UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DASSAEL FABRÍCIO DOS REIS SANTOS

Problemas de Auto-Valor Não-Lineares: Métodos Topológicos, Variacionais e um Teorema Geral de Sub e Super Soluções

Goiânia
2014

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[X] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):	Dassael Fabrício dos Reis Santos
E-mail:	dassaelfabricio@gmail.com
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [X]Sim [ ] Não	
Vínculo empregatício do autor	Sem Vínculo
Agência de fomento:	CNPq — Sigla: CNPq
País: Brasil	UF: GO — CNPJ: 33654831-0001/36
Título:	Problemas de Auto-Valor Não-Lineares: Métodos Topológicos, Variacionais e Um Teorema Geral de Sub e Super Soluções
Palavras-chave:	Problemas Não-Lineares, Sub e Super Soluções, Grau Topológico, Minimização, Princípios de Máximo.
Título em outra língua:	Nonlinear Eigenvalue Problems: Variational, Topological Methods and a General Theorem of the Sub and Supersolutions
Palavras-chave em outra língua:	Nonlinear Problems, Sub and Supersolutions, Topological Degree, Minimization, Maximum Principles.
Área de concentração:	Análise
Data defesa:	28/03/2014
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado em Matemática
Orientador (a):	José Valdo Abreu Gonçalves
E-mail:	goncalves.jva@gmail.com

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Dassael Fabrício dos Reis Santos

Assinatura do (a) autor (a)

Data: 02 / 07 / 2014

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Dassael Fabrício dos Reis Santos

Problemas de Auto-Valor Não-Lineares: Métodos Topológicos, Variacionais e um Teorema Geral de Sub e Super Soluções

Dissertação apresentada ao Programa de Pós–Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. José Valdo Abreu Gonçalves

Goiânia
2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)
GPT/BC/UFG

S237p

Santos, Dassael Fabrício dos Reis

Problemas de Auto-Valor Não-Lineares: Métodos Topológicos, Variacionais e um Teorema Geral de Sub e Super soluções [manuscrito] / Dassael Fabrício dos Reis Santos. - 2014.

146 f.

Orientador: Profª. Dr. José Valdo Abreu Gonçalves.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, 2014.

Bibliografia.

Inclui abreviaturas e siglas.

Apêndices.

1. Análise matemática 2.Teorema geral - Problemas não lineares I. Título.

CDU – 517.1

DASSAEL FABRÍCIO DOS REIS SANTOS

PROBLEMAS DE AUTO-VALOR NÃO-LINEARES: MÉTODOS TOPOLÓGICOS, VARIACIONAIS E UM TEOREMA GERAL DE SUB E SUPER SOLUÇÕES

Dissertação defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada no dia 28 de março de 2014, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. José Valdo Abreu Gonçalves
Instituto de Matemática e Estatística - UFG
Presidente da Banca

Prof. Dr. Carlos Alberto Pereira dos Santos
Departamento de Matemática - UnB

Prof. Dr. Marcos Leandro Mendes Carvalho
Instituto de Matemática e Estatística - UFG

Dassael Fabrício dos Reis Santos

Graduou-se em Licenciatura em Matemática pela UEG - Universidade Estadual de Goiás. Durante o Mestrado desenvolveu um trabalho teórico em Equações Diferenciais Parciais e foi bolsista CNPq.

À minha mãe Divina pelo amor
e à minha tia Celma pelo cuidado.

.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço à Deus, nosso Senhor, pela vida, por tudo de bom que temos em nossas vidas, por abrir portas e por me porporcionar realizar este trabalho, pois graças à Ele conseguimos tantas vitórias e por ser o grande responsável por esta conquista.

De modo muito especial agradeço ao meu orientador professor José Valdo Abreu Gonçalves pelo tempo, dedicação e estímulo e por acreditar em mim nos momentos em que nem eu mesmo acreditava. Agradeço os valiosos ensinamentos, a amizade, à enorme paciência e a competência e dedicação incontestáveis com que ele conduziu o desenvolvimento deste trabalho e as disciplinas do curso, dando valiosos conselhos e com grande firmeza.

Aos professores Carlos Alberto Pereira dos Santos e Marcos Leandro Mendes Carvalho por aceitarem o convite para participar da banca e pelas críticas e sugestões que enriquecerão este trabalho.

Aos meus pais por toda compreensão e incentivo dado durante esses anos de estudo. Em especial à minha mãe por todo amor e compreensão.

Ao meu grande amor Liliane por todo amor dedicado, pela paciência, pelo carinho e por se mostrar uma companheira de grande prestígio.

À minha tia Celma por todo cuidado e carinho.

À todos meus colegas de mestrado pela grande amizade e pela companhia durante os estudos. Em especial:

Ao Marcos Túlio pela valiosa amizade e companhia nos estudos das disciplinas de EDP.

Ao Thiago pelas conversas produtivas e pelas inúmeras pausas para o café.

Ao Cid pelas incontáveis risadas e pelos "pobremas"enfrentados juntos.

Ao Bruno pelas grandes conversas de almoço e ajuda em Álgebra.

Ao Dióscoros pela amizade verdadeira.

Ao John pelo espanhol que não aprendi.

À Mónica pelo grande coração e por se mostrar uma pessoa sensível.

À Adriana pela amizade e pelos chocolates.

À Nina pelas inúmeras dúvidas compartilhadas.

À Nara pela preocupação, educação e por ser gente boa.

Ao Marcelo pela companhia em Análise Funcional e pelas inúmeras ajudas.

Ao Kayê e ao Marcos Roberto pelas inúmeras ajudas em EDP, sem as quais o caminho para a construção deste trabalho seria bem mais trabalhoso e complicado.
Ao Marcos Leandro por se disponibilizar e ajudar a revisar este trabalho.

À todos estes e aos demais colegas do IME-UFG meus sinceros agradecimentos pela grande amizade demonstrada e por todos os momentos alegres que passamos juntos durante estes anos.

Aos professores da Pós Graduação do IME-UFG por ter nos ajudado à trilhar uma etapa importante de nossas vidas, em especial aos professores José Valdo, Marcelo Souza, Armando Mauro, Durval Tonon e Shirlei Serconeck pela dedicação e por ter contribuido de forma grandiosa para meu aprendizado durante esses anos de formação, sendo seus ensinamentos indispensáveis para o sucesso deste trabalho.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

– Porque você quer tanto isso?
– Porque disseram que eu não conseguiria.
Homens de Honra,
Man of Honror.

Resumo

Dassael Fabrício dos Reis Santos. **Problemas de Auto-Valor Não-Lineares: Métodos Topológicos, Variacionais e um Teorema Geral de Sub e Super Soluções**. Goiânia, 2014. 146p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Neste trabalho estudaremos existência e multiplicidade de soluções não-negativas do problema elíptico não-linear

$$\begin{cases} -div(A(x,\nabla u)) &= \lambda f(x,u) & \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset I\!R^N$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave, $\lambda \geq 0$ é um parâmetro, $f : \Omega \times [0,\infty) \longrightarrow I\!R$ e $A : \Omega \times I\!R^N \longrightarrow I\!R^N$ satisfazem as condições de Carathéodory, A é monotônico e f satisfaz uma condição de crescimento. Para este fim utilizaremos o método de Sub e Super Soluções, Teoria do Grau Topológico, argumentos de simetria e métodos variacionais.

Palavras–chave

Problemas Não-Lineares, Sub e Super Soluções, Grau Topológico, Minimização, Princípios de Máximo.

Abstract

Dassael Fabrício dos Reis Santos. **Nonlinear Eigenvalue Problems: Variational, Topological Methods and a General Theorem of the Sub and Supersolutions,**. Goiânia, 2014. 146p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

In this work we study existence and multiplicity of non-negative solutions of the nonlinear elliptic problem

$$\begin{cases} -div(A(x,\nabla u)) & = & \lambda f(x,u) & \text{in} & \Omega, \\ u & = & 0 & \text{in} & \partial\Omega \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is a bounded domain with smooth boundary $\partial\Omega$, $\lambda \geq 0$ is a parameter, $f : \Omega \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ and $A : \Omega \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ satisfy the Carathéodory conditions, A is monotone and f satisfies a growth condition. To this end we use the method of Sub and Supersolutions, Topological Degree Theory, simmetry arguments and variational methods.

Keywords

Nonlinear Problems, Sub and Supersolutions, Topological Degree, Minimization, Maximum Principles.

Sumário

Introdução

Neste trabalho utilizaremos métodos topológicos, variacionais e técnicas de sub e super soluções para estudar existência e multiplicidade de soluções não-negativas de problemas não-lineares da forma

$$\begin{cases} -div(A(x,\nabla u)) & = & \lambda f(x,u) & \text{em} \quad \Omega, \\ u & = & 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{0-1}$$

onde $\Omega \subset I\!\!R^N$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ regular, $\lambda \geq 0$ é um parâmetro, enquanto que $f : \Omega \times [0,\infty) \longrightarrow I\!\!R$ e $A : \Omega \times I\!\!R^N \longrightarrow I\!\!R^N$ satisfazem as condições de Carathéodory com

$$A = (A_1, A_2, \ldots, A_N).$$

Observamos que

$$A(x,\nabla u) = \nabla u, \ \text{ onde } \ \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right),$$

$$A(x,\nabla u) = \mid \nabla u \mid^{p-2} \nabla u, \ \text{ onde } \ 1 < p < \infty,$$

e

$$A(x,\nabla u) = \phi(\mid \nabla u \mid)\nabla u, \ \text{ onde } \ \phi : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty) \ \text{ é contínua,}$$

são exemplos de operadores $A(x,\nabla u)$ que aparecem no problema (0-1).

Enunciaremos à seguir os resultados principais deste trabalho.

No Capítulo 3 estudaremos existência e multiplicidade de soluções clássicas positivas para o problema não-linear de auto-valor

$$\begin{cases} -\Delta u & = & \lambda f(u) & \text{em} \quad \Omega, \\ u & = & 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{0-2}$$

que é um caso particular de (0-1) visto que

$$\Delta u = div(\nabla u).$$

O principal resultado do Capítulo 3 é devido à Hess [17], foi motivado por trabalhos de Brown e Budin [6] e em essência garante existência de múltiplas soluções para o problema de auto-valor não-linear (0-2) em que o termo não-linear tem um comportamento oscilatório.

Com o ojetivo de enunciar o nosso principal resultado formularemos abaixo as hipóteses em f:

suporemos que $f \in C^1([0,\infty), \mathbb{R})$ satisfaz as seguintes condições:

(f_1) $f(0) > 0$;

(f_2) existem números $a_1, a_2, \cdots, a_m \in (0,\infty)$, tais que,

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_m,$$

e

$$f(a_k) = 0, \ \ k = 1, \cdots, m;$$

(f_3) $\max\{F(s);\ 0 \leq s \leq a_{k-1}\} < F(a_k), \ \ k = 2, \cdots, m,$ onde

$$F(s) = \int_0^s f(\sigma)d\sigma.$$

O resultado é o seguinte:

Teorema 0.1 *Suponha que $\partial\Omega$ é suave e que f satisfaz $(f_1)-(f_3)$. Então, existe um número $\lambda_0 > 0$, tal que, para cada $\lambda > \lambda_0$, o problema (0-2) tem pelo menos $2m-1$ soluções clássicas positivas, a saber $u_1, \widetilde{u}_2, u_2, \cdots, \widetilde{u}_m, u_m \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ satisfazendo*

$$0 < \| u_1 \|_\infty < a_1 \ \ e \ \ a_{k-1} < \| u_k \|_\infty, \| \widetilde{u}_k \|_\infty < a_k, \ \ k = 2, \ldots, m.$$

Além disso,

$$u_1 < u_2 < \cdots < u_m \ \ e \ \ \widetilde{u}_k < u_k \ \ em \ \ \Omega, \ \ k = 2, \ldots, m.$$

A demonstração do **Teorema 0.1** utiliza Métodos Variacionais (Minimização Global), Métodos Topológicos (Grau Topológico de Leray-Schauder) e argumentos envolvendo Sub e Super Soluções.

No Capítulo 4 estudaremos existência e multiplicidade de soluções fracas não-negativas para o problema não-linear de auto-valor

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda f(u) & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{0-3}$$

que é um caso particular de (0-1) visto que

$$\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2} \nabla u), \quad 1 < p < \infty.$$

O principal resultado do Capítulo 4 é devido à Loc e Schmitt [26], generaliza o resultado anterior de Hess no sentido de que é exigido apenas que $f \in C([0,\infty),\mathbb{R})$ e que f pode se anular na origem. Com o ojetivo de enunciar o principal resultado deste capítulo formularemos abaixo as hipóteses em f:

suporemos que $f \in C([0,\infty),\mathbb{R})$ satisfaz as seguintes condições:

$(f_1)'$ $f(0) \geq 0$;

$(f_2)'$ existem constantes $a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, b_{m-1}, a_m \in (0,\infty)$, tais que,

$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < b_{m-1} < a_m$$

e

$$\begin{cases} f(s) \leq 0 & \text{se} \quad a_k < s < b_k, \\ f(s) \geq 0 & \text{se} \quad b_k < s < a_{k+1}, \end{cases} \tag{0-4}$$

para $1 \leq k \leq m-1$;

$(f_3)'$ para $1 \leq k \leq m-1$ tem-se

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(s)ds > 0.$$

Observamos também que a condição $(f_3)'$ é necessária para existência de soluções u com $a_k <\| u_k \|_\infty \leq a_{k+1}$.

O resultado é o seguinte:

Teorema 0.2 *Suponha que $\partial\Omega$ é regular e que f satisfaz as condições $(f_1)' - (f_3)'$. Então existe $\lambda_0 > 0$, tal que, para cada $\lambda \geq \lambda_0$, o problema (0-3) tem pelo menos $m-1$ soluções fracas não-negativas $u_1, \ldots, u_{m-1} \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, satisfazendo*

$$a_k <\| u_k \|_\infty \leq a_{k+1}, \quad 1 \leq k \leq m-1. \tag{0-5}$$

Além disso, se $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ é solução fraca não-negativa de (0-3) satisfazendo (0-5), então

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(s)ds > 0, \ \ 1 \leq k \leq m-1.$$

A definição e observações sobre soluções fracas do problema (0-3) serão dadas no Capítulo 4.

A demonstração do **Teorema 0.2** utiliza Métodos Variacionais (Minimização Global) e argumentos envolvendo Simetria, Sub e Super Soluções e Princípios de Máximo.

O Capítulo 1 trata sobre existência de soluções fracas a partir da existência de sub e super soluções fracas do problema na forma geral (0-1). As definições de sub e super soluções fracas serão dadas naquele capítulo.

Introduziremos à seguir um conjunto geral de hipóteses que serão exploradas no Capítulo 1. Suporemos que A satisfaz as condições:

(A_1) (**Crescimento**) existem $a_1 \in L^{p'}(\Omega)$ e $b_1 > 0$, tal que,

$$| A(x,\xi) | \leq a_1(x) + b_1 | \xi |^{p-1}, \ \ 1 < p < \infty, \tag{0-6}$$

para quase todo $x \in \Omega$ e para todo $\xi \in \mathbb{R}^N$.

(A_2) (**Monotonicidade**) A é monotônico, isto é,

$$(A(x,\xi) - A(x,\xi'))(\xi - \xi') \geq 0, \tag{0-7}$$

para quase todo $x \in \Omega$ e para todo $\xi \in \mathbb{R}^N$.

(A_3) (**Coercividade**) A é coercivo no sentido de que, existem $a_2 \in L^1(\Omega)$ e $b_2 > 0$, tais que,

$$A(x,\xi)\xi \geq b_2 | \xi |^p - a_2(x), \tag{0-8}$$

para quase todo $x \in \Omega$ e para todo $\xi \in \mathbb{R}^N$.

Os principais resultados do Capítulo 1 são formas gerais devidas à Le e Schmitt [24] de resultados sobre sub e super soluções.

Em linhas gerais, o resultado abaixo garante existência de uma solução $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ do problema (0-1) entre uma sub e uma super solução dadas $\underline{u}, \overline{u} \in W^{1,p}(\Omega)$, com $\underline{u} \leq \overline{u}$ em Ω.

Teorema 0.3 *Suponha que $\partial\Omega$ é lipschitz e que A satisfaz $(A_1) - (A_3)$. Sejam $\underline{u}, \overline{u} \in W^{1,p}(\Omega)$ sub e super soluções, respectivamente, do problema (0-1) tais que $\underline{u} \leq \overline{u}$. Seja*

$f:\Omega\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função de Carathéodory satisfazendo:

$$|\,f(x,s)\,|\leq a(x),\ \ q.t.p.\ \ x\in\Omega,\ \ \underline{u}(x)\leq s\leq\overline{u}(x), \tag{0-9}$$

onde $a\in L^{p'}(\Omega)$ com $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.
Então, existe uma solução $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$ do problema (0-1), tal que,

$$\underline{u}\leq u\leq\overline{u},\ \ q.t.p.\ em\ \ \Omega.$$

A demonstração do **Teorema 0.3** consiste em escrever o problema (0-1) em termos de uma equação de operadores em $W^{1,p}(\Omega)$, efetuar uma decomposição apropriada desses operadores e por fim aplicar uma forma generalizada para operadores pseudomonotônicos do Teorema de Browder-Minty.

O resultado à seguir generaliza o **Teorema 0.3** mostrando que o máximo de um número finito de subsoluções e o mínimo de um número finito de super soluções são, respectivamente, sub e super soluções do problema (0-1). Além disso, garante a existência de uma solução do problema (0-1) entre o máximo de um número finito de subsoluções dadas e o mínimo de um número finito de super soluções dadas.

Teorema 0.4 *Suponha que $\partial\Omega$ é lipschitz e que A satisfaz $(A_1)-(A_3)$. Sejam*

$$\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_m\in W^{1,p}(\Omega)$$

subsoluções do problema (0-1) e faça

$$\underline{u}_0=\max\{\underline{u}_1,\ldots,\underline{u}_m\}.$$

Sejam

$$\overline{u}_1,\ldots,\overline{u}_k\in W^{1,p}(\Omega)$$

super soluções do problema (0-1) e faça

$$\overline{u}_0=\min\{\overline{u}_1,\ldots,\overline{u}_k\}.$$

Suponha que $\underline{u}_0\leq\overline{u}_0$ e seja $f:\Omega\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função de Carathéodory satisfazendo:

$$|\,f(x,s)\,|\leq a(x),\ \ q.t.p.\ \ x\in\Omega,\ \ \underline{u}_0(x)\leq s\leq\overline{u}_0(x), \tag{0-10}$$

onde $a\in L^{p'}(\Omega)$ com $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.
Então,

(i) $\underline{u}_0, \overline{u}_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ *são, respectivamente, sub e super soluções de (0-1),*

(ii) *existe uma solução* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *do problema (0-1), tal que,*

$$\underline{u}_0 \leq u \leq \overline{u}_0, \;\; q.t.p. \; em \;\; \Omega.$$

A demonstração do **Teorema 0.4** utiliza o **Teorema 0.3**, resultados de densidade clássicos para Espaços de Sobolev e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue.

No Capítulo 2 faremos um breve resumo sobre a Teoria do Grau Topológico de Leray-Schauder, descrevendo os principais conceitos e propriedades que serão úteis para o desenvolvimento do Capítulo 3 deste trabalho. Além disto, demonstraremos os Teoremas do ponto fixo de Brouwer e de Schauder.

Observação 0.5 *Nos Apêndices relembraremos as definições e propriedades dos Espaços de Sobolev e de operadores monotônicos, coercivos e limitados.*

CAPÍTULO 1

Sub e Super Soluções de Problemas Quasilineares

Apresentaremos neste capítulo dois resultados gerais devidos à Le e Schmitt [24] sobre sub e super soluções para o problema

$$\begin{cases} -div(A(x,\nabla u)) = f(x,u) & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1-1}$$

onde $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de Carathéodory satisfazendo uma condição de crescimento que será formalizada posteriormente e $A : \Omega \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ é um campo vetorial de Carathéodory satisfazendo $(A_1) - (A_3)$.

O problema (1-1) foi estudado por Cuesta [8] em 1997 para o caso particular em que o operador principal assume a forma do p-laplaciano. Neste trabalho, utilizando o lema de Zorn e a desigualdade de Kato, Cuesta mostra que o máximo de um par de subsoluções e o mínimo de um par de super soluções são, respectivamente, sub e supersoluções do problema em questão. Além disso, através de técnicas de sub e super soluções, ela mostra a existência de soluções maximais e minimais entre um par de sub e super soluções do problema 1-1), dado que a função f satisfaz certa condição de crescimento.

Em primeiro lugar formalizaremos as definições de solução, subsolução e super solução para o problema (1-1).

Definição 1.1 *Uma solução de (1-1) é uma função $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ satisfazendo:*

$$\int_\Omega A(x,\nabla u)\nabla v dx = \int_\Omega f(x,u)v dx, \quad v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Definição 1.2 *Uma subsolução de (1-1) é uma função $\underline{u} \in W^{1,p}(\Omega)$ satisfazendo:*

(i) $\displaystyle\int_\Omega A(x,\nabla \underline{u})\nabla v dx \leq \int_\Omega f(x,\underline{u})v dx, \quad v \in W^{1,p}(\Omega) \ \ com \ \ v \geq 0 \ \ em \ \ \Omega,$

(ii) $\underline{u}^+ \in W_0^{1,p}(\Omega).$

Definição 1.3 *Uma super solução de (1-1) é uma função $\overline{u} \in W^{1,p}(\Omega)$ satisfazendo:*

(i) $\displaystyle\int_\Omega A(x,\nabla\overline{u})\nabla v dx \geq \int_\Omega f(x,\overline{u}) v dx, \;\; v \in W^{1,p}(\Omega) \;\; com \;\; v \geq 0 \;\; em \;\; \Omega,$

(ii) $\overline{u}^- \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

1.1 Demonstração do Teorema 0.3

A demonstração é feita utilizando um teorema abstrato que é na verdade uma generalização do Teorema de Browder-Minty. Antes de apresentar o enunciado deste teorema introduzimos algumas definições.

Definição 1.4 *Seja X um espaço de Banach real reflexivo com norma $\|\cdot\|$ e $A : X \longrightarrow X^*$ um operador. Então, A é:*

(i) *hemicontínuo se: a função real $t \longmapsto \langle A(u+tv), w\rangle$ é contínua em $[0,1]$, $\forall u, v, w \in X$.*
(ii) *completamente contínuo se: $u_n \rightharpoonup u$ implica $Au_n \longrightarrow Au$.*
(iii) *limitado se A aplica conjuntos limitados em conjuntos limitados.*
(vi) *coercivo se: $\lim_{\|u\| \longrightarrow \infty} \frac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|} = +\infty$.*

Definição 1.5 *Seja X um espaço de Banach real reflexivo e $A : X \longrightarrow X^*$ um operador. Então, A é:*

(i) *monotônico, se*

$$\langle Au - Av, u - v\rangle \geq 0, \;\; u, v \in X, u \neq v.$$

(ii) *pseudomonotônico, se*

$$u_n \rightharpoonup u \;\; e \;\; \limsup_{n \longrightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle \leq 0$$

implica

$$\langle Au, u - w\rangle \leq \liminf_{n \longrightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - w\rangle, \;\; w \in X.$$

Teorema 1.6 (Teorema Principal dos Operadores Pseudomonotônicos) *Seja X um espaço de Banach real reflexivo, $A : X \longrightarrow X^*$ um operador pseudomonotônico, limitado, coercivo e $b \in X^*$. Então, existe uma solução para a equação $Au = b$.*

Demonstração: (cf. Carl, Le & Motreanu [7], p. 40).

Com o objetivo de demonstrar o **Teorema 0.3** usando o **Teorema 1.6** introduziremos a seguir alguns operadores e lemas técnicos.

Em primeiro lugar, considere o operador B dado por

$$\langle Bu, v\rangle = \int_\Omega b_0(x,u)v\,dx, \quad u,v \in W^{1,p}(\Omega), \tag{1-2}$$

onde

$$b_0(x,u) = (u-\overline{u})^{p-1}\chi_{\{u>\overline{u}\}} - (\underline{u}-u)^{p-1}\chi_{\{u<\underline{u}\}} \tag{1-3}$$

e nesta igualdade χ_A é a função característica do conjunto A e $\underline{u}$, $\overline{u}$ são sub e super soluções do problema (1-1) com $\underline{u} \leq \overline{u}$.

Lema 1.7 *$B : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow (W^{1,p}(\Omega))^*$ está bem definido e satisfaz:*

(i) *B é limitado;*

(ii) *B é completamente contínuo;*

(iii) *B satisfaz*

$$\langle Bu, u\rangle \geq b_5 \parallel u \parallel_p^p - a_5, \quad u \in W^{1,p}(\Omega), \quad a_5, b_5 > 0. \tag{1-4}$$

Em seguida, considere o operador F dado por

$$\langle Fu, v\rangle = \int_\Omega f(x,u)v\,dx, \quad u,v \in W^{1,p}(\Omega). \tag{1-5}$$

Lema 1.8 *Suponha que f satisfaz (0-9). Então $F : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow (W^{1,p}(\Omega))^*$ está bem definido e é limitado.*

A seguir considere o operador T definido para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$ por

$$(Tu)(x) = \begin{cases} \overline{u}(x), & \text{se} \quad u(x) > \overline{u}(x), \\ u(x), & \text{se} \quad \underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x), \\ \underline{u}(x), & \text{se} \quad u(x) < \underline{u}(x). \end{cases} \tag{1-6}$$

Lema 1.9 *$F \circ T : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow (W^{1,p}(\Omega))^*$ está bem definido e satisfaz:*

(i) *$F \circ T$ é limitado;*

(ii) *$F \circ T$ é completamente contínuo.*

Agora, defina o operador $\mathcal{A}$ por

$$\langle \mathcal{A}u, v\rangle = \int_\Omega A(x,\nabla u)\nabla v\,dx, \quad u,v \in W^{1,p}(\Omega). \tag{1-7}$$

Lema 1.10 *$\mathcal{A} : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow (W^{1,p}(\Omega))^*$ está bem definido e satisfaz:*

(i) *$\mathcal{A}$ é limitado;*

(ii) *$\mathcal{A}$ é monotônico;*

(iii) *$\mathcal{A}$ é contínuo;*

(iv) *$\mathcal{A}$ é coercivo no sentido de que*

$$\langle \mathcal{A}u, u\rangle \geq b_2 \parallel \nabla u \parallel_p^p - \parallel a_2(x) \parallel_1, \;\; u \in W^{1,p}(\Omega). \tag{1-8}$$

As demonstrações dos Lemas 1.7, 1.8, 1.9, 1.10 serão dadas no final desta seção.

A partir de agora, por simplicidade, denotaremos

$$\underline{S} = \{x \in \Omega; \;\; u(x) < \underline{u}(x)\},$$

$$S = \{x \in \Omega; \;\; \underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x)\} \;\; \text{e}$$

$$\overline{S} = \{x \in \Omega; \;\; \overline{u}(x) < u(x)\}.$$

À seguir faremos a demonstração do **Teorema 0.3** utilizando os lemas anteriores.

Demonstração do Teorema 0.3. Considere o problema auxiliar

$$\begin{cases} \langle \mathcal{A}u + Bu - F(Tu), v\rangle = 0, & v \in W_0^{1,p}(\Omega), \\ u \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{cases} \tag{1-9}$$

Usaremos o Teorema Principal dos Operadores Pseudomonotônicos (cf. Teorema 1.6) para mostrar que:

Afirmação*: existe uma função $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ com

$$\underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x), \;\; \text{q.t.p.} \;\; x \in \Omega, \tag{1-10}$$

satisfazendo (1-9).

Suponha provada a **Afirmação***.

Usando a **Afirmação*** e as definições de b_0 e T em (1-3) e (1-6), temos

$$b_0(x,u) = 0 \;\; \text{e} \;\; Tu(x) = u(x), \;\; x \in \Omega.$$

Logo, pelas definições de B e T concluímos que $Bu = 0$ e $F(Tu) = Fu$. Daí, (1-9) se reescreve como

$$\begin{cases} \langle \mathcal{A}u - Fu, v\rangle = 0, & v \in W_0^{1,p}(\Omega), \\ u \in W_0^{1,p}(\Omega), \end{cases} \tag{1-11}$$

isto é,

$$\int_\Omega A(x,\nabla u)\nabla v dx = \int_\Omega f(x,u)v dx, \ \ u,v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

ou seja, u é uma solução fraca do problema (1-1) com

$$\underline{u}(x) \le u(x) \le \overline{u}(x), \ \text{ q.t.p. } \ x \in \Omega,$$

ficando demonstrado o **Teorema 0.3** à menos da **Afirmação***.

A seguir demonstraremos a **Afirmação***. Dividiremos a prova em alguns passos.

Passo 1: $\mathcal{A} + B - F \circ T$ é pseudomonotônico.

De fato, pelo Lemas 1.7 e 1.9, B e $F \circ T$ são completamente contínuos. Logo $B - F \circ T$ é completamente contínuo. Daí e de (ii) do Lema D.5 tem-se que $B - F \circ T$ é pseudomonotônico. Como $\mathcal{A}$ é monotônico e contínuo, por (i) do Lema D.5, $\mathcal{A}$ é pseudomonotônico e, consequêntemente por (iii) do Lema D.5, $\mathcal{A} + B - F \circ T$ é pseudomonotônico, finalizando o passo 1.

Passo 2: $\mathcal{A} + B - F \circ T$ é coercivo no seguinte sentido:

$$\lim_{\|u\|_{1,p} \longrightarrow \infty} \frac{\langle \mathcal{A}u + Bu - F \circ Tu, u\rangle}{\| u \|_{1,p}} = \infty, \ \ u \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{1-12}$$

De fato, veja que

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}u + Bu - F \circ Tu, u\rangle &= \langle \mathcal{A}u, u\rangle + \langle Bu, u\rangle - \langle F(Tu), u\rangle \\
&\ge \langle \mathcal{A}u, u\rangle + \langle Bu, u\rangle - |\langle F(Tu), u\rangle| \\
&\ge b_2 \| \nabla u \|_p^p - \| a_2(x) \|_1 + b_5 \| u \|_p^p - a_5 - \| a(x) \|_{p'} \| u \|_p \\
&\ge b_2 \| \nabla u \|_p^p - \| a_2(x) \|_1 - a_5 - c^{\frac{1}{p}} \| a(x) \|_{p'} \| \nabla u \|_p \\
&= b_2 \| u \|_{1,p}^p - c^{\frac{1}{p}} \| a(x) \|_{p'} \| u \|_{1,p} - (\| a_2(x) \|_1 + a_5) \\
&= b_2 \| u \|_{1,p}^p - a_6 \| u \|_{1,p} - a_7,
\end{aligned}$$

onde $a_6 = c^{\frac{1}{p}} \| a(x) \|_{p'}$, $a_7 = \| a_2(x) \|_1 - a_5$ e c é a constante da desigualdade de Poincaré-Sobolev. Donde,

$$\frac{\langle \mathcal{A}u + Bu - F \circ Tu, u\rangle}{\| u \|_{1,p}} \ge b_2 \| u \|_{1,p}^{p-1} - a_6 - \frac{a_7}{\| u \|_{1,p}} \longrightarrow \infty$$

quando $\| u \|_{1,p} \longrightarrow \infty$, demonstrando (1-12).

Além disso, $\mathcal{A} + B - F \circ T$ é limitado, uma vez que $\mathcal{A}$, B e $F \circ T$ tem essa propriedade.

Em resumo, provamos que $\mathcal{A} + B - F \circ T$ é pseudomonotônico, limitado e coercivo. Pelo **Teorema 1.6**, existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$\langle \mathcal{A}u + Bu - F \circ Tu, v \rangle = 0, \ \ v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

isto é, existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que u é solução do problema (1-9).

Passo 3: Provaremos agora que,

$$\underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x), \qquad \text{q.t.p. } x \in \Omega.$$

Mostraremos primeiro que $\underline{u} \leq u$ q.t.p. em Ω. Para isto, veja que $\underline{u}, u \in W^{1,p}(\Omega)$. Logo, por Stampacchia (cf. Teorema A.13),

$$(\underline{u} - u)^+ \in W^{1,p}(\Omega).$$

Além disso,

$$(\underline{u} - u)^+ |_{\partial\Omega} = (\underline{u} |_{\partial\Omega} - u |_{\partial\Omega})^+ = 0,$$

donde, $(\underline{u} - u)^+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Escolha $v = (\underline{u} - u)^+$ em (1-9) para escrever

$$\int_\Omega A(x, \nabla u) \nabla (\underline{u} - u)^+ dx + \int_\Omega b_0(x,u)(\underline{u} - u)^+ dx - \int_\Omega f(x, Tu)(\underline{u} - u)^+ dx = 0. \quad (1\text{-}13)$$

Também, tomando $v = (\underline{u} - u)^+$ $(v \geq 0)$ na definição de subsolução, temos

$$\int_\Omega A(x, \nabla \underline{u}) \nabla (\underline{u} - u)^+ dx - \int_\Omega f(x, \underline{u})(\underline{u} - u)^+ dx \leq 0. \quad (1\text{-}14)$$

Subtraindo (1-13) de (1-14), segue que

$$\int_\Omega (A(x, \nabla \underline{u}) - A(x, \nabla u)) \nabla (\underline{u} - u)^+ dx +$$
$$\int_\Omega (f(x.Tu) - f(x, \underline{u}))(\underline{u} - u)^+ dx \leq \int_\Omega b_0(x,u)(\underline{u} - u)^+ dx. \quad (1\text{-}15)$$

Note que utilizando (A_2), tem-se

$$\int_\Omega (A(x,\nabla \underline{u}) - A(x,\nabla u))\nabla(\underline{u}-u)^+ dx = \int_{\underline{S}} (A(x,\nabla \underline{u}) - A(x,\nabla u))(\nabla \underline{u} - \nabla u) dx \geq 0.$$

Além disso, pela definição de Tu, temos que em $\underline{S}$

$$Tu(x) = \underline{u}(x).$$

Logo,

$$\int_\Omega (f(x,Tu) - f(x,\underline{u}))(\underline{u}-u)^+ dx = \int_{\underline{S}} (f(x,\underline{u}) - f(x,\underline{u}))(\underline{u}-u) dx = 0,$$

e por (1-15) temos que

$$0 \leq \int_\Omega b_0(x,u)(\underline{u}-u)^+ dx = -\int_{\underline{S}} (\underline{u}-u)^{p-1}(\underline{u}-u) dx = -\int_{\underline{S}} (\underline{u}-u)^p dx \leq 0,$$

isto é,

$$\int_{\underline{S}} (\underline{u}-u)^p dx = 0. \tag{1-16}$$

Supondo $\underline{S}$ com medida positiva, tem-se $\underline{u} - u = 0$ em $\underline{S}$, donde $\underline{u} = u$ em $\underline{S}$, o que é impossível. Logo, $\underline{S}$ tem medida nula e, portanto,

$$\underline{u} \leq u, \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega.$$

De modo análogo, tomando $v = (u - \overline{u})^+$ em (1-9) e na definição de supersolução, e procedendo com a mesma idéia, prova-se que

$$u \leq \overline{u}, \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega,$$

e, portanto, concluimos que

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u}, \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega,$$

e fica provada a **Afirmação*** e consequentemente completa-se a prova do **Teorema 0.3**.

□

À seguir demonstraremos os Lemas 1.7, 1.8, 1.9 e 1.10 que enunciamos anteriormente.

Demonstração do Lema 1.7. Em primeiro lugar provaremos que:

existem $a_4 \in L^{p'}(\Omega)$ e $b_4 > 0$, tais que,

$$| b_0(x,u) | \leq a_4(x) + b_4 | u |^{p-1}, \text{ q.t.p. } x \in \Omega \text{ e } u \in \mathbb{R}. \tag{1-17}$$

Com efeito, usando (1-3), temos

$$\begin{aligned} | b_0(x,u) | &\leq | u - \overline{u}(x) |^{p-1} + | \underline{u}(x) - u |^{p-1} \\ &\leq 2^{p-1}(| u |^{p-1} + | \overline{u}(x) |^{p-1}) + 2^{p-1}(| \underline{u}(x) |^{p-1} + | u |^{p-1}) \\ &= 2^{p-1}(| \overline{u}(x) |^{p-1} + | \underline{u}(x) |^{p-1} + 2 | u |^{p-1}) \\ &= 2^{p-1}(| \overline{u}(x) |^{p-1} + | \underline{u}(x) |^{p-1}) + 2^p | u |^{p-1} . \end{aligned}$$

Tomando $a_4(x) = 2^{p-1}((| \overline{u}(x) |^{p-1} + | \underline{u}(x) |^{p-1})$ e $b_4 = 2^{p-1}$, temos (1-17).

Mostraremos à seguir que B está bem definido.

De fato, note que $| u |^{p-1} \in L^{p'}(\Omega)$ pois, como $W^{1,p}(\Omega) \overset{cpt}{\hookrightarrow} L^p(\Omega)$, tem-se que $u \in L^p(\Omega)$, e daí

$$\int_\Omega (| u |^{p-1})^{p'} dx = \int_\Omega (| u |^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} dx = \int_\Omega | u |^p \, dx < \infty.$$

Assim, utilizando a desigualdade de Hölder e imersões de Sobolev, segue que

$$\begin{aligned} \int_\Omega | b_0(x,u) || v | \, dx &\leq \int_\Omega a_4(x) | v | \, dx + b_4 \int_\Omega | u |^{p-1} | v | \, dx \\ &\leq \| a_4(x) \|_{p'} \| v \|_p + b_4 \| u \|_{p'}^{p-1} \| v \|_p \\ &= (\| a_4(x) \|_{p'} + b_4 \| u \|_{p'}^{p-1}) \| v \|_p \\ &\leq c(\| a_4(x) \|_{p'} + b_4 \| u \|_{p'}^{p-1}) \| v \|_{1.p} \\ &= \overline{c} \| v \|_{1,p} . \end{aligned} \tag{1-18}$$

onde $\overline{c} = \overline{c}(a_4, b_4, u, p)$ e c é a constante da imersão de $W^{1,p}(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$. Portanto, B está bem definido.

Verificação de (i)**.** B é limitado, isto é, B aplica conjuntos limitados em conjuntos limitados.

De fato, como

$$| \langle Bu, v \rangle | \leq \int_\Omega | b_0(x,u) || v | \, dx$$

por (1-18), tem-se que

$$\| Bu \| = \sup_{\|v\|_{1,p}\leq 1} |\langle Bu, v\rangle| \leq \sup_{\|v\|_{1,p}\leq 1} \int_\Omega |b_0(x,u)||v|\,dx \leq \sup_{\|v\|_{1,p}\leq 1} \overline{c}\,\| v \|_{1,p} \leq \overline{c},$$

mostrando que B é limitado.

Também, observe que para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$ fixado, a função

$$v \longmapsto \langle Bu, v\rangle$$

é bem definida, linear, limitada e contínua.

Verificação de (ii)**.** B é completamente contínuo.

De fato, seja $(u_n) \subset W^{1,p}(\Omega)$ uma sequência, tal que, $u_n \rightharpoonup u$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Mostraremos que

$$Bu_n \longrightarrow Bu \ \text{ em } \ (W^{1,p}(\Omega))^*,$$

ou seja,

$$\| Bu_n - Bu \|_{(W^{1,p}(\Omega))^*} \longrightarrow 0,$$

isto é,

$$\sup_{\|v\|_{1,p}\leq 1} |\langle Bu_n - Bu, v\rangle| \longrightarrow 0.$$

Veja que, utilizando a desigualdade de Hölder e as imersões de Sobolev, tem-se

$$\begin{aligned} |\langle Bu_n - Bu, v\rangle| &\leq \int_\Omega |b_0(x,u_n) - b_0(x,u)||v|\,dx \\ &\leq \| b_0(x,u_n) - b_0(x,u)\|_{p'} \| v \|_p \\ &\leq c\,\| b_0(x,u_n) - b_0(x,u)\|_{p'} \| v \|_{1,p}, \end{aligned} \tag{1-19}$$

donde,

$$\sup_{\|v\|_{1,p}\leq 1} |\langle Bu_n - Bu, v\rangle| \leq c\,\| b_0(x,u_n) - b_0(x,u)\|_{p'}\,. \tag{1-20}$$

Agora, como $u_n \overset{W^{1,p}(\Omega)}{\rightharpoonup} u$ e $W^{1,p}(\Omega) \overset{cpt}{\hookrightarrow} L^p(\Omega)$, então $u_n \overset{L^p(\Omega)}{\longrightarrow} u$ donde, por resultados de Teoria da Medida, existe uma subsequência, que denotaremos simplesmente por (u_n), e uma função $h \in L^p(\Omega)$ tal que

$$u_n \longrightarrow u \ \text{ q.t.p. em } \ \Omega \ \text{ e } \ |u_n| \leq h \ \text{ q.t.p. em } \ \Omega.$$

Veja que, para cada $x \in \Omega$ fixado, b_0 é contínua, logo

$$b_0(x,u_n) \longrightarrow b_0(x,u), \quad \text{q.t.p. em } \Omega,$$

isto é,

$$| b_0(x,u_n) - b_0(x,u) | \longrightarrow 0, \quad \text{q.t.p. em } \Omega,$$

donde,

$$| b_0(x,u_n) - b_0(x,u) |^{p'} \longrightarrow 0, \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Além disso,

$$| b_0(x,u_n) - b_0(x,u) |^{p'} \leq 2^{p'}(| b_0(x,u_n) |^{p'} + | b_0(x,u) |^{p'})$$

donde, por (1-17), existem $a_4 \in L^{p'}(\Omega)$ e $b_4 > 0$, tais que,

$$\begin{aligned} | b_0(x,u_n) - b_0(x,u) |^{p'} &\leq 2^{p'}((a_4(x) + b_4 | u_n |^{p-1})^{p'} + (a_4(x) + b_4 | u |^{p-1})^{p'}) \\ &\leq 2^{p'}(2^{p'}(| a_4(x) |^{p'} + c_4 | u_n |^{p'(p-1)}) + \\ &\quad 2^{p'}(| a_4(x) |^{p'} + c_4 | u |^{p'(p-1)})) \\ &\leq 2^{2p'}(2 | a_4(x) |^{p'} + c_4 | h |^{p} + c_4 | u |^{p)}), \end{aligned}$$

onde $c_4 = b_4^{p'}$ e $2^{2p'}(2 | a_4(x) |^{p'} + c_4 | h |^{p} + b_4^{p'} | u |^{p}) \in L^1(\Omega)$.

Assim, pelo Teorema de Lebesgue

$$\int_{\Omega} | b_0(x,u_n) - b_0(x,u) |^{p'} \, dx \longrightarrow 0,$$

isto é,

$$\| b_0(x,u_n) - b_0(x,u) \|_{p'}^{p'} \longrightarrow 0,$$

donde

$$\| b_0(x,u_n) - b_0(x,u) \|_{p'} \longrightarrow 0.$$

Daí e de (1-20), vem que

$$\sup_{\|v\|_{1,p} \leq 1} | \langle Bu_n - Bu, v \rangle | \longrightarrow 0,$$

isto é, $Bu_n \longrightarrow Bu$ e, portanto, B é completamente contínuo.

Verificação de (iii)**.** Existem $a_5, b_5 > 0$, tais que,

$$\langle Bu, u\rangle \geq b_5 \parallel u \parallel_p^p - a_5, \quad u \in W^{1,p}(\Omega). \tag{1-21}$$

De fato, para $u \in W^{1,p}(\Omega) \overset{cpt}{\hookrightarrow} L^p(\Omega)$, tem-se

$$\begin{aligned}
\langle Bu, u\rangle &= \int_\Omega b_0(x,u)u dx \\
&= \int_{\underline{S}} b_0(x,u)u dx + \int_S b_0(x,u)u dx + \int_{\overline{S}} b_0(x,u)u dx \\
&= \int_{\overline{S}} (u-\overline{u})^{p-1} u dx - \int_{\underline{S}} (\underline{u}-u)^{p-1} u dx \\
&\geq \int_{\overline{S}} (c_1 \mid u \mid^{p-1} - c_2 \mid \overline{u} \mid^{p-1}) \mid u \mid dx + \\
&\quad \int_{\underline{S}} (c_1 \mid u \mid^{p-1} - c_2 \mid \underline{u} \mid^{p-1}) \mid u \mid dx \\
&= c_1 \int_{\overline{S}} \mid u \mid^p dx - c_2 \int_{\overline{S}} \mid \overline{u} \mid^{p-1} \mid u \mid dx + \\
&\quad c_1 \int_{\underline{S}} \mid u \mid^p dx - c_2 \int_{\underline{S}} \mid \underline{u} \mid^{p-1} \mid u \mid dx \\
&= c_1 \left(\int_{\overline{S}} \mid u \mid^p dx + \int_{\underline{S}} \mid u \mid^p dx \right) - \\
&\quad c_2 \left(\int_{\overline{S}} \mid \overline{u} \mid^{p-1} \mid u \mid dx + \int_{\underline{S}} \mid \underline{u} \mid^{p-1} \mid u \mid dx \right) \\
&= c_1 \int_\Omega \mid u \mid^p dx - c_1 \int_S \mid u \mid^p dx - \\
&\quad c_2 \left(\int_{\overline{S}} \mid \overline{u} \mid^{p-1} \mid u \mid dx + \int_{\underline{S}} \mid \underline{u} \mid^{p-1} \mid u \mid dx \right).
\end{aligned} \tag{1-22}$$

Afirmação 1: À menos da primeira integral, as integrais envolvidas em (1-22) dependem somente de $\underline{u}$ e $\overline{u}$.

A demonstração da **Afirmação 1** será provada no final deste capítulo.

Usando a **Afirmação 1** em (1-22), faça

$$b_5 = c_1 \text{ e } a_5 = c_1 \int_S \mid u \mid^p dx + c_2 \left(\int_{\overline{S}} \mid \overline{u} \mid^{p-1} \mid u \mid dx + \int_{\underline{S}} \mid \underline{u} \mid^{p-1} \mid u \mid dx \right).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\langle Bu, u\rangle &\geq b_5 \int_\Omega \mid u \mid^p dx - a_5 \\
&= b_5 \parallel u \parallel_p^p - a_5,
\end{aligned}$$

e (iii) está provado.

$\square$

Demonstração do Lema 1.8. Provaremos primeiro que F está bem definido.

De fato, utilizando (0-9), a desigualdade de Hölder e as imersões de Sobolev, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mid f(x,u) \mid\mid v \mid dx &\leq \int_{\Omega} a(x) \mid v \mid dx \\ &\leq \| a(x) \|_{p'} \| v \|_{p} \\ &\leq c \| a(x) \|_{p'} \| v \|_{1,p}, \end{aligned} \tag{1-23}$$

onde c é a constante da imersão de $W^{1,p}(\Omega)$ em $L^{p}(\Omega)$. Assim, F está bem definido.

Além disso, F é limitado, isto é, F aplica conjuntos limitados em conjuntos limitados. De fato, como

$$\mid \langle Fu, v \rangle \mid \leq \int_{\Omega} \mid f(x,u) \mid\mid v \mid dx$$

por (1-23), tem-se que

$$\| Fu \| = \sup_{\|v\|_{1,p} \leq 1} \mid \langle Fu, v \rangle \mid \leq \sup_{\|v\|_{1,p} \leq 1} \int_{\Omega} \mid f(x,u) \mid\mid v \mid dx \leq c \| a(x) \|_{p'},$$

mostrando que F é limitado.

Também, observe que para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$ fixado, a aplicação

$$v \longmapsto \langle Fu, v \rangle$$

é bem definida, linear, contínua e limitada.

$\square$

Demonstração do Lema 1.9. Provaremos primeiro que $F \circ T$ é bem definido.

De fato, veja que

$$\langle F \circ Tu, v \rangle = \langle F(Tu), v \rangle = \int_{\Omega} f(x, Tu) v dx.$$

Consequentemente, a prova de que $F \circ T$ é bem definido segue imediatamente do **Lema 1.8**.

Verificação de (i). $F \circ T$ é limitado, isto é, $F \circ T$ aplica conjuntos limitados em conjuntos limitados.

De fato, sabendo que

$$\langle F \circ Tu, v \rangle = \int_{\Omega} f(x, Tu) v dx,$$

e utilizando os mesmos argumentos do **Lema 1.8**, obtém-se que $F \circ T$ é limitado.

Verificação de (ii)**.** $F \circ T$ é completamente contínuo.

De fato, seja $(u_n) \subset W^{1,p}(\Omega)$ uma sequência tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Vamos mostrar que

$$F \circ Tu_n \longrightarrow F \circ Tu, \text{ em } (W^{1,p}(\Omega))^*,$$

isto é,

$$\| F \circ Tu_n - F \circ Tu \|_{(W^{1,p}(\Omega))^*} \longrightarrow 0,$$

ou seja,

$$\sup_{\|v\|_{1,p} \leq 1} | \langle F \circ Tu_n - F \circ Tu, v \rangle | \longrightarrow 0. \tag{1-24}$$

Veja que,

$$\begin{aligned} | \langle F \circ Tu_n - F \circ Tu, v \rangle | &\leq \int_{\Omega} | f(x, Tu_n) - f(x, Tu) || v | dx \\ &\leq \| f(x, Tu_n) - f(x, Tu) \|_{p'} \| v \|_p \\ &\leq c \| f(x, Tu_n) - f(x, Tu) \|_{p'} \| v \|_{1,p}, \end{aligned} \tag{1-25}$$

donde

$$\sup_{\|v\|_{1,p} \leq 1} | \langle F \circ Tu_n - F \circ Tu, v \rangle | \leq c \| f(x, Tu_n) - f(x, Tu) \|_{p'} . \tag{1-26}$$

Consideremos, então, os seguintes casos:

Caso 1: $u > \overline{u}$.

Neste caso, suponha que $u(x) > u_n(x)$. Logo, para cada $x \in \overline{S}$, existe $n_0 = n_0(x)$, tal que, para todo $n \geq n_0$, tem-se

$$u(x) > u_n(x) > \overline{u}(x),$$

e, pelo modo como definimos T, tem-se $Tu_n = \overline{u}$. Logo,

$$f(x, Tu_n) = f(x, \overline{u}) = f(x, Tu),$$

donde

$$| f(x,Tu_n) - f(x,Tu) | = 0.$$

Além disso, por (0-9), tem-se

$$| f(x,Tu_n) - f(x,Tu) | \leq | f(x,Tu_n) | + | f(x,Tu) | \leq 2a(x) \in L^{p'}(\Omega),$$

e pelo Teorema de Lebesgue segue que

$$\| f(x,Tu_n) - f(x,Tu) \|_{p'} = 0.$$

Assim, por (1-26), segue que

$$\begin{aligned} \sup_{\|v\|_{1,p}\leq 1} | \langle F\circ Tu_n - F\circ Tu, v\rangle | &\leq c \, \| f(x,Tu_n) - f(x,Tu) \|_{p'} . \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, se $u_n(x) \geq u(x)$, então $u_n(x) \geq u(x) > \overline{u}(x)$ e a demonstração do caso 1 se dá de forma idêntica à anterior, donde (1-24) está demonstrado para este caso.

<u>Caso 2</u>: $u < \underline{u}$.

Neste caso, suponha $u(x) < u_n(x)$. Logo, para cada $x \in \underline{S}$, existe $n_0 = n_0(x)$, tal que, para todo $n \geq n_0$, tem-se

$$u(x) < u_n(x) < \underline{u}(x),$$

donde, pelo modo como definimos T, vem que $Tu_n = \underline{u}$. Assim,

$$f(x,Tu_n) = f(x,\underline{u}) = f(x,Tu),$$

e daí,

$$| f(x,Tu_n) - f(x,Tu) | = 0.$$

Como anteriormente,

$$| f(x,Tu_n) - f(x,Tu) | \leq 2a(x) \in L^{p'}(\Omega),$$

donde, pelo Teorema de Lebesgue, segue que

$$\| f(x,Tu_n) - f(x,Tu) \|_{p'} = 0.$$

Novamente por (1-26), segue que

$$\begin{aligned} \sup_{\|v\|_{1,p}\leq 1} |\langle F\circ Tu_n - F\circ Tu, v\rangle| &\leq c\,\| f(x,Tu_n) - f(x,Tu)\|_{p'}\,. \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, se $u_n(x) \leq u(x)$, tem-se que $u_n(x) \leq u(x) < \underline{u}(x)$ e a demonstração do caso 2 se dá de forma idêntica a anterior, donde (1-24) está demonstrada para este caso.

<u>Caso 3</u>: $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$.

Primeiramente, como $u_n \overset{W^{1,p}(\Omega)}{\rightharpoonup} u$ e $W^{1,p}(\Omega) \overset{cpt}{\hookrightarrow} L^p(\Omega)$, então $u_n \overset{L^p(\Omega)}{\longrightarrow} u$. Donde, por resultados de Teoria da Medida, existe uma subsequência, que por simplicidade denotaremos por (u_n), e uma função $h \in L^p(\Omega)$ tal que

$$u_n \longrightarrow u \;\text{ q.t.p. em }\; \Omega \;\text{ e }\; |u_n| \leq h \;\text{ q.t.p. em }\; \Omega.$$

Como f é Carathéodory, a função $u \longmapsto f(x,u)$ é contínua para x fixado e, assim,

$$f(x,u_n) \longrightarrow f(x,u), \;\text{ q.t.p. em }\; \Omega. \tag{1-27}$$

Veja que, neste caso, para cada $x \in S$, existe $n_0 = n_0(x)$, tal que, para todo $n \geq n_0$, tem-se $\underline{u}(x) \leq u_n(x) \leq \overline{u}(x)$ e, pela definição de T, vem que $Tu_n = u_n$. Daí e de (1-27), tem-se

$$f(x,Tu_n) = f(x,u_n) \longrightarrow f(x,u) = f(x,Tu), \;\text{ q.t.p. em }\; \Omega,$$

donde

$$|f(x,Tu_n) - f(x,Tu)| \longrightarrow 0, \;\text{ q.t.p. em }\; \Omega,$$

e daí

$$|f(x,Tu_n) - f(x,Tu)|^{p'} \longrightarrow 0, \;\text{ q.t.p. em }\; \Omega.$$

Além disso, por (0-9), temos que

$$\begin{aligned} |f(x,Tu_n) - f(x,Tu)|^{p'} &\leq 2^{p'}(|f(x,Tu_n)|^{p'} + |f(x,Tu)|^{p'}) \\ &\leq 2^{p'+1}a(x)^{p'} \in L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema de Lebesgue,

$$\int_S |f(x,Tu_n) - f(x,Tu)|^{p'}\,dx \longrightarrow 0,$$

isto é,

$$\| f(x,Tu_n) - f(x,Tu) \|_{p'}^{p'} \longrightarrow 0,$$

donde

$$\| f(x,Tu_n) - f(x,Tu) \|_{p'} \longrightarrow 0.$$

Assim, por (1-26), segue que

$$\sup_{\|v\|_{1,p}\leq 1} \mid \langle F\circ Tu_n - F\circ Tu, v\rangle \mid \quad \leq \quad c \,\| f(x,Tu_n) - f(x,Tu) \|_{p'} \longrightarrow 0.$$

isto é,

$$F\circ Tu_n \longrightarrow F\circ Tu.$$

E, portanto, em qualquer um dos casos considerados, $F\circ T$ é completamente contínuo.

$\square$

Demonstração do Lema 1.10. Primeiramente veja que $\mathcal{A}$ está bem definido.

De fato, primeiro veja que $\mid \nabla u \mid^{p-1} \in L^{p'}(\Omega)$. Com efeito, como $u \in W^{1,p}(\Omega)$, então $\nabla u \in L^p(\Omega)$, e daí

$$\int_\Omega (\mid \nabla u \mid^{p-1})^{p'} dx = \int_\Omega (\mid \nabla u \mid^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} dx = \int_\Omega \mid \nabla u \mid^p dx < \infty.$$

Logo, por (A_1), existem $a_1 \in L^{p'}(\Omega)$ e $b_1 > 0$, tal que,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \mid A(x,\nabla u) \mid\mid \nabla v \mid dx \quad &\leq \quad \int_\Omega a_1(x) \mid \nabla v \mid dx + b_1 \int_\Omega \mid \nabla u \mid^{p-1} \mid \nabla v \mid dx \\
&\leq \quad \| a_1(x) \|_{p'} \| \nabla v \|_p + b_1 \| \nabla u \|_{p'}^{p-1} \| \nabla v \|_p \\
&= \quad (\| a_1(x) \|_{p'} + b_1 \| \nabla u \|_{p'}^{p-1}) \| \nabla v \|_p \\
&\leq \quad (\| a_1(x) \|_{p'} + b_1 \| \nabla u \|_{p'}^{p-1}) \| v \|_{1,p} \\
&= \quad \overline{c} \| v \|_{1,p},
\end{aligned} \tag{1-28}$$

onde $\overline{c} = \overline{c}(a_1, b_1, u, p)$. E isto prova que $\mathcal{A}$ está bem definido.

Verificação de (i). $\mathcal{A}$ é limitado, isto é, $\mathcal{A}$ aplica conjuntos limitados em conjuntos limitados.

De fato, como

$$\mid \langle \mathcal{A}u, v\rangle \mid \leq \int_\Omega \mid A(x,\nabla u) \mid\mid \nabla v \mid dx$$

por (1-28), tem-se que

$$\| \mathcal{A}u \| = \sup_{\|v\|_{1,p}\leq 1} | \langle \mathcal{A}u, v\rangle | \leq \sup_{\|v\|_{1,p}\leq 1} \int_\Omega | A(x,\nabla u) || \nabla v | \, dx \leq \sup_{\|v\|_{1,p}\leq 1} \overline{c} \| v \|_{1,p} \leq \overline{c},$$

mostrando que $\mathcal{A}$ é limitado.

Verificação de (ii)**.** $\mathcal{A}$ é monotônico.

De fato, por (A_2), tem-se

$$\langle \mathcal{A}u - \mathcal{A}u', u-u'\rangle = \int_\Omega (A(x,\nabla u) - A(x,\nabla u'))(\nabla u - \nabla u')dx \geq 0.$$

Portanto, $\mathcal{A}$ é um operador monotônico.

Verificação de (iii)**.** $\mathcal{A}$ é contínuo.

De fato, seja $(u_n) \subset W^{1,p}(\Omega)$ uma sequência tal que $u_n \longrightarrow u$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Vamos provar que

$$\mathcal{A}u_n \longrightarrow \mathcal{A}u \ \text{ em } \ (W^{1,p}(\Omega))^*,$$

isto é,

$$\| \mathcal{A}u_n - \mathcal{A}u \|_{(W^{1,p}(\Omega))^*} \longrightarrow 0,$$

ou seja,

$$\sup_{\|v\|_{1,p}\leq 1} | \langle \mathcal{A}u_n - \mathcal{A}u, v\rangle | \longrightarrow 0.$$

Com efeito, como $u_n \overset{W^{1,p}(\Omega)}{\longrightarrow} u$, tem-se $\nabla u_n \overset{L^p(\Omega)}{\longrightarrow} \nabla u$. Logo, por resultados de Teoria da Medida, existe uma subsequência, que por comodidade denotaremos por (u_n), e uma função $h \in L^p(\Omega)$ tal que

$$\nabla u_n(x) \longrightarrow \nabla u(x) \ \text{ q.t.p. } \ x \in \Omega \ \text{ e } \ | \nabla u_n(x) | \leq h(x) \ \text{ q.t.p. } \ x \in \Omega.$$

Já que A satisfaz as condições de Carathéodory vem que

$$A(x,\nabla u_n) \longrightarrow A(x,\nabla u), \ \text{ q.t.p. } \ x \in \Omega,$$

donde

$$| A(x,\nabla u_n) - A(x,\nabla u) | \longrightarrow 0, \ \text{ q.t.p. } \ x \in \Omega,$$

e daí

$$| A(x,\nabla u_n) - A(x,\nabla u) |^{p'} \longrightarrow 0, \ \text{ q.t.p. } \ x \in \Omega.$$

Além disso, utilizando a condição (A_1), tem-se que

$$\begin{aligned}
\mid A(x,\nabla u_n)-A(x,\nabla u)\mid^{p'} &\leq 2^{p'}(\mid A(x,\nabla u_n)\mid^{p'}+\mid A(x,\nabla u)\mid^{p'})\\
&\leq 2^{p'}((a_1(x)+b_1\mid \nabla u_n\mid^{p-1})^{p'}+(a_1(x)+b_1\mid \nabla u\mid^{p-1})^{p'})\\
&\leq 2^{p'}(2^{p'}(\mid a_1(x)\mid^{p'}+b_1^{p'}\mid \nabla u_n\mid^{p'(p-1)})+\\
&\quad 2^{p'}(\mid a_1(x)\mid^{p'}+b_1^{p'}\mid \nabla u\mid^{p'(p-1)}))\\
&\leq 2^{2p'}(2\mid a_1(x)\mid^{p'}+c_1\mid \nabla u_n\mid^{p}+c_1\mid \nabla u\mid^{p})\\
&\leq 2^{2p'}(2\mid a_1(x)\mid^{p'}+c_1h^p+c_1\mid \nabla u\mid^{p}),
\end{aligned}$$

onde $c_1=b_1^{p'}$ e $2^{2p'}(2\mid a_1(x)\mid^{p'}+c_1h^p+c_1\mid \nabla u\mid^{p})\in L^1(\Omega)$.

Logo, pelo Teorema de Lebesgue

$$\int_\Omega \mid A(x,\nabla u_n)-A(x,\nabla u)\mid^{p'}dx\longrightarrow 0,$$

isto é,

$$\| A(x,\nabla u_n)-A(x,\nabla u)\|_{p'}^{p'}\longrightarrow 0,$$

e isto implica que

$$\| A(x,\nabla u_n)-A(x,\nabla u)\|_{p'}\longrightarrow 0.$$

Mas pela definição do operador $\mathcal{A}$ e utilizando a desigualdade de Hölder, tem-se

$$\begin{aligned}
\mid\langle \mathcal{A}u_n-\mathcal{A}u,v\rangle\mid &\leq \int_\Omega \mid A(x,\nabla u_n)-A(x,\nabla u)\mid\mid \nabla v\mid dx\\
&\leq \| A(x,\nabla u_n)-A(x,\nabla u)\|_{p'}\|\nabla v\|_p\\
&\leq \| A(x,\nabla u_n)-A(x,\nabla u)\|_{p'}\| v\|_{1,p}.
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\sup_{\|v\|_{1,p}\leq 1}\mid\langle \mathcal{A}u_n-\mathcal{A}u,v\rangle\mid &\leq \sup_{\|v\|_{1,p}\leq 1}\| A(x,\nabla u_n)-A(x,\nabla u)\|_{p'}\| v\|_{1,p}\\
&\leq \| A(x,\nabla u_n)-A(x,\nabla u)\|_{p'},
\end{aligned}$$

e daí

$$\sup_{\|v\|_{1,p}\leq 1}\mid\langle \mathcal{A}u_n-\mathcal{A}u,v\rangle\mid\longrightarrow 0.$$

Assim

$$\mathcal{A}u_n\longrightarrow \mathcal{A}u,$$

e, portanto, $\mathcal{A}$ é um operador contínuo.

Também, observe que para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$ fixado, a aplicação

$$v \longmapsto \langle \mathcal{A}u, v\rangle$$

é bem definida, linear, limitada e contínua.

Verificação de (iv)**.** $\mathcal{A}$ é coercivo no seguinte sentido:

$$\langle \mathcal{A}u, u\rangle \geq b_2 \parallel \nabla u \parallel_p^p - \parallel a_2(x) \parallel_1, \;\; u \in W^{1,p}(\Omega).$$

De fato, por (A_3), existem $a_2 \in L^1(\Omega)$ e $b_2 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}u, u\rangle &= \int_\Omega A(x, \nabla u)\nabla u dx \\
&\geq \int_\Omega (b_2 \mid \nabla u \mid^p - a_2(x))dx \\
&= b_2 \int_\Omega \mid \nabla u \mid^p dx - \int_\Omega a_2(x)dx \\
&= b_2 \parallel \nabla u \parallel_p^p - \parallel a_2(x) \parallel_1,
\end{aligned}$$

e, consequêntemente $\mathcal{A}$ é coercivo no sentido de (1-29).

$\square$

Portanto, ficam provados todos os passos que compõe a demonstração do **Teorema 0.3**.

1.2 Demonstração do Teorema 0.4

A demonstração utiliza o **Teorema 0.3** e é baseada em um resultado devido à Le [20] que garante que o máximo de um número finito de subsoluções é uma subsolução e o mínimo de um número finito de super soluções de (0-1) é uma super solução do problema (0-1).

Demonstração do Teorema 0.4.
Verificação de (i)**.** Em primeiro lugar provaremos que $\underline{u}_0$ é uma subsolução do problema (1-1). Faremos a demonstração para o caso $m = 2$ e o caso geral segue facilmente por indução.

Temos

$$\underline{u}_0 = \max\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\} = \frac{\mid \underline{u}_1 - \underline{u}_2 \mid}{2} + \frac{\underline{u}_1 + \underline{u}_2}{2}. \tag{1-29}$$

Por Stampacchia [18] (cf. Teorema A.13), segue que $\underline{u}_0 \in W^{1,p}(\Omega)$. Sabemos que

$$\int_\Omega A(x,\nabla \underline{u}_1)\nabla\varphi dx - \int_\Omega f(x,\underline{u}_1)\varphi dx \leq 0, \;\; \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \;\; \varphi \geq 0 \;\text{ em }\; \Omega$$

e que

$$\int_\Omega A(x,\nabla \underline{u}_2)\nabla\varphi dx - \int_\Omega f(x,\underline{u}_2)\varphi dx \leq 0, \;\; \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \;\; \varphi \geq 0 \;\text{ em }\; \Omega.$$

Afirmação 1: $\underline{u}_0$ é subsolução de (1-1), isto é,

$$\int_\Omega A(x,\nabla \underline{u}_0)\nabla\varphi dx \leq \int_\Omega f(x,\underline{u}_0)\varphi dx, \;\; \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \;\; \varphi \geq 0 \;\text{ em }\; \Omega. \tag{1-30}$$

De fato, por Stampacchia [18] (cf. Teorema A.13), temos

$$\nabla \underline{u}_0 = \begin{cases} \nabla \underline{u}_1, & \text{em} \;\; \Omega_1 = \{x \in \Omega; \;\; \underline{u}_1 > \underline{u}_2\} \\ \nabla \underline{u}_1 = \nabla \underline{u}_2, & \text{em} \;\; \Omega_0 = \{x \in \Omega; \;\; \underline{u}_1 = \underline{u}_2\}. \\ \nabla \underline{u}_2, & \text{em} \;\; \Omega_2 = \{x \in \Omega; \;\; \underline{u}_1 < \underline{u}_2\} \end{cases} \tag{1-31}$$

Além disso, vemos que

$$f(x,\underline{u}_0) = f(x,\underline{u}_1)\chi_{\Omega_1} + f(x,\underline{u}_2)\chi_{\Omega\backslash\Omega_1},$$

e mostraremos que $\underline{u}_0$ satisfaz (1-30).

Para isto, seja $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, com $\varphi \geq 0$ em Ω.

Primeiro, vamos definir algumas funções auxiliares. Fixemos uma função $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R})$, com as seguintes propriedades:

$$\begin{array}{ll} (i) & \gamma \;\text{ é não-decrescente em }\; \mathbb{R}, \\ (ii) & 0 \leq \gamma \leq 1, \\ (iii) & \gamma(t) = \begin{cases} 0, & \text{se} \;\; t \leq 0, \\ 1, & \text{se} \;\; t \geq 1. \end{cases} \end{array} \tag{1-32}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ e $t \in \mathbb{R}$, faça

$$\gamma_n(t) = \gamma(nt), \tag{1-33}$$

e observe que $\gamma_n \in C^\infty(\mathbb{R})$, γ_n satisfaz $(i)-(ii)$ e

$$\gamma_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{se} \;\; t \leq 0, \\ 1, & \text{se} \;\; t \geq \frac{1}{n}. \end{cases} \tag{1-34}$$

Seja $M = \max\{\gamma'(t);\ t \in \mathbb{R}\}$. Observe que M é atingido, pois

$$M = \max\{\gamma'(t);\ t \in \mathbb{R}\} = \max\{\gamma'(t);\ t \in [0,1]\} < \infty.$$

Assim,

$$|\gamma_n'(t)| = |n\gamma'(nt)| \leq nM, \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ t \in \mathbb{R}. \tag{1-35}$$

Faça $w = (\underline{u}_2 - \underline{u}_1) \in W^{1,p}(\Omega)$. Por resultados clássicos de densidade em $W^{1,p}(\Omega)$ (cf. Teorema A.12), segue que existe uma sequência $(\widetilde{w}_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$w_n = \widetilde{w}_n\,|_{\overline{\Omega}} \longrightarrow w \ \text{ em } \ W^{1,p}(\Omega) \tag{1-36}$$

e

$$\| w_n - w \|_{1,p} \leq \frac{1}{n^2}, \ \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1-37}$$

Como $W^{1,p}(\Omega) \overset{cpt}{\hookrightarrow} L^p(\Omega)$, segue por resultados de Teoria da Medida, que existe uma subsequência (que denotaremos por comodidade por w_n), tal que,

$$w_n \longrightarrow w, \ \text{ q.t.p. em } \ \Omega. \tag{1-38}$$

Agora, defina

$$\varphi_1 = (1 - \gamma_n \circ w_n)\varphi \ \text{ e } \ \varphi_2 = (\gamma_n \circ w_n)\varphi,$$

e veja que

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} = -\gamma_n'(w_n)\frac{\partial w_n}{\partial x_i}\varphi + (1 - \gamma_n(w_n))\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \ \text{ e } \ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} = \gamma_n'(w_n)\frac{\partial w_n}{\partial x_i}\varphi + \gamma_n(w_n)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}.$$

Como $\gamma \circ w_n \in C^\infty(\Omega)$ e $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, tem-se que $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0^\infty(\Omega)$. E como $0 \leq \gamma_n \leq 1$ e $\varphi \geq 0$, segue que $\varphi_1, \varphi_2 \geq 0$ em Ω. Portanto, por (1-30) aplicada à $\underline{u}_1$, φ_1 e $\underline{u}_2$, φ_2, temos que

$$\int_\Omega A(x, \nabla \underline{u}_j)\nabla\varphi_j dx - \int_\Omega f(x, \underline{u}_j)\varphi_j dx \leq 0, \ \ (j = 1,2),$$

isto é

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^N A_i(x, \nabla \underline{u}_j)\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}dx - \int_\Omega f(x, \underline{u}_j)\varphi_j dx \leq 0, \ \ (j = 1,2),$$

ou seja,

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^N A_i(x, \nabla \underline{u}_1)\left(-\gamma_n'(w_n)\frac{\partial w_n}{\partial x_i}\varphi + (1 - \gamma_n(w_n))\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)dx -$$

$$\int_{\Omega} f(x,\underline{u}_1)(1-\gamma_n(w_n))\varphi dx \leq 0, \tag{1-39}$$

e

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{N} A_i(x,\nabla \underline{u}_2)\left(\gamma_n'(w_n)\frac{\partial w_n}{\partial x_i}\varphi + \gamma_n(w_n)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)dx -$$
$$\int_{\Omega} f(x,\underline{u}_2)\gamma_n(w_n)\varphi dx \leq 0. \tag{1-40}$$

Veja que para quase todo $x \in \Omega_2$, tem-se que $w(x) > 0$.

Afirmação 2: Existe $n_0 = n_0(x)$ tal que $w_n(x) > \frac{1}{n}$, $\forall n \geq n_0$.

De fato, escolha $n_1 = n_1(x)$ tal que

$$w(x) > \frac{2}{n_1}.$$

Por (1-38), para $n \geq n_1$ suficientemente grande, tem-se

$$\mid w_n(x) - w(x) \mid < \frac{1}{n_1},$$

donde

$$-\frac{1}{n_1} < w_n(x) - w(x) < \frac{1}{n_1},$$

e da primeira das desigualdades acima segue que

$$w_n(x) > w(x) - \frac{1}{n_1} > \frac{2}{n_1} - \frac{1}{n_1} = \frac{1}{n_1} \geq \frac{1}{n},$$

ficando provada a **Afirmação 2**.

Assim, por (1-34), segue que $\gamma_n(w_n(x)) = 1$, para todo $n \geq n_0$ suficientemente grande. Já que $w_n(x) > \frac{1}{n}$, tem-se

$$\gamma_n(w_n(x)) \longrightarrow 1, \ \text{q.t.p.} \ x \in \Omega_2. \tag{1-41}$$

Analogamente, para quase todo $x \in \Omega_1$, tem-se $w(x) < 0$, donde existe $n_0 = n_0(x)$, tal que, para todo $n \geq n_0$ suficientemente grande, $w_n(x) < 0$. E novamente por (1-34) tem-se que

$$\gamma_n(w_n(x)) \longrightarrow 0, \ \text{q.t.p.} \ x \in \Omega_1. \tag{1-42}$$

Agora, somando (1-39) e (1-40), vem que

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{N} (A_i(x,\nabla \underline{u}_2) - A_i(x,\nabla \underline{u}_1))\gamma_n'(w_n)\frac{\partial w_n}{\partial x_i}\varphi dx +$$
$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{N} (A_i(x,\nabla \underline{u}_2) - A_i(x,\nabla \underline{u}_1))\gamma_n(w_n)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx +$$
$$\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{N} (A_i(x,\nabla \underline{u}_1)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - f(x,\underline{u}_1)\varphi \right) dx +$$
$$\int_\Omega (f(x,\underline{u}_1) - f(x,\underline{u}_2))\gamma_n(w_n)\varphi dx \le 0. \tag{1-43}$$

Como $f(x,\underline{u}_1) = f(x,\underline{u}_2)$ em Ω_0, segue que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (f(x,\underline{u}_1) - f(x,\underline{u}_2))\gamma_n(w_n)\varphi dx &= \left(\int_{\Omega_1} + \int_{\Omega_2} \right) (f(x,\underline{u}_1) - f(x,\underline{u}_2))\gamma_n(w_n)\varphi dx \\
&= \int_{\Omega_1 \cap supp\varphi} (f(x,\underline{u}_1) - f(x,\underline{u}_2))\gamma_n(w_n)\varphi dx + \\
&\quad \int_{\Omega_2 \cap supp\varphi} (f(x,\underline{u}_1) - f(x,\underline{u}_2))\gamma_n(w_n)\varphi dx.
\end{aligned}$$

Como $0 \le \gamma_n(w_n) \le 1$, φ é limitada e $| f(x,s) | \le a(x)$, $\forall s \in \mathbb{R}$ e $a \in L^{p'}(\Omega)$, segue que

$$\begin{aligned}
| f(x,\underline{u}_1) - f(x,\underline{u}_2)\gamma_n(w_n)\varphi | &\le (| f(x,\underline{u}_1) | + | f(x,\underline{u}_2) |) | \gamma_n(w_n) || \varphi | \\
&\le 2Ca(x) \in L^{p'}(\Omega),
\end{aligned}$$

onde C é a constante que limita φ. Além disso, por (1-41) e (1-42), segue que

$$(f(x,\underline{u}_1) - f(x,\underline{u}_2))\gamma_n(w_n)\varphi \longrightarrow (f(x,\underline{u}_1) - f(x,\underline{u}_2))\varphi, \text{ q.t.p. em } \Omega_2$$

e

$$(f(x,\underline{u}_1) - f(x,\underline{u}_2))\gamma_n(w_n)\varphi \longrightarrow 0, \text{ q.t.p. em } \Omega_1.$$

Assim, pelo Teorema de Lebesgue, temos que

$$\int_{\Omega_2 \cap supp\varphi} (f(x,\underline{u}_1) - f(x,\underline{u}_2))\gamma_n(w_n)\varphi dx \longrightarrow \int_{\Omega_2 \cap supp\varphi} (f(x,\underline{u}_1) - f(x,\underline{u}_2))\varphi dx,$$

isto é,

$$\int_{\Omega_2 \cap supp\varphi} (f(x,\underline{u}_1) - f(x,\underline{u}_2)\gamma_n(w_n))\varphi dx \longrightarrow \int_{\Omega_2} (f(x,\underline{u}_1) - f(x,\underline{u}_2))\varphi dx,$$

e

$$\int_{\Omega_1 \cap supp\varphi} (f(x,\underline{u}_1) - f(x,\underline{u}_2))\gamma_n(w_n)\varphi dx \longrightarrow 0.$$

Portanto,

$$\int_{\Omega} (f(x,\underline{u}_1) - f(x,\underline{u}_2))\gamma_n(w_n)\varphi dx \longrightarrow \int_{\Omega_2} (f(x,\underline{u}_1) - f(x,\underline{u}_2))\varphi dx. \tag{1-44}$$

Similarmente, como $A_i(\cdot,\nabla\underline{u}_j) \in L^{p'}(\Omega)$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \in L^\infty(\Omega)$ e $0 \le \gamma_n(w_n) \le 1$, tem-se

$$\int_{\Omega_2} \sum_{i=1}^N (A_i(x,\nabla\underline{u}_2) - A_i(x,\nabla\underline{u}_1))\gamma_n(w_n)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx \longrightarrow \int_{\Omega_2} \sum_{i=1}^N (A_i(x,\nabla\underline{u}_2) - A_i(x,\nabla\underline{u}_1))\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx$$

e

$$\int_{\Omega_1} \sum_{i=1}^N (A_i(x,\nabla\underline{u}_2) - A_i(x,\nabla\underline{u}_1))\gamma_n(w_n)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx \longrightarrow 0,$$

donde

$$\begin{gathered}
\lim \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (A_i(x,\nabla\underline{u}_2) - A_i(x,\nabla\underline{u}_1))\gamma_n(w_n)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx = \\
\lim\left(\int_{\Omega_1} + \int_{\Omega_2}\right) \sum_{i=1}^N (A_i(x,\nabla\underline{u}_2) - A_i(x,\nabla\underline{u}_1))\gamma_n(w_n)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx = \\
\lim \int_{\Omega_1} \sum_{i=1}^N (A_i(x,\nabla\underline{u}_2) - A_i(x,\nabla\underline{u}_1))\gamma_n(w_n)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx + \\
\lim \int_{\Omega_2} \sum_{i=1}^N (A_i(x,\nabla\underline{u}_2) - A_i(x,\nabla\underline{u}_1))\gamma_n(w_n)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx = \\
\int_{\Omega_2} \sum_{i=1}^N (A_i(x,\nabla\underline{u}_2) - A_i(x,\nabla\underline{u}_1))\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx.
\end{gathered} \tag{1-45}$$

Agora, como A é monotônico, isto é,

$$\sum_{i=1}^N (A_i(x,\nabla\underline{u}_2) - A_i(x,\nabla\underline{u}_1))\left(\frac{\partial\underline{u}_2}{\partial x_i} - \frac{\partial\underline{u}_1}{\partial x_i}\right) \ge 0,$$

$\gamma_n'(w_n) \ge 0$ e $\varphi \ge 0$, tem-se que

$$\begin{gathered}
\int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (A_i(x,\nabla\underline{u}_2) - A_i(x,\nabla\underline{u}_1))\gamma_n'(w_n)\frac{\partial w_n}{\partial x_i}\varphi dx = \\
\int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (A_i(x,\nabla\underline{u}_2) - A_i(x,\nabla\underline{u}_1))\left(\frac{\partial\underline{u}_2}{\partial x_i} - \frac{\partial\underline{u}_1}{\partial x_i}\right)\gamma_n'(w_n)\varphi dx + \\
\int_{\Omega} \sum_{i=1}^N (A_i(x,\nabla\underline{u}_2) - A_i(x,\nabla\underline{u}_1))\left(\frac{\partial w_n}{\partial x_i} - \frac{\partial w}{\partial x_i}\right)\gamma_n'(w_n)\varphi dx \ge
\end{gathered}$$

$$-\mid \int_\Omega \sum_{i=1}^N (A_i(x,\nabla \underline{u}_2)-A_i(x,\nabla \underline{u}_1))\left(\frac{\partial w_n}{\partial x_i}-\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)\gamma_n^{'}(w_n)\varphi dx \mid . \tag{1-46}$$

Além disso, por (A_1) e pela desigualdade de Hölder, vemos que

$$\begin{aligned}
&\mid \int_\Omega \sum_{i=1}^N (A_i(x,\nabla \underline{u}_2)-A_i(x,\nabla \underline{u}_1))\left(\frac{\partial w_n}{\partial x_i}-\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)\gamma_n^{'}(w_n)\varphi dx \mid \leq \\
&\int_\Omega \sum_{i=1}^N \mid (A_i(x,\nabla \underline{u}_2)-A_i(x,\nabla \underline{u}_1)) \mid\mid \frac{\partial (w_n-w)}{\partial x_i} \mid\mid \gamma_n^{'}(w_n) \mid\mid \varphi \mid dx \leq \\
&\sum_{i=1}^N \| (A_i(x,\nabla \underline{u}_2)-A_i(x,\nabla \underline{u}_1)) \|_{p'} \| \frac{\partial (w_n-w)}{\partial x_i} \|_p \| \gamma_n^{'}(w_n) \|_\infty \| \varphi \|_\infty dx \leq \\
&\sum_{i=1}^N \| a_1 + b_1 \mid \nabla \underline{u}_1 \mid^{p-1} \|_{p'} \| w_n - w \|_{1,p} \| \gamma_n^{'}(w_n) \|_\infty \| \varphi \|_\infty dx + \\
&\sum_{i=1}^N \| a_1 + b_1 \mid \nabla \underline{u}_2 \mid^{p-1} \|_{p'} \| w_n - w \|_{1,p} \| \gamma_n^{'}(w_n) \|_\infty \| \varphi \|_\infty dx \leq \\
&c_1(\| a_1 \|_{p'} + \| b_1 \|_\infty (\| \underline{u}_1 \|_{1,p}^{p-1} + \| \underline{u}_2 \|_{1,p}^{p-1}))\frac{1}{n^2} nM \| \varphi \|_\infty \leq \frac{c_2}{n},
\end{aligned} \tag{1-47}$$

onde c_1 e c_2 são constantes que dependem de φ. De (1-46) e (1-47), temos que

$$\begin{aligned}
&\liminf_{n\longrightarrow\infty} \int_\Omega \sum_{i=1}^N (A_i(x,\nabla \underline{u}_2)-A_i(x,\nabla \underline{u}_1))\gamma_n^{'}(w_n)\frac{\partial w_n}{\partial x_i}\varphi dx \geq \\
&-\liminf_{n\longrightarrow\infty} \mid \int_\Omega \sum_{i=1}^N (A_i(x,\nabla \underline{u}_2)-A_i(x,\nabla \underline{u}_1))\left(\frac{\partial w_n}{\partial x_i}-\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)\gamma_n^{'}(w_n)\varphi dx \mid \geq \\
&-\liminf_{n\longrightarrow\infty} \frac{c_2}{n} = \\
&-c_2 \liminf_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n} = 0.
\end{aligned} \tag{1-48}$$

Passando ao limite quando $n \longrightarrow \infty$ em (1-43) e utilizando (1-44), (1-45) e (1-48), temos que

$$\begin{aligned}
&0 \geq \liminf \int_\Omega \sum_{i=1}^N (A_i(x,\nabla \underline{u}_2)-A_i(x,\nabla \underline{u}_1))\gamma_n^{'}(w_n)\frac{\partial w_n}{\partial x_i}\varphi dx + \\
&\lim \int_\Omega \sum_{i=1}^N (A_i(x,\nabla \underline{u}_2)-A_i(x,\nabla \underline{u}_1))\gamma_n(w_n)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \\
&\lim \int_\Omega (f(x,\underline{u}_1)-f(x,\underline{u}_2))\gamma_n(w_n)\varphi dx + \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N A_i(x,\nabla \underline{u}_1)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - f(x,\underline{u}_1)\varphi\right) dx \geq \\
&\int_{\Omega_2} \sum_{i=1}^N (A_i(x,\nabla \underline{u}_2)-A_i(x,\nabla \underline{u}_1))\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega_2} (f(x,\underline{u}_1)-f(x,\underline{u}_2))\varphi dx +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \sum_{i=1}^N A_i(x,\nabla \underline{u}_1)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx - \int_\Omega f(x,\underline{u}_1)\varphi dx = \\
&\int_{\Omega_2}\sum_{i=1}^N (A_i(x,\nabla \underline{u}_2) - A_i(x,\nabla \underline{u}_1))\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx + \left(\int_{\Omega_2} + \int_{\Omega\setminus\Omega_2}\right)\sum_{i=1}^N A_i(x,\nabla \underline{u}_1)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx + \\
&\int_{\Omega_2}(f(x,\underline{u}_1) - f(x,\underline{u}_2))\varphi dx - \left(\int_{\Omega_2} + \int_{\Omega\setminus\Omega_2}\right) f(x,\underline{u}_1)\varphi dx = \\
&\int_{\Omega_2}\sum_{i=1}^N A_i(x,\nabla \underline{u}_2)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx + \int_{\Omega\setminus\Omega_2}\sum_{i=1}^N A_i(x,\nabla \underline{u}_1)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx - \\
&\int_{\Omega_2} f(x,\underline{u}_2)\varphi dx - \int_{\Omega\setminus\Omega_2} f(x,\underline{u}_1)\varphi dx = \\
&\int_\Omega \sum_{i=1}^N A_i(x,\nabla \underline{u}_0)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx - \int_\Omega f(x,\underline{u}_0)\varphi dx = \\
&\int_\Omega A(x,\nabla \underline{u}_0)\nabla\varphi dx - \int_\Omega f(x,\underline{u}_0)\varphi dx.
\end{aligned}
$$

E daí

$$\int_\Omega A(x,\nabla \underline{u}_0)\nabla\varphi dx \leq \int_\Omega f(x,\underline{u}_0)\varphi dx, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \varphi \geq 0 \ \text{ em } \ \Omega,$$

donde $\underline{u}_0$ é subsolução do problema (1-1).

A seguir provaremos que $\overline{u}_0$ é super solução do problema (1-1). Consideraremos o caso $k=2$ e o caso geral segue por indução.

Sejam $\overline{u}_1, \overline{u}_2 \in W^{1,p}(\Omega)$ super soluções do problema (1-1). Temos

$$\overline{u}_0 = \min\{\overline{u}_1, \overline{u}_2\} = \frac{\overline{u}_1 + \overline{u}_2}{2} - \frac{|\,\overline{u}_1 - \overline{u}_2\,|}{2}. \tag{1-49}$$

Por Stampacchia [18] (cf. Teorema A.13), segue que $\overline{u}_0 \in W^{1,p}(\Omega)$. Sabemos que

$$\int_\Omega A(x,\nabla \overline{u}_1)\nabla\varphi dx - \int_\Omega f(x,\overline{u}_1)\varphi dx \geq 0, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \varphi \geq 0 \ \text{ em } \ \Omega$$

e

$$\int_\Omega A(x,\nabla \overline{u}_2)\nabla\varphi dx - \int_\Omega f(x,\overline{u}_2)\varphi dx \geq 0, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \varphi \geq 0 \ \text{ em } \ \Omega.$$

Afirmação 3: $\overline{u}_0$ é super solução de (1-1), isto é,

$$\int_\Omega A(x,\nabla \overline{u}_0)\nabla\varphi dx \geq \int_\Omega f(x,\overline{u}_0)\varphi dx, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad \varphi \geq 0 \ \text{ em } \ \Omega. \tag{1-50}$$

De fato, por Stampacchia [18] (cf. Teorema A.13), temos

$$\nabla \overline{u}_0 = \begin{cases} \nabla \overline{u}_1, & \text{em} \quad \Omega_2 = \{x \in \Omega;\ \overline{u}_1 < \overline{u}_2\} \\ \nabla \overline{u}_1 = \nabla \overline{u}_2, & \text{em} \quad \Omega_0 = \{x \in \Omega;\ \overline{u}_1 = \overline{u}_2\}. \\ \nabla \overline{u}_2, & \text{em} \quad \Omega_1 = \{x \in \Omega;\ \overline{u}_1 > \overline{u}_2\} \end{cases} \tag{1-51}$$

Além disso, vemos que

$$f(x,\overline{u}_0) = f(x,\overline{u}_1)\chi_{\Omega_2} + f(x,\overline{u}_2)\chi_{\Omega\setminus\Omega_2},$$

e mostraremos que $\overline{u}_0$ satisfaz (1-50).

Para isto, seja $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, com $\varphi \geq 0$ em Ω. Novamente vamos definir algumas funções auxiliares.

Defina uma função $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R})$ como em (1-32) e para cada $n \in \mathbb{N}$ e $t \in \mathbb{R}$, considere $\gamma_n(t)$ como em (1-33), isto é

$$\gamma_n(t) = \gamma(nt).$$

Novamente, $\gamma_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ e satisfaz $(i)-(ii)$ e (1-34).

Como anteriormente, seja $M = \max\{\gamma'(t);\ \ t \in \mathbb{R}\}$. Então,

$$|\ \gamma_n'(t)\ | = |\ n\gamma'(nt)\ | \leq nM, \ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ t \in \mathbb{R}. \tag{1-52}$$

Faça $w = (\overline{u}_1 - \overline{u}_2) \in W^{1,p}(\Omega)$. Logo, por resultados clássicos de densidade em $W^{1,p}(\Omega)$ (cf. Teorema A.12), existe uma sequência $(\widetilde{w}_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$w_n = \widetilde{w}_n\ |_{\overline{\Omega}} \longrightarrow w \ \text{ em } \ W^{1,p}(\Omega) \tag{1-53}$$

e

$$\|\ w_n - w\ \|_{1,p} \leq \frac{1}{n^2}, \ \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1-54}$$

Novamente, como $W^{1,p}(\Omega) \overset{cpt}{\hookrightarrow} L^p(\Omega)$, por resultados de Teoria da Medida, existe uma subsequência de (w_n) tal que

$$w_n \longrightarrow w \ \text{ q.t.p. em } \ \Omega.$$

Como anteriormente defina

$$\varphi_1 = (1 - \gamma_n \circ w_n)\varphi \ \text{ e } \ \varphi_2 = (\gamma_n \circ w_n)\varphi,$$

e veja que pelos mesmos argumentos utilizados anteriormente, $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0^\infty(\Omega)$ e $\varphi_1, \varphi_2 \geq$

0 em Ω.

Portanto, por (1-50) aplicada à $\overline{u}_1$, φ_1 e $\overline{u}_2$, φ_2, temos que

$$\int_\Omega A(x,\nabla\overline{u}_j)\nabla\varphi_j dx - \int_\Omega f(x,\overline{u}_j)\varphi_j dx \geq 0, \quad (j=1,2),$$

isto é

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^N A_i(x,\nabla\overline{u}_j)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx - \int_\Omega f(x,\overline{u}_j)\varphi_j dx \geq 0, \quad (j=1,2),$$

e como

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i} = -\gamma_n'(w_n)\frac{\partial w_n}{\partial x_i}\varphi + (1-\gamma_n(w_n))\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \ \text{ e } \ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_i} = \gamma_n'(w_n)\frac{\partial w_n}{\partial x_i}\varphi + \gamma_n(w_n)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i},$$

tem-se

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^N A_i(x,\nabla\overline{u}_1)\left(-\gamma_n'(w_n)\frac{\partial w_n}{\partial x_i}\varphi + (1-\gamma_n(w_n))\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)dx - \int_\Omega f(x,\overline{u}_1)(1-\gamma_n(w_n))\varphi dx \geq 0, \tag{1-55}$$

e

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^N A_i(x,\nabla\overline{u}_2)\left(\gamma_n'(w_n)\frac{\partial w_n}{\partial x_i}\varphi + \gamma_n(w_n)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)dx - \int_\Omega f(x,\overline{u}_2)\gamma_n(w_n)\varphi dx \geq 0. \tag{1-56}$$

Agora, para cada $x\in\Omega_1$, tem-se que $w(x)>0$, logo, como na **Afirmação 2**, para cada $x\in\Omega_1$ fixado existe $n_0=n_0(x)$, tal que, para todo $n\geq n_0$ suficientemente grande, tem-se que $w_n(x)>\frac{1}{n}$. Analogamente, para cada $x\in\Omega_2$ fixado, tem-se que $w(x)<0$. Logo, existe $n_0=n_0(x)$, tal que, para todo $n\geq n_0$ suficientemente grande, tem-se $w_n(x)<0$. Assim, como na **Afirmação 1**, temos que

$$\gamma_n(w_n(x)) \longrightarrow 1, \ \text{ q.t.p. } \ x\in\Omega_1 \tag{1-57}$$

e

$$\gamma_n(w_n(x)) \longrightarrow 0, \ \text{ q.t.p. } \ x\in\Omega_2. \tag{1-58}$$

Somando (1-55) e (1-56), temos que

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^N (A_i(x,\nabla\overline{u}_2) - A_i(x,\nabla\overline{u}_1))\gamma_n'(w_n)\frac{\partial w_n}{\partial x_i}\varphi dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^N (A_i(x,\nabla\overline{u}_2) - A_i(x,\nabla\overline{u}_1))\gamma_n(w_n)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx +$$

$$\int_{\Omega}\left(\sum_{i=1}^{N}(A_i(x,\nabla\overline{u}_1)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}-f(x,\overline{u}_1)\varphi\right)dx+$$
$$\int_{\Omega}(f(x,\overline{u}_1)-f(x,\overline{u}_2))\gamma_n(w_n)\varphi dx\geq 0. \tag{1-59}$$

Como $f(x,\overline{u}_1)=f(x,\overline{u}_2)$ em Ω_0, segue que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}(f(x,\overline{u}_1)-f(x,\overline{u}_2))\gamma_n(w_n)\varphi dx &= \left(\int_{\Omega_1}+\int_{\Omega_2}\right)(f(x,\overline{u}_1)-f(x,\overline{u}_2))\gamma_n(w_n)\varphi dx\\ &= \int_{\Omega_1\cap supp\varphi}(f(x,\overline{u}_1)-f(x,\overline{u}_2))\gamma_n(w_n)\varphi dx+\\ &\quad \int_{\Omega_2\cap supp\varphi}(f(x,\overline{u}_1)-f(x,\overline{u}_2))\gamma_n(w_n)\varphi dx.\end{aligned}$$

Veja que de (1-57) e (1-58),

$$(f(x,\overline{u}_1)-f(x,\overline{u}_2))\gamma_n(w_n)\varphi\longrightarrow(f(x,\overline{u}_1)-f(x,\overline{u}_2))\varphi,\ \text{ q.t.p. em }\ \Omega_1$$

e

$$(f(x,\overline{u}_1)-f(x,\overline{u}_2))\gamma_n(w_n)\varphi\longrightarrow 0,\ \text{ q.t.p. em }\ \Omega_2.$$

Além disso, como anteriormente, temos que

$$|\,f(x,\overline{u}_1)-f(x,\overline{u}_2)\gamma_n(w_n)\varphi\,|\leq 2Ca(x)\in L^{p'}(\Omega).$$

Logo, pelo Teorema de Lebesgue

$$\int_{\Omega_1\cap supp\varphi}(f(x,\overline{u}_1)-f(x,\overline{u}_2))\gamma_n(w_n)\varphi dx\longrightarrow\int_{\Omega_1\cap supp\varphi}(f(x,\overline{u}_1)-f(x,\overline{u}_2))\varphi dx,$$

isto é,

$$\int_{\Omega_1\cap supp\varphi}(f(x,\overline{u}_1)-f(x,\overline{u}_2))\gamma_n(w_n)\varphi dx\longrightarrow\int_{\Omega_1}(f(x,\overline{u}_1)-f(x,\overline{u}_2))\varphi dx,$$

e

$$\int_{\Omega_2\cap supp\varphi}(f(x,\overline{u}_1)-f(x,\overline{u}_2))\gamma_n(w_n)\varphi dx\longrightarrow 0.$$

Portanto,

$$\int_{\Omega}(f(x,\overline{u}_1)-f(x,\overline{u}_2))\gamma_n(w_n)\varphi dx\longrightarrow\int_{\Omega_1}(f(x,\overline{u}_1)-f(x,\overline{u}_2))\varphi dx. \tag{1-60}$$

Similarmente, como $A_i(\cdot,\nabla \underline{u}_j) \in L^{p'}(\Omega)$, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in L^{\infty}(\Omega)$ e $0 \leq \gamma_n(w_n) \leq 1$, tem-se

$$\int_{\Omega_1} \sum_{i=1}^{N} (A_i(x,\nabla \overline{u}_2) - A_i(x,\nabla \overline{u}_1))\gamma_n(w_n)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx \longrightarrow \int_{\Omega_1} \sum_{i=1}^{N} (A_i(x,\nabla \overline{u}_2) - A_i(x,\nabla \overline{u}_1))\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx$$

e

$$\int_{\Omega_2} \sum_{i=1}^{N} (A_i(x,\nabla \overline{u}_2) - A_i(x,\nabla \overline{u}_1))\gamma_n(w_n)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx \longrightarrow 0,$$

donde

$$\begin{aligned}
\lim \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{N} (A_i(x,\nabla \overline{u}_2) - A_i(x,\nabla \overline{u}_1))\gamma_n(w_n)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx = \\
\lim\left(\int_{\Omega_1} + \int_{\Omega_2}\right) \sum_{i=1}^{N} (A_i(x,\nabla \overline{u}_2) - A_i(x,\nabla \overline{u}_1))\gamma_n(w_n)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx = \\
\lim \int_{\Omega_1} \sum_{i=1}^{N} (A_i(x,\nabla \overline{u}_2) - A_i(x,\nabla \overline{u}_1))\gamma_n(w_n)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx + \\
\lim \int_{\Omega_2} \sum_{i=1}^{N} (A_i(x,\nabla \overline{u}_2) - A_i(x,\nabla \overline{u}_1))\gamma_n(w_n)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx = \\
\int_{\Omega_1} \sum_{i=1}^{N} (A_i(x,\nabla \overline{u}_2) - A_i(x,\nabla \overline{u}_1))\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx.
\end{aligned} \tag{1-61}$$

Agora, como $w = \overline{u}_1 - \overline{u}_2$, por (A_2) tem-se que

$$\sum_{i=1}^{N} (A_i(x,\nabla \overline{u}_2) - A_i(x,\nabla \overline{u}_1))\left(\frac{\partial \overline{u}_2}{\partial x_i} - \frac{\partial \overline{u}_1}{\partial x_i}\right) \geq 0.$$

Daí e do fato de $\gamma_n'(w_n) \geq 0$ e $\varphi \geq 0$, vem que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{N} (A_i(x,\nabla \overline{u}_2) - A_i(x,\nabla \overline{u}_1))\gamma_n'(w_n)\frac{\partial w_n}{\partial x_i}\varphi dx = \\
\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{N} (A_i(x,\nabla \overline{u}_2) - A_i(x,\nabla \overline{u}_1))\left(\frac{\partial \overline{u}_1}{\partial x_i} - \frac{\partial \overline{u}_2}{\partial x_i}\right)\gamma_n'(w_n)\varphi dx + \\
\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{N} (A_i(x,\nabla \overline{u}_2) - A_i(x,\nabla \overline{u}_1))\left(\frac{\partial w_n}{\partial x_i} - \frac{\partial w}{\partial x_i}\right)\gamma_n'(w_n)\varphi dx \leq \\
\left| \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{N} (A_i(x,\nabla \overline{u}_2) - A_i(x,\nabla \overline{u}_1))\left(\frac{\partial w_n}{\partial x_i} - \frac{\partial w}{\partial x_i}\right)\gamma_n'(w_n)\varphi dx \right|.
\end{aligned} \tag{1-62}$$

Daí e de (1-47) temos que

$$\liminf_{n\longrightarrow\infty} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{N} (A_i(x,\nabla \overline{u}_2) - A_i(x,\nabla \overline{u}_1))\gamma_n'(w_n)\frac{\partial w_n}{\partial x_i}\varphi dx \quad \leq \quad \liminf_{n\longrightarrow\infty} \frac{c_2}{n} = 0. \tag{1-63}$$

Passando ao limite quando $n \longrightarrow \infty$ em (1-59) e usando (1-60), (1-61) e (1-63), temos que

$$
\begin{aligned}
0 \leq \liminf \int_\Omega \sum_{i=1}^N (A_i(x,\nabla\overline{u}_2) - A_i(x,\nabla\overline{u}_1))\gamma_n'(w_n)\frac{\partial w_n}{\partial x_i}\varphi dx + \\
\lim \int_\Omega \sum_{i=1}^N (A_i(x,\nabla\overline{u}_2) - A_i(x,\nabla\overline{u}_1))\gamma_n(w_n)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \\
\lim \int_\Omega (f(x,\overline{u}_1) - f(x,\overline{u}_2))\gamma_n(w_n)\varphi dx + \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^N A_i(x,\nabla\overline{u}_1)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} - f(x,\overline{u}_1)\varphi\right) dx \leq \\
\int_{\Omega_1} \sum_{i=1}^N (A_i(x,\nabla\overline{u}_2) - A_i(x,\nabla\overline{u}_1))\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega_1} (f(x,\overline{u}_1) - f(x,\overline{u}_2))\varphi dx + \\
\int_\Omega \sum_{i=1}^N A_i(x,\nabla\overline{u}_1)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} dx - \int_\Omega f(x,\overline{u}_1)\varphi dx = \\
\int_{\Omega_1} \sum_{i=1}^N (A_i(x,\nabla\overline{u}_2) - A_i(x,\nabla\overline{u}_1))\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} dx + \left(\int_{\Omega_1} + \int_{\Omega\setminus\Omega_1}\right) \sum_{i=1}^N A_i(x,\nabla\overline{u}_1)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} dx + \\
\int_{\Omega_1} (f(x,\overline{u}_1) - f(x,\overline{u}_2))\varphi dx - \left(\int_{\Omega_1} + \int_{\Omega\setminus\Omega_1}\right) f(x,\overline{u}_1)\varphi dx = \\
\int_{\Omega_1} \sum_{i=1}^N A_i(x,\nabla\overline{u}_2)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega\setminus\Omega_1} \sum_{i=1}^N A_i(x,\nabla\overline{u}_1)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} dx - \\
\int_{\Omega_1} f(x,\overline{u}_2)\varphi dx - \int_{\Omega\setminus\Omega_1} f(x,\overline{u}_1)\varphi dx = \\
\int_\Omega \sum_{i=1}^N A_i(x,\nabla\overline{u}_0)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} dx - \int_\Omega f(x,\overline{u}_0)\varphi dx = \\
\int_\Omega A(x,\nabla\overline{u}_0)\nabla\varphi dx - \int_\Omega f(x,\overline{u}_0)\varphi dx.
\end{aligned}
$$

E daí

$$\int_\Omega A(x,\nabla\overline{u}_0)\nabla\varphi dx \geq \int_\Omega f(x,\overline{u}_0)\varphi dx, \ \ \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \ \ \varphi \geq 0 \ \text{ em } \ \Omega,$$

donde $\overline{u}_0$ é super solução do problema (1-1).

E fica demonstrado o item (i).

Verificação de (ii)**.** Como $\underline{u}_0$ é uma subsolução e $\overline{u}_0$ é uma super solução de (1-1) com $\underline{u}_0 \leq \overline{u}_0$, segue, utilizando o **Teorema 0.3**, que existe uma solução $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de (1-1) tal que

$$\underline{u}_0 \leq u \leq \overline{u}_0, \ \ \text{q.t.p. em } \ \Omega,$$

e fica demonstrado o **Teorema 0.4**.

$\square$

Observação 1.11 *Utilizando o* **Teorema 0.4** *podemos produzir definições um pouco mais gerais de sub e super soluções da seguinte forma:* $\underline{u} \in W^{1,p}(\Omega)$ *é uma subsolução do problema (1-1) se é o supremo de subsoluções deste problema e* $\overline{u} \in W^{1,p}(\Omega)$ *é uma super solução de (1-1) se é o ínfimo de super soluções do mesmo problema. Então, sendo* S *o conjunto das soluções de (1-1) entre* $\underline{u}_0$ *e* $\overline{u}_0$*, o* **Teorema 0.4** *garante que* S *é não-vazio e, consequentemente, contém o soluções maximais e soluções minimais com respeito à ordem natural. Para mais detalhes sobre soluções maximais e soluções minimais recomendamos Kura [19] e Le [21].*

1.3 Demonstração das Afirmações Auxiliares

Demonstração da Afirmação 1 do item (iii) do Lema 1.7. De fato, consideremos dois casos:

Caso 1: $\underline{u} \leq \overline{u} \leq 0$.

Neste caso, temos as seguintes possibilidades:

(1) Se $u < \underline{u} \leq \overline{u} \leq 0$, temos $0 \leq |\, \overline{u} \,| \leq |\, \underline{u} \,| < |\, u \,|$. Logo, existe $\lambda > 1$, tal que, $|\, u \,| = \lambda \,|\, \underline{u} \,|$, donde

$$\int_{\underline{S}} |\, \underline{u} \,|^{p-1} |\, u \,|\, dx = \lambda \int_{\underline{S}} |\, \underline{u} \,|^{p}\, dx.$$

(2) Se $\underline{u} \leq u \leq \overline{u} \leq 0$, temos $0 \leq |\, \overline{u} \,| \leq |\, u \,| \leq |\, \underline{u} \,|$. Logo, existe $\lambda \in [0,1]$, tal que, $|\, u \,| = |\, \underline{u} \,| + \lambda \,|\, \underline{u} - \overline{u} \,|$, donde

$$\int_{S} |\, u \,|^{p}\, dx = \int_{S} (|\, \underline{u} \,| + \lambda \,|\, \underline{u} - \overline{u} \,|)^{p} dx.$$

(3) Se $\underline{u} \leq \overline{u} < u \leq 0$, temos $0 \leq |\, u \,| < |\, \overline{u} \,| \leq |\, \underline{u} \,|$. Logo, existe $\lambda \in (0,1)$, tal que, $|\, u \,| = \lambda \,|\, \overline{u} \,|$, donde

$$\int_{\overline{S}} |\, \overline{u} \,|^{p-1} |\, u \,|\, dx = \lambda \int_{\overline{S}} |\, \overline{u} \,|^{p}\, dx.$$

(4) Se $\underline{u} \leq \overline{u} \leq 0 < u$, então este caso se reduz à um dos casos anteriores.

Caso 2: $0 \leq \underline{u} \leq \overline{u}$.

Neste caso, temos as seguintes possibilidades:

(1) Se $0 \leq u < \underline{u} \leq \overline{u}$, temos $0 \leq |\, u \,| \leq \underline{u} \leq \overline{u}$.

Logo, existe $\lambda \in (0,1)$, tal que, $|\, u \,| = \lambda \,|\, \underline{u} \,|$, donde

$$\int_{\underline{S}} |\, \underline{u} \,|^{p-1} |\, u \,|\, dx = \lambda \int_{\underline{S}} |\, \underline{u} \,|^{p}\, dx.$$

(2) Se $0 \leq \underline{u} \leq u \leq \overline{u}$, temos $0 \leq \underline{u} \leq \mid u \mid \leq \overline{u}$.

Logo, existe $\lambda \in [0,1]$, tal que, $\mid u \mid = \mid \underline{u} \mid + \lambda \mid \overline{u} - \underline{u} \mid$, donde

$$\int_S \mid u \mid^p dx = \int_S (\mid \underline{u} \mid + \lambda \mid \overline{u} - \underline{u} \mid)^p dx.$$

(3) Se $0 \leq \underline{u} \leq \overline{u} < u$, temos $0 \leq \underline{u} \leq \overline{u} < \mid u \mid$. Logo, existe $\lambda > 1$, tal que, $\mid u \mid = \lambda \mid \overline{u} \mid$, donde

$$\int_{\overline{S}} \mid \overline{u} \mid^{p-1} \mid u \mid dx = \lambda \int_{\overline{S}} \mid \overline{u} \mid^p dx.$$

(4) Se $u \leq 0 \leq \underline{u} \leq \overline{u}$, então este caso se reduz à um dos casos anteriores.

Logo, em qualquer dos casos, as integrais em questão dependem somente de $\underline{u}$ e $\overline{u}$ e, portanto, elas são todas constantes.

$\square$

Finalizamos aqui o Capítulo 1.

CAPÍTULO 2

Grau Topológico e Aplicações

Neste capítulo faremos um breve resumo sobre a Teoria do Grau Topológico, descrevendo os conceitos e propriedades fundamentais que serão úteis na sequência deste trabalho.

O Grau é uma ferramenta topológica que, sob determinada condição, nos dá informações sobre a existência, multiplicidade e natureza das soluções de uma dada equação. Em palavras, o objetivo é estudar a existência de soluções de equações do tipo

$$f(x) = b, \;\; x \in \overline{\Omega}, \tag{2-1}$$

onde Ω é um aberto limitado em um espaço de Banach E, $f : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ é uma aplicação contínua e $b \in E$.

De um modo geral, este estudo consiste em encontrar o inteiro, denotado por $deg(f, \Omega, b)$, com a seguinte propriedade: se $deg(f, \Omega, b) \neq 0$, então a equação (2-1) tem pelo menos uma solução. Para isto, estudaremos o Grau em dimensão finita (Grau de Brouwer) bem como suas propriedades e em seguida extenderemos este estudo para espaços de dimensão infinita (Grau de Leray-Schauder). Esta ferramenta tem grande aplicação em problemas não lineares em espaços de dimensão finita.

2.1 Grau de Brouwer

Antes de definir o grau de Brouwer fixaremos as seguintes notações: $C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ é o conjunto de todas as funções $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ contínuas que possuem derivadas de ordem k que podem ser extendidas continuamente até a fronteira. $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N) \cap C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, $S = \{x \in \overline{\Omega};\; \det f'(x) = 0\}$ e $b \in \mathbb{R}^N \setminus f(\partial\Omega) \cup f(S)$.

Definição 2.1 *Sejam $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $b \notin f(\partial\Omega) \cup f(S)$. Definimos o Grau de f com relação a Ω no ponto b como o inteiro dado por*

$$deg(f, \Omega, b) = \sum_{x \in f^{-1}(b)} sgn(det f'(x)),$$

onde sgn é a função sinal e $f'(x)$ é a matriz jacobiana da função f.

Para exemplificar, considere a função $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sin(x) \text{ e } b = \frac{1}{2}.$$

Vamos obter $deg\Big(\sin, (0, 2\pi), \frac{1}{2}\Big)$.
Primeiro veja que

$$\partial\Omega = \{0, 2\pi\} \text{ e } S = \{x \in (0, 2\pi);\ \cos x = 0\} = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\},$$

logo

$$f(\partial\Omega) \cup f(S) = \{-1, 0, 1\},$$

donde $\frac{1}{2} \notin f(\partial\Omega) \cap f(S)$. Além disso, $f \in C^\infty([0, 2\pi], \mathbb{R})$, logo o Grau de sin em $(0, 2\pi)$ com relação à $\frac{1}{2}$ é dado por

$$deg\Big(\sin, (0.2\pi), \frac{1}{2}\Big) = sgnf'\Big(\frac{\pi}{6}\Big) + sgnf'\Big(\frac{5\pi}{6}\Big) = 1 - 1 = 0.$$

Apesar de suas aplicações, o grau assim definido não nos tem grande utilidade, pois grande parte dos problemas envolvem funções não necessáriamente diferenciáveis. Desta forma, extenderemos o grau de Brouwer para funções contínuas (Grau de Brouwer).

Considere $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, $b \notin f(\partial\Omega)$ e $r = dist(b, \partial\Omega)$. Como $C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ é denso em $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, pode-se utilizar o Teorema da Aproximação de Weierstrass para garantir a existência de uma função $g \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, tal que, $\| f - g \|_\infty < r$. Fixe o conjunto

$$U = \{g \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N);\ \| f - g \|_\infty < r\}.$$

Então,

$$deg(g_1, \Omega, b) = deg(g_2, \Omega, b),\ \ \forall g_1, g_2 \in U.$$

Com isso, fazemos a seguinte definição:

Definição 2.2 *Seja $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ e $b \notin f(\partial\Omega)$. Definimos o Grau de Brouwer de f com relação a Ω em b por*

$$deg(f, \Omega, b) = deg(g, \Omega, b)$$

onde $g \in C^2(\overline{\Omega}, I\!R^N)$ é qualquer função satisfazendo $\| f - g \|_\infty < r$ e $deg(g,\Omega,b)$ é o Grau dado na definição 2.1.

Observação 2.3 *Uma consequência da definição 2.2 é que se $f \in C(\overline{\Omega}, I\!R^N)$ e $b \notin f(\partial\Omega)$, então*

$$deg(f,\Omega,b) = deg(f-b,\Omega,0).$$

Para uma demonstração deste fato sugerimos [2], p. 38.

A sequir enunciamos as três propriedades principais da Teoria do Grau.

Teorema 2.4 (Normalização) *Seja E um espaço de Banach, $\Omega \subset E$ um aberto limitado e I a aplicação idêntidade em Ω. Se $b \in \Omega$, então*

$$deg(I,\Omega,b) = 1.$$

Demonstração: (cf. Schwartz [34], p. 72).

Teorema 2.5 (Aditividade) *Sejam Ω_1 e Ω_2 dois subconjuntos abertos de Ω, tais que, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Se $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ é tal que $b \notin f(\partial\Omega_1) \cup f(\partial\Omega_2)$, então*

$$deg(f,\Omega,b) = deg(f,\Omega_1,b) + deg(f,\Omega_2,b).$$

Demonstração: (cf. Schwartz [34], p. 72).

Teorema 2.6 (Invariância do Grau por Homotopia) *Sejam $f,g : \overline{\Omega} \longrightarrow I\!R^N$ duas funções contínuas, $b \in I\!R^N \setminus f(\partial\Omega) \cup g(\partial\Omega)$ e seja $H : [0,1] \times \overline{\Omega} \longrightarrow I\!R^N$ uma aplicação contínua tal que $b \notin H([0,1] \times \partial\Omega)$ e*

$$h(0,x) = f(x) \;\; e \;\; h(1,x) = g(x).$$

Então, $deg(H(t,\cdot),\Omega,b) = constante$, para todo $t \in [0,1]$.

Demonstração: (cf. Ambrosetti & Arcoya [2], p. 35).

Pode-se provar que o Grau de Brouwer é unicamente determinado pelas três propriedades acima. As propriedades que se seguem são consequências das três propriedades anteriores.

Teorema 2.7 (Solução) *Seja Ω um aberto limitado em um espaço de Banach E e $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ tal que $b \notin f(\partial\Omega)$. Se $deg(f,\Omega,b) \neq 0$, então existe $x \in \Omega$, tal que, $f(x) = b$.*

Demonstração: (cf. Ambrosetti & Arcoya [2], p. 36).

Teorema 2.8 (Excisão) *Seja K é um subconjunto compacto de Ω e $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$, tal que, $b \notin f(\partial\Omega) \cup f(K)$. Então*

$$deg(f, \Omega, b) = deg(f, \Omega \setminus K, b).$$

Demonstração: (cf. Schwartz [34], p. 73).

Teorema 2.9 (Dependêncida dos Valores da Fronteira) *Sejam $f, g : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ funções contínuas tais que, $f\mid_{\partial\Omega} = g\mid_{\partial\Omega}$ e $b \notin f(\partial\Omega) = g(\partial\Omega)$. Então,*

$$deg(f, \Omega, b) = deg(g, \Omega, b).$$

Demonstração: (cf. Ambrosetti & Arcoya [2], p. 35).

Teorema 2.10 (O Grau é constante por componentes conexas) *Se b_1 e b_2 estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N \setminus f(\partial\Omega)$, então*

$$deg(f, \Omega, b_1) = deg(f, \Omega, b_2).$$

Demonstração: (cf. Ambrosetti & Arcoya [2], p. 35).

Teorema 2.11 (Continuidade) *Seja $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ contínua tal que $b \notin f(\partial\Omega)$. Então existe uma vizinhança V de f tal que para todo $g \in V$, $b \notin g(\partial\Omega)$ e*

$$deg(f, \Omega, b) = deg(g, \Omega, b).$$

Demonstração: (cf. Schwartz [34], p. 67).

Teorema 2.12 (Produto Cartesiano) *Suponha que $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ é um aberto limitado em $\mathbb{R}^N$ com Ω_1 aberto em $\mathbb{R}^p$ e Ω_2 aberto em $\mathbb{R}^q$, $p + q = N$. Suponha que $f : \overline{\Omega_1} \times \overline{\Omega_2} \longrightarrow \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ seja tal que $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$, onde $f_1 : \overline{\Omega_1} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ e $f_2 : \overline{\Omega_2} \longrightarrow \mathbb{R}^q$ são contínuas. Suponha que $b \notin f_i(\partial\Omega_1 \times \partial\Omega_2)$. Então,*

$$deg(f, \Omega, b) = deg(f_1, \Omega_1, b) deg(f_2, \Omega_2, b).$$

Demonstração: (cf. Schmitt & Thompson [33], p. 40).

O seguinte teorema mostra que o Grau de Brouwer pode ser extendido para quaisquer espaços vetoriais V de dimensão finita.

Teorema 2.13 *Sejam $\Omega \subset I\!R^N$ um aberto limitado, $f \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ com $n < N$ e $\varphi(x) = x - f(x)$, $\forall x \in \overline{\Omega}$. Se $b \notin \varphi(\partial\Omega)$, então*

$$deg(\varphi, \Omega, b) = deg(\varphi\,|_{\overline{\Omega}\cap\mathbb{R}^n}, \Omega \cap \mathbb{R}^n, b).$$

Demonstração: (cf. O'Regan D, Cho Y.J., Chen Y. [28], p. 9).

As propriedades enunciadas acima compõem um grupo de ferramentas de grande valia para estudar o conjunto das soluções de equações do tipo (2-1). O seguinte teorema é uma aplicação da Teoria do Grau de Brouwer e tem grande importância na Teoria dos Pontos Fixos.

Teorema 2.14 (Ponto Fixo de Brouwer) *Sejam $C \subset I\!R^N$ um conjunto fechado, limitado, convexo e $f : C \longrightarrow C$ contínua. Então. existe $x \in C$, tal que, $f(x) = x$.*

Para a demonstração deste teorema utilizaremos o teorema abaixo devido à Dugundji.

Teorema 2.15 (Dugundji) *Sejam M um espaço métrico, E um espaço de Banach, $A \subset M$ fechado, $C \subset E$ fechado e convexo e $f : A \longrightarrow C$ contínua. Então, existe $\widetilde{f} : M \longrightarrow C$ contínua, tal que, $\widetilde{f}\,|_A = f$.*

Demonstração: (cf. Deimling [10], p. 44).

Passemos à demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.

Demonstração do Teorema 2.14. Primeiro, suponha que exista $R > 0$, tal que,

$$C = \{x \in I\!R^N; \| x \| \leq R\},$$

isto é, C é uma bola de raio R centrada na origem. Defina a aplicação $T : C \longrightarrow C$ por

$$T(x) = x - f(x), \quad \forall x \in C.$$

Então, temos dois casos:

<u>Caso 1</u>: $T(x) = 0$, $\forall x \in \partial C$.

Neste caso, $f(x) = x$ e o teorema está trivialmente demonstrado.

<u>Caso 2</u>: $T(x) \neq 0$, $\forall x \in \partial C$.

Neste caso, defina a homotopia $H : [0,1] \times C \longrightarrow C$ por

$$H(t,x) = x - tf(x), \;\; t \in [0,1], \;\; x \in \partial C.$$

e veja que H é contínua. Logo, basta mostrar que $H(t,x) \neq 0$, para todo $(t,x) \in [0,1] \times \partial C$ e aplicar o Teorema da Invariância do Grau por Homotopia para obter o resultado desejado.

Afirmação 1: $H(t,x) \neq 0$, para todo $(t,x) \in [0,1] \times \partial C$.

De fato, se $t = 0$, então $H(0,x) = x \neq 0$ pois $0 \notin \partial C$. Já se $t = 1$, tem-se $H(1,t) = T(x) \neq 0$ por hipótese.

Agora, suponha por contradição que exista $(t,x) \in (0,1) \times \partial C$, tal que, $H(t,x) = 0$, isto é, que $tf(x) = x$, logo

$$\| f(x) \| = \frac{\| x \|}{t} > \| x \| = R,$$

um absurdo, pois $f(x) \in C$. Assim, $H(t,x) \neq 0$, $\forall (t,x) \in [0,1] \times \partial C$ e utilizando o Teorema da Invariância do Grau por Homotopia, temos que

$$deg(T,C,0) = deg(I,C,0) = 1.$$

Como $deg(T,C,0) \neq 0$, segue pela propriedade solução do Grau, que existe $x \in C$, tal que, $T(x) = 0$, isto é, que

$$x - f(x) = 0$$

e, portanto

$$f(x) = x.$$

Suponha agora que C não é uma bola. Como C é limitado, existe uma bola $B = B_R(0)$ que contém C. Como C é fechado e convexo, pelo Teorema de Dugundji, existe uma função $\widetilde{f} : \overline{B} \longrightarrow C$ contínua, tal que, $\widetilde{f}\,|_C = f$. Veja que $\partial B \cap f(C) = \emptyset$, logo usando a primeira parte da demonstração, temos que existe $x \in B$, tal que, $\widetilde{f}(x) = x$. Mas como $\widetilde{f}(\overline{B}) \subseteq C$, temos que, $f(x) = x$, $x \in C$. Isto conclui a demonstração.

$\square$

Faremos agora a extensão do Grau para espaços de dimensão infinita. Esta extensão é denominada Teoria do Grau de Leray-Schauder e é feita através de perturbações compactas da idêntidade.

2.2 Grau de Leray-Schauder

Seja Ω um aberto limitado em um espaço de Banach E e $T : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ um operador compacto. Defina

$$\Phi = I - T$$

e considere $b \notin \Phi(\partial\Omega)$. Φ é dita uma perturbação compacta da idêntidade. O Grau de Leray-Schauder é definido no conjunto das triplas (Φ, Ω, b) com as mesmas propriedades estabelecidas para o Grau de Brouwer.

Definição 2.16 *Sejam $b \in E \setminus \Phi(\partial\Omega)$ e F um subespaço de dimensão finita de E que contém $T(\overline{\Omega})$ e b. O Grau de Φ em relação à Ω em b é definido como o inteiro dado por*

$$deg(\Phi, \Omega, b) = deg(\Phi\mid_{\overline{\Omega}\cap F}, \Omega \cap F, b).$$

Observe que a igualdade acima está bem definida. De fato, basta mostrar que o Grau independe da escolha do subespaço F. Para isto, sejam F_1 e F_2 dois subespaços de E de dimensão finita com

$$T(\overline{\Omega}) \subset F_1 \cap F_2 \ \text{ e } \ b \in F_1 \cap F_2.$$

Considere, então, $F = F_1 \cap F_2$ o menor subespaço de F_1 e F_2 que contém $T(\overline{\Omega})$ e b. Pelo **Teorema 2.13**, temos que

$$deg(\Phi\mid_{\overline{\Omega}\cap F_1}, \Omega \cap F_1, b) = deg(\Phi\mid_{\overline{\Omega}\cap F}, \Omega \cap F, b)$$

e

$$deg(\Phi\mid_{\overline{\Omega}\cap F_2}, \Omega \cap F_2, b) = deg(\Phi\mid_{\overline{\Omega}\cap F}, \Omega \cap F, b)$$

e daí segue que

$$deg(\Phi\mid_{\overline{\Omega}\cap F_1}, \Omega \cap F_1, b) = deg(\Phi\mid_{\overline{\Omega}\cap F_2}, \Omega \cap F_2, b)$$

e, portanto, o Grau está bem definido.

Observação 2.17 *As observações a seguir tratam de operadores compactos:*

(a) *Dizemos que um operador $T : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ é compacto se T é contínuo e leva conjuntos limitados em conjuntos relativamente compactos, isto é, se $\overline{T(\overline{\Omega})}$ é compacto sempre que $\overline{\Omega}$ é limitado, ou ainda, se dada uma sequência convergente $(u_n) \subseteq \overline{\Omega}$, $(T(u_n))$ possui uma subsequência convergente.*

(b) *O espaço vetorial*
$$K(\overline{\Omega},E)=\{T:\overline{\Omega}\longrightarrow E;\ \ T compacto\}$$
é um espaço de Banach munido da norma
$$\| T \|_{\infty}=\sup_{x\in\overline{\Omega}} | Tx | \ .$$

(c) *T pode ser aproximado por operadores de posto finito, isto é, se E um espaço de Banach, $\Omega\subset E$ um subconjunto limitado e $T:\overline{\Omega}\longrightarrow E$ uma aplicação compacta contínua, então para qualquer $\varepsilon>0$, existe um espaço de dimensão finita F e uma aplicação contínua $T_\varepsilon:\overline{\Omega}\longrightarrow F$, tal que,*
$$\| T_\varepsilon x - Tx \|<\varepsilon,\ \ \forall x\in\overline{\Omega}.$$

(d) *Seja $T:\overline{\Omega}\longrightarrow E$ um operador compacto e $\Phi=I-T$. Então, T é fechado.*

Com as observações acima temos a seguinte definição:

Definição 2.18 (O Grau de Leray-Schauder) *Seja $T:\overline{\Omega}\longrightarrow E$ um operador compacto e defina $\Phi=I-T$ com $b\notin\Phi(\partial\Omega)$. Definimos o Grau de Leray-Schauder de Φ com relação a Ω no ponto b como o inteiro*
$$deg(\Phi,\Omega,b)=deg(\Phi_1,\Omega_1,b),$$
onde $\Phi_1=I-T_1$, sendo T_1 um operador compacto tal que
$$\sup_{x\in\overline{\Omega}}\| T_1x-Tx \|<r=dist(b,\Phi(\partial\Omega)),$$
$\Omega_1=\Omega\cap E_1$, onde E_1 é qualquer subespaço de E de dimensão finita com $T(\overline{\Omega})\subseteq E_1$, $b\in E_1$ e $deg(\Phi_1,\Omega_1,b)$ é o Grau de Brouwer.

É importante ressaltar que todas as propriedades enunciadas acima para o Grau de Brouwer são válidas também para o Grau de Leray-Schauder. Outras propriedades importantes do Grau de Leray-Schauder são:

Teorema 2.19 (Invariância por Homotopia) *Seja $T\in C([0,1]\times\overline{\Omega},E)$ tal que $T(t,\cdot)$ é uma aplicação compacta para todo $t\in[0,1]$. Defina $\Phi_t(u)=u-T(t,u)$. Se $b:[0,1]\longrightarrow E$ é contínua e $b(t)\notin\Phi_t(\partial\Omega)$, então*
$$deg(\Phi_t,\Omega,b(t))=constante,\ \ \forall t\in[0,1].$$

Demonstração: (cf. Ambrosetti & Malchiodi [3], p. 37).

Teorema 2.20 (Invariância por Homotopia Generalizado) *Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R} \times E$ e seja $T : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ um operador compacto. Para todo $t \in \mathbb{R}$ considere as t-faixas*

$$\Omega_t = \{u \in E; \ \ (t,u) \in \Omega\}$$

e a aplicação $\Phi_t : \overline{\Omega}_t \longrightarrow E$ dada por

$$\Phi_t(u) = u - T(t,u).$$

Se $\Phi_t(u) \neq b$, $\forall u \in \partial\Omega_t$, então o Grau Topológico $deg(\Phi_t, \Omega_t, b)$ está bem definido e independe de t.

Demonstração: (cf. Ambrosetti & Malchiodi [3], p. 55).

Faremos agora um resultado sobre pontos fixos que é semelhante ao Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e cuja a prova é quase idêntica. Mas antes de provar este resultado faremos algumas resultados preliminares.

Definição 2.21 *Seja A um subconjunto de um espaço vetorial E. A envoltória convexa de A, denotada por $conv(A)$, é a intersecção de todos os subconjuntos convexos de E que contêm A. O fecho envoltório convexo de A, denotado por $\overline{conv}(A)$ é a intersecção de todos os conjuntos convexos fechados de E que contêm A.*

Lema 2.22 *Se E é um espaço vetorial topológico então $\overline{conv}(A) = \overline{conv(A)}$.*

Demonstração: (cf. Dunford & Schwartz [11], p. 415).

Com isso podemos enunciar o seguinte teorema sobre pontos fixos.

Teorema 2.23 (Ponto Fixo de Schauder) *Seja C um conjunto limitado, fechado e convexo em um espaço de Banach E e $T : C \longrightarrow C$ um operador compacto. Então, T tem um ponto fixo em C, isto é, existe $x \in C$, tal que, $T(x) = x$.*

Para a demonstração deste teorema utilizaremos o resultado abaixo devido à Mazur cuja demonstração pode ser encontrada em DUNFORD & SCHWARTZ [11], p. 416.

Teorema 2.24 (Mazur) *Seja E um espaço de Banach e $A \subseteq E$ compacto. Então $\overline{conv}(A)$ é compacto.*

Passemos à demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Schauder.

Demonstração do Teorema 2.23. Primeiro veja que do fato de C ser limitado e de $T : C \longrightarrow C$ ser um operador compacto, tem-se que $\overline{T(C)} \subset C$ é compacto. Defina

$$A = \overline{conv}(\overline{T(C)}) \subset C.$$

Pelo Teorema de Mazur tem-se que A é compacto.

Tome $R > 0$ tal que $A \subset B$, onde $B = B_R(0)$ é a bola aberta de raio R centrada na origem. Já que $\overline{T(C)} \subset A$, podemos considerar

$$T : C \longrightarrow A.$$

Agora, como T é contínuo, pelo Teorema de Dugundji (cf. Teorema 2.15), existe uma extensão contínua $\widetilde{T} : \overline{B} \longrightarrow A$ de T tal que

$$\widetilde{T} \mid_C = T.$$

Veja que $\overline{\widetilde{T}(B)} \subset A$ é fechado e que A é compacto, logo $\widetilde{T}$ é compacto. Agora defina a homotopia $H : [0,1] \times \overline{B} \longrightarrow B$, por

$$H(t,x) = x - t\widetilde{T}(x),$$

e veja que H é contínua.

Suponha que $x - \widetilde{T}(x) \neq 0$, pois caso contrário o teorema estaria trivialmente demonstrado.

Afirmação 1: $H(t,x) \neq 0$, para todo $t \in [0,1] \times \partial B$.

De fato, se $t = 0$, então $H(0,x) = x \neq 0$, pois $0 \notin \partial B$. Já se $t = 1$, tem-se $H(1,t) = x - \widetilde{T}(x) \neq 0$, por hipótese. Logo, $0 < t < 1$.

Suponha por contradição que exista $(t,x) \in (0,1) \times \partial B$, tal que, $H(t,x) = 0$. Logo,

$$x = t\widetilde{T}(x).$$

Daí,

$$R = \| x \| = t \| \widetilde{T}(x) \| < R,$$

o que é absurdo. Logo, $H(t,x) \neq 0$, para todo $t \in [0,1]$ e para todo $x \in \partial B$, e pelo Teorema da Invariância por Homotopia,

$$deg(H(t,\cdot),B,0) = constante,$$

donde

$$deg(H(1,\cdot),B,0) = deg(H(0,\cdot),B,0),$$

isto é,

$$deg(I-\widetilde{T},B,0) = deg(I,B,0) = 1.$$

Logo, pela propriedade solução do grau, existe $x \in B$, tal que, $x - \widetilde{T}(x) = 0$, isto é, tal que,

$$\widetilde{T}(x) = x.$$

E como $\widetilde{T}(\overline{B}) \subset C$ e $\widetilde{T}\,|_C = T$, tem-se que

$$T(x) = x.$$

Portando T tem um ponto fixo. Concluindo assim este teorema.

□

A seguir enunciaremos um teorema devido à Rabinowitz que nos será muito útil para garantir a existência de soluções de uma função da forma $I-T$, com T compacto, em espaços de Hilbert de dimensão infinita em um ponto b, onde b é um ponto de mínimo isolado de tal função neste espaço de Hilbert.

Teorema 2.25 (Rabinowitz) *Seja E uma espaço de Hilbert de dimensão infinita, $b \in E$, Ω uma vizinhança limitada de b e $g \in C^1(\Omega,\mathbb{R})$ com $g'(u) = u - T(u)$, onde T é compacto. Suponha b um ponto de mínimo isolado para g. Então,*

$$deg(g',\Omega,0) = 1.$$

Demonstração: (cf. Rabinowitz [30], p. 484).

E finalizamos aqui este capítulo que será de grande importância para desenvolvimento do Capítulo 3.

CAPÍTULO 3

Um Problema Não-Linear de Auto-Valor para o Laplaciano: Um Resultado de Peter Hess

Neste capítulo consideraremos o problema (0-2) e mostraremos através de Métodos Variacionais, Princípios de Máximo e Teoria do Grau Topológico de Leray-Schauder a existência de múltiplas soluções clássicas positivas deste problema dado que $f \in C^1([0,\infty),\mathbb{R})$ satisfaz as condições (f_1), (f_2) e (f_3) dadas anteriormente.

O problema (0-2) foi estudado inicialmente por Brown e Budin em [6]. Neste trabalho eles consideram um problema elíptico não-linear para o operador uniformemente elíptico

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}\partial_j u) + cu, \quad a_{ij} \in C^{1+\alpha}(\overline{\Omega}), c \in C^{\alpha}(\overline{\Omega}), c > 0,$$

e mostram que a troca de sinal da função f e certas condições adicionais impostas sobre f garantem a multiplicidade de soluções clássicas positivas do problema. Nesta generalidade, utilizando Métodos Variacionais, eles mostram a existência somente de m soluções $u_1, \cdots, u_m$. Além disso, sob certas condições adicionais eles mostram a existência de uma segunda solução $\widetilde{u}_i$ entre as soluções u_i e u_{i+1}. Outros avanços neste sentido dependem especialmente da Teoria do Grau de Leray-Schauder. É sobre estes avanços que trataremos à seguir.

3.1 Resultados Preliminares e Notações

Nesta seção apresentaremos vários lemas técnicos e notações que serão utilizados na demonstração do **Teorema 0.1**. Começaremos com o seguinte resultado cuja demonstração utiliza o Princípio do Máximo Forte.

Lema 3.1 *Seja $g : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^1, $s_0 > 0$ um número tal que $g(s_0) \leq 0$ e u uma solução clássica positiva do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) & em \quad \Omega, \\ u = 0 & em \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3-1}$$

Então, $\| u \|_\infty \neq s_0$.

Demonstração. Suponha por absurdo que $\| u \|_\infty = s_0$. Provaremos a seguinte afirmação:

Afirmação 1: Existe $c > 0$ tal que $h(t) = g(t) + ct$ é crescente em $[0, s_0]$.

De fato, para que a função $h(t)$ seja crescente em $[0, s_0]$ é suficiente que $h'(t) > 0$ para $t \in [0, s_0]$, ou seja, é suficiente que $g'(t) > -c$.

Como $g \in C^1([0, s_0])$, temos que $g' \in C([0, s_0])$. Além disso, como $[0, s_0]$ é um conjunto compacto, segue que g' é uma função limitada em $[0, s_0]$, isto é, existe uma constante $c_0 > 0$ tal que $| g'(t) | \leq c_0$, para todo $t \in [0, s_0]$.

Tomando $c > c_0$, teremos que $| g'(t) | < c$, isto é, $-c < g'(t) < c$, donde $g'(t) + c > 0$, isto é, $h'(t) > 0$. Daí h é crescente em $[0, s_0]$.

Agora, veja que

$$\begin{aligned} (-\Delta + c)(u - s_0) &= -\Delta u + cu - cs_0 \\ &\leq -\Delta u + cu - g(s_0) - cs_0 \\ &= g(u) + cu - (g(s_0) + cs_0). \end{aligned} \tag{3-2}$$

Como

$$g(s_0) + cs_0 \geq g(u) + cu,$$

pois $g(u) + cu$ é crescente em $[0, s_0]$, tem-se que

$$g(u) + cu - (g(s_0) + cs_0) \leq 0,$$

e de (3-2)

$$(-\Delta + c)(u - s_0) \leq 0 \text{ em } \Omega.$$

Além disso,

$$u - s_0 = -s_0 < 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

Logo, podemos considerar o seguinte problema

$$\begin{cases} -(\Delta + c)(u - s_0) \leq 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ u - s_0 < 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3-3}$$

e aplicar o Princípio do Máximo Forte para garantir que $u - s_0 < 0$ em Ω, isto é, $u < s_0$ em Ω. O que é impossível. Logo, $\| u \|_\infty \neq s_0$ e fica provado o **Lema 3.1**. $\square$

Agora, considere a família de problemas

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda f_k(v) & \text{em} \quad \Omega, \\ v = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3-4}$$

onde $1 \leq k \leq m$ e $f_k \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é dada por

$$f_k(s) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad s \leq -1 \\ \geq 0, & \text{se} \quad -1 \leq s \leq 0 \\ f(s), & \text{se} \quad 0 \leq s \leq a_k. \\ \leq 0, & \text{se} \quad a_k \leq s \leq a_k + 1 \\ 0, & \text{se} \quad a_k + 1 \leq s \end{cases} \tag{3-5}$$

Considere o Espaço de Sobolev $H = H_0^1(\Omega)$ equipado com a norma

$$\| u \|_H^2 = < u, u >_H = \int_\Omega | \nabla u |^2 \, dx \tag{3-6}$$

e produto interno dado por

$$\langle u, v \rangle_H = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx, \quad u, v \in H. \tag{3-7}$$

A expressão em (3-6) é uma norma em H devido à desigualdade de Poincaré.

O objetivo do lema abaixo é resolver o problema (3-4) encontrando solução fraca.

Lema 3.2 *Para cada inteiro $k \in \{1, \ldots, m\}$, o problema (3-4) tem pelo menos uma solução fraca $u \in H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração. Para cada $\lambda \geq 0$, defina o funcional energia $\Phi_k(\lambda, \cdot) : H \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\Phi_k(\lambda, u) = \frac{1}{2} \| u \|_H^2 - \lambda \int_\Omega F_k(u) dx, \quad u \in H, \tag{3-8}$$

onde

$$F_k(s) = \int_0^s f_k(\sigma) d\sigma. \tag{3-9}$$

Pelo Teorema C.1 (cf. Apêndice), temos que $\Phi_k'(\lambda, \cdot) : H \longrightarrow H^*$ é dada por

$$\langle \Phi_k'(\lambda, u), v \rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_\Omega f_k(u) v dx, \quad u, v \in H. \tag{3-10}$$

Mas, sabemos que u é uma solução fraca de (3-4) se

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_\Omega f_k(u) v dx = 0, \ \ v \in H, \tag{3-11}$$

isto é, se

$$\langle \Phi_k'(\lambda, u), v \rangle = 0, \ \ v \in H,$$

ou seja,

$$\Phi_k'(\lambda, u) = 0$$

e, portanto, se u é ponto crítico de $\Phi_k(\lambda, \cdot)$. Provaremos então que $\Phi_k(\lambda, \cdot)$ admite ponto crítico. Para isto, considere a seguinte afirmação:

Afirmação 1: $\Phi_k(\lambda, \cdot) : H \longrightarrow \mathbb{R}$ admite um ponto de mínimo, isto é, existe $u \in H$, tal que,

$$\Phi_k(\lambda, u) = \min_{v \in H} \Phi_k(\lambda, v). \tag{3-12}$$

De fato, vamos mostrar primeiramente que $\Phi_k(\lambda, \cdot)$ é limitado inferiormente, isto é, que existe $c_0 > 0$ tal que $\Phi_k(\lambda, u) \geq -c_0$, para todo $u \in H$.

Com efeito, veja que f_k é uma função limitada, logo existe uma constante $a > 0$ tal que

$$| f_k(s) | \leq a, \ \ \forall s \in \mathbb{R}.$$

Daí, vemos que

$$| F_k(s) | \leq | \int_0^s f_k(\sigma) d\sigma | \leq \int_0^s | f_k(\sigma) | d\sigma \leq a \int_0^s d\sigma = a | s | + b, \tag{3-13}$$

donde, utilizando as desigualdades de Hölder e Poincaré, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_\Omega F_k(u) dx &\leq \left| \int_\Omega F_k(u) dx \right| \\
&\leq \int_\Omega | F_k(u) | dx \\
&\leq \int_\Omega (a | u | + b) dx \\
&= a \int_\Omega | u | dx + b \int_\Omega dx \\
&\leq a \left(\int_\Omega | u |^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega 1^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + b | \Omega | \\
&= a \| u \|_2 | \Omega |^{\frac{1}{2}} + b | \Omega | \\
&\leq a c^{\frac{1}{2}} | \Omega |^{\frac{1}{2}} \| u \|_H + b | \Omega | \\
&= M \| u \|_H + N
\end{aligned} \tag{3-14}$$

onde $M = ac^{\frac{1}{2}} \mid \Omega \mid^{\frac{1}{2}}$, $N = b \mid \Omega \mid$ e c é a constante da desigualdade de Poincaré. Assim,

$$\begin{aligned} \Phi_k(\lambda, u) &= \frac{1}{2} \parallel u \parallel_H^2 - \lambda \int_\Omega F_k(u)dx \\ &\geq \frac{1}{2} \parallel u \parallel_H^2 - \lambda M \parallel u \parallel_H - \lambda N. \end{aligned} \tag{3-15}$$

Agora, considere o polinômio

$$P(s) = \frac{1}{2}s^2 - \lambda M s + \lambda N.$$

Veja que $\Phi_k(\lambda, u) \geq P(u)$ e que P é limitado inferiormente, isto é, existe $c_0 > 0$, tal que, $P(s) \geq -c_0$, donde

$$\Phi_k(\lambda, u) \geq -c_0, \quad u \in H,$$

e portanto $\Phi_k(\lambda, u)$ é limitado inferiormente.

Defina

$$I_0 = \inf_{u \in H} \Phi_k(\lambda, u)$$

e tome $(u_n) \subset H$ uma sequência minimizante de $\Phi_k(\lambda, \cdot)$ relativa à I_0, isto é,

$$\Phi_k(\lambda, u_n) \overset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} I_0.$$

Logo, para n suficientemente grande, tem-se

$$\Phi_k(\lambda, u_n) \leq I_0 + 1,$$

donde

$$\frac{1}{2} \parallel u_n \parallel_H^2 - \lambda \int_\Omega F_k(u_n) \leq I_0 + 1$$

e daí, temos que

$$\parallel u_n \parallel_H^2 \leq 2(I_0 + 1) + 2\lambda \int_\Omega F_k(u_n)dx. \tag{3-16}$$

De (3-14) e de (3-16), segue que

$$\begin{aligned} \parallel u_n \parallel_H^2 &\leq 2(I_0 + 1) + 2\lambda M \parallel u_n \parallel_H + 2\lambda N \\ &= (2(I_0 + 1) + 2\lambda N) + 2\lambda M \parallel u_n \parallel_H \\ &= B + A \parallel u_n \parallel_H, \end{aligned} \tag{3-17}$$

onde $A = 2\lambda M$ e $B = 2(I_0 + 1) + 2\lambda N$.

Afirmação 2: (u_n) é uma sequência limitada em H.

De fato, suponha por absurdo que $\| u_n \|_H \longrightarrow \infty$. Dividindo ambos os lados de (3-17) por $\| u_n \|_H$, tem-se

$$\| u_n \|_H \leq A + \frac{B}{\| u_n \|_H}. \tag{3-18}$$

Veja que $\dfrac{B}{\| u_n \|_H} \longrightarrow 0$ quando $\| u_n \|_H \longrightarrow \infty$. Logo $\dfrac{B}{\| u_n \|_H}$ é limitado, isto é, existe uma constante $K > 0$ tal que $\dfrac{B}{\| u_n \|_H} \leq K$. Assim, de (3-18), temos que

$$\| u_n \|_H \leq A + K,$$

que é um absurdo. Logo (u_n) é limitada em H, provando a **Afirmação 2**.

Como H é um espaço reflexivo e (u_n) é uma sequência limitada em H, existe uma subsequência de (u_n), que por simplicidade denotaremos por (u_n), e $u \in H$ tais que

$$u_n \overset{H}{\rightharpoonup} u.$$

Como $H \overset{cpt}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$ e $u_n \overset{H}{\rightharpoonup} u$, temos que

$$u_n \overset{L^2(\Omega)}{\longrightarrow} u,$$

donde por resultados de Teoria da Medida, existe uma subsequência $(u_{n_j}) \subseteq (u_n)$ e uma função $h \in L^2(\Omega)$ tais que

$$u_{n_j} \longrightarrow u \text{ q.t.p. em } \Omega \text{ e } | u_{n_j} | \leq h \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Como F_k é contínua, segue que

$$F_k(u_{n_j}) \longrightarrow F_k(u) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Além disso, de (3-13), tem-se

$$| F_k(u_{n_j}) | \leq a | u_{n_j} | + b \leq (a | h | + b) \in L^2(\Omega),$$

e pelo Teorema de Lebesgue

$$\int_\Omega F_k(u_{n_j}) dx \longrightarrow \int_\Omega F_k(u) dx, \quad u \in H.$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned}
\Phi_k(\lambda,u) &= \frac{1}{2}\parallel u \parallel_H^2 - \lambda\int_\Omega F_k(u)dx \\
&\leq \underline{\lim}\frac{1}{2}\parallel u_{n_j} \parallel_H^2 - \lim\lambda\int_\Omega F_k(u_{n_j})dx \\
&= \underline{\lim}\left(\frac{1}{2}\parallel u_{n_j} \parallel_H^2 - \lambda\int_\Omega F_k(u_{n_j})dx\right) \\
&= \underline{\lim}\ \Phi_k(\lambda,u_{n_j}) \\
&= I_0,
\end{aligned}$$

donde

$$\Phi_k(\lambda,u) = \min_{v\in H}\Phi_k(\lambda,v).$$

Portanto, u é ponto de mínimo do funcional $\Phi_k(\lambda,\cdot)$, e fica demonstrada a **Afirmação 1**.

Afirmação 3: u é solução fraca do problema (3-4).

De fato, como $\Phi_k(\lambda,u)$ é valor mínimo de $\Phi_k(\lambda,\cdot)$, vem que

$$\Phi_k(\lambda,u) \leq \Phi_k(\lambda,u+t\varphi), \ \ \forall t\in R \ \text{ e } \ \forall\varphi\in H.$$

Logo

$$\Phi_k(\lambda,u+t\varphi) - \Phi_k(\lambda,u) \geq 0.$$

e temos dois casos:

Caso 1: $t > 0$.

Neste caso,

$$\frac{\Phi_k(\lambda,u+t\varphi) - \Phi_k(\lambda,u)}{t} \geq 0,$$

e passando o limite quando $t \longrightarrow 0$ pela direita em ambos os lados da desigualdade acima, temos que $\langle\Phi_k'(\lambda,u),\varphi\rangle \geq 0$ e, consequêntemente,

$$\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi dx - \lambda\int_\Omega f_k(u)\varphi dx \geq 0. \tag{3-19}$$

Caso 2: $t < 0$.

Neste caso,
$$\frac{\Phi_k(\lambda,u+t\varphi)-\Phi_k(\lambda,u)}{t}\leq 0,$$
e passando o limite quando $t\longrightarrow 0$ pela esquerda em ambos os lados da desigualdade acima, obtemos $\langle\Phi_k'(\lambda,u),\varphi\rangle\leq 0$, e daí

$$\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi dx-\lambda\int_\Omega f_k(u)\varphi dx\leq 0. \tag{3-20}$$

De (3-19) e (3-20), segue que

$$\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi dx=\lambda\int_\Omega f_k(u)\varphi dx,\ \ \varphi\in H, \tag{3-21}$$

donde u é solução fraca do problema (3-4). E fica demonstrado o **Lema 3.2**. □

À seguir estudaremos regularidade da solução fraca obtida no lema anterior.

Lema 3.3 (Regularidade da solução do problema (3-4)) *Seja $u\in H$ uma solução fraca do problema (3-4). Então $u\in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, com $0<\alpha<1$, isto é, u é solução clássica do problema (3-4).*

Demonstração. Uma vez que $u\in H$ é solução fraca do problema (3-4), tem-se que

$$\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi dx=\lambda\int_\Omega f_k(u)\varphi dx,\ \ \varphi\in H.$$

Faça
$$h(x)=f_k(u(x)).$$

Sabemos que f_k é limitada e contínua, logo $h\in L^\infty(\Omega)$. Assim, $u\in H$ é solução fraca do problema
$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \lambda h(x) & x\in\Omega,\\ u(x) = 0 & x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{3-22}$$

Como $L^\infty(\Omega)\subset L^p(\Omega)$, para todo $p>1$, segue que $h\in L^p(\Omega)$. Logo pelo Teorema B.4 (cf. Apêndice), temos que

$$u\in W^{2,p}(\Omega).$$

Já que $\partial\Omega$ é regular, pelo Teorema A.17 (cf. Apêndice),

$$W^{2,p}(\Omega)\overset{cont.}{\hookrightarrow} C^1(\overline{\Omega}),\ \ p>N,$$

logo

$$h(x)=f_k(u(x))\in C^1(\overline{\Omega})\subset C^\alpha(\overline{\Omega}).$$

Concluímos, pelo Teorema de Schauder (cf. Teorema B.6 no Apêndice), que

$$u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}),$$

e portanto u é solução clássica do problema (3-4). □

A seguir estudaremos o conjunto dos pontos críticos de $\Phi_k(\lambda,\cdot)$ dado por

$$Q_k(\lambda) = \{u \in H;\ \ \Phi_k^{'}(\lambda,u) = 0\}.$$

Pelo **Lema 3.2** tem-se $Q_k(\lambda) \neq \emptyset$, uma vez que $\Phi_k(\lambda,\cdot)$ admite ponto de mínimo.

O teorema abaixo fornece uma condição necessária e suficiente para que uma função $u \in H$ seja solução clássica do problema (0-2).

Lema 3.4 *$v \in Q_k(\lambda)$ se, e somente se, v é solução clássica do problema (0-2). Além disso, $0 \leq v < a_k$.*

Demonstração. Seja $v \in Q_k(\lambda)$, logo v é ponto crítico de $\Phi_k(\lambda,\cdot)$, isto é,

$$\Phi_k^{'}(\lambda,v) = 0,$$

donde

$$\langle \Phi_k^{'}(\lambda,v),\varphi\rangle = 0,\ \ \varphi \in H.$$

Consequêntemente, utilizando a definição da derivada de Fréchet, temos que

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \varphi dx - \lambda \int_\Omega f_k(v)\varphi dx = 0,\ \ \varphi \in H,$$

ou seja,

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \varphi dx = \lambda \int_\Omega f_k(v)\varphi dx,\ \ \varphi \in H \tag{3-23}$$

e, portanto, v é solução fraca do problema (3-4).

Mas pelo **Lema 3.3**, que trata da regularidade das soluções do problema (3-4), temos que $v \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, isto é, que v é solução clássica de (3-4). Além disso, veja que

$$0 \leq v < a_k,\ \ 1 \leq k \leq m.$$

De fato,

Afirmação 1: $v \geq 0$.

Defina o conjunto

$$U = \{x \in \Omega;\ \ v(x) < 0\},$$

e suponha que $U \neq \emptyset$. Note que, v satisfaz o problema

$$\begin{cases} -\Delta v &= \lambda f_k(v) \geq 0 & \text{em} \quad U, \\ v &= 0 & \text{em} \quad \partial U. \end{cases} \tag{3-24}$$

Logo, pelo Princípio do Máximo Forte, $v \geq 0$ em U, o que é um absurdo. Assim, $U = \emptyset$ e, consequêntemente, $v \geq 0$ em Ω.

Afirmação 2: $v < a_k$.

Defina o conjunto

$$V = \{x \in \Omega;\ \ v(x) > a_k\}$$

e suponha que $V \neq \emptyset$. Note que v satisfaz o problema

$$\begin{cases} -\Delta v &= \lambda f_k(v) \leq 0 & \text{em} \quad V, \\ v &= 0 & \text{em} \quad \partial V. \end{cases} \tag{3-25}$$

Logo, pelo Princípio do Máximo Forte, $v \leq 0$ em V, que é um absurdo, pois contraria a **Afirmação 1**. Logo $V = \emptyset$ e, consequêntemente, $v \leq a_k$ em Ω.

Além disso, veja que $\lambda f_k(a_k) \leq 0$, donde do **Lema 3.1** segue que $\| v \| \neq a_k$. Portanto, $v < a_k$ e, para $1 \leq k \leq m$, temos que

$$0 \leq v < a_k.$$

Logo, pela definição de f_k tem-se

$$f_k(v) = f(v),$$

donde, por (3-23),

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \varphi dx = \int_\Omega f(v) \varphi dx, \ \ \varphi \in H,$$

e com isso, v é solução fraca do problema (0-2) e consequêntemente, pelo **Lema 3.3**, v é solução clássica do problema (0-2).

Reciprocamente, suponha que v seja solução clássica do problema (0-2) com $0 \leq v < a_k$. Logo, temos que $v \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ e

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda f_k(v) & \text{em} \quad \Omega, \\ v = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3-26}$$

Tome $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e multiplique ambos os lados de (3-26) por φ, isto é,

$$-\Delta v\varphi = \lambda f(v)\varphi.$$

Integrando ambos os lados da igualdade acima em Ω, tem-se

$$-\int_\Omega \Delta v\varphi dx = \lambda \int_\Omega f(v)\varphi dx,$$

e utilizando a Primeira Idêntidade de Green, segue que

$$\int_\Omega \nabla v\nabla\varphi dx = \lambda \int_\Omega f(v)\varphi dx. \tag{3-27}$$

Como $0 \leq v < a_k$, pela definição de f_k, temos que

$$f(v) = f_k(v).$$

Logo,

$$\int_\Omega \nabla v\nabla\varphi dx = \lambda \int_\Omega f_k(v)\varphi dx, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{3-28}$$

Agora, tome $u \in H$. Como $H = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|.\|_H}$, existe uma sequência $(\varphi_n) \subseteq C_0^\infty(\Omega)$ tal que

$$\varphi_n \xrightarrow{H} u.$$

Assim, tomando φ_n no lugar de φ em (3-28), podemos escrever

$$\int_\Omega \nabla v\nabla\varphi_n dx = \lambda \int_\Omega f_k(v)\varphi_n dx, \quad \varphi_n \in C_0^\infty(\Omega). \tag{3-29}$$

Afirmação 3: $\displaystyle\int_\Omega \nabla v\nabla\varphi_n dx \longrightarrow \int_\Omega \nabla v\nabla u dx.$

De fato, como $\varphi_n \xrightarrow{H} u$ segue que $\nabla\varphi_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} \nabla u$, donde por resultados de Teoria da Medida, existe uma subsequência de (φ_n), que por comodidade denotaremos por (φ_n), e uma função $h \in L^2(\Omega)$, tais que,

$$\nabla\varphi_n \longrightarrow \nabla u \text{ q.t.p. em } \Omega \text{ e } |\nabla\varphi_n| \leq h \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

donde, para todo $v \in H$, tem-se

$$\nabla v \nabla \varphi_n \longrightarrow \nabla v \nabla u \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Além disso,

$$| \nabla v \nabla \varphi_n | \leq h | \nabla v | \in L^1(\Omega).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que

$$\int_\Omega \nabla v \nabla \varphi_n dx \longrightarrow \int_\Omega \nabla v \nabla u dx,$$

e fica provada a **Afirmação 3**.

Afirmação 4: $\int_\Omega f_k(v)\varphi_n dx \longrightarrow \int_\Omega f_k(v) u dx.$

De fato, como $\varphi_n \xrightarrow{H} u$ e $H \overset{cpt}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$ temos que $\varphi_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} u$. Logo, por resultados de Teoria da Medida, existe uma subsequência de (φ_n), que por simplicidade denotaremos por (φ_n), e uma função $h \in L^2(\Omega)$, tais que,

$$\varphi_n \longrightarrow u \text{ q.t.p. em } \Omega \text{ e } | \varphi_n | \leq h \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Como f_k é contínua segue que

$$f_k(v)\varphi_n \longrightarrow f_k(v)u, \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Além disso, f_k é limitada, isto é, existe uma constante $a > 0$ tal que $| f_k(v) | \leq a$, para todo $v \in H$. Logo, tem-se

$$| f_k(v)\varphi_n | \leq | f_k(v) || \varphi_n | \leq ah \in L^2(\Omega).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, podemos garantir que

$$\int_\Omega f_k(v)\varphi_n dx \longrightarrow \int_\Omega f_k(v) u dx,$$

e fica provada a **Afirmação 4**.

Assim, passando ao limite quando $n \longrightarrow \infty$ em (3-29), temos que

$$\int_\Omega \nabla v \nabla u dx = \lambda \int_\Omega f_k(v) u dx, \quad u \in H,$$

donde

$$\int_{\Omega} \nabla v \nabla u dx - \lambda \int_{\Omega} f_k(v) u dx = 0,$$

isto é,

$$\langle \Phi_k^{'}(\lambda, v), u \rangle = 0, \quad u \in H.$$

Assim,

$$\Phi_k^{'}(\lambda, v) = 0, \quad v \in H,$$

ou seja, v é um ponto crítico de $\Phi_k(\lambda, \cdot)$. E, portanto, $v \in Q_k(\lambda)$.

□

Veja, pelo Lema C.3 (cf. Apêndice), que a derivada de Fréchet $\Phi_k^{'}(\lambda, \cdot) : H \longrightarrow H^*$ é da forma $I-$compacto, isto é, existe um operador compacto $T_k : H \longrightarrow H^*$ tal que

$$\Phi_k^{'}(\lambda, \cdot) = I - T_k.$$

Com isto, podemos aplicar a Teoria do Grau de Leray-Schauder para garantir a existência de soluções do problema (3-4).

O lema à seguir trata de algumas propriedades do conjunto dos pontos críticos de $\Phi_k(\lambda, \cdot)$.

Lema 3.5 *Se $Q_k(\lambda)$ é o conjunto dos pontos críticos de $\Phi_k(\lambda, \cdot)$, então*

(i) *$Q_k(\lambda) \subset H$ é compacto.*
(ii) *$Q_{k-1}(\lambda) \subset Q_k(\lambda)$, para todo $2 \leq k \leq m$.*

Demonstração. (i) Seja $(u_n) \subseteq Q_k(\lambda)$ uma sequência limitada. Mostraremos que existe $u \in Q_k(\lambda)$ e uma subsequência $(u_{n_j}) \subseteq (u_n)$ tal que $u_{n_j} \longrightarrow u$ em $Q_k(\lambda)$.

Com efeito, como $(u_n) \subseteq Q_k(\lambda)$, temos que $\Phi_k^{'}(\lambda, u_n) = 0$. E como $\Phi_k^{'}(\lambda, u_n) = u_n - T_k(u_n)$, segue que

$$u_n = T_k(u_n).$$

Como $T_k : H \longrightarrow H^*$ é compacto, existe $u \in H$ e uma subsequência $(u_{n_j}) \subseteq (u_n)$, tal que,

$$T_k(u_{n_j}) \xrightarrow{H} u.$$

Mas $u_{n_j} = T_k(u_{n_j})$, logo

$$u_{n_j} \xrightarrow{H} u.$$

Mostraremos agora que $u \in Q_k(\lambda)$. Com efeito, como T_k é compacto, T_k é, em particular, contínuo e daí

$$T_k(u_{n_j}) \xrightarrow{H} T_k(u).$$

Assim,

$$\| T_k(u) - u \|_H \leq \| T_k(u) - T_k(u_{n_j}) \|_H + \| T_k(u_{n_j}) - u \|_H \longrightarrow 0.$$

Daí, tem-se que $T_k(u) = u$. Assim, $u - T_k(u) = 0$, donde $\Phi_k'(\lambda, u) = 0$, isto é, $u \in Q_k(\lambda)$.

Portanto, $Q_k(\lambda)$ é compacto em H.

(ii) Mostraremos que se $u \in Q_{k-1}(\lambda)$, então $u \in Q_k(\lambda)$.

De fato, seja $u \in Q_{k-1}(\lambda)$, então pelo **Lema 3.4**, u é solução clássica do problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f_{k-1}(u) & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3-30}$$

e, além disso, $0 \leq u < a_{k-1}$. Pela definição de f_k, vemos que

$$f(u) = f_{k-1}(u) = f_k(u),$$

donde u satisfaz o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f_k(u) & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3-31}$$

E daí, pela recíproca do **Lema 3.4**, $u \in Q_k(\lambda)$. Portanto

$$Q_{k-1} \subset Q_k(\lambda),$$

e o lema está provado. □

Seja $1 \leq k \leq m$ e considere $B_R(0)$ denotando a bola aberta de raio $R > 0$ e centro na origem.

Lema 3.6 *Para cada $1 \leq k \leq m$, existe $R_0 > 0$ tal que para cada $R \geq R_0$ vale:*

(i) $\langle \Phi_k'(\lambda, v), v \rangle > 0$, *para todo* $v \in \partial B_R(0)$.

(ii) $deg(\Phi_k'(\lambda, \cdot), B_R(0), 0) = 1$.

Demonstração. (i) Pelo Lema C.1 (cf. Apêndice), a derivada de Fréchet de $\Phi_k(\lambda,\cdot)$ é dada por

$$\langle \Phi_k'(\lambda,u),v\rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_\Omega f_k(u) v dx, \;\; u,v \in H.$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}\langle \Phi_k'(\lambda,v),v\rangle &= \int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \lambda \int_\Omega f_k(v) v dx \\ &\geq \| v \|_H^2 - \lambda \int_\Omega | f_k(v) || v | dx. \end{aligned} \tag{3-32}$$

Como f_k é limitada, existe $a>0$, tal que, $| f_k(v) | \leq a$, para todo $v \in H$. Donde

$$\begin{aligned}\langle \Phi_k'(\lambda,v),v\rangle &\geq \| v \|_H^2 - \lambda a \int_\Omega | v | .1 dx \\ &\geq \| v \|_H^2 - \lambda a \left(\int_\Omega | v |^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega 1^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \| v \|_H^2 - \lambda a \, | \Omega |^{\frac{1}{2}} \| v \|_2 \\ &\geq \| v \|_H^2 - \lambda a \, | \Omega |^{\frac{1}{2}} C \| v \|_H \\ &= \| v \|_H^2 - A \| v \|_H, \end{aligned}$$

onde $A = \lambda a \, | \Omega |^{\frac{1}{2}} C$ e $C = c^{\frac{1}{2}}$ é a constante da desigualdade de Poincaré. Agora, considere o polinômio

$$p(s) = s^2 - As,$$

e veja que $\langle \Phi_k'(\lambda,v),v\rangle \geq p(\| v \|_H)$. Além disso, existe $R>0$ suficientemente grande tal que $p(s)>0$, para todo $| t | \geq R$. Assim,

$$\langle \Phi_k'(\lambda,v),v\rangle > 0, \;\; v \in \partial B_R(0).$$

(ii) Vamos mostrar este resultado através de uma homotopia da aplicação identidade.

Para isto, defina a homotopia $h_k : [0,1] \times \overline{B_R(0)} \longrightarrow I\!R^N$ por

$$h_k(t,u) = t\Phi_k'(\lambda,u) + (1-t)u, \;\; u \in \partial B_R(0), \;\; t \in [0,1]$$

Observe que $\Phi_k'(\lambda,\cdot) = I-$compacto e que

$$h_k(0,u) = u \;\; e \;\; h_k(1,u) = \Phi_k'(\lambda,u).$$

Logo, basta mostrar que $h_k(t,u) \neq 0$, para todo $t \in [0,1]$ e todo $u \in \partial B_R(0)$ com R suficientemente grande, e aplicar o Teorema da Invariância por Homotopia para obter o resultado desejado.

Note que

$$\begin{aligned}\langle h_k(t,u),u\rangle &= \langle t\Phi_k^{'}(\lambda,u)+(1-t)u,u\rangle \\ &= t\langle\Phi_k^{'}(\lambda,u),u\rangle+(1-t)\langle u,u\rangle,\end{aligned}$$

e veja que:
para $t=0$ e $u\in\partial B_R(0)$, tem-se

$$\langle h_k(t,u),u\rangle=\langle u,u\rangle=\parallel u\parallel_H>0,$$

para $t=1$ e $u\in\partial B_R(0)$, tem-se, pelo item (i), que

$$\langle h_k(t,u),u\rangle=\langle\Phi_k^{'}(\lambda,u),u\rangle>0,$$

para $0<t<1$ e $u\in\partial B_R(0)$, tem-se que $(1-t)\langle u,u\rangle>0$, e novamente pelo item (i),

$$\langle h_k(t,u),u\rangle>t\langle\Phi_k^{'}(\lambda,u),u\rangle>0.$$

Logo $h_k(t,u)\neq 0$ e pelo Teorema da Invariância por Homotopia, tem-se

$$deg(\Phi_k^{'}(\lambda,\cdot),B_R(0),0)=deg(I,B_R(0),0)=1,$$

como já havíamos afirmado. □

Agora, seja $2\leq k\leq m$ e, para cada $\varepsilon>0$ seja $U_\varepsilon(Q_{k-1}(\lambda))$ uma $\varepsilon-$vizinhança de $Q_{k-1}(\lambda)$ em H. O teorema abaixo mostra que existe solução de (3-4) em $U_\varepsilon(Q_{k-1}(\lambda))$.

Lema 3.7 *Existe $\varepsilon_{k-1}=\varepsilon_{k-1}(\lambda)>0$, tal que, para todo $\varepsilon\in(0,\varepsilon_{k-1})$, tem-se que*

$$deg(\Phi_k^{'}(\lambda,\cdot),U_\varepsilon(Q_{k-1}(\lambda)),0)=1. \tag{3-33}$$

Demonstração. Primeiro, tome $R>0$ suficientemente grande tal que $U_\varepsilon(Q_{k-1}(\lambda))\subset B_R(0)$. Veja, pelo **Lema 3.6** e pelas propriedades da aditividade e excisão do Grau, que:

Afirmação 1: $deg(\Phi_{k-1}^{'}(\lambda,\cdot),U_\varepsilon(Q_{k-1}(\lambda)),0)=1,\ \ \forall\varepsilon>0.$

De fato, sabemos que todas as soluções de

$$\Phi_{k-1}^{'}(\lambda,u)=0$$

estão em $Q_{k-1}(\lambda)$. Logo, não existe $u \in B_R(0)\setminus\overline{U_\varepsilon(Q_{k-1}(\lambda))}$ tal que

$$\Phi'_{k-1}(\lambda,u)=0,$$

e portanto

$$deg(\Phi'_{k-1}(\lambda,\cdot),B_R(0)\setminus\overline{U_\varepsilon(Q_{k-1}(\lambda))},0)=0.$$

Pela propriedade da excisão e da aditividade do Grau, temos que

$$deg(\Phi'_{k-1}(\lambda,\cdot),B_R(0),0)=deg(\Phi'_{k-1}(\lambda,\cdot),B_R(0)\setminus\overline{U_\varepsilon(Q_{k-1}(\lambda))},0)+ \\ deg(\Phi'_{k-1}(\lambda,\cdot),U_\varepsilon(Q_{k-1}(\lambda)),0),$$

donde, pelo **Lema 3.6**,

$$deg(\Phi'_{k-1}(\lambda,\cdot),U_\varepsilon(Q_{k-1}(\lambda)),0)=deg(\Phi'_{k-1}(\lambda,\cdot),B_R(0),0)- \\ deg(\Phi'_{k-1}(\lambda,\cdot),B_R(0)\setminus\overline{U_\varepsilon(Q_{k-1}(\lambda))},0)=1-0=1,$$

isto é,

$$deg(\Phi'_{k-1}(\lambda,\cdot),U_\varepsilon(Q_{k-1}(\lambda)),0)=1,\ \ \forall\varepsilon>0,$$

como havíamos afirmado anteriormente.

Agora, defina a homotopia $h_k:[0,1]\times\overline{U_\varepsilon(Q_{k-1}(\lambda))}\longrightarrow I\!R^N$ por

$$h_k(t,w)=t\Phi'_{k-1}(\lambda,w)+(1-t)\Phi'_k(\lambda,w).$$

Veja que $h_k(0,w)=\Phi'_k(\lambda,w)$, $h_k(1,w)=\Phi'_{k-1}(\lambda,w)$ e que $\Phi'_{k-1}(\lambda,\cdot)$ e $\Phi'_k(\lambda,\cdot)$ são da forma $I-$compacto. Assim, é suficiente mostrar que existe $\varepsilon_{k-1}>0$ tal que $h_k(t,w)\neq 0$, para todo $t\in[0,1]$ e todo $w\in\partial U_\varepsilon(Q_{k-1}(\lambda))$, e aplicar o Teorema da Invariância por Homotopia para obter o resultado.

Com efeito, suponha por absurdo que não existe tal $\varepsilon_{k-1}>0$. Então, para cada $\varepsilon=\frac{1}{n}$, podemos encontrar $t_n\in[0,1]$ e $w_n\in H$ com $0<dist(w_n,Q_{k-1}(\lambda))<\frac{1}{n}$ tal que

$$t_n\Phi'_{k-1}(\lambda,w_n)+(1-t_n)\Phi'_k(\lambda,w_n)=0, \tag{3-34}$$

ou, equivalentemente, w_n resolve o problema

$$\begin{cases} -\Delta w_n = \lambda(t_nf_{k-1}(w_n)+(1-t_n)f_k(w_n)) & \text{em} \quad \Omega, \\ w_n = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3-35}$$

De fato, a igualdade em (3-34) acontece se, e somente se, $\Phi'_{k-1}(\lambda, w_n) = 0$ e $\Phi'_k(\lambda, w_n) = 0$, isto é, se, e somente se, w_n resolve os problemas

$$\begin{cases} -\Delta w_n = \lambda f_{k-1}(w_n) & \text{em } \Omega, \\ w_n = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3-36}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta w_n = \lambda f_k(w_n) & \text{em } \Omega, \\ w_n = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3-37}$$

Logo, pela linearidade do operador Δ, temos que w_n resolve

$$\begin{cases} -\Delta t_n w_n = \lambda t_n f_{k-1}(w_n) & \text{em } \Omega, \\ t_n w_n = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3-38}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta(1-t_n) w_n = \lambda(1-t_n) f_k(w_n) & \text{em } \Omega, \\ (1-t_n) w_n = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3-39}$$

Somando os problemas (3-38) e (3-39) temos que w_n resolve o problema (3-35).

Agora, como

$$t_n f_{k-1}(s) + (1-t_n) f_k(s) = \begin{cases} \geq 0, & \text{se } s \leq 0 \\ f(s), & \text{se } 0 \leq s \leq a_k, \\ \leq 0, & \text{se } a_k \leq s \end{cases} \tag{3-40}$$

por (3-35) e pelo **Lema 3.4** segue que $0 \leq w_n < a_k$. Além disso, $w_n \notin Q_{k-1}(\lambda)$, logo, $\| w_n \|_\infty > a_{k-1}$. Agora, veja que

$$dist(w_n, Q_{k-1}(\lambda)) = \inf_{\widehat{w}_n \in Q_{k-1}(\lambda)} | w_n - \widehat{w}_n | < \frac{1}{n} \overset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3-41}$$

E como $Q_{k-1}(\lambda)$ é compacto, existe $w_0 \in Q_{k-1}(\lambda)$, tal que, para toda sequência limitada $(\widehat{w}_n) \subseteq Q_{k-1}(\lambda)$, existe uma subsequência $(\widehat{w}_{n_j}) \subseteq (\widehat{w}_n)$ tal que

$$\widehat{w}_{n_j} \longrightarrow w_0 \;\text{ em }\; Q_{k-1}(\lambda). \tag{3-42}$$

Logo, por (3-41) e (3-42) temos que existe $w_0 \in Q_{k-1}(\lambda)$ tal que

$$w_n \overset{H}{\longrightarrow} w_0.$$

De (3-35) temos que w_n é limitada em $W^{2,p}(\Omega)$ para $p > N$. De fato, faça

$$h_n(t_n, w_n) = t_n f_{k-1}(w_n) + (1 - t_n) f_k(w_n), \ \ 0 \leq t_n \leq 1,$$

e veja que f_k é limitada, isto é, existe $a > 0$ constante, tal que, $\mid f_k(u) \mid \leq a$ para todo $u \in H$, donde existe $a_0 > 0$ constante, tal que, $\mid h_n(t_n, w_n) \mid \leq a_0$, para todo $t_n \in [0,1]$ e todo $w_n \in H$. Daí, $h_n \in L^\infty([0,1] \times \Omega)$ e, portanto, $h_n \in L^p([0,1] \times \Omega)$, para todo $p > 1$. Logo, pelo Teorema B.5 (cf. Apêndice),

$$\| w_n \|_{2,p} \leq c_0 \| w_n \|_p,$$

ou seja, w_n é limitada em $W^{2,p}(\Omega)$. Assim, pelas imersões de Sobolev, $w_n \stackrel{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})}{\longrightarrow} w_0$, donde $w_n \stackrel{C(\overline{\Omega})}{\longrightarrow} w_0$. Então,

$$a_{k-1} < \| w_n \|_\infty \longrightarrow \| w_0 \|_\infty < a_{k-1},$$

o que é impossível. Portanto, existe $\varepsilon_{k-1} > 0$, tal que, $h_k(t, w) \neq 0$, para todo $t \in [0,1]$ e todo $w \in \partial U_\varepsilon(Q_{k-1}(\lambda))$. Logo, pelo Teorema da Invariância por Homotopia

$$deg(\Phi_k^{'}(\lambda, \cdot), U_\varepsilon(Q_{k-1}(\lambda)), 0) = deg(\Phi_{k-1}^{'}(\lambda, \cdot), U_\varepsilon(Q_{k-1}(\lambda)), 0) = 1, \ \ \varepsilon \in (0, \varepsilon_{k-1}).$$

Portanto, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, temos que

$$deg(\Phi_k^{'}(\lambda, \cdot), U_\varepsilon(Q_{k-1}(\lambda)), 0) = 1.$$

E fica provado o **Lema** 3.7. □

Pela **Afirmação 1** do **Lema** 3.2, $\Phi_k(\lambda, \cdot)$ admite ponto de mínimo em H, então para cada $\lambda \geq 0$ e cada $1 \leq k \leq m$, existe $v_k(\lambda) \in Q_k(\lambda)$ tal que

$$\Phi_k(\lambda, v_k(\lambda)) = \min_{v \in H} \Phi_k(\lambda, v).$$

Mostraremos à seguir que para λ suficientemente grande, $v_k(\lambda) \notin Q_{k-1}(\lambda)$.

Lema 3.8 *Para cada $2 \leq k \leq m$, existe $\lambda_k > 0$, tal que, para todo $\lambda \geq \lambda_k$, $v_k(\lambda) \notin Q_{k-1}(\lambda)$.*

Demonstração. Vamos provar que existe $\lambda_k > 0$ e $w \in H$ com $0 \leq w \leq a_k$ tal que

$$\Phi_k(\lambda, w) < \Phi_{k-1}(\lambda, v_{k-1}(\lambda)),$$

e isto implicará o resultado. Defina $M = \max\{F(s);\ \ 0 \leq s \leq a_{k-1}\}$ e seja

$$0 < \alpha := F(a_k) - M. \tag{3-43}$$

Então, para todo $u \in H$ com $0 \leq u \leq a_{k-1}$, temos que

$$F(u) = \int_0^u f(\sigma)d\sigma \leq \int_0^{a_{k-1}} f(\sigma)d\sigma = F(a_{k-1}) \leq M. \tag{3-44}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega F(u)dx &\leq \int_\Omega M dx \\
&= M\int_\Omega dx \\
&= M \mid \Omega \mid \\
&= (F(a_k) - \alpha) \mid \Omega \mid \\
&= F(a_k) \mid \Omega \mid - \alpha \mid \Omega \mid \\
&= F(a_k) \int_\Omega dx - \alpha \mid \Omega \mid \\
&= \int_\Omega F(a_k)dx - \alpha \mid \Omega \mid .
\end{aligned} \tag{3-45}$$

Para $\delta > 0$, considere o conjunto

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega;\ \ dist(x, \partial\Omega) < \delta\}.$$

Afirmação: $\mid \Omega_\delta \mid \longrightarrow 0$, quando $\delta \longrightarrow 0$.

De fato, considere a função característica em Ω_δ dada por

$$\chi_{\Omega_\delta}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in \Omega_\delta, \\ 0, & \text{se} \quad x \notin \Omega_\delta. \end{cases}$$

Logo, temos que

$$\int_\Omega \chi_{\Omega_\delta}(x)dx = \int_{\Omega_\delta} \chi_{\Omega_\delta}(x)dx = \int_{\Omega_\delta} 1dx = \mid \Omega_\delta \mid .$$

Observe que $\mid \chi_{\Omega_\delta}(x) \mid \leq 1$ e que $\mid \chi_{\Omega_\delta}(x) \mid \longrightarrow 0$ quando $\delta \longrightarrow 0$. Logo, pelo Teorema de Lebesgue

$$\mid \Omega_\delta \mid = \int_\Omega \chi_{\Omega_\delta}(x)dx \overset{\delta \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0,$$

e fica demonstrada a **Afirmação**.

Agora, para cada $\delta > 0$, tome $w_\delta \in C_0^\infty(\Omega)$ com $0 \leq w_\delta \leq a_k$ e $w_\delta = a_k$ se $x \in \Omega \setminus \Omega_\delta$. Assim, temos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega F(w_\delta)dx &= \int_{\Omega\setminus\Omega_\delta} F(w_\delta)dx + \int_{\Omega_\delta} F(w_\delta)dx \\
&= \int_{\Omega\setminus\Omega_\delta} F(a_k)dx + \int_{\Omega_\delta} F(w_\delta)dx \\
&= \int_{\Omega\setminus\Omega_\delta} F(a_k)dx + \int_{\Omega_\delta} F(a_k)dx - \int_{\Omega_\delta} F(a_k)dx + \int_{\Omega_\delta} F(w_\delta)dx \\
&= \int_\Omega F(a_k)dx - \int_{\Omega_\delta} (F(a_k) - F(w_\delta))dx \\
&\geq \int_\Omega F(a_k)dx - \int_{\Omega_\delta} (\overline{M} + \overline{M})dx \\
&= \int_\Omega F(a_k)dx - 2\overline{M} \int_{\Omega_\delta} dx,
\end{aligned}$$

onde $\overline{M} = \max\{| F(s) |;\ \ 0 \leq s \leq a_k\}$. Isto é,

$$\int_\Omega F(w_\delta)dx \geq \int_\Omega F(a_k)dx - 2\overline{M} \mid \Omega_\delta \mid. \tag{3-46}$$

Subtraindo (3-45) de (3-46), segue que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega F(w_\delta)dx - \int_\Omega F(u)dx &\geq \int_\Omega F(a_k)dx - 2\overline{M} \mid \Omega_\delta \mid - \int_\Omega F(a_k)dx + \alpha \mid \Omega \mid \\
&= \alpha \mid \Omega \mid - 2\overline{M} \mid \Omega_\delta \mid.
\end{aligned}$$

Como $\mid \Omega_\delta \mid \longrightarrow 0$ quando $\delta \longrightarrow 0$, podemos escolher $\delta > 0$ tal que

$$\eta = \alpha \mid \Omega \mid - 2\overline{M} \mid \Omega_\delta \mid > 0. \tag{3-47}$$

Fixe tal $\delta > 0$ e defina $w := w_\delta$. Então, para $u \in H$ com $0 \leq u \leq a_{k-1}$, vemos que

$$\begin{aligned}
\Phi_k(\lambda, w) - \Phi_{k-1}(\lambda, u) &= \frac{1}{2} \parallel w \parallel_H^2 - \lambda \int_\Omega F(w)dx - \frac{1}{2} \parallel u \parallel_H^2 + \lambda \int_\Omega F(u)dx \\
&= \frac{1}{2}(\parallel w \parallel_H^2 - \parallel u \parallel_H^2) - \lambda \left(\int_\Omega F(w)dx - \int_\Omega F(u)dx \right) \\
&\leq \frac{1}{2}(\parallel w \parallel_H^2 - \parallel u \parallel_H^2) - \lambda\eta \\
&\leq \frac{1}{2} \parallel w \parallel_H^2 - \lambda\eta < 0,
\end{aligned}$$

para $\lambda \geq \lambda_k$ suficientemente grande.

Daí, tem-se que

$$\Phi_k(\lambda, w) < \Phi_{k-1}(\lambda, u). \tag{3-48}$$

Sabemos que $v_k(\lambda)$ é solução clássica positiva do problema (3-4) e suponha, por contradição, que $v_k(\lambda) \in Q_{k-1}(\lambda)$. Logo, pelo **Lema 3.4**,

$$0 \leq v_k(\lambda) < a_{k-1}.$$

Segue do exposto acima que existe $w \in H$, tal que,

$$\Phi_k(\lambda, w) < \Phi_{k-1}(\lambda, v_k(\lambda)). \tag{3-49}$$

Como $v_k(\lambda) \in Q_k(\lambda)$ e $v_k(\lambda)$ é mínimo de $\Phi_k(\lambda, \cdot)$, segue que

$$\Phi_k(\lambda, v_k(\lambda)) \leq \Phi_k(\lambda, w) < \Phi_{k-1}(\lambda, v_k(\lambda)), \tag{3-50}$$

donde

$$-\lambda \int_\Omega F(v_k(\lambda))dx < -\lambda \int_\Omega F(v_k(\lambda))dx, \tag{3-51}$$

o que é impossivel. Portanto, temos que $v_k(\lambda) \notin Q_{k-1}(\lambda)$.

$\square$

3.2 Demonstração do Teorema 0.1

Faça

$$\bar{\lambda} = \max_{2 \leq k \leq m} \lambda_k$$

e fixe $\lambda \geq \bar{\lambda}$. Pelos Lemas 3.1 à 3.8, existem $v_1(\lambda), \ldots, v_m(\lambda)$, tais que,

$$v_k(\lambda) \in Q_k(\lambda) \setminus Q_{k-1}(\lambda), \;\; 2 \leq k \leq m,$$

onde $v_k(\lambda)$ é mínimo global de $\Phi_k(\lambda, \cdot)$. Além disso, $v_k(\lambda)$ são soluções clássicas do problema (3-4).

Suporemos, para cada $2 \leq k \leq m$, que $v_k(\lambda)$ é mínimo isolado de $\Phi_k(\lambda, \cdot)$. Note que, se algum $v_k(\lambda)$ não for isolado, existiria uma sequência de pontos de mínimo de $\Phi_k(\lambda, \cdot)$ em uma vizinhança V de $v_k(\lambda)$ convergindo para $v_k(\lambda)$. Logo, teríamos infinitos pontos críticos de $\Phi_k(\lambda, \cdot)$, isto é, infinitas soluções para o problema (0-2), e o **Teorema 0.1** estaria trivialmente provado.

À seguir utilizaremos um teorema devido Rabinowitz (cf. Teorema 2.25 no Capítulo 2). Para isto observamos que $\Phi_k(\lambda, \cdot) \in C^2(H, \mathbb{R})$ (cf. Lema C.1 no Apêndice).

Pelo **Teorema 2.25** existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$deg(\Phi_k^{'}(\lambda,\cdot), B_\varepsilon(v_k(\lambda)), 0) = 1, \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \tag{3-52}$$

onde, para cada $\varepsilon > 0$ dado, $B_\varepsilon(v_k(\lambda))$ denota a bola de raio ε centrada em $v_k(\lambda)$.

Tome $0 < \varepsilon < \varepsilon_{k-1}$ tal que

$$U_\varepsilon(Q_{k-1}(\lambda)) \cap B_\varepsilon(v_k(\lambda)) = \emptyset.$$

Neste caso, vemos que,

$$\overline{B_R(0)} = \overline{V_\varepsilon} \cup \overline{U_\varepsilon(Q_{k-1}(\lambda))} \cup \overline{B_\varepsilon(v_k(\lambda))},$$

onde $V_\varepsilon = B_R(0) \setminus (\overline{U_\varepsilon(Q_{k-1}(\lambda))} \cup \overline{B_\varepsilon(v_k(\lambda))})$. Pela propriedade da aditividade do Grau

$$deg(\Phi_k^{'}(\lambda,\cdot), B_R(0), 0) = deg(\Phi_k^{'}(\lambda,\cdot), V_\varepsilon, 0) +$$
$$deg(\Phi_k^{'}(\lambda,\cdot), U_\varepsilon(Q_{k-1}(\lambda)), 0) + deg(\Phi_k^{'}(\lambda,\cdot), B_\varepsilon(v_k(\lambda)), 0).$$

Logo,

$$deg(\Phi_k^{'}(\lambda,\cdot), V_\varepsilon, 0) = deg(\Phi_k^{'}(\lambda,\cdot), B_R(0), 0) -$$
$$deg(\Phi_k^{'}(\lambda,\cdot), U_\varepsilon(Q_{k-1}(\lambda)), 0) - deg(\Phi_k^{'}(\lambda,\cdot), B_\varepsilon(v_k(\lambda)), 0).$$

E pelos Lemas 3.6 e 3.7 e por (3-52), temos que

$$deg(\Phi_k^{'}(\lambda,\cdot), V_\varepsilon, 0) = 1 - 1 - 1 = -1. \tag{3-53}$$

Assim, como

$$deg(\Phi_k^{'}(\lambda,\cdot), V_\varepsilon, 0) \neq 0, \tag{3-54}$$

pela propriedade solução do Grau, existe $\widetilde{v}_k(\lambda) \in V_\varepsilon$, tal que, $\widetilde{v}_k(\lambda)$ é solução de (0-2) e $\widetilde{v}_k(\lambda) \neq v_k(\lambda)$, isto é, existem ao menos duas soluções distintas de (0-2) em $Q_k(\lambda) \setminus Q_{k-1}(\lambda)$, já que $\widetilde{v}_k(\lambda)$ é ponto crítico de $\Phi_k(\lambda,\cdot)$. Além disso, lembre-se que

$$a_{k-1} < v < a_k, \quad \forall v \in Q_k(\lambda) \setminus Q_{k-1}(\lambda). \tag{3-55}$$

Como $Q_1(\lambda) \subset Q_2(\lambda) \subset \ldots \subset Q_{m-1}(\lambda) \subset Q_m(\lambda)$, com a condição acima, tem-se

$$v_1 \in Q_1(\lambda)$$
$$v_1, \widetilde{v}_2, v_2 \in Q_2(\lambda), \quad \text{com} \quad \widetilde{v}_2, v_2 \notin Q_1(\lambda)$$

$$v_1, \widetilde{v}_2, v_2, \widetilde{v}_3, v_3 \in Q_3(\lambda), \quad \text{com} \quad \widetilde{v}_3, v_3 \notin Q_2(\lambda)$$
$$\vdots$$
$$v_1, \widetilde{v}_2, v_2, \ldots, \widetilde{v}_m, v_m \in Q_m(\lambda), \quad \text{com} \quad \widetilde{v}_m, v_m \notin Q_{m-1}(\lambda).$$

E, portanto, temos $2m-1$ soluções clássicas positivas do problema (0-2) com

$$0 <\| v_1 \|_\infty < a_1 \;\text{ e }\; a_{k-1} <\| v_k \|_\infty, \| \widetilde{v}_k \|_\infty < a_k. \tag{3-56}$$

Quanto à ordenação, observe que $v = 0$ é subsolução e $v_k = a_k$ é super solução, respectivamente, do problema (0-2). Assim, por resultados de sub e super solução, (0-2) tem uma solução minimal v_* e uma solução maximal v^*, tal que,

$$0 < v_* \leq v^* < a_k.$$

Se $\widetilde{w}$ é solução de (0-2) com $0 < \widetilde{w} < a_k$, então $0 < v_* \leq \widetilde{w} \leq v^* < a_k$.

Para cada $1 \leq k \leq m$, escolha v_k como solução maximal de (0-2) no intervalo $[0, a_k]$. Pelo **Lema 3.8**, $v_k \notin Q_{k-1}(\lambda)$ donde $a_{k-1} <\| v_k \|_\infty$. Como $Q_{k-1}(\lambda) \subset Q_k(\lambda)$, então v_{k-1} é solução de (0-2) se, e somente se, $v_{k-1} \leq v_k$. Mas, $v_{k-1} < a_{k-1} < v_k$, logo $v_{k-1} \neq v_k$.

Então, temos uma sequência de soluções ordenadas da seguinte forma

$$v_1 < v_2 < \ldots < v_{m-1} < v_m. \tag{3-57}$$

Além disso, por (3-54), podemos encontrar uma segunda solução $\widetilde{v}_k \in Q_k(\lambda) \setminus Q_{k-1}(\lambda)$ do problema (0-2), para cada $2 \leq k \leq m$. Como v_k é solução maximal em $[0, a_k]$, segue que

$$\widetilde{v}_k < v_k, \quad 2 \leq k \leq m. \tag{3-58}$$

Por fim, podemos obter $v_1 < \widetilde{v}_2 < v_2$ por escolha de v_1 como solução minimal em $[0, a_1]$. Além disso, para $k > 2$, não podemos garantir que v_{k-1} e $\widetilde{v}_k$ são ordenados.

Fica demonstrado o **Teorema 0-2**.

□

Finalizamos aqui o Capítulo 3.

CAPÍTULO 4

Um Problema Não-Linear de Auto-Valor para o p-Laplaciano: Um Resultado Devido à Loc & Schmitt

Neste capítulo consideraremos o problema (0-3) e mostraremos através de métodos variacionais, propriedades de simetria e técnicas de sub e super solução a existência de múltiplas soluções fracas não-negativas para o problema (0-3) uma vez que $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo as condições $(f_1)', (f_2)'$ e $(f_3)'$ dadas anteriormente.

O problema (0-3) foi estudado por Hess em [17] para o caso $p = 2$. Neste trabalho, Hess garante a existência de pelo menos $2m-1$ soluções clássicas positivas $u_1, \widetilde{u}_2, u_2, \cdots, \widetilde{u}_m, u_m$ dado que $f(0) > 0$ e f satisfaz $(f_2)'$ e $(f_3)'$. Além disso, Hess garante a ordenação das soluções u_k e que $\widetilde{u}_k < u_k$, para cada $2 \leq k \leq m$.

Em 1987, Dancer e Schmitt [9] mostraram, para o caso $p = 2$ e $k = 1$, sob certas condições adicionais impostas sobre f e sobre u e sob algumas condições de simetria em Ω, utilizando resultados de sub e super soluções, que o problema (0-3) admite solução fraca não-negativa em $(a_1, a_2]$. Por outro lado, se o sinal $>$ em $(f_3)'$ for substituido por $\leq$, Dancer e Schmitt mostram que não existe solução fraca não-negativa de (0-3) em $(a_1, a_2]$.

Motivados por estes resultados, estabeleceremos condições necessárias e suficientes para que o problema (0-3) admita pelo menos $m-1$ soluções fracas não negativas $u_1, \ldots, u_{m-1} \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ satisfazendo

$$a_k < \| u_k \|_\infty \leq a_{k+1}, \quad 1 \leq k \leq m-1.$$

Observação 4.1 *A condição $(f_3)'$ dada na introdução implica que cada corcova positiva do gráfico da função f tem área maior que sua corcova negativa imediatamente anterior e que a_{k+1} é o último número após a $(k+1)-$ésima corcova positiva.*

De fato, se definirmos

$$F(u) = \int_0^u f(s)ds,$$

pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$0 < \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(s)ds = \int_0^{a_{k+1}} f(s)ds - \int_0^{a_k} f(s)ds = F(a_{k+1}) - F(a_k),$$

donde $F(a_k) < F(a_{k+1})$, como havíamos afirmado.

4.1 Demonstração da primeira parte do Teorema 0.2

Nesta seção estabeleceremos um resultado que extende o **Teorema 0.1** do Capítulo 3 e este prova a primeira parte do **Teorema 0.2**. O resultado é o seguinte:

Teorema 4.2 *Suponha que* $\partial\Omega$ *é regular e que* f *satisfaz as condições* $(f_1)' - (f_3)'$. *Então, existe* $\lambda_0 > 0$, *tal que, para todo* $\lambda \geq \lambda_0$, *o problema (0-3) admite pelo menos* $m-1$ *soluções fracas não-negativas* $u_1, \ldots, u_{m-1} \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, *tais que, para todo* $1 \leq k \leq m-1$, *tem-se*

$$a_k < \| u \|_\infty \leq a_{k+1}.$$

Provaremos este teorema através de uma série de lemas técnicos e a prova segue as idéias consideradas em [9] e [17] com as modificações que se fizerem necessárias.

Começaremos com o seguinte resultado cuja demonstração é uma consequência do Teorema de Stampacchia (cf. Teorema A.13 no Apêndice).

Lema 4.3 *Seja* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua e suponha que exista* $s_0 > 0$ *tal que*

$$\begin{cases} g(s) & \geq & 0 & \quad se \quad -\infty < s < 0, \\ g(s) & \leq & 0 & \quad se \quad s_0 \leq s. \end{cases} \tag{4-1}$$

Se u é uma solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u & = & g(u) & \quad em \quad \Omega, \\ u & = & 0 & \quad em \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{4-2}$$

então, $u(x) \geq 0$ *q.t.p.* $x \in \Omega$ *e* $u \in L^\infty(\Omega)$. *Além disso,* $\| u \|_\infty \leq s_0$.

Demonstração. Seja u uma solução fraca do problema (4-2). Então

$$\int_\Omega | \nabla u |^{p-2} \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega g(u) v dx, \quad v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{4-3}$$

Defina $v = u^- = \max\{-u, 0\}$, e veja que

$$v = \begin{cases} -u, & \text{se} \quad u < 0, \\ 0, & \text{se} \quad u \geq 0, \end{cases} \tag{4-4}$$

isto é, $v = -u\chi_{\{u<0\}}$.

Por Stampacchia (cf. Teorema A.13), temos que $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e

$$\nabla v = \begin{cases} -\nabla u, & \text{se} \quad u < 0, \\ 0, & \text{se} \quad u \geq 0, \end{cases} \tag{4-5}$$

isto é, $\nabla v = -\nabla u\chi_{\{u<0\}}$.

Disto e de (4-3) tem-se a seguinte igualdade

$$-\int_\Omega |\nabla u|^p \chi_{\{u<0\}}dx = -\int_\Omega g(u)u\chi_{\{u<0\}}dx,$$

ou seja,

$$\int_\Omega |\nabla u|^p \chi_{\{u<0\}}dx = \int_\Omega g(u)u\chi_{\{u<0\}}dx = \int_{\{u<0\}} g(u)udx \leq 0,$$

pois, pela definição de g, tem-se $g(u) \geq 0$ para $u \in (-\infty, 0)$ e $u < 0$ neste conjunto. Assim,

$$\int_\Omega |\nabla u|^p \chi_{\{u<0\}}dx \leq 0. \tag{4-6}$$

Mas $|\nabla v|^p = |\nabla u|^p \chi_{\{u<0\}}$, donde por (4-6) vem que

$$\int_\Omega |\nabla v|^p dx \leq 0,$$

e pela desigualdade de Poincaré-Sobolev, existe $c > 0$ constante tal que

$$\frac{1}{c}\int_\Omega |v|^p dx \leq \int_\Omega |\nabla v|^p dx \leq 0,$$

donde $|v| \leq 0$ q.t.p em Ω.

Assim, $v = 0$ q.t.p em Ω e consequêntemente por (4-4), $u \geq 0$ q.t.p. em Ω.

Resta mostrar que $u \in L^\infty(\Omega)$. Para isto, defina $v = (u - s_0)^+ = \max\{u - s_0, 0\}$, e veja que

$$v = \begin{cases} u - s_0, & \text{se} \quad u > s_0, \\ 0, & \text{se} \quad u \leq s_0, \end{cases} \tag{4-7}$$

isto é, $v = (u - s_0)\chi_{\{u>s_0\}}$.

Novamente por Stampacchia (cf. Teorema A.13), temos que $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e

$$\nabla v = \begin{cases} \nabla u, & \text{se} \quad u > s_0, \\ 0, & \text{se} \quad u \leq s_0, \end{cases} \tag{4-8}$$

isto é, $\nabla v = \nabla u \chi_{\{u>s_0\}}$.

Disto e de (4-3) tem-se que

$$\int_\Omega \mid \nabla u \mid^p \chi_{\{u>s_0\}} dx = \int_\Omega g(u)(u-s_0)\chi_{\{u>s_0\}} dx = \int_{\{u>s_0\}} g(u)(u-s_0)dx \leq 0,$$

pois, pela definição de g, $g(u) \leq 0$ para $u \geq s_0$ e $u - s_0 > 0$. Assim,

$$\int_\Omega \mid \nabla u \mid^p \chi_{\{u>s_0\}} dx \leq 0. \tag{4-9}$$

Mas por (4-8), $\mid \nabla v \mid^p = \mid \nabla u \mid^p \chi_{\{u>s_0\}}$ donde por (4-9)

$$\int_\Omega \mid \nabla v \mid^p dx \leq 0. \tag{4-10}$$

Novamente pela desigualdade de Poincaré-Sobolev, existe $c_0 > 0$ constante tal que

$$\frac{1}{c_0} \int_\Omega \mid v \mid^p dx \leq \int_\Omega \mid \nabla v \mid^p dx \leq 0, \tag{4-11}$$

e isto implica que $\mid v \mid \leq 0$ q.t.p. em Ω, isto é, $v = 0$ q.t.p. em Ω. Consequêntemente por (4-7), $u \leq s_0$ q.t.p. em Ω.

Em resumo, $0 \leq u \leq s_0$, donde $u \in L^\infty(\Omega)$ e portanto

$$\| u \|_\infty \leq s_0. \tag{4-12}$$

Fica provado o **Lema 4.3**. □

Agora, considere a família de problemas

$$\begin{cases} -\Delta_p u & = & \lambda f_k(u) & \text{em} \quad \Omega, \\ u & = & 0 & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{4-13}$$

onde $2 \leq k \leq m$ e f_k são funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dadas por

$$f_k(s) = \begin{cases} f(0), & \text{se} \quad s \leq 0 \\ f(s), & \text{se} \quad 0 \leq s \leq a_k. \\ 0, & \text{se} \quad a_k \leq s \end{cases} \tag{4-14}$$

Para cada $1 < p < \infty$, seja $W_0^{1,p}(\Omega)$ o espaço usual de Sobolev equipado com a norma

$$\| u \|_{1,p}= \left(\int_\Omega | \nabla u |^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4-15}$$

A expressão em (4-15) é uma norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$ devido à desigualdade de Poincaré-Sobolev.

Para cada $\lambda > 0$, defina o funcional energia $\Phi_k(\lambda, \cdot) : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\Phi_k(\lambda, u) = \frac{1}{p} \int_\Omega | \nabla u |^p \, dx - \lambda \int_\Omega F_k(u) dx, \;\; u \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{4-16}$$

onde F_k é a função potêncial de f_k dada por

$$F_k(s) = \int_0^s f_k(\sigma) d\sigma.$$

Note que pelo Lema C.1 (cf. Apêndice), $\Phi_k(\lambda, \cdot) \in C^1(W_0^{1,p}(\Omega), \mathbb{R})$ e tem derivada de Fréchet $\Phi_k'(\lambda, \cdot)$ dada por

$$\langle \Phi_k'(\lambda, u), v \rangle = \int_\Omega | \nabla u |^{p-2} \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_\Omega f_k(u) v dx, \;\; u, v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{4-17}$$

Considere $Q_k(\lambda)$ o conjunto dos pontos críticos de $\Phi_k(\lambda, \cdot)$, isto é,

$$Q_k(\lambda) = \{ u \in W_0^{1,p}(\Omega); \;\; \Phi_k'(\lambda, u) = 0 \}.$$

Estudaremos o conjunto desses pontos críticos. O seguinte teorema dá uma condição necessária e suficiente para que uma função $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ seja solução do problema (0-3).

Lema 4.4 *$u \in Q_k(\lambda)$ se, e somente se, u é uma solução fraca não-negativa do problema (0-3) e $u \in L^\infty(\Omega)$ com $\| u \|_\infty \leq a_k$.*

Demonstração. Suponha que $u \in Q_k(\lambda)$, logo

$$\Phi_k'(\lambda, u) = 0,$$

donde

$$\langle \Phi_k'(\lambda, u), v \rangle = 0, \;\; v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Daí e de (4-17), tem-se

$$\int_\Omega | \nabla u |^{p-2} \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_\Omega f_k(u) v dx = 0, \;\; v \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{4-18}$$

e u é uma solução fraca do problema (4-13). Agora, veja que

$$\begin{cases} f_k(u) \geq 0, & \text{se} \quad -\infty < u \leq 0, \\ f_k(u) = 0, & \text{se} \quad a_k \leq u. \end{cases} \tag{4-19}$$

Assim, pelo **Lema 4.3**, $0 \leq u \leq a_k$ e $u \in L^\infty(\Omega)$ com $\| u \|_\infty \leq a_k$.

Além disso, pelo modo como definimos f_k, tem-se que $f_k(u) = f(u)$. Donde por (4-18) obtemos

$$\int_\Omega | \nabla u |^{p-2} \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_\Omega f(u) v dx = 0, \;\; v \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{4-20}$$

e, consequêntemente, u é solução fraca não-negativa do problema (0-3), o que prova a primeira parte do lema.

Reciprocamente, suponha que u é solução fraca do problema (0-3) e que $u \in L^\infty(\Omega)$ com $0 \leq u \leq a_k$. Como u é solução fraca de (0-3), segue que

$$\int_\Omega | \nabla u |^{p-2} \nabla u \nabla v dx = \lambda \int_\Omega f(u) v dx, \;\; v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{4-21}$$

Agora, como $0 \leq u \leq a_k$, pela definição de f_k, temos que

$$f(u) = f_k(u),$$

donde, por (4-21),

$$\int_\Omega | \nabla u |^{p-2} \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f_k(u) v dx, \;\; v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Daí, por (4-17)

$$\langle \Phi_k'(\lambda, u), v \rangle = 0, \;\; v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

e assim

$$\Phi_k'(\lambda, u) = 0.$$

Consequêntemente, u é ponto crítico de $\Phi_k(\lambda, \cdot)$. Portanto, $u \in Q_k(\lambda)$, e fica demonstrado o **Lema 4.4**. □

O lema à seguir mostra que o problema (0-3) admite soluções fracas em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Lema 4.5 $\Phi_k(\lambda, \cdot) : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ *admite um ponto de mínimo, isto é, existe* $u \in$

$W_0^{1,p}(\Omega)$ *tal que*

$$\Phi_k(\lambda,u) = \min_{v\in W_0^{1,p}(\Omega)} \Phi_k(\lambda,v).$$

Além disso, u é solução fraca do problema (0-3).

Demonstração. De fato, em (4-16) definimos o funcional energia $\Phi_k(\lambda,\cdot)$ por

$$\Phi_k(\lambda,u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx - \lambda\int_\Omega F_k(u)dx, \;\; u\in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{4-22}$$

Veja, por sua definição, que f_k é limitada, isto é, existe $M>0$ constante tal que

$$| f_k(s) | \leq M, \forall s\in\mathbb{R}.$$

Logo,

$$F_k(u) = \int_0^u f_k(\sigma)d\sigma \leq \int_0^u | f_k(\sigma) | \, d\sigma \leq M\int_0^u d\sigma = M\,|\,u\,| + b, \tag{4-23}$$

donde, utilizando a desigualdade de Hölder e a desigualdade de Poincaré-Sobolev, chegamos à

$$\begin{aligned}
\int_\Omega F_k(u)dx &\leq \int_\Omega (M\,|\,u\,|+b)dx \\
&= M\int_\Omega |\,u\,|\,dx + b\int_\Omega dx \\
&= M\int_\Omega |\,u\,|\,.1dx + b\,|\,\Omega\,| \\
&\leq M\left(\int_\Omega |\,u\,|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega 1^{p'}dx\right)^{\frac{1}{p'}} + b\,|\,\Omega\,| \\
&= M\,\|\,u\,\|_p |\,\Omega\,|^{\frac{1}{p'}} + b\,|\,\Omega\,| \\
&\leq Mc^{\frac{1}{p}}\,|\,\Omega\,|^{\frac{1}{p'}}\|\,u\,\|_{1,p} + b\,|\,\Omega\,| \\
&= M_0\,\|\,u\,\|_{1,p} + N_0,
\end{aligned}$$

onde $M_0 = Mc^{\frac{1}{p}}\,|\,\Omega\,|^{\frac{1}{p'}}$, $N_0 = b\,|\,\Omega\,|$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$ e c é a constante da desigualdade de Poincaré-Sobolev.

Logo, por (4-22), temos que

$$\begin{aligned}
\Phi_k(\lambda,u) &= \frac{1}{p}\,\|\,u\,\|_{1,p}^p - \lambda\int_\Omega F_k(u)dx \\
&\geq \frac{1}{p}\,\|\,u\,\|_{1,p}^p - \lambda M_0\,\|\,u\,\|_{1,p} - \lambda N_0.
\end{aligned}$$

Agora, considere o polinômio na variàvel t dado por

$$p(t) = \frac{1}{p}t^p - \lambda M_0 t - \lambda N_0$$

e veja que $\Phi_k(\lambda, \cdot)$ é limitado inferiormente por $p(t)$ e que $p(t)$ é limitada inferiormente, isto é, existe $I > 0$, tal que, $p(t) \geq I$, $\forall t$. Assim,

$$\Phi_k(\lambda, u) \geq I, \;\; u \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

e, portanto, $\Phi_k(\lambda, \cdot)$ é limitado inferiormente.

Defina

$$I_0 = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)} \Phi_k(\lambda, u),$$

e considere $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ uma sequência minimizante de $\Phi_k(\lambda, \cdot)$ relativa à I_0, isto é, (u_n) é tal que

$$\Phi_k(\lambda, u_n) \longrightarrow I_0.$$

Logo, para n suficientemente grande

$$\Phi_k(\lambda, u_n) \leq I_0 + 1,$$

donde

$$\frac{1}{p} \| u_n \|_{1,p}^p - \lambda \int_\Omega F_k(u_n) dx \leq I_0 + 1,$$

e daí,

$$\begin{aligned} \| u_n \|_{1,p}^p &\leq p(I_0 + 1) + p\lambda \int_\Omega F_k(u_n) dx \\ &\leq p(I_0 + 1) + p\lambda M_0 \| u_n \|_{1,p} + p\lambda N_0 \\ &= A + B \| u_n \|_{1,p}, \end{aligned} \tag{4-24}$$

onde $A = p(I_0 + 1) + p\lambda N_0$ e $B = p\lambda M_0$.

Afirmação 1: (u_n) é uma sequência limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

De fato, suponha por contradição que $\| u_n \|_{1,p} \longrightarrow \infty$. Dividindo ambos os lados de (4-24) por $\| u_n \|_{1,p}$, temos que

$$\| u_n \|_{1,p}^{p-1} \leq \frac{A}{\| u_n \|_{1,p}} + B.$$

Veja que $\dfrac{A}{\| u_n \|_{1,p}} \longrightarrow 0$ quando $\| u_n \|_{1,p} \longrightarrow \infty$, logo $\dfrac{A}{\| u_n \|_{1,p}}$ é limitada, isto é, existe uma constante $C > 0$, tal que, $\dfrac{A}{\| u_n \|_{1,p}} \leq C$, donde

$$\| u_n \|_{1,p}^{p-1} \leq C + B,$$

que é um absurdo por hipótese. Portanto, (u_n) é uma sequência limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Agora, como $W_0^{1,p}(\Omega)$ é reflexivo e (u_n) é uma sequência limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e uma subsequência de (u_n), que por comodidade denotaremos por (u_n), tal que,

$$u_n \overset{W_0^{1,p}(\Omega)}{\rightharpoonup} u.$$

Como $W_0^{1,p}(\Omega) \overset{cpt}{\hookrightarrow} L^p(\Omega)$, segue que

$$u_n \overset{L^p(\Omega)}{\longrightarrow} u,$$

donde, por resultados de Teoria da Medida, existe uma subsequência $(u_{n_j}) \subseteq (u_n)$ e uma função $h \in L^p(\Omega)$ tal que

$$u_{n_j} \longrightarrow u, \ \text{ q.t.p. em } \Omega \ \text{ e } \ | u_{n_j} | \leq h, \ \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Como F_k é contínua, tem-se

$$F_k(u_{n_j}) \longrightarrow F_k(u), \ \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Além disso, por (4-23), veja que

$$\begin{aligned} | F_k(u_{n_j}) | &\leq M | u_{n_j} | + b \\ &\leq Mh + b, \end{aligned}$$

onde $Mh + b \in L^p(\Omega)$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_\Omega F_k(u)dx = \lim \int_\Omega F_k(u_{n_j})dx. \tag{4-25}$$

Daí, vemos que

$$\begin{aligned} \Phi_k(\lambda, u) &= \frac{1}{p} \| u \|_{1,p}^p - \lambda \int_\Omega F_k(u)dx \\ &\leq \underline{\lim} \ \frac{1}{p} \| u_{n_j} \|_{1,p}^p - \lim \lambda \int_\Omega F_k(u_{n_j})dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \underline{\lim}\Big(\frac{1}{p} \parallel u_{n_j} \parallel_{1,p}^{p} - \lambda \int_{\Omega} F_k(u_{n_j})dx\Big) \\
&= \underline{\lim}\ \Phi_k(\lambda, u_{n_j}) \\
&= I_0.
\end{aligned}
$$

Logo, temos que

$$
\Phi_k(\lambda, u) = \min_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)} \Phi_k(\lambda, v). \tag{4-26}
$$

Assim, u é ponto de mínimo do funcional $\Phi_k(\lambda, \cdot)$, e fica provada a primeira parte do lema.

Para provar a segunda parte do lema, considere a seguinte afirmação:

Afirmação 2: u é solução fraca do problema (0-3).

De fato, por (4-26), para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, obtemos que

$$
\Phi_k(\lambda, u) \leq \Phi_k(\lambda, u + tv),
$$

donde

$$
\Phi_k(\lambda, u + tv) - \Phi_k(\lambda, u) \geq 0.
$$

Logo temos dois casos:

<u>Caso 1:</u> $t > 0$.

Neste caso,

$$
\frac{\Phi_k(\lambda, u + tv) - \Phi_k(\lambda, u)}{t} \geq 0,
$$

donde, passando o limite quando t tende à 0 pela direita em ambos os lados da desigualdade acima, obtemos $\langle \Phi_k'(\lambda, u), v \rangle \geq 0$, para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, isto é,

$$
\int_{\Omega} |\ \nabla u\ |^{p-2}\ \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_{\Omega} f_k(u) v dx \geq 0, \ \ v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{4-27}
$$

<u>Caso 2:</u> Se $t < 0$.

Neste caso,

$$
\frac{\Phi_k(\lambda, u + tv) - \Phi_k(\lambda, u)}{t} \leq 0,
$$

donde, passando o limite quando t tende à 0 pela esquerda em ambos os lados da desigualdade acima, chegamos à $\langle \Phi_k'(\lambda,u),v\rangle \leq 0$, para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, isto é,

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_\Omega f_k(u) v dx \leq 0, \quad v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{4-28}$$

Logo, por (4-27) e (4-28), segue que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_\Omega f_k(u) v dx = 0, \quad v \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{4-29}$$

e, consequêntemente, u é uma solução fraca do problema (4-13).

Mas, veja que

$$\begin{cases} f_k(s) \geq 0 & \text{se} \quad -\infty < s \leq 0, \\ f_k(s) = 0 & \text{se} \quad a_k \leq s < +\infty, \end{cases}$$

donde pelo **Lema 4.3**, $0 \leq u \leq a_k$ e com isso $f_k(u) = f(u)$. Logo, u é uma solução fraca do problema (0-3). E fica demonstrado o **Lema 4.5**. □

Agora, seja $u_k(\lambda)$ o ponto de mínimo do funcional $\Phi_k(\lambda,\cdot)$ encontrado no **Lema 4.5**, isto é, $u_k(\lambda)$ é tal que

$$\Phi_k(\lambda, u_k(\lambda)) = \min_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)} \Phi_k(\lambda, u). \tag{4-30}$$

Como $u_k(\lambda)$ é ponto de mínimo de $\Phi_k(\lambda,\cdot)$, segue que $Q_k(\lambda)$ é não-vazio. Além disso, o **Lema 4.4** garante que $u_k(\lambda)$ é uma solução fraca do problema (0-3) com $\| u_k(\lambda) \|_\infty \leq a_k$.

O lema abaixo garante, para $\lambda > 0$ suficientemente grande, que

$$a_{k-1} < \| u_k(\lambda) \|_\infty \leq a_k, \quad 2 \leq k \leq m. \tag{4-31}$$

Sua demonstração é idêntica a prova do **Lema 3.8** do Capítulo 3. Faremos a prova deste lema novamente por uma questão de completude.

Consequêntemente, provaremos que o problema (0-3) tem pelo menos $m-1$ soluções fracas não-negativas satisfazendo a condição (4-31).

Lema 4.6 *Para cada $2 \leq k \leq m$, existe $\lambda_k > 0$, tal que, para todo $\lambda \geq \lambda_k$, $u_k(\lambda) \notin Q_{k-1}(\lambda)$.*

Demostração. Vamos mostrar que existe $\lambda_k > 0$ e $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $0 \leq w \leq a_k$, tal que,

$$\Phi_k(\lambda, w) < \Phi_{k-1}(\lambda, u_{k-1}(\lambda)),$$

e isto implicará no resultado.

Defina $M = \max\{F(s); \quad 0 \leq s \leq a_{k-1}\}$. Como f satisfaz a condição $(f_3)'$, podemos definir

$$0 < \alpha := F(a_k) - M, \tag{4-32}$$

onde $F(s) = \displaystyle\int_0^s f(\sigma)d\sigma$.

Então, para $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $0 \leq u \leq a_{k-1}$, temos que

$$F(u) = \int_0^u f(\sigma)d\sigma \leq \int_0^{a_{k-1}} f(\sigma)d\sigma = F(a_{k-1}) \leq M. \tag{4-33}$$

Segue que

$$\begin{aligned} \int_\Omega F(u)dx &\leq \int_\Omega M dx \\ &= M\int_\Omega dx \\ &= M \mid \Omega \mid \\ &= (F(a_k) - \alpha) \mid \Omega \mid \\ &= F(a_k) \mid \Omega \mid - \alpha \mid \Omega \mid \\ &= F(a_k)\int_\Omega dx - \alpha \mid \Omega \mid \\ &= \int_\Omega F(a_k)dx - \alpha \mid \Omega \mid . \end{aligned} \tag{4-34}$$

Para $\delta > 0$ considere o conjunto

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega; \ \ dist(x, \partial\Omega) < \delta\}.$$

Afirmação 1: $\mid \Omega_\delta \mid \longrightarrow 0$, quando $\delta \longrightarrow 0$.

De fato, considere a função característica em Ω_δ dada por

$$\chi_{\Omega_\delta}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in \Omega_\delta, \\ 0, & \text{se} \quad x \notin \Omega_\delta. \end{cases}$$

Então,

$$\int_\Omega \chi_{\Omega_\delta}(x)dx = \int_{\Omega_\delta} \chi_{\Omega_\delta}(x)dx = \int_{\Omega_\delta} 1dx = \mid \Omega_\delta \mid .$$

Observe que $|\chi_{\Omega_\delta}(x)| \leq 1$ e que $\chi_{\Omega_\delta}(x) \longrightarrow 0$ quando $\delta \longrightarrow 0$. Logo, pelo Teorema de Lebesgue

$$|\Omega_\delta| = \int_\Omega \chi_{\Omega_\delta}(x)dx \stackrel{\delta \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0.$$

Concluindo assim a **Afirmação 1**.

Agora, para cada $\delta > 0$, tome $w_\delta \in C_0^\infty(\Omega)$ com $0 \leq w_\delta(x) \leq a_k$ e $w_\delta(x) = a_k$ se $x \in \Omega \setminus \Omega_\delta$. Assim, temos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega F(w_\delta)dx &= \int_{\Omega\setminus\Omega_\delta} F(w_\delta)dx + \int_{\Omega_\delta} F(w_\delta)dx \\
&= \int_{\Omega\setminus\Omega_\delta} F(a_k)dx + \int_{\Omega_\delta} F(w_\delta)dx \\
&= \int_{\Omega\setminus\Omega_\delta} F(a_k)dx + \int_{\Omega_\delta} F(a_k)dx - \int_{\Omega_\delta} F(a_k)dx + \int_{\Omega_\delta} F(w_\delta)dx \\
&= \int_\Omega F(a_k)dx - \int_{\Omega_\delta} (F(a_k) - F(w_\delta))dx \\
&\geq \int_\Omega F(a_k)dx - \int_{\Omega_\delta} (\overline{M} + \overline{M})dx \\
&= \int_\Omega F(a_k)dx - 2\overline{M} \int_{\Omega_\delta} dx,
\end{aligned}$$

onde $\overline{M} = \max\{| F(s) |;\ \ 0 \leq s \leq a_k\}$. Isto é,

$$\int_\Omega F(w_\delta)dx \geq \int_\Omega F(a_k)dx - 2\overline{M} \mid \Omega_\delta \mid . \tag{4-35}$$

Subtraindo (4-34) de (4-35), segue que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega F(w_\delta)dx - \int_\Omega F(u)dx &\geq \int_\Omega F(a_k)dx - 2\overline{M} \mid \Omega_\delta \mid - \int_\Omega F(a_k)dx + \alpha \mid \Omega \mid \\
&= \alpha \mid \Omega \mid - 2\overline{M} \mid \Omega_\delta \mid .
\end{aligned}$$

Como $|\Omega_\delta| \longrightarrow 0$ quando $\delta \longrightarrow 0$, podemos escolher $\delta > 0$, de modo que

$$\eta = \alpha \mid \Omega \mid - 2\overline{M} \mid \Omega_\delta \mid > 0. \tag{4-36}$$

Fixe tal $\delta > 0$ e faça $w := w_\delta$. Então, para $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $0 \leq u \leq a_{k-1}$, tem-se

$$\begin{aligned}
\Phi_k(\lambda, w) - \Phi_{k-1}(\lambda, u) &= \frac{1}{p} \| w \|_{1,p}^p - \lambda \int_\Omega F(w)dx - \frac{1}{p} \| u \|_{1,p}^p + \lambda \int_\Omega F(u)dx \\
&= \frac{1}{p}(\| w \|_{1,p}^p - \| u \|_{1,p}^p) - \lambda \left(\int_\Omega F(w)dx - \int_\Omega F(u)dx \right) \\
&\leq \frac{1}{p}(\| w \|_{1,p}^p - \| u \|_{1,p}^p) - \lambda\eta
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{p} \| w \|_{1,p}^{p} - \lambda\eta < 0,$$

para $\lambda \geq \lambda_k$ suficientemente grande.

E daí, para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $0 \leq u \leq a_{k-1}$, tem-se que

$$\Phi_k(\lambda, w) < \Phi_{k-1}(\lambda, u). \tag{4-37}$$

Agora, sabemos que $u_k(\lambda)$ é solução fraca não-negativa do problema (4-13), e suponha por contradição, que $u_k(\lambda) \in Q_{k-1}(\lambda)$. Logo, pelo **Lema 4.4**,

$$0 \leq u_k(\lambda) \leq a_{k-1}.$$

Segue do exposto acima que existe $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$, tal que,

$$\Phi_k(\lambda, w) < \Phi_{k-1}(\lambda, u_k(\lambda)). \tag{4-38}$$

Como $u_k(\lambda) \in Q_k(\lambda)$ e $u_k(\lambda)$ é um ponto de mínimo do funcional $\Phi_k(\lambda, \cdot)$, segue que

$$\Phi_k(\lambda, u_k(\lambda)) \leq \Phi_k(\lambda, w) < \Phi_{k-1}(\lambda, u_k(\lambda)), \tag{4-39}$$

donde

$$-\lambda \int_\Omega F(u_k(\lambda))dx < -\lambda \int_\Omega F(u_k(\lambda))dx, \tag{4-40}$$

que é um absurdo. Portanto, $u_k(\lambda) \notin Q_{k-1}(\lambda)$.

□

Demonstração do Teorema 4.2: Faça

$$\overline{\lambda} = \max_{2 \leq k \leq m} \lambda_k,$$

e fixe $\lambda \geq \overline{\lambda}$. Utilizando os Lemas 4.3 à 4.6, temos que existem

$$u_1(\lambda), \ldots, u_{m-1}(\lambda) \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$$

soluções fracas do problema (0-3), tais que, $u_k(\lambda)$ é um ponto de mínimo de $\Phi_k(\lambda, \cdot)$ e,

$$\begin{gathered} a_1 < \| u_1(\lambda) \|_\infty \leq a_2 \\ a_2 < \| u_2(\lambda) \|_\infty \leq a_3 \\ \vdots \\ a_{m-2} < \| u_{m-2}(\lambda) \|_\infty \leq a_{m-1} \end{gathered}$$

$$a_{m-1} < \| u_{m-1}(\lambda) \|_\infty \leq a_m.$$

Portanto, existem pelo menos $m-1$ soluções fracas não-negativas do problema (0-3) satisfazendo

$$a_k < \| u_k(\lambda) \|_\infty \leq a_{k+1}, \quad 2 \leq k \leq m.$$

E isto prova o **Teorema 4.2**. Fica, então, demonstrada a primeira parte do **Teorema 0.2**.

4.2 Demonstração da segunda parte do Teorema 0.2

Note que é suficiente considerar o caso $k = 1$ e $\lambda = 1$. Consideraremos o caso em que $f(0) > 0$ e posteriormente removeremos esta hipótese do problema. No roteiro que se segue, todas as soluções fracas do problema (0-3) são de classe C^1 (cf. Lieberman [25]). Começaremos estabelecendo um princípio do máximo para as soluções fracas do problema (0-3).

Lema 4.7 *Suponha $f(0) > 0$. Se $u \in C^1(\overline{\Omega})$ é uma solução fraca não-negativa do problema (0-3), então $u > 0$ em Ω.*

Demonstração. A prova será feita por contradição. Suponha que exista $x_0 \in \Omega$, tal que,

$$u(x_0) = 0,$$

isto é, u assume mínimo no ponto $x_0 \in \Omega$. Como $\partial\Omega$ é regular, existem $y_0 \in \Omega$ e $r > 0$, tais que,

$$\overline{B} = \overline{B}_r(y_0) \subset \Omega \;\text{ e }\; x_0 \in \partial B.$$

Seja $g : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua estritamente decrescente, tal que,

(i) $g(t) \leq f(t)$, para todo $t \in [0,\infty)$,
(ii) $g(0) = f(0) > 0$.

Defina

$$\gamma = g\left(\frac{a_1}{2}\right) := \inf\left\{g(s);\; 0 \leq s \leq \frac{a_1}{2}\right\},$$

e para dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, seja $b : \overline{B} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$b(x) = \varepsilon\left(e^{-|\frac{x-y_0}{r}|^2} - e^{-1}\right).$$

Afirmação 1: Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$,

$$\sup_{x \in B} | div(| \nabla b(x) |^{p-2} \nabla b(x)) | \leq \gamma. \tag{4-41}$$

De fato, pelo Lema B.9 (cf. Apêndice), vemos que $div(| \nabla b(x) |^{p-2} \nabla b(x))$ depende essencialmente do valor de ε, logo podemos tomar ε suficientemente pequeno de tal forma que (4-41) seja satisfeita.

Além disso, observe que $b(x) > 0$ se $x \in B$ e $b(x) = 0$ se $x \in \partial B$.

Afirmação 2: b é subsolução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= g(u) & \text{em} \quad B, \\ u &= 0 & \text{em} \quad \partial B, \end{cases} \tag{4-42}$$

isto é, b satisfaz

$$\int_B | \nabla b(x) |^{p-2} \nabla b(x) \nabla v(x) dx \leq \int_B g(b(x)) v(x) dx, \quad v \in W_0^{1,p}(B), \quad \text{com} \quad v \geq 0.$$

De fato, pela **Afirmação 1**, temos que

$$-\Delta_p b(x) \leq | \Delta_p b(x) | \leq \gamma = g\left(\frac{a_1}{2}\right). \tag{4-43}$$

Além disso, como b é uma aplicação contínua, para ε suficientemente pequeno, tem-se

$$b(x) \leq \frac{a_1}{2},$$

e como g é estritamente decrescente, obtemos

$$g\left(\frac{a_1}{2}\right) \leq g\Big(b(x)\Big),$$

donde, por (4-43),

$$-\Delta_p b(x) \leq g\Big(b(x)\Big), \quad x \in B. \tag{4-44}$$

Tomando $v \in W_0^{1,p}(B)$ com $v \geq 0$ e multiplicando ambos os lados da desigualdade acima por v tem-se

$$-\Delta_p b(x) v(x) \leq g\Big(b(x)\Big) v(x), \quad x \in B,$$

e integrando ambos os lados sobre a bola B, vem que

$$-\int_B \Delta_p b(x) v(x) dx \leq \int_B g\Big(b(x)\Big) v(x) dx. \tag{4-45}$$

Afirmação 3: $-\displaystyle\int_B \Delta_p b(x)v(x)dx = \int_B |\nabla b(x)|^{p-2}\nabla b(x)\nabla v(x)dx,\ v \in W_0^{1,p}(\Omega).$

De fato, veja que

$$\begin{aligned} -\Delta_p b(x) &= -div(|\nabla b(x)|^{p-2}\nabla b(x)) \\ &= -\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla b(x)|^{p-2}\frac{\partial}{\partial x_i}b(x)\right) \end{aligned}$$

donde, para toda função $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $v \geq 0$,

$$-\Delta_p b(x)v(x) = -\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla b(x)|^{p-2}\frac{\partial}{\partial x_i}b(x)\right)v(x).$$

Integrando ambos os lados da equação acima em B, tem-se que

$$\begin{aligned} -\int_B \Delta_p b(x)v(x)dx &= -\int_B \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla b(x)|^{p-2}\frac{\partial}{\partial x_i}b(x)\right)v(x)dx \\ &= \sum_{i=1}^{N} -\int_B \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla b(x)|^{p-2}\frac{\partial}{\partial x_i}b(x)\right)v(x)dx \\ &= \sum_{i=1}^{N}\int_B |\nabla b(x)|^{p-2}\frac{\partial}{\partial x_i}b(x)\frac{\partial}{\partial x_i}v(x)dx \\ &= \int_B |\nabla b(x)|^{p-2}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}b(x)\frac{\partial}{\partial x_i}v(x)dx \\ &= \int_B |\nabla b(x)|^{p-2}\nabla b(x)\nabla v(x)dx, \end{aligned} \tag{4-46}$$

e fica provada a **Afirmação 3**.

Assim, de (4-45) e (4-46), temos que

$$\int_B |\nabla b(x)|^{p-2}\nabla b(x)\nabla v(x)dx \leq \int_B g(b(x))v(x)dx, \tag{4-47}$$

e, portanto, b é uma subsolução fraca do problema (4-42), ficando provada a **Afirmação 2**.

Agora, veja que, $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. De fato, como $v \in W_0^{1,p}(B)$, então $v\,|_{\partial B}= 0$. Logo extenda v à Ω fazendo $v = 0$ em $\Omega \setminus B$ e teremos $v\,|_{\partial\Omega}= 0$, donde $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, como havíamos afirmado. Daí e do fato de u ser uma solução fraca do problema (0-3), temos que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v dx = \int_\Omega f(u)v dx,\quad u, v \in W_0^{1,p}(\Omega),\quad v \geq 0,$$

logo

$$\int_B |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx = \int_B f(u) v dx, \quad v \in W_0^{1,p}(B), \quad v \geq 0, \quad u \in W^{1,p}(B). \tag{4-48}$$

Subtraindo (4-48) de (4-47), obtemos

$$\int_B (|\nabla b|^{p-2} \nabla b - |\nabla u|^{p-2} \nabla u) \nabla v dx \leq \int_B (g(b) - f(u)) v dx, \quad v \in W_0^{1,p}(B), \quad v \geq 0.$$

Mas, por (i), temos que $g(u) \leq f(u)$, $\forall u$, donde $-f(u) \leq -g(u)$, $\forall u$, e da desigualdade acima temos, para toda função $v \in W_0^{1,p}(B)$ com $v \geq 0$, que

$$\int_B (|\nabla b|^{p-2} \nabla b - |\nabla u|^{p-2} \nabla u) \nabla v dx \leq \int_B (g(b) - g(u)) v dx. \tag{4-49}$$

Agora, escolha

$$v = (b-u)^+ = \begin{cases} b-u, & \text{se} \quad b > u, \\ 0, & \text{se} \quad b \leq u. \end{cases}$$

Como $b, u \in W^{1,p}(B)$ segue que $(b-u) \in W^{1,p}(B)$ e, por Stampacchia (cf. Teorema A.13), $(b-u)^+ \in W^{1,p}(B)$. Além disso, $b \mid_{\partial B} = 0$ e $u \geq 0$ em $\overline{B}$, donde

$$(b-u)^+ \mid_{\partial B} = (b \mid_{\partial B} - u \mid_{\partial B})^+ = 0,$$

e daí, $(b-u)^+ \in W_0^{1,p}(B)$, isto é, $v \in W_0^{1,p}(B)$.

Logo podemos tomar v definido desta forma em (4-49) e encontrar

$$\int_B (|\nabla b|^{p-2} \nabla b - |\nabla u|^{p-2} \nabla u) \nabla (b-u)^+ dx \leq \int_B (g(b) - g(u))(b-u)^+ dx,$$

isto é,

$$\int_B (|\nabla b|^{p-2} \nabla b - |\nabla u|^{p-2} \nabla u)(\nabla b - \nabla u) \chi_{\{b>u\}} dx \leq \int_B (g(b) - g(u))(b-u) \chi_{\{b>u\}} dx.$$

Veja, pela desigualdade de Simmons, que a integral do lado esquerdo da desigualdade acima é maior ou igual à 0. Além disso, pelo fato de g ser estritamente decrescente, temos que

$$0 \leq \int_B (|\nabla b|^{p-2} \nabla b - |\nabla u|^{p-2} \nabla u)(\nabla b - \nabla u) \chi_{\{b>u\}} dx \leq \int_B (g(b) - g(u))(b-u) \chi_{\{b>u\}} dx \leq 0.$$

Consequêntemente,

$$\int_B (g(b) - g(u))(b-u) \chi_{\{b>u\}} dx = 0,$$

donde
$$(g(b)-g(u))(b-u)\chi_{\{b>u\}}=0.$$

Como g é estritamente decrescente, temos que $g(b)-g(u)\neq 0$ e, daí, $b-u=0$ no conjunto $B^+=\{x\in\Omega;\ \ b(x)>u(x)\}$, isto é, $b=u$ em B^+, o que é impossível. Logo, B^+ é um conjunto de medida nula e, assim

$$b(x)\leq u(x),\ \ \text{q.t.p. em} \in \Omega. \tag{4-50}$$

Mas, veja que
$$b(x_0)=0=u(x_0),\ \ x_0\in\partial B,$$

donde $(u-b)(x_0)=0$ e, por (4-50) e pelo Teorema de Vázquez (cf. Teorema B.7 no Apêndice), temos que
$$\frac{\partial}{\partial\nu}(u-b)(x_0)<0,$$
onde ν é o vetor normal unitário exterior à $\partial\Omega$. Daí
$$\frac{\partial}{\partial\nu}u(x_0)<\frac{\partial}{\partial\nu}b(x_0).$$

Além disso, $b(x)>0$, para todo $x\in B$, e $b(x_0)=0$. Novamente pelo Teorema de Vázquez, temos que
$$\frac{\partial}{\partial\nu}b(x_0)<0.$$

Logo,
$$\frac{\partial}{\partial\nu}u(x_0)<\frac{\partial}{\partial\nu}b(x_0)<0,$$
donde
$$\mid\nabla u(x_0)\mid\neq 0,\ \ x_0\in\partial B,$$

o que contradiz o fato de u assumir um ponto de mínimo em $x_0\in\Omega$ e, com isso, não existe $x_0\in\Omega$, tal que, $u(x_0)=0$. Portanto, $u>0$ em Ω. $\square$

Agora, tome $R>0$ e considere a bola $B=B_R(0)$ tal que $\overline{\Omega}\subset B$. Defina $\alpha:\overline{B}\longrightarrow\Omega$ por
$$\alpha(x)=\begin{cases} u(x), & \text{se} \quad x\in\overline{\Omega},\\ 0, & \text{se} \quad x\in\overline{B}\setminus\Omega,\end{cases}$$
onde u é uma solução fraca não-negativa do problema (0-3).

Lema 4.8 *Se $\Omega\subset B$ é um domínio limitado com fronteira suave, então $\alpha\in W_0^{1,p}(B)$.*

Demonstração. Primeiramente, afirmamos que

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_i}(x) = \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_i}(x), & \text{se} \quad x \in \overline{\Omega}, \\ 0, & \text{se} \quad x \in \overline{B} \setminus \Omega. \end{cases}$$

Para provar isto, basta mostrar que

$$\int_B \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_B \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \varphi dx, \quad \varphi \in C_0^\infty(B). \tag{4-51}$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned} \int_B \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx &= \int_{\overline{\Omega}} \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \int_{B \setminus \Omega} \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \\ &= \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx. \end{aligned} \tag{4-52}$$

Defina o campo vetorial $F = (0, \ldots, u\varphi, \ldots, 0)$ e veja que

$$divF = \frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi + u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}.$$

Como $u\mid_{\partial\Omega} = 0$, utilizando o Teorema do Divergente, temos que

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi + u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) dx = \int_\Omega divF dx = \int_{\partial\Omega} F\nu dx = \int_{\partial\Omega} u\varphi\nu_i dx = 0,$$

donde

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi dx.$$

Logo, por (4-52), para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, temos que

$$\begin{aligned} \int_B \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx &= \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \\ &= -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi dx \\ &= -\int_{\overline{\Omega}} \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi dx - \int_{B \setminus \Omega} 0 \varphi dx \\ &= -\int_B \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \varphi dx, \end{aligned}$$

e (4-51) se verifica.

Agora, veja que $\alpha \in W_0^{1,p}(B)$. De fato, note que $\alpha \in L^p(B)$ pois

$$\int_B |\ \alpha(x)\ |^p\ dx = \int_\Omega |\ u(x)\ |^p\ dx < \infty$$

e que $\frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \in L^p(B)$, pois

$$\int_B |\ \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}(x)\ |^p\ dx = \int_\Omega |\ \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\ |^p\ dx < \infty,$$

e isto implica que $\alpha \in W^{1,p}(B)$.

Além disso, observe que

$$supp(\alpha) \subset \Omega \subset\subset B,$$

pois $\overline{\Omega} \subset B$ e $\overline{\Omega}$ é um conjunto compacto. Logo, $supp(\alpha)$ é um conjunto compacto em B, donde, pelo Lema A.14 (cf. Apêndice), tem-se que $\alpha \in W_0^{1,p}(B)$. $\square$

Com isso, afirmamos que:

Lema 4.9 α *é uma subsolução fraca do problema*

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= f(u) & em \quad B, \\ u &= 0 & em \quad \partial B. \end{cases} \tag{4-53}$$

Demonstração. Para cada $n \in I\!N$ defina

$$v_n(x) = n \min\left\{u(x), \frac{1}{n}\right\}, \quad \forall x \in \Omega,$$

onde u é uma solução fraca não-negativa do problema (0-3). Veja que,

$$v_n(x) = n\left(\frac{u(x)+\frac{1}{n}}{2} - \frac{|\ u(x)-\frac{1}{n}\ |}{2}\right) = \begin{cases} nu(x), & \text{se} \quad \frac{1}{n} > u(x), \\ 1, & \text{se} \quad u(x) > \frac{1}{n}, \end{cases} \tag{4-54}$$

e observe que

$$\frac{\partial v_n}{\partial x_i}(x) = \begin{cases} n\frac{\partial u}{\partial x_i}(x), & \text{se} \quad \frac{1}{n} > u(x), \\ 0, & \text{se} \quad u(x) > \frac{1}{n}. \end{cases} \tag{4-55}$$

De fato, derivando a primeira igualdade em (4-54), temos que

$$\frac{\partial v_n}{\partial x_i}(x) = n\left[\frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)}{2} - \frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\left(u(x) - \frac{1}{n}\right)}{2\mid u(x) - \frac{1}{n}\mid}\right]. \tag{4-56}$$

Logo, temos dois casos:

Caso 1: $u(x) > \frac{1}{n}$.

Neste caso, temos $u(x) - \frac{1}{n} > 0$, donde $\mid u(x) - \frac{1}{n} \mid = u(x) - \frac{1}{n}$ e por (4-56),

$$\frac{\partial v_n}{\partial x_i}(x) = 0.$$

Caso 2: $\frac{1}{n} > u(x)$.

Já neste caso, temos $u(x) - \frac{1}{n} < 0$, donde $\mid u(x) - \frac{1}{n} \mid = \frac{1}{n} - u(x) = -\left(u(x) - \frac{1}{n}\right)$ e novamente por (4-56), tem-se

$$\frac{\partial v_n}{\partial x_i}(x) = n\left[\frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)}{2} - \frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\left(u(x) - \frac{1}{n}\right)}{2(u(x) - \frac{1}{n})}\right] = n\frac{2\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)}{2} = n\frac{\partial u}{\partial x_i}(x).$$

E daí, (4-55) se verifica. Assim, temos que

$$\nabla v_n(x) = \begin{cases} n\nabla u(x), & \text{se} \quad \frac{1}{n} > u(x), \\ 0, & \text{se} \quad u(x) > \frac{1}{n}. \end{cases} \tag{4-57}$$

Afirmação 1: $\nabla u \nabla v$ é não-negativo.

De fato, veja que $\nabla v_n = n\nabla u \chi_{\{\frac{1}{n} > u\}}$. Logo,

$$\nabla u \nabla v_n = \nabla u\left(n\nabla u \chi_{\{\frac{1}{n} > u\}}\right) = n \mid \nabla u \mid^2 \chi_{\{\frac{1}{n} > u\}} \geq 0,$$

e temos o desejado.

Afirmação 2: v_n converge para 1 quase sempre em Ω.

De fato, primeiro veja que $| v_n(x) | \leq 1$, pois $v_n(x) \geq 0$ e

$$\begin{aligned} v_n(x) &= n\left(\frac{u(x)+\frac{1}{n}}{2} - \frac{| u(x)-\frac{1}{n} |}{2}\right) \\ &= n\left(\frac{| u(x)+\frac{1}{n} |}{2} - \frac{| u(x)-\frac{1}{n} |}{2}\right) \\ &= \frac{n}{2}\left(| u(x)+\frac{1}{n} | - | u(x)-\frac{1}{n} |\right) \\ &\leq \frac{n}{2} | u(x)+\frac{1}{n} - (u(x)-\frac{1}{n}) | \\ &= \frac{n}{2} | u(x)+\frac{1}{n} - u(x)+\frac{1}{n} | \\ &= \frac{n}{2}.2.\frac{1}{n} \\ &= 1, \end{aligned}$$

ou seja, $0 \leq v_n(x) \leq 1$, donde $| v_n(x) | \leq 1$.

Fixe $x \in \Omega$. Como $u > 0$ em Ω, para n suficientemente grande, temos que

$$n \min\left\{u(x), \frac{1}{n}\right\} = n\frac{1}{n} = 1,$$

e, portanto, $v_n \longrightarrow 1$ quase sempre em Ω.

Agora, seja $w \in C_0^\infty(B)$ com $w \geq 0$.

Afirmação 3: $wv_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Como $w \in C_0^\infty(B)$ e $C_0^\infty(B)$ é denso em $L^p(B)$, segue que $w \in L^p(B)$ e $\frac{\partial w}{\partial x_i} \in L^p(B)$, de modo que temos $w \in W^{1,p}(B)$. Além disso, $supp(w) \subset B$, donde $w \in L^\infty(B)$ e assim, $w \in W^{1,p}(B) \cap L^\infty(B)$. Agora, como $0 \leq v_n(x) \leq 1$ para todo $x \in \Omega$, tem-se que $v_n \in L^\infty(\Omega)$ e, consequêntemente, $v_n \in L^\infty(B)$. Além disso, veja que $v_n \in W^{1,p}(B)$ e, assim, $v_n \in W^{1,p}(B) \cap L^\infty(B)$. Logo, pelo Teorema A.11 (cf. Apêndice), tem-se $wv_n \in W^{1,p}(B) \cap L^\infty(B)$. Em particular, $wv_n \in W^{1,p}(B)$ e daí, $wv_n \in W^{1,p}(\Omega)$.

Agora, veja que

$$supp(wv_n) \subset supp(w) \cap supp(v_n) \subset supp(v_n) \subset \Omega.$$

Como $supp(wv_n)$ é um subconjunto fechado de Ω e Ω é limitado, segue que $supp(wv_n)$ é um subconjunto compacto em Ω. Assim, pelo Lema A.14 (cf. Apêndice), temos que $wv_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$, e fica provada a **Afirmação 3**.

Afirmação 4: α é uma subsolução fraca do problema (4-53).

De fato, como u é solução fraca do problema (0-3), temos que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi dx=\int_\Omega f(u)\varphi dx,\ \ \varphi\in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Em particular, para $\varphi = wv_n$, temos que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla(wv_n)dx=\int_\Omega f(u)wv_ndx,$$

donde

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u(v_n\nabla w+w\nabla v_n)dx=\int_\Omega f(u)wv_ndx,$$

isto é,

$$\int_\Omega v_n|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla wdx+\int_\Omega w|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v_ndx=\int_\Omega f(u)wv_ndx.$$

Como $0\le v_n(x)\le 1$, para todo $n\in I\!N$ e todo $x\in\Omega$, utilizando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que

$$\begin{aligned}
\int_B |\nabla\alpha|^{p-2}\nabla\alpha\nabla wdx &= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla wdx\\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty}\int_\Omega v_n|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla wdx\\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\int_\Omega f(u)wv_ndx-\int_\Omega w|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v_ndx\right)\\
&\le \lim_{n\longrightarrow\infty}\int_\Omega f(u)wv_ndx\\
&= \int_\Omega f(u)wdx\\
&= \int_B f(\alpha)wdx.
\end{aligned}$$

Além disso, como $\alpha\in W_0^{1,p}(B)$, temos que $\alpha=0$ em ∂B. E, portanto, α é uma subsolução fraca do problema (4-53). E fica demonstrado o **Lema 4.9**. □

Teorema 4.10 *Suponha que $f(0)>0$. Se o problema (0-3) tem uma solução fraca não-negativa $u\in L^\infty(\Omega)$ tal que $a_1<\|u\|_\infty\le a_2$, então*

$$\int_{a_1}^{a_2} f(s)ds>0.$$

Demonstração. Defina α como no lema anterior e $\beta(x) = a_2$, para todo $x \in B$. Veja que, α e β são, respectivamente, sub e super soluções do problema (4-53). Logo, por resultados de sub e super solução estudados anteriormente, existe um solução $\widetilde{u} \in W_0^{1,p}(B)$ do problema (4-53) tal que

$$\alpha(x) \leq \widetilde{u}(x) \leq a_2, \ \ \forall x \in B.$$

Além disso, $\widetilde{u}$ é uma solução maximal em $(a_1, a_2]$, isto é, para toda solução $v \in W_0^{1,p}(B)$ do problema (4-53) com $\alpha(x) \leq v(x) \leq a_2$, tem-se que

$$\alpha(x) \leq v(x) \leq \widetilde{u}(x) \leq a_2, \ \ \forall x \in B.$$

Afirmação 1: $\widetilde{u}$ é radialmente simétrica, isto é, para todo $x_1, x_2 \in B$ com $| x_1 |=| x_2 |$, tem-se que

$$\widetilde{u}(x_1) = \widetilde{u}(x_2).$$

De fato, suponha por contradição, que $\widetilde{u}$ não é radialmente simétrica. Então, existem $x_1, x_2 \in B$ com $| x_1 |=| x_2 |$ tal que

$$\widetilde{u}(x_1) < \widetilde{u}(x_2). \tag{4-58}$$

Considere $SO(N, I\!R)$ o grupo especial ortogonal, isto é, o grupo das matrizes P de ordem $N \times N$ munido com a operação de produto tais que

$$P^T = P^{-1} \ \text{ e } \ \det P = 1.$$

Seja $P \in SO(N, I\!R)$ uma matriz $N \times N$ tal que

$$x_2 = Px_1.$$

Defina

$$u_1(x) = \widetilde{u}(Px), \tag{4-59}$$

e veja que

$$\nabla u_1(x) = P \nabla \widetilde{u}(Px). \tag{4-60}$$

Como a aplicação $x \longmapsto Px$ é uma isometria, isto é, P satisfaz $\langle Px, Py \rangle = \langle x, y \rangle$ para todo $x, y \in B$, temos que $| Px |=| x |$ e, consequêntemente,

$$| \nabla u_1(x) |=| P \nabla \widetilde{u}(Px) |=| \nabla \widetilde{u}(Px) | \, . \tag{4-61}$$

Provaremos agora um resultado que é fundamental para concluirmos a demonstração da **Afirmação 1**.

Afirmação 2: u_1 é solução fraca do problema (4-53), isto é, u_1 satisfaz

$$\int_B |\nabla u_1(x)|^{p-2}\nabla u_1(x)\nabla\varphi(x)dx = \int_B f(u_1(x))\varphi(x)dx,\ \ \varphi\in W_0^{1,p}(B).$$

De fato, defina

$$\phi(x)=\varphi(P^Tx)\in W_0^{1,p}(B),$$

e veja que

$$\varphi(x)=\varphi(P^TPx)=\phi(Px)\ \text{ e }\ \nabla\varphi(x)=P\nabla\phi(Px).$$

Utilizando o Teorema da Mudança de Variáveis para integrais múltiplas, chegamos à

$$\begin{aligned}
\int_B |\nabla u_1(x)|^{p-2}\nabla u_1(x)\nabla\varphi(x)dx &= \int_B |\nabla\widetilde{u}(Px)|^{p-2}P\nabla\widetilde{u}(Px)P\nabla\phi(Px)dx\\
&= \int_B |\nabla\widetilde{u}(Px)|^{p-2}\nabla\widetilde{u}(Px)\nabla\phi(Px)dx\\
&= \int_B |\nabla\widetilde{u}(y)|^{p-2}\nabla\widetilde{u}(y)\nabla\phi(y)\det P dy\\
&= \int_B f(\widetilde{u}(y))\phi(y)dy\\
&= \int_B f(\widetilde{u}(PP^Ty))\phi(PP^Ty)dy\\
&= \int_B f(\widetilde{u}(Px))\phi(Px)\det P^T dx\\
&= \int_B f(u_1(x))\varphi(x)dx.
\end{aligned}$$

Logo, u_1 é solução fraca de (4-53) e, portanto, a **Afirmação 2** está demonstrada. Podemos agora concluir a prova da **Afirmação 1**.

Com os argumentos acima vemos que o problema (4-53) tem duas subsoluções, $\alpha(x)$ e $u_1(x)$. Defina

$$\underline{u}(x)=\max\{\alpha(x),u_1(x)\},$$

e seja $\beta(x)=a_2$ uma super solução de (4-53). Lembre-se que $\underline{u}$ é subsolução do problema (4-53) (cf. **Teorema 0.3** do Capítulo 1). Logo, por teoremas de sub e super solução estudados anteriormente, existe uma outra solução $u_2\in W_0^{1,p}(B)$ do problema (4-53), tal que,

$$\underline{u}(x)\le u_2(x)\le\beta(x),\ \ \forall x\in B.$$

Como $\widetilde{u}$ é uma solução maximal de (4-53) com respeito ao par de sub e super soluções $\{\alpha(x),\beta(x)\}$, tem-se que

$$u_2(x) \leq \widetilde{u}(x), \ \ \forall x \in B,$$

donde, temos que

$$\widetilde{u}(x_1) \geq u_2(x_1) \geq \underline{u}(x_1) \geq u_1(x_1) = \widetilde{u}(Px_1) = \widetilde{u}(x_2) > \widetilde{u}(x_1),$$

que é um absurdo. E esta contradição mostra que a solução $\widetilde{u}$ é uma solução radialmente simétrica do problema (4-53), ficando provada a **Afirmação 1**.

Agora, defina $u : [0,R) \longrightarrow \mathbb{R}^+$, uma função de classe C^1, por

$$u(r) = \widetilde{u}(x), \ \ \forall x \in B,$$

onde $r = \mid x \mid$ e R é o raio da bola B. Usando mudança de variáveis, para todo $r \in (0,R)$, temos que

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_i} = \frac{du}{dr}\frac{\partial r}{\partial x_i} = u'\frac{\partial r}{\partial x_i} = u'\frac{x_i}{r}, \ \ 1 \leq i \leq N.$$

Daí,

$$\nabla \widetilde{u} = \left(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_N}\right) = \left(u'\frac{x_1}{r}, \ldots, u'\frac{x_N}{r}\right) = \frac{u'}{r}(x_1, \ldots, x_N) = \frac{u'}{r}x,$$

donde

$$\mid \nabla \widetilde{u} \mid = \frac{\mid u' \mid}{r} \mid x \mid = \frac{\mid u' \mid}{r} r = \mid u' \mid .$$

Agora, para qualquer $v \in C_0^\infty(0,R)$, faça

$$w(r) = \frac{v(r)}{r^{N-1}}, \ \ w(0) = 0, \ \ \forall r \in (0,R),$$

e

$$\widetilde{v}(x) = v(r), \ \ \widetilde{w}(x) = w(r), \ \ \forall x \in B.$$

Como $\widetilde{u}$ é solução fraca do problema (4-53), temos que

$$\int_B \mid \nabla \widetilde{u} \mid^{p-2} \nabla \widetilde{u} \nabla \widetilde{w} dx = \int_B f(\widetilde{u})\widetilde{w} dx, \ \ \widetilde{w} \in C_0^\infty(0,R). \tag{4-62}$$

Mas veja que

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_i} = u'\frac{x_i}{r} \ \text{ e } \ \frac{\partial \widetilde{w}}{\partial x_i} = w'\frac{x_i}{r}, \ \ 1 \leq i \leq N,$$

e assim
$$\nabla\widetilde{u} = \frac{u'}{r}(x_1,\ldots,x_N) = \frac{u'}{r}x \ \text{ e } \ \nabla\widetilde{w} = \frac{w'}{r}(x_1,\ldots,x_N) = \frac{w'}{r}x,$$
donde
$$\nabla\widetilde{u}\nabla\widetilde{w} = \frac{u'}{r}x\frac{w'}{r}x = \frac{u'w'}{r^2} \mid x \mid^2 = \frac{u'w'}{r^2}r^2 = u'w'.$$

Logo, de (4-62), tem-se que

$$\int_0^R \mid u' \mid^{p-2} u'w'r^{N-1}dr = \int_0^R f(u)wr^{N-1}dr. \tag{4-63}$$

Como $w = vr^{1-N}$,

$$w' = v'r^{1-N} + v(1-N)r^{-N} = \frac{v'}{r^{N-1}} - (N-1)\frac{v}{r^N}$$

e substituindo esta expressão em (4-63), vem que

$$\int_0^R \mid u' \mid^{p-2} u'v'dr - \int_0^R \frac{(N-1)}{r} \mid u' \mid^{p-2} u'vdr = \int_0^R f(u)vdr, \ \ v \in C_0^\infty(0,R).$$

Logo

$$\int_0^R -\partial(\mid u' \mid^{p-2} u')vdr = \int_0^R \left(\frac{(N-1)}{r} \mid u' \mid^{p-2} u' + f(u)\right)vdr,$$

e isto implica que $u \in C^1$ é uma solução fraca da equação

$$-\partial(\mid u' \mid^{p-2} u') = \frac{(N-1)}{r} \mid u' \mid^{p-2} u' + f(u). \tag{4-64}$$

Pela continuidade do lado direito da expressão acima, segue que a derivada no sentido das distribuições ∂ acima coincide com a derivada clássica e, portanto, u é uma solução clássica da equação (4-64). Agora, como $\widetilde{u}$ é radialmente simétrica, tem-se que

$$u'(0) = 0.$$

Além disso, veja que $u(R)$ é definido quando $x \in \partial B$, e como $\widetilde{u} \in W_0^{1,p}(B)$ tem-se $\widetilde{u} \mid_{\partial B} = 0$. Logo
$$u(R) = \widetilde{u} \mid_{\partial B} = 0.$$

Portanto, u é uma solução da equação (4-64) sujeita à condição

$$u'(0) = 0 \ \text{ e } \ u(R) = 0.$$

Seja $r_0 \in [0,R)$ tal que

$$u_{\max} = u(r_0) = \max\{u(r); \;\; r \in [0,R)\}.$$

Multiplicando ambos os lados de (4-64) por u' e integrando de r_0 à r, temos que

$$-\int_{r_0}^{r} \partial(\mid u' \mid^{p-2} u')u'dr = \int_{r_0}^{r} \frac{N-1}{r} \mid u' \mid^{p} dr + \int_{r_0}^{r} f(u)u'dr. \qquad (4\text{-}65)$$

Observe que a derivada dada na primeira integral é

$$\begin{aligned}
\partial(\mid u' \mid^{p-2} u') &= (p-2) \mid u' \mid^{p-3} \frac{u'}{\mid u' \mid} u''u' + \mid u' \mid^{p-2} u'' \\
&= (p-2) \mid u' \mid^{p-3} \frac{\mid u' \mid^2}{\mid u' \mid} u'' + \mid u' \mid^{p-2} u'' \\
&= (p-2) \mid u' \mid^{p-2} u'' + \mid u' \mid^{p-2} u'' \\
&= (p-1) \mid u' \mid^{p-2} u'',
\end{aligned}$$

donde, em (4-65), tem-se que

$$-\int_{r_0}^{r} (p-1) \mid u' \mid^{p-2} u'u''dr = \int_{r_0}^{r} \frac{N-1}{r} \mid u' \mid^{p} dr + \int_{r_0}^{r} f(u)u'dr,$$

e assim, para todo $r \in (0,R)$,

$$-\left(\int_{r_0}^{r} (p-1) \mid u' \mid^{p-2} u'u''dr + (N-1)\int_{r_0}^{r} \frac{\mid u' \mid^{p}}{r} dr\right) = \int_{r_0}^{r} f(u)u'dr. \qquad (4\text{-}66)$$

Como $u_{\max} = u(r_0)$ é maior que a_1, podemos escolher $r \in (0,R)$, tal que, $u(r) = a_1$.

Assim, fazendo $s = u$ na integral do lado direito da igualdade acima, temos $ds = u'dr$ e utilizando o Teorema da Mudança de Variáveis para integrais, segue que

$$\int_{r_0}^{r} f(u)u'dr = \int_{u(r_0)}^{u(r)} f(s)ds = \int_{u_{\max}}^{a_1} f(s)ds.$$

De mesmo modo, fazendo $s = u'$ na primeira integral do lado esquerdo da igualdade acima, temos $ds = u''dr$ e, novamente pelo Teorema da Mudança de Variáveis para integrais, temos que

$$\int_{r_0}^{r} \mid u' \mid^{p-2} u'u''dr = \int_{u'(r_0)}^{u'(r)} \mid s \mid^{p-2} sds = \int_{0}^{u'(r)} \mid s \mid^{p-2} sds,$$

donde, por (4-66)

$$\int_{u_{\max}}^{a_1} f(s)ds = -\left((p-1)\int_0^{u'(r)} |\, s\,|^{p-2}\, sds + (N-1)\int_{r_0}^{r} \frac{|\, u'\,|^p}{r} dr\right) < 0,$$

e esta equação implica que

$$\int_{a_1}^{u_{\max}} f(s)ds > 0.$$

Como $u_{\max} \in (b_1, a_2]$ e

$$\begin{cases} f(s) \leq 0 & \text{se} \quad a_1 < s \leq b_1, \\ f(s) \geq 0 & \text{se} \quad u_{\max} \leq s \leq a_2, \end{cases} \tag{4-67}$$

temos que

$$\begin{aligned} \int_{a_1}^{a_2} f(s)ds &= \int_{a_1}^{b_1} f(s)ds + \int_{b_1}^{u_{\max}} f(s)ds + \int_{u_{\max}}^{a_2} f(s)ds \\ &\geq \int_{a_1}^{u_{\max}} f(s)ds > 0. \end{aligned}$$

Portanto

$$\int_{a_1}^{a_2} f(s)ds > 0,$$

e com isto fica provado o **Teorema 4.10**. □

4.3 Algumas Observações

Faremos aqui algumas observações sobre fatos considerados nas seções anteriores sem demonstrações prévias. Nesta seção provaremos alguns desses resultados.

Observação 4.11 *A condição $f(0) > 0$ pode ser removida do* **Teorema 4.10**.

Suponha que $f(0) \leq 0$ e que o problema (0-3) tem uma solução fraca não-negativa $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ satisfazendo $a_1 < \| u \|_\infty \leq a_2$. Defina uma função contínua $\widetilde{f}$ da seguinte forma:

$$\widetilde{f}(0) > 0$$

e

$$\widetilde{f}(s) = \begin{cases} \geq f(s), & \text{se} \quad 0 \leq s \leq a_1, \\ f(s), & \text{se} \quad a_1 \leq s < \infty. \end{cases} \tag{4-68}$$

Afirmação 1: u é subsolução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \widetilde{f}(u) \qquad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0 \qquad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{4-69}$$

De fato, como u é solução fraca do problema (0-3), temos que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f(u) v dx, \quad v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{4-70}$$

Mas, pela definição de $\widetilde{f}$, para todo $s \in [0,\infty)$, tem-se

$$f(s) \leq \widetilde{f}(s),$$

donde, por (4-70),

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f(u) v dx \leq \int_\Omega \widetilde{f}(u) v dx, \quad v \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad v \geq 0. \tag{4-71}$$

Além disso,

$$u = 0, \ \text{ em } \ \partial\Omega,$$

e, portanto, u é subsolução fraca do problema (4-69).

Como fizemos anteriormente, vamos considerar $\beta(x) = a_2$ como uma super solução do problema (4-69) e, assim, (4-69) tem um par de sub e super soluções $\{u(x), a_2\}$. Logo, por teoremas de sub e super solução estudados anteriormente, existe uma solução fraca $\widetilde{u} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ do problema (4-69) tal que

$$u \leq \widetilde{u} \leq a_2, \ \text{ q.t.p. em } \ \Omega.$$

Agora, procedendo como na demonstração do **Teorema 4.10** com $\widetilde{f}$ no lugar de f, temos que

$$\int_{a_1}^{a_2} f(s) ds = \int_{a_1}^{a_2} \widetilde{f}(s) ds > 0,$$

o que prova a observação 4.11.

□

Veja que na observação anterior e no **Teorema 4.10** consideramos somente o caso $0 < a_1 < b_1 < a_2$. Estudaremos, agora, o caso em que $0 = a_1 < b_1 < a_2$.

Observação 4.12 *Sejam $a, b \in I\!R$ positivos tais que $a < b$ e $f : [0,b] \longrightarrow I\!R$ uma função contínua satisfazendo $f(0) = 0$, $f(a) = f(b) = 0$ e*

$$\begin{cases} f(s) < 0, & se \quad 0 < s < a, \\ f(s) > 0, & se \quad a < s < b. \end{cases} \tag{4-72}$$

Suponha que o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= f(u) & em \quad \Omega, \\ u &= 0 & em \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{4-73}$$

tem uma solução fraca não-negativa $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tal que $a <\| u \|_\infty \leq b$. Então,

$$\int_0^b f(s)ds \geq 0.$$

Demonstração. Seja $\varepsilon < a$ um número positivo suficientemente pequeno. Defina uma função contínua $g : [0,b] \longrightarrow I\!R$ satisfazendo

$$\begin{cases} g(s) = 1, & \text{se} \quad s = 0 \\ g(s) > 0, & \text{se} \quad 0 < s < \varepsilon \\ f(s) \leq g(s) < 0, & \text{se} \quad \varepsilon < s < a \\ g(s) = f(s), & \text{se} \quad a \leq s \leq b \end{cases} \tag{4-74}$$

e, para cada $n \in I\!N$, suponha que g satisfaz

$$\int_\varepsilon^a g(s)ds < \int_0^a f(s) + \frac{1}{n}. \tag{4-75}$$

Afirmação 1: u é subsolução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= g(u) & \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0 & \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{4-76}$$

De fato, como u é solução fraca do problema (0-3), temos que

$$\int_\Omega | \nabla u |^{p-2} \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f(u) v dx, \quad v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Mas, pela definição de g, para todo $s \in [0,b]$,

$$f(s) \leq g(s),$$

donde

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f(u) v dx \leq \int_\Omega g(u) v dx, \;\; v \in W_0^{1,p}(\Omega) \;\text{ com }\; v \geq 0.$$

Além disso, $u|_{\partial\Omega} = 0$. Logo, u é subsolução fraca do problema (4-76).

Como na observação anterior, vamos considerar $\beta(x) = b$ uma super solução do problema (4-76) e assim este problema tem um par de sub e super soluções $\{u(x), b\}$. Logo, por teoremas de sub e super solução estudados anteriormente, existe uma solução fraca $\widetilde{u} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ do problema (4-76) tal que

$$u \leq \widetilde{u} \leq b, \;\; \text{q.t.p. em } \; \Omega.$$

Como $g(0) > 0$ e como existe uma solução fraca $\widetilde{u}$ de (4-76), tal que, $a < \| \widetilde{u} \|_\infty \leq b$, pelo **Teorema 4.10**, temos que

$$\int_\varepsilon^b g(s) ds > 0. \tag{4-77}$$

Por (4-75) e (4-77), temos que

$$\begin{aligned} \int_0^b f(s) ds + \frac{1}{n} &= \int_0^a f(s) ds + \frac{1}{n} + \int_a^b f(s) ds \\ &> \int_\varepsilon^a g(s) ds + \int_a^b f(s) ds \\ &= \int_\varepsilon^a g(s) ds + \int_a^b g(s) ds \\ &= \int_\varepsilon^b g(s) ds > 0, \end{aligned}$$

isto é,

$$\int_0^b f(s) ds + \frac{1}{n} > 0, \tag{4-78}$$

e, portanto,

$$\int_0^b f(s) ds \geq 0. \tag{4-79}$$

E a observação 4.12 fica demonstrada. □

No caso em que $f(0) = -\infty$, o problema (0-3) é chamado semipositone infinito e foi estudado em 2003 por [14] para o operador laplaciano, no caso em que f é uma função Hölder-contínua positiva em $\overline{\Omega} \times (0, \infty)$, não-decrescente na segunda variável, sub-linear e satisfaz certas condições de crescimento e suavidade. No trabalho em questão, sob certas condições, eles mostram a existência ou não existência de soluções para o problema semipositone considerado. Além disso, o **Teorema 4.10** e a observação 4.12 podem ser usados para provar um de seus resultados principais, no caso em que as funções do sistema semipositone considerado não dependem do valor de x. Em nosso estudo substituímos o problema do tipo laplaciano por um do tipo p-laplaciano e removemos algumas hipóteses sobre condições de crescimento e suavidade, tornando nosso problema um pouco mais geral. O próximo resultado dá uma idéia deste fato para o nosso caso.

Seja $g:[0,\infty)\longrightarrow(0,\infty)$ uma função contínua satisfazendo

$$\lim_{s\longrightarrow 0+} g(s)=\infty,$$

e seja $h:[0,\infty)\longrightarrow[0,\infty)$ uma função contínua. Defina uma função contínua f da seguinte forma

$$f(s)=h(s)-g(s),$$

e suponha que exista um único $s_0>0$, tal que, f satisfaz

$$f(s)=\begin{cases}\leq 0, & \text{se} \quad 0\leq s\leq s_0,\\ \geq 0, & \text{se} \quad s_0\leq s<\infty.\end{cases} \tag{4-80}$$

Observação 4.13 *Se* $\displaystyle\int_0^{s_0} g(s)ds=\infty$*, então, o problema*

$$\begin{cases} -\Delta_p u+g(u) &= & h(u) & em & \Omega,\\ u &> & 0 & em & \Omega,\\ u &= & 0 & em & \partial\Omega,\end{cases} \tag{4-81}$$

não tem solução fraca não-negativa em $L^\infty(\Omega)$.

Demonstração. Suponha, por contradição, que exista uma solução fraca não-negativa u para o problema (4-81) tal que $u\in L^\infty(\Omega)$. Então,

$$M=\| u \|_\infty<\infty.$$

Afirmação 1: $M>s_0$.

De fato, suponha o contrário, isto é, que $M\leq s_0$. Como u é solução fraca de (4-81), temos que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v dx=\int_\Omega (h(u)-g(u))v dx, \quad v\in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Em particular, para $v = u$,

$$\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx = \int_\Omega (h(u) - g(u))u dx. \tag{4-82}$$

Como $M = \| u \|_\infty \leq s_0$, segue que $0 \leq u \leq s_0$, donde $h(u) - g(u) \leq 0$, pois pela definição de f, tem-se $h(s) - g(s) \leq 0$, para todo $0 \leq s \leq s_0$. Logo, por (4-82) e pelo fato de $u > 0$ em Ω, tem-se que

$$0 \leq \int_\Omega |\nabla u|^p\, dx = \int_\Omega (h(u) - g(u))u dx = \int_{M \leq s_0} (h(u) - g(u))u dx \leq 0,$$

donde

$$\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx = 0.$$

Pela desigualdade de Poincaré-Sobolev, existe $c > 0$ constante, tal que,

$$\frac{1}{c}\int_\Omega |u|^p\, dx \leq \int_\Omega |\nabla u|^p\, dx = 0.$$

Logo, $| u | \leq 0$ q.t.p. em Ω, donde $u = 0$ q.t.p. em Ω, o que é impossível, pois contraria as hipóteses do problema (4-81). Portanto, temos que $M > s_0$, como havíamos afirmado anteriormente.

Agora, defina uma função contínua $f : [0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ tal que

$$f(s) = \begin{cases} h(s) - g(s), & \text{se} \quad 0 < s < M, \\ \geq 0, & \text{se} \quad M < s < M+1, \\ 0, & \text{se} \quad M+1 < s, \end{cases} \tag{4-83}$$

e considere uma sequência de funções $(f_n)_{n\in I\!N}$, com $f_n : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$, tais que,

$$\begin{cases} f_n(s) = 0, & \text{se} \quad s = 0, \\ f(s) \leq f_n(s) \leq 0, & \text{se} \quad 0 < s \leq \frac{1}{n}, \\ f_n(s) = f(s), & \text{se} \quad \frac{1}{n} < s < \infty. \end{cases} \tag{4-84}$$

Como $u \leq M$ q.t.p. em Ω (pois $M = \| u \|_\infty$) segue que

Afirmação 2: Para todo $n \in I\!N$, u é subsolução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f_n(u) & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{4-85}$$

De fato, como u é solução fraca do problema (0-3), temos que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f(u) v dx, \quad v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Mas por (4-84) temos, para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $s \in [0,\infty)$, que

$$f(s) \leq f_n(s),$$

donde

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f(u) v dx \leq \int_\Omega f_n(u) v dx, \quad v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Além disso, $u|_{\partial\Omega} = 0$. Portanto, u é subsolução fraca do problema (4-85).

De modo similar ao **Teorema 4.10**, tomaremos $\beta(x) = M+1$ como uma super solução de (4-85). Assim, por teoremas de sub e super solução já estudados, podemos garantir a existência de uma solução fraca $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de (4-85) tal que

$$u \leq u_n \leq M+1, \ \text{ q.t.p. em } \ \Omega.$$

Logo, pela observação 4.12, temos que

$$\int_0^{M+1} f_n(s) ds \geq 0,$$

isto é,

$$\int_0^{s_0} f_n(s) ds + \int_{s_0}^{M+1} f_n(s) ds \geq 0,$$

donde

$$\int_{s_0}^{M+1} f_n(s) ds \geq \int_0^{s_0} -f_n(s) ds.$$

Veja que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{s_0} -f_n(s) ds \leq \int_{s_0}^{M+1} f_n(s) ds = \int_{s_0}^{M+1} f(s) ds.$$

Por outro lado,

$$-f_n(s) \overset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} -f(s) = g(s) - h(s), \ \ \forall s \in (0, s_0).$$

Além disso, note que para todo $s \in (0,s_0)$, $-f_n(s) \geq 0$. Logo, pelo Lema de Fatou (cf. Lema A.2 no Apêndice),

$$\int_0^{s_0} -f(s) ds \leq \liminf_{n\longrightarrow\infty} \int_0^{s_0} -f_n(s) ds.$$

Donde, temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^{s_0}(g(s)-h(s))ds &= \int_0^{s_0} -f(s)ds \\
&\leq \liminf_{n\longrightarrow\infty}\int_0^{s_0} -f_n(s)ds \\
&\leq \liminf_{n\longrightarrow\infty}\int_{s_0}^{M+1} f(s)ds \\
&= \int_{s_0}^{M+1} f(s)ds \\
&= C,
\end{aligned}$$

onde $C=\displaystyle\int_{s_0}^{M+1} f(s)ds<\infty$ é uma constante. Logo,

$$\int_0^{s_0}(g(s)-h(s))ds<\infty,$$

e daí

$$\int_0^{s_0} g(s)ds<\infty,$$

que é um absurdo por hipótese.

Portanto, não existe solução fraca não-negativa $u\in L^\infty(\Omega)$ do problema elíptico quasilinear (4-81). Fica demonstrada a observação 4.13. □

Concluímos aqui este capítulo.

APÊNDICE A

Espaços de Lebesgue e de Sobolev

Neste apêndice vamos apresentar alguns resultados importantes sobre Espaços de Lebesgue e Espaços de Sobolev que foram utilizados com frequência neste trabalho.

Teorema A.1 (Desigualdade de Simmons) *Sejam $x,y \in \mathbb{R}^N$ e $\langle \cdot,\cdot \rangle$ o produto escalar natural em $\mathbb{R}^N$. Então,*

$$\langle | x |^{p-2} x - | y |^{p-2} y, x-y \rangle \geq \begin{cases} c_p | x-y |^p, & se \quad p \geq 2, \\ c_p \dfrac{| x-y |^2}{(| x | + | y |)^{2-p}}, & se \quad 1 \leq p \leq 2. \end{cases} \tag{A-1}$$

Demonstração: (cf. Peral [29], p. 80).

Lema A.2 (Fatou) *Seja (f_n) uma sequência de funções em $L^1(\Omega)$, tais que, $f_n \geq 0$ q.t.p. em Ω, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\sup_n \int_\Omega f_n < \infty$. Se, para todo $x \in \Omega$, $f(x) = \liminf_{n \longrightarrow \infty} f_n(x) \leq +\infty$, então $f \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega f dx \leq \int_\Omega (\liminf_{n \longrightarrow \infty} f_n) dx.$$

Demonstração: (cf. Brézis [4], p. 90).

Teorema A.3 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis satisfazendo:*

(i) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$, q.t.p. em Ω;
(ii) Existe uma função $g \in L^1(\Omega)$, tal que, para todo n, $| f_n(x) | \leq g(x)$, q.t.p. em Ω.

Então, $f \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega f(x) dx = \lim \int_\Omega f_n(x) dx.$$

Demonstração: (cf. Brézis [4], p. 90).

Teorema A.4 *Sejam (f_n) uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$, tais que, $\| f_n - f \|_p \longrightarrow 0$. Então, existe uma subsequência $(f_{n_k}) \subseteq (f_n)$ e uma função $h \in L^p(\Omega)$, tais que,*

(i) $f_{n_k}(x) \longrightarrow f(x)$, q.t.p. em Ω;

(ii) $|\ f_{n_k}(x)\ | \leq h(x)$, $\forall k$, *q.t.p. em* Ω.

Demonstração: (cf. Brézis [4], p. 94).

Teorema A.5 (Teorema da Representação de Riesz) *Seja* $1 < p < \infty$ *e seja* $\phi \in (L^p(\Omega)^*)$. *Então, existe uma única função* $u \in L^{p'}(\Omega)$ *tal que*

$$\langle \phi, f \rangle = \int_\Omega uf dx, \ \ \forall f \in L^p(\Omega).$$

Além disso,

$$\| \ u \ \|_{p'} = \| \ \phi \ \|_{(L^p(\Omega)^*)} \ .$$

Demonstração: (cf. Brézis [4], p. 97).

Teorema A.6 (Desigualdade de Hölder) *Seja* $f \in L^p(\Omega)$ *e* $g \in L^q(\Omega)$ *com* $1 \leq p \leq \infty$. *Então,* $fg \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega |\ fg\ | \ dx \leq \left(\int_\Omega |\ f\ |^p \ dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |\ g\ |^q \ dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Demonstração: (cf. Brézis [4], p.92).

Teorema A.7 (Desigualdade de Poincaré-Sobolev) *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio limitado. Então existe uma constante* $c = c(p)$, *tal que, para todo* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, *tem-se*

$$\int_\Omega |\ u\ |^p \ dx \leq c \int_\Omega |\ \nabla u\ |^p \ dx.$$

Demonstração: (cf. Adams [1], p. 184).

Teorema A.8 (Mudança de Variáveis para Integrais Múltiplas) *Seja* $X \subseteq \mathbb{R}^N$ *um conjunto aberto e* $g : X \longrightarrow \mathbb{R}^N$ *uma função continuamente diferenciável injetiva, tal que,* $det g'(x) \neq 0$ *para todo* $x \in X$. *Se* $f : g(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ *é integrável, então*

$$\int_{g(X)} f dy = \int_X (f \circ g) \mid det g' \mid dx.$$

Demonstração: (cf. Rudin [31], p. 23).

A seguir definiremos o surporte de uma função mensurável. Em primeiro lugar lembramos que se $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua o suporte de u é definido da seguinte forma

$$supp(u) = \overline{\{x \in \Omega; \ \ u(x) \neq 0\}}.$$

Definição A.9 (Suporte de uma função mensurável) *Seja* $\Omega \subseteq I\!R^N$ *um aberto e* $u : \Omega \longrightarrow I\!R$ *uma função mensurável. Definimos o suporte de* u *como sendo*

$$\Omega \setminus \omega,$$

onde

$$\omega = \bigcup_{i \in I} \omega_i$$

sendo $(\omega_i)_{i \in I}$ *a família de todos os abertos de* Ω*, tal que, para cada* $i \in I$*,* $u = 0$ *q.t.p. em* ω_i*.*

Teorema A.10 *Sejam* $u, v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *mensuráveis. Se* $\lambda \in I\!R$ *é não nulo então:*

(i) $supp(u+v) \subset supp(u) \cup supp(v)$.
(ii) $supp(uv) \subset supp(u) \cap supp(v)$.
(iii) $supp(\lambda u) = \lambda supp(u)$.

Demonstração: (cf. Medeiros & Miranda [27], p. 2).

Consideremos $W^{1,p}(\Omega)$, com $1 < p < \infty$, o espaço usual de Sobolev equipado com a norma

$$\| u \|_{1,p} = (\| u \|_p^p + \| \nabla u \|_p^p)^{\frac{1}{p}}$$

e seja $W_0^{1,p}(\Omega)$ o subespaço fechado e convexo de $W^{1,p}(\Omega)$ dado por

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega); u \mid_{\partial\Omega} = 0\}$$

Teorema A.11 (Derivação do Produto) *Sejam* $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *com* $1 \leq p \leq \infty$*. Então,* $uv \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *e*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i \leq N.$$

Demonstração: (cf. Brézis [4], p. 269).

Teorema A.12 (Densidade) *Suponha que* Ω *é de classe* C^1*, e seja* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *com* $1 \leq p < \infty$*. Então, existe uma sequência* (u_n) *de* $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ *tal que* $u_n \mid_\Omega \longrightarrow u$ *em* $W^{1,p}(\Omega)$*. Em outras palavras, a restrição à* Ω *de funções em* $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ *formam um subespaço denso de* $W^{1,p}(\Omega)$

Demonstração: (cf. Brézis [4], p. 27).

Teorema A.13 (Stampacchia) *Seja* $\theta(t)$, $-\infty < t < \infty$, *uma função linear por partes cujas derivadas tem descontinuidades em* $\{a_1, \dots, a_M\}$ *e seja* $u \in W^{1,m}(\Omega)$, $1 \leq m \leq \infty$. *Então.* $\theta(u) \in W^{1,m}(\Omega)$ *e*

$$\theta(u)_{x_i} = \theta'(u)u_{x_i} \ \textit{(no sentido das distribuições)}. \tag{A-2}$$

Além disso, se $\theta(0) = 0$, *tem-se* $\theta(u) \in W_0^{1,m}(\Omega)$. *Em (A-2) ambos os lados são nulos quando* $x \in \bigcup_j \{y; u(y) = a_j\}$. *Em particular,* $u^+, | u | \in W^{1,m}(\Omega)$.

Demonstração: (cf. Kinderlehrer & Stampacchia [18], p. 54).

Lema A.14 *Seja* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *com* $1 \leq p < \infty$ *e assuma que* $supp(u)$ *é um subconjunto compacto de* Ω. *Então,* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração: (cf. Brézis [4], p.288).

Definição A.15 *Dizemos que um dominio* Ω *satisfaz a propriedade do cone se para qualquer* $x \in \Omega$, *existe um cone limitado* C_x, *com vértice em* x, *tal que,* C_x *está inteiramente contido em* Ω.

Definição A.16 *Dizemos que um domínio* Ω *satisfaz a propriedade de lipschitz local se existe uma cobertura localmente finita* O *por abertos* U, *tais que,* $O \cap U$ *são gráficos de funções uniformemente lipschitzianas.*

Teorema A.17 (Imersões Contínuas de Sobolev) *Sejam* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *um domínio satisfazendo a propriedade do cone,* $m \geq 0$ *inteiro e* $1 \leq p < \infty$. *Então, para qualquer* $j \geq 0$ *as imersões abaixo são contínuas:*

(*i*) *Se* $m < \frac{n}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, *onde* $p \leq q \leq \frac{np}{n-mp}$;
(*ii*) *Se* $m = \frac{n}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, *onde* $p \leq q \leq \infty$;
(*iii*) *Se* $\frac{n}{p} < m$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$, *onde* $C_B^j(\Omega) = \{u \in C^j(\Omega); D^\alpha u \in L^\infty(\Omega), | \alpha | \leq j\}$;
(*iv*) *Se* $m - 1 < \frac{n}{p} < m$ *e* Ω *tem a propriedade de lipschitz local, então,*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j+\lambda}(\overline{\Omega}), \ \textit{onde} \ 0 < \lambda \leq m - \frac{n}{p}.$$

Demonstração: (cf. Figueiredo [12], Adams [1]).

Teorema A.18 (Rellich-Kondrachov) *Sejam* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *um domínio satisfazendo a propriedade do cone,* $m \geq 1$ *inteiro e* $1 \leq p < \infty$. *Então, para qualquer* $j \geq 0$ *as imersões abaixo são compactas:*

(i) *Se* $m < \dfrac{n}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, *onde* $1 \leq q \leq \dfrac{np}{n-mp}$;

(ii) *Se* $m = \dfrac{n}{p}$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, *onde* $1 \leq q \leq \infty$;

(iii) *Se* $\dfrac{n}{p} < m$, $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$, *onde e* $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)$, *onde* $1 \leq q \leq \infty$;

(iv) *Se* $\dfrac{n}{p} < m$ *e* Ω *tem a propriedade de lipschitz local, então,*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j(\overline{\Omega}).$$

(v) *Se* $m-1 < \dfrac{n}{p} < m$ *e* Ω *tem a propriedade de lipschitz local, então,*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j+\lambda}(\overline{\Omega}), \quad onde \quad 0 < \lambda \leq m - \frac{n}{p}.$$

Em particular, se $n = (m-1)p$, *então,* $W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{j+\lambda}(\overline{\Omega})$, *para* $0 < \lambda < 1$.

Demonstração: (cf. Figueiredo [12], Adams [1]).

APÊNDICE B

Equações Lineares e Quasilineares

Neste apêndice apresentamos alguns resultados sobre EDP e Equações Lineares e Quasilineares que utilizamos frequêntemente durante a elaboração deste trabalho.

Teorema B.1 (do Divergente) *Sejam $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ n funções C^1, definidas em uma vizinhança aberta O de $\overline{\Omega}$ tomando valores em $\mathbb{C}$; seja $\varphi(x)=(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x))$. Temos*

$$\int_\Omega div\varphi dx = \int_{\partial\Omega} \varphi\cdot\nu d\sigma.$$

Demonstração: (cf. Treves [36], p. 78).

Teorema B.2 (Idêntidades de Green) *Sejam $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ um domínio onde vale o Teorema do Divergente e $u,v\in C^2(\Omega)$. Então, valem as seguintes idêntidades*

$$\int_\Omega u\Delta v dx = -\int_\Omega \nabla u\nabla v dx + \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial\nu}d\sigma$$

e

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)dx = \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial\nu} - v\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)d\sigma.$$

Demonstração: (cf. Folland [13], p. 69).

Teorema B.3 (Princípio do Máximo Forte) *Se $u\in C^2(\Omega)\bigcap C(\overline{\Omega})$ satisfaz*

$$\begin{cases} -\Delta u = f\geq 0 & em \quad \Omega, \\ u = 0 & em \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{B-1}$$

então, $u\geq 0$ em Ω.

Demonstração: (cf. Han & Lin [16], p. 28).

Teorema B.4 *Seja $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ um domínio de classe C^1. Se $f\in L^p(\Omega)$ e $\varphi\in W^{2,p}(\Omega)$, $1<p<\infty$, então, o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & em \quad \Omega, \\ u = \varphi & em \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{B-2}$$

tem uma única solução $u \in W^{2,p}(\Omega)$.

Demonstração: (cf. Gilbarg & Trudinger [15], p. 241).

Teorema B.5 *Suponha que as hipóteses do Teorema B.4 sejam satisfeitas. Então, existe uma constante* $c > 0$*, tal que,*

$$\| u \|_{2,p} \leq c \| u \|_p,$$

para todo $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração: (cf. Gilbarg & Trudinger [15], p. 241).

Teorema B.6 (Schauder) *Suponha que* $\Omega \in C^{2,\alpha}$ *é um domínio limitado com* $0 < \alpha < 1$. *Então, para todo* $f \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$*, existe uma única solução* $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ *do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= f \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{B-3}$$

Além disso, se $\Omega \in C^{m+2,\alpha}$ *(*$m \geq 1$ *inteiro) e se* $f \in C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$*, então*

$$u \in C^{m+2,\alpha}(\overline{\Omega}) \ \ e \ \ \| u \|_{C^{m+2,\alpha}} \leq c \| f \|_{C^{m,\alpha}} .$$

Demonstração: (cf. Brézis [4] p. 317).

Teorema B.7 (Vázquez) *Seja* $u \in C^1(\Omega)$*, tal que,* $\Delta_p u \in L^2_{loc}(\Omega)$*,* $u \geq 0$ *q.t.p. em* Ω*,* $\Delta_p u \leq g(u)$ *q.t.p. em* Ω *com* $g : [0,\infty) \longrightarrow I\!R$ *contínua, não-decrescente,* $g(0) = 0$ *e* $g(s) = 0$ *para algum* $s > 0$ *ou* $g(s) > 0$*, para todo* $s > 0$*. Então, u não é idênticamente nula em* Ω *e* $u > 0$ *em todo* Ω*.*
Além disso, se $u \in C^1(\Omega \cup \{x_0\})$ *para* $x_0 \in \partial\Omega$*,* Ω *satisfaz a condição da esfera interior e* $u(x_0) = 0$*, então*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0.$$

Demonstração: (cf. Vázquez [37], p. 200).

Lema B.8 (Hopf) *Seja* $\Omega \subset I\!R^N$ *um domínio limitado com fronteira* $\partial\Omega$ *suave. Seja* $u \in C^1(\overline{\Omega})$ *satisfazendo*

$$\begin{cases} -div(| \nabla u |^{p-2} \nabla u) &\geq 0 \quad \text{em} \quad \Omega \quad \text{(Sentido Fraco)}, \\ u &> 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{B-4}$$

Então, $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0$ *para* $x_0 \in \partial\Omega$*, onde* ν *denota o vetor normal unitário exterior à* $\partial\Omega$*.*

Demonstração: (cf. Sakaguchi [32], p. 417).

Lema B.9 *Seja $\Omega \subset I\!R^N$ um domínio limitado e suponha que existam $r > 0$ e $y \in \Omega$, tal que, $\overline{B} = \overline{B}_r(y) \subset \Omega$. Para dado $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno, defina em B a função*

$$b(x) = \varepsilon(e^{-|\frac{x-y}{r}|^2} - e^{-1}).$$

Então,

$$div(|\nabla b(x)|^{p-2}\nabla b(x)) = \varepsilon^{p-1}\left(\frac{2}{r^2}\right)^{p-1} e^{-(p-1)|\frac{x-y}{r}|^2} |x-y|^{p-2} (c\,|x-y|^2 - N),$$

onde $c = c(p,r)$ é uma constante. Além disso, para ε suficientemente pequeno, temos que

$$|\, div(|\nabla b(x)|^{p-2}\nabla b(x))\,| \leq \gamma,$$

onde γ é a constante dada no Lema 4.7.

Demonstração. Primeiramente, veja que as derivadas parciais de b são dadas por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial b}{\partial x_i}(x) &= -\varepsilon e^{-|\frac{x-y}{r}|^2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\frac{x-y}{r}|^2\right)\\
&= -\varepsilon e^{-|\frac{x-y}{r}|^2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{i=1}^N\left(\frac{x^i-y^i}{r}\right)^2\right)\\
&= -\varepsilon e^{-|\frac{x-y}{r}|^2}\sum_{i=1}^N\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x^i-y^i}{r}\right)^2\\
&= -\varepsilon e^{-|\frac{x-y}{r}|^2}2\frac{x^i-y^i}{r}\frac{1}{r}\\
&= -\frac{2\varepsilon}{r^2}e^{-|\frac{x-y}{r}|^2}(x^i-y^i).
\end{aligned}$$

Daí, temos que

$$\begin{aligned}
\nabla b(x) &= -\frac{2\varepsilon}{r^2}e^{-|\frac{x-y}{r}|^2}(x^1-y^1,\ldots,x^N-y^N)\\
&= -\frac{2\varepsilon}{r^2}e^{-|\frac{x-y}{r}|^2}(x-y)
\end{aligned}$$

e veja que

$$|\nabla b(x)| = \frac{2\varepsilon}{r^2}e^{-|\frac{x-y}{r}|^2}|x-y|\,.$$

Logo,

$$|\nabla b(x)|^{p-2} = \left(\frac{2\varepsilon}{r^2}\right)^{p-2} e^{-(p-2)|\frac{x-y}{r}|^2}|x-y|^{p-2}$$

e daí, temos que

$$| \nabla b(x) |^{p-2} \nabla b(x) = -\left(\frac{2\varepsilon}{r^2}\right)^{p-1} e^{-(p-1)|\frac{x-y}{r}|^2} | x-y |^{p-2} (x-y).$$

Agora, veja que

$$div(| \nabla b(x) |^{p-2} \nabla b(x)) = -\left(\frac{2\varepsilon}{r^2}\right)^{p-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\left(e^{-(p-1)|\frac{x-y}{r}|^2} | x-y |^{p-2} (x^1-y^1)\right) + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{\partial}{\partial x_N}\left(e^{-(p-1)|\frac{x-y}{r}|^2} | x-y |^{p-2} (x^N-y^N)\right)\right).$$

Observe que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(e^{-(p-1)|\frac{x-y}{r}|^2} | x-y |^{p-2} (x^i-y^i)\right) = -e^{-(p-1)|\frac{x-y}{r}|^2} | x-y |^{p-2} (c(x^i-y^i)^2-1),$$

onde a constante c em questão é dada por $c = \frac{2(p-1)}{r^2} - (p-2)$. Logo, temos que

$$\begin{aligned} div(| \nabla b(x) |^{p-2} \nabla b(x)) &= -\left(\frac{2\varepsilon}{r^2}\right)^{p-1} \left(-e^{-(p-1)|\frac{x-y}{r}|^2} | x-y |^{p-2} \left(c\sum_{i=1}^{N}(x^i-y^i)^2-N\right)\right) \\ &= \left(\frac{2\varepsilon}{r^2}\right)^{p-1} e^{-(p-1)|\frac{x-y}{r}|^2} | x-y |^{p-2} \left(c\, | x-y |^2 -N\right) \\ &= \varepsilon^{p-1}\left(\frac{2}{r^2}\right)^{p-1} e^{-(p-1)|\frac{x-y}{r}|^2} | x-y |^{p-2} (c\, | x-y |^2 -N) \end{aligned}$$

E provamos a primeira parte do lema.

Para provar a segunda parte do lema veja que, pelo fato de Ω ser limitado, $\overline{B}$ é compacto. Além disso, a função

$$x \xmapsto{G} \left(\frac{2}{r^2}\right)^{p-1} e^{-(p-1)|\frac{x-y}{r}|^2} | x-y |^{p-2} (c\, | x-y |^2 -N)$$

é contínua em $\overline{B}$. Como $\overline{B}$ é compacto e G é contínua em $\overline{B}$, segue que G é limitada e para ε suficientemente pequeno, temos que

$$| \varepsilon^{p-1} G(x) | \leq \gamma, \;\; \forall x \in B,$$

Pelo que expomos acima, obtemos

$$div(|\nabla b(x)|^{p-2}\nabla b(x)) = \varepsilon^{p-1}G(x), \ \ \forall x \in B,$$

para ε suficientemente pequeno, e daí, tem-se que

$$|\, div(|\nabla b(x)|^{p-2}\nabla b(x))\,| \leq \gamma,$$

e temos o desejado. $\square$

APÊNDICE C

Minimização de Funcionais Energia

Neste apêndice estudaremos a regularidade dos funcionais energia que aparecem neste trabalho. Consideramos dois casos:

Caso 1: A função $f:[0,\infty)\longrightarrow I\!R$ é contínua e $1<p<\infty$.

Caso 2: A função $f:[0,\infty)\longrightarrow I\!R$ é C^1 e $p=2$.

Observamos que no Caso 1 a função truncada f_k é contínua e no Caso 2 a função truncada f_k é C^1.

Estudo do Caso 1:

Lema C.1 *Suponha que $f:[0,\infty)\longrightarrow I\!R$ é contínua e $1<p<\infty$. Então o funcional*

$$\Phi_k(\lambda,u)=\frac{1}{p}\parallel u\parallel_{1,p}^p-\lambda\int_\Omega F_k(u)dx,\ \ u\in W_0^{1,p}(\Omega),$$

pertence a $C^1(W_0^{1,p}(\Omega),I\!R)$ e sua derivada de Fréchet é dada por

$$\langle\Phi_k'(\lambda,u),v\rangle=\int_\Omega|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v dx-\lambda\int_\Omega f_k(u)v dx,\ \ u,v\in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração. De fato, pela definição da derivada de Fréchet, temos que

$$\langle\Phi_k'(\lambda,u),v\rangle=\lim_{t\longrightarrow 0}\frac{\Phi_k(\lambda,u+tv)-\Phi_k(\lambda,u)}{t}.$$

Veja que,

$$\Phi_k(\lambda,u+tv)-\Phi_k(\lambda,u)\ =\ \frac{1}{p}\int_\Omega(|\nabla(u+tv)|^p-|\nabla u|^p)dx-\lambda\int_\Omega(F_k(u+tv)-F_k(u))dx$$

donde

$$\frac{\Phi_k(\lambda,u+tv)-\Phi_k(\lambda,u)}{t} = \frac{1}{p}\int_\Omega \frac{|\nabla(u+tv)|^p - |\nabla u|^p}{t}dx - \lambda\int_\Omega \frac{F_k(u+tv)-F_k(u)}{t}dx$$

Agora, defina $\phi : [0,t] \longrightarrow I\!R$ por

$$\phi(s) = |\nabla(u+sv)|^p .$$

Veja que, f é diferenciálvel em $[0,t]$ e tem derivadas dadas por

$$\phi^{'}(s) = p\,|\nabla(u+sv)|^{p-1}\frac{\nabla(u+sv)}{|\nabla(u+sv)|}\nabla v = p\,|\nabla(u+sv)|^{p-2}\nabla(u+sv)\nabla v$$

Como ϕ é contínua, pelo Teorema do Valor Médio, existe $c = c(t)$, com $\min\{0,t\} \le c \le \max\{0,t\}$, tal que,

$$\phi(t)-\phi(0) = \phi^{'}(c)t.$$

donde, temos que

$$|\nabla(u+tv)|^p - |\nabla u|^p = (p\,|\nabla(u+cv)|^{p-2}\nabla(u+cv)\nabla v)t,$$

e daí

$$\frac{|\nabla(u+tv)|^p - |\nabla u|^p}{t} = p\,|\nabla(u+cv)|^{p-2}\nabla(u+cv)\nabla v. \qquad \text{(C-1)}$$

Veja que $c \longrightarrow 0$ quando $t \longrightarrow 0$, logo temos que $\nabla(u+cv) \longrightarrow \nabla u$ q.t.p. em Ω. Além disso,

$$|\nabla(u+cv)| \le |\nabla u| + |c||\nabla v|,$$

onde $h = |\nabla u| + |c||\nabla v|$ é uma função em $L^p(\Omega)$. Daí,

$$p\,|\nabla(u+cv)|^{p-2}\nabla(u+cv)\nabla v \longrightarrow p\,|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v, \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega$$

e

$$|\,p\,|\nabla(u+cv)|^{p-2}\nabla(u+cv)\nabla v\,| = p\,|\nabla(u+cv)|^{p-1}|\nabla v| \le ph^{p-1}|\nabla v| \in L^1(\Omega),$$

donde, pelo Teorema de Lebesgue

$$\int_\Omega p\,|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v dx = \lim_{t\longrightarrow 0}\int_\Omega p\,|\nabla(u+cv)|^{p-2}\nabla(u+cv)\nabla v dx.$$

Agora, defina $\varphi : [0,t] \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\varphi(s) = F_k(u+sv).$$

Veja que φ é diferenciável em $[0,t]$ e tem derivadas dadas por

$$\varphi^{'}(s) = F_k^{'}(u+sv)v = f_k(u+sv)v.$$

Como φ é contínua, pelo Teorema do Valor Médio, existe $c_0 = c_0(t)$, com $\min\{0,t\} \leq c_0 \leq \max\{0,t\}$ tal que

$$\varphi(t) - \varphi(0) = \varphi^{'}(c_0)t,$$

donde, temos que

$$F_k(u+tv) - F_k(u) = f_k(u+c_0)tv,$$

e daí

$$\frac{F_k(u+tv) - F_k(u)}{t} = f_k(u+c_0)v. \tag{C-2}$$

Veja que $c_0 \longrightarrow 0$ quando $t \longrightarrow 0$ logo, pela continuidade de f_k, temos que

$$f_k(u+c_0v)v \longrightarrow f_k(u)v, \quad \text{q.t.p. em} \quad \Omega,$$

e como f_k é limitada, existe $M > 0$ constante tal que

$$| f_k(u+c_0v)v | \leq M | v | \in L^p(\Omega).$$

Novamente pelo Teorema de Lebesgue,

$$\int_\Omega f_k(u)vdx = \lim_{t \longrightarrow 0} \int_\Omega f_k(u+c_0v)vdx.$$

Logo de (C-1) e (C-2), temos que

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_k(\lambda,u+tv) - \Phi_k(\lambda,u)}{t} &= \frac{1}{p} \int_\Omega p \mid \nabla(u+cv) \mid^{p-2} \nabla(u+cv)\nabla v dx - \lambda \int_\Omega f_k(u+c_0v)vdx \\ &= \int_\Omega \mid \nabla(u+cv) \mid^{p-2} \nabla(u+cv)\nabla v - \lambda \int_\Omega f_k(u+c_0v)vdx \end{aligned}$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\langle \Phi_k(\lambda,u),v\rangle &= \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{\Phi_k(\lambda,u+tv)-\Phi_k(\lambda,u)}{t}\\
&= \lim_{t\longrightarrow 0}\left(\int_\Omega |\nabla(u+cv)|^{p-2}\nabla(u+cv)\nabla v dx-\lambda\int_\Omega f_k(u+c_0v)v dx\right)\\
&= \lim_{t\longrightarrow 0}\int_\Omega |\nabla(u+cv)|^{p-2}\nabla(u+cv)\nabla v dx-\lambda\lim_{t\longrightarrow 0}\int_\Omega f_k(u+c_0v)v dx\\
&= \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v dx-\lambda\int_\Omega f_k(u)v dx,
\end{aligned}
$$

para todo $u,v\in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Mostraremos agora que $\Phi_k(\lambda,\cdot)\in C^1(W_0^{1,p}(\Omega),\mathbb{R})$. Para isto, basta mostrar que $\Phi_k^{'}(\lambda,\cdot)$ é contínua de $W_0^{1,p}(\Omega)$ em $(W_0^{1,p}(\Omega))^*$. Então, seja $(u_n)\subset W_0^{1,p}(\Omega)$ uma sequência, tal que,

$$u_n\longrightarrow u, \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega),$$

e mostraremos que

$$\Phi_k^{'}(\lambda,u_n)\longrightarrow \Phi_k^{'}(\lambda,u), \text{ em } (W_0^{1,p}(\Omega))^*,$$

isto é, que

$$\| \Phi_k^{'}(\lambda,u_n)-\Phi_k^{'}(\lambda,u)\|_{(W_0^{1,p}(\Omega))^*}\longrightarrow 0,$$

onde

$$\| \Phi_k^{'}(\lambda,u_n)-\Phi_k^{'}(\lambda,u)\|_{(W_0^{1,p}(\Omega))^*}=\sup_{\|v\|_{1,p}\le 1}|\langle \Phi_k^{'}(\lambda,u_n)-\Phi_k^{'}(\lambda,u),v\rangle|, \ \ u,v\in W_0^{1,p}(\Omega).$$

De fato, como $u_n\longrightarrow u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e $W_0^{1,p}(\Omega)\overset{cpt}{\hookrightarrow} L^p(\Omega)$, tem-se que $u_n\longrightarrow u$ em $L^p(\Omega)$, donde por resultados de Teoria da Medida, existe uma subsequência $(u_{n_j})\subseteq(u_n)$ e uma função $h\in L^p(\Omega)$, tal que,

$$u_{n_j}\longrightarrow u \text{ q.t.p. em } \Omega \text{ e } |u_{n_j}|\le h, \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Agora, do fato de f_k ser uma função Carathéodory, tem-se que

$$f_k(u_{n_j})\longrightarrow f_k(u), \text{ q.t.p. em } \Omega,$$

donde

$$(f_k(u_{n_j})-f_k(u))v\longrightarrow 0, \text{ q.t.p. em } \Omega, \ v\in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Além disso, como f_k é limitada, existe $a > 0$ constante, tal que, $| f_k(s) | \leq a$, para todo $s \in \mathbb{R}$. Daí,

$$| (f_k(u_{n_j}) - f_k(u))v | \leq (| f_k(u_{n_j}) | + | f_k(u) |) | v | \leq 2a | v |,$$

onde $2a | v | \in L^p(\Omega)$. Logo, pelo Teorema de Lebesgue,

$$\int_\Omega (f_k(u_{n_j}) - f_k(u))vdx \longrightarrow 0.$$

Agora, como $u_n \longrightarrow u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$, tem-se que $\nabla u_n \longrightarrow \nabla u$ em $L^p(\Omega)$, donde por resultados de Teoria da Medida, existe uma subsequência $(u_{n_j}) \subseteq (u_n)$ e uma função $\overline{h} \in L^p(\Omega)$, tal que,

$$\nabla u_{n_j} \longrightarrow \nabla u \ \text{ q.t.p. em } \ \Omega \ \text{ e } \ | \nabla u_{n_j} | \leq h, \ \text{ q.t.p. em } \ \Omega.$$

Daí, temos que

$$| \nabla u_{n_j} |^{p-2} \nabla u_{n_j} \nabla v \longrightarrow | \nabla u |^{p-2} \nabla u \nabla v, \ \text{ q.t.p. em } \ \Omega,$$

donde

$$| \nabla u_{n_j} |^{p-2} \nabla u_{n_j} \nabla v - | \nabla u |^{p-2} \nabla u \nabla v \longrightarrow 0, \ \text{ q.t.p. em } \ \Omega.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} || \nabla u_{n_j} |^{p-2} \nabla u_{n_j} \nabla v - | \nabla u |^{p-2} \nabla u \nabla v | &\leq | \nabla u_{n_j} |^{p-1} | \nabla v | + | \nabla u |^{p-1} | \nabla v | \\ &\leq h^{p-1} | \nabla v | + | \nabla u |^{p-1} | \nabla v |, \end{aligned}$$

onde $h^{p-1} | \nabla v | + | \nabla u |^{p-1} | \nabla v | \in L^1(\Omega)$. Novamente pelo Teorema de Lebesgue,

$$\int_\Omega (| \nabla u_{n_j} |^{p-2} \nabla u_{n_j} \nabla v - | \nabla u |^{p-2} \nabla u \nabla v)dx \longrightarrow 0.$$

Veja que

$$\begin{aligned} \langle \Phi_k'(\lambda, u_{n_j}) - \Phi_k'(\lambda, u), v \rangle &= \langle \Phi_k'(\lambda, u_{n_j}), v \rangle - \langle \Phi_k'(\lambda, u), v \rangle \\ &= \int_\Omega | \nabla u_{n_j} |^{p-2} \nabla u_{n_j} \nabla v dx - \lambda \int_\Omega f_k(u_{n_j}) v dx - \\ &\quad \int_\Omega | \nabla u |^{p-2} \nabla u \nabla v dx + \lambda \int_\Omega f_k(u) v dx \\ &= \left(\int_\Omega | \nabla u_{n_j} |^{p-2} \nabla u_{n_j} \nabla v dx - \int_\Omega | \nabla u |^{p-2} \nabla u \nabla v dx \right) - \\ &\quad \lambda \left(\int_\Omega (f_k(u_{n_j}) - f_k(u)) v dx \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= & \int_\Omega (|\nabla u_{n_j}|^{p-2}\nabla u_{n_j}\nabla v - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v)dx - \\
& \lambda\int_\Omega (f_k(u_{n_j}) - f_k(u))v dx
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
\sup_{\|v\|_{1,p}\leq 1} |\langle \Phi_k'(\lambda,u_{n_j}) - \Phi_k'(\lambda,u),v\rangle| &= \int_\Omega (|\nabla u_{n_j}|^{p-2}\nabla u_{n_j}\nabla v - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v)dx - \\
& \lambda\int_\Omega (f_k(u_{n_j}) - f_k(u))v dx \longrightarrow 0,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
\| \Phi_k'(\lambda,u_{n_j}) - \Phi_k'(\lambda,u)\|_{(W_0^{1,p}(\Omega))^*} \longrightarrow 0,
$$

ou seja, $\Phi_k'(\lambda,u_{n_j}) \longrightarrow \Phi_k'(\lambda,u)$ em $(W_0^{1,p}(\Omega))^*$, donde $\Phi_k'(\lambda,\cdot)$ é contínua e, portanto, $\Phi_k(\lambda,\cdot)\in C^1(W_0^{1,p}(\Omega),\mathbb{R})$. Fica provado o Lema C.1. $\square$

Estudo do Caso 2:

Lema C.2 *Suponha que $f:[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ pertence à C^1 e $p=2$. Então o funcional*

$$
\Phi_k(\lambda,u) = \frac{1}{2}\|u\|_H^2 - \lambda\int_\Omega F_k(u)dx, \quad u\in H,
$$

pertence à $C^2(H,\mathbb{R})$ e sua derivada de Fréchet é dada por

$$
\langle \Phi_k'(\lambda,u),v\rangle = \int_\Omega \nabla u\nabla v dx - \int_\Omega f_k(u)v dx, \quad u,v\in H.
$$

Demonstração. De fato, sabemos que

$$
\langle \Phi_k'(\lambda,u),v\rangle = \lim_{t\longrightarrow 0}\frac{\Phi_k(\lambda,u+tv)-\Phi_k(\lambda,u)}{t}. \tag{C-3}
$$

Logo, para todo $u,v\in H$, temos que

$$
\begin{aligned}
\Phi_k(\lambda,u+tv)-\Phi_k(\lambda,u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla(u+tv)|^2 - |\nabla u|^2)dx - \lambda\int_\Omega (F_k(u+tv)-F_k(u))dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega (2t\nabla u\nabla v + t^2|\nabla v|^2)dx - \lambda\int_\Omega (F_k(u+tv)-F_k(u))dx \\
&= t\int_\Omega \nabla u\nabla v dx + \frac{t^2}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \lambda\int_\Omega (F_k(u+tv)-F_k(u))dx
\end{aligned}
$$

daí, vemos que

$$
\frac{\Phi_k(\lambda,u+tv)-\Phi_k(\lambda,u)}{t} = \int_\Omega\left(\nabla u\nabla v + \frac{t}{2}|\nabla v|^2 - \lambda\frac{(F_k(u+tv)-F_k(u))}{t}\right)dx.
$$

Defina a aplicação $\theta : [0,t] \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\theta(s) = F_k(u+sv), \ \ \forall s \in [0,t],$$

e como θ é contínua, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, existe $\min\{0,t\} \leq c \leq \max\{0,t\}$ tal que

$$\theta(t) - \theta(0) = \theta^{'}(c)t,$$

isto é,

$$F_k(u+tv) - F_k(u) = F'{}_k(u+cv)tv = f_k(u+cv)tv,$$

logo, temos que

$$\frac{F_k(u+tv) - F_k(u)}{t} = f_k(u+cv)v. \tag{C-4}$$

Veja que $c \longrightarrow 0$, quando $t \longrightarrow 0$, logo

$$f_k(u+cv)v \overset{t\longrightarrow 0}{\longrightarrow} f_k(u)v.$$

Por outro lado, como f_k é limitada segue que existe $a > 0$ constante, tal que,

$$| f_k(u+cv) || v | \leq a | v | \in L^2(\Omega).$$

Logo, pelo Teorema de Lebesgue, temos que

$$\int_\Omega f_k(u)vdx = \lim_{t\longrightarrow 0} \int_\Omega f(u+cv)vdx,$$

e daí,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\longrightarrow 0} \frac{\Phi_k^{'}(\lambda, u+tv) - \Phi_k^{'}(\lambda, u)}{t} &= \lim_{t\longrightarrow 0} \int_\Omega \left(\nabla u \nabla v + \frac{t}{2} | \nabla v |^2 - \lambda \frac{F_k(u+tv) - F_k(u)}{t} \right) dx \\
&= \lim_{t\longrightarrow 0} \int_\Omega \left(\nabla u \nabla v + \frac{t}{2} | \nabla v |^2 - \lambda f_k(u+cv)v \right) dx \\
&= \lim_{t\longrightarrow 0} \left(\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \frac{t}{2} \int_\Omega | \nabla v |^2 dx - \lambda \int_\Omega f_k(u+cv)vdx \right) \\
&= \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_\Omega f_k(u)vdx.
\end{aligned}$$

E, portanto, por (C-3)

$$\langle \Phi_k^{'}(\lambda, u), v \rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_\Omega f_k(u)vdx.$$

Veja que, pelas condições que foram impostas sobre as aplicações $u, v \in H$ e pelo fato de que função f_k é de classe C^1 de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, temos que cada integral da expressão acima de uma função de classe C^1, logo temos que $\Phi_k'(\lambda,\cdot) \in C^1(H,H^*)$ e, portanto, $\Phi_k(\lambda,\cdot) \in C^2(H,\mathbb{R})$, o que demonstra o Lema C.1. $\square$

O seguinte lema mostra que o operador Φ_k' pode ser escrito da forma $I-$ $compacto$.

Lema C.3 *Seja $f:[0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ pertencente à C^1 e $p=2$. Então*

$$\Phi_k'(\lambda,\cdot) = I - T_k.$$

onde I é o operador identidade em H e $T_k : H \longrightarrow H$ é um operador compacto.

Demonstração. De fato, pelo Lema C.2, a derivada de Fréchet do funcional $\Phi_k'(\lambda,\cdot)$ é dada por

$$\begin{aligned} \langle \Phi_k'(\lambda,u),v\rangle &= \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \lambda \int_\Omega f_k(u) v dx && \text{(C-5)} \\ &= \langle u,v\rangle_H - \lambda \int_\Omega f_k(u) v dx, \quad u,v\in H. && \text{(C-6)} \end{aligned}$$

Para cada $u \in H$ fixado, defina o funcional $T_k(u) : H \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\langle T_k(u),v\rangle_H = \int_\Omega f_k(u) v dx, \quad v \in H. \tag{C-7}$$

Afirmamos que $T_k(u) \in H^*$. De fato, $T_k(u)$ é linear, pois

$$\langle T_k(u), av+bw\rangle_H = a\langle T_k(u),v\rangle_H + b\langle T_k(u),w\rangle_H,$$

e, além disso, como f_k é limitada existe $a>0$ constante, tal que, $| f_k(s) | \leq a$, donde

$$\begin{aligned} |\langle T_k(u),v\rangle| &\leq \int_\Omega | f_k(u) || v | dx \\ &\leq \int_\Omega a | v | dx \\ &= a\int_\Omega | v | .1 dx \\ &\leq a\left(\int_\Omega | v |^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega 1^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= a \| v \|_2 | \Omega |^{\frac{1}{2}} \\ &\leq ac | \Omega |^{\frac{1}{2}} \| v \|_H, && \text{(C-8)} \end{aligned}$$

onde c é a constante da desigualdade de Poincaré e, portanto, o funcional $T_k(u) : H \longrightarrow H^*$ é linear e continuo, isto é, $T_k(u) \in H^*$.

Pelo Teorema da Representação de Riesz, existe uma única aplicação $u \overset{T_k}{\mapsto} T_k(u)$, tal que, (C-7) é satisfeita. Logo, por (C-5), temos que

$$\langle \Phi_k^{'}(\lambda, u), v\rangle_H = \langle u, v\rangle_H - \langle T_k(u), v\rangle_H, \ \ u, v \in H,$$

donde

$$\Phi_k^{'}(\lambda, u) = u - T_k(u),$$

ou seja, $\Phi_k^{'}(\lambda, \cdot) = I - T_k$.

Afirmamos que T_k é compacto.

De fato, seja (u_n) uma sequência limitada em H, tal que, $u_n \overset{H}{\longrightarrow} u$. Vamos mostrar que existe uma subsequência $(u_{n_j}) \subseteq (u_n)$, tal que,

$$T_k(u_{n_j}) \longrightarrow T_k(u).$$

Veja que, como $H \overset{cpt}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$, teremos $u_n \overset{L^2(\Omega)}{\longrightarrow} u$, donde pelo Teorema A.4 existe uma subsequência $(u_{n_j}) \subseteq (u_n)$ e uma função $h \in L^2(\Omega)$, tal que,

$$u_{n_j} \longrightarrow u, \ \ \text{q.t.p. em } \ \Omega \ \ \text{e} \ \ | u_{n_j} | \leq h, \ \ \text{q.t.p. em } \ \Omega.$$

Pela continuidade da função f_k, temos que

$$f_k(u_{n_j}) \longrightarrow f_k(u), \ \ \text{q.t.p em } \ \Omega,$$

donde

$$| f_k(u_{n_j}) - f_k(u) |^2 \longrightarrow 0, \ \ \text{q.t.p em } \ \Omega.$$

Além disso, como f_k é limitada, segue que existe uma constante $a > 0$, tal que,

$$| f_k(u_{n_j}) - f_k(u) | \leq | f_k(u_{n_j}) | + | f_k(u_n) | \leq 2a,$$

donde

$$| f_k(u_{n_j}) - f_k(u) |^2 \leq 4a^2.$$

Daí, pelo Teorema de Lebesgue

$$\int_\Omega | f_k(u_{n_j}) - f_k(u) |^2 \, dx \longrightarrow 0,$$

isto é,

$$\| f_k(u_{n_j}) - f_k(u) \|_2 \longrightarrow 0. \tag{C-9}$$

Com isso, temos que pelas desigualdades de Holder e Poincaré

$$\begin{aligned} | \langle T_k(u_{n_j}) - T_k(u), v \rangle | &\leq \int_\Omega | f_k(u_{n_j}) - f_k(u) || v | \, dx \\ &\leq \| f_k(u_{n_j}) - f_k(u) \|_2 \| v \|_2 \\ &\leq c \| f_k(u_{n_j}) - f_k(u) \|_2 \| v \|_H \end{aligned}$$

donde, vemos que

$$\sup_{\|v\|_H \leq 1} | \langle T_k(u_{n_j}) - T_k(u), v \rangle | \leq c \| f_k(u_{n_j}) - f_k(u) \|_2,$$

e por (C-9), tem-se que

$$\sup_{\|v\|_H \leq 1} | \langle T_k(u_{n_j}) - T_k(u), v \rangle | \longrightarrow 0.$$

Como

$$\| T_k(u_{n_j}) - T_k(u) \|_{H'} = \sup_{\|v\|_H \leq 1} | \langle T_k(u_{n_j}) - T_k(u), v \rangle |$$

segue que

$$\| T_k(u_{n_j}) - T_k(u) \|_{H^*} \longrightarrow 0,$$

donde

$$T_k(u_{n_j}) \longrightarrow T_k(u), \quad u \in H,$$

e, portanto, T_k é um operador compacto. □

APÊNDICE D

Operadores de Tipo Monotônico

Definição D.1 (Convergência Fraca) *Seja X um espaço vetorial normado e $(x_n) \subseteq X$ uma sequência. Dizemos que (x_n) converge fraco em X se existe $x \in X$, tal que,*

$$\langle f, x_n \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle, \quad \forall f \in X^*.$$

Assim, x é o limite fraco de (x_n) e denotamos esta convergência por $x_n \rightharpoonup x$.

Teorema D.2 *Seja X um espaço de Banach reflexivo e (x_n) uma sequência limitada em X. Então, existe uma subsequência $(x_{n_j}) \subseteq (x_n)$ e $x \in X$, tal que,*

$$x_{n_j} \rightharpoonup x. \ \ em \ \ X.$$

Demonstração: (cf. Brézis [4], p. 69).

Teorema D.3 *Seja E um espaço de Banach e (x_n) uma sequência em E. Então,*

(i) $x_n \rightharpoonup x$ *em* $\sigma(E, E^*)$ *se, e somente se,* $\langle f, x_n \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle$, $\forall f \in E^*$.

(ii) *Se* $x_n \longrightarrow x$, *então* $x_n \rightharpoonup x$ *em* $\sigma(E, E^*)$.

(iii) *Se* $x_n \rightharpoonup x$ *em* $\sigma(E, E^*)$, *então* $(\| x_n \|)$ *é limitada e* $\| x \| \leq \liminf \| x_n \|$.

(iv) *Se* $x_n \rightharpoonup x$ *em* $\sigma(E, E^*)$ *e* $f_n \longrightarrow f$ *em* E^* *(isto é,* $\| f_n - f \|_{E^*} \longrightarrow 0$*), então* $\langle f_n, x_n \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle$.

Demonstração: (cf. Brézis [4], p.58).

A seguir enunciaremos algumas definições e teoremas importantes sobre operadores monotônicos que foram utilizados ao longo do texto.

Definição D.4 *Seja X um espaço de Banach real reflexivo e $A : X \longrightarrow X^*$ um operador. O operador A é pseudomonotônico se, e somente se, $u_n \rightharpoonup u$ e $\limsup_{n \longrightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - u \rangle \leq 0$ implica em $Au_n \rightharpoonup Au$ e $\langle Au_n, u_n \rangle \longrightarrow \langle Au, u \rangle$.*

Lema D.5 *Sejam $A, B : X \longrightarrow X^*$ operadores sobre um espaço de Banach real reflexivo X. Então,*

(i) *Se A é monotônico e hemicontínuo, então A é pseudomonotônico.*

(ii) *Se A é completamente contínuo, então A é pseudomonotônico.*

(iii) *Se A e B são pseudomonotônicos, então* $A+B$ *é pseudomonotônico.*

Demonstração: (cf. Carl, Le & Motreanu [7], p.40).

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS, R. A. **Sobolev Spaces**. Academic Press, New York, 1975.

[2] AMBROSETTI, A.; ARCOYA, D. **An Introduction to Nonlinear Functional Analysis and Elliptic Problems**. Birkhauser, Berlin, 2012.

[3] AMBROSETTI, A.; MALCHIODI, A. **Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems**. Cambridge University Press, New York, 2007.

[4] BREZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. Springer, New York, 2011.

[5] BROWN, K. J.; BUDIN, V. H. **Multiple positive solutions for a class of nonlinear boundary value problems**. *J. Math Anal. and Applications*, 60:329–338, 1977.

[6] BROWN, K. J.; BUDIN, V. H. **On the existence of positive solutions for a class of semilinear elliptic boundary value problems**. *J. Math Anal.*, 5:875–883, 1979.

[7] CARL, S.; LE, V. K.; MOTREANU, D. **Nonsmoth Variational Problems and Their Inequalities: Comparison Principles and Applications**. Springer, New York, 2005.

[8] CUESTA, M. **Existence results for quasilinear problems via ordered sub and supersolutions**. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 6^o Série n^o 4*, 6:591–608, 1997.

[9] DANCER, E.; SCHMITT, K. **On positive solutions of semilinear elliptic equations**. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 101:445–452, 1987.

[10] DEIMLING, K. **Nonlinear Functional Analysis**. Springer-Verlag, Berlim, 1985.

[11] DUNFORD, N.; SCHWARTZ, J. T. **Linear Operators Part I: General Theory**. Interscience Publishers, Inc, New York, 1957.

[12] FIGUEIREDO, D. G. **Equações Elípticas Não-Lineares**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1977.

[13] FOLLAND, G. B. **Introduction to Partial Differential Equations**. Princeton University Press, New Jersey, 1995.

[14] GHERGU, M.; RADULESCU, V. **Sublinear singular elliptic problems with two parameters**. *J. Differential Equation*, 195:520–536, 2003.

[15] GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S. **Elliptic Partial Differential Equations of Second Order**. Springer, New York, 1983.

[16] HAN, Q.; LIN, F. **Elliptic Partial Differential Equations**. Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 2000.

[17] HESS, P. **On multiple positive solutions of nonlinear elliptic eigenvalue problems**. *Commun. Partial Differential Equations*, 6:951–961, 1981.

[18] KINDERLEHRER, D.; STAMPACCHIA, G. **An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications**. Academic Press, New York, 1980.

[19] KURA, T. **The weak supersolution-subsolution method for second order quasilinear alliptic equations**. *Hiroshima Math. J.*, 19:1–36, 1989.

[20] LE, V. K. **On some equivalent properties of sub- and supersolutions in second order quasilinear elliptic equations**. *Hiroshima Math. J.*, 28:373–380, 1998.

[21] LE, V. K. **Subsolution-supersolutions and the existence of extremal solutions in noncoercive variational inequalities**. *JIPAM*, 2:1–16, 2001.

[22] LE, V. K.; SCHMITT, K. **On boundary value problems for degenerate quasilinear elliptic equations and inequalities**. *J. Differential Equations*, 144:170–218, 1998.

[23] LE, V. K.; SCHMITT, K. **Sub-supersolution theorems for quasilinear elliptic problems: A variational approach**. *Electron J. Differential Equations*, 118:1–7, 2004.

[24] LE, V. K.; SCHMITT, K. **Some general concepts of sub-supersolutions for nonlinear elliptic problems**. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, 28:87–103, 2006.

[25] LIEBERMAN, G. M. **The natural generalization of the natural conditions os ladyzhenskaya and ural'tseva for elliptic equations**. *Comm. Partial Differential Equations*, 16:311–361, 1991.

[26] LOC, N. H.; SCHMITT, K. **On positive solutions of quasilinear elliptic equations**. *Differential Integral Equations*, 22:829–842, 2009.

[27] MEDEIROS, L. A.; MIRANDA, M. M. **Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elípticos Não-Homogêneos)**. Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, 2000.

[28] O'REGAN, D.; CHO, Y. J.; CHEN, Y.-Q. **Topological Degree Theory and Applications**. Chapman and Hall/CRC, New York, 2006.

[29] PERAL, I. **Multiplicity of Solutions for the p-Laplacian**. Second School of Nonlinear Functional Analysis and Applications to Differential Equations, Trieste, 1997.

[30] RABINOWITZ, P. **A note on topological degree for potential operators**. *J. Math. Anal. Appl.*, 51:483–492, 1975.

[31] RUDIN, W. **Real and Complex Analysis**. McGraw Hill Series in Higher Mathematics, New York, 2000.

[32] SAKAGUCHI, S. **Concavity properties of solutions to some degenerate quasilinear elliptic dirichlet roblems**. *Annali de la Scuola Normale Superiori di Pisa Classe di Scienze* 4*e Série, no 3*, 14:403–421, 1987.

[33] SCHMITT, K.; THOMPSON, R. C. **Nonlinear Analysis and Differential Equations: An Introduction**. http://www.math.utah.edu/ schmitt/ode1.pdf, 2004.

[34] SCHWARTZ, J. T. **Nonlinear Functional Analysis**. Gordon and Breach Science Publishers, New York-London-Paris, 1969.

[35] STAMPACCHIA, G. **Equations Elliptiques du Second Ordre a Coefficients Discontinus**. Les Presses de L'Universite de Montreal, Montreal, 1966.

[36] TREVES, F. **Basic Linear Partial Differential Equations. Pure and Applied Mathematics Vol 62**. Academic Press, New York-London, 1975.

[37] VÁZQUEZ, J. L. **A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations**. *Appl. Math. Optim.*, 12:191–202, 1984.