

**Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística**

**Ondas de Choque Transicionais
Para Modelos Quadráticos de Duas Leis de Conservação**

Gisele Detomazi Almeida

Orientador: Prof. Dr. Jesus Carlos da Mota

Dissertação de Mestrado em Matemática

Goiânia, Goiás

2007

Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Coordenação de Pós-Graduação em Matemática

Ondas de Choques Transicionais
Para Modelos Quadráticos de Duas Leis de Conservação

por

Gisele Detomazi Almeida

Área de concentração: Análise

Orientador: Prof. Dr. Jesus Carlos da Mota

Dissertação submetida à Banca Examinadora designada pelo Conselho Diretor do Instituto de Matemática e Estatística, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Goiânia, Goiás

2007

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(GPT/BC/UFG)

Almeida, Gisele Detomazi.
A447o Ondas de choque transicionais para modelos quadráticos de
duas leis de conservação / Gisele Detomazi Almeida. – 2007.
58f.

Orientador: Prof. Jesus Carlos da Mota.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás.
Instituto de Matemática e Estatística, 2007.

Bibliografia: f. 57-58.

1. Equações diferenciais parciais – Modelos quadráticos
2. Ondas de choque – Leis de conservação I. Mota, Jesus
Carlos da. II. Universidade Federal de Goiás. **Instituto
de Matemática e Estatística.** III. Título.

CDU: 517.95

Sumário

Resumo	1
Abstract	2
Introdução	3
1 Sistema de Leis de Conservação	6
2 Condições de Entropia	12
2.1 Critério de Lax	12
2.2 Critério de Viscosidade	17
2.3 Órbitas Conectando U_L e U_R	19
3 Choques Transicionais Para Sistemas de Duas Leis de Conservação	24
3.1 Sistema Quadrático de Duas Leis de Conservação	24
3.2 Perfis Retos	29
3.3 Conexões Sela-sela	39
4 Solução do Problema de Riemann	44
Conclusão	56

Resumo

Ondas de choque transicionais aparecem nas soluções de problemas de valores iniciais para sistemas não lineares de leis de conservação não estritamente hiperbólicos. São soluções descontínuas que possuem perfil viscoso mas não satisfazem o critério de entropia de Lax, onde certas desigualdades entre a velocidade de propagação do choque e as velocidades características são satisfeitas. Estas ondas aparecem como transição entre grupos de ondas associados com diferentes famílias características.

Neste trabalho estudamos as ondas de choque transicionais para um sistema de duas leis de conservação com função de fluxo quadrática e matriz de viscosidade definida positiva. Em particular estudamos os choques transicionais com perfil viscoso definidos por órbitas sobre um segmento de reta. Mostramos através de exemplos, para sistemas com funções de fluxo quadráticas e matrizes de viscosidade escolhidas de modo conveniente, que é necessário usar as ondas de choques transicionais para resolver o problema de Riemann (dados iniciais constantes por partes) para estes sistemas.

Abstract

Transitional shock waves arises in solution of initial values problems for non linear systems of conservation laws that are not strictly hyperbolic. These waves are discontinuous solutions that posses viscous profile but do not conform to the Lax characteristic criterion, where inequalities between the shock propagation speed and the characteristic speeds must to be satisfied. These waves arise as transition between wave groups associated with distinct characteristic families.

In this work we studied transitional shock waves for a system of two conservation laws with quadratic flux functions and positive defined viscosity matrix. In particular, we studied the transitional shock waves with viscous profile defined by orbits laying on straightlines. We show from examples, for systems with quadratic flux functions and viscosity matrix chosen in a convenience way, that is necessary to use transitional shock waves to solve the Riemann problem (initial data constant by parts) for these systems.

Introdução

Para o desenvolvimento deste trabalho seguimos o artigo de Isaacson, Marchesin e Plohr, em [6].

Estudamos as ondas de choque transicionais para um sistema não linear de n leis de conservação, conforme definido no Capítulo 1. Ilustramos a importância destas ondas na solução do problema de Riemann para dois exemplos. Um com função de fluxo quadrática homogênea, isto é, sem termos lineares, e matriz de viscosidade igual a identidade. O outro com função de fluxo quadrática, incluindo termos lineares, e matriz de viscosidade não múltipla da identidade.

As soluções clássicas de um problema de Riemann são dadas, em geral, por uma sequência de grupos de ondas, formada por rarefações (soluções contínuas), e choques (soluções descontínuas), ver [5, 13, 15]. Cada grupo de onda está relacionado a uma família característica, conforme definições dadas no Capítulo 1. Por exemplo, para um sistema de duas equações existem dois grupos de ondas, cada um relacionado com uma das famílias características.

Em [14] foi mostrado um exemplo, onde o problema de Riemann não pode ser resolvido globalmente, isto é, para quaisquer pares (U_L, U_R) de estados constantes em \mathbb{R}^2 , admitindo-se apenas os choques de Lax. Para resolver este problema foram introduzidas as ondas de choques transicionais. Estes choques aparecem na solução do

problema de Riemann como transição entre grupos de ondas. Os choques transicionais são choques de cruzamento que satisfazem o critério de viscosidade, conforme definições dadas no Capítulo 2.

No Capítulo 1, definimos o problema de Riemann para um sistema de leis de conservação, e fizemos um resumo da teoria clássica para resolver este tipo de problema, incluindo as definições de solução fraca, lugar geométrico de Hugoniot, ondas de rarefação, ondas de choque e curvas de ondas.

No Capítulo 2, definimos as condições de admissibilidade de uma descontinuidade na solução do problema de Riemann. Com origem no estudo da dinâmica dos gases, estas condições são denominadas de condições de entropia.

As duas principais condições de entropia são o critério de entropia de Lax e o critério de viscosidade.

O critério de Lax, relaciona a velocidade de propagação da descontinuidade com as velocidades características à direita e à esquerda da descontinuidade.

O critério de viscosidade admite soluções descontínuas que são limites de soluções ondas viajantes do sistema de leis de conservação acrescido de termos de segunda ordem. Estes termos de segunda ordem são denominados de termos de viscosidade e o sistema de sistema viscoso. Admitindo solução do tipo onda viajante o sistema viscoso é transformado num sistema dinâmico. Uma descontinuidade é dita admissível pelo critério de viscosidade se existe uma órbita deste sistema dinâmico conectando os estados à esquerda e à direita da descontinuidade.

Ainda no Capítulo 2, seguindo [16], descrevemos os possíveis tipos de choques para um sistema estritamente hiperbólico de duas leis de conservação.

Um choque de Lax, para um sistema de duas leis de conservação, satisfazendo o

critério de viscosidade corresponde a uma conexão tipo sela-nó ou nó-sela. Um choque transicional corresponde a uma conexão do tipo sela-sela.

Em [2], foi mostrado que para sistemas dinâmicos que são gradientes quadráticos, uma conexão sela-sela está sobre um segmento de reta.

No Capítulo 3, descrevemos os choques transicionais caracterizados por órbitas sobre segmentos de retas para modelos quadráticos de duas leis de conservação. Isto é feito através de uma mudança das variáveis de estado de coordenadas cartesianas para coordenadas polares. A existência de choques transicionais depende da função de fluxo e da matriz de viscosidade associada ao sistema de leis de conservação.

Conforme referido no início desta introdução, ilustramos a importância das ondas de choques transicionais nas soluções de problemas de Riemann, em dois exemplos descritos no Capítulo 4.

Finalizamos este trabalho com nossas conclusões.

Capítulo 1

Sistema de Leis de Conservação

Neste capítulo resumimos os principais resultados da teoria sobre problema de Riemann para sistemas de leis de conservação.

Consideramos um sistema de n equações da forma

$$U_t + F(U)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (1.1)$$

onde a função de fluxo $F : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe \mathcal{C}^1 , com dados iniciais

$$U_0(x) = U(x, 0) = \begin{cases} U_L, & \text{se } x < 0 \\ U_R, & \text{se } x > 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

onde U_L e U_R são estados constantes em Ω . Este problema é denominado de problema de Riemann.

As soluções de um problema de Riemann podem ser vistas como soluções assintóticas de um problema geral de Cauchy, ver [12], e também podem ser usadas como elemento fundamental para métodos numéricos de grande precisão, conforme [9].

Os autovalores $\lambda_i(U)$, $i=1,2,\dots,n$, da matriz jacobiana $F'(U)$, são denominados de velocidades características de (1.1), e as curvas sobre as quais as soluções suaves de (1.1)–(1.2) são constantes, são denominadas de curvas características. Para um sistema

de n leis de conservação da forma (1.1) as curvas características são retas no espaço (x,t) .

Definição 1.1. O sistema (1.1) é dito hiperbólico em uma região $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, se os autovalores $\lambda_1(U) \leq \lambda_2(U) \leq \dots \leq \lambda_n(U)$ da matriz jacobiana $F'(U)$ são reais para todo $U \in \Omega$. Se além de reais os autovalores são distintos, o sistema é dito estritamente hiperbólico. O sistema (1.1) é dito elíptico se possui autovalor complexo.

Definição 1.2. Definimos como lugar geométrico de coincidência o conjunto de estados $U \in \Omega$, onde os autovalores de $F'(U)$ coincidem.

Observe que se $U(x,t)$ é uma solução suave do problema de Riemann, então para toda constante $\alpha > 0$, $U(\alpha x, \alpha t)$ também é solução, em particular fixando t e fazendo $\alpha = \frac{1}{t}$, conclui-se que as soluções suaves são centradas, isto é, são soluções da forma

$$U(x,t) = \mathcal{U}\left(\frac{x}{t}\right). \quad (1.3)$$

Fazendo $\xi = \frac{x}{t}$ e substituindo (1.3) em (1.1), obtemos

$$-\frac{1}{t}\xi\mathcal{U}'(\xi) + \frac{1}{t}F'(\mathcal{U}(\xi))\mathcal{U}'(\xi) = 0,$$

ou seja,

$$[F'(\mathcal{U}(\xi)) - \xi I]\mathcal{U}'(\xi) = 0. \quad (1.4)$$

Aqui, (\prime) denota derivação com relação a ξ e I é a matriz identidade. Se $\mathcal{U}'(\xi) \neq 0$, segue que \mathcal{U}' é autovetor à direita de $F'(\mathcal{U})$ associado ao autovalor $\lambda = \xi$. Portanto, as soluções suaves de (1.1) – (1.2) estão sobre as curvas integrais dos autovetores de $F'(\mathcal{U})$, isto é, satisfazem a equação diferencial ordinária

$$\frac{\partial \mathcal{U}(\xi)}{\partial \xi} = r^i(\mathcal{U}(\xi)), \quad (1.5)$$

onde r^i , $i = 1, 2, \dots, n$, denota um autovetor à direita da matriz jacobiana $F'(U(\xi))$ associado à velocidade característica $\lambda_i(U(\xi))$. O autovetor r^i é referido como o i -ésimo campo característico de (1.5).

Definição 1.3. Diz-se que dois estados U_L e U_R em Ω estão conectados por uma onda de i -rarefação, $i = 1, 2, \dots, n$, se U_L e U_R pertencem à curva integral do i -ésimo campo característico de (1.5) e $\lambda_i(U)$ é crescente ao longo desta curva, no sentido de U_L para U_R .

Pode-se verificar que uma i -ésima onda de rarefação conectando U_L e U_R é uma função da forma

$$U(x, t) = \begin{cases} U_L, & \text{se } x < \lambda_i(U_L)t \\ \lambda_i^{-1}\left(\frac{x}{t}\right), & \text{se } \lambda_i(U_L)t < x < \lambda_i(U_R)t \\ U_R, & \text{se } x > \lambda_i(U_R)t. \end{cases} \quad (1.6)$$

Definição 1.4. Uma curva de i -rarefação por um estado à esquerda U_L é o conjunto dos estados $U \in \mathbb{R}^n$, que podem ser conectados ao estado U_L por uma onda de i -rarefação.

Nem sempre é possível determinar soluções suaves para o problema de Riemann, tornando-se necessária a introdução do conceito de solução fraca.

Definição 1.5. Uma solução fraca $U(x, t)$ do sistema (1.1) com condições iniciais (1.2), é uma função em $L^1_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ tal que

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [U(x, t)\phi_t(x, t) + F(U(x, t))\phi_x(x, t)] dx dt + \int_{-\infty}^\infty U(x, 0)\phi(x, 0) dx = 0, \quad (1.7)$$

para toda função $\phi : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ e suporte compacto.

Usando o Teorema da Divergência pode-se mostrar que a condição (1.7) impõe restrições nas soluções fracas do tipo descontinuidade de salto, conforme a seguinte proposição:

Proposição 1.1. *Uma função $U(x, t)$ com uma descontinuidade de salto é uma solução fraca do problema de Riemann, se satisfaz a seguinte relação, denominada de relação de Rankine-Hugoniot*

$$H(U_L, s, U_R) = F(U_R) - F(U_L) - s(U_R - U_L) = 0, \quad (1.8)$$

onde U_L e U_R são estados constantes e s é a velocidade de propagação da descontinuidade.

Definição 1.6. *O lugar geométrico de Hugoniot por um estado U_L fixo, ou simplesmente curva de Hugoniot por U_L , é o conjunto dos estados $U \in \Omega$, tais que existe $s \in \mathbb{R}$ satisfazendo a condição*

$$H(U_L, s, U_R) = F(U_R) - F(U_L) - s(U_R - U_L) = 0. \quad (1.9)$$

Observação 1.1. *A curva de Hugoniot por U_L pode ser formada por ramos locais, ou seja ramos que contém o estado U_L , e por ramos não locais, ou seja ramos que não contém o estado U_L .*

Definição 1.7. *Uma onda de choque do problema (1.1) – (1.2) conectando o estado à esquerda U_L ao estado à direita U_R , é uma solução fraca com uma descontinuidade de salto da forma*

$$U(x, t) = \begin{cases} U_L, & \text{se } x < st \\ U_R, & \text{se } x > st, \end{cases} \quad (1.10)$$

onde s é a velocidade de propagação da descontinuidade. Neste caso, a onda de choque é denotada por (U_L, U_R, s) .

Definição 1.8. *O sistema (1.1) é dito genuinamente não linear em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, se $\nabla \lambda^i(U) \cdot r^i(U) \neq 0$ para todo $U \in \Omega$.*

Quando o sistema não é genuinamente não linear aparece outro tipo de onda como combinação de ondas de choque e ondas de rarefação, denominada de composta.

Definição 1.9. Diz-se que dois estados U_L e U_R em Ω são conectados por uma onda i -composta, se existe um estado intermediário U_M sobre a curva integral do i -ésimo campo característico r^i de modo que U_L é conectado a U_M por uma i -rarefação, e U_M é conectado a U_R por um choque com velocidade $\lambda_i(U_M)$.

Definição 1.10. Uma curva i -composta por um estado inicial U_L , associada ao i -ésimo campo característico de (1.5), é o conjunto dos estados U , tais que U_L pode ser conectado a U por uma i -composta.

Dado um par (U_L, U_R) , a solução do problema de Riemann consiste de uma sequência de ondas de choque, ondas de rarefação e compostas, de modo que a velocidade da onda resultante seja crescente da esquerda para direita no plano- (x,t) . Tais ondas são denominadas de ondas elementares.

A condição de Rankine-Hugoniot não garante a unicidade das soluções fracas do problema de Riemann, conforme o Exemplo 1.1 abaixo.

Dentro de uma classe de soluções fisicamente relevantes, a unicidade de solução do problema de Riemann para um sistema de leis de conservação pode ser obtida introduzindo-se restrições sobre as soluções fracas. Tais restrições são denominadas de condições de entropia, nome proveniente do problema de dinâmica dos gases, ver [15].

Exemplo 1.1. Considere o sistema de duas leis de conservação

$$\begin{cases} u_t + \left(\frac{v^2}{2}\right)_x = 0 \\ v_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \end{cases} \quad (1.11)$$

Com condição inicial

$$U_0(x) = \begin{cases} U_L = (0, 0)^T, & \text{se } x < 0 \\ U_R = (1, 1)^T, & \text{se } x > 0, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.12)$$

As funções

$$U_1(x, t) = \begin{cases} (0, 0), & \text{se } x < \frac{t}{2} \\ (1, 1), & \text{se } x > \frac{t}{2}, \end{cases}$$

e

$$U_2(x, t) = \begin{cases} (0, 0), & \text{se } x < 0 \leq t \\ \left(\frac{x}{t}, \frac{x}{t}\right), & \text{se } 0 \leq x \leq t \\ (1, 1), & \text{se } x > t \geq 0, \end{cases}$$

são soluções fracas do problema (1.11) com condição inicial (1.12).

Capítulo 2

Condições de Entropia

As duas principais condições de entropia são o critério de entropia de Lax e o critério de viscosidade.

2.1 Critério de Lax

As figuras desta seção são referentes a sistemas de duas leis de conservação, onde as linhas escuras tracejadas representam curvas de descontinuidades (choques), as linhas claras contínuas representam as retas características. As setas indicam a orientação das retas características no sentido de crescimento de t .

A condição de entropia de Lax, introduzida em [11], relaciona a velocidade do choque com as velocidades características, à direita e à esquerda do próprio choque.

Definição 2.1. *Diz-se que um choque do problema (1.1) – (1.2), conectando os estados U_L e U_R , com velocidade s , denotado por (U_L, U_R, s) , satisfaz o critério de entropia de Lax se*

$$\begin{aligned}\lambda_i(U_R) < s < \lambda_i(U_L), \\ \lambda_{i-1}(U_L) < s < \lambda_{i+1}(U_R),\end{aligned}$$

$i = 1, 2, \dots, n$. Neste caso, este choque é denominado de i -choque de Lax.

Definição 2.2. Uma curva de i -choque é definida como o conjunto dos estados à direita U_R tal que U_L pode ser conectado a U_R por um i -choque. Uma curva de i -choque não local é definida como o conjunto dos estados U_R sobre o ramo não local de Hugoniot tal que U_R pode ser conectado a U_L por um i -choque.

Nos choques de Lax as retas características de uma mesma família entram em ambos os lados da reta de descontinuidade no sentido crescente de t .

Em particular, para sistemas de duas leis de conservação, os choques de Lax são de dois tipos:

1-Choque: (Ver Figura 2.1(a))

$$\lambda_1(U_R) < s < \lambda_1(U_L), \quad (2.1)$$

$$s < \lambda_2(U_R). \quad (2.2)$$

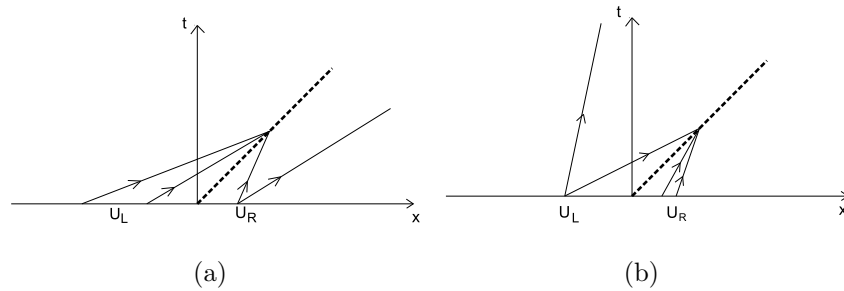


Figura 2.1: Retas características e 1-choque e 2-choque de Lax.

2-Choque: (Ver Figura 2.1(b))

$$\lambda_2(U_R) < s < \lambda_2(U_L), \quad (2.3)$$

$$\lambda_1(U_L) < s. \quad (2.4)$$

A exigência do critério de Lax pode ser muito restritiva no sentido de que o problema de Riemann pode não ter solução, como mostrado em [14]. Neste caso, outros tipos de choques devem ser considerados, dentre os quais destacamos os choques de cruzamento.

Definição 2.3. *Diz-se que um choque (U_L, U_R, s) é um choque de cruzamento se satisfaz as desigualdades*

$$\lambda_i(U_L) < s < \lambda_{i+1}(U_L),$$

$$\lambda_i(U_R) < s < \lambda_{i+1}(U_R).$$

No caso $n=2$, choques de cruzamento satisfazem as seguintes desigualdades:

Choque de Cruzamento: (Ver Figura 2.2)

$$\lambda_1(U_L) < s < \lambda_2(U_L), \quad (2.5)$$

$$\lambda_1(U_R) < s < \lambda_2(U_R). \quad (2.6)$$

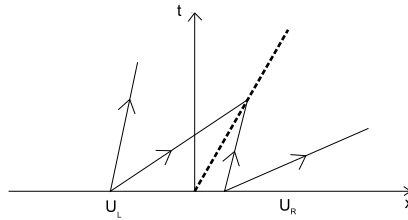


Figura 2.2: Retas características e um choque de cruzamento.

Na solução do problema de Riemann do exemplo a seguir aparece um choque de cruzamento.

Exemplo 2.1. *Considere o sistema de duas leis de conservação*

$$\begin{cases} u_t + (3u^2 - 2v^2 + 2u)_x = 0 \\ v_t + (3v^2 - 4uv - 2v)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \end{cases} \quad (2.7)$$

com condição inicial

$$U_0(x) = \begin{cases} (-\frac{2}{3}, 0)^T, & \text{se } x < 0 \\ (0, 0)^T, & \text{se } x > 0, \quad \text{se } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.8)$$

Os estados $U_R = (0, 0)$ e $U_L = (-\frac{2}{3}, 0)$, satisfazem a condição de Rankine-Hugoniot, com velocidade de propagação $s = 0$. Os autovalores de $F'(0, 0)$ e $F'(-\frac{2}{3}, 0)$ satisfazem

$$\begin{aligned} \lambda_1(U_L) = \lambda_1(-\frac{2}{3}, 0) = -2 < s < \lambda_2(-\frac{2}{3}, 0) = \frac{2}{3} = \lambda_2(U_L), \\ \lambda_1(U_R) = \lambda_1(0, 0) = -2 < s < 2 = \lambda_2(0, 0) = \lambda_2(U_R), \end{aligned}$$

e assim a descontinuidade (U_L, U_R, s) , é um choque de cruzamento.

Outros exemplos de problemas de Riemann, em que apenas choques de Lax não são suficientes para determinar a solução, serão apresentados no Capítulo 4, onde também são necessários choques de cruzamento.

Note que nos choques de cruzamento as retas características de famílias características distintas entram na descontinuidade.

Outros tipos de choque (U_L, U_R, s) , que não satisfazem as desigualdades de entropia de Lax, nem as desigualdades de cruzamento, podem aparecer em soluções de problemas de Riemann. Descrevemos a seguir tais choques para um sistemas de duas leis de conservação estritamente hiperbólico.

Choque 1-Expansivo: (Ver Figura 2.3-(a))

$$\lambda_1(U_L) < s < \lambda_1(U_R), \quad (2.9)$$

$$s < \lambda_2(U_L). \quad (2.10)$$

2-Choque Expansivo: (Ver Figura 2.3-(b))

$$\lambda_2(U_L) < s < \lambda_2(U_R), \quad (2.11)$$

$$\lambda_1(U_R) < s. \quad (2.12)$$

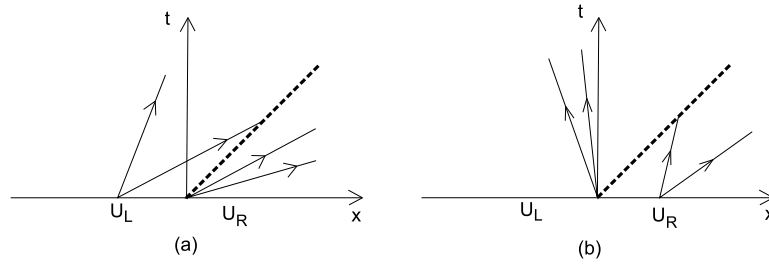


Figura 2.3: (a) Retas características e um choque 1-expansivo; (b) Retas características e um choque 2-expansivo.

Choque Totalmente Compressivo: (Ver Figura 2.4(a))

$$\lambda_2(U_R) < s < \lambda_1(U_L). \quad (2.13)$$

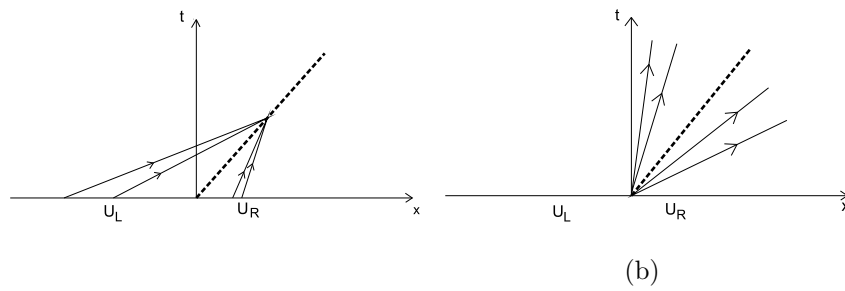


Figura 2.4: (a) Retas características e choque totalmente compressivo. (b) Retas características e choque totalmente expansivo.

Choque Totalmente Expansivo: (Ver Figura 2.4(b))

$$\lambda_2(U_L) < s < \lambda_1(U_R). \quad (2.14)$$

Transporte à direita: (Ver Figura 2.5-(a))

$$s < \lambda_1(U_L), \quad (2.15)$$

$$s < \lambda_1(U_R). \quad (2.16)$$

Transporte à Esquerda: (Ver Figura 2.5-(b))

$$\lambda_2(U_L) < s, \quad (2.17)$$

$$\lambda_2(U_R) < s. \quad (2.18)$$

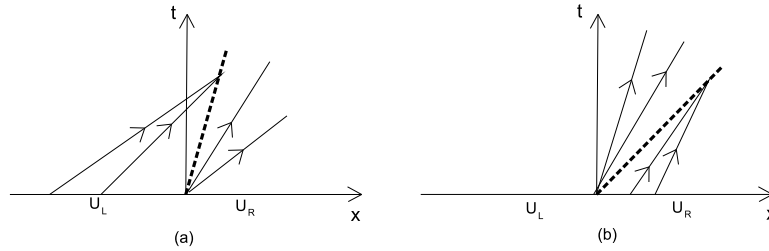


Figura 2.5: (a) Retas característica e um choque tipo transporte à direita; (b) Retas características e um choque tipo transporte à esquerda.

2.2 Critério de Viscosidade

A condição de entropia de viscosidade, introduzida por Courant e Friedrichs em [4] e posteriormente por Gel'fand em [8] aparece antes da condição de entropia de Lax.

Na dedução de um sistema de leis de conservação, em geral, termos de viscosidade são desprezados. Se estes termos são considerados o sistema resultante fica acrescido de termos de segunda ordem. Aqui vamos considerar o sistema (1.1) acrescido de termos de segunda ordem da seguinte forma

$$U_t + F(U)_x = \varepsilon DU_{xx}, \quad (2.19)$$

onde $U = U(x, t) \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$, e D é uma matriz constante definida positiva, denominada matriz de viscosidade. Em geral, as soluções de (2.19) são suaves devido ao termo de viscosidade εDU_{xx} .

O critério de viscosidade consiste em obter soluções do problema de Riemann (1.1)–(1.2), que são limites, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, de soluções do tipo ondas viajantes de (2.19), conforme Definição 2.4.

Denotamos por

$$\Omega = \{h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad h \in \mathcal{C}^1, \quad \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} h(\xi) \text{ existe e } \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{dh}{d\xi}\right) = 0\}.$$

Definição 2.4. *Uma onda viajante do sistema (2.19), com velocidade s , conectando um estado U_L à esquerda a um estado U_R à direita, é uma solução*

$$U(\xi) = (u_1(\xi), u_2(\xi), \dots, u_n(\xi)), \quad (2.20)$$

em $\Omega^n = \Omega \times \Omega \times \dots \times \Omega$, com $\xi = \frac{x - st}{\varepsilon}$, satisfazendo as condições de fronteira

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} U(\xi) = U_R, \quad (2.21)$$

e

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} U(\xi) = U_L. \quad (2.22)$$

Vamos procurar soluções ondas viajantes do sistema (2.19). Substituindo (2.20) em (2.19), temos

$$-sU'(\xi) + F'(U(\xi)) = DU'(\xi), \quad (2.23)$$

onde (\prime) denota a derivada em relação a ξ . Integrando (2.23), obtemos

$$DU'(\xi) = -sU(\xi) + F(U(\xi)) + c, \quad (2.24)$$

onde c é a constante de integração. Fazendo $\xi \rightarrow -\infty$, temos

$$c = sU_L - F(U_L), \quad (2.25)$$

portanto,

$$DU'(\xi) = -s[U(\xi) - U_L] + F(U(\xi)) - F(U_L). \quad (2.26)$$

Assim, uma solução descontínua de (1.1) – (1.2) satisfaz o critério de viscosidade se o sistema dinâmico (2.26) possui alguma órbita conectando U_L a U_R . Neste caso, diz-se que esta órbita que sai de U_L e entra em U_R está corretamente orientada.

Observamos que todo estado que satisfaz a condição de Rankine-Hugoniot por U_L , inclusive o próprio U_L , é ponto crítico do sistema dinâmico (2.26). Isto motiva, o estudo e classificação, dos pontos críticos do sistema (2.26).

2.3 Órbitas Conectando U_L e U_R

Nesta seção, classificamos os pontos críticos de (2.26) para os diversos tipos de choque de um sistema de duas leis de conservação.

O sistema linear associado ao sistema (2.26) em $U = U_C$ é dado por

$$[-s + F'(U_C)](U - U_C) = DU'. \quad (2.27)$$

Os autovalores μ e os autovetores correspondentes U_μ do sistema (2.27) são dados por

$$\{\mu I - D^{-1}[-s + F'(U_C)]\}U_\mu = 0. \quad (2.28)$$

Aqui, vamos considerar a matriz viscosidade D como a matriz identidade. Assim, os autovalores μ de (2.27) são dados por

$$\mu_i(U_C) = \lambda_i(U_C) - s, \quad i = 1, 2, \quad (2.29)$$

onde $\lambda_i(U_C)$ são os autovalores de $F'(U)$ no ponto U_C .

Para sistemas hiperbólicos de duas leis de conservação, os pontos críticos do sistema dinâmico associado são facilmente classificados como sela, nó ou sela-nó.

Para uma descontinuidade (U_L, U_R, s) do tipo 1-choque de Lax, as desigualdades (2.1) – (2.2) implicam que

$$\begin{aligned}\mu_1(U_L) &= \lambda_1(U_L) - s > 0 & e & \quad \mu_2(U_L) = \lambda_2(U_L) - s > 0, \\ \mu_1(U_R) &= \lambda_1(U_R) - s < 0 & e & \quad \mu_2(U_R) = \lambda_2(U_R) - s > 0.\end{aligned}$$

Portanto, U_L é um nó repulsor e U_R um ponto de sela, assim, uma órbita unindo U_L e U_R por um 1-choque é corretamente orientada.

Para uma descontinuidade (U_L, U_R, s) do tipo 2-choque de Lax, as desigualdades (2.3) – (2.4) implicam que

$$\begin{aligned}\mu_1(U_L) &= \lambda_1(U_L) - s < 0 & e & \quad \mu_2(U_L) = \lambda_2(U_L) - s > 0 \\ \mu_1(U_R) &= \lambda_1(U_R) - s < 0 & e & \quad \mu_2(U_R) = \lambda_2(U_R) - s < 0.\end{aligned}$$

Assim, concluímos que U_L é um ponto de sela, e U_R é um nó atrator. Portanto, órbitas unindo U_L e U_R por um 2-choque são corretamente orientadas.

Para um sistema estritamente hiperbólico e genuinamente não linear, conexões entre U_L e U_R do tipo nó-sela ou sela-nó, como no caso de 1-choque e 2-choque de Lax para estados U_L e U_R suficientemente próximos, existem e são únicas, ver [3] e [7].

Em uma descontinuidade (U_L, U_R, s) do tipo choque de cruzamento, das desigualdades (2.5) – (2.6), temos que

$$\begin{aligned}\mu_1(U_L) &= \lambda_1(U_L) - s < 0 & e & \quad \mu_2(U_L) = \lambda_2(U_L) - s > 0, \\ \mu_1(U_R) &= \lambda_1(U_R) - s < 0 & e & \quad \mu_2(U_R) = \lambda_2(U_R) - s > 0.\end{aligned}$$

Portanto, U_L e U_R são pontos de sela. (Ver Figura 2.6)

Definição 2.5. *Uma onda de choque transicional conectando U_L a U_R , é um choque de cruzamento que satisfaz o critério de viscosidade.*

Uma órbita unindo U_L e U_R , por uma onda de choque transicional é corretamente orientada.

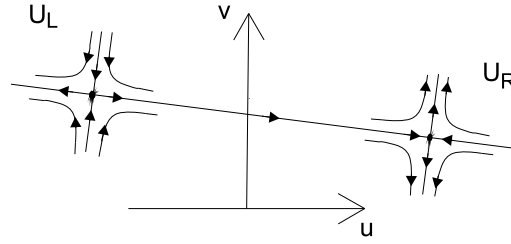


Figura 2.6: Órbita conectando U_L e U_R por uma onda transicional.

Se a descontinuidade (U_L, U_R, s) é um choque totalmente compressivo, as desigualdades em (2.13) implicam que

$$\begin{aligned} \mu_1(U_L) = \lambda_1(U_L) - s > 0 \quad e \quad \mu_2(U_L) = \lambda_2(U_L) - s > 0, \\ \mu_1(U_R) = \lambda_1(U_R) - s < 0 \quad e \quad \mu_2(U_R) = \lambda_2(U_R) - s > 0. \end{aligned}$$

Neste caso, U_L é um nó repulsor e U_R é um nó atrator, dessa forma para que exista uma órbita unindo U_L e U_R , é necessário um estado intermediário U_M , onde U_M é um ponto do tipo sela, que se une a U_L por uma conexão nó-sela e a U_R por uma conexão sela-nó. Portanto, um choque totalmente compressivo pode ser considerado como um 1-choque seguido de um 2-choque de Lax, e não um novo tipo de choque.

Em uma descontinuidade (U_L, U_R, s) que é um choque 1-expansivo, conforme (2.10)–(2.10), temos

$$\begin{aligned} \mu_1(U_L) = \lambda_1(U_L) - s < 0 \quad e \quad \mu_2(U_L) = \lambda_2(U_L) - s > 0, \\ \mu_1(U_R) = \lambda_1(U_R) - s > 0 \quad e \quad \mu_2(U_R) = \lambda_2(U_R) - s > 0. \end{aligned}$$

Neste caso, U_L é um ponto de sela, enquanto U_R é um nó repulsor, ou seja, uma órbita unindo U_L e U_R por um choque 1-expansivo não é corretamente orientada.

Para uma descontinuidade (U_L, U_R, s) do tipo choque 2-expansivo, as descontinuidades (2.11) – (2.12) implicam que

$$\begin{aligned}\mu_1(U_L) &= \lambda_1(U_L) - s < 0 & e & \mu_2(U_L) = \lambda_2(U_L) - s < 0, \\ \mu_1(U_R) &= \lambda_1(U_R) - s < 0 & e & \mu_2(U_R) = \lambda_2(U_R) - s > 0.\end{aligned}$$

Então, U_L é um nó atrator e U_R é um ponto de sela. Assim, órbitas unindo, U_L e U_R , por um choque 2-expansivo, não são corretamente orientadas.

Num choque totalmente expansivo, conforme (2.14), temos

$$\begin{aligned}\mu_1(U_L) &= \lambda_1(U_L) - s < 0 & e & \mu_2(U_L) = \lambda_2(U_L) - s < 0, \\ \mu_1(U_R) &= \lambda_1(U_R) - s > 0 & e & \mu_2(U_R) = \lambda_2(U_R) - s > 0.\end{aligned}$$

Portanto, U_L é um nó atrator, e U_R é um nó repulsor, assim, órbitas para este tipo de descontinuidade não são corretamente orientadas.

Para descontinuidades (U_L, U_R, s) que são choques do tipo transporte à direita, as desigualdades (2.16) – (2.16) implicam que

$$\begin{aligned}\mu_1(U_L) &= \lambda_1(U_L) - s > 0 & e & \mu_2(U_L) = \lambda_2(U_L) - s > 0, \\ \mu_1(U_R) &= \lambda_1(U_R) - s > 0 & e & \mu_2(U_R) = \lambda_2(U_R) - s > 0.\end{aligned}$$

Portanto, U_L e U_R são nós repulsores. Assim, não existem órbitas unindo U_L e U_R .

Finalmente, para descontinuidades (U_L, U_R, s) que são choques do tipo transporte à esquerda, as desigualdades (2.18) – (2.18) implicam que

$$\begin{aligned}\mu_1(U_L) &= \lambda_1(U_L) - s < 0 & e & \mu_2(U_L) = \lambda_2(U_L) - s < 0, \\ \mu_1(U_R) &= \lambda_1(U_R) - s < 0 & e & \mu_2(U_R) = \lambda_2(U_R) - s < 0.\end{aligned}$$

Portanto, U_L e U_R são ambos nós atratores. Assim, não existem órbitas corretamente orientadas unindo U_L e U_R .

Se a matriz viscosidade D não for múltipla da matriz identidade, então o sinal de $(\lambda_i(U_C) - s)$ nem sempre determina a classificação de um ponto crítico U_C do sistema (2.26). Por exemplo, se alterarmos a matriz viscosidade D por uma matriz não múltipla da matriz identidade, pontos que são classificados como nó poderiam se tornar um foco. No entanto, pontos de sela são preservados, isto é, mesmo que a matriz viscosidade não seja múltipla da identidade e se o determinante de D for positivo, um ponto de sela determinado pelo sinal de $(\lambda_i(U_C) - s)$, ainda será um ponto sela. Isto ocorre porque de acordo com (2.27), $\mu_1(U_C)$ e $\mu_2(U_C)$ são autovalores de

$$D^{-1}[-s + F'(U_C)].$$

Assim o produto $\mu_1\mu_2$ tem o mesmo sinal do produto $(\lambda_1(U_C) - s)(\lambda_2(U_C) - s)$, o qual é negativo, já que em pontos do tipo sela, os sinais de μ_1 e μ_2 , são opostos.

Capítulo 3

Choques Transicionais Para Sistemas de Duas Leis de Conservação

Neste capítulo descrevemos as ondas de choque transicionais para modelos quadráticos de duas leis de conservação. Estes choques correspondem a órbitas que são conexões sela-sela do sistema dinâmico (2.26). Determinamos condições sob as quais um choque satisfazendo o critério de viscosidade corresponde a uma órbita sobre um segmento de reta.

3.1 Sistema Quadrático de Duas Leis de Conservação

Considere o sistema de duas leis de conservação da forma

$$\begin{cases} u_t + f(u, v)_x = 0 \\ v_t + g(u, v)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

com dados iniciais

$$(u_0(x), v_0(x)) = \begin{cases} (u_L, v_L), & \text{se } x < 0 \\ (u_R, v_R), & \text{se } x > 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

onde $U_L = (u_L, v_L)$, $U_R = (u_R, v_R)$ são estados constantes em \mathbb{R}^2 .

Aqui, as funções de fluxo f e g são polinômios quadráticos da forma

$$f(u, v) = \frac{1}{2}(a_1u^2 + 2b_1uv + c_1v^2) + d_1u + e_1v, \quad (3.3)$$

$$g(u, v) = \frac{1}{2}(a_2u^2 + 2b_2uv + c_2v^2) + d_2u + e_2v, \quad (3.4)$$

com $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, a_2, b_2, c_2, d_2, e_2$, constantes reais.

A condição de Rankine-Hugoniot, para o problema (3.1) – (3.2) é dada por

$$s(u_R - u_L) = f(u_L, u_R) - f(u_L, u_L), \quad (3.5)$$

$$s(v_R - v_L) = g(u_L, u_R) - g(u_L, u_L). \quad (3.6)$$

Eliminando s de (3.5) – (3.6), fixando $U_L = U_0 = (u_0, v_0)$ e fazendo $U_R = U = (u, v)$ variar em \mathbb{R}^2 , obtemos a função de Hugoniot por U_0

$$H(u, v) = (u - u_0)[g(u, v) - g(u_0, v_0)] - (v - v_0)[f(u, v) - f(u_0, v_0)]. \quad (3.7)$$

De modo análogo, obtemos a velocidade de propagação da descontinuidade (U_0, U, s) , da forma

$$s = \frac{(u - u_0)[f(u, v) - f(u_0, v_0)] + (v - v_0)[g(u, v) - g(u_0, v_0)]}{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2}. \quad (3.8)$$

Na Seção 3.2 construímos órbitas do sistema dinâmico (2.26), conectando os estados U_0 e U , que ocorrem ao longo de um segmento de reta.

Definição 3.1. *Diz-se que uma descontinuidade (U_0, U, s) possui perfil reto, se existe uma órbita corretamente orientada do sistema dinâmico (2.26), conectando U_0 e U , sobre um segmento de reta.*

A construção de uma descontinuidade (U_0, U, s) com perfil reto é feita determinando o ângulo de inclinação da reta, que passa por U_0 . O estado U é a intersecção dessa reta com o lugar geométrico de Hugoniot dado por (1.9).

Para determinar o ângulo de inclinação do segmento de reta que une U_0 e U é conveniente mudar as coordenadas (u, v) para coordenadas polares centradas em U_0 ,

$$u = u_0 + R \cos \varphi, \quad (3.9)$$

$$v = v_0 + R \sen \varphi, \quad (3.10)$$

ou seja,

$$U = U_0 + R(\cos \varphi, \sen \varphi)^T,$$

onde o ângulo $\varphi \in (-\pi, \pi]$ e $R = (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}$.

Substituindo (3.9)–(3.10) em (3.7) e em (3.8) e usando as identidades trigonométricas

$$\cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}, \quad (3.11)$$

$$\sen^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}, \quad (3.12)$$

$$\sen 2\varphi = 2 \sen \varphi \cos \varphi, \quad (3.13)$$

a função de Hugoniot por U_0 em coordenadas polares é dada por

$$H(u, v) = R^2 \left\{ \frac{1}{2} R [\alpha(\varphi) \cos(\varphi) + \beta(\varphi) \sen(\varphi)] + \alpha(\varphi) u_0 + \beta(\varphi) v_0 + \gamma(\varphi) \right\}, \quad (3.14)$$

e a velocidade de propagação da descontinuidade por

$$s = \frac{1}{2} R [\tilde{\alpha}(\varphi) \cos(\varphi) + \tilde{\beta}(\varphi) \sen(\varphi)] + \tilde{\alpha}(\varphi) u_0 + \tilde{\beta}(\varphi) v_0 + \tilde{\gamma}(\varphi), \quad (3.15)$$

onde

$$\alpha(\varphi) = \frac{1}{2}[(a_2 + b_1)\cos 2\varphi + (b_2 - a_1)\sin 2\varphi + a_2 - b_1], \quad (3.16)$$

$$\beta(\varphi) = \frac{1}{2}[(b_2 + c_1)\cos 2\varphi + (c_2 - b_1)\sin 2\varphi + b_2 - c_1], \quad (3.17)$$

$$\gamma(\varphi) = \frac{1}{2}[(d_2 + e_1)\cos 2\varphi + (e_2 - d_1)\sin 2\varphi + d_2 - e_1], \quad (3.18)$$

e

$$\tilde{\alpha}(\varphi) = \frac{1}{2}[(a_1 - b_2)\cos 2\varphi + (b_1 + a_2)\sin 2\varphi + a_1 + b_2], \quad (3.19)$$

$$\tilde{\beta}(\varphi) = \frac{1}{2}[(b_1 - c_2)\cos 2\varphi + (c_1 + b_2)\sin 2\varphi + b_1 + c_2], \quad (3.20)$$

$$\tilde{\gamma}(\varphi) = \frac{1}{2}[(d_1 - e_2)\cos 2\varphi + (e_1 + d_2)\sin 2\varphi + d_1 + e_2]. \quad (3.21)$$

De (3.14), o lugar geométrico de Hugoniot, em coordenadas polares é dado por

$$\frac{1}{2}R[\alpha(\varphi)\cos(\varphi) + \beta(\varphi)\sin(\varphi)] + \alpha(\varphi)u_0 + \beta(\varphi)v_0 + \gamma(\varphi) = 0. \quad (3.22)$$

Dividindo a equação (3.22) por R e fazendo $R \rightarrow \infty$, obtemos

$$\alpha(\varphi)\cos(\varphi) + \beta(\varphi)\sin(\varphi) = 0, \quad (3.23)$$

isto motiva a seguinte definição:

Definição 3.2. *Um ângulo φ é denominado de assintótico quando (3.23) é satisfeita.*

Se φ é um ângulo assintótico então $\varphi + \pi$ também o é. Além disso, a equação (3.23) é um polinômio cúbico em $\cos \varphi$ e $\sin \varphi$. Assim, pode existir seis ângulos assintóticos $\varphi \in (-\pi, \pi]$.

De acordo com a equação (3.14), $(\cos \varphi, \sin \varphi)^T$ é um autovetor de $F'(U)$ se, e somente se,

$$\alpha(\varphi)u_0 + \beta(\varphi)v_0 + \gamma(\varphi) = 0. \quad (3.24)$$

Por (3.15), o autovalor da matriz jacobiana $F'(U)$ associado ao autovetor $(\cos \varphi, \sin \varphi)^T$ é $\lambda = \tilde{\alpha}(\varphi)u_0 + \tilde{\beta}(\varphi)v_0 + \tilde{\gamma}(\varphi)$.

Definição 3.3. *Denominamos φ de ângulo característico de U_0 se (3.24) é satisfeita. O conjunto de estados $U_0 = (u_0, v_0)$ satisfazendo a equação (3.24) é denominado de reta característica associada ao ângulo φ , denotada por $\mathcal{L}(\varphi)$.*

Os estados $U = U_0 + R(\cos \varphi, \sin \varphi)^T$ pertencentes a uma reta característica associada a um ângulo assintótico φ satisfazem as equações (3.23) e (3.24), portanto, satisfazem a condição de Rankine-Hugoniot dada por (3.22), dependendo apenas dos coeficientes da função de fluxo dada por f e g , e não do estado à esquerda U_0 .

Definição 3.4. *A reta característica associada a um ângulo assintótico φ é denominada de reta de bifurcação secundária.*

A seguinte proposição dá uma caracterização do lugar geométrico de Hugoniot.

Proposição 3.1. (a) *Se φ não é um ângulo assintótico, então a reta passando por U_0 com ângulo φ , intercepta o lugar geométrico de Hugoniot por U_0 , em um estado $U \neq U_0$ se, e somente se, φ não é um ângulo característico de U_0 .*

(b) *Se φ é um ângulo assintótico, então a reta passando por U_0 com ângulo φ , intercepta o lugar geométrico de Hugoniot por U_0 , em um estado $U \neq U_0$ se, e somente se, U_0 pertence à reta de bifurcação secundária associada a φ . Nesta caso esta linha está contida no lugar geométrico de Hugoniot dado por (3.22).*

Demonstração:

O lugar geométrico de Hugoniot é dado por

$$\frac{1}{2}R[\alpha(\varphi)\cos(\varphi) + \beta(\varphi)\sin(\varphi)] + \alpha(\varphi)u_0 + \beta(\varphi)v_0 + \gamma(\varphi) = 0,$$

ou

$$\frac{1}{2}R[\alpha(\varphi) \cos(\varphi) + \beta(\varphi) \operatorname{sen}(\varphi)] = -[\alpha(\varphi)u_0 + \beta(\varphi)v_0 + \gamma(\varphi)].$$

Como por hipótese φ não é um ângulo assintótico, o primeiro membro desta igualdade não é nulo, e portanto o segundo membro também não é nulo.

Segue que φ não é um ângulo característico de U_0 .

(b) Se φ um ângulo assintótico, isto é,

$$\alpha(\varphi) \cos(\varphi) + \beta(\varphi) \operatorname{sen}(\varphi) = 0,$$

então

$$H_{(u_0, v_0)}(u, v) = R^2\{\alpha(\varphi)u_0 + \beta(\varphi)v_0 + \gamma(\varphi)\} = 0,$$

donde $U_0 \in \mathcal{L}(\varphi)$. Neste caso, conforme Definição 3.4, a reta $\mathcal{L}(\varphi)$ é uma reta de bifurcação secundária e claramente está contida no lugar geométrico de Hugoniot por U_0 .

□

3.2 Perfis Retos

Uma onda de choque transicional, conforme Definição 2.5, é uma descontinuidade (U_L, U_R, s) do tipo cruzamento que satisfaz o critério de viscosidade. Neste caso, a órbita do sistema dinâmico (2.26), conectando U_L e U_R , conforme (3.5) – (3.6), é do tipo sela-sela.

Para sistemas dinâmicos que são gradientes quadráticos, em [2] foi mostrado que toda conexão sela-sela é um segmento de reta.

Definição 3.5. *O sistema dinâmico (2.26), é denominado de gradiente quadrático se se existe uma função $C(U)$ que é um polinômio cúbico onde F é o gradiente de C , isto é, $F(U) = C'(U)$.*

Este resultado nos motiva a construir todas descontinuidades do problema de Riemann (3.1) – (3.2), que possuem perfil reto, conforme Definição 3.1.

Utilizamos a notação $\bar{U} = \frac{1}{2}(U_R + U_L)$ e $\Delta U = U_R - U_L$ para o ponto médio e a diferença, respectivamente, entre dois estados U_R e U_L .

Lema 3.1. *Suponha Q uma função quadrática tal que $Q(U_R) = Q(U_L)$. Então*

$$Q(\bar{U} + \rho\Delta U) = Q(\bar{U}) + \frac{1}{2}\rho^2 Q''(\bar{U}).(\Delta U)^2. \quad (3.25)$$

Demonstração:

Considere a parametrização do segmento de reta com extremos U_L e U_R , da forma

$$U(\xi) = \bar{U} + \rho(\xi)\Delta U, \quad (3.26)$$

com $-\frac{1}{2} \leq \rho(\xi) \leq \frac{1}{2}$.

Em particular,

$$U_L = \bar{U} - \frac{1}{2}\Delta U, \quad (3.27)$$

$$U_R = \bar{U} + \frac{1}{2}\Delta U. \quad (3.28)$$

Se Q é uma função quadrática, de acordo com a Fórmula de Taylor,

$$Q(U_L) = Q(\bar{U}) - \frac{1}{2}Q'(\bar{U}).(\Delta U) + \frac{1}{8}Q''(\bar{U}).(\Delta U)^2, \quad (3.29)$$

$$Q(U_R) = Q(\bar{U}) + \frac{1}{2}Q'(\bar{U}).(\Delta U) + \frac{1}{8}Q''(\bar{U}).(\Delta U)^2. \quad (3.30)$$

Subtraindo-se (3.29) de (3.30), obtemos

$$Q(U_R) - Q(U_L) = Q'(\bar{U}).(\Delta U).$$

Por hipótese temos que $Q(U_R) = Q(U_L)$, portanto,

$$Q'(\bar{U}).(\Delta U) = 0. \quad (3.31)$$

Assim, temos

$$Q(\bar{U} + \rho(\xi)\Delta U) = Q(\bar{U}) + \rho(\xi)Q'(\bar{U}).(\Delta U) + \frac{1}{2}\rho^2(\xi)Q''(\bar{U}).(\Delta U)^2.$$

Portanto,

$$Q(\bar{U} + \rho(\xi)\Delta U) = Q(\bar{U}) + \frac{1}{2}\rho^2(\xi)Q''(\bar{U}).(\Delta U)^2. \quad (3.32)$$

□

Proposição 3.2. *Seja F quadrática, e suponha que s , U_L e $U_R \neq U_L$ satisfaçam a condição de Rankine-Hugoniot (1.8). Então o segmento de reta entre U_L e U_R é uma órbita do sistema dinâmico (2.26) se, e somente se, existe uma constante $\mu \neq 0$ tal que*

$$\mu D\Delta U = \frac{1}{2}F''(0)(\Delta U)^2. \quad (3.33)$$

A órbita é orientada de U_L em direção a U_R se, e somente se, $\mu < 0$.

Demonstração:

Considere o segmento de reta entre U_L e U_R , parametrizado como em (3.26), com $-\frac{1}{2} < \rho(\xi) < \frac{1}{2}$. É uma função quadrática definida por

$$Q(U(\xi)) = -s(U(\xi) - U_L) + F(U(\xi)) - F(U_L), \quad (3.34)$$

como U_L , U_R e s , por hipótese, satisfazem a condição de Rankine-Hugoniot, temos

$$Q(U_L) = Q(U_R) = 0. \quad (3.35)$$

Pelo Lema 3.1, temos

$$Q(U(\xi)) = Q(\bar{U}) + \frac{1}{2}\rho^2 Q''(\bar{U}).(\Delta U)^2. \quad (3.36)$$

O sistema dinâmico (2.26), pode ser escrito da forma

$$DU'(\xi) = Q(U(\xi)), \quad (3.37)$$

de acordo com (3.26),

$$U'(\xi) = \rho'(\xi)\Delta U. \quad (3.38)$$

Substituindo (3.36) e (3.38) em (3.37), obtemos

$$\rho'(\xi)D\Delta U = Q(\bar{U}) + \frac{1}{2}\rho^2(\xi)Q''(\bar{U}).(\Delta U)^2. \quad (3.39)$$

Mas, por (3.29) e (3.35), temos

$$Q(U_L) = Q(\bar{U}) + \frac{1}{8}Q''(\bar{U}).(\Delta U)^2 = 0,$$

ou,

$$Q(\bar{U}) = -\frac{1}{8}Q''(\bar{U}).(\Delta U)^2,$$

e por (3.34)

$$Q''(\bar{U}) = F''(0),$$

assim, (3.39) torna-se

$$\rho'(\xi)D\Delta U = -\frac{1}{8}F''(0).(\Delta U)^2 + \frac{1}{2}\rho^2(\xi)F''(0).(\Delta U)^2,$$

ou,

$$\rho'(\xi)D\Delta U = \frac{1}{2}(\rho^2(\xi) - \frac{1}{4})F''(0).(\Delta U)^2. \quad (3.40)$$

Esta equação é satisfeita se existe $\mu \neq 0$ tal que

$$\mu D\Delta U = \frac{1}{2}F''(0)(\Delta U)^2,$$

onde,

$$\rho'(\xi) = \mu(\rho^2(\xi) - \frac{1}{4}). \quad (3.41)$$

Por outro lado se ρ parametriza uma órbita que está sobre um segmento de reta a equação (3.40) mostra que (3.41) é válida para algum $\mu \neq 0$, e portanto (3.33) é satisfeita.

Resta mostrar que uma órbita, do sistema dinâmico (2.26), está sobre um segmento de reta se, e somente se, $\mu < 0$.

Resolvendo a equação diferencial ordinária (3.41) pelo método das variáveis separáveis, obtemos

$$-\ln\left|\frac{1+2\rho(\xi)}{1-2\rho(\xi)}\right| = \mu\xi + c, \quad (3.42)$$

onde c é uma constante de integração. Portanto,

$$\rho(\xi) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1 - ce^{-\mu\xi}}{1 + ce^{-\mu\xi}}\right). \quad (3.43)$$

Se $\mu < 0$, temos

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \rho(\xi) = -\frac{1}{2}, \quad (3.44)$$

assim

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} U(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} \bar{U} + \rho(\xi)\Delta U = \bar{U} - \frac{1}{2}\Delta U = U_L, \quad (3.45)$$

e

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \rho(\xi) = \frac{1}{2}, \quad (3.46)$$

assim

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} U(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \bar{U} + \rho(\xi)\Delta U = \bar{U} + \frac{1}{2}\Delta U = U_R. \quad (3.47)$$

Por outro lado, se a órbita do sistema dinâmico (2.26), conectando U_L e U_R por um segmento de reta, sai de U_L e entra em U_R , temos

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} U(\xi) = U_L, \quad (3.48)$$

e

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} U(\xi) = U_R. \quad (3.49)$$

Se $\mu < 0$, por (3.43) temos

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} \rho(\xi) = \frac{1}{2}, \quad (3.50)$$

e

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \rho(\xi) = -\frac{1}{2}. \quad (3.51)$$

Consequentemente,

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} U(\xi) = U_R, \quad (3.52)$$

e

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} U(\xi) = U_L. \quad (3.53)$$

O que é um absurdo. Segue que $\mu < 0$.

□

O valor μ está relacionado com os autovalores da equação diferencial linearizada por pontos críticos

$$[-s + F'(U_c)]\hat{U}_\mu = \mu D\hat{U}_\mu. \quad (3.54)$$

Suponha que o segmento de reta entre U_L e U_R seja uma órbita de (2.26), então temos $\mu_L \leq 0 \leq \mu_R$, onde μ_L e μ_R são os autovalores associados a U_L e U_R , respectivamente. Portanto, de (3.54) temos

$$[-s + F'(U_L)]U_L = \mu_L DU_L, \quad (3.55)$$

$$[-s + F'(U_R)]U_R = \mu_R DU_R. \quad (3.56)$$

Subtraindo (3.55) de (3.56), obtemos

$$[F'(U_R) - F'(U_L)]\Delta U = (\mu_R - \mu_L)D\Delta U. \quad (3.57)$$

Como

$$F'(U_R) - F'(U_L) = F''(0).\Delta U, \quad (3.58)$$

substituindo (3.58) em (3.57), obtemos

$$(\mu_R - \mu_L)D\Delta U = F''(0).(\Delta U)^2. \quad (3.59)$$

Por (3.33) e (3.59), temos

$$\mu = \frac{1}{2}(\mu_R - \mu_L) \leq 0, \quad (3.60)$$

pois

$$\mu_R \leq 0 \leq \mu_L. \quad (3.61)$$

Além disso, somando (3.55) e (3.56), obtemos

$$[-s + F'(\bar{U})]\Delta U = \frac{1}{2}(\mu_R + \mu_L)D\Delta U. \quad (3.62)$$

Se

$$Q(U(\xi)) = -s(U(\xi) - U_L) + F(U(\xi)) - F(U_L),$$

por (3.31), temos que

$$Q'(\bar{U})\Delta U = [-s + F'(\bar{U})]\Delta U = 0.$$

Portanto, (3.62) torna-se

$$\mu D\Delta U = 0. \quad (3.63)$$

Conseqüentemente,

$$\mu_R + \mu_L = 0,$$

ou seja,

$$\mu_R = -\mu_L. \quad (3.64)$$

Por (3.60) e (3.64), temos que

$$\mu = \mu_R = -\mu_L. \quad (3.65)$$

Conforme Definição 3.2 ângulos assintóticos dependem apenas da função de fluxo F . O próximo lema mostra que soluções de (3.33), estão relacionadas com ângulos assintóticos para modelos quadráticos com função de fluxo $D^{-1}F$.

Definição 3.6. *Um ângulo assintótico de um modelo quadrático com função de fluxo $D^{-1}F$, é denominado de ângulo de viscosidade. As retas características $\mathcal{L}(\varphi)$ associadas a um ângulo de viscosidade são chamadas retas de viscosidade.*

Antes de enunciarmos o próximo resultado observe que:

$$\alpha(\varphi) \cos \varphi + \beta(\varphi) \sin \varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi) F''(0) \cdot [(\cos \varphi, \sin \varphi)^T]^2, \quad (3.66)$$

onde $F = (f, g)$ é a função fluxo do sistema (1.1) dada por (3.3) e (3.4), dessa forma

$$F''(0) \cdot [(\cos \varphi, \sin \varphi)^T]^2 = \begin{bmatrix} a_1 \cos^2 \varphi + 2b_1 \sin \varphi \cos \varphi + c_1 \sin^2 \varphi \\ a_2 \cos^2 \varphi + 2b_2 \sin \varphi \cos \varphi + c_2 \sin^2 \varphi \end{bmatrix}, \quad (3.67)$$

Multiplicando (3.67) por $(-\sin \varphi, \cos \varphi)$ e utilizando as identidades trigonométricas (3.11)-(3.13), obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \{ (a_2 + b_1) \cos 2\varphi + (b_2 - a_1) \sin 2\varphi + a_2 - b_1 \} \cos \varphi + \\ & + \frac{1}{2} \{ (b_2 + c_1) \cos 2\varphi + (c_2 - b_1) \sin 2\varphi + b_2 - c_1 \} \sin \varphi = \\ & \alpha \varphi \cos \varphi + \beta \varphi \sin \varphi. \end{aligned} \quad (3.68)$$

De maneira análoga, obtemos

$$\tilde{\alpha}(\varphi) \cos \varphi + \tilde{\beta}(\varphi) \sin \varphi = (\cos \varphi, \sin \varphi) F''(0) \cdot [(\cos \varphi, \sin \varphi)^T]^2. \quad (3.69)$$

Lema 3.2. *Se U_R pertence à reta que passa por U_L com ângulo φ , com $U_L \neq U_R$, então a equação (3.33) é válida para algum μ se, e somente se, φ é um ângulo de viscosidade.*

Demonstração: Substituindo $\Delta U = R(\cos \varphi, \sin \varphi)^T$ em (3.33) temos,

$$\mu DR(\cos \varphi, \sin \varphi)^T = \frac{1}{2} F''(0) \cdot R^2 [(\cos \varphi, \sin \varphi)^2]^T,$$

e esta equação é válida para algum $\mu \neq 0$ se, e somente se,

$$(\cos \varphi, \sin \varphi)^T = \frac{1}{2\mu} D^{-1} F''(0) \cdot R [(\cos \varphi, \sin \varphi)^2]^T.$$

Multiplicando os dois membros, por $(-\sin \varphi, \cos \varphi)$, segue que

$$(-\sin \varphi, \cos \varphi) D^{-1} F''(0) \cdot [(\cos \varphi, \sin \varphi)^2]^T = 0. \quad (3.70)$$

Mas, por (3.66) e (3.70), temos que

$$\alpha(\varphi) \cos \varphi + \beta(\varphi) \sin \varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi) D^{-1} F''(0) \cdot [(\cos \varphi, \sin \varphi)^2]^T = 0,$$

portanto, φ é um ângulo de viscosidade.

□

A existência de órbitas do sistema dinâmico (2.26) que são segmentos de reta conectando U_L e U_R , depende também do autovalor μ . Se φ é um ângulo de viscosidade e U_R pertence à reta passando por U_L com ângulo de inclinação φ , então uma fórmula para μ é obtida substituindo (3.69) em (3.33), onde

$$\mu = \tilde{\alpha}_D(\varphi) \cos \varphi + \tilde{\beta}_D(\varphi) \operatorname{sen} \varphi. \quad (3.71)$$

Considerando esta identidade, segue a definição abaixo.

Definição 3.7. *Um ângulo de viscosidade φ é um ângulo excepcional se*

$$\tilde{\alpha}_D(\varphi) \cos \varphi + \tilde{\beta}_D(\varphi) \operatorname{sen} \varphi = 0. \quad (3.72)$$

É claro que não existem perfis retos para um ângulo de viscosidade excepcional, isto porque teríamos $\mu = 0$, o que contrariaria a Proposição 3.2.

A construção de discontinuidades com perfil reto é feita da seguinte forma. A reta com inclinação, com relação ao eixo horizontal, igual a cada ângulo de viscosidade φ é traçada passando por U_L , o estado U que é a intersecção desta reta com o lugar geométrico de Hugoniot por U_L é encontrado. Então U e U_L são conectados por um segmento de reta, com inclinação φ .

Esta intersecção pode não existir, o resultado abaixo determina condições para a existência deste ponto de intersecção.

Teorema 3.1. *Considere a matriz de viscosidade D inversível e um ângulo de viscosidade fixo φ não excepcional, e $\mathcal{L}(\varphi)$ a reta de viscosidade associada a φ .*

(a) *Se φ não é um ângulo assintótico, então U_L é conectado a algum $U \neq U_L$ no lugar geométrico de Hugoniot por U_L , por uma órbita ao longo de um segmento de reta*

com ângulo φ se, e somente se, U_L não pertence à $\mathcal{L}(\varphi)$.

(b) Se φ é um ângulo assintótico, então U_L é conectado a algum $U \neq U_L$, pertencente ao lugar geométrico de Hugoniot por U_L , por uma órbita ao longo de um segmento de reta com ângulo φ se, e somente se, U_L pertence à reta $\mathcal{L}(\varphi)$, neste caso os estados U correspondentes pertencem à $\mathcal{L}(\varphi)$.

Demonstração: Como φ é um ângulo de viscosidade de acordo com o Lema 3.2 existe μ satisfazendo a equação (3.33). Além disso, como φ é um ângulo não excepcional, pela (3.72) e por (3.71), temos que $\mu \neq 0$. Segue da Proposição 3.2 que o segmento de reta conectando U_L e U é uma órbita do sistema dinâmico (2.26).

(a) Se φ não é um ângulo assintótico, pela parte (a) da Proposição 3.1, a reta passando por U_L com ângulo φ , intercepta o lugar geométrico de Hugoniot por U_L , em um estado $U \neq U_L$ se, e somente se, φ não é um ângulo característico de U_L , isto é, U_L não pertence à $\mathcal{L}(\varphi)$.

(b) Se φ é um ângulo assintótico, temos que $\mathcal{L}(\varphi)$ é a reta de bifurcação associada a φ , pela parte (b) da Proposição 3.1 a reta passando por U_L com ângulo φ , intercepta o lugar geométrico de Hugoniot por U_L , em um estado $U \neq U_L$ se, e somente se, U_L pertence à $\mathcal{L}(\varphi)$. Neste caso, os estados correspondentes U pertencem à $\mathcal{L}(\varphi)$ que está contida no lugar geométrico de Hugoniot por U_L dado por (3.22).

□

A parte (a) deste teorema está ilustrada na Figura (3.1).

3.3 Conexões Sela-sela

O Teorema 3.1 caracteriza quando uma descontinuidade (U_L, U_R, s) , em um modelo quadrático, possui perfil reto. Apenas descontinuidades (U_L, U_R, s) , do tipo 1-choque,

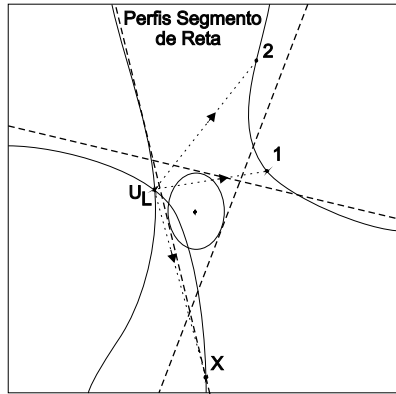


Figura 3.1: As retas tracejadas são retas de bifurcação. Os segmentos de reta pontilhados, passando por U_L com ângulo de viscosidade φ , são órbitas conectando o estado à esquerda U_L , a estados à direita U . As setas indicam a orientação destas órbitas. A descontinuidade correspondendo ao estado X é do tipo cruzamento, enquanto 1 é um estado à direita de um 1-choque, e 2 é um estado à direita de um 2-choque. A elipse é o lugar geométrico de coincidência.

2-choque e cruzamento, podem possuir um perfil reto.

Sob as hipóteses do Teorema 3.1, tanto na parte (a) quanto na parte (b), um estado U_L pode ser conectado a algum $U \neq U_L$ por um perfil reto com ângulo φ .

Nesta seção descrevemos o conjunto das descontinuidades de cruzamento que possuem perfil reto.

Definição 3.8. *A região transicional para um ângulo de viscosidade φ , é o conjunto dos estados U_L , que podem ser conectados, a algum estado $U \neq U_L$ por um choque transicional.*

Conforme (2.5)-(2.6) os estados U_L e U pertencentes à região transicional devem

satisfazer

$$\lambda_1(U_L) < s < \lambda_2(U_L), \quad (3.73)$$

$$\lambda_1(U) < s < \lambda_2(U). \quad (3.74)$$

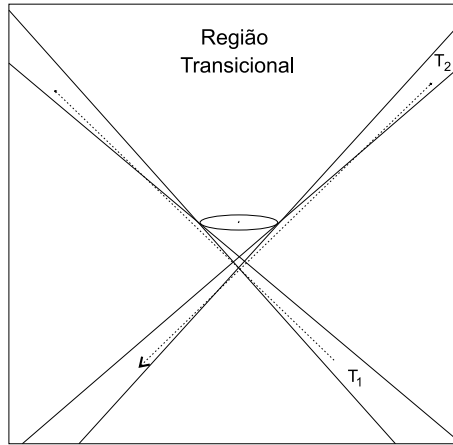


Figura 3.2: Região transicional T_1 e T_2 . A elipse é o lugar geométrico de coincidência dos autovalores de $F'(U)$.

Para determinar a fronteira da região transicional, fixe um ângulo de viscosidade φ e faça U_L variar. O estado $U = U_L + R(\cos \varphi, \sin \varphi)$ pode ser unido a U_L por um perfil reto. A fronteira da região transicional é formada pelos estados U_L , onde pelo menos uma das desigualdades em (3.73)-(3.74) torna-se uma igualdade. Isto é, pelo menos uma das velocidades características, coincide com a velocidade do choque. Neste caso, temos que

$$\det[-s + F'(U_C)] = 0, \quad (3.75)$$

onde U_C denota U_L , ou $U = U_L + R(\cos \varphi, \sin \varphi)$.

Por (3.14) – (3.15) a equação (3.75) é quadrática em u_0 e v_0 , podendo ser escrita como produto de dois polinômios de primeiro grau. Assim, a fronteira da região transicional é dada por um par de retas concorrentes e, a região transicional T_1 e T_2 tem forma triangular, conforme Figura (3.2).

Nas condições da parte (a) do Teorema (3.1), a região transicional é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 e a cada um de seus pontos corresponde uma descontinuidade de cruzamento, em que a órbita é um perfil reto com inclinação φ . (Ver Figura (3.2))

Considerando as hipóteses da parte (b) do Teorema 3.1, as retas que determinam a fronteira da região transicional são coincidentes. Assim, a região transicional é um segmento da reta de bifurcação secundária $\mathcal{L}(\varphi)$, e cada ponto U_L pode ser conectado a todos estados U um intervalo aberto, por descontinuidades de cruzamento satisfazendo o critério de viscosidade.

Para certos modelos que são gradientes quadráticos e certas escolhas da matriz de viscosidade, em [2] mostra que toda órbita do sistema dinâmico (2.26) do tipo sela-sela é um segmento de reta.

Teorema 3.2. *Em um sistema gradiente quadrático no plano, uma órbita do tipo sela-sela é um segmento de reta.*

Quando a matriz viscosidade D é um múltiplo da matriz identidade e a função de fluxo F é um gradiente quadrático, o sistema dinâmico (2.26) é um sistema gradiente quadrático no plano. Além disso, pelo Lema 3.2, se D é múltipla da matriz identidade, então ângulos de viscosidade coincidem com ângulos assintóticos. Assim, a parte (b) do Teorema 3.1, com o Teorema 3.2, nos dá o seguinte resultado.

Corolário 3.1. *Se a função de fluxo de um modelo quadrático é um gradiente. E a matriz viscosidade D é múltipla da matriz identidade, então um choque transicional é*

um segmento de reta. Além disso, uma descontinuidade de cruzamento conectando U_L a U_R satisfaz o critério de viscosidade se, e somente se, ambos pertencem a mesma reta de bifurcação secundária e a órbita conectando U_L e U_R é corretamente orientada.

É necessário observarmos que nem toda conexão sela-sela para um modelo quadrático, é um segmento de reta. Um exemplo é apresentado em [1], onde um certo modelo com uma região elíptica, U_L e U_R podem ser escolhidos de forma de que a órbita do sistema dinâmico (2.26) seja uma curva conectando U_L e U_R .

Capítulo 4

Solução do Problema de Riemann

Neste capítulo apresentamos dois exemplos de sistemas quadráticos de duas leis de conservação, onde para a solução do problema de Riemann de cada um destes exemplos são necessárias as ondas transicionais.

As Figuras 4.2(a) e 4.4(a) foram reproduzidas de [6], com autorização do autor D. Marchesin. Elas foram obtidas através do software *Pakman*, desenvolvido no laboratório Fluid, IMPA-RJ, por D. Marchesin, B. Plohr, e outros.

Exemplo 4.1.

$$\begin{cases} u_t + \left(\frac{1}{4}u^2 + \frac{1}{2}v^2\right)_x = 0 \\ v_t + (uv)_x = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

com dados iniciais

$$U(x, 0) = \begin{cases} U_L = (u_L, v_L)^T, & \text{se } x < 0 \\ U_R = (u_R, v_R)^T, & \text{se } x \geq 0, \end{cases} \quad (4.2)$$

onde U_L e U_R são estados constantes em uma vizinhança retangular da origem, denotada por Ω .

O objetivo é resolver globalmente o problema de Riemann (4.1) – (4.2), isto é, resolver o problema de Riemann para quaisquer U_L e U_R dados em Ω .

Dado um par (U_L, U_R) , a solução consiste de uma sequência de ondas de choque, ondas de rarefação e compostas, de modo que a velocidade da onda resultante seja crescente da esquerda para direita no plano- (x, t) .

Definição 4.1. *Um i -grupo de onda é uma sequência de i -ondas elementares conectando os estados U_L (à esquerda) e U_R (à direita), sem estados constantes separando as ondas.*

Definição 4.2. *Uma curva de onda por um estado U_L associada à i -ésima família característica, ou i -curva de onda, é o conjunto de estados U , que podem ser conectados à direita de U_L por um i -grupo de onda.*

Para se obter os choques fisicamente relevantes, associamos ao sistema (4.1) o sistema viscoso, com matriz de viscosidade igual a identidade, dado por

$$\begin{cases} u_t + \left(\frac{1}{4}u^2 + \frac{1}{2}v^2\right)_x = \varepsilon u_{xx} \\ v_t + (uv)_x = \varepsilon v_{xx}. \end{cases} \quad (4.3)$$

A função de fluxo $F(u, v) = \left(\frac{1}{4}u^2 + \frac{1}{2}v^2, uv\right)^T$ é o gradiente da função cúbica $C : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $C(u, v) = \frac{1}{12}u^3 + \frac{1}{2}v^2u + c$, onde c é uma constante.

A matriz jacobiana de $F(u, v)$ é dada por

$$F'(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}u & v \\ v & u \end{bmatrix},$$

com autovalores

$$\lambda_1 = 3 - 2\left(\frac{9}{4}u^2 + v^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\lambda_2 = 3 + 2\left(\frac{9}{4}u^2 + v^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$ para todo $(u, v) \neq (0, 0)$, o sistema (4.3) é estritamente hiperbólico exceto na origem.

Note que o sistema dinâmico associado ao sistema (4.3), dado por

$$\begin{cases} u' = -s(u - u_L) + \frac{1}{4}u^2 + \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{4}u_L^2 - \frac{1}{2}v_L^2 \\ v' = -s(v - v_L) + uv - u_L v_L. \end{cases} \quad (4.4)$$

é um gradiente quadrático. Além disso, como a matriz de viscosidade é a identidade, ângulos assintóticos coincidem com ângulos de viscosidade. Portanto, de acordo com o Corolário 3.1 as conexões sela-sela do sistema dinâmico (4.4) estão sobre segmentos de reta. E se U_L e U_R são conectados por uma onda de choque transicional, então U_L e U_R estão sobre a mesma reta de bifurcação secundária.

Nas figuras deste capítulo as curvas de 1-choque são representadas por linhas tracejadas grossas, as curvas de 2-choque por linhas tracejadas finas, as curvas de 1-rarefação por linhas contínuas grossas, as curvas de 2-rarefação por linhas contínuas finas e os choques transicionais por linhas pontilhadas, conforme Tabela 1.

—————	1-rarefação
—————	2-rarefação
.....	1-choque
.....	2-choque
.....	choque transicional

Tabela 1: Legenda para curvas de ondas nas Figuras 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4.

A seguir construímos a solução do problema de Riemann (4.1) – (4.2) para U_L fixo e U_R variando no retângulo Ω , ver Figura 4.1.

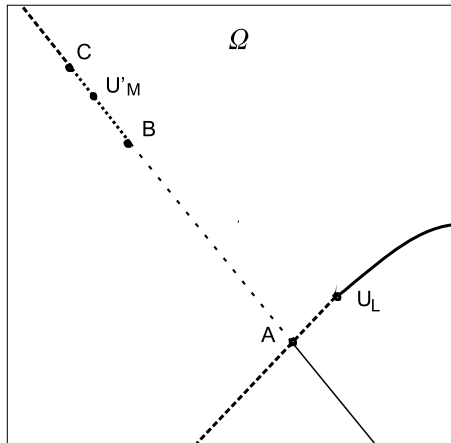


Figura 4.1: Região transicional associada ao problema (4.1) – (4.2) . O sistema é estritamente hiperbólico, exceto na origem. Estados U'_M no segmento BC são conectados a A por uma onda de choque transicional.

Primeiro construímos a curva de 1-onda por U_L , a qual neste caso é formada pelas curvas de 1-rarefação e 1-choque, incluindo o ramo não local de 1-choque localizado acima do ponto C . O ponto A é a intersecção desta curva com uma das retas de bifurcação secundária. O ponto A pode ser conectado por um choque transicional a cada estado $U = (u, v)^T$ sobre o segmento BC .

Em seguida traçamos as curvas de 2-onda por todos os pontos da curva de 1-onda. Fazemos o mesmo por todos os pontos do segmento BC . Neste caso, curvas de 2-onda cobrem todo o retângulo Ω , e assim o estado U_L pode ser conectado a qualquer estado $U_R \in \Omega$ por uma seqüência de ondas admissíveis.

Para resolver o problema Riemann para este U_L fixo, e qualquer $U_R \in \Omega$, dividimos o retângulo Ω em 10 regiões, R_1, R_2, \dots, R_{10} , ilustradas na Figura 4.2(b), de modo que o estado U_L possa ser conectado aos estados U_R , em uma mesma região, por um mesmo grupo de ondas, conforme Figura 4.2(a).

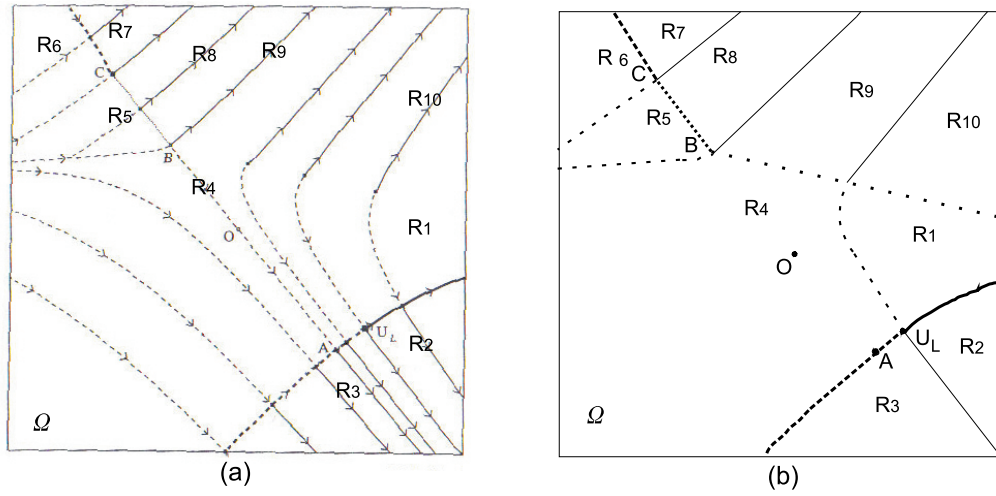


Figura 4.2: (a) Curvas de Onda. (b) Fronteiras das regiões R_1 a R_{10} .

Por exemplo, para U_R na região R_1 a solução é dada pelo seguinte grupo de ondas:

Uma 1-rarefação conectando U_L a um estado intermediário U_M , seguida de uma 2-rarefação conectando U_M e U_R . O estado U_M é determinado como intersecção da curva de 2-onda para trás por U_R e a curva de 1-onda por U_L .

Para completar a solução para U_R nas outras regiões usamos as seguintes notações:

$$U_1 \xrightarrow{S_i} U_2: \text{onda de } i\text{-choque de Lax, } i=1,2, \text{ conectando } U_1 \text{ a } U_2.$$

$$U_1 \xrightarrow{R_i} U_2: \text{onda de } i\text{-rarefação, } i=1,2, \text{ conectando } U_1 \text{ a } U_2.$$

$$U_1 \xrightarrow{SN_i} U_2: \text{onda de } i\text{-choque não local, } i=1,2, \text{ conectando } U_1 \text{ a } U_2.$$

$$U_1 \xrightarrow{T} U_2: \text{onda de choque transicional, conectando } U_1 \text{ a } U_2.$$

As seqüências de ondas para U_R nas regiões R_1, \dots, R_{10} , são dadas por:

$$U_R \in R_1: U_L \xrightarrow{R_1} U_M \xrightarrow{S_2} U_R.$$

$$U_R \in R_2 : U_L \xrightarrow{R_1} U_M \xrightarrow{R_2} U_R.$$

$$U_R \in R_3 : U_L \xrightarrow{S_1} U_M \xrightarrow{R_2} U_R.$$

$$U_R \in R_4 : U_L \xrightarrow{S_1} U_M \xrightarrow{S_2} U_R.$$

$$U_R \in R_5 : U_L \xrightarrow{S_1} A \xrightarrow{T} U'_M \xrightarrow{S_2} U_R.$$

$$U_R \in R_6 : U_L \xrightarrow{SN_1} U_M \xrightarrow{S_2} U_R.$$

$$U_R \in R_7 : U_L \xrightarrow{SN_1} U_M \xrightarrow{R_2} U_R.$$

$$U_R \in R_8 : U_L \xrightarrow{S_1} A \xrightarrow{T} U'_M \xrightarrow{R_2} U_R.$$

$$U_R \in R_9 : U_L \xrightarrow{S_1} U_{M_1} \xrightarrow{S_2} U_{M_2} \xrightarrow{R_2} U_R.$$

Finalmente para $U_R \in R_{10}$ a solução é dada por

$$U_L \xrightarrow{R_1} U_{M_1} \xrightarrow{S_2} U_{M_2} \xrightarrow{R_2} U_R.$$

Observe que o estado representado pelo ponto C na Figura 4.2(b) é a extremidade da curva de 1-choque não local e dos choques transicionais. Portanto, o choque entre U_L e C é um caso limite entre estes choques, devendo satisfazer as seguintes desigualdades

$$\lambda_1(C) < s \leq \lambda_1(U_L) < \lambda_2(U_L),$$

$$s < \lambda_2(C),$$

e

$$\lambda_1(U_L) \leq s < \lambda_2(U_L),$$

$$\lambda_1(C) < s < \lambda_2(C).$$

Note que neste caso, o choque é característico à esquerda, isto é, $s = \lambda_1(U_L)$.

Resultado semelhante deve ocorrer com o estado representado pelo ponto B na Figura 4.2(b), que é a extremidade entre choques transicionais e uma curva de 2-choque. Neste caso, o choque é característico à direita, isto é, $s = \lambda_2(B)$.

Exemplo 4.2.

$$\begin{cases} u_t + (\frac{1}{4}u^2 + \frac{1}{2}v^2 + v)_x = 0 \\ v_t + (uv - u)_x = 0, \end{cases} \quad (4.5)$$

com dados iniciais

$$U(x, 0) = \begin{cases} U_L = (u_L, v_L), & \text{se } x < 0 \\ U_R = (u_R, v_R), & \text{se } x \geq 0, \end{cases} \quad (4.6)$$

onde U_L e U_R são estados constantes na mesma vizinhança retangular da origem Ω , como no Exemplo 4.1.

O sistema viscoso associado ao sistema (4.5) com matriz de viscosidade

$$D = \begin{bmatrix} \frac{11}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{7}{5} \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

é dado por

$$\begin{cases} u_t + (\frac{1}{4}u^2 + \frac{1}{2}v^2 + v)_x = \varepsilon(\frac{11}{10}u_{xx} + \frac{1}{10}v_{xx}) \\ v_t + (uv - u)_x = \varepsilon(\frac{1}{10}u_{xx} + \frac{7}{5}v_{xx}). \end{cases} \quad (4.8)$$

A matriz jacobiana de $F(u, v)$ é dada por

$$F'(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}u & v + 1 \\ v - 1 & u \end{bmatrix}.$$

Os autovalores de $F'(u, v)$ são

$$\lambda_1 = \frac{3u}{4} - \left(\frac{1}{4}u^2 + 4v^2 - 4\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\lambda_2 = \frac{3u}{4} + \left(\frac{1}{4}u^2 + 4v^2 - 4\right)^{\frac{1}{2}}.$$

O lugar geométrico de coincidência, onde $\lambda_1(u, v) = \lambda_2(u, v)$ é a elipse

$$\frac{u^2}{4^2} + v^2 = 1,$$

ver Figura 4.3. Sobre esta elipse o sistema (4.5) é parabólico. Na região interior desta elipse o sistema é elíptico, pois os autovalores λ_1 e λ_2 são complexos. Na região exterior à elipse o sistema é estritamente hiperbólico, pois os autovalores λ_1 e λ_2 são reais e distintos.

O objetivo é resolver o problema de Riemann (4.5) – (4.2) para quaisquer U_L e U_R dados em Ω , fora da região elíptica.

Como no exemplo 4.1, o problema (4.5) – (4.2) não pode ser resolvido globalmente se apenas choques de Lax forem usados. Novamente, incluindo os choques transicionais o problema pode ser resolvido para todo par $(U_L, U_R) \in \Omega$.

A matriz de viscosidade D , dada por (4.7), não é múltipla da identidade, portanto ângulos de viscosidade são diferentes de ângulos assintóticos. Sob as condições da parte (a) do Teorema 3.1, as ondas de choque transicionais são caracterizadas por uma função X definida na região transicional, união dos setores triangulares T_1 e T_2 , ver Figura 3.2. A função transicional leva cada ponto U em T_1 em um único ponto

$U' = X(U) \in X(T_1)$, de forma que U e U' podem ser conectados por uma onda de choque transicional. De maneira análoga um ponto U em T_2 é levado em um único ponto $U' = X(U) \in X(T_2)$.

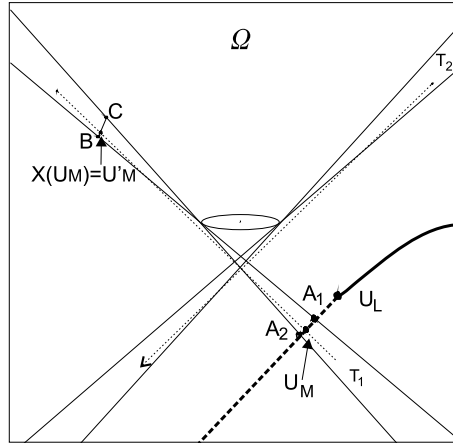


Figura 4.3: A curva de 1-onda por U_L intercepta a região transicional T_1 , entre os pontos A_1 e A_2 . $X(\widehat{A_1A_2}) = \widehat{BC}$, onde X é a função transicional.

A seguir vamos construir a solução do problema de Riemann (4.5) – (4.6) para U_L fixo e U_R variando no retângulo Ω , ver Figura 4.3.

Em primeiro lugar, construímos a curva de 1-onda por U_L formada pelo ramo local passando por U_L e pelo ramo não local de 1-choque acima do ponto C . O ramo local intercepta a região transicional T_1 em um arco de curva entre A_1 e A_2 , denotado por $\widehat{A_1A_2}$. Cada estado U_M sobre este arco, é conectado ao seu estado imagem $U'_M = X(U_M)$ por uma onda de choque transicional. O conjunto destes estados U'_M é o arco de curva \widehat{BC} sobre o ramo não local da Hugoniot por U_L , dado por $X(\widehat{A_1A_2})$, conforme Figuras 4.4(a) e 4.4(b). Nestas figuras o arco \widehat{BD} sobre o ramo não local da curva de Hugoniot por U_L é um ramo não local de 2-choque.

Em seguida traçamos as curvas de 2-onda por todos os pontos da curva de 1-onda.

Fazemos o mesmo por todos os pontos dos arcos \widehat{BC} e \widehat{BD} . Neste caso, as curvas de 2-onda cobrem todo o retângulo Ω , e assim, o estado U_L pode ser conectado a qualquer estado $U_R \in \Omega$ por uma sequência de ondas admissíveis.

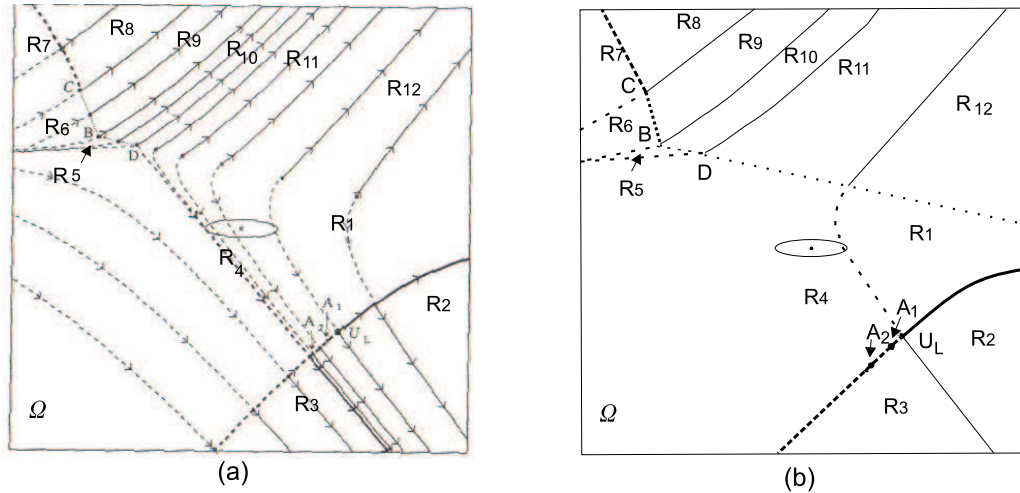


Figura 4.4: (a) Curvas de Onda. (b) Fronteiras das regiões R_1 a R_{12} .

Para resolver o problema Riemann para este U_L fixo, e qualquer $U_R \in \Omega$, dividimos o retângulo Ω em 12 regiões, R_1, R_2, \dots, R_{12} , ilustradas na Figura 4.4(b), de modo que o estado U_L possa ser conectado aos estados U_R , em uma mesma região, por um mesmo grupo de ondas, conforme Figura 4.4(a).

A solução do problema de Riemann 4.5 – 4.6 para U_R nas regiões $R_1 - R_4, R_6 - R_9$ e $R_{11} - R_{12}$ é construída de modo análogo à construção da solução do Exemplo 4.1.

Para U_R na região R_5 a solução é dada por

$$U_R \in R_5 : \quad U_L \xrightarrow{s_1} U_{M_1} \xrightarrow{SN_2} U_{M_2} \xrightarrow{s_2} U_R,$$

onde U_{M_1} é um estado sobre a curva de 1-choque entre o ponto A_2 e a reta de bifurcação, e U_{M_2} é um estado sobre o ramo não local de 2-choque \widehat{BD} . O estado U_{M_1} é conectado a U_{M_2} por um 2-choque com velocidade $s = \lambda_2(U_{M_2})$, e U_{M_2} é conectado a U_R também

por um 2-choque com a mesma velocidade $s = \lambda_2(U_{M_2})$. Nestas condições observamos que o estado U_{M_2} não aparece na solução física do problema, isto é, U_{M_1} pode ser conectado diretamente a U_R por um 2-choque com a velocidade $s = \lambda_2(U_{M_2})$.

Para U_R na região R_{10} a solução é dada por

$$U_R \in R_{10} : \quad U_L \xrightarrow{s_1} U_{M_1} \xrightarrow{SN_2} U_{M_2} \xrightarrow{R_2} U_R,$$

onde U_{M_1} e U_{M_2} são definidos como na descrição da solução na região R_5 .

Detalhamos a seguir a solução do problema de Riemann 4.5–4.6, para U_R em todas as regiões de Ω .

$$U_R \in R_1 : \quad U_L \xrightarrow{R_1} U_M \xrightarrow{s_2} U_R.$$

$$U_R \in R_2 : \quad U_L \xrightarrow{R_1} U_M \xrightarrow{R_2} U_R.$$

$$U_R \in R_3 : \quad U_L \xrightarrow{s_1} U_M \xrightarrow{R_2} U_R.$$

$$U_R \in R_4 : \quad U_L \xrightarrow{s_1} U_M \xrightarrow{s_2} U_R.$$

$$U_R \in R_5 : \quad U_L \xrightarrow{s_1} U_{M_1} \xrightarrow{SN_2} U_R.$$

$$U_R \in R_6 : \quad U_L \xrightarrow{s_1} U_M \xrightarrow{T} U'_M \xrightarrow{s_2} U_R.$$

$$U_R \in R_7 : \quad U_L \xrightarrow{SN_1} U_M \xrightarrow{s_2} U_R.$$

$$U_R \in R_8 : \quad U_L \xrightarrow{SN_1} U_M \xrightarrow{R_2} U_R.$$

$$U_R \in R_9 : U_L \xrightarrow{S_1} U_M \xrightarrow{T} U'_M \xrightarrow{R_2} U_R.$$

$$U_R \in R_{10} : U_L \xrightarrow{S_1} U_{M_1} \xrightarrow{SN_2} U_{M_2} \xrightarrow{R_2} U_R.$$

$$U_R \in R_{11} : U_L \xrightarrow{S_1} U_{M_1} \xrightarrow{S_2} U_{M_2} \xrightarrow{R_2} U_R.$$

$$U_R \in R_{12} : U_L \xrightarrow{R_1} U_{M_1} \xrightarrow{S_2} U_{M_2} \xrightarrow{R_2} U_R.$$

Conclusão

Para sistemas não estritamente hiperbólicos, em geral, o problema de Riemann não pode ser resolvido globalmente usando-se apenas ondas de rarefação e ondas de choques de Lax. Outros tipos de ondas podem ser necessários. Uma classe importante destes outros tipos de ondas são as ondas de choque transicionais. Para sistemas de duas leis de conservação, os choques transicionais aparecem como transição entre grupos de ondas das famílias um e dois.

Ondas de choques transicionais são soluções descontínuas que satisfazem o critério do perfil viscoso correspondendo a órbitas que são conexões sela-sela. A existência de choques transicionais depende da função de fluxo e da matriz de viscosidade associada ao sistema de leis de conservação.

Para modelos práticos é importante considerar matrizes de viscosidade realísticas, isto é, matrizes que incluam os termos de viscosidade provenientes da dedução do modelo.

Referências Bibliográficas

- [1] Azevedo, A. V. F, Marchesin, D., *Multiple Viscous Solutions For Systems Of Conservation Laws*, Trans. Amer. Math. Soc., v. 347, n. 08 pp. 3061-3078, 1995.
- [2] Chicone, C., *Quadratic Gradients On The Plane Are Generically Morse-Smale*, J. Differential Equations, v. 33, pp. 159-166, 1979.
- [3] Conley, C., Smoller, J., *Viscosity Matrices For Two Dimension Nonlinear Hyperbolic Systems*, Comm. Pure Appl. Math., v. 23, pp. 867-884, 1970.
- [4] Courant, R., Friedrichs, K., *Supersonic Flow and Shock Waves*, Jonh Wiley, New York, 1948.
- [5] Da Mota, J. C., *The Riemann Problem For A Simple Thermal Model For TwoPhase Flow In Porous Mediuous*, Mat. Aplic. Comp., v. 11 n. 2, pp. 867-884, 1992.
- [6] Isaacson, E., Marchesin, D., Plohr B. J., *Transitional Waves For Conservation Laws*, SIAM J. Appl. Math., v. 21, pp. 837-866, 1989.
- [7] Foy, L., *Steady State Solutions Of Hyperbolic Systems Of Conservation Laws With Viscous Terms*, Comm. Pure Appl. Math., v. 17, pp. 177-188, 1964.
- [8] Gel'fand, I. M., *Some Problems in Theory of Quasilinear Equations*, Amer. Math. Soc. Trans., v. 2 n. 29, pp. 295-381, 1963.

- [9] Glimm, J., *Solutions In The Large For Nonlinear Hyperbolic System Of Equation*, Comm. Pure Appl. Math., v. 18, 1965.
- [10] Isaacson, E., Temple, J. B., *The Riemann Problem Near a Hypebolic Singularity III*, SIAM J. Appl. Math., v. 48, pp. 1302-1312, 1988.
- [11] Lax, P., *Hyperbolic Systems of Conservation Laws II*, Comm. Pure Appl. Math., v. 10, pp.537-566, 1957.
- [12] Liu, T.P., *Assyntotic Behavior Of Solutions Of General Systems Of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws*, Ind. J. Math. v. 27, pp. 211-253, 1957.
- [13] Liu, T.P., *The Riemann Problem For General 2X2 Conservation Laws III*, Comm. Pure Appl. Math., v. 10, pp. 536, 1974.
- [14] Shearer, M., Schaeffer, D., Marchesin, D., Paes-Leme, P., *Solution of the Riemann Problem for a Phototype 2X2 System of Non-strictly Hyperbolic Conservation Laws*, Arch. Rational Mech. Anal., v. 97, pp. 299-320, 1987.
- [15] Smoller, J., *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*. Springer-Verlag, 2000.
- [16] Souza, A. J., *Structure For a Non Strictly Hyperbolic System of Three Conservation Laws*, Mathematical and Compute Moelling. v. 22 n. 9 pp. 1-30, 1995.