



Universidade Federal de Goiás  
**Instituto de Física**

GRUPO DE ÓPTICA E INFORMAÇÃO QUÂNTICA

ROGÉRIO JORGE DE ASSIS

*POVM* no Contexto de  
Eletrodinâmica Quântica de  
Cavidades

Goiânia  
2017

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

**1. Identificação do material bibliográfico:**       **Dissertação**       **Tese**

**2. Identificação da Tese ou Dissertação**

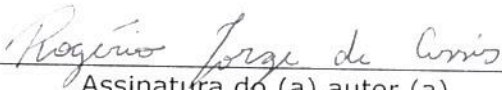
Nome completo do autor: Rogério Jorge de Assis

Título do trabalho: POVM no Contexto de Eletrodinâmica Quântica de Cavidades

**3. Informações de acesso ao documento:**

Concorda com a liberação total do documento  SIM       NÃO<sup>1</sup>

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

  
Assinatura do(a) autor(a)

Data: 21 / 02 / 2017

<sup>1</sup> Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

ROGÉRIO JORGE DE ASSIS

*POVM* no Contexto de  
Eletrodinâmica Quântica de  
Cavidades

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Física da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

**Área de pesquisa:** Óptica Quântica

**Orientador:** Prof. Dr. Norton Gomes de Almeida

Goiânia  
2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Jorge de Assis, Rogério  
POVM no Contexto de Eletrodinâmica Quântica de Cavidades  
[manuscrito] / Rogério Jorge de Assis. - 2017.  
56 f.

Orientador: Prof. Dr. Norton Gomes de Almeida.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Física (IF), Programa de Pós-Graduação em Física, Goiânia, 2017.  
Bibliografia.  
Inclui siglas, gráfico, tabelas.

1. discriminação de estados quânticos. 2. medição quântica geral. 3. eletrodinâmica quântica de cavidades. I. Gomes de Almeida, Norton , orient. II. Título.

CDU 53



**Universidade Federal de Goiás**  
**Instituto de Física**  
**Programa de Pós-Graduação em Física**

Ata Nº 167 de defesa de dissertação de Rogério Jorge de Assis para obtenção do título de Mestre em Física.

Aos 13 dias do mês de março de 2017, às 15h00min, no Miniauditório do Instituto de Física, reuniu-se a Banca Examinadora indicada pela Coordenadoria do Programa de Pós-Graduação, aprovada pelo Conselho Diretor e designada pela Diretoria do Instituto de Física da Universidade Federal de Goiás, composta pelo **Prof. Dr. Norton Gomes de Almeida** (orientador – IF/UFG), **Prof. Dr. Celso Jorge Villas-Bôas** (DF/UFSCAR) e **Prof. Dr. Agnaldo Rosa de Almeida** (UNUCET/UEG), para julgar a dissertação de mestrado de **Rogério Jorge de Assis**, intitulada: “**POVM no contexto de eletrodinâmica quântica de cavidades**”. O Presidente abriu os trabalhos agradecendo a presença dos membros da Banca Examinadora e concedeu a palavra a Rogério Jorge de Assis, que expôs detalhadamente seu trabalho. Em seguida, os membros da Banca fizeram suas considerações e procederam à arguição do candidato. Concluída essa etapa, a Banca, em sessão fechada, deu prosseguimento ao julgamento do trabalho, atribuindo os seguintes conceitos:

Prof. Dr. Norton Gomes de Almeida (orientador)

APROVADO

Prof. Dr. Celso Jorge Villas-Bôas (DF/UFSCAR)


Aprovado

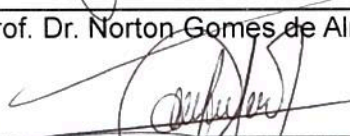
Prof. Dr. Agnaldo Rosa de Almeida  
(UNUCET/UEG)

Aprovado

Novamente em sessão aberta, o presidente da Banca anunciou o resultado final do julgamento, declarando o candidato Rogério Jorge de Assis APROVADO pela Banca Examinadora. Nada mais havendo a tratar, a sessão foi encerrada e lavrou-se a presente ata que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora.

Goiânia, 13 de março de 2017.

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Norton Gomes de Almeida (Orientador)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Celso Jorge Villas-Bôas (DF/UFSCAR)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Agnaldo Rosa de Almeida (UNUCET/UEG)



---

# RESUMO

---

Neste trabalho é proposto um esquema simplificado para a discriminação inequívoca de dois determinados estados quânticos não ortogonais do campo no interior de uma cavidade de alta qualidade. Nesse esquema, o qual se baseia na medição quântica geral (também chamada de *positive-operator valued measure* ou, simplesmente, *POVM*), um átomo de três níveis é utilizado como sonda para obter informação acerca do estado do campo da cavidade alvo. Por fim, a eficiência desse esquema em discriminar os estados é analisada comparando a probabilidade de sucesso máxima obtida com a probabilidade de sucesso máxima possível para o caso em questão.

**Palavras - chave:** discriminação de estados quânticos, medição quântica geral, eletrodinâmica quântica de cavidades.



---

# ABSTRACT

---

In this work it is proposed a simplified scheme to unambiguously discriminate between one of two nonorthogonal cavity field states. This scheme, which is based on POVM - positive operator valued measure, uses one three-level atom as the ancilla to obtain information on the cavity field state, the target. The efficiency of this scheme in discriminating the two quantum states is analyzed by comparing the maximum theoretical success probability with the maximum success probability possible to our case.

**Key - words:** quantum states discrimination, generalized quantum measurement, cavity quantum electrodynamics



---

# SUMÁRIO

---

<b>Capítulo 1: Introdução</b>	<b>11</b>
<b>Capítulo 2: Teoria das Medições Quânticas</b>	<b>13</b>
2.1 Postulados da mecânica quântica	13
2.1.1 Primeiro postulado	13
2.1.2 Segundo postulado	14
2.1.3 Terceiro postulado	14
2.1.4 Quarto postulado	15
2.1.5 Quinto postulado	16
2.2 Operador densidade	16
2.2.1 Definição de operador densidade	16
2.2.2 Valor esperado de um observável	18
2.2.3 Evolução temporal do operador densidade	18
2.2.4 Postulado da medição	19
2.3 Medição quântica geral	20
2.3.1 Sistema sonda-alvo	20
2.3.2 Operador evolução temporal do sistema sonda-alvo	20
2.3.3 Evolução temporal do sistema sonda-alvo	22
2.3.4 Medição na sonda	22
2.3.5 Teorema fundamental das medições quânticas	23
2.3.6 <i>POVM</i>	24
2.3.7 Discriminação de estados	24
<b>Capítulo 3: Contexto</b>	<b>27</b>
3.1 Quantização do campo eletromagnético	27
3.1.1 Equações de Maxwell e invariância de gauge	27
3.1.2 Equação de onda e sua solução geral	29
3.1.3 Condições de contorno	30
3.1.4 Campo elétrico e magnético	30
3.1.5 Hamiltoniana do campo eletromagnético	31
3.1.6 Quantização do campo eletromagnético	33

3.1.7	Campo eletromagnético no interior de uma cavidade . . . . .	35
3.2	Hamiltoniano de interação átomo-campo . . . . .	36
3.2.1	Interação do átomo com o campo clássico . . . . .	37
3.2.2	Interação do átomo com campo quantizado . . . . .	38
3.3	Átomo de três níveis e sua interação com o campo . . . . .	39
3.3.1	Átomo de três níveis . . . . .	39
3.3.2	Interação com o campo eletromagnético clássico . . . . .	40
3.3.3	Interação com campo eletromagnético quantizado . . . . .	41
3.3.4	Efeito Stark no átomo de três níveis . . . . .	42
<b>Capítulo 4:</b>	<b>Discriminação de estados não ortogonais do campo no interior</b>	
	<b>de uma cavidade . . . . .</b>	<b>45</b>
4.1	Protocolo proposto . . . . .	45
4.2	Elementos do <i>POVM</i> . . . . .	46
4.3	Discriminação dos estados . . . . .	50
<b>Capítulo 5:</b>	<b>Conclusão . . . . .</b>	<b>53</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>. . . . .</b>	<b>54</b>

---

# INTRODUÇÃO

---

A mecânica quântica é, até o momento, a teoria mais completa e bem sucedida em descrever o mundo físico. Sua origem se deu no início do século XX a partir das tentativas de compreender a estrutura e as propriedades da matéria, da luz e de suas interações na escala atômica. No primeiro quarto do século XX, a teoria quântica alcançou uma formulação consistente e se tornou a estrutura base para compreender e formular as leis do mundo físico.

Para obter informações sobre sistemas quânticos são utilizados sistemas clássicos como instrumentos de medição. A teoria que faz a ligação entre o formalismo quântico e os instrumentos de medição é conhecida como teoria das medições quânticas [1, 2]. A primeira pessoa a fornecer uma formulação razoavelmente rigorosa e geral da teoria das medições quânticas foi Dirac em 1930 [3]. Pouco tempo depois, von Neumann adicionou maior rigor matemático à descrição dada por Dirac [4]. Por fim, a descrição geral da teoria das medições quânticas foi concluída na década de 1970 por Davies e Kraus [5, 6].

A teoria das medições quânticas tem importante aplicação em um dos problemas fundamentais da informação quântica e da computação quântica: a discriminação de estados [7, 8]. Quando se trata de estados ortogonais, a discriminação pode ser realizada simplesmente com a utilização da chamada medição de von Neumann (medição projetiva) [7]. No entanto, a discriminação de estados não ortogonais requer a utilização da chamada medição quântica geral [2]. Como será discutido no Capítulo 2, a medição quântica geral também é, dependendo do objetivo da medição, conhecida como *positive-operator valued measure (POVM)*. Há duas estratégias para a discriminação dos estados: a discriminação inequívoca (na qual a medição nunca comete erros quando consegue discriminar os estados) e a discriminação com erro mínimo (na qual a medição sempre discrimina os estados com uma probabilidade mínima de erro) [9–12]. Neste trabalho será abordada somente a discriminação inequívoca de estados.

O objetivo deste trabalho é propor um protocolo inédito capaz de realizar a distinção de determinados estados quânticos não ortogonais do campo no interior de uma cavidade. No esquema que será proposto, o qual se fundamentará na teoria de *POVM*, um

átomo de três níveis é utilizado para extrair informação sobre o estado do campo. Antes de propor o protocolo, faz-se necessária a introdução de conhecimentos sobre *POVM* e óptica quântica, o que será feito nos próximos dois capítulos.

---

# TEORIA DAS MEDIÇÕES QUÂNTICAS

---

## 2.1 Postulados da mecânica quântica

Um dos postulados da mecânica quântica, especificamente o chamado postulado da medição, tem especial importância para este trabalho. Dessa forma, considerando um prévio conhecimento sobre as bases matemáticas da mecânica quântica e sobre notação de Dirac, serão enunciados aqui os postulados da mecânica quântica [7, 13–16]. Devido às simplificações que proporcionam, e ao foco deste trabalho, serão considerados aqui somente estados normalizados não degenerados e bases discretas finitas.

### 2.1.1 Primeiro postulado

A descrição matemática dos estados físicos de sistemas isolados é o tema do primeiro postulado da mecânica quântica.

**Primeiro postulado:** Há um espaço de Hilbert associado a cada sistema físico isolado, o qual será chamado de espaço de estados. Dessa forma, o estado de um dado sistema é descrito por um vetor  $|\psi\rangle$  em seu espaço de estados.

Um espaço vetorial com produto interno definido é dito ser um espaço de Hilbert se for completo em relação à métrica induzida pelo produto interno, o que significa que todas as suas sequências de Cauchy convergem para elementos do próprio espaço [17].

Assim como no espaço vetorial, para descrever um vetor  $|\psi\rangle$  no espaço de estados é necessário especificar a base geradora do espaço. Se for considerada a base ortonormal  $\{|k\rangle\}$ ,  $k = 0, 1, \dots, K - 1$ , então o vetor de estado  $|\psi\rangle$  pode ser descrito pela combinação linear

$$|\psi\rangle = \sum_k c_k |k\rangle, \quad (2.1)$$

em que os coeficientes  $c_k = \langle k|\psi\rangle$  são números complexos que, devido à normalização  $\|\psi\rangle\| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle} = 1$ , satisfazem a relação  $\sum_k |c_k|^2 = 1$ .

### 2.1.2 Segundo postulado

O segundo postulado da mecânica quântica trata da descrição matemática das quantidades físicas mensuráveis.

**Segundo postulado:** Toda quantidade física mensurável  $\mathcal{A}$  é descrita por um operador hermitiano  $\hat{A}$  (chamado observável) que atua no espaço de estados do sistema.

Para que se defina operador hermitiano, faz-se necessário definir antes operador adjunto. O operador adjunto  $\hat{A}^\dagger$  de um operador linear  $\hat{A}$  é definido pela relação

$$\langle \phi | \hat{A} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{A}^\dagger | \phi \rangle^* \quad (2.2)$$

para qualquer  $|\psi\rangle$  e  $|\phi\rangle$  pertencentes ao espaço de estados do sistema em questão. Com base nisso, um operador  $\hat{A}$  é dito ser hermitiano se satisfizer a relação

$$\langle \phi | \hat{A} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \phi \rangle^*, \quad (2.3)$$

isto é, se  $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ .

Uma característica importante dos operadores hermitianos é o fato de possuírem autovalores reais. Esse fato pode ser facilmente mostrado simplesmente substituindo a relação  $\langle a_k | \hat{A} | a_k \rangle = a_k$ , a qual é obtida da equação de autovalores  $\hat{A} | a_k \rangle = a_k | a_k \rangle$ , na Equação (2.3), o que leva ao resultado pretendido  $a_k = a_k^*$ . Essa característica, como poderá ser observado ao ser enunciado o terceiro postulado, é o que faz dos operadores hermitianos importantes na descrição de quantidades físicas mensuráveis, pois os resultados das medições são sempre valores reais.

### 2.1.3 Terceiro postulado

O terceiro postulado, o qual é de grande importância para este trabalho, descreve a chamada medição de von Neumann. Devido a isso, o terceiro postulado é conhecido como postulado da medição.

**Terceiro postulado:** Os possíveis resultados da medição da quantidade física  $\mathcal{A}$  são os autovalores do observável  $\hat{A}$ . Se a medição for realizada sobre o estado  $|\psi\rangle$ , o autovalor  $a_k$  tem probabilidade

$$p_k = |\langle a_k | \psi \rangle|^2 \quad (2.4)$$

de ser obtido. Como resultado da medição, o sistema passa do estado  $|\psi\rangle$  para o autoestado  $|a_k\rangle$  do observável  $\hat{A}$ .

Com o intuito de se realizar uma medição de von Neumann em um determinado sistema, seu estado  $|\psi\rangle$  deve ser convenientemente escrito na base  $\{|a_k\rangle\}$  de autoestados

do observável  $\hat{A}$  em questão. Dessa forma, tem-se

$$|\psi\rangle = \sum_k c_k |a_k\rangle, \quad (2.5)$$

em que os coeficientes  $c_k = \langle a_k | \psi \rangle$ , conforme estabelece a Equação (2.4), ganham o significado de amplitudes de probabilidade.

### 2.1.4 Quarto postulado

O quarto postulado estabelece como se dá a evolução temporal dos estados dos sistemas quânticos.

**Quarto postulado:** A evolução temporal do estado  $|\psi(t)\rangle$  obedece a equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle, \quad (2.6)$$

em que  $\hbar = h/2\pi$ , sendo  $h$  a constante de Planck, e  $\hat{H}(t)$  é o hamiltoniano do sistema. Observação: se houver algum tratamento semiclássico envolvido, o hamiltoniano  $\hat{H}(t)$  pode depender do tempo.

A evolução temporal do estado de um dado sistema pode ser alternativamente descrita por meio do chamado operador evolução temporal. A função desse operador, o qual será representado por  $\hat{U}(t, t_0)$ , é evoluir o sistema de um dado estado inicial  $|\psi(t_0)\rangle$  a um estado final  $|\psi(t)\rangle$ . Dessa forma, tem-se

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle, \quad (2.7)$$

que, ao ser substituída na equação de Schrödinger, leva à equação diferencial que descreve o comportamento do operador evolução temporal

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{U}(t, t_0) = \hat{H}(t) \hat{U}(t, t_0). \quad (2.8)$$

Se o hamiltoniano não depende do tempo, a Equação (2.8) fornece a expressão para o operador evolução temporal

$$\hat{U}(t, t_0) = e^{-i\hat{H}(t-t_0)/\hbar}, \quad (2.9)$$

a qual será de grande utilidade deste trabalho.

O fato do operador evolução temporal obedecer a equação de Schrödinger implica na sua unitariedade, o que significa que

$$\hat{U}^\dagger(t, t_0) = \hat{U}^{-1}(t, t_0). \quad (2.10)$$

Essa propriedade tem grande importância, pois garante a conservação da norma dos vetores de estado,  $\|\psi(t)\| = \|\psi(t_0)\| = 1$ , e, conseqüentemente, a conservação da probabilidade,  $\sum_k |c_k(t)|^2 = \sum_k |c_k(t_0)|^2 = 1$ .

### 2.1.5 Quinto postulado

Pondo fim aos postulados enunciados neste trabalho, o quinto postulado se refere à estrutura matemática utilizada para a descrição de sistemas compostos.

**Quinto postulado:** O espaço de estados de um sistema composto é o produto tensorial dos espaços de estados dos subsistemas que o compõem.

As propriedades do produto tensorial, as quais serão utilizadas neste trabalho, podem ser encontradas nas Referências [2, 7].

## 2.2 Operador densidade

Como pode ser observado em seus enunciados, os postulados da mecânica quântica consideram o conhecimento do estado  $|\psi\rangle$  no qual o sistema se encontra. Quando se tem esse conhecimento, o sistema é dito estar em um estado puro. No entanto, há situações em que o sistema tem probabilidade  $\eta_1$  de se encontrar no estado  $|\psi_1\rangle$ , probabilidade  $\eta_2$  de se encontrar no estado  $|\psi_2\rangle$ , e assim por diante (dependendo do número de possibilidades). Quando isso acontece, o sistema é dito estar em uma mistura de estados. Nesse caso, o sistema não pode ser descrito por um único estado  $|\psi\rangle$ , o qual seria formado pela combinação linear dos estados  $|\psi_i\rangle$ . Isto se dá pelo fato de não se ter informações sobre as fases relativas entre eles. Dessa forma, os postulados da mecânica quântica não podem ser aplicados diretamente à misturas de estados, fazendo-se necessária a utilização do chamado operador densidade [2, 18, 19].

### 2.2.1 Definição de operador densidade

A definição de operador densidade, também chamado de matriz densidade, surge naturalmente do postulado da medição aliado à definição de mistura de estados. De acordo com o postulado da medição, a probabilidade de se obter como resultado o autovalor  $a_k$  do observável  $\hat{A}$  é dada por

$$p_k = |\langle a_k | \psi \rangle|^2, \quad (2.11)$$

em que  $\sum_k p_k = 1$ . Contudo, como já foi dito, esse postulado só se aplica diretamente quando o sistema se encontra em um estado puro. Quando se trata de uma mistura de

estados, deve-se levar em conta as probabilidades  $\eta_i$  de estar realizando a medição sobre os possíveis estados  $|\psi_i\rangle$ . Dessa forma, a probabilidade  $p_k$  passa a ser

$$p_k = \sum_i \eta_i |\langle a_k | \psi_i \rangle|^2, \quad (2.12)$$

que pode ser reescrita como

$$p_k = \langle a_k | \left( \sum_i \eta_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \right) | a_k \rangle. \quad (2.13)$$

O termo entre parênteses, o qual será representado por  $\hat{\rho}$ , é a definição de operador densidade, ou seja,

$$\hat{\rho} \equiv \sum_i \eta_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|. \quad (2.14)$$

Com isso, a Equação (2.13) se torna

$$p_k = \langle a_k | \hat{\rho} | a_k \rangle, \quad (2.15)$$

que, ao se realizar o somatório sobre todos os valores de  $k$ , leva à seguinte expressão para o traço de  $\hat{\rho}$ :

$$Tr(\hat{\rho}) = 1. \quad (2.16)$$

É importante notar que, embora sua definição tenha sido obtida utilizando o conceito de mistura de estados, o operador densidade tem como caso particular sua aplicação a estados puros. Nesse caso, um dos  $\eta_i$  é igual a um e o operador densidade assume a forma

$$\hat{\rho} = |\psi_i\rangle \langle \psi_i|. \quad (2.17)$$

Vale observar que essa expressão poderia ter sido obtida diretamente a partir da Equação (2.11).

Uma característica importante do operador densidade é que ele é um operador hermitiano. Isso pode ser mostrado simplesmente observando que a expressão

$$\langle \chi | \left( \sum_i \eta_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \right) | \phi \rangle = \sum_i \eta_i \langle \chi | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \phi \rangle \quad (2.18)$$

pode ser reescrita, utilizando a propriedade  $\langle \mu | \nu \rangle^* = \langle \nu | \mu \rangle$ , como

$$\langle \chi | \hat{\rho} | \phi \rangle = \langle \phi | \hat{\rho} | \chi \rangle^*, \quad (2.19)$$

a qual está de acordo com a definição de operador hermitiano dada pela Equação (2.3).

### 2.2.2 Valor esperado de um observável

Devido à importância dos valores esperados para a física, cabe aqui fornecer o valor esperado de um observável em termos do operador densidade que descreve o sistema. O valor esperado, ou valor médio, de um observável  $\hat{A}$  é dado por

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_k p_k a_k. \quad (2.20)$$

Com a substituição da Equação (2.15) na Equação (2.20), o valor esperado assume a forma

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_k \langle a_k | \hat{\rho} | a_k \rangle a_k, \quad (2.21)$$

que pode ainda ser reescrita como

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum_k \langle a_k | \hat{\rho} \hat{A} | a_k \rangle, \quad (2.22)$$

o que, devido à definição do traço de um operador, fornece a importante relação

$$\langle \hat{A} \rangle = Tr(\hat{\rho} \hat{A}) = Tr(\hat{A} \hat{\rho}). \quad (2.23)$$

### 2.2.3 Evolução temporal do operador densidade

A maneira com que a evolução temporal do operador densidade se dá é obtida utilizando o quarto postulado da mecânica quântica, o qual diz que a evolução temporal de um estado  $|\psi(t)\rangle$  obedece a equação de Schrödinger. Derivando o operador densidade definido na Equação (2.14), obtém-se

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = \sum_i \eta_i \left[ \left( \frac{d}{dt} |\psi_i(t)\rangle \right) \langle \psi_i(t) | + |\psi_i(t)\rangle \left( \frac{d}{dt} \langle \psi_i(t) | \right) \right], \quad (2.24)$$

que, ao utilizar a equação de Schrödinger (Equação (2.6)), pode ser reescrita na forma

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = \frac{1}{i\hbar} (\hat{H}(t) \hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t) \hat{H}(t)). \quad (2.25)$$

Utilizando a definição do comutador de dois operadores,  $[\hat{B}, \hat{C}] \equiv \hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{B}$ , a Equação (2.25) se torna

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)], \quad (2.26)$$

a qual é conhecida como equação de von Neumann ou equação de Liouville.

A evolução temporal do operador densidade  $\hat{\rho}(t)$  também pode ser descrita utilizando o operador evolução temporal  $\hat{U}(t, t_0)$ . Conforme estabelecido por meio da Equação (2.7), a evolução de cada estado  $|\psi_i\rangle$  é dada por

$$|\psi_i(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi_i(t_0)\rangle, \quad (2.27)$$

de modo que, ao ser utilizada na Equação (2.14), chega-se à seguinte expressão para a evolução temporal do operador densidade:

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t, t_0) \hat{\rho}(t_0) \hat{U}^\dagger(t, t_0). \quad (2.28)$$

## 2.2.4 Postulado da medição

Todos os postulados da mecânica quântica podem ser reformulados em termos do operador densidade. Contudo, devido à sua importância neste trabalho, será feita aqui somente a reformulação do postulado da medição.

**Medição de von Neumann:** Os possíveis resultados da medição da quantidade física  $\mathcal{A}$  são os autovalores do observável  $\hat{A}$ . Se a medição for realizada sobre o operador densidade  $\hat{\rho}$ , o autovalor  $a_k$  tem probabilidade

$$p_k = \langle a_k | \hat{\rho} | a_k \rangle \quad (2.29)$$

de ser obtido. Como resultado da medição, o operador densidade que descreve o sistema passa de  $\hat{\rho}$  para  $\tilde{\rho}_k = |a_k\rangle\langle a_k|$ , em que o til é utilizado para facilitar a identificação do operador densidade que resulta da medição.

Analogamente ao que foi feito na Subseção (2.1.3), para realizar uma medição de von Neumann o operador densidade  $\hat{\rho}$  deve ser convenientemente escrito na base  $\{|a_k\rangle\}$  de autoestados do observável  $\hat{A}$ . Dessa forma, com o auxílio da relação de completudeza  $\sum_k |a_k\rangle\langle a_k| = \hat{I}$ , em que  $\hat{I}$  o operador identidade, tem-se

$$\hat{\rho} = \sum_{i,j} \rho_{i,j} |a_i\rangle\langle a_j|, \quad (2.30)$$

na qual  $\rho_{i,j} = \langle a_i | \hat{\rho} | a_j \rangle$ . Com isso, a utilização do projetor  $\hat{P}_k \equiv |a_k\rangle\langle a_k|$  faz com que o operador densidade  $\hat{\rho}_k$  possa ser escrito como

$$\tilde{\rho}_k = \frac{\hat{P}_k \hat{\rho} \hat{P}_k}{p_k}, \quad (2.31)$$

em que a probabilidade  $p_k$ , também escrita utilizando o projetor  $\hat{P}_k$ , tem a forma

$$p_k = \text{Tr}(\hat{P}_k \hat{\rho} \hat{P}_k). \quad (2.32)$$

## 2.3 Medição quântica geral

Além da medição de von Neumann descrita pelo postulado da medição, existem vários tipos de medições quânticas às quais um sistema pode ser submetido, cada uma sendo caracterizada pela perturbação que imprime e/ou pela informação capaz de obter [1]. No entanto, existe uma medição, obtida por meio da medição de von Neumann, capaz de descrever todos os tipos de medições quânticas [2]. Essa generalização é feita utilizando um sistema sonda para extrair informação de um sistema alvo. A sonda é inicialmente preparada em um determinado estado e então colocada para interagir com o alvo, o que faz com que os dois sistemas fiquem correlacionados. Após a evolução do sistema sonda-alvo, a correlação existente faz com que a realização de uma medição de von Neumann sobre a sonda forneça informação sobre o alvo.

### 2.3.1 Sistema sonda-alvo

A medição de von Neumann tem como objetivo obter informação sobre um determinado observável  $\hat{S}$  da sonda. Dessa forma, como os possíveis resultados dessa medição são os autovalores  $s_k$  de  $\hat{S}$ , a medição deve ser realizada utilizando a base  $\{|s_k\rangle\}$ ,  $k = 0, 1, \dots, K - 1$ . Por outro lado, a base do alvo pode ser uma base conveniente  $\{|a_l\rangle\}$ ,  $l = 0, 1, \dots, L - 1$ . Como o operador evolução temporal do sistema sonda-alvo deve atuar sobre os dois espaços de estados, a sonda pode ser inicialmente preparada no estado  $|s_0\rangle$  sem perda de generalidade. Com isso, o operador densidade inicial do sistema sonda-alvo é dado por

$$\hat{\rho}_{sa}(t_0) = |s_0\rangle\langle s_0| \otimes \hat{\rho}_a(t_0), \quad (2.33)$$

em que  $\hat{\rho}_a(t_0)$  é o operador densidade inicial do alvo.

### 2.3.2 Operador evolução temporal do sistema sonda-alvo

Por meio da relação de completeza do espaço de estados do sistema sonda-alvo dada pela expressão

$$\sum_{k,l} (|s_k\rangle \otimes |a_l\rangle) (\langle s_k| \otimes \langle a_l|) = \hat{I}_{sa}, \quad (2.34)$$

na qual  $\hat{I}_{sa}$  é o operador identidade do respectivo espaço de estados, o operador evolução temporal  $\hat{U}(t, t_0)$  pode ser escrito como

$$\hat{U}(t, t_0) = \sum_{k,l} \sum_{k',l'} u_{k,l,k',l'}(t, t_0) (|s_k\rangle \otimes |a_l\rangle) (\langle s_{k'}| \otimes \langle a_{l'}|), \quad (2.35)$$

em que

$$u_{k,l,k',l'}(t, t_0) = (\langle s_k | \otimes \langle a_l |) \hat{U}(t, t_0) (|s_{k'}\rangle \otimes |a_{l'}\rangle). \quad (2.36)$$

No entanto, ao utilizar as propriedades básicas do produto tensorial, a Equação (2.35) pode ainda ser convenientemente reescrita como

$$\hat{U}(t, t_0) = \sum_{k,k'} |s_k\rangle \langle s_{k'}| \otimes \hat{M}_{k,k'}(t, t_0), \quad (2.37)$$

na qual

$$\hat{M}_{k,k'}(t, t_0) = \sum_{l,l'} u_{k,l,k',l'}(t, t_0) |a_l\rangle \langle a_{l'}|. \quad (2.38)$$

Dessa forma, fica explícito que os operadores  $|s_k\rangle \langle s_{k'}|$  atuam no espaço de estados da sonda e que os operadores  $\hat{M}_{k,k'}(t, t_0)$  atuam no espaço de estados do alvo.

A relação entre os operadores  $\hat{M}_{k,k'}(t, t_0)$  e o operador evolução temporal  $\hat{U}(t, t_0)$ , fornecida pela Equação (2.37), pode ser melhor compreendida com o auxílio da representação matricial desses operadores. Nessa representação, ao utilizar a definição de produto tensorial entre matrizes, a Equação (2.37) tem a forma

$$\hat{U}(t, t_0) = \begin{bmatrix} \hat{M}_{0,0}(t, t_0) & \hat{M}_{0,1}(t, t_0) & \cdots & \hat{M}_{0,K-1}(t, t_0) \\ \hat{M}_{1,0}(t, t_0) & \hat{M}_{1,1}(t, t_0) & \cdots & \hat{M}_{1,K-1}(t, t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{M}_{K-1,0}(t, t_0) & \hat{M}_{K-1,1}(t, t_0) & \cdots & \hat{M}_{K-1,K-1}(t, t_0) \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

em que, de acordo a Equação (2.38), cada  $\hat{M}_{k,k'}(t, t_0)$  é uma matriz  $L \times L$  dada por

$$\hat{M}_{k,k'}(t, t_0) = \begin{bmatrix} u_{k,0,k',0}(t, t_0) & u_{k,0,k',1}(t, t_0) & \cdots & u_{k,0,k',L-1}(t, t_0) \\ u_{k,1,k',0}(t, t_0) & u_{k,1,k',1}(t, t_0) & \cdots & u_{k,1,k',L-1}(t, t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{k,L-1,k',0}(t, t_0) & u_{k,L-1,k',1}(t, t_0) & \cdots & u_{k,L-1,k',L-1}(t, t_0) \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

Dessa forma, fica explícito que cada matriz  $\hat{M}_{k,k'}(t, t_0)$  é um sub-bloco da matriz  $\hat{U}(t, t_0)$ .

Como foi mostrado na Subseção 2.1.4, é essencial que o operador evolução temporal seja unitário. Para que isso ocorra, basta que a relação  $\hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{U}(t, t_0) = \hat{I}_{sa}$  seja satisfeita [20]. Dessa forma, utilizando a representação matricial, cada sub-bloco diagonal da matriz  $\hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{U}(t, t_0)$  deve ser igual à identidade do espaço de estados do alvo  $\hat{I}_a$ . Um importante exemplo é o primeiro sub-bloco diagonal da matriz  $\hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{U}(t, t_0)$ , para o qual tem-se a igualdade

$$(\langle s_0 | \otimes \hat{I}_a) \hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{U}(t, t_0) (|s_0\rangle \otimes \hat{I}_a) = \hat{I}_a. \quad (2.41)$$

Nesse caso, ao utilizar a expressão do operador evolução temporal  $\hat{U}(t, t_0)$  dada pela

Equação (2.37), tem-se a relação

$$\sum_k \hat{M}_{k,0}^\dagger(t, t_0) \hat{M}_{k,0}(t, t_0) = \hat{I}_a, \quad (2.42)$$

na qual o lado esquerdo da igualdade é o produto da primeira linha de sub-blocos da matriz  $\hat{U}^\dagger(t, t_0)$  com a primeira coluna de sub-blocos da matriz  $\hat{U}(t, t_0)$ .

### 2.3.3 Evolução temporal do sistema sonda-alvo

Como o sistema sonda-alvo é inicialmente descrito utilizando o operador densidade  $\hat{\rho}_{sa}(t_0)$ , Equação (2.33), a evolução temporal do sistema se dá de acordo com a Equação (2.28). Dessa forma, tem-se a expressão

$$\hat{\rho}_{sa}(t) = \hat{U}(t, t_0) (|s_0\rangle\langle s_0| \otimes \hat{\rho}_a(t_0)) \hat{U}^\dagger(t, t_0), \quad (2.43)$$

que, ao utilizar o operador evolução temporal estabelecido pela Equação (2.37), assume a forma

$$\hat{\rho}_{sa}(t) = \sum_{i,j} |s_i\rangle\langle s_j| \otimes \hat{M}_{i,0}(t, t_0) \hat{\rho}_a(t_0) \hat{M}_{j,0}^\dagger(t, t_0). \quad (2.44)$$

### 2.3.4 Medição na sonda

Com base na Equação (2.31), o operador densidade do sistema sonda-alvo após a medição de von Neumann realizada na sonda é dado por

$$\tilde{\rho}_{sa,k}(t) = \frac{1}{p_k(t)} (\hat{P}_k \otimes \hat{I}_a) \hat{\rho}_{sa}(t) (\hat{P}_k \otimes \hat{I}_a), \quad (2.45)$$

em que, de acordo com a Equação (2.32), a probabilidade  $p_k(t)$  de obter o autovalor  $s_k$  do observável  $\hat{S}$  tem a forma

$$p_k(t) = Tr_{sa} \left[ (\hat{P}_k \otimes \hat{I}_a) \hat{\rho}_{sa}(t) (\hat{P}_k \otimes \hat{I}_a) \right], \quad (2.46)$$

sendo o traço realizado no espaço de estados do sistema sonda-alvo. Dessa forma, ao se utilizar o operador densidade  $\hat{\rho}_{sa}(t)$  fornecido pela Equação (2.44), obtém-se a expressão

$$\tilde{\rho}_{sa,k}(t) = |s_k\rangle\langle s_k| \otimes \frac{1}{p_k(t)} \hat{M}_{k,0}(t, t_0) \hat{\rho}_a(t_0) \hat{M}_{k,0}^\dagger(t, t_0), \quad (2.47)$$

na qual a probabilidade  $p_k(t)$  é dada por

$$p_k(t) = Tr_a \left( \hat{M}_{k,0}^\dagger(t, t_0) \hat{M}_{k,0}(t, t_0) \hat{\rho}_a(t_0) \right), \quad (2.48)$$

sendo o traço realizado agora somente no espaço de estados do alvo.

A Equação (2.48) mostra que para cada resultado  $s_k$  obtido da medição de von Neumann realizada na sonda, há um operador  $\hat{M}_{k,0}(t, t_0)$  que relaciona o resultado  $s_k$  com o operador densidade inicial do alvo  $\hat{\rho}_a(t_0)$ . Por esse motivo, os operadores  $\hat{M}_{k,0}(t, t_0)$  são chamados de operadores de medição.

Examinando a Equação (2.47), juntamente com a Equação (2.48), fica claro que a correlação entre a sonda e o alvo deixa de existir após a medição de von Neumann ser realizada na sonda. Portanto, com a medição o operador densidade da sonda se torna

$$\tilde{\rho}_{s,k} = |s_k\rangle\langle s_k|, \quad (2.49)$$

e o operador densidade do alvo passa a ser

$$\tilde{\rho}_{a,k}(t) = \frac{\hat{M}_{k,0}(t, t_0) \hat{\rho}_a(t_0) \hat{M}_{k,0}^\dagger(t, t_0)}{\text{Tr}_a(\hat{M}_{k,0}^\dagger(t, t_0) \hat{M}_{k,0}(t, t_0) \hat{\rho}_a(t_0))}. \quad (2.50)$$

### 2.3.5 Teorema fundamental das medições quânticas

Algo importante a ser observado é que, devido à escolha do operador densidade inicial da sonda como sendo  $\hat{\rho}_s(t_0) = |s_0\rangle\langle s_0|$ , os únicos operadores  $\hat{M}_{k,k'}(t, t_0)$  envolvidos nas Equações (2.47) e (2.48) são os operadores do tipo  $\hat{M}_{k,0}(t, t_0)$ . Conforme a Subseção 2.3.2 mostra, a única restrição aos operadores  $\hat{M}_k(t, t_0) \equiv \hat{M}_{k,0}(t, t_0)$  é dada pela relação

$$\sum_k \hat{M}_k^\dagger(t, t_0) \hat{M}_k(t, t_0) = \hat{I}_a. \quad (2.51)$$

Dessa forma, os operadores de medição  $\hat{M}_k(t, t_0)$  podem ser quaisquer, desde que satisfaçam a Equação (2.51). Dito isso, pode-se enunciar aqui o teorema fundamental das medições quânticas.

**Teorema fundamental das medições quânticas:** Qualquer conjunto de operadores lineares  $\{\hat{M}_k\}$ ,  $k = 0, 1, \dots, K - 1$ , que satisfaça a relação  $\sum_k \hat{M}_k^\dagger \hat{M}_k = \hat{I}$ , descreve uma medição possível de ser realizada em um sistema quântico, em que o índice  $k$  se refere aos possíveis resultados da medição. Se o resultado da medição for referente ao índice  $k$ , o sistema que antes era descrito pelo operador densidade  $\hat{\rho}$  passa a ser descrito pelo operador densidade  $\tilde{\rho}_k$  dado por

$$\tilde{\rho}_k = \frac{\hat{M}_k \hat{\rho} \hat{M}_k^\dagger}{p_k}, \quad (2.52)$$

em que

$$p_k = \text{Tr}(\hat{M}_k^\dagger \hat{M}_k \hat{\rho}) \quad (2.53)$$

é a probabilidade de obter o resultado  $k$ .

### 2.3.6 POVM

Conforme enunciado no teorema fundamental das medições quânticas, o processo geral de medição fornece informações tanto sobre as probabilidades dos possíveis resultados serem obtidos quanto sobre o estado do sistema após a medição. Quando se está interessado somente nas probabilidades (Equação (2.53)), o termo *positive-operator valued measure*, ou simplesmente *POVM*, é frequentemente utilizado para designar esse processo geral de medição. Como será mostrado a seguir, a razão dessa nomenclatura deve-se ao fato dos operadores  $\hat{M}_k^\dagger \hat{M}_k$  serem operadores positivos.

Para mostrar que os operadores  $\hat{M}_k^\dagger \hat{M}_k$  são operadores positivos, deve-se mostrar que eles satisfizerem a relação

$$\langle \hat{M}_k^\dagger \hat{M}_k \hat{\rho}, \hat{\rho} \rangle \geq 0, \quad (2.54)$$

na qual  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  simboliza o produto interno no espaço dos operadores densidade. Especificar a forma do produto interno é o ponto de partida para se chegar à essa relação. Dessa forma, utilizando a definição de produto interno entre operadores  $\langle \hat{A}, \hat{B} \rangle \equiv Tr(\hat{A}^\dagger \hat{B})$ , tem-se

$$\langle \hat{M}_k^\dagger \hat{M}_k \hat{\rho}, \hat{\rho} \rangle = Tr \left[ \left( \hat{M}_k^\dagger \hat{M}_k \hat{\rho} \right)^\dagger \hat{\rho} \right]. \quad (2.55)$$

Com isso, ao utilizar uma base qualquer  $\{|k\rangle\}$ , juntamente com o fato de que os operadores  $\hat{M}_k^\dagger \hat{M}_k$  e  $\hat{\rho}$  são hermitianos, chega-se à expressão

$$\langle \hat{M}_k^\dagger \hat{M}_k \hat{\rho}, \hat{\rho} \rangle = \sum_{l, l'} \langle l | \hat{\rho} \hat{M}_k^\dagger | l' \rangle \langle l' | \hat{M}_k \hat{\rho} | l \rangle, \quad (2.56)$$

que, de acordo com a Equação (2.2), pode ser reescrita como

$$\langle \hat{M}_k^\dagger \hat{M}_k \hat{\rho}, \hat{\rho} \rangle = \sum_{l, l'} \left| \langle l' | \hat{M}_k \hat{\rho} | l \rangle \right|^2. \quad (2.57)$$

Portanto, como o quadrado do módulo de um número complexo é sempre maior ou igual a zero, tem-se a relação pretendida.

### 2.3.7 Discriminação de estados

A medição quântica geral, especificamente *POVM*, tem especial aplicação na discriminação de estados. Os operadores  $\hat{\Lambda}_k \equiv \hat{M}_k^\dagger \hat{M}_k$ , os quais são chamados de elementos do *POVM*, trazem um importante avanço nessa área, pois possibilitam a discriminação de estados não ortogonais, o que não é possível utilizando a medição de von Neumann [7]. A seguir será apresentado um exemplo simples, porém muito instrutivo, de discriminação de estados não ortogonais utilizando *POVM* [7].

Recorrendo aos personagens clássicos Alice e Bob, o exemplo consiste em considerar que Alice prepara um dos estados

$$|\psi_1\rangle = |0\rangle \quad (2.58)$$

e

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad (2.59)$$

e a tarefa de Bob é tentar determinar, utilizando *POVM*, qual dos dois estados Alice preparou. Bob possui apenas uma chance de discriminar os qubits, ou seja, Bob pode realizar apenas uma medição.

Assim como quando se joga uma moeda, Alice diz para Bob que ele tem 50% de chance de realizar a medição no estado  $|\psi_1\rangle$  e, conseqüentemente, 50% de chance de realizar a medição no estado  $|\psi_2\rangle$ . Dessa forma, de acordo com a Equação (2.14), o operador densidade sobre o qual Bob realizará a medição tem a forma

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}|\psi_1\rangle\langle\psi_1| + \frac{1}{2}|\psi_2\rangle\langle\psi_2|. \quad (2.60)$$

Antes de utilizar *POVM* na discriminação dos estados  $|\psi_1\rangle$  e  $|\psi_2\rangle$ , é esclarecedor considerar que Bob utilize a medição de von Neumann para tentar discriminar os estados em questão. Nesse caso, a probabilidade de Bob obter o resultado correspondente ao índice  $k$ , conforme a Equação (2.32), é dada por

$$p_k = Tr(\hat{P}_k \hat{\rho}), \quad (2.61)$$

em que  $\hat{P}_k = |k\rangle\langle k|$ . Assim, ao substituir a Equação (2.60) na Equação (2.61), chega-se à expressão

$$p_k = \frac{1}{2}Tr(\hat{P}_k |\psi_1\rangle\langle\psi_1|) + \frac{1}{2}Tr(\hat{P}_k |\psi_2\rangle\langle\psi_2|). \quad (2.62)$$

Como consequência da realização da medição, Bob pode obter somente os resultados referentes a  $k = 0, 1$ . De acordo com a Tabela 2.1, Bob tem 25% de chance de obter o resultado correspondente ao índice 1, o que faria com que ele soubesse que realizou a medição sobre o estado  $|\psi_2\rangle$ . No entanto, Bob tem 75% de chance de obter o resultado correspondente ao índice 0, o que faria com que ele não soubesse qual estado Alice preparou. Dessa forma, Bob não teria nenhuma chance de saber se realizou a medição sobre o estado  $|\psi_1\rangle$ , o que ilustra a incapacidade da medição de von Neumann de discriminar estados não ortogonais.

Considerando agora a utilização de *POVM* para tentar discriminar os estados  $|\psi_1\rangle$  e  $|\psi_2\rangle$ , Bob faz a seguinte escolha do conjunto de elementos do *POVM*:

$$\hat{\Lambda}_1 \equiv \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}|1\rangle\langle 1|, \quad (2.63)$$

$$\hat{\Lambda}_2 \equiv \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \frac{(|0\rangle - |1\rangle)(\langle 0| - \langle 1|)}{2}, \quad (2.64)$$

e

$$\hat{\Lambda}_3 \equiv \hat{I} - \hat{\Lambda}_1 - \hat{\Lambda}_2. \quad (2.65)$$

De acordo com a Equação (2.53), a probabilidade de Bob obter na medição o resultado referente ao índice  $n$  é dada por

$$p_k = \text{Tr}(\hat{\Lambda}_k \hat{\rho}), \quad (2.66)$$

que, utilizando a Equação (2.60), pode ser reescrita na forma

$$p_k = \frac{1}{2} \text{Tr}(\hat{\Lambda}_k |\psi_1\rangle\langle\psi_1|) + \frac{1}{2} \text{Tr}(\hat{\Lambda}_k |\psi_2\rangle\langle\psi_2|). \quad (2.67)$$

Como consequência da realização da medição, Bob pode agora obter os resultados referentes a  $k = 1, 2, 3$ . Com isso, a Tabela 2.2 mostra que Bob tem 14,6% de chance de obter o resultado referente ao índice 1(2), o que faria com que ele soubesse que realizou a medição sobre o estado  $|\psi_2\rangle(|\psi_1\rangle)$ . Por outro lado, Bob tem 70,8% de chance de obter o resultado correspondente ao índice 3, o que faria com que ele não soubesse sobre qual estado realizou a medição. Portanto, a chance de Bob conseguir distinguir o estado  $|\psi_1\rangle$  do estado  $|\psi_2\rangle$  é de 29,2%, que é o máximo que se pode conseguir nesse exemplo [8].

$k$	$\text{Tr}(\hat{P}_k  \psi_1\rangle\langle\psi_1 )$	$\text{Tr}(\hat{P}_k  \psi_2\rangle\langle\psi_2 )$	$p_k$
0	1	0,5	0,75
1	0	0,5	0,25

Tabela 2.1: Resultados que Bob pode obter ao tentar discriminar os estados  $|\psi_1\rangle$  e  $|\psi_2\rangle$  utilizando a medição de von Neumann.

$k$	$\text{Tr}(\hat{\Lambda}_k  \psi_1\rangle\langle\psi_1 )$	$\text{Tr}(\hat{\Lambda}_k  \psi_2\rangle\langle\psi_2 )$	$p_k$
1	0	0,292	0,146
2	0,292	0	0,146
3	0,708	0,708	0,708

Tabela 2.2: Resultados que Bob pode obter ao tentar discriminar os estados  $|\psi_1\rangle$  e  $|\psi_2\rangle$  utilizando *POVM*.

---

## CONTEXTO

---

### 3.1 Quantização do campo eletromagnético

A descrição quântica do campo eletromagnético é um dos assuntos fundamentais da óptica quântica. Como essa descrição será fundamental para este trabalho, a quantização do campo eletromagnético será o assunto abordado nesta seção [18, 19, 21].

#### 3.1.1 Equações de Maxwell e invariância de gauge

As quantidades físicas fundamentais que definem o campo eletromagnético no vácuo são os campos elétrico  $\mathbf{E}$  e magnético  $\mathbf{B}$ . Esses campos são, sob a abordagem clássica, funções do vetor posição  $\mathbf{r}$  e do tempo  $t$ . Além disso, os campos elétrico e magnético tem seu comportamento descrito pelas chamadas equações de Maxwell [22]. As equações de Maxwell, na ausência de fontes de radiação eletromagnética, são

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (3.3)$$

e

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (3.4)$$

em que  $\varepsilon_0$  e  $\mu_0$  são, respectivamente, a permissividade e permeabilidade do vácuo.

Os campos elétrico e magnético podem ser obtidos por integração direta das equações de Maxwell. Contudo, uma maneira mais conveniente de obter esses campos é fornecida ao descrevê-los por meio dos potenciais escalar e vetor. Devido a isso, essa será a descrição abordada neste trabalho.

Os potenciais escalar e vetor surgem ao se fazer observações sobre os operadores divergente e rotacional presentes nas equações de Maxwell. Dessa forma, ao se observar que o divergente do rotacional de qualquer função vetorial (que possua as respectivas segundas derivadas parciais contínuas) é nulo, a Equação (3.4) possibilita expressar o campo magnético como

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t), \quad (3.5)$$

em que a função vetorial  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  é o potencial vetor. Com isso, a Equação (3.1) se torna

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \left( -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right), \quad (3.6)$$

que, ao se observar que o rotacional do gradiente de qualquer função escalar (que, assim como no caso do divergente do rotacional, possua as respectivas segundas derivadas parciais contínuas) é nulo, fornece

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \nabla \Phi(\mathbf{r}, t), \quad (3.7)$$

em que a função escalar  $\Phi(\mathbf{r}, t)$  é o potencial escalar.

Como consequência da descrição dos campos utilizando os potenciais escalar e vetor, as equações de Maxwell se condensam em duas equações:

$$\frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t))}{\partial t} + \nabla^2 \Phi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (3.8)$$

e

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = -\varepsilon_0 \mu_0 \left[ \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} + \nabla \left( \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) \right]. \quad (3.9)$$

Por sua vez, a Equação (3.9) pode ser reescrita de maneira mais conveniente ao se utilizar a relação  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)) - \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ , o que leva à expressão

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right), \quad (3.10)$$

na qual  $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$  é a velocidade da luz no vácuo.

A observação feita sobre o operador rotacional também fornece qual transformação pode ser feita no potencial vetor de maneira que a equação que define o campo magnético se mantenha invariante. Essa transformação, de acordo com a Equação (3.5), tem a forma

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla \chi(\mathbf{r}, t), \quad (3.11)$$

em que a função  $\chi$  é qualquer função escalar. Como consequência, ao substituir a Equação

(3.11) na Equação (3.7), tem-se

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \nabla \left( \frac{\partial \chi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \Phi(\mathbf{r}, t) \right), \quad (3.12)$$

que, por sua vez, fornece a transformação

$$\Phi'(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \chi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (3.13)$$

a qual mantém a Equação (3.7) (equação que define o campo elétrico) invariante. Essas transformações são chamadas de transformações de gauge e, de maneira conseqüente, a invariância dos campos proporcionada por elas é chamada de invariância de gauge. É importante observar que, como conseqüência da invariância dos campos, as equações de Maxwell também são invariantes por transformações de gauge.

### 3.1.2 Equação de onda e sua solução geral

A liberdade proporcionada pelas transformações de gauge possibilita a escolha do gauge mais conveniente. O gauge conveniente para a descrição quântica do campo eletromagnético nos regimes óptico e de micro-ondas é o gauge de Coulomb, o qual é definido pela escolha de  $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0$  e  $\Phi(\mathbf{r}, t) = 0$ . Como conseqüência dessa escolha, as equações de Maxwell se reduzem à equação

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (3.14)$$

que é conhecida como equação de onda. Dessa forma, a equação de onda, juntamente com as devidas condições de contorno, fornece o potencial vetor que, por sua vez, fornece os campos elétrico e magnético.

Com o propósito de encontrar sua solução geral, a equação de onda para o potencial vetor pode ser convenientemente reescrita, utilizando o sistema cartesiano de coordenadas, na forma

$$\sum_{\nu} \mathbf{e}_{\nu} \left( \nabla^2 A_{\nu}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_{\nu}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \right) = 0, \quad (3.15)$$

em que  $\nu = x, y, z$ . Devido à relação de ortonormalidade  $\mathbf{e}_{\nu} \cdot \mathbf{e}_{\nu'} = \delta_{\nu, \nu'}$ , para que a igualdade da Equação (3.15) seja satisfeita, deve-se ter

$$\nabla^2 A_{\nu}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_{\nu}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (3.16)$$

As soluções dessa equação de onda escalar, as quais são definidas pela norma do vetor de

onda do campo eletromagnético  $k \equiv \|\mathbf{k}\|$ , podem ser expressas como

$$A_{k,\nu}(\mathbf{r}, t) = A_{k,\nu} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t)} + A_{k,\nu}^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t)}, \quad (3.17)$$

em que  $\omega_k = kc$  é a frequência angular (ou modo de oscilação) do campo eletromagnético. Dessa forma, as soluções da Equação (3.14) têm a forma

$$\mathbf{A}_k(\mathbf{r}, t) = \sum_{\nu} \mathbf{e}_{\nu} \left[ A_{k,\nu} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t)} + A_{k,\nu}^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t)} \right]. \quad (3.18)$$

Como a combinação linear de soluções de uma equação diferencial linear também é solução, a solução geral da Equação (3.14) é dada pela combinação linear de todas as soluções  $\mathbf{A}_k(\mathbf{r}, t)$ , isto é,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{k,\nu} \mathbf{e}_{\nu} \left[ A_{k,\nu} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t)} + A_{k,\nu}^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t)} \right], \quad (3.19)$$

em que a soma se estende a todos os  $k$ s possíveis de acordo com as condições de contorno utilizadas.

### 3.1.3 Condições de contorno

Considerando que o campo eletromagnético esteja em uma região espacial cúbica de dimensão finita  $L$  sem limites materiais, a condição de contorno que se impõe aos campos, e conseqüentemente ao potencial vetor, é a condição de periodicidade descrita pelas relações  $e^{ik_x x} = e^{ik_x(x+L)}$ ,  $e^{ik_y y} = e^{ik_y(y+L)}$  e  $e^{ik_z z} = e^{ik_z(z+L)}$ . Essas condições de contorno levam à expressão para o vetor de onda

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L} (m_x \mathbf{e}_x + m_y \mathbf{e}_y + m_z \mathbf{e}_z), \quad (3.20)$$

em que  $m_x$ ,  $m_y$  e  $m_z$  são números inteiros. Dessa forma, cada combinação possível dos  $m$ s define uma solução para a equação de onda.

### 3.1.4 Campo elétrico e magnético

Antes de obter os campos elétrico e magnético a partir do potencial vetor encontrado, é interessante observar uma informação importante que a escolha do gauge de Coulomb fornece sobre esse potencial. Ao aplicar o divergente em coordenadas cartesianas na Equação (3.18), obtém-se que

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_k(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (3.21)$$

o que mostra que o potencial vetor é perpendicular ao seu vetor de onda. Essa característica faz com que o gauge de Coulomb também seja conhecido como gauge transverso.

Como consequência, o potencial vetor  $\mathbf{A}_k(\mathbf{r}, t)$  pode ser escrito em termos dos vetores polarização  $\mathbf{e}_{\mathbf{k},1}$  e  $\mathbf{e}_{\mathbf{k},2}$  (ortonormais), os quais são perpendiculares ao vetor  $\mathbf{k}$ . Dessa forma, a Equação (3.19) se torna

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k},s} \mathbf{e}_{\mathbf{k},s} \left[ A_{\mathbf{k},s} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t)} + A_{\mathbf{k},s}^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t)} \right], \quad (3.22)$$

em que, para cada  $\mathbf{k}$ , existem duas polarizações  $s = 1, 2$ .

Finalmente, com a substituição da Equação (3.22) nas Equações (3.5) e (3.7), os campos elétrico e magnético são dados por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k},s} \omega_k \mathbf{e}_{\mathbf{k},s} \left[ A_{\mathbf{k},s} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t)} - A_{\mathbf{k},s}^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t)} \right] \quad (3.23)$$

e

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{c} \sum_{\mathbf{k},s} \omega_k (\mathbf{e}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k},s}) \left[ A_{\mathbf{k},s} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t)} - A_{\mathbf{k},s}^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t)} \right], \quad (3.24)$$

em que  $\mathbf{e}_{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/\|\mathbf{k}\|$ .

### 3.1.5 Hamiltoniana do campo eletromagnético

Conforme a teoria eletromagnética clássica estabelece, a hamiltoniana do campo eletromagnético no vácuo tem a forma

$$H = \frac{1}{2} \int dV \left( \varepsilon_0 \|\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)\|^2 + \frac{1}{\mu_0} \|\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)\|^2 \right), \quad (3.25)$$

em que  $V$  é o volume no qual o campo eletromagnético se encontra. Cabe aqui obter essa hamiltoniana calculando a integral utilizando os campos elétrico e magnéticos obtidos.

Antes de substituir as expressões dos campos elétrico e magnético na hamiltoniana, vale a pena simplificar suas expressões definindo

$$A_{\mathbf{k},s}(t) \equiv A_{\mathbf{k},s} e^{i\omega_k t}, \quad (3.26)$$

o que faz com que as Equações (3.23) e (3.24) sejam reescritas como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k},s} \omega_k \mathbf{e}_{\mathbf{k},s} \left( A_{\mathbf{k},s}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - A_{\mathbf{k},s}^*(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right) \quad (3.27)$$

e

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{c} \sum_{\mathbf{k},s} \omega_k (\mathbf{e}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k},s}) \left( A_{\mathbf{k},s}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - A_{\mathbf{k},s}^*(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right). \quad (3.28)$$

Também é útil dividir em duas a integral presente na hamiltoniana, de modo que

$$I_{\mathbf{E}} \equiv \frac{\varepsilon_0}{2} \int dV \|\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)\|^2 \quad (3.29)$$

e

$$I_{\mathbf{B}} \equiv \frac{1}{2\mu_0} \int dV \|\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)\|^2, \quad (3.30)$$

e assim calculá-las separadamente.

Para o cálculo da integral  $I_{\mathbf{E}}$ , deve-se primeiramente substituir a Equação (3.27) na Equação (3.29). Com o desenvolvimento do quadrado da norma de  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ , que é simplesmente tomar o produto escalar  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ , surgem as integrais

$$\int dV e^{\pm i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} = \delta_{\mathbf{k},-\mathbf{k}'} V \quad (3.31)$$

e

$$\int dV e^{\pm i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} V. \quad (3.32)$$

Com isso, a integral  $I_{\mathbf{E}}$  pode ser escrita explicitamente como

$$I_{\mathbf{E}} = \frac{\varepsilon_0 V}{2} \sum_{\mathbf{k},s} \sum_{\mathbf{k}',s'} \omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'} (\mathbf{e}_{\mathbf{k},s} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}',s'}) \left( A_{\mathbf{k},s}(t) A_{\mathbf{k}',s'}^*(t) \delta_{-\mathbf{k},\mathbf{k}'} - A_{\mathbf{k},s}(t) A_{\mathbf{k}',s'}(t) \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} + c.c. \right), \quad (3.33)$$

que, ao se utilizar a definição da delta de Kronecker, se torna

$$I_{\mathbf{E}} = \frac{\varepsilon_0 V}{2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{s,s'} \omega_{\mathbf{k}}^2 (\mathbf{e}_{\mathbf{k},s} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k},s'}) \left( A_{\mathbf{k},s}(t) A_{\mathbf{k},s'}^*(t) + c.c. \right) - R, \quad (3.34)$$

sendo

$$R = \frac{\varepsilon_0 V}{2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{s,s'} \omega_{\mathbf{k}}^2 (\mathbf{e}_{\mathbf{k},s} \cdot \mathbf{e}_{-\mathbf{k},s'}) \left( A_{\mathbf{k},s}(t) A_{-\mathbf{k},s'}(t) + c.c. \right). \quad (3.35)$$

Por fim, com a utilização da relação de ortonormalidade  $\mathbf{e}_{\mathbf{k},s} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k},s'} = \delta_{s,s'}$  na Equação (3.34), tem-se

$$I_{\mathbf{E}} = \varepsilon_0 V \sum_{\mathbf{k},s} \omega_{\mathbf{k}}^2 A_{\mathbf{k},s}(t) A_{\mathbf{k},s}^*(t) + R. \quad (3.36)$$

Assim como foi para a integral  $I_{\mathbf{E}}$ , para resolver a integral  $I_{\mathbf{B}}$  deve-se primeiramente substituir a Equação (3.28) na Equação (3.30). O desenvolvimento do quadrado da norma de  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  leva às mesmas integrais descritas nas Equações (3.31) e (3.32), o que faz com que a integral  $I_{\mathbf{B}}$  seja escrita como

$$I_{\mathbf{B}} = \frac{V}{2\mu_0 c^2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{s,s'} \omega_{\mathbf{k}}^2 (\mathbf{e}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k},s}) \cdot (\mathbf{e}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k},s'}) \left( A_{\mathbf{k},s}(t) A_{\mathbf{k},s'}^*(t) + c.c. \right) - \frac{V}{2\mu_0 c^2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{s,s'} \omega_{\mathbf{k}}^2 (\mathbf{e}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k},s}) \cdot (-\mathbf{e}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_{-\mathbf{k},s'}) \left( A_{\mathbf{k},s}(t) A_{-\mathbf{k},s'}(t) + c.c. \right). \quad (3.37)$$

Para calcular os produtos escalares entre os produtos vetoriais, deve-se utilizar a relação vetorial  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$ , o que leva aos seguintes

resultados:  $(\mathbf{e}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k},s}) \cdot (\mathbf{e}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k},s'}) = \delta_{s,s'}$  e  $(\mathbf{e}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k},s}) \cdot (-\mathbf{e}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_{-\mathbf{k},s'}) = -\mathbf{e}_{\mathbf{k},s} \cdot \mathbf{e}_{-\mathbf{k},s'}$ . Com isso, a Equação (3.37) se torna

$$I_{\mathbf{B}} = \varepsilon_0 V \sum_{\mathbf{k},s} \omega_k^2 A_{\mathbf{k},s}(t) A_{\mathbf{k},s}^*(t) + R. \quad (3.38)$$

Após calcular as integrais  $I_{\mathbf{E}}$  e  $I_{\mathbf{B}}$ , resta apenas utilizá-las para se obter a hamiltoniana  $H$ . Dessa forma, ao substituir as Equações (3.36) e (3.38) na Equação (3.25), se chega à expressão

$$H = 2\varepsilon_0 V \sum_{\mathbf{k},s} \omega_k^2 A_{\mathbf{k},s}(t) A_{\mathbf{k},s}^*(t), \quad (3.39)$$

a qual, ao se utilizar a Equação (3.26), pode ser reescrita simplesmente como

$$H = 2\varepsilon_0 V \sum_{\mathbf{k},s} \omega_k^2 A_{\mathbf{k},s} A_{\mathbf{k},s}^*. \quad (3.40)$$

### 3.1.6 Quantização do campo eletromagnético

A quantização do campo eletromagnético tem como ponto de partida a hamiltoniana descrita pela Equação (3.40). Com o auxílio de uma conveniente mudança de variável, especificamente a mudança

$$A_{\mathbf{k},s} = \frac{1}{2\omega_k \sqrt{\varepsilon_0 V}} (\omega_k q_{\mathbf{k},s} + ip_{\mathbf{k},s}), \quad (3.41)$$

a hamiltoniana  $H$  pode ser reescrita como

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k},s} (p_{\mathbf{k},s}^2 + \omega_k q_{\mathbf{k},s}^2), \quad (3.42)$$

a qual possui a forma da hamiltoniana de infinitos osciladores harmônicos independentes com massa unitária. Dessa forma, a quantização do campo eletromagnético pode ser feita como no caso do oscilador harmônico: substitui-se as variáveis  $p_{\mathbf{k},s}$  e  $q_{\mathbf{k},s}$  pelos operadores  $\hat{p}_{\mathbf{k},s}$  e  $\hat{q}_{\mathbf{k},s}$  que satisfazem as relações de comutação

$$[\hat{q}_{\mathbf{k},s}, \hat{q}_{\mathbf{k}',s'}] = 0 = [\hat{p}_{\mathbf{k},s}, \hat{p}_{\mathbf{k}',s'}] \quad (3.43)$$

e

$$[\hat{q}_{\mathbf{k},s}, \hat{p}_{\mathbf{k}',s'}] = i\hbar \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \delta_{s,s'}. \quad (3.44)$$

Com isso, a função hamiltoniana  $H$  dá lugar ao operador hamiltoniano  $\hat{H}$  dado por

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k},s} (\hat{p}_{\mathbf{k},s}^2 + \omega_k \hat{q}_{\mathbf{k},s}^2). \quad (3.45)$$

Assim como no caso do oscilador harmônico, o hamiltoniano do campo eletromag-

nético pode ainda ser descrito em termos dos chamados operadores aniquilação e criação. Os operadores aniquilação  $\hat{a}_{\mathbf{k},s}$  e criação  $\hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger$  são definidos como

$$\hat{a}_{\mathbf{k},s} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_k}} (\omega_k \hat{q}_{\mathbf{k},s} + i\hat{p}_{\mathbf{k},s}) \quad (3.46)$$

e

$$\hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_k}} (\omega_k \hat{q}_{\mathbf{k},s} - i\hat{p}_{\mathbf{k},s}), \quad (3.47)$$

os quais, por meio das Equações (3.43) e (3.44), obedecem às relações de comutação

$$[\hat{a}_{\mathbf{k},s}, \hat{a}_{\mathbf{k}',s'}] = 0 = [\hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}',s'}^\dagger] \quad (3.48)$$

e

$$[\hat{a}_{\mathbf{k},s}, \hat{a}_{\mathbf{k}',s'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \delta_{s,s'}. \quad (3.49)$$

Dessa forma, o hamiltoniano  $\hat{H}$  pode ser reescrito como

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k},s} \hbar\omega_k \left( \hat{n}_{\mathbf{k},s} + \frac{1}{2} \right) \quad (3.50)$$

em que  $\hat{n}_{\mathbf{k},s} = \hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},s}$  é o operador número do modo definido pelo vetor de onda  $\mathbf{k}$  e pela polarização  $s$ .

O campo eletromagnético é comumente descrito pela combinação das bases  $\{|n_{\mathbf{k},s}\rangle\}$  de autoestados dos operadores número  $n_{\mathbf{k},s}$ . Dessa forma, para cara modo definido por  $\mathbf{k}$  e  $s$ , há a equação de autovalores

$$\hat{n}_{\mathbf{k},s} |n_{\mathbf{k},s}\rangle = n_{\mathbf{k},s} |n_{\mathbf{k},s}\rangle, \quad (3.51)$$

na qual  $n_{\mathbf{k},s}$  pode ser qualquer número inteiro não negativo correspondente ao número de fótons do modo. Por outro lado, os operadores criação  $\hat{a}_{\mathbf{k},s}$  e aniquilação  $\hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger$  tem suas atuações na base  $\{|n_{\mathbf{k},s}\rangle\}$  definidas por

$$\hat{a}_{\mathbf{k},s} |n_{\mathbf{k},s}\rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k},s}} |n_{\mathbf{k},s} - 1\rangle, \quad (3.52)$$

em que

$$\hat{a}_{\mathbf{k},s} |0\rangle = 0, \quad (3.53)$$

e

$$\hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger |n_{\mathbf{k},s}\rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k},s} + 1} |n_{\mathbf{k},s} + 1\rangle, \quad (3.54)$$

o que mostra o porque das nomenclaturas aniquilação e criação. Assim, ao realizar o produto tensorial dos espaços de estados dos infinitos modos, o campo eletromagnético pode ser descrito pela base  $\{|n_{\mathbf{k}_1,s_1}, n_{\mathbf{k}_2,s_2}, \dots\rangle\}$ .

Finalmente, ao comparar a Equação (3.41) com as Equações (3.46) e (3.47), a descrição quântica dos campos elétrico e magnético é obtida ao efetuar as substituições

$$A_{\mathbf{k},s} \rightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k \varepsilon_0 V}} \hat{a}_{\mathbf{k},s}$$

e

$$A_{\mathbf{k},s}^* \rightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k \varepsilon_0 V}} \hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger$$

nas Equações (3.23) e (3.24), o que leva aos operadores

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k},s} \mathbf{e}_{\mathbf{k},s} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 V}} \left[ \hat{a}_{\mathbf{k},s} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} - \hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \right], \quad (3.55)$$

e

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{c} \sum_{\mathbf{k},s} (\mathbf{e}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k},s}) \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 V}} \left[ \hat{a}_{\mathbf{k},s} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} + \hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \right]. \quad (3.56)$$

É importante observar que esses operadores estão na representação de Heisenberg, na representação de Schrödinger eles são simplesmente

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = i \sum_{\mathbf{k},s} \mathbf{e}_{\mathbf{k},s} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 V}} \left( \hat{a}_{\mathbf{k},s} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right), \quad (3.57)$$

e

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) = \frac{i}{c} \sum_{\mathbf{k},s} (\mathbf{e}_{\mathbf{k}} \times \mathbf{e}_{\mathbf{k},s}) \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 V}} \left( \hat{a}_{\mathbf{k},s} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right). \quad (3.58)$$

### 3.1.7 Campo eletromagnético no interior de uma cavidade

O campo eletromagnético monomodal no interior de uma cavidade unidimensional com paredes perfeitamente condutoras tem especial importância para este trabalho. Nesse caso, conforme a teoria clássica eletromagnética estabelece, a condição de contorno é que o campo elétrico seja nulo nas paredes da cavidade [22]. Conseqüentemente, no gauge de Coulomb o potencial vetor também deve ser nulo nas paredes da cavidade, como mostra a Equação (3.7). Dessa forma, levando em conta essa condição de contorno para o potencial vetor, a quantização do campo eletromagnético no interior da cavidade pode ser feita de maneira semelhante a que foi feita anteriormente.

De acordo com a Equação (3.22), considerando somente uma direção de polarização  $s$ , o potencial vetor de um campo eletromagnético monomodal que se propaga ao longo de uma única direção é dado pela expressão

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = & \mathbf{e}_{\mathbf{k},s} \left[ A_{\mathbf{k},s} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t)} + A_{\mathbf{k},s}^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t)} \right] + \\ & + \mathbf{e}_{-\mathbf{k},s} \left[ A_{-\mathbf{k},s} e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\omega_k t)} + A_{-\mathbf{k},s}^* e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\omega_k t)} \right]. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Ao considerar uma cavidade na qual o campo se propaga ao longo de  $z$  ( $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_z$ ), Figura 3.1, a Equação (3.59) pode ser reescrita como

$$\mathbf{A}(z, t) = \mathbf{e}_x \left[ A_{\mathbf{k}} e^{i(kz - \omega t)} + A_{\mathbf{k}}^* e^{-i(kz - \omega t)} - A_{-\mathbf{k}} e^{-i(kz + \omega t)} - A_{-\mathbf{k}}^* e^{i(kz + \omega t)} \right], \quad (3.60)$$

em que a direção  $x$  foi convenientemente escolhida como a direção de polarização. Aplicando a condição de contorno, a qual diz que o potencial vetor deve ser nulo nas paredes da cavidade, a Equação (3.60) se torna

$$\mathbf{A}(z, t) = -i\mathbf{e}_x \left( A e^{-i\omega t} - A^* e^{i\omega t} \right) \text{sen}(kz), \quad (3.61)$$

em que  $A \equiv 2A_{\mathbf{k}} = 2A_{-\mathbf{k}}$  e  $k = m\pi/L$ , sendo  $L$  o comprimento da cavidade e  $m = 1, 2, \dots$ . Dessa forma, utilizando esse potencial vetor, a quantização do campo eletromagnético no interior da cavidade leva aos campos

$$\hat{\mathbf{E}}(z, t) = \mathbf{e}_x \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V}} \left( \hat{a} e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t} \right) \text{sen}(kz) \quad (3.62)$$

e

$$\hat{\mathbf{B}}(z, t) = -\frac{i}{c} \mathbf{e}_y \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V}} \left( \hat{a} e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t} \right) \cos(kz), \quad (3.63)$$

os quais na representação de Schrödinger são dados por

$$\hat{\mathbf{E}}(z) = \mathbf{e}_x \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V}} \left( \hat{a} + \hat{a}^\dagger \right) \text{sen}(kz) \quad (3.64)$$

e

$$\hat{\mathbf{B}}(z) = -\frac{i}{c} \mathbf{e}_y \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V}} \left( \hat{a} + \hat{a}^\dagger \right) \cos(kz). \quad (3.65)$$

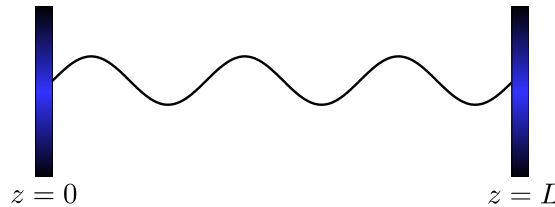


Figura 3.1: Ilustração de uma cavidade unidimensional com paredes situadas nas posições  $z = 0$  e  $z = L$ .

## 3.2 Hamiltoniano de interação átomo-campo

A interação entre os átomos e o campo eletromagnético, seja ele clássico ou quantizado, tem papel fundamental na óptica quântica. Nesse contexto, os átomos

interessantes são os pertencentes aos metais alcalinos, pois possuem somente um elétron de valência [18, 23]. Dessa forma, o objetivo desta seção é chegar ao hamiltoniano que descreve a interação entre o átomo e o campo eletromagnético [19].

### 3.2.1 Interação do átomo com o campo clássico

O átomo de hidrogênio, o qual é constituído por apenas um elétron e um próton, é o átomo mais simples de ser tratado. Nesse caso, fixando a origem do referencial no próton (núcleo atômico), o elétron está ligado ao próton por meio do potencial central

$$V(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}, \quad (3.66)$$

em que  $r$  é a norma do vetor posição do elétron  $\mathbf{r}$  e  $e$  é a carga do próton. Em certa aproximação, a descrição dos átomos pertencentes aos metais alcalinos pode se dar de maneira semelhante: o átomo pode ser descrito por um único elétron (o elétron de valência) sujeito a um potencial radial gerado pelo núcleo e pelo restante dos elétrons [23]. Dessa forma, a descrição que será dada a seguir pode ser aplicada tanto ao átomo de hidrogênio quanto aos átomos dos metais alcalinos.

Na representação das posições, na qual  $\hat{\mathbf{r}}|\mathbf{r}\rangle = \mathbf{r}|\mathbf{r}\rangle$ , o hamiltoniano do elétron de valência na presença de um campo eletromagnético clássico tem a forma

$$\hat{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2m_e} \|\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)\|^2 - e\Phi(\mathbf{r}, t) + V(r), \quad (3.67)$$

em que  $m_e$  é a massa do elétron e  $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$  é o operador momento canônico. Com a escolha do gauge de Coulomb,  $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0$  e  $\Phi(\mathbf{r}, t) = 0$ , o hamiltoniano  $H(\mathbf{r}, t)$  se torna simplesmente

$$\hat{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2m_e} \|\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)\|^2 + V(r). \quad (3.68)$$

Quando se trata da interação átomo-campo, uma aproximação bastante útil é a chamada aproximação de dipolo. Essa aproximação consiste em considerar que o campo eletromagnético é uniforme na extensão do átomo,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \simeq \mathbf{A}(0, t), \quad (3.69)$$

o que é uma boa aproximação se os comprimentos de onda  $\lambda_k = 2\pi c/\omega_k$  do campo forem muito maiores que as dimensões atômicas. Com isso, a Equação (3.68) pode ser reescrita como

$$\hat{H}(r, t) = \frac{1}{2m_e} \|\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A}(0, t)\|^2 + V(r). \quad (3.70)$$

Apesar da expressão dada pela Equação (3.70) ser simples, uma mudança de gauge pode fornecer uma expressão mais conveniente para o hamiltoniano do elétron na

presença do campo eletromagnético. Por sua vez, a mudança de gauge faz com que o hamiltoniano dado pela Equação (3.67) dê lugar ao hamiltoniano

$$\hat{H}'(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2m_e} \|\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t)\|^2 - e\Phi'(\mathbf{r}, t) + V(r). \quad (3.71)$$

Para realizar a mudança de gauge, a função  $\chi(\mathbf{r}, t)$  pode ser convenientemente escolhida como sendo

$$\chi(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}(0, t), \quad (3.72)$$

a qual, de acordo com as Equações (3.11) e (3.13), fornece

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (3.73)$$

e

$$\Phi'(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(0, t). \quad (3.74)$$

Com isso, ao substituir as Equações (3.73) e (3.74) na Equação (3.71), tem-se o hamiltoniano

$$\hat{H}'(t) = \frac{1}{2m_e} \|\hat{\mathbf{p}}\|^2 + V(r) - \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(0, t), \quad (3.75)$$

em que  $\mathbf{d} = -e\mathbf{r}$  é o momento de dipolo. Por fim, ao abandonar a representação das posições, a Equação (3.75) pode ser reescrita como

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_a + \hat{H}_{int}(t), \quad (3.76)$$

em que

$$\hat{H}_a = \frac{1}{2m_e} \|\hat{\mathbf{p}}\|^2 + \hat{V} \quad (3.77)$$

é o hamiltoniano do campo na ausência do campo eletromagnético e

$$\hat{H}_{int}(t) = -\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}(0, t) \quad (3.78)$$

é o hamiltoniano de interação átomo-campo (no caso do campo eletromagnético clássico).

### 3.2.2 Interação do átomo com campo quantizado

O hamiltoniano do elétron na presença do campo eletromagnético quantizado pode ser obtido da mesma forma que foi para o caso do campo eletromagnético clássico. Dessa forma, tem-se o hamiltoniano

$$\hat{H}' = \hat{H}_a + \hat{H}_{int}, \quad (3.79)$$

em que  $\hat{H}_a$  é dado pela Equação (3.77) e

$$\hat{H}_{int} = -\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{E}}(0). \quad (3.80)$$

### 3.3 Átomo de três níveis e sua interação com o campo

Como consequência de sua interação com o campo eletromagnético, o átomo pode sofrer transições entre seus níveis de energia. Em certas condições, dependendo do campo eletromagnético, o átomo pode sofrer transições somente entre três de seus níveis. Nessas condições, todos os outros níveis podem ser desconsiderados, o que faz com que o átomo receba a denominação de átomo de três níveis. A seguir será abordada a descrição da interação do átomo de três níveis com os campos clássico e quantizado [18, 24].

#### 3.3.1 Átomo de três níveis

O átomo de três níveis é descrito pelos autoestados  $|a\rangle$ ,  $|b\rangle$  e  $|c\rangle$  do hamiltoniano do átomo livre  $\hat{H}_a$ . Conseqüentemente, esses autoestados estabelecem os níveis de energia do átomo por meio das equações de autovalores

$$\hat{H}_a|a\rangle = \hbar\omega_a|a\rangle, \quad (3.81)$$

$$\hat{H}_a|b\rangle = \hbar\omega_b|b\rangle \quad (3.82)$$

e

$$\hat{H}_a|c\rangle = \hbar\omega_c|c\rangle. \quad (3.83)$$

Quanto a disposição dos níveis de energia, há somente três configurações possíveis. Na Figura 3.2 estão ilustradas essas possíveis configurações, sendo as transições não sinalizadas proibidas pela regra de seleção. Devido à sua importância para esse trabalho, a seguir será considerado somente o átomo na configuração escada.

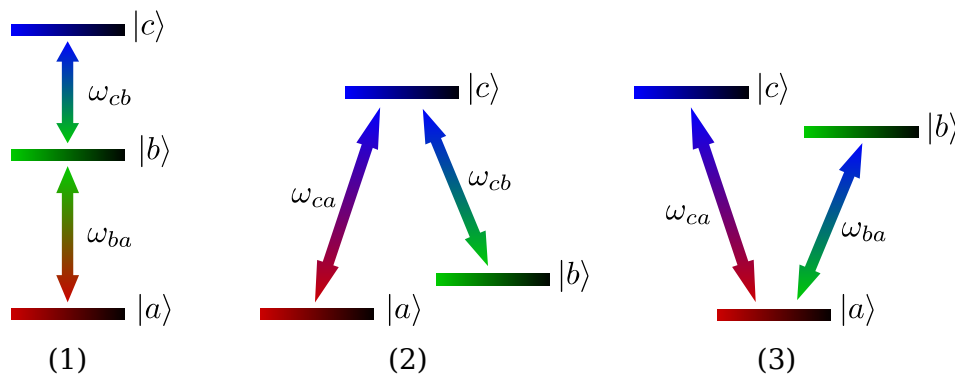


Figura 3.2: Configurações possíveis dos níveis de energia do átomo de três níveis: (1) configuração escada, (2) configuração  $\Lambda$ , e (3) configuração  $V$ .

### 3.3.2 Interação com o campo eletromagnético clássico

Considerando a interação do átomo de três níveis na configuração escada com o campo eletromagnético clássico, o hamiltoniano do sistema átomo-campo (Equação (3.79)) tem a forma

$$\hat{H} = \hat{H}_a + \hat{H}_{int}. \quad (3.84)$$

Como o espaço de estados do átomo de três níveis é gerado pela base  $\{|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle\}$ , a relação de completudeza

$$|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b| + |c\rangle\langle c| = \hat{I} \quad (3.85)$$

possibilita que o hamiltoniano  $\hat{H}_a$  seja escrito como

$$\hat{H}_a = \hbar\omega_a\hat{\sigma}_{aa} + \hbar\omega_b\hat{\sigma}_{bb} + \hbar\omega_c\hat{\sigma}_{cc}, \quad (3.86)$$

em que  $\hat{\sigma}_{\nu\eta} \equiv |\nu\rangle\langle\eta|$ . Por outro lado, utilizando a Equação (3.80), o hamiltoniano  $\hat{H}_{int}$  pode ser escrito como

$$\hat{H}_{int} = -\hat{\mathbf{d}} \cdot (\mathbf{E}_1(t) + \mathbf{E}_2(t)), \quad (3.87)$$

em que os campos clássicos  $\mathbf{E}_j(t)$  são dados pela expressão

$$\mathbf{E}_j(t) = \mathbf{e}_j \left( \mathcal{E}_j e^{i\omega_j t} + \mathcal{E}_j^* e^{-i\omega_j t} \right), \quad (3.88)$$

na qual é considerado que  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são aproximadamente ressonantes com as transições  $|a\rangle \leftrightarrow |b\rangle$  e  $|b\rangle \leftrightarrow |c\rangle$ , respectivamente. Ao substituir a Equação (3.87) na Equação (3.88), tem-se

$$\hat{H}_{int} = -(\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{e}_1) \left( \mathcal{E}_1 e^{i\omega_1 t} + \mathcal{E}_1^* e^{-i\omega_1 t} \right) - (\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{e}_2) \left( \mathcal{E}_2 e^{i\omega_2 t} + \mathcal{E}_2^* e^{-i\omega_2 t} \right), \quad (3.89)$$

que, ao utilizar a Equação (3.85) e fazer considerações de paridade, pode ser reescrita na forma

$$\hat{H}_{int} = \hbar(\mu_1\hat{\sigma}_{ab} + \mu_1^*\hat{\sigma}_{ba}) \left( \mathcal{E}_1 e^{i\omega_1 t} + \mathcal{E}_1^* e^{-i\omega_1 t} \right) + \hbar(\mu_2\hat{\sigma}_{bc} + \mu_2^*\hat{\sigma}_{cb}) \left( \mathcal{E}_2 e^{i\omega_2 t} + \mathcal{E}_2^* e^{-i\omega_2 t} \right) \quad (3.90)$$

em que  $\mu_1 = -\langle a | (\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{e}_1) | b \rangle / \hbar$  e  $\mu_2 = -\langle b | (\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{e}_2) | c \rangle / \hbar$ .

Em muitos casos, a descrição do sistema se torna mais simples com a utilização da representação de interação. Nessa representação o sistema é descrito simplesmente pelo hamiltoniano

$$\hat{H}_I = \hat{U}_0^\dagger(t) \hat{H}_{int} \hat{U}_0(t), \quad (3.91)$$

em que

$$\hat{U}_0(t) = e^{-i\hat{H}_0 t / \hbar}. \quad (3.92)$$



O hamiltoniano  $\hat{H}_0$  é a parte livre do hamiltoniano do sistema, no caso do sistema átomo-campo  $\hat{H}_0 = \hat{H}_a$ . Com isso, a substituição da Equação (3.90) na Equação (3.91), juntamente com a utilização da aproximação de ondas girantes (a qual consiste em desprezar os termos que oscilam rapidamente), leva à expressão

$$\hat{H}_I = \hbar \left( \Omega_1 \hat{\sigma}_{ab} e^{-i\Delta_{ba}t} + \Omega_1^* \hat{\sigma}_{ba} e^{i\Delta_{ba}t} \right) + \hbar \left( \Omega_2 \hat{\sigma}_{bc} e^{-i\Delta_{cb}t} + \Omega_2^* \hat{\sigma}_{cb} e^{i\Delta_{cb}t} \right), \quad (3.93)$$

em que  $\Delta_{ba} = \omega_{ba} - \omega_1 = (\omega_b - \omega_a) - \omega_1$  e  $\Delta_{cb} = \omega_{cb} - \omega_2 = (\omega_c - \omega_b) - \omega_2$  são as dessintonias, e  $\Omega_j = \mu_j \mathcal{E}_j$  são as frequências de Rabi.

### 3.3.3 Interação com campo eletromagnético quantizado

Considerando agora a interação do átomo de três níveis na configuração escada com o campo eletromagnético quantizado de uma cavidade, o hamiltoniano do sistema átomo-campo tem a forma

$$\hat{H} = \hat{H}_a + \hat{H}_c + \hat{H}_{int}, \quad (3.94)$$

em que  $\hat{H}_c$  é o hamiltoniano do campo livre. Conforme a Equação (3.80), o hamiltoniano de interação átomo-campo tem a forma

$$\hat{H}_{int} = -\hat{\mathbf{d}} \cdot (\hat{\mathbf{E}}_1 + \hat{\mathbf{E}}_2), \quad (3.95)$$

em que, de acordo com a Equação (3.64),

$$\hat{\mathbf{E}}_j = \mathbf{e}_j \sqrt{\frac{\hbar\omega_j}{\varepsilon_0 V}} (\hat{a}_j + \hat{a}_j^\dagger) \text{sen}(k_j z_0), \quad (3.96)$$

sendo  $z_0$  a posição do átomo na cavidade. Assim como antes, considera-se que  $\omega_1$  e  $\omega_2$  sejam aproximadamente ressonantes com as transições  $|a\rangle \leftrightarrow |b\rangle$  e  $|b\rangle \leftrightarrow |c\rangle$ , respectivamente. Substituindo a Equação (3.96) na Equação (3.85), se chega à expressão

$$\hat{H}_{int} = -(\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{e}_1) \sqrt{\frac{\hbar\omega_1}{\varepsilon_0 V}} (\hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger) \text{sen}(k_1 z_0) - (\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{e}_2) \sqrt{\frac{\hbar\omega_2}{\varepsilon_0 V}} (\hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger) \text{sen}(k_2 z_0), \quad (3.97)$$

a qual, ao se utilizar a Equação (3.85) e fazer considerações de paridade, pode ser reescrita na forma

$$\hat{H}_{int} = \hbar (g_1 \hat{\sigma}_{ab} + g_1^* \hat{\sigma}_{ba}) (\hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger) + \hbar (g_2 \hat{\sigma}_{bc} + g_2^* \hat{\sigma}_{cb}) (\hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger), \quad (3.98)$$

sendo  $g_1 = -\sqrt{\frac{\omega_1}{\hbar\varepsilon_0 V}} \langle a | (\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{e}_1) | b \rangle \text{sen}(k_1 z_0)$  e  $g_2 = -\sqrt{\frac{\omega_2}{\hbar\varepsilon_0 V}} \langle b | (\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{e}_2) | c \rangle \text{sen}(k_2 z_0)$  chamados de coeficientes de acoplamento. Por outro lado, como há dois modos do campo, a

Equação (3.50) fornece o hamiltoniano do campo livre

$$\hat{H}_c = \hbar\omega_1 \left( \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_2 \left( \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \frac{1}{2} \right). \quad (3.99)$$

Na representação de interação, ao utilizar a aproximação de ondas girantes, a Equação (3.98) fornece

$$\hat{H}_I = \hbar \left( g_1 \hat{\sigma}_{ab} \hat{a}_1^\dagger e^{-i\Delta_{ba}t} + g_1^* \hat{\sigma}_{ba} \hat{a}_1 e^{i\Delta_{ba}t} \right) + \hbar \left( g_2 \hat{\sigma}_{bc} \hat{a}_2^\dagger e^{-i\Delta_{cb}t} + g_2^* \hat{\sigma}_{cb} \hat{a}_2 e^{i\Delta_{cb}t} \right). \quad (3.100)$$

### 3.3.4 Efeito Stark no átomo de três níveis

O efeito Stark é o deslocamento dos níveis de energia de átomos ou moléculas devido à ação de um campo elétrico externo. No caso de um átomo de três níveis na presença de um campo elétrico constante, o hamiltoniano que descreve o sistema (Equação (3.79)) é dado por

$$\hat{H} = \hat{H}_a + \hat{H}_{int}. \quad (3.101)$$

Considerando um campo elétrico constante  $\mathbf{E} = \mathcal{E}_0 \mathbf{e}$ , a Equação (3.80) fornece o hamiltoniano de interação

$$\hat{H}_{int} = -\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{e} \mathcal{E}_0. \quad (3.102)$$

Se a perturbação provocada no sistema for pequena, então a teoria de perturbação independente do tempo de segunda ordem fornece os níveis de energia deslocados

$$E'_k = E_k + \langle k | \hat{H}_{int} | k \rangle + \sum_{l \neq k} \frac{|\langle l | \hat{H}_{int} | k \rangle|^2}{E_k - E_l}, \quad (3.103)$$

em que os índices  $l$  e  $k$  se referem a  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Dessa forma, levando em conta as regras de transição, tem-se as energia

$$E'_a = E_a + \frac{|\langle b | \hat{H}_{int} | a \rangle|^2}{E_a - E_b}, \quad (3.104)$$

$$E'_b = E_b + \frac{|\langle a | \hat{H}_{int} | b \rangle|^2}{E_b - E_a} + \frac{|\langle c | \hat{H}_{int} | b \rangle|^2}{E_b - E_c}, \quad (3.105)$$

e

$$E'_c = E_c + \frac{|\langle b | \hat{H}_{int} | c \rangle|^2}{E_c - E_b}. \quad (3.106)$$

Considerando agora que se deseja que as transições  $|a\rangle \leftrightarrow |b\rangle$  e  $|b\rangle \leftrightarrow |c\rangle$  tenha a mesma energia, ou seja,

$$E'_c - E'_b = E'_b - E'_a, \quad (3.107)$$

tem-se a expressão

$$\omega_{ba} - \omega_{cb} = \frac{3\mathcal{E}_0^2}{\hbar^2} \left( \frac{|\langle c|\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{e}|b\rangle|^2}{\omega_{cb}} - \frac{|\langle b|\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{e}|a\rangle|^2}{\omega_{ba}} \right), \quad (3.108)$$

na qual foram utilizadas as Equações (3.81), (3.82), (3.83) e (3.102). Por fim, estabelecendo a relação

$$|\langle c|\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{e}|b\rangle| = K |\langle b|\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{e}|a\rangle|, \quad (3.109)$$

em que  $K$  é uma constante de proporcionalidade, a Equação (3.108) fornece o campo

$$\mathcal{E}_0 = \frac{\hbar}{\sqrt{3} |\langle b|\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{e}|a\rangle|} \left[ \frac{\omega_{ba} - \omega_{cb}}{\left( \frac{K^2}{\omega_{cb}} - \frac{1}{\omega_{ba}} \right)} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.110)$$

Assim, como pode ser observado na Equação (3.110), o campo elétrico capaz de promover a Equação (3.107) é obtido das características do átomo aliadas à direção do campo.



---

# DISCRIMINAÇÃO DE ESTADOS NÃO ORTOGONAIS DO CAMPO NO INTERIOR DE UMA CAVIDADE

---

Quando foi dado o exemplo sobre discriminação de estados não ortogonais no Capítulo 2, não foi dito em qual contexto Alice preparou os estados e, conseqüentemente, também não foi dito qual protocolo gerou o conjunto de elementos do *POVM* que Bob utilizou para a discriminação. A seguir, será proposto um protocolo, no contexto de eletrodinâmica quântica de cavidades, capaz de discriminar os estados do exemplo, e será mostrado como os elementos do *POVM* podem ser obtidos teoricamente a partir dele.

## 4.1 Protocolo proposto

O protocolo consiste em utilizar como sonda um átomo de três níveis na configuração escada para tentar discriminar dois estados do campo de uma cavidade alvo. Os estados de interesse aqui, assim como no exemplo sobre discriminação de estados do Capítulo 2, são os estados

$$|\psi_1\rangle = |0\rangle \quad (4.1)$$

e

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad (4.2)$$

em que  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  são autoestados do operador número  $\hat{n}$  do modo do campo da cavidade. Como ilustrado na Figura 4.1, no protocolo proposto o átomo de três níveis, previamente preparado no estado fundamental  $|a\rangle$ , passa primeiramente por uma região contendo um campo eletromagnético clássico conhecida como zona de Ramsey. Esse campo eletromagnético é ressonante com a transição  $|a\rangle \leftrightarrow |b\rangle$ , o que faz com que ao sair da zona de Ramsey o átomo esteja em uma superposição do tipo  $\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle$ . Ao chegar à cavidade, o átomo

interage com um campo elétrico constante com o objetivo de promover o efeito Stark nos níveis de energia do átomo, o que (em certas condições) faz com que as transições  $|a\rangle \leftrightarrow |b\rangle$  e  $|b\rangle \leftrightarrow |c\rangle$  se tornem ressonantes com o modo do campo da cavidade [25, 26]. Por fim, ao sair da cavidade é realizada uma medição de von Neumann no átomo, o que pode oferecer informação que leve à discriminação.

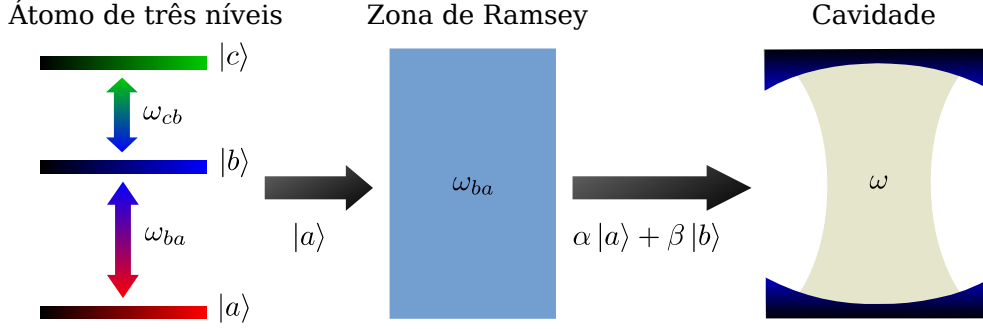


Figura 4.1: Esquema ilustrativo do protocolo proposto para a discriminação dos estados  $|0\rangle$  e  $(1/\sqrt{2})(|0\rangle + |1\rangle)$  do campo da cavidade.

## 4.2 Elementos do *POVM*

A discriminação de estados utilizando *POVM* requer o conhecimento do conjunto de elementos do *POVM*. Conforme a teoria descrita no Capítulo 2, para obter os elementos do *POVM* deve-se primeiramente conhecer o operador evolução do sistema sonda-alvo. Considerando o protocolo proposto, o operador evolução do sistema átomo-cavidade, na representação de interação, tem a forma

$$\hat{U} = \hat{U}_c \hat{U}_{ZR}, \quad (4.3)$$

em que  $\hat{U}_{ZR}$  e  $\hat{U}_c$  são, respectivamente, os operadores evolução temporal da zona de Ramsey e da cavidade. O operador evolução temporal  $\hat{U}_{ZR}$ , de acordo com a Equação (2.9), tem a forma

$$\hat{U}_{ZR} = e^{-i\hat{H}_{ZR}\Delta t_{ZR}/\hbar}, \quad (4.4)$$

em que  $\Delta t_{ZR}$  e  $\hat{H}_{ZR}$  são, respectivamente, o tempo e o hamiltoniano de interação do átomo com o campo da zona de Ramsey. De acordo com a Equação (3.93), considerando um campo eletromagnético monomodal ressonante com a transição  $|a\rangle \leftrightarrow |b\rangle$  ( $\omega_{ba} = \omega_1$ ), o hamiltoniano  $\hat{H}_{ZR}$  é dado por

$$\hat{H}_{ZR} = \hbar (\Omega_1 \hat{\sigma}_{ab} + \Omega_1^* \hat{\sigma}_{ba}). \quad (4.5)$$

Da mesma forma, o operador evolução temporal  $\hat{U}_c$  é dado pela expressão

$$\hat{U}_c = e^{-i\hat{H}_c\Delta t_c/\hbar}, \quad (4.6)$$

na qual  $\Delta t_c$  e  $\hat{H}_c$  são o tempo e o hamiltoniano de interação do átomo com o campo da cavidade, respectivamente. Conforme a Equação (3.100), considerando que o efeito Stark faça com que as transições  $|a\rangle \leftrightarrow |b\rangle$  e  $|b\rangle \leftrightarrow |c\rangle$  se tornem ressonantes com o modo do campo da cavidade ( $\omega_{ba} = \omega_{cb} = \omega$ ), o hamiltoniano  $\hat{H}_c$  tem a forma

$$\hat{H}_c = \hbar (g_1 \hat{\sigma}_{ab} \hat{a}^\dagger + g_1^* \hat{\sigma}_{ba} \hat{a}) + \hbar (g_2 \hat{\sigma}_{bc} \hat{a}^\dagger + g_2^* \hat{\sigma}_{cb} \hat{a}). \quad (4.7)$$

Com o conhecimento do operador evolução temporal, o próximo passo para a determinação dos elementos do *POVM* é determinar operadores de medição  $\hat{M}_k$  do sistema átomo-cavidade.

Como pode ser observado por meio da Equação (2.38), para obter os operadores de medição do sistema átomo-cavidade deve-se especificar a base do átomo e a base do campo da cavidade. Conforme o protocolo proposto para a discriminação dos estados  $|\psi_1\rangle$  e  $|\psi_2\rangle$  estabelece,  $\{|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle\}$  é a base do átomo e  $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$  é a base do campo da cavidade. Com isso, ao considerar o átomo inicialmente no estado fundamental  $|a\rangle$ , a Equação (2.38) fornece a expressão

$$\hat{M}_\nu = \sum_{n,n'} u_{\nu n, a, n'} |n\rangle \langle n'|, \quad (4.8)$$

em que

$$u_{\nu n, a, n'} = \langle \nu, n | \hat{U} | a, n' \rangle, \quad (4.9)$$

sendo os índices  $\nu = a, b, c$  e  $n = 0, 1, 2$ . Dessa forma, para se chegar aos operadores de medição deve-se calcular os estados  $\hat{U} | a, n' \rangle$ . Atuando primeiramente o operador evolução temporal  $\hat{U}_{ZR}$  no estado  $|a, n'\rangle$ , tem-se a expressão

$$\hat{U}_{ZR} | a, n' \rangle = \cos(|\Omega_1| \Delta t_{ZR}) | a, n' \rangle - i \frac{\Omega_1^*}{|\Omega_1|} \text{sen}(|\Omega_1| \Delta t_{ZR}) | b, n' \rangle, \quad (4.10)$$

na qual é conveniente definir

$$\alpha \equiv \cos(|\Omega_1| \Delta t_{ZR}) \quad (4.11)$$

e

$$\beta \equiv -i \frac{\Omega_1^*}{|\Omega_1|} \text{sen}(|\Omega_1| \Delta t_{ZR}). \quad (4.12)$$

Atuando agora o operador evolução temporal  $\hat{U}_c$  no estado fornecido pela Equação (4.10), considerando todos os possíveis valores de  $n'$ , obtém-se

$$\hat{U} | a, 0 \rangle = \alpha | a, 0 \rangle - i \beta \frac{g_1}{|g_1|} \text{sen}(|g_1| \Delta t_c) | a, 1 \rangle + \beta \cos(|g_1| \Delta t_c) | b, 0 \rangle, \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned}
\hat{U}|a, 1\rangle = & \alpha \cos(|g_1| \Delta t_c) |a, 1\rangle - \\
& - i\beta \left( \frac{\sqrt{2}g_1^*}{\sqrt{2|g_1|^2 + |g_2|^2}} \right) \text{sen} \left( \sqrt{2|g_1|^2 + |g_2|^2} \Delta t_c \right) |a, 2\rangle - \\
& - i\alpha \frac{g_1}{|g_1|} \text{sen}(|g_1| \Delta t_c) |b, 0\rangle + \beta \cos \left( \sqrt{2|g_1|^2 + |g_2|^2} \Delta t_c \right) |b, 1\rangle - \\
& - i\beta \left( \frac{g_2}{\sqrt{2|g_1|^2 + |g_2|^2}} \right) \text{sen} \left( \sqrt{2|g_1|^2 + |g_2|^2} \Delta t_c \right) |c, 0\rangle \quad (4.14)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\hat{U}|a, 2\rangle = & \alpha \left\{ 1 + \frac{2|g_1|^2}{2|g_1|^2 + |g_2|^2} \left[ \cos \left( \sqrt{2|g_1|^2 + |g_2|^2} \Delta t_c \right) - 1 \right] \right\} |a, 2\rangle - \\
& - i\alpha \frac{\sqrt{2}g_1^*}{\sqrt{2|g_1|^2 + |g_2|^2}} \text{sen} \left( \sqrt{2|g_1|^2 + |g_2|^2} \Delta t_c \right) |b, 1\rangle + \beta \cos \left( \sqrt{2|g_1|^2 + |g_2|^2} \Delta t_c \right) |b, 2\rangle + \\
& + \alpha \frac{\sqrt{2}g_1^*g_2^*}{2|g_1|^2 + |g_2|^2} \left[ \cos \left( \sqrt{2|g_1|^2 + |g_2|^2} \Delta t_c \right) - 1 \right] |c, 0\rangle - \\
& - i\beta \frac{g_2^*}{|g_2|} \text{sen} \left( \sqrt{2|g_1|^2 + |g_2|^2} \Delta t_c \right) |c, 1\rangle. \quad (4.15)
\end{aligned}$$

Com isso, ao utilizar esses estados nas Equações (4.8) e (4.9), os operadores de medição  $\hat{M}_\nu$  são dados por

$$\begin{aligned}
\hat{M}_a = & \alpha |0\rangle\langle 0| - i\beta \frac{g_1}{|g_1|} \text{sen}(|g_1| \Delta t_c) |1\rangle\langle 0| + \alpha \cos(|g_1| \Delta t_c) |1\rangle\langle 1| - \\
& - i\beta \left( \frac{\sqrt{2}g_1}{\sqrt{2|g_1|^2 + |g_2|^2}} \right) \text{sen} \left( \sqrt{2|g_1|^2 + |g_2|^2} \Delta t_c \right) |2\rangle\langle 1| + \\
& + \alpha \left\{ 1 + \frac{2|g_1|^2}{2|g_1|^2 + |g_2|^2} \left[ \cos \left( \sqrt{2|g_1|^2 + |g_2|^2} \Delta t_c \right) - 1 \right] \right\} |2\rangle\langle 2|, \quad (4.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{M}_b = & \beta \cos(|g_1| \Delta t_c) |0\rangle\langle 0| - i\alpha \frac{g_1^*}{|g_1|} \text{sen}(|g_1| \Delta t_c) |0\rangle\langle 1| + \\
& + \beta \cos \left( \sqrt{2|g_1|^2 + |g_2|^2} \Delta t_c \right) |1\rangle\langle 1| - \\
& - i\alpha \frac{\sqrt{2}g_1^*}{\sqrt{2|g_1|^2 + |g_2|^2}} \text{sen} \left( \sqrt{2|g_1|^2 + |g_2|^2} \Delta t_c \right) |1\rangle\langle 2| + \\
& + \beta \cos \left( \sqrt{2|g_1|^2 + |g_2|^2} \Delta t_c \right) |2\rangle\langle 2| \quad (4.17)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\hat{M}_c = & -i\beta \left( \frac{g_2^*}{\sqrt{2|g_1|^2 + |g_2|^2}} \right) \text{sen} \left( \sqrt{2|g_1|^2 + |g_2|^2} \Delta t_c \right) |0\rangle\langle 1| + \\
& + \alpha \frac{\sqrt{2}g_1^*g_2^*}{2|g_1|^2 + |g_2|^2} \left[ \cos \left( \sqrt{2|g_1|^2 + |g_2|^2} \Delta t_c \right) - 1 \right] |0\rangle\langle 2| - \\
& - i\beta \frac{g_2^*}{|g_2|} \text{sen} \left( \sqrt{2}|g_2| \Delta t_c \right) |1\rangle\langle 2|. \quad (4.18)
\end{aligned}$$

Por fim, conhecendo os operadores de medição  $\hat{M}_\nu$ , os elementos do POVM são obtidos por meio da definição  $\hat{\Lambda}_\nu \equiv \hat{M}_\nu^\dagger \hat{M}_\nu$ . Assim, tem-se as expressões

$$\begin{aligned}
\hat{\Lambda}_a = & [|\alpha|^2 + |\beta|^2 \text{sen}^2(|g_1| \Delta t_c)] |0\rangle\langle 0| + \\
& + i \frac{1}{|g_1|} \text{sen}(|g_1| \Delta t_c) \cos(|g_1| \Delta t_c) (\alpha\beta^* g_1^* |0\rangle\langle 1| - \alpha^* \beta g_1 |1\rangle\langle 0|) + \\
& + \left[ |\alpha|^2 \cos^2(|g_1| \Delta t_c) + |\beta|^2 \frac{2|g_1|^2}{C^2} \text{sen}^2(C \Delta t_c) \right] |1\rangle\langle 1| + \\
& + i \frac{\sqrt{2}}{C} \text{sen}(C \Delta t_c) \left\{ 1 + \frac{2|g_1|^2}{C^2} [\cos(C \Delta t_c) - 1] \right\} (\alpha\beta^* g_1^* |1\rangle\langle 2| - \alpha^* \beta g_1 |2\rangle\langle 1|) + \\
& + |\alpha|^2 \left\{ 1 + \frac{2|g_1|^2}{C^2} [\cos(C \Delta t_c) - 1] \right\}^2 |2\rangle\langle 2|, \quad (4.19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\Lambda}_b = & |\beta|^2 \cos^2(|g_1| \Delta t_c) |0\rangle\langle 0| - \\
& - i \frac{1}{|g_1|} \text{sen}(|g_1| \Delta t_c) \cos(|g_1| \Delta t_c) (\alpha\beta^* g_1^* |0\rangle\langle 1| - \alpha^* \beta g_1 |1\rangle\langle 0|) + \\
& + [|\alpha|^2 \text{sen}^2(|g_1| \Delta t_c) + |\beta|^2 \cos^2(C \Delta t_c)] |1\rangle\langle 1| - \\
& - i \frac{\sqrt{2}}{C} \text{sen}(C \Delta t_c) \cos(C \Delta t_c) (\alpha\beta^* g_1^* |1\rangle\langle 2| - \alpha^* \beta g_1 |2\rangle\langle 1|) + \\
& + \left[ |\alpha|^2 \frac{2|g_1|^2}{C^2} \text{sen}^2(C \Delta t_c) + |\beta|^2 \cos^2(\sqrt{2}|g_2| \Delta t_c) \right] |2\rangle\langle 2| \quad (4.20)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\hat{\Lambda}_c = & |\beta|^2 \frac{|g_2|^2}{C^2} \text{sen}^2(C \Delta t_c) |1\rangle\langle 1| + \\
& + i \frac{\sqrt{2}|g_2|^2}{C^3} \text{sen}(C \Delta t_c) [\cos(C \Delta t_c) - 1] (\alpha\beta^* g_1^* |1\rangle\langle 2| - \alpha^* \beta g_1 |2\rangle\langle 1|) + \\
& + \left\{ |\alpha|^2 \frac{2|g_1|^2 |g_2|^2}{C^4} [\cos(C \Delta t_c) - 1]^2 + |\beta|^2 \text{sen}^2(\sqrt{2}|g_2| \Delta t_c) \right\} |2\rangle\langle 2|, \quad (4.21)
\end{aligned}$$

nas quais

$$C \equiv \sqrt{2|g_1|^2 + |g_2|^2}. \quad (4.22)$$

Pode-se verificar, com um certo esforço, que os elementos do *POVM* satisfazem a relação  $\sum_{\nu} \hat{M}_{\nu}^{\dagger} \hat{M}_{\nu} = \hat{I}_c$ , na qual  $\hat{I}_c$  é o operador identidade do espaço de estados do campo no interior da cavidade.

### 4.3 Discriminação dos estados

Tendo obtido o conjunto de elementos do POVM, cabe agora determinar as probabilidades referentes aos resultados da realização da medição de von Neumann no átomo. De acordo com a Equação (2.67), a probabilidade de obter o resultado correspondente ao índice  $\nu$  é dada por

$$p_{\nu} = \frac{1}{2} Tr (\hat{\Lambda}_{\nu} |\psi_1\rangle \langle \psi_1|) + \frac{1}{2} Tr (\hat{\Lambda}_{\nu} |\psi_2\rangle \langle \psi_2|). \quad (4.23)$$

Em uma primeira observação, ao calcular a probabilidade  $p_c$  utilizando o elemento de *POVM* dado pela Equação (4.21), pode-se ver que

$$Tr (\hat{\Lambda}_c |\psi_1\rangle \langle \psi_1|) = 0 \quad (4.24)$$

e

$$Tr (\hat{\Lambda}_c |\psi_2\rangle \langle \psi_2|) = |\beta|^2 \frac{|g_2|^2}{2C^2} \text{sen}^2 (C \Delta t_c), \quad (4.25)$$

o que mostra que, ao obter o resultado correspondente ao índice  $c$ , a medição de von Neumann foi realizada no estado  $|\psi_2\rangle$ . Calculando agora a probabilidade  $p_b$ , a Equação (4.20) fornece

$$Tr (\hat{\Lambda}_b |\psi_1\rangle \langle \psi_1|) = |\beta|^2 \cos^2 (|g_1| \Delta t_c) \quad (4.26)$$

e

$$Tr (\hat{\Lambda}_b |\psi_2\rangle \langle \psi_2|) = |\beta|^2 \cos^2 (C \Delta t_c) + \left| \beta \frac{g_1}{|g_1|} \cos (|g_1| \Delta t_c) - i \alpha \text{sen} (|g_1| \Delta t_c) \right|^2. \quad (4.27)$$

A imposição de que  $Tr (\hat{\Lambda}_b |\psi_2\rangle \langle \psi_2|) = 0$  implica que, ao obter o resultado referente ao índice  $b$ , sabe-se que a medição de von Neumann foi realizada no estado  $|\psi_1\rangle$ . Com essa imposição, ao utilizar as Equações (4.11) e (4.12), se chega às relações

$$|\Omega_1| \Delta t_{ZR} = |g_1| \Delta t_c, \quad (4.28)$$

$$\frac{\Omega_1^*}{|\Omega_1|} = -\frac{g_1^*}{|g_1|} \quad (4.29)$$

e

$$\sqrt{2|g_1|^2 + |g_2|^2} \Delta t_c = (2l + 1) \frac{\pi}{2}, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (4.30)$$

Dessa forma, utilizando as definições

$$|g_2| \equiv K |g_1| \quad (4.31)$$

e

$$|g_1| \Delta t_c = \frac{(2l + 1) \pi}{\sqrt{2 + K^2}} \equiv \theta_l, \quad (4.32)$$

as probabilidades  $p_\nu$  são dadas pelas expressões descritas na Tabela 4.1. É importante observar que a constante  $K$  que aparece aqui é a mesma constante  $K$  que aparece na Equação (3.109) do Capítulo 2. Conforme a tabela mostra, quando se obtém o resultado referente ao índice  $a$  não se sabe sobre qual estado foi realizada a medição. Por outro lado, quando se obtém o resultado referente ao índice  $b$  ( $c$ ) se sabe que a medição foi realizada sobre o estado  $|\psi_1\rangle$  ( $|\psi_2\rangle$ ). Portanto, o protocolo proposto é capaz de discriminar os estados  $|\psi_1\rangle$  e  $|\psi_2\rangle$ .

$\nu$	$Tr(\hat{\Lambda}_\nu  \psi_1\rangle\langle\psi_1 )$	$Tr(\hat{\Lambda}_\nu  \psi_2\rangle\langle\psi_2 )$	$p_\nu$
$a$	$\cos^2\theta_l + \text{sen}^4\theta_l$	$\frac{1}{2} \left(1 + \cos^2\theta_l + \frac{2}{2+K^2} \text{sen}^2\theta_l\right)$	$\frac{1}{4} \left(1 + 3\cos^2\theta_l + \frac{2\text{sen}^2\theta_l}{2+K^2} + 2\text{sen}^4\theta_l\right)$
$b$	$\text{sen}^2\theta_l \cos^2\theta_l$	0	$\frac{1}{2} \text{sen}^2\theta_l \cos^2\theta_l$
$c$	0	$\frac{1}{2} \frac{K^2}{2+K^2} \text{sen}^2\theta_l$	$\frac{1}{4} \frac{K^2}{2+K^2} \text{sen}^2\theta_l$

Tabela 4.1: Traços e probabilidades obtidos utilizando o conjunto de elementos do *POVM*.

Tendo obtido as probabilidades de, ao realizar a medição de von Neumann no átomo, discriminar os estados  $|\psi_1\rangle$  e  $|\psi_2\rangle$  do campo no interior da cavidade, cabe agora calcular a probabilidade de sucesso para alguns valores de  $l$  em um certo intervalo de  $K$ . Como mostra a Tabela 4.1, a probabilidade de sucesso é dada por

$$p_s = \frac{1}{2} \left[ \text{sen}^2\theta_l \cos^2\theta_l + \frac{1}{2} \left( \frac{K^2}{2 + K^2} \right) \text{sen}^2\theta_l \right]. \quad (4.33)$$

A Figura 4.2 contém gráficos de  $p_s$  em função de  $K$  para alguns valores de  $l$ . Por outro lado, a Tabela 4.2 mostra para cada  $l$  o valor máximo de  $p_s$ , juntamente com o correspondente  $K$ . Mesmo considerando somente alguns valores de  $l$ , pode-se notar que o protocolo proposto é capaz de fornecer probabilidades de sucesso próximas de 0.292, que é a probabilidade de sucesso máxima possível para o caso em questão (Capítulo 2). Por fim, é importante observar que, de acordo com as Equações (4.30) e (4.31),  $l$  e  $K$  dependem das condições físicas estabelecidas pelo tempo de interação  $\Delta t_c$  e pelos coeficientes de acoplamento do átomo  $g_1$  e  $g_2$ .

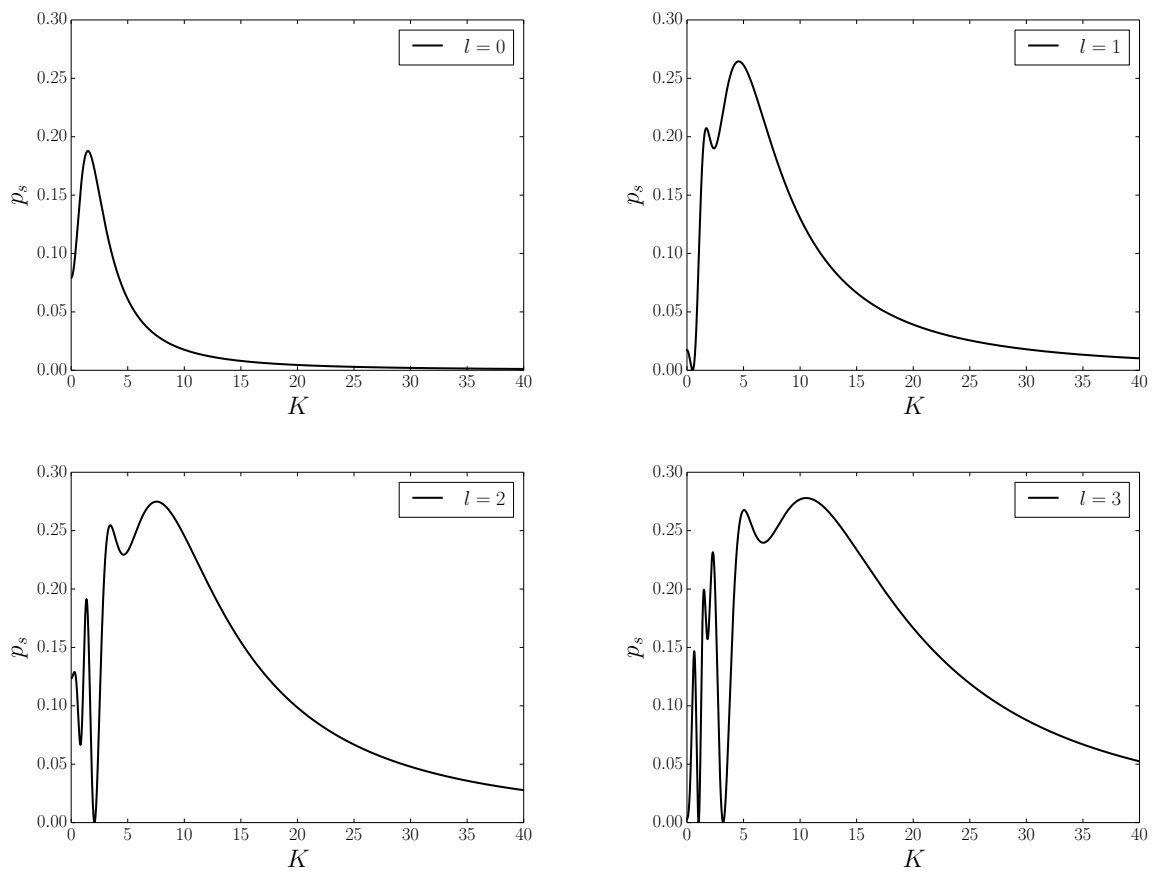


Figura 4.2: Gráficos de  $p_s$  em função de  $K$  para os valores de  $l = 0, 1, 2, 3$ .

$l$	$K_{max}$	$p_{s,max}$
0	1.47	0.1877
1	4.50	0.2644
2	7.55	0.2748
3	10.55	0.2779

Tabela 4.2: Probabilidades de sucesso  $p_s$  máximas, juntamente com os respectivos valores de  $K$ , obtidas para  $l = 0, 1, 2, 3$ .

---

## CONCLUSÃO

---

O esquema proposto proporcionou um conjunto de elementos do *POVM* capaz de discriminar os referidos estados do campo no interior de uma cavidade. Foi mostrado que, mesmo considerando apenas alguns valores de  $l$ , a probabilidade de sucesso  $p_s$  pode chegar próxima da probabilidade de sucesso máxima possível para o exemplo em questão. Além disso, a simplicidade do aparato proposto e sua fundamentação em técnicas atuais no contexto da eletrodinâmica quântica de cavidades fazem com que o protocolo seja bastante atraente do ponto de vista experimental. Espera-se que o esquema proposto possa inspirar a elaboração de novos protocolos de discriminação de estados utilizando elementos de *POVM* baseados em hamiltonianos efetivos, tornando possível atingir taxas ótimas de probabilidade de sucesso. Por fim, como perspectivas futuras têm-se: o estudo do comportamento da probabilidade de sucesso quando há perdas no processo, e a tentativa de aplicação do protocolo na discriminação de estados emaranhados.



---

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

- [1] WISEMAN, H. M.; MILBURN, G. J. **Quantum Measurement and Control**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010. Citado 2 vezes nas páginas [11](#) e [20](#).
- [2] JACOBS, K. **Quantum Measurement Theory and its Applications**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2014. Citado 3 vezes nas páginas [11](#), [16](#) e [20](#).
- [3] DIRAC, P. A. M. **The Principles of Quantum Mechanics**. [S.l.]: Clarendon Press, 1930. Citado na página [11](#).
- [4] NEUMANN, J. V. **Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik**. [S.l.]: Springer, 1932. Citado na página [11](#).
- [5] DAVIES, E. **Quantum Theory of Open Systems**. [S.l.]: Academic Press, 1976. Citado na página [11](#).
- [6] KRAUS, K. **States, Effects, and Operations: Fundamental Notions of Quantum Theory**. [S.l.]: Springer-Verlag, 1983. Citado na página [11](#).
- [7] NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. **Quantum Computation and Quantum Information**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010. Citado 4 vezes nas páginas [11](#), [13](#), [16](#) e [24](#).
- [8] BERGOU, J. A. Quantum state discrimination and selected applications. **Journal of Physics: Conference Series**, v. 84, n. 1, p. 012001, 2007. Citado 2 vezes nas páginas [11](#) e [26](#).
- [9] CHEFLES, A. Quantum state discrimination. **Contemporary Physics**, v. 41, n. 6, p. 401–424, 2000. Citado na página [11](#).
- [10] BARNETT, S. M.; CROKE, S. Quantum state discrimination. **Adv. Opt. Photon.**, OSA, v. 1, n. 2, p. 238–278, 2009. Citado na página [11](#).
- [11] HUTTNER, B. et al. Unambiguous quantum measurement of nonorthogonal states. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 54, p. 3783–3789, 1996. Citado na página [11](#).
- [12] SOUBUSTA, J. et al. Experimental realization of a programmable quantum-state discriminator and a phase-covariant quantum multimeter. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 69, p. 052321, 2004. Citado na página [11](#).
- [13] COHEN-TANNOUJDI, C.; DIU, B.; LALOE, F. **Quantum Mechanics**. [S.l.]: Wiley, 1991. Citado na página [13](#).

- [14] SCHWABL, F. **Quantum Mechanics**. 4. ed. [S.l.]: Springer, 2007. Citado na página 13.
- [15] SHANKAR, R. **Principles of Quantum Mechanics**. 2. ed. [S.l.]: Plenum Press, 1994. Citado na página 13.
- [16] BALLENTINE, L. E. **Quantum Mechanics: A Modern Development**. [S.l.]: World Scientific, 1998. Citado na página 13.
- [17] KREYSZIG, E. **Introductory Functional Analysis with Applications**. [S.l.]: Wiley, 1978. Citado na página 13.
- [18] LAMBROPOULOS, P.; PETROSYAN, D. **Fundamentals of Quantum Optics and Quantum Information**. [S.l.]: Springer, 2007. Citado 4 vezes nas páginas 16, 27, 37 e 39.
- [19] GERRY, C.; KNIGHT, P. **Introductory Quantum Optics**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2005. Citado 3 vezes nas páginas 16, 27 e 37.
- [20] LIMA, E. L. **Álgebra Linear**. 8. ed. [S.l.]: IMPA, 2012. Citado na página 21.
- [21] FICEK, Z.; WAHIDDIN and M. R. **Quantum Optics for Beginners**. [S.l.]: Taylor & Francis Group, 2014. Citado na página 27.
- [22] REITZ, J. R.; MILFORD, F. J.; CHRISTY, R. W. **Fundamentos da Teoria Eletromagnética**. [S.l.]: Editora Campus, 1982. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 35.
- [23] FOOT, C. J. **Atomic Physics**. [S.l.]: Oxford University Press, 2005. Citado na página 37.
- [24] PURI, R. R. **Mathematical Methods of Quantum Optics**. [S.l.]: Springer, 2001. Citado na página 39.
- [25] HAROCHE, S.; HACYAN, S. Cavity quantum electrodynamics: a review of rydberg atom-microwave experiments on entanglement and decoherence. In: AIP. **AIP Conference Proceedings**. [S.l.], 1999. v. 464, n. 1, p. 45–66. Citado na página 46.
- [26] RAUSCHENBEUTEL, A. et al. Controlled entanglement of two field modes in a cavity quantum electrodynamics experiment. **Phys. Rev. A**, American Physical Society, v. 64, p. 050301, Oct 2001. Citado na página 46.