[\langle g_j | \underbrace{\hat{\sigma}_{+,j}^{(R)} | g_j \rangle}_{=|e_j\rangle} \langle g_l | \underbrace{\hat{\sigma}_{+,l}^{(R)} | g_l \rangle}_{=|e_l\rangle} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{e^{-(\beta\hbar/2)\omega_j}}{e^{(\beta\hbar/2)\omega_j} + e^{-(\beta\hbar/2)\omega_j}} \left[\langle e_j | \underbrace{\hat{\sigma}_{+,j}^{(R)} | e_j \rangle}_{=0} \langle e_l | \underbrace{\hat{\sigma}_{+,l}^{(R)} | e_l \rangle}_{=0} \right] \right\} \\
\langle \hat{\Gamma}^\dagger(t) \hat{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R &= 0, \tag{B.20}
\end{aligned}$$

O desenvolvimento de $\langle \hat{\Gamma}^\dagger(t) \hat{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R$ e $\langle \hat{\Gamma}(t) \hat{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R$, será feito da seguinte forma, respectivamente,

$$\langle \hat{\Gamma}^\dagger(t) \hat{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R = \sum_{j,l} \kappa_j^* \kappa_l e^{i\omega_j t} e^{-i\omega_l t'} \text{tr}_R \left(\hat{\sigma}_{+,j}^{(R)} \hat{\sigma}_{-,l}^{(R)} \hat{R}_0 \right), \tag{B.21}$$

e

$$\langle \hat{\Gamma}(t) \hat{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R = \sum_{j,l} \kappa_j \kappa_l^* e^{-i\omega_j t} e^{i\omega_l t'} \text{tr}_R \left(\hat{\sigma}_{-,j}^{(R)} \hat{\sigma}_{+,l}^{(R)} \hat{R}_0 \right). \tag{B.22}$$

Quando ($j \neq l$),

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\Gamma}^\dagger(t) \hat{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R &= \sum_{j,l} \kappa_j^* \kappa_l e^{i\omega_j t} e^{-i\omega_l t'} \left\{ \frac{e^{(\beta\hbar/2)\omega_j}}{e^{(\beta\hbar/2)\omega_j} + e^{-(\beta\hbar/2)\omega_j}} \left[\langle g_j | \underbrace{\hat{\sigma}_{+,j}^{(R)} | g_j \rangle}_{=|e_j\rangle} \langle g_l | \underbrace{\hat{\sigma}_{-,l}^{(R)} | g_l \rangle}_{=0} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{e^{-(\beta\hbar/2)\omega_j}}{e^{(\beta\hbar/2)\omega_j} + e^{-(\beta\hbar/2)\omega_j}} \left[\langle e_j | \underbrace{\hat{\sigma}_{+,j}^{(R)} | e_j \rangle}_{=0} \langle e_l | \underbrace{\hat{\sigma}_{-,l}^{(R)} | e_l \rangle}_{=|g_l\rangle} \right] \right\} \\
&= 0. \tag{B.23}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\Gamma}(t) \hat{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R &= \sum_{j,l} \kappa_j \kappa_l^* e^{-i\omega_j t} e^{i\omega_l t'} \left\{ \frac{e^{(\beta\hbar/2)\omega_j}}{e^{(\beta\hbar/2)\omega_j} + e^{-(\beta\hbar/2)\omega_j}} \left[\underbrace{\langle g_j | \hat{\sigma}_{+,j}^{(R)} | g_j \rangle}_{=0} \underbrace{\langle g_l | \hat{\sigma}_{-,l}^{(R)} | g_l \rangle}_{=|e_l\rangle} \right] + \right. \\
&+ \left. \frac{e^{-(\beta\hbar/2)\omega_j}}{e^{(\beta\hbar/2)\omega_j} + e^{-(\beta\hbar/2)\omega_j}} \left[\underbrace{\langle e_j | \hat{\sigma}_{+,j}^{(R)} | e_j \rangle}_{=|g_j\rangle} \underbrace{\langle e_l | \hat{\sigma}_{-,l}^{(R)} | e_l \rangle}_{=0} \right] \right\} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{B.24}$$

Quando ($j = l$),

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\Gamma}(t) \hat{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R &= \sum_j |\kappa_j|^2 e^{i\omega_j(t-t')} \left\{ \frac{e^{(\beta\hbar/2)\omega_j}}{e^{(\beta\hbar/2)\omega_j} + e^{-(\beta\hbar/2)\omega_j}} \left[\langle g_j | \hat{\sigma}_{+,j}^{(R)} \underbrace{\hat{\sigma}_{-,j}^{(R)} | g_j \rangle}_{=0} \right] + \right. \\
&+ \left. \frac{e^{-(\beta\hbar/2)\omega_j}}{e^{(\beta\hbar/2)\omega_j} + e^{-(\beta\hbar/2)\omega_j}} \left[\langle e_j | \underbrace{\hat{\sigma}_{+,j}^{(R)} \hat{\sigma}_{-,j}^{(R)} | e_j \rangle}_{=|g_j\rangle} \right] \right\} \\
&= \sum_j |\kappa_j|^2 e^{i\omega_j(t-t')} \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_j} + 1} \\
&= \sum_j |\kappa_j|^2 e^{i\omega_j(t-t')} \bar{n}(\omega_j, \beta),
\end{aligned} \tag{B.25}$$

com,

$$\bar{n}(\omega_j, \beta) = \text{tr}_R \left[\hat{\sigma}_{-,j}^{(R)} \hat{\sigma}_{+,l}^{(R)} \hat{R}_0 \right] \delta_{j,l}. \tag{B.26}$$

Da mesma forma encontraremos,

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\Gamma}^\dagger(t) \hat{\Gamma}(t') \rangle_R &= \sum_j |\kappa_j|^2 e^{-i\omega_j(t-t')} \left\{ \frac{e^{(\beta\hbar/2)\omega_j}}{e^{(\beta\hbar/2)\omega_j} + e^{-(\beta\hbar/2)\omega_j}} \left[\langle g_j | \underbrace{\hat{\sigma}_{-,j}^{(R)} \hat{\sigma}_{+,j}^{(R)} | g_j \rangle}_{=|g_j\rangle} \right] + \right. \\
&+ \left. \frac{e^{-(\beta\hbar/2)\omega_j}}{e^{(\beta\hbar/2)\omega_j} + e^{-(\beta\hbar/2)\omega_j}} \left[\langle e_j | \hat{\sigma}_{-,j}^{(R)} \underbrace{\hat{\sigma}_{+,j}^{(R)} | e_j \rangle}_{=0} \right] \right\} \\
&= \sum_j |\kappa_j|^2 e^{-i\omega_j(t-t')} \left[\frac{e^{(\beta\hbar/2)\omega_j} + e^{-(\beta\hbar/2)\omega_j} - e^{-(\beta\hbar/2)\omega_j}}{e^{(\beta\hbar/2)\omega_j} + e^{-(\beta\hbar/2)\omega_j}} \right] \\
&= \sum_j |\kappa_j|^2 e^{-i\omega_j(t-t')} \left[1 - \frac{1}{e^{(\beta\hbar/2)\omega_j} + 1} \right] \\
&= \sum_j |\kappa_j|^2 e^{-i\omega_j(t-t')} [1 - \bar{n}(\omega_j, \beta)].
\end{aligned} \tag{B.27}$$

B.3 Caso Vácuo Comprimido

Da mesma forma como fizemos para os reservatórios térmicos bosônico e fermiônico encontraremos para o reservatório de vácuo comprimido:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\Gamma}^\dagger(t) \hat{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R &= \text{tr}_R \left[\hat{R}_0 \sum_j \kappa_j \hat{b}_j^\dagger e^{i\omega_j t} \sum_l \kappa_l \hat{b}_l^\dagger e^{i\omega_l t'} \right] \\
&= \sum_{j,l} \kappa_j \kappa_l e^{i\omega_j t} e^{i\omega_l t'} \text{tr}_R \left(\hat{R}_0 \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_l^\dagger \right)
\end{aligned} \tag{B.28}$$

Quando ($l \neq j$),

$$\begin{aligned}
\text{tr}_R \left(\hat{R}_0 \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_l^\dagger \right) &= \text{tr}_R \left(\prod_j \hat{S}_j(\xi) |0_j\rangle \langle 0_j| \hat{S}_j^\dagger(\xi) \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_l^\dagger \right) \\
&= \text{tr}_{R_j} \left(\hat{S}_j |0_j\rangle \langle 0_j| \hat{S}_j^\dagger \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_l^\dagger \right) \\
&= \langle 0_j | \hat{S}_j^\dagger \hat{b}_j^\dagger \underbrace{\hat{S}_j \hat{S}_j^\dagger}_{=1} \hat{b}_l^\dagger \hat{S}_j |0_j\rangle \\
&= \langle 0_j | \left[\hat{b}_j^\dagger \cosh(r) - \hat{b}_j e^{-i\theta} \sinh(r) \right] \hat{S}_j^\dagger \hat{b}_l^\dagger \hat{S}_j |0_j\rangle \\
&= \langle 0_j | \underbrace{\hat{b}_j^\dagger |0_j\rangle}_{=|1_j\rangle} \hat{b}_l^\dagger \cosh(r) - \langle 0_j | \underbrace{\hat{b}_j |0_j\rangle}_{=0} \hat{b}_l^\dagger e^{-i\theta} \sinh(r) \\
&= \langle 0_j | 1_j \rangle \hat{b}_l^\dagger \cosh(r) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{B.29}$$

Quando ($l = j$),

$$\begin{aligned}
\text{tr}_R \left(\hat{R}_0 \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j^\dagger \right) &= \langle 0_j | \left[\hat{b}_j^\dagger \cosh(r) - \hat{b}_j e^{-i\theta} \sinh(r) \right] \left[\hat{b}_j^\dagger \cosh(r) - \hat{b}_j e^{-i\theta} \sinh(r) \right] |0_j\rangle \\
&= \langle 0_j | \underbrace{\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j^\dagger |0_j\rangle}_{=|2_j\rangle} \cosh^2(r) - \langle 0_j | \underbrace{\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j |0_j\rangle}_{=0} e^{-i\theta} \cosh(r) \sinh(r) - \\
&\quad - \langle 0_j | \underbrace{\hat{b}_j \hat{b}_j^\dagger |0_j\rangle}_{=|0_j\rangle} e^{-i\theta} \cosh(r) \sinh(r) + \langle 0_j | \underbrace{\hat{b}_j \hat{b}_j |0_j\rangle}_{=0} e^{-2i\theta} \sinh^2(r) \\
&= -e^{-i\theta} \cosh(r) \sinh(r).
\end{aligned} \tag{B.30}$$

Assim:

$$\mathrm{tr}_R \left(\hat{R}_0 \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_l^\dagger \right) = -e^{-i\theta} \cosh(r) \sinh(r) \delta_{j,l}. \quad (\text{B.31})$$

Substituindo este resultado na Eq.(B.28) encontraremos,

$$\langle \hat{\Gamma}^\dagger(t) \hat{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R = - \sum_{j,l} \kappa_j \kappa_l e^{i\omega_j t} e^{i\omega_l t'} e^{-i\theta} \cosh(r) \sinh(r) \delta_{j,l}. \quad (\text{B.32})$$

Da mesma maneira encontraremos,

$$\langle \hat{\Gamma}(t) \hat{\Gamma}(t') \rangle_R = \sum_{j,l} \kappa_j \kappa_l e^{-i\omega_j t} e^{-i\omega_l t'} \mathrm{tr}_R \left(\hat{R}_0 \hat{b}_j \hat{b}_l \right) \quad (\text{B.33})$$

$$= - \sum_{j,l} \kappa_j \kappa_l e^{-i\omega_j t} e^{-i\omega_l t'} e^{i\theta} \cosh(r) \sinh(r) \delta_{j,l}. \quad (\text{B.34})$$

Para os termos cruzados segue que,

$$\begin{aligned} \langle \hat{\Gamma}^\dagger(t) \hat{\Gamma}(t') \rangle_R &= \sum_{j,l} \kappa_j \kappa_l e^{i\omega_j t} e^{-i\omega_l t'} \mathrm{tr}_R \left(\hat{R}_0 \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_l \right) \\ &= \sum_{j,l} \kappa_j \kappa_l e^{i\omega_j t} e^{-i\omega_l t'} \langle 0_j | \hat{S}_j^\dagger \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_l \hat{S}_j | 0_j \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

e

$$\begin{aligned} \langle \hat{\Gamma}(t) \hat{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R &= \sum_{j,l} \kappa_j \kappa_l e^{-i\omega_j t} e^{i\omega_l t'} \mathrm{tr}_R \left(\hat{R}_0 \hat{b}_j \hat{b}_l^\dagger \right) \\ &= \sum_{j,l} \kappa_j \kappa_l e^{-i\omega_j t} e^{i\omega_l t'} \langle 0_j | \hat{S}_j \hat{b}_j \hat{b}_l^\dagger \hat{S}_j^\dagger | 0_j \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

Quando ($l \neq j$),

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_R \left(\hat{R}_0 \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_l \right) &= \langle 0_j | \left[\hat{b}_j^\dagger \cosh(r) - \hat{b}_j e^{-i\theta} \sinh(r) \right] \hat{S}_j^\dagger \hat{b}_l \hat{S}_j | 0_j \rangle \\ &= \langle 0_j | \underbrace{\hat{b}_j^\dagger | 0_j \rangle}_{=|1_j\rangle} \hat{b}_l \cosh(r) - \langle 0_j | \underbrace{\hat{b}_j | 0_j \rangle}_{=0} \hat{b}_l e^{-i\theta} \sinh(r) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

e

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_R \left(\hat{R}_0 \hat{b}_j \hat{b}_l^\dagger \right) &= \langle 0_j | \left[\hat{b}_j \cosh(r) - \hat{b}_j^\dagger e^{i\theta} \sinh(r) \right] \hat{S}_j \hat{b}_l^\dagger \hat{S}_j^\dagger | 0_j \rangle \\ &= \langle 0_j | \underbrace{\hat{b}_j | 0_j \rangle}_{=0} \hat{b}_l^\dagger \cosh(r) - \langle 0_j | \underbrace{\hat{b}_j^\dagger | 0_j \rangle}_{=|1_j\rangle} \hat{b}_l^\dagger e^{i\theta} \sinh(r) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

Quando ($l = j$),

$$\begin{aligned}
\text{tr}_R \left(\hat{R}_0 \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j \right) &= \langle 0_j | \left[\hat{b}_j^\dagger \cosh(r) - \hat{b}_j e^{-i\theta} \sinh(r) \right] \left[\hat{b}_j \cosh(r) - \hat{b}_j^\dagger e^{i\theta} \sinh(r) \right] | 0_j \rangle \\
&= \langle 0_j | \underbrace{\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j}_{=0} | 0_j \rangle \cosh^2(r) - \langle 0_j | \underbrace{\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j^\dagger}_{=|2_j\rangle} | 0_j \rangle e^{i\theta} \cosh(r) \sinh(r) - \\
&\quad - \langle 0_j | \underbrace{\hat{b}_j \hat{b}_j}_{=0} | 0_j \rangle e^{-i\theta} \cosh(r) \sinh(r) + \langle 0_j | \underbrace{\hat{b}_j \hat{b}_j^\dagger}_{=|1_j\rangle} | 0_j \rangle \sinh^2(r) \\
&= \sinh^2(r)
\end{aligned} \tag{B.39}$$

e

$$\begin{aligned}
\text{tr}_R \left(\hat{R}_0 \hat{b}_j \hat{b}_j^\dagger \right) &= \langle 0_j | \left[\hat{b}_j \cosh(r) - \hat{b}_j^\dagger e^{i\theta} \sinh(r) \right] \left[\hat{b}_j^\dagger \cosh(r) - \hat{b}_j e^{-i\theta} \sinh(r) \right] | 0_j \rangle \\
&= \langle 0_j | \underbrace{\hat{b}_j \hat{b}_j^\dagger}_{=|1_j\rangle} | 0_j \rangle \cosh^2(r) - \langle 0_j | \underbrace{\hat{b}_j \hat{b}_j}_{=0} | 0_j \rangle e^{-i\theta} \cosh(r) \sinh(r) - \\
&\quad - \langle 0_j | \underbrace{\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j^\dagger}_{=|2_j\rangle} | 1_j \rangle e^{i\theta} \cosh(r) \sinh(r) + \langle 0_j | \underbrace{\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j}_{=0} | 0_j \rangle \sinh^2(r) \\
&= \cosh^2(r)
\end{aligned} \tag{B.40}$$

Substituindo esses resultados nas Eq.(B.35)-(B.36), encontraremos respectivamente que,

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\Gamma}^\dagger(t) \hat{\Gamma}(t') \rangle_R &= \sum_{j,l} \kappa_j \kappa_l e^{i\omega_j t} e^{-i\omega_l t'} \text{tr}_R \left(\hat{R}_0 \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_l \right) \\
&= \sum_{j,l} \kappa_j \kappa_l e^{i\omega_j t} e^{-i\omega_l t'} \sinh^2(r)
\end{aligned} \tag{B.41}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\Gamma}(t) \hat{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R &= \sum_{j,l} \kappa_j \kappa_l e^{-i\omega_j t} e^{i\omega_l t'} \text{tr}_R \left(\hat{R}_0 \hat{b}_j \hat{b}_l^\dagger \right) \\
&= \sum_{j,l} \kappa_j \kappa_l e^{-i\omega_j t} e^{i\omega_l t'} \cosh^2(r).
\end{aligned} \tag{B.42}$$

Apêndice C

Cálculo de α e β

Seja

$$\alpha \equiv \int_0^t d\tau \int_0^{+\infty} d\omega e^{-i(\omega-\omega_0)\tau} g(\omega) |\kappa(\omega)|^2, \quad (\text{C.1})$$

e

$$\beta \equiv \int_0^t d\tau \int_0^{+\infty} d\omega e^{-i(\omega-\omega_0)\tau} g(\omega) |\kappa(\omega)|^2 \bar{n}(\omega, \beta). \quad (\text{C.2})$$

Inicialmente note que a integração em ω resulta em,

$$\begin{aligned} \int_0^t d\tau e^{-i(\omega-\omega_0)\tau} &= \frac{i}{\omega - \omega_0} [e^{-i(\omega-\omega_0)t} - 1] \\ &= \frac{\sin(\omega - \omega_0)t}{\omega - \omega_0} - i \left[\frac{1 - \cos(\omega - \omega_0)t}{\omega - \omega_0} \right], \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

que será igual a,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega f(\omega) \int_0^t d\tau e^{-i(\omega-\omega_0)\tau} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega f(\omega) \frac{\sin(\omega - \omega_0)t}{\omega - \omega_0} - \\ &- i \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega f(\omega) \left[\frac{1 - \cos(\omega - \omega_0)t}{\omega - \omega_0} \right], \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

onde $t \rightarrow 0$ serve para antecipar a integração em ω , temos que a primeira integração do lado direito da igualdade resulta em,

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega f(\omega) \frac{\sin(\omega - \omega_0)t}{\omega - \omega_0} &= \pi \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega f(\omega) \lim_{t \rightarrow +\infty} \underbrace{\left[\frac{1}{\pi} \frac{\sin(\omega - \omega_0)t}{\omega - \omega_0} \right]}_{=\delta(\omega - \omega_0)} \\
&= \pi \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega f(\omega) \delta(\omega - \omega_0) \\
&= \pi f(\omega_0).
\end{aligned} \tag{C.5}$$

Para a segunda integração teremos

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega f(\omega) \left[\frac{1 - \cos(\omega - \omega_0)t}{\omega - \omega_0} \right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{f(\omega)}{\omega - \omega_0} - \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega f(\omega) \frac{\cos(\omega - \omega_0)t}{\omega - \omega_0} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{f(\omega)}{\omega - \omega_0} - \pi \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega f(\omega) \underbrace{\left[\frac{1}{\pi} \frac{\cos(\omega - \omega_0)t}{\omega - \omega_0} \right]}_{=\delta(\omega - \omega_0)} \\
&= \text{VP} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{f(\omega)}{\omega - \omega_0},
\end{aligned} \tag{C.6}$$

onde, a abreviação VP antes do sinal da integral significa o valor principal da função sob o sinal de integração [74]. Substituindo os resultados (C.5), (C.6) na Eq.(C.1) encontraremos,

$$\begin{aligned}
\alpha &= \int_0^t d\tau \int_0^{+\infty} d\omega e^{-i(\omega - \omega_0)\tau} g(\omega) |\kappa(\omega)|^2 \\
&= \pi \int_0^{+\infty} d\omega \delta(\omega - \omega_0) g(\omega) |\kappa(\omega)|^2 - i \text{VP} \int_0^{+\infty} d\omega \frac{g(\omega) |\kappa(\omega)|^2}{\omega - \omega_0} \\
&= \pi g(\omega_0) |\kappa(\omega_0)|^2 + i \text{VP} \int_0^{+\infty} d\omega \frac{g(\omega) |\kappa(\omega)|^2}{\omega_0 - \omega} \\
\alpha &= \pi g(\omega_0) |\kappa(\omega_0)|^2 + i\Delta.
\end{aligned} \tag{C.7}$$

Da mesma forma para β ,

$$\begin{aligned}
\beta &= \int_0^t d\tau \int_0^{+\infty} d\omega e^{-i(\omega-\omega_0)\tau} g(\omega) |\kappa(\omega)|^2 \bar{n}(\omega, T) \\
&= \pi \int_0^{+\infty} d\omega \delta(\omega - \omega_0) g(\omega) |\kappa(\omega)|^2 \bar{n}(\omega, T) - i \text{VP} \int_0^{+\infty} d\omega \frac{g(\omega) |\kappa(\omega)|^2 \bar{n}(\omega, T)}{\omega - \omega_0} \\
&= \pi g(\omega_0) |\kappa(\omega_0)|^2 \bar{n}(\omega_0, T) + i \text{VP} \int_0^{+\infty} d\omega \frac{g(\omega) |\kappa(\omega)|^2 \bar{n}(\omega, T)}{\omega_0 - \omega} \\
\beta &= \pi g(\omega_0) |\kappa(\omega_0)|^2 \bar{n}(\omega_0, T) + i \Delta'. \tag{C.8}
\end{aligned}$$

onde,

$$\Delta = \text{VP} \int_0^{+\infty} d(\omega) \frac{g(\omega) |\kappa(\omega)|^2}{\omega_0 - \omega}, \tag{C.9}$$

$$\Delta' = \text{VP} \int_0^{+\infty} d(\omega) \frac{g(\omega) |\kappa(\omega)|^2 \bar{n}(\omega, T)}{\omega_0 - \omega}. \tag{C.10}$$

Referências Bibliográficas

- [1] D. Z. ROSSATTO, A. R. DE ALMEIDA, T. WERLANG, C. J. VILLAS-BOAS, and N. G. DE ALMEIDA, *Phys. Rev. A* **86**, 035802 (2012).
- [2] R. DE ASSIS, C. VILLAS-BOAS, and N. DE ALMEIDA, *arXiv preprint arXiv:1805.09936* (2018).
- [3] R. J. DE ASSIS, C. J. VILLAS-BOAS, and N. G. DE ALMEIDA, *Phys. Rev. A* **96**, 013821 (2017).
- [4] V. G. VESELAGO, *Soviet physics uspekhi* **10**, 509 (1968).
- [5] J. B. PENDRY, *Physical review letters* **85**, 3966 (2000).
- [6] R. TYKODI, *American Journal of Physics* **43**, 271 (1975).
- [7] A.-M. TREMBLAY, *Am. J. Phys* **44**, 994 (1975).
- [8] R. TYKODI, *American Journal of Physics* **44**, 997 (1976).
- [9] A. MARI and J. EISERT, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 120602 (2012).
- [10] B. CLEUREN, B. RUTTEN, and C. VAN DEN BROECK, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 120603 (2012).
- [11] A. DANIELIAN, *American Journal of Physics* **44**, 995 (1976).
- [12] P. T. LANDSBERG, *Journal of Physics A: Mathematical and General* **10**, 1773 (1977).
- [13] R. TYKODI, *American Journal of Physics* **46**, 354 (1978).

-
- [14] V. BERDICHEVSKY, I. KUNIN, and F. HUSSAIN, *Physical Review A* **43**, 2050 (1991).
- [15] A. MOSK, *Physical review letters* **95**, 040403 (2005).
- [16] A. RAPP, S. MANDT, and A. ROSCH, *Physical review letters* **105**, 220405 (2010).
- [17] F. TACCHINO, A. AUFFÈVES, M. SANTOS, and D. GERACE, *Physical review letters* **120**, 063604 (2018).
- [18] E. M. PURCELL and R. V. POUND, *Physical Review* **81**, 279 (1951).
- [19] N. F. RAMSEY, *Physical Review* **103**, 20 (1956).
- [20] V. ROMERO-ROCHÍN, *Physical Review E* **88**, 022144 (2013).
- [21] I. M. SOKOLOV, *Nature Physics* **10**, 7 (2014).
- [22] J. DUNKEL and S. HILBERT, *Nature Physics* **10**, 67 (2014).
- [23] S. HILBERT, P. HÄNGGI, and J. DUNKEL, *Physical Review E* **90**, 062116 (2014).
- [24] C. WU, C. WU, D. SONG, H. SU, X. XIE, M. LI, Y. DENG, Y. LIU, and Q. GONG, *The Journal of Chemical Physics* **140**, 141101 (2014).
- [25] M. CAMPISI, *Physical Review E* **91**, 052147 (2015).
- [26] ANGHEL, DRAGOS-VICTOR, *EPJ Web of Conferences* **108**, 02007 (2016).
- [27] P. BUONSANTE, R. FRANZOSI, and A. SMERZI, *Annals of Physics* **375**, 414 (2016).
- [28] F. PRADO, N. DE ALMEIDA, M. MOUSSA, and C. VILLAS-BÔAS, *Physical Review A* **73**, 043803 (2006).
- [29] R. SERRA, C. VILLAS-BOAS, N. DE ALMEIDA, and M. MOUSSA, *Physical Review A* **71**, 045802 (2005).

-
- [30] H.-P. BREUER, F. PETRUCCIONE, et al., *The theory of open quantum systems*, Oxford University Press on Demand, 2002.
- [31] S. M. TAN, *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics* **1**, 424 (1999).
- [32] H. J. CARMICHAEL, *Statistical Methods in Quantum Optics 1: Master Equations and Fokker-Planck Equations*, Texts and monographs in physics, Springer, 1999.
- [33] R. ZWANZIG, *Journal of Statistical Physics* **9**, 215 (1973).
- [34] L. DIÓSI, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **199**, 517 (1993).
- [35] K. LINDENBERG and B. J. WEST, *The nonequilibrium statistical mechanics of open and closed systems*, Wiley-VCH, 1990.
- [36] A. GHOSH, S. S. SINHA, and D. S. RAY, *Phys. Rev. E* **86**, 011138 (2012).
- [37] P. LI and B. JIA, *Physical Review E* **83**, 062104 (2011).
- [38] J. D. JACKSON, *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, 1st edition, 1962.
- [39] N. ZETTILI, *Quantum Mechanics: Concepts and Applications*, Wiley, 2 edition, 2009.
- [40] R. DE LIMA RODRIGUES, D. F. JUNIOR, S. M. BATISTA, and A. N. VAIDYA, *preprint DF/CCT/04/96, a ser submetidoa publicacao na Rev. Bras. de Ens. de Fsica* (2001).
- [41] R. DE LIMA RODRIGUES, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **19** (1997).
- [42] I. R. SENITZKY, *Phys. Rev.* **119**, 670 (1960).
- [43] I. SENITZKY, *Physical Review* **131**, 2827 (1963).
- [44] E. B. DAVIES, (1976).
- [45] E. CELEGHINI, M. RASETTI, and G. VITIELLO, *Annals of Physics* **215**, 156 (1992).
- [46] A. O. CALDEIRA and A. J. LEGGETT, *Phys. Rev. Lett.* **46**, 211 (1981).

-
- [47] F. GROSSMANN, *The Journal of chemical physics* **103**, 3696 (1995).
- [48] Y. SRIVASTAVA, G. VITIELLO, and A. WIDOM, *Annals of Physics* **238**, 200 (1995).
- [49] E. A. CALZETTA and B.-L. B. HU, *Nonequilibrium Quantum Field Theory, by Esteban A. Calzetta, Bei-Lok B. Hu, Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2008* (2008).
- [50] J. J. SAKURAI and J. NAPOLITANO, *Modern quantum mechanics*, Pearson Harlow, 2014.
- [51] V. SCHOMAKER and R. GLAUBER, *Nature* **170**, 290 (1952).
- [52] J. GUBERNATIS, E. DOMANY, J. KRUMHANSL, and M. HUBERMAN, *Journal of Applied Physics* **48**, 2812 (1977).
- [53] D. P. DIVINCENZO and D. LOSS, *Physical Review B* **71**, 035318 (2005).
- [54] G. MOY, J. HOPE, and C. SAVAGE, *Physical Review A* **59**, 667 (1999).
- [55] C. KARLEWSKI and M. MARTHALER, *Physical Review B* **90**, 104302 (2014).
- [56] J. ILES-SMITH, A. G. DIJKSTRA, N. LAMBERT, and A. NAZIR, *The Journal of chemical physics* **144**, 044110 (2016).
- [57] P.-T. SPANOS and G. P. SOLOMOS, *Journal of Engineering Mechanics* **109**, 1134 (1983).
- [58] M. CHEN, S. C. LIEW, Z. SHAO, and C. KAI, *IEEE transactions on information theory* **59**, 6301 (2013).
- [59] J. J. SAKURAI, *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, rev. edition, 1994.
- [60] I. D. NOVIKOV, *Functional Analysis and Its Applications* **4**, 334 (1970).
- [61] S. R. SALINAS, *Introdução a física estatística vol. 09*, Edusp, 1997.

-
- [62] C.-H. CHOU, T. YU, and B.-L. HU, *Physical Review E* **77**, 011112 (2008).
- [63] D. WALLS and G. MILBURN, *New York* (1994).
- [64] M. O. SCULLY and M. S. ZUBAIRY, *Quantum Optics*, Cambridge University Press, 1997.
- [65] J.-H. AN, S.-J. WANG, H.-G. LUO, and C.-L. JIA, *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics* **6**, 510 (2004).
- [66] P. D. NATION and J. JOHANSSON, *online at <http://qutip.org>* (2011).
- [67] D. LEIBFRIED, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 281 (2003).
- [68] D. LEIBFRIED, R. BLATT, C. MONROE, and D. WINELAND, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 281 (2003).
- [69] W. VOGEL and R. DE MATOS FILHO, *Physical Review A* **52**, 4214 (1995).
- [70] J. POYATOS, J. CIRAC, and P. ZOLLER, *Physical review letters* **77**, 4728 (1996).
- [71] W. ROSADO, G. DE MORAES NETO, F. PRADO, and M. MOUSSA, *Journal of Modern Optics* **62**, 1561 (2015).
- [72] G. LINDBLAD, *Comm. Math. Phys.* **48**, 119 (1976).
- [73] S. M. TAN, *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics* **1**, 424 (1999).
- [74] G. N. W. E. T. WHITTAKER, *A course of modern analysis*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, 4 edition, 1927.