



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE INFORMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA
COMPUTAÇÃO

BRAULLY ROCHA DA SILVA

**Aspectos Computacionais Teóricos na
Convexidade P_3 : Número de
Carathéodory e Seleção de Conjunto
Alvo**

Goiânia
2026



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE INFORMÁTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

Dissertação Tese Outro*: _____

*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

Exemplos: Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

2. Nome completo do autor

Braully Rocha da Silva

3. Título do trabalho

Aspectos Computacionais Teóricos na Convexidade P_3: Número de Carathéodory e Seleção de Conjunto Alvo

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

a) consulta ao(a) autor(a) e ao(a) orientador(a);

b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.

O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.

Termo de Ciência e de Autorização (TECA) 6225114 SEI 23070.011321/2026-59 / pg. 1



Documento assinado eletronicamente por **Braully Rocha Da Silva, Discente**, em 27/05/2026, às 11:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Erika Morais Martins Coelho, Professora do Magistério Superior**, em 27/05/2026, às 14:44, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **6225114** e o código CRC **E0C8EF4A**.

BRAULLY ROCHA DA SILVA

Aspectos Computacionais Teóricos na Convexidade P_3 : Número de Carathéodory e Seleção de Conjunto Alvo

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências da Computação, do Instituto de Informática da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação.

Área de concentração: Ciência da Computação.

Linha de Pesquisa: Fundamentos de Computação.

Orientadora: Profa. Dra. Erika Morais Martins Coelho

Co-Orientador: Prof. Dr. Hebert Coelho da Silva

Goiânia
2026

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Silva, Braully Rocha da
Aspectos Computacionais Teóricos na Convexidade P3: Número de Carathéodory e Seleção de Conjunto Alvo [manuscrito] / Braully Rocha da Silva. - 2026.
80 f.: 2026

Orientadora: Prof(a). Dra. Erika Morais Martins Coelho; co-orientador: Dr. Hebert Coelho da Silva

Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Informática (INF), Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Goiânia, 2026.

Anexo.

Bibliografia.

Inclui: tabelas, algoritmos, grafico, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Grafo. 2. Convexidade P3. 3. Carathéodory. 4. Conjunto Alvo. 5. Heurística.

I. Coelho, Erika Morais Martins, orient. II. Silva, Hebert Coelho da, co-orient. III. Título.

CDU 004



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE INFORMÁTICA

ATA DE DEFESA DE TESE

Ata nº 06 da sessão de Defesa de Tese de **Braully Rocha da Silva**, que confere o título de Doutor em Ciência da Computação, na área de concentração em Ciência da Computação.

Aos quinze dias do mês de abril de dois mil e vinte e seis, a partir das nove horas, na sala 250 do INF, realizou-se a sessão pública de Defesa de Tese intitulada “**Aspectos Computacionais Teóricos na Convexidade P_3: Número de Carathéodory e Seleção de Conjunto Alvo**”. Os trabalhos foram instalados pela Orientadora, Professora Doutora Erika Morais Martins Coelho (INF/UFG) com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor Hebert Coelho da Silva (INF/UFG), coorientador, membro titular externo; Professor Doutor Julliano Rosa Nascimento (INF/UFG), membro titular interno; Professora Doutora Márcia Rodrigues Cappelle Santana (INF/UFG), membra titular interna; Professor Doutor Fábio Protti (IC/UFF), membro titular externo; e Professora Doutora Simone Dantas de Souza (IM/UFF), membra titular externa. A participação dos professores Fábio Protti e Simone Dantas de Souza ocorreu por meio de videoconferência. Durante a arguição os membros da banca não fizeram sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Tese, tendo sido o candidato **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pela Professora Doutora Erika Morais Martins Coelho, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos quinze dias do mês de abril de dois mil e vinte e seis.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA



Documento assinado eletronicamente por **Simone Dantas de Souza, Usuário Externo**, em 15/04/2026, às 11:25, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Hebert Coelho Da Silva, Professor do Magistério Superior**, em 15/04/2026, às 11:25, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Erika Morais Martins Coelho, Coordenadora de Curso**, em 15/04/2026, às 11:26, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Marcia Rodrigues Cappelle Santana, Professora do Magistério Superior**, em 15/04/2026, às 11:26, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Julliano Rosa Nascimento, Professor do Magistério Superior**, em 15/04/2026, às 11:26, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

BRAULLY ROCHA DA SILVA

Aspectos Computacionais Teóricos na Convexidade P_3 : Número de Carathéodory e Seleção de Conjunto Alvo

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências da Computação do Instituto de Informática da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, aprovada em 15 de Abril de 2026, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dra. Erika Morais Martins Coelho
Instituto de Informática – UFG
Presidente da Banca

Prof. Dr. Hebert Coelho da Silva
Instituto de Informática – UFG

Prof. Dr. Julliano Rosa Nascimento
Instituto de Informática – UFG

Prof. Dra. Márcia Rodrigues Cappelle Santana
Instituto de Informática – UFG

Prof. Dr. Fábio Protti
Instituto de Computação – UFF

Prof. Dra. Simone Dantas
Instituto de Computação – UFF

Agradecimentos

Ao fim desta jornada de cinco anos que culminou nesta tese, expresso minha imensa gratidão a todos que, de alguma forma, contribuíram para minha formação acadêmica e pessoal.

À minha sempre curiosa filha mais velha, **Liz**, que por muitas vezes ao longo deste trabalho coloriu e decorou meus grafos, trazendo alegria e leveza aos meus dias. À minha sempre carinhosa e cuidadora filha caçula, **Melissa**, que nasceu durante a realização deste trabalho e que, por várias vezes, assistiu a aulas remotas dormindo em meu colo. À minha amada esposa, **Daniela Custódio**, por todo o amor, cuidado, apoio e incentivo desde o momento da inscrição no doutorado, até o final deste percurso. Obrigado por ser minha companheira de vida, estudos, café, *home office*, seriados e momentos de lazer, tornando a jornada da pesquisa e da parentalidade mais leve, alegre e inspiradora.

À minha mãe, **Nilda Rocha**, por todo o amor e incentivo incondicional; você sempre será minha primeira e eterna professora. Ao meu pai, **Edes Vieira**, cuja paciência e tranquilidade me inspiraram a enfrentar com serenidade os desafios da vida e da pesquisa. Ao meu irmão, **Edes Junior**, companheiro de vida e de congressos científicos, sempre pronto para uma conversa descontraída, obrigado pelo apoio e pelos momentos de descontração.

Aos meus sogros, **Terezinha Costa** e **Nélio Custódio** e à minha cunhada, **Suiellen Custódio**, agradeço por todo o apoio e cuidado com minha família, especialmente com minhas filhas. Sem o auxílio de vocês, teria sido impossível conciliar as responsabilidades acadêmicas com as familiares.

Aos meus orientadores, **Erika Morais** e **Hebert Coelho**, pela paciência e por compartilharem a difícil (mas gratificante) jornada da pesquisa aliada à parentalidade. Obrigado por me ensinarem a ser um pesquisador melhor, mais rigoroso, detalhista e criativo. Suas orientações foram fundamentais para que eu seguisse firme, mesmo diante dos desafios.

Ao professor **Wellington Martins**, a quem considero um grande amigo e uma inspiração de mestre — quando eu crescer, quero ser como você. Ao professor **Fábio Protti**, pelo apoio fundamental nos momentos de dúvida com os resultados heurísticos; seu incentivo me fez melhorar este trabalho. Ao professor **Uéverton Souza**, que plantou

em minha mente a semente para o doutorado. E, com especial carinho, à minha primeira professora, **Maria da Glória**, que me cativou a amar a escola com seu jeito acolhedor; você é a melhor contadora de histórias que já conheci.

Ao meu grande amigo-irmão **Ednilto Tavares**, pelo incentivo e por ser uma referência de superação que me inspirou a seguir na vida acadêmica; você é um herói para mim. Aos grandes amigos, e também doutores, **Gustavo Souza**, **Douglas Bernardes** e **Thiago Fernandes**, pela amizade e pelas discussões que tornaram a caminhada mais motivadora e mais leve, seja em momentos de descontração, desabafos ou em discussões acadêmicas que me ajudaram a superar os desafios e a celebrar as conquistas.

Aos amigos do grupo de pesquisa **LDA**, em especial Leonardo Afonso, Sidney Ribeiro, Rafael Quirino, Roussian Gaioso, Felipe Gemmal, Roberto Urzedá, Vinícius Coelho e Evandro Carrijo. A presença virtual de vocês, dispostos a conversar sobre qualquer assunto — de pesquisa e política a futebol e religião —, trouxe-me esperança e alegria durante o período sombrio da pandemia. Compartilhar ideias e conquistas com vocês foi essencial para meu desenvolvimento como pesquisador e como pessoa.

Às minhas avós, **Dinora** e **Sônia**, exemplos de força e coragem, sempre prontas com uma palavra de carinho e o café que renova as energias. Ao meu bisavô **Martiniano**, que nas tardes da minha infância me ensinou jogos de tabuleiro, baralho e a "cama de gato" — algo que até hoje me fascina e que ainda vejo refletido em cada grafo que estudo.

Em memória, agradeço ao meu avô **Francisco**, meu companheiro de estudos e café durante o mestrado, e ao meu tio **Pedro Paulo**. Ambos deixaram saudades e a inspiração necessária para que eu continuasse esta jornada.

Por fim, agradeço à **Educação Pública Brasileira**, responsável por toda a minha formação. À Escola Estadual Genoveva Rezende Carneiro, que me acolheu na infância; ao CEFET-GO, onde iniciei minha formação em computação; e à UFG, onde realizei minha graduação, mestrado e, agora, o doutorado. Agradeço também ao **IFGoiano** por valorizar a capacitação de seus colaboradores, permitindo-me conciliar o ofício de programador com o de eterno aprendiz.

Resumo

Silva, Braully Rocha. **Aspectos Computacionais Teóricos na Convexidade P_3 : Número de Carathéodory e Seleção de Conjunto Alvo**. Goiânia, 2026. 95p. Tese de Doutorado . Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Instituto de Informática, Universidade Federal de Goiás.

A disseminação de influência em redes sociais, epidemias e difusão de informações é modelada por diversas áreas. Na Teoria dos Grafos, a convexidade oferece um arcabouço formal elegante para caracterizar processos de propagação. Um parâmetro central nesse contexto é o número de Carathéodory associado à convexidade P_3 (caminhos de três vértices), que mede o tamanho máximo de subconjuntos necessários para explicar a inclusão de vértices em fechos convexos. Decidir se um grafo admite um conjunto de Carathéodory de cardinalidade k é NP-completo, porém resultados relevantes podem ser obtidos para classes específicas.

Esta tese, organizada no formato escandinavo, apresenta resultados originais sobre o número de Carathéodory na convexidade P_3 . Investigamos grafos de diâmetro dois, estabelecendo limites superiores para diferentes subclasses. Propomos um algoritmo polinomial que constrói caminhos especiais fornecendo estimativas computáveis e um limite superior justo, contribuindo para a conjectura de que o número de Carathéodory é limitado por constante em grafos de diâmetro dois.

Analisamos grafos circulantes, determinando valores exatos para determinados casos e limites inferiores. Para grafos de Hamming de dimensão n , demonstramos que o número de Carathéodory é pelo menos n , evidenciando a relação entre dimensionalidade e seus parâmetros nessa convexidade.

Além dos resultados teóricos, abordamos o problema de seleção de conjunto alvo, modelo clássico de difusão de influência. Apresentamos heurísticas eficientes com desempenho superior a trabalhos correlatos, validadas experimentalmente em redes sociais reais de grande escala e instâncias aleatórias.

Por fim, registramos conjecturas com direções promissoras, reforçando conexões entre convexidade em grafos, complexidade computacional e modelos de difusão em redes.

Palavras-chave

Grafo, Convexidade P_3 , Carathéodory, Conjunto Alvo, Heurística

Abstract

Silva, Braully Rocha. **Theoretical and Computational Aspects in P_3 Convexity: Carathéodory Number and Target Set Selection**. Goiânia, 2026. 95p. PhD. Thesis . Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Instituto de Informática, Universidade Federal de Goiás.

The spread of influence in social networks, epidemics, and information diffusion is modeled across several fields. In Graph Theory, convexity provides an elegant formal framework for characterizing propagation processes. A central parameter in this context is the Carathéodory number associated with P_3 -convexity (paths of three vertices), which measures the maximum size of subsets required to explain the inclusion of vertices in convex hulls. Deciding whether a graph admits a Carathéodory set of cardinality k is NP-complete; however, relevant results can be obtained for specific graph classes.

This thesis, organized in the Scandinavian format, presents original results on the Carathéodory number in P_3 -convexity. We investigate graphs of diameter two, establishing upper bounds for different subclasses. We propose a polynomial-time algorithm that constructs special paths providing computable estimates and a tight upper bound, contributing to the conjecture that the Carathéodory number is bounded by a constant in diameter-two graphs.

We analyze circulant graphs, determining exact values for particular cases and lower bounds in general. For Hamming graphs of dimension n , we prove that the Carathéodory number is at least n , highlighting the relationship between dimensionality and convexity parameters.

In addition to theoretical results, we address the target set selection problem, a classical model of influence diffusion. We present efficient heuristics that outperform related approaches, validated experimentally on large-scale real social networks and randomly generated instances.

Finally, we state conjectures that outline promising research directions, strengthening the connections between graph convexity, computational complexity, and diffusion models in networks.

Keywords

Graph, Convexity P_3 , Carathéodory, Target Set, Heuristic

Sumário

Lista de Figuras	12
Lista de Tabelas	13
Lista de Algoritmos	14
1 Introdução	15
1.1 Convexidade em Grafos e o Número de Carathéodory	16
1.2 Complexidade Computacional e Resultados Conhecidos	17
1.3 Seleção de Conjunto Alvo	19
1.4 Problema de Pesquisa	20
1.4.1 Objetivo Geral	20
1.4.2 Objetivos Específicos	20
1.4.3 Questões de Pesquisa	21
1.4.4 Justificativa Científica e Relevância	21
1.5 Introdução aos Artigos e Estrutura do Trabalho	21
1.6 Preliminares	23
2 Limites para o número de Carathéodory em grafos de diâmetro dois	26
2.1 Preliminaries	26
2.2 Results	29
2.3 Conclusion	37
3 Número de P_3 -Carathéodory em Grafos Circulantes	39
3.1 Preliminares	39
3.2 Resultados	41
3.3 Conclusões	47
4 Limites para o número de Carathéodory em Grafos de Hamming	49
4.1 Preliminares	49
4.2 Resultados	51
4.3 Conclusões	55
5 Uma Heurística Gulosa para Conjunto Alvo Majorado em Redes Sociais	56
5.1 Previous results	56
5.1.1 Our results	57
5.2 Preliminaries and Definitions	57
5.3 Algorithm	58
5.3.1 Parameter selection	58

5.4	Results	60
5.5	Conclusions	62
6	Uma Heurística Gulosa para Seleção de Conjunto Alvo em Redes Sociais	65
6.1	Algoritmo	65
6.1.1	Algoritmo Exaustivo	68
6.2	Resultados e discussões	69
6.2.1	Grafos randômicos	70
6.2.2	Redes sociais reais	71
7	Conclusões	75
	Referências Bibliográficas	79
A	Aceites de Artigos	88
B	Permissão de Reuso	94

Lista de Figuras

2.1	Example of graphs with diameter two. In each graph G , the black vertices represent a Carathéodory set S of maximum cardinality; the gray vertices represent the convex hull of S ; and the dark gray vertices represent the vertices in $\partial H_G(S)$.	30
2.2	Proof of Lemma 3, Case $w \in N_2(H)$: black vertices belong to S , gray vertices are in $N(H(S))$, and dark gray vertices are in $H(S)$.	31
2.3	Proof of Theorem 3: the black vertices are supposed to be in the Carathéodory set S	33
2.4	Proof of Lemma 4, example for $k = 6$: the vertices in black belong to the path $P_{k+1} = (v_0, v_1, \dots, v_6)$ of G constructed by Algorithm 2.1.	34
2.5	Proof of Lemma 5: $s \notin N(v_{l-1})$. Black vertices belong to the path P_ℓ of G constructed by Algorithm 2.1.	37
3.1	Exemplos de Grafos Circulantes.	40
3.2	Exemplo da Proposição 5 no $C_8(1, 3)$.	42
3.3	Exemplo de um conjunto de Carathéodory para $C_{18}(1, 5)$	43
3.4	Processo de percolação no sentido horário do Lema 7	43
3.5	Processo de percolação no sentido anti-horário do Lema 7	44
3.6	Exemplo de um conjunto de Carathéodory para $C_{18}(1, 5)$	46
3.7	Exemplo de um conjunto não Carathéodory para $C_{17}(1, 5)$	46
3.8	Exemplos de S para quando $3 \nmid (r + 1)$ conforme Lema 9	48
4.1	Grafo de exemplo para o Teorema 7	51
4.2	Exemplo do Lema 11	52
4.3	Grafo tesseracto $\mathcal{H} = K_2 \square K_2 \square K_2 \square K_2$	54
5.1	Petersen graph and its activation process in majority target set selection	58
5.2	Total execution time	62
5.3	Results for ca-GrQc and ca-HepTh datasets	62
5.4	Results for ca-CondMat and ca-HepPh datasets	63
5.5	Results for ca-AstroPh and Douban datasets	63
5.6	Results for BlogCatalog3 and BlogCatalog datasets	63
5.7	Results for BlogCatalog2 and Livemocha datasets	64
5.8	Results for Delicious and BuzzNet datasets	64
5.9	Results for Last.fm and YouTube2 datasets	64

Lista de Tabelas

2.1	Upper bounds for P_3 -Carathéodory number $c(G)$ in graphs with diameter two.	37
5.1	Result for exploration parameters	60
5.2	Result for Majority TSS	61
6.1	Resumo de resultados para grafos randômicos.	71
6.2	Resultados para redes sociais e $f(v) = 1$	72
6.3	Resultados para redes sociais e $f(v) = 2$	72
6.4	Resultados para redes sociais e $f(v) = 3$	73
6.5	Resultados para redes sociais e $f(v) = 4$	73
6.6	Resultados para redes sociais e $f(v) = 5$	74

Lista de Algoritmos

2.1	<i>MakeP_{k+1}(G)</i>	34
5.1	GenericGreedy	59
6.1	<i>DistDifDelta – refine(G)</i>	67
6.2	<i>ExhaustivoTSS(G, k)</i>	69

Introdução

A influência de indivíduos em uma rede é um tema recorrente em diversos campos de pesquisa, desde a disseminação de doenças até a propagação de informações, opiniões e tendências em redes sociais. Com bilhões de usuários e milhões de interações diárias, as redes sociais tornaram-se um fenômeno fundamental para comunicação, marketing e difusão de conteúdo, cuja compreensão necessita de análise, decomposição e modelos matemáticos apropriados.

Considere o seguinte cenário: um grupo de cientistas deseja estudar o comportamento de certas doenças em uma amostra R de cobaias. Inicialmente, um conjunto S é infectado com tal doença. Através da transmissão da doença pelas cobaias inicialmente infectadas, outro conjunto de indivíduos também será infectado. Os cientistas estão particularmente interessados em garantir que uma cobaia específica u , que possui um antígeno para a doença, seja incluída no grupo final de infectados. Dado o custo e esforço necessários para infectar o conjunto inicial S , surge a questão: qual é o número mínimo de cobaias que devem ser inicialmente infectadas para garantir a presença de u no grupo final?

De forma análoga, considere uma equipe de pesquisadores estudando a disseminação de informações em uma rede social com R indivíduos. Cada vértice de um grafo representa um indivíduo, e as arestas representam conexões de comunicação entre eles. Suponha que o objetivo seja espalhar uma informação (por exemplo, uma campanha de conscientização) a partir de um subconjunto inicial S de indivíduos escolhidos da rede. A informação se propaga por influência — isto é, um indivíduo pode adotar a informação se um número suficiente de seus contatos diretos já o fez. Após a propagação, o conjunto T representa todos os indivíduos que receberam a informação. Como há custos envolvidos em convencer inicialmente as pessoas de S , deseja-se minimizar o tamanho desse conjunto inicial, sem deixar de atingir um indivíduo específico $u \in T$, considerado altamente influente ou estratégico.

Esses problemas, juntamente com outros em diversos contextos que requerem um processo de disseminação — como estratégias de marketing (Domingos e Richardson 2001; Richardson e Domingos 2002), propagação de opiniões (Dreyer e Roberts 2009; Dreyer e Roberts 2009), marketing vi-

ral (Kempe et al. 2003), computação distribuída (Peleg 2002; Socievole et al. 2016) e tolerância a falhas (Linial et al. 1993; Peleg 1998; Berger 2001) — podem ser modelados e eventualmente resolvidos a partir de uma perspectiva de convexidade em grafos.

1.1 Convexidade em Grafos e o Número de Carathéodory

Seja $G = (V(G), E(G))$ um grafo não direcionado, finito e simples, com conjunto de vértices $V(G)$ e conjunto de arestas $E(G)$. Uma *convexidade em grafos* sobre $V(G)$ é uma coleção \mathcal{C} de subconjuntos de $V(G)$ tal que $\emptyset, V(G) \in \mathcal{C}$ e \mathcal{C} é fechada sob interseções. Os conjuntos em \mathcal{C} são chamados *conjuntos convexos* (Harary e Nieminen 1981).

Algumas convexidades naturais em grafos são definidas por um conjunto \mathcal{P} de caminhos em G , onde um conjunto S de vértices de G é convexo se, e somente se, para todo caminho $P = (v_0, v_1, \dots, v_l)$ em \mathcal{P} tal que v_0 e v_l pertencem a S , todos os vértices de P pertencem a S . Se definirmos \mathcal{P} como o conjunto de todos os caminhos mínimos em G , obtemos a conhecida *convexidade geodésica* (Bedo et al. 2023; Gajavalli e Greeni 2023; Harary e Nieminen 1981; Chandran et al. 2022). Quando \mathcal{P} é a coleção de todos os caminhos induzidos de G , então \mathcal{C} é a *convexidade monofônica* (Duchet 1988; Dourado et al. 2020).

Neste trabalho, focamos principalmente na *convexidade P_3* , que é definida considerando \mathcal{P} como o conjunto de todos os caminhos em G com exatamente três vértices (Barbosa et al. 2012; Coelho et al. 2019; Coelho et al. 2023; Coelho et al. 2014; Coelho et al. 2015; Centeno et al. 2011; Dourado et al. 2013; Grippo et al. 2021; Cappelle et al. 2022; Blaum e Marengo 2023). Neste tese, a convexidade P_3 difere da convexidade P_3^* (Dourado et al. 2022), que considera apenas caminhos induzidos. Um conjunto $S \subseteq V(G)$ é dito *P_3 -convexo* se, para todo par de vértices $u, v \in S$, todo vértice que está em algum caminho de comprimento 2 entre u e v também pertence a S (Centeno et al. 2011; Coelho et al. 2015; Erdos et al. 1972). A convexidade P_3 também é conhecida na literatura como *percolação 2-bootstrap*, um processo que tem sido extensivamente estudado em teoria dos grafos e física estatística (Benevides et al. 2015; González et al. 2021).

Dado um grafo G e um conjunto $S \subseteq V(G)$, o *fecho P_3 -convexo* de S , denotado por $H(S)$, é o menor conjunto P_3 -convexo contendo S . Em outras palavras, qualquer vértice com dois vizinhos dentro de $H(S)$ também está em $H(S)$. O *intervalo fechado* entre dois vértices $u, v \in V(G)$ é o conjunto $I[u, v]$ de todos os vértices pertencentes a todo caminho P_3 entre u e v . Se $S \subseteq V(G)$, então $I[S]$ é a união de todos $I[u, v]$ para $u, v \in S$. Para um conjunto S de vértices em um grafo G , seja $I^0[S] = S$, $I^1[S] = I[S]$ e

$I^k[S] = I[I^{k-1}[S]]$ para $k \geq 2$. A partir de algum termo p , a sequência será constante, quando $I^p[S] = I^{p+1}[S]$ obtém-se a envoltória convexa de S . O processo de computar a envoltória convexa é chamado de *percolação*.

Se $H_{\mathcal{C}}(S) = V(G)$, então S é chamado *conjunto envoltório* de G . Um parâmetro bastante estudado da convexidade é o *número de envoltória* $h_{\mathcal{C}}(G)$, que é a cardinalidade do menor conjunto envoltório em G .

Um resultado bem conhecido sobre conjuntos convexos em \mathbb{R}^d é o *Teorema de Carathéodory* (Carathéodory 1911), que estabelece:

Todo ponto u no envoltório convexo de um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^d$ está no envoltório convexo de um subconjunto S' de S de ordem no máximo $d+1$.

Motivados por este teorema, um parâmetro importante tem sido determinado para várias convexidades em grafos, por exemplo em (Anand et al. 2020; Changat et al. 2001; Duchet 1988). Ele desempenha um papel significativo no estudo da dinâmica do comportamento de grafos, pois captura como um conjunto de vértices S pode ser representado por um subconjunto minimal de seus vértices que ainda preserva a estrutura de convexidade do grafo: o *número de Carathéodory*.

O *número de P_3 -Carathéodory* $c(G)$ é o menor inteiro c tal que, para todo conjunto S e todo $v \in H(S)$, existe um subconjunto $S' \subseteq S$ de tamanho no máximo c , tal que $v \in H(S')$. Um *conjunto de Carathéodory* S satisfaz $\partial H_{\mathcal{C}}(S) \neq \emptyset$, onde $\partial H_{\mathcal{C}}(S) = H_{\mathcal{C}}(S) \setminus \bigcup_{u \in S} H_{\mathcal{C}}(S \setminus \{u\})$. Alternativamente, o *número de Carathéodory*, $c_{\mathcal{C}}(G)$, pode ser definido como a cardinalidade máxima de um conjunto de Carathéodory de \mathcal{C} .

Considerando o problema dos pesquisadores e a disseminação de informações, determinar o número mínimo de indivíduos que precisam ser inicialmente convencidos para que a propagação da informação leve inevitavelmente à inclusão de u no grupo final, considerando todas as possíveis escolhas de subconjuntos $S \subseteq R$ e vértices $u \in T$, equivale a calcular o número de Carathéodory do grafo que modela a rede social.

1.2 Complexidade Computacional e Resultados Conhecidos

Em 2012 (Barbosa et al. 2012) estudaram a complexidade do problema NÚMERO DE P_3 -CARATHÉODORY, ou seja, o problema de decidir, dado um grafo G e um inteiro k , se o número de Carathéodory P_3 $c(G)$ é pelo menos k . Embora este problema seja NP-completo mesmo para grafos bipartidos (Barbosa et al. 2012), existem algoritmos de tempo polinomial para classes especiais de grafos, como árvores, grafos blocos (Barbosa et al. 2012), grafos cordais (Coelho et al. 2014), grafos P_4 -reduzíveis e

co-árvores (Hon et al. 2016), alguns produtos de grafos (Coelho et al. 2017), e grafos de diâmetro 2 (Coelho et al. 2023).

Na convexidade monofônica, $c(G) = 1$ para grafos completos e 2 para outros grafos (Duchet 1988). Considerando a convexidade geodésica, é NP-completo decidir quando $c(G)$ é pelo menos k , mesmo quando restrito a grafos bipartidos, e $c(G)$ é no máximo 3 para grafos split (Coelho et al. 2014). Em (Anand et al. 2020) foram apresentadas caracterizações para algumas classes, como grafos de intervalo unitário e potência de ciclos, que possibilitaram determinar o número de Carathéodory em tempo polinomial.

Em 2022, Capelle et al. (Cappelle et al. 2022) apresentaram resultados e limites para o número de envoltória e número de intervalo na convexidade P_3 para grafos biconexos com diâmetro dois, inspirados pela conjectura de que esses parâmetros são limitados por uma constante $c \leq 4$. Dado um conjunto $S \subseteq V(G)$ em uma convexidade C , o tempo de iteração $ti_C(S)$ é o menor inteiro k tal que $I^k[S] = H(S)$, representando o número mínimo de aplicações consecutivas da função intervalo necessárias para obter a envoltória convexa de S . Em 2025, Araujo et al. (Araujo et al. 2025) mostraram que o tempo de iteração também é NP-difícil na convexidade geodésica mesmo em grafos com diâmetro dois. Eles também provaram que o número de posição geral da convexidade monofônica é $W[1]$ -difícil (parametrizado pelo tamanho da solução), e $n^{1-\varepsilon}$ -inaproximável em tempo polinomial para qualquer $\varepsilon > 0$ (a menos que $P = NP$), mesmo em grafos com diâmetro dois.

O processo de encontrar o número de conversão irreversível por limiar 2 em um grafo, consiste em encontrar o menor número de vértices que precisamos converter inicialmente na iteração I^1 para propagar a conversão a todos os vértices restantes do grafo, destacamos que o problema de encontrar o número de 2-conversão irreversível é equivalente ao problema de determinar o número de envoltória na convexidade P_3 . Considerando a classe dos grafos circulantes, Al-Ezeh (Al-Ezeh et al. 2017) definiu o número de envoltória na convexidade geodésica para Grafos Potência de Ciclo, uma subclasse dos grafos circulantes, utilizando como base os resultados trazidos por Obradovic (Obradović et al. 2005). Shaheen (Shaheen et al. 2022) apresentou resultados para o número de 2-conversão irreversível de grafos circulantes com a configuração $C_n(1, r)$, que é equivalente ao número de envoltória P_3 .

Estudos recentes exploraram modelos de influência dinâmica e seleção de conjunto-alvo utilizando parâmetros de convexidade, destacando a relevância do número de Carathéodory (Frasca e Rossi 2022; Keiler et al. 2021; Araújo e Sampaio 2023). Trabalhos recentes (Frasca e Rossi 2022) trazem um modelo de influência dinâmica da perspectiva de um conjunto de Carathéodory, e (Keiler et al. 2021) sugere que o número de Carathéodory é um interessante parâmetro para ser abordado no modelo de seleção de conjuntos alvo.

1.3 Seleção de Conjunto Alvo

Um modelo bem conhecido para descrever a propagação de influência em uma rede social é o modelo de contaminação irreversível por k vizinhos (Dreyer e Roberts 2009; Balogh et al. 2010). Neste modelo, um indivíduo não-influenciado se torna influenciado quando tem pelo menos k de seus vizinhos influenciados, podendo também propagar a influência para outros de seus vizinhos.

Seja $G = (V, E)$ um grafo, $S \subseteq V(G)$ e uma função limite $f : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$. O intervalo fechado $I[S]$ de S é formado por S mais todos os vértices v de $V(G) \setminus S$ com pelo menos $f(v)$ vizinhos em S . Podemos utilizar o conceito de intervalo fechado para iterativamente calcular o processo de ativação do subconjunto $S \subseteq V(G)$ que é dado pela sequência $I^p[S]$, onde $I^0[S] = S$, $I^1[S] = I[S]$ e $I^p[S] = I[I^{p-1}[S]]$ para $p \geq 2$. Temos a estabilização da ativação quando para algum p temos $I^q[S] = I^p[S]$ para todo $q \geq p$, e nesse caso $I^p[S]$ é o conjunto ativado estável de S . Se $I^*[S] = V(G)$ então S é um conjunto alvo. O problema da Seleção de Conjunto Alvo consiste em determinar o tamanho de um conjunto alvo de cardinalidade mínima.

Existem algumas variações do problema de seleção de conjunto alvo, considerando diferentes atribuições para $f(v)$, para todo $v \in V(G)$. Quando $f(v) = \lceil \frac{d(v)}{2} \rceil$ temos a Seleção de Conjunto Alvo Majoritário (Peleg 1998; Peleg 2002), Já, quando $f(v) = \lceil d(v) \times \alpha \rceil$ temos o Limite Proporcional com $0 \leq \alpha \leq 1$ (N. Zehmakan 2021). Por fim, quando $f(v) = k$ para todo $v \in V(G)$ temos a Contaminação Irreversível por k Vizinhos (Dreyer e Roberts 2009; Chen 2009).

O problema de seleção de conjunto alvo é um problema NP-difícil para grafos gerais (Chen 2009). Estudos sobre o problema de seleção de conjunto alvo são suportados por um forte arcabouço teórico de grafos. Em (Chen 2009; Dreyer e Roberts 2009; Centeno et al. 2011) é mostrado que é um problema NP-difícil para grafos gerais, quando o limite de ativação é pelo menos 2. Existem também algoritmos de tempo polinomial e limites para certas classes de grafos, como árvores, grafos bloco-cactus e grafos cordais (Chen 2009; Nichterlein et al. 2010; Ben-Zwi et al. 2011; Chopin et al. 2012; Chiang et al. 2011; N. Zehmakan 2021), e estudos sobre a complexidade parametrizada ou aproximada do problema (Dvorak et al. 2022; Charikar et al. 2016; Hartmann 2018).

Por ser um problema com grande potencial de aplicabilidade, diversos trabalhos foram feitos para o problema de conjunto alvo, com diferentes abordagens e resultados. Muitas heurísticas rápidas e eficientes foram desenvolvidas. Devemos destacar os trabalhos iniciais de (Kempe et al. 2003), em que temos um algoritmo guloso para o problema de conjunto alvo. Com pequenas variações entre si, são heurísticas gulosas que escolhem a cada iteração o vértice disponível de maior grau. Em um segundo momento, alguns trabalhos propuseram algoritmos que a cada itera-

ção selecionam o vértice que influencia o maior número de vértices não influenciados (Kempe et al. 2003; Dinh et al. 2014; Panizzi et al. 2017). E, por fim, os trabalhos de (Cordasco et al. 2018; Shakarian et al. 2013), que propuseram algoritmos heurísticos que realizam uma decomposição do grafo, antes da construção do conjunto mínimo. O diferencial desses trabalhos é o tempo de execução escalável e com experimentação em redes sociais reais. Além do tempo, a qualidade da solução é superior às heurísticas anteriores, sendo as duas principais referências neste tipo de problema.

1.4 Problema de Pesquisa

Apesar de sua relevância estrutural, a determinação do número envoltório e do número de Carathéodory na convexidade P_3 é computacionalmente difícil em grafos gerais, sendo problemas NP-completos mesmo sob restrições estruturais moderadas. Ainda assim, resultados recentes indicam que, para classes específicas de grafos, é possível obter limites justos, caracterizações estruturais e algoritmos eficientes.

Diante disso, o problema central investigado nesta tese consiste em compreender como propriedades estruturais dos grafos — tais como diâmetro, conectividade, regularidade e etc — influenciam o comportamento do número envoltório e do número de Carathéodory na convexidade P_3 , bem como em explorar as implicações desses parâmetros em modelos algorítmicos de difusão de influência, particularmente no problema de seleção de conjunto alvo.

1.4.1 Objetivo Geral

O objetivo geral desta tese é investigar aspectos teóricos e algorítmicos da convexidade P_3 em grafos, com ênfase no número envoltório e no número de Carathéodory. Com ênfase no estabelecimento de limites, construções extremas e algoritmos para classes estruturadas de grafos, bem como explorando conexões desses parâmetros com o problema de seleção de conjunto alvo em redes.

1.4.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos deste trabalho são:

1. Estabelecer novos limites inferiores e superiores para o número envoltório e o número de Carathéodory na convexidade P_3 .
2. Analisar esses parâmetros em subclasses específicas de grafos, com potencial promissor de resultados polinomiais como grafos de diâmetro dois, circulantes, potência de ciclos, Hamming, entre outros.

3. Explorar, desenvolver, implementar e avaliar heurísticas para o problema de seleção de conjunto alvo, incluindo variantes majoradas, com base nas experiências adquiridas no estudo da convexidade P_3 .
4. Formular conjecturas fundamentadas que indiquem direções promissoras para pesquisas futuras em convexidade em grafos e modelos de ativação.

1.4.3 Questões de Pesquisa

Esta tese é orientada pelas seguintes questões de pesquisa:

- Como o diâmetro e a conectividade de um grafo podem influenciar o número de Carathéodory e envoltório na convexidade P_3 ?
- É possível estabelecer limites para o número de Carathéodory em classes de grafos que possuem limites conhecidos para o número envoltório, como grafos de diâmetro dois, circulantes, Hamming, Kneser, Snark entre outros?
- Qual o comportamento desses parâmetros em grafos fortemente estruturados, como grafos circulantes e grafos de Hamming?
- Heurísticas gulosas podem produzir soluções competitivas para o problema de seleção de conjunto alvo em redes sociais reais?

1.4.4 Justificativa Científica e Relevância

Do ponto de vista científico, esta tese contribui para o avanço da teoria da convexidade em grafos ao aprofundar o estudo de dois de seus parâmetros centrais na convexidade P_3 , integrando resultados estruturais, complexidade computacional e algoritmos. A obtenção de limites justos e de procedimentos polinomiais em classes específicas de grafos contribui para a compreensão dos limites entre tratabilidade e intratabilidade desses problemas.

Sob a perspectiva aplicada, os resultados dialogam diretamente com problemas contemporâneos de difusão em redes sociais, *big data* e mineração de dados, com aplicações em marketing, imunização, disseminação de informação útil e contenção de desinformação. O desenvolvimento e a avaliação experimental de heurísticas reforçam o caráter interdisciplinar do trabalho, aproximando teoria e prática.

1.5 Introdução aos Artigos e Estrutura do Trabalho

Esta tese está organizada no formato escandinavo, sendo composta por uma coleção de artigos científicos inter-relacionados, que compartilham uma linha temática comum e contribuem de forma complementar para os objetivos gerais do trabalho.

Cada artigo aborda aspectos específicos da convexidade P_3 em grafos e de problemas algorítmicos associados à difusão de influência em redes, combinando resultados teóricos, análises estruturais e abordagens experimentais.

Esse formato está alinhado às diretrizes institucionais vigentes do Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação da Universidade Federal de Goiás, conforme a Resolução INF-UFG nº 02/2023/PPGCC (Coordenadoria, PPGCC-UFG 2023). Em conformidade com o Art. 8º, inciso III, da referida resolução, optou-se por unificar a introdução teórica, os resumos, as referências bibliográficas e as conclusões gerais em seções específicas, evitando repetições e promovendo uma visão integrada dos resultados obtidos ao longo da tese. As referências bibliográficas são apresentadas de forma consolidada ao final do trabalho, seguindo as normas da ABNT. Cada capítulo correspondente a um artigo inicia-se com uma introdução contextual e, quando pertinente, encerra-se com considerações finais específicas.

O **Capítulo 2** (Artigo 1) investiga o número de Carathéodory na convexidade P_3 em grafos de diâmetro dois. São estabelecidos limites superiores para diferentes subclasses, incluindo grafos com vértice de corte, grafos biconexos e grafos biconexos livres de ciclos C_6 . Além disso, é apresentado um algoritmo em tempo polinomial que constrói caminhos especiais capazes de fornecer limites superiores computáveis para o número de Carathéodory, contribuindo para a conjectura de que esse parâmetro é limitado por uma constante em grafos de pequeno diâmetro. Este artigo foi aceito para publicação como trabalho completo no periódico *Discrete Applied Mathematics* (Silva et al. 2026), e uma versão preliminar dos primeiros resultados foi apresentada como resumo expandido no LAGOS 2023 (XII Latin-American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium) (Coelho et al. 2023). O idioma do artigo é o inglês, e a versão final será publicada em 2026. A versão preliminar, apresentada no LAGOS 2023, está disponível em repositório aberto (Coelho et al. 2023).

No **Capítulo 3** (Artigo 2) é realizado um estudo do número de Carathéodory na convexidade P_3 em grafos circulantes. São determinados valores exatos para casos particulares, como os grafos $C_n(1,2)$, e estabelecidos limites inferiores para grafos $C_n(1,r)$ com $r > 2$, sob restrições sobre os parâmetros estruturais. Como consequência, obtêm-se resultados para a subclasse dos grafos potência de ciclos, ampliando o entendimento do comportamento do parâmetro em grafos altamente regulares. Este artigo foi aceito como trabalho completo no SBPO 2024 (Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional) (Silva et al. 2024).

O **Capítulo 4** (Artigo 3) dedica-se ao estudo do número de Carathéodory na convexidade P_3 em grafos de Hamming, uma classe relevante de produtos cartesianos de grafos completos, com forte conexão à teoria de códigos corretores de erros. Nesse capítulo, são construídos conjuntos de Carathéodory de cardinalidade linear na dimensão do

grafo, estabelecendo limites inferiores para o número de Carathéodory e evidenciando o impacto da dimensionalidade na estrutura convexa desses grafos. O artigo correspondente foi aceito como trabalho completo no SBPO 2025 (Silva et al. 2025).

O **Capítulo 5** (Artigo 4) aborda o problema de seleção de conjunto alvo sob o modelo de contaminação com limiar proporcional, com foco especial na variante majorada. É proposta uma heurística gulosa eficiente, acompanhada de uma avaliação experimental em redes sociais reais e em instâncias aleatórias, demonstrando melhorias tanto na qualidade das soluções quanto no tempo de execução em comparação com abordagens existentes. O artigo foi aceito como trabalho completo na conferência ASONAM 2023 na thilha PhD (IEEE/ACM International Conference on Advances in Social Networks Analysis and Mining) (Silva et al. 2024), e está no idioma inglês.

Por fim, o **Capítulo 6** (Artigo 5) complementa o estudo algorítmico do problema de seleção de conjunto alvo, focando na formulação clássica com limiar fixo. O parâmetro do número envoltória na convexidade P_3 é um subproblema da seleção de conjunto alvo, e os resultados teóricos obtidos nos capítulos e trabalhos anteriores fornecem insights valiosos para o desenvolvimento das heurísticas deste trabalho. Uma versão inicial ainda com poucas otimizações foi utilizada em (Silva 2018) para obter resultados para diferentes classes de grafos, e a versão final otimizada foi apresentada como trabalho completo no SBPO 2023 (Silva et al. 2023).

Foi realizado um extenso conjunto de experimentos comparativos com as melhores heurísticas conhecidas, é proposta uma nova heurística gulosa que supera significativamente as abordagens anteriores em termos de qualidade das soluções e eficiência computacional. O capítulo detalha a implementação, que inclui uma implementação exata do conjunto alvo ótimo para instâncias pequenas, que serve como referência para avaliação. Este artigo foi aceito como trabalho completo no SBPO 2023 (Silva et al. 2023).

O **Capítulo 7** apresenta as considerações finais da tese, sintetizando os principais resultados obtidos, discutindo limitações dos modelos e métodos empregados, e registrando conjecturas e direções promissoras para trabalhos futuros.

Em conjunto, os artigos que compõem esta tese fornecem uma visão integrada dos aspectos teóricos e algorítmicos da convexidade P_3 em grafos, estabelecendo conexões entre teoria combinatória, complexidade computacional e aplicações práticas em difusão de influência em redes complexas.

1.6 Preliminares

Nesta seção apresentamos conceitos básicos, notações, classes de grafos e definições de convexidade que serão utilizados ao longo deste trabalho, além de noções essenciais de complexidade computacional. Para notações e resultados clássicos

de Teoria dos Grafos utilizaremos, principalmente, (Bondy e Murty 1976; Harary 1971; Bollobas 1998). Para algoritmos e análise assintótica, (Cormen et al. 2002). Para definições e propriedades de conjuntos de Carathéodory na convexidade P_3 , adotamos (Barbosa et al. 2012). Para o problema de seleção de conjunto alvo e modelos de difusão em redes, utilizaremos (Kempe et al. 2003; Chen 2009). Alguns conceitos presentes na introdução foram apresentados de forma mais detalhada nesta seção, e outros serão introduzidos ao longo do texto conforme necessário.

Um *grafo simples* $G = (V(G), E(G))$ é dado por um conjunto finito e não vazio de vértices $V(G)$ e um conjunto de arestas $E(G)$, cujos elementos são pares não ordenados de vértices distintos. Neste trabalho consideraremos grafos simples, finitos e não direcionados. Dado $v \in V(G)$, a *vizinhança aberta* de v é

$$N_G(v) = \{u \in V(G) \mid vu \in E(G)\},$$

e a *vizinhança fechada* é $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. Para um conjunto $S \subseteq V(G)$, definimos $N_G(S) = \bigcup_{u \in S} N_G(u)$ e $N_G[S] = N_G(S) \cup S$. O *grau* de v é $d(v) = |N_G(v)|$. O *grau mínimo* e o *grau máximo* de G são, respectivamente,

$$\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V(G)\} \quad \text{e} \quad \Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V(G)\}.$$

O *grau de v no conjunto S* é $d_S(v) = |N_G(v) \cap S|$. Um conjunto $S \subseteq V(G)$ é *independente* se seus vértices são dois a dois não adjacentes.

Um *caminho* em G é uma sequência de vértices $P = u_0, u_1, \dots, u_k$ tal que $u_i u_{i+1} \in E(G)$ para $i = 0, \dots, k-1$. Dados $u, v \in V(G)$, a *distância* $d_G(u, v)$ é o comprimento de um caminho mínimo entre eles (também chamado *geodésica*). O *diâmetro* de G é

$$\text{diam}(G) = \max\{d_G(u, v) \mid u, v \in V(G)\}.$$

Em particular, se $\text{diam}(G) = 2$, então todo par de vértices não adjacentes possui um vizinho comum.

Um *subgrafo* H de G é um grafo tal que $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Dado $S \subseteq V(G)$, o *subgrafo induzido* por S , denotado por $G[S]$, tem conjunto de vértices S e arestas formadas por todas as arestas de G com ambas as extremidades em S . A *deleção* de um conjunto $V' \subseteq V(G)$ é denotada por $G - V'$; quando $V' = \{v\}$, escrevemos $G - v$.

Um grafo G é *conexo* se existe um caminho entre qualquer par de vértices; caso contrário, é *desconexo*. Uma *componente conexa* é um subgrafo conexo maximal, e o número de componentes conexas é denotado por $cc(G)$. Um vértice v é um *vértice de corte* se $cc(G - v) > cc(G)$. Um grafo conexo G é *biconexo* se $G - v$ é conexo para todo $v \in V(G)$; um *corte de vértices* é um conjunto $V' \subseteq V(G)$ tal que $G \setminus V'$ é desconexo. Um

conjunto $S \subseteq V(G)$ é *dominante* se todo vértice em $V(G) \setminus S$ é adjacente a algum vértice de S .

Dizemos que G é *livre de C_6* se não contém um ciclo com 6 vértices como subgrafo induzido.

O *produto cartesiano* de dois grafos G e H é o grafo $G \square H$ com conjunto de vértices $V(G \square H) = V(G) \times V(H)$, no qual (u_1, v_1) é adjacente a (u_2, v_2) se, e somente se, $u_1 = u_2$ e $v_1 v_2 \in E(H)$, ou $v_1 = v_2$ e $u_1 u_2 \in E(G)$.

O *grafo completo* K_n é o grafo simples com n vértices no qual todo par de vértices é adjacente. Uma *clique* de G é um subgrafo induzido completo; o *número de clique* $\omega(G)$ é a cardinalidade da maior clique de G .

Seja \mathcal{T} um grupo e $S \subseteq \mathcal{T}$ um conjunto que não contém a identidade. O *grafo de Cayley* $G(\mathcal{T}, S)$ tem conjunto de vértices \mathcal{T} e duas vértices x, y são adjacentes se, e somente se, $xy^{-1} \in S$. Exemplos de grafos de Cayley incluem grafos completos, grafos circulantes e grafos de Hamming.

Um *grafo circulante* pode ser visto como um grafo de Cayley do grupo $(\mathbb{Z}_n, +)$: dados n e um conjunto $L \subseteq \{1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor\}$, o grafo circulante $C_n(L)$ tem vértices $\{1, 2, \dots, n\}$ e arestas $ij \in E(C_n(L))$ quando $|i - j| \bmod n \in L$ (convenção equivalente às usuais). Uma subclasse importante são os *grafos potência de ciclo* C_n^r , que podem ser descritos como $C_n(1, 2, \dots, r)$ sob a restrição $r \leq \lfloor n/2 \rfloor$.

O *grafo de Hamming* $\mathcal{H} = K_{r_1} \square K_{r_2} \square \dots \square K_{r_n}$ é um produto cartesiano de grafos completos. Um caso especial é o *hipercubo* $Q_n = K_2 \square \dots \square K_2$ (com n fatores).

Limites para o número de Carathéodory em grafos de diâmetro dois

Este capítulo apresenta a íntegra dos resultados do artigo que investiga limites superiores para o número de Carathéodory na convexidade P_3 em grafos de diâmetro dois. Resultados preliminares foram publicados como um resumo expandido no LAGOS 2023 (Coelho et al. 2023), contendo provas para casos iniciais e um esboço da prova para grafos de diâmetro 2 livres de C_6 .

Nesta versão completa, incluímos todas as provas detalhadas e novos resultados que aprimoram os limites estabelecidos anteriormente. Destaca-se a inclusão de um algoritmo polinomial que constrói um caminho especial em grafos biconexos de diâmetro dois, permitindo inferir um limite superior mais restrito para o número de Carathéodory. Este avanço supera o limite geral proposto inicialmente, justificando a elaboração de um novo artigo e sua inclusão neste capítulo. A seção de introdução está unificada no capítulo anterior, e a seção de preliminares foi mantida, na íntegra, por contemplar definições e resultados essenciais para a compreensão dos resultados apresentados neste capítulo. O idioma do artigo é o inglês, e por isso foi mantido o idioma original, inclusive para os títulos das seções.

O trabalho foi aceito para publicação na revista Discrete Applied Mathematics em fevereiro de 2025. Após dois ciclos de revisão, a versão final foi submetida em dezembro de 2025. O artigo é de autoria de Braully Rocha da Silva, Erika Morais Martins Coelho, Hebert Coelho da Silva e Simone Dantas.

2.1 Preliminaries

In this section, we present definitions and previous results that are useful throughout this paper. Let $G = (V(G), E(G))$ be a graph with $|V(G)| = n$ and $|E(G)| = m$. The *degree* $d(v)$ of a vertex $v \in V(G)$ is the number of edges incident with v . The *maximum degree* of G by $\Delta(G) = \max\{d_G(v) \mid v \in V(G)\}$. An *independent set* of a graph G is a subset $S \subseteq V(G)$ such that its vertices are pairwise nonadjacent in G .

The *distance* $d_G(u, v)$ between $u, v \in V(G)$ is the number of edges in a shortest path (also called a *graph geodesic*) connecting them, and the *diameter* of G is the greatest distance among all pairs of vertices of G . Therefore, if a graph G has a diameter two, then every pair of nonadjacent vertices has a common neighbor.

The *open neighborhood* of a vertex $v \in V(G)$ is the set $N_G(v) = \{w \in V(G) \mid vw \in E(G)\}$, and its *closed neighborhood* is $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. For a set $S \subseteq V(G)$, we define $N_G(S) = \bigcup_{u \in S} N_G(u)$ and $N_G[S] = N_G(S) \cup S$. For a graph G and vertex $v \in V(G)$, we denote by $G - v$ the graph induced by $V(G) \setminus \{v\}$. Similarly, the *2-neighborhood* of a vertex v in a graph G , denoted as $N_2(v)$, is the set $N_2(v) = \{u \in V(G) \mid d_G(v, u) = 2\}$, and for a set $S \subseteq V(G)$, $N_2(S) = \bigcup_{u \in S} N_2(u)$ and $N_2[S] = N_2(S) \cup S$.

A graph G is *connected* if there is a path between any two vertices $u, v \in V(G)$. A connected graph G is called *biconnected* if for every vertex $v \in V(G)$, $G - v$ is connected. A (*connected*) *component* of a graph G is a maximal connected subgraph of G . We denote by $cc(G)$ the *number of connected components* of G . A *cut-vertex* v of a connected graph G is a vertex such that $G - v$ is disconnected. A *vertex-cut* of a connected graph G is a set $V' \subseteq V(G)$ such that $G \setminus V'$ is disconnected.

A graph is *C_6 -free* if it contains no cycle with 6 vertices as an induced subgraph. A subset $S \subseteq V(G)$ is a *dominating set* of G if every vertex in $V(G) \setminus S$ is adjacent to at least one vertex in S .

The *closed interval* $I[S]$ of a set $S \subseteq V(G)$ is the set consisting of S together with all vertices in $V(G) \setminus S$ that have at least two neighbors in S . If $I[S] = S$ then S is a *convex set*. The P_3 -convex hull $H(S)$ is a set of vertices obtained through the sequence $I^p[S]$, where p is a non negative integer. That is, $I^0[S] = S$, $I^1[S] = I[S]$, and for $p \geq 2$, $I^p[S] = I[I^{p-1}[S]]$. If, for some integer p , the equality $I^q[S] = I^p[S]$ holds for all $q \geq p$, then $I^p[S]$ is a P_3 -convex hull of S . If $H(S) = V(G)$, then S is a *hull set*.

A set $S \subseteq V(G)$ is a *P_3 -Carathéodory set* if the set $\partial H(S) = H(S) \setminus \bigcup_{u \in S} H(S \setminus \{u\})$ is non-empty. This notion allows an alternative definition of the Carathéodory number of \mathcal{C} as the largest cardinality of a Carathéodory set of P_3 -convexity. Since a graph G uniquely determines its P_3 -convexity, we refer to a Carathéodory set of G and the Carathéodory number, denoted by $c(G)$, of G .

Fact 1 *If S is a P_3 -Carathéodory set of G , then for every $v \in S$, we have $v \notin H(S \setminus \{v\})$.*

Barbosa et al. (Barbosa et al. 2012) presented an upper bound for the P_3 -Carathéodory number of a general graph G with n vertices, proving that $c(G) \leq \frac{n+1}{2}$. They also established several elementary properties of P_3 -Carathéodory sets, which are described as follows.

Proposition 1 ((Barbosa et al. 2012)) *Let G be a graph and let S be a P_3 -Carathéodory set of G .*

- (i) If G has order at least 2 and is either complete or a path or a cycle, then $c(G) = 2$.
- (ii) If S has order at least 2, then every vertex u in S lies on a path (u, v, w) of order 3 such that $v \in V(G) \setminus H(S \setminus \{u\})$ and $w \in H(S \setminus \{u\})$
- (iii) No proper subset S' of S satisfies $H(S') = V(G)$.
- (iv) The convex hull $H(S)$ of S induces a connected subgraph of G .

Next, we present properties of graphs with diameter two that are used in our proofs.

Proposition 2 *Let $G = (V(G), E(G))$ be a graph with diameter two, with $|V(G)| = n$. The following properties hold.*

- (i) for each $u, v \in V(G)$, either u and v are adjacent or have a common neighbor;
- (ii) for each $v \in V(G)$, $N(v)$ is a dominating set of G ;
- (iii) if $v \in V(G)$ is a cut-vertex then $d(v) = n - 1$.

Proof. Since G has a diameter two, we have:

- (i) the greatest distance between every pair of vertices of G is 2, and the result follows;
- (ii) every pair of nonadjacent vertices has a common neighbor and thus, for each $v \in V(G)$, every nonadjacent vertex $u \in V(G) \setminus N[v]$ has at least one neighbor in $N(v)$. Hence, $N(v)$ is a dominating set of G .
- (iii) let v be a cut-vertex and G_1, G_2, \dots, G_k , $k \geq 2$, be the connected components of $G - v$. If $d(v) < n - 1$, then there exists a vertex $u \in G_i$ such that $vu \notin E(G)$. Thus, since G has diameter two, for every vertex $w \in G_j$, with $i \neq j$, either $uw \in E(G)$ or there exists a path (u, z, w) , where $z \neq v$. But this is a contradiction since G_i and G_j are distinct connected components. \square

Fact 2 *Let G be a graph with diameter two. If there exist vertices $v, u \in V(G)$ such that $vu \notin E(G)$, then for every $z_1 \in N(v) \setminus N(u)$, there exist a vertex $z_2 \in N(u)$ such that $z_1 z_2 \in E(G)$.*

Proof. Let $v, u \in V(G)$ be such that $vu \notin E(G)$. Suppose there exists a vertex $z_1 \in N(v) \setminus N(u)$ such that no vertex $z_2 \in N(u)$ is adjacent to z_1 . Thus, $d(z_1, u) \geq 3$, a contradiction to the fact that G has diameter two. \square

Finally, we recall a result from Cappelle et al. (Cappelle et al. 2022) that establishes conditions for a set S to be a hull set of G .

Proposition 3 ((Cappelle et al. 2022)) *Let G be a biconnected graph with diameter two and $S' \subseteq V(G)$. If $H(S')$ is a dominating set, then G has a hull set S such that $S = S' \cup \{v\}$, for every vertex $v \in V(G) \setminus H(S')$.*

2.2 Results

In this section, we present our results regarding the P_3 -Carathéodory number. We begin by discussing the case in which G has a cut-vertex. Some of the results appeared in the brief conference announcement (Coelho et al. 2023) without proofs.

Lemma 1 *Let G be a graph with diameter two, v be a cut-vertex, and G_1, G_2, \dots, G_k , for $k \geq 2$, be the connected components of $G - v$. If S is a P_3 -Carathéodory set with $|S| > 2$, then $|S \cap G_i| < 2$, for every $i \in \{1, \dots, k\}$.*

Proof. Suppose, by contradiction, that $|S \cap G_i| \geq 2$, for some $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Let $\{x, z\} \subseteq S \cap G_i$ and let $y \in S$ be such that $y \in S \cap G_j$, for $i \neq j$. Since v is a cut-vertex, by Proposition 2 (iii), $d(v) = n - 1$, implying that $v \in H(\{x, y\})$. Since G_i is connected, there is a path $P = (x, u_1, u_2, \dots, u_\ell, z)$ in G_i , with $\ell \geq 0$. Observe that v is adjacent to every vertex on P and, since $v \in H(\{x, y\})$, we have that $u_1 \in I^2(S)$, $u_2 \in I^3(S)$, \dots , $u_\ell \in I^{\ell+1}(S)$, and so $z \in I^{|\ell|+1}(S)$, implying $z \in H(S \setminus z)$. Therefore, S is not a Carathéodory set. \square

Fact 3 *Consider a graph G with diameter two and cut-vertex v . Let G_1, G_2, \dots, G_k be the connected components of $G - v$. Given a set $S \subseteq V(G)$, if $S \cap G_i = \emptyset$, for $i \in \{1, \dots, k\}$, then for every $u \in V(G_i)$, $u \notin H(S)$.*

Proof. By hypothesis, there is a connected component G_i such that $S \cap G_i = \emptyset$. So, every vertex $u \in G_i$ satisfies $N(u) \setminus G_i = \{v\}$, implying that for every $u \in G_i$, we have $u \notin H(S)$. \square

Theorem 1 *If G is a graph with diameter two and cut-vertex v , then $c(G) = 2$.*

Proof. Let G_1, G_2, \dots, G_k be the connected components of $G - v$. Let S be a Carathéodory set of G such that $|S| > 2$, with $x, y \in S$. Thus, by Lemma 1, we have $|S \cap G_i| < 2$, and hence each vertex in S belongs to a distinct connected component.

Our proof consists of showing that any vertex $u \in \partial H(S)$ belongs to the convex hull of at most two vertices of S . By Fact 3, if $S \cap G_i = \emptyset$, then for every $u \in V(G_i)$, $u \notin H(S)$ and $u \notin \partial H(S)$. If $u = v$ then $u \in H(\{x, y\})$, for $x, y \in S$. Now, by contradiction, suppose $S = \{x, y, z\}$ and let $u \in G_j$ and $x \in S \cap G_j$. Similarly to the proof of Proposition 2, G_j is a connected component, and thus there exists a path P between x and u in G_j . Moreover, since vertex v is adjacent to every vertex on P , it follows that $u \in H(\{x, y\})$, i.e., $u \in H(S \setminus z)$, and hence $u \notin \partial H(S)$, which is a contradiction. \square

Now, we establish bounds for the Carathéodory number in biconnected graphs with diameter two. We begin by presenting a proof of an observation by Cappelle et

al. (Cappelle et al. 2022) regarding the cardinality a Carathéodory set must have to be considered a dominating set.

Lemma 2 *Let G be a biconnected graph with diameter two and $S \subseteq V(G)$. If $|H(S)| \geq \Delta + 1$ then $H(S)$ is a dominating set of G .*

Proof. Let $S \subseteq V(G)$ and $|H(S)| \geq \Delta + 1$. Suppose, by contradiction, that $H(S)$ is not a dominating set. Thus, there exists a vertex $v \in V(G) \setminus H(S)$, such that $N(v) \cap H(S) = \emptyset$. Since G is a graph with diameter two and $v \notin H(S)$, for each vertex $u \in H(S)$, there must be a distinct vertex $w \in V(G) \setminus H(S)$ such that $vw, wu \in E(G)$ (otherwise, $w \in H(S)$ and $N(v) \cap H(S) \neq \emptyset$). Since $|H(S)| \geq \Delta + 1$, we have that $d(v) \geq \Delta + 1$, and this is a contradiction. Therefore $H(S)$ is a dominating set of G . \square

The previous result, together with Proposition 3, establishes the first upper bound in this paper for biconnected graphs with diameter two.

Theorem 2 *Let G a biconnected graph with diameter two, then $c(G) \leq \Delta + 1$.*

Proof. We assume, by contradiction, that there exists a Carathéodory set $S \subseteq V(G)$ of G such that $|S| = \Delta + 2$. Let $S' \subset S$, such that $|S'| = \Delta$. Note that there are two non-adjacent vertices $u, v \in S'$, otherwise S would not be a Carathéodory set. Since G is a graph with diameter two, there must be at least one vertex $w \notin S'$ such that $uw, vw \in E(G)$, implying that $|H(S')| > |S'|$. Consider $z_1, z_2 \in S \setminus S'$. Since $|H(S')| \geq \Delta + 1$ we have, by Lemma 2, that $H(S')$ is a dominating set of G . Therefore, by Proposition 3, $S' \cup \{z_1\}$ is a hull set. Therefore $z_2 \in H(S \setminus \{z_2\})$ implies that, by Fact 1, S is not a Carathéodory set. \square

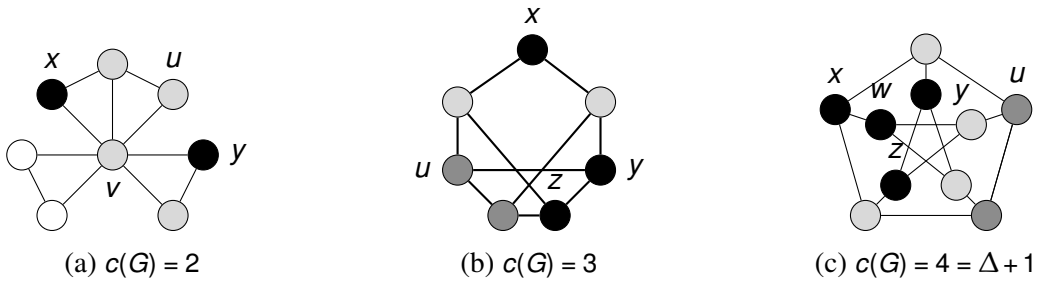


Figura 2.1: Example of graphs with diameter two. In each graph G , the black vertices represent a Carathéodory set S of maximum cardinality; the gray vertices represent the convex hull of S ; and the dark gray vertices represent the vertices in $\partial H_G(S)$.

This general upper bound for biconnected graphs with diameter two improves upon the one established in (Barbosa et al. 2012) when $\Delta < \frac{n-1}{2}$. In each graph G of Figure 2.1, the black vertices represent a Carathéodory set S of maximum cardinality;

the gray vertices represent the convex hull of S ; and the dark gray vertices represent the vertices in $\partial H_G(S)$. In Figure 2.1a, we present a graph of diameter two with a cut-vertex, where $c(G) = 2$; in Figure 2.1b, we present a biconnected C_6 -free graph of diameter two, where $c(G) = 3$; and in Figure 2.1c, the Petersen graph, with $c(G) = 4 = \Delta + 1$, demonstrates that the upper bound in Theorem 2 is tight.

Next, to establish sharper bounds, we consider a subclass of biconnected graphs with diameter two. First, we prove a result that establishes when certain subsets of $V(G)$ are dominating sets in such graphs.

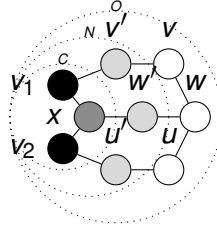


Figura 2.2: Proof of Lemma 3, Case $w \in N_2(H)$: black vertices belong to S , gray vertices are in $N(H(S))$, and dark gray vertices are in $H(S)$.

Lemma 3 *Let G be a biconnected C_6 -free graph with diameter two. If $v_1 v_2 \notin E(G)$ and $v \notin N[H(\{v_1, v_2\})]$ then $H(\{v_1, v_2, v\})$ is a dominating set.*

Proof. Let v_1 and v_2 be two non-adjacent vertices of $V(G)$. By Proposition 2 (i), v_1 and v_2 share a common neighbor x , and thus the set $H(\{v_1, v_2\})$ contains at least three vertices, i.e., $\{v_1, v_2, x\} \subseteq H(\{v_1, v_2\})$. Let $H = H(\{v_1, v_2\})$, $N(H)$ and $N_2(H)$ be a partition of $V(G)$, $v \in N_2(H)$, and $S' = \{v_1, v_2, v\}$.

Suppose, by contradiction, that $H(S')$ is not a dominating set. Thus, there exists a vertex $u \in N_2(H)$ such that $u \notin N(H(S'))$. Hence, $uv \notin E(G)$ and, since G is a graph with diameter two, there exists $w \in V(G)$ such that w is adjacent to u and v .

If $w \in N(H)$, then $w \in H(S')$, and therefore u has a neighbor in $H(S')$, a contradiction. If $w \in N_2(H)$, then w is not adjacent to v_1, v_2 or x . We refer to Figure 2.2, where black vertices belong to S , gray vertices are in $N(H(S))$, and the dark gray vertices are in $H(S)$. Since G is a graph with diameter two, there exist vertices v', w' and u' such that $v_1 v', v v', x w', w w', v_2 u', u u' \in E(G)$.

Now, we observe the subgraph induced by $\{v_1, v', v, w, w', x\}$. Since v and $w \notin N[H]$, then v' and w' not in $H(\{v_1, v_2\})$ and consequently $v'x, w'v_1 \notin E(G)$. If $v'w' \in E(G)$ or $w'v \in E(G)$ then $w \in H(\{v_1, v_2, v\})$, which is a contradiction. Therefore, since G does not have C_6 as an induced subgraph, at least one of the edges $xv, v_1 w$ or $v'w'$ must belong to $E(G)$. If xv or $v_1 w$ belongs to $E(G)$, then $v, w \in N(H)$, which is a contradiction, since $v, w \in N_2(H)$. Therefore, $v'w' \in E(G)$ and $\{w', w\} \subseteq H(\{v_1, v_2, v\})$.

Since $uw \in E(G)$, this implies that the vertex u is dominated by $H(\{v_1, v_2, v\})$, a contradiction. Thus, $H(\{v_1, v_2, v\})$ is a dominating set. \square

From Lemma 3 and Proposition 3, we establish a constant upper bound for the Carathéodory number in this graph class.

Theorem 3 *If G is a biconnected C_6 -free graph with diameter two, then $c(G) \leq 4$.*

Proof. We assume, by contradiction, that G has a Carathéodory set S , such that $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ (see Figure 2.3, where vertices in S are depicted in black).

Case 1: *There are at least two adjacent vertices in S .* We refer to Figure 2.3a. By Fact 1, S is not a clique, and thus, w.l.o.g, we consider $v_1 v_2 \in E(G)$ and $v_2 v_3 \notin E(G)$. Since G is a graph with diameter two, there exists a vertex $w_1 \in N(v_2) \cap N(v_3)$.

If $v_3 v_5 \notin E(G)$, then there exists $w_2 \in N(v_3) \cap N(v_5)$. If $v_1 w_2 \in E(G)$, then $v_1 \in H(\{v_2, v_3, v_5\})$. If $v_1 w_2 \notin E(G)$, then there exists $w_3 \in N(v_1) \cap N(w_2)$, with $w_3 \neq w_2$. We show that w_1, w_2 and w_3 are distinct vertices. If $w_1 = w_2$ then $v_2 \in H(\{v_1, v_3, v_5\})$. If $w_1 = w_3$ then $v_1 \in H(\{v_2, v_3\})$. In each case, by Fact 1, S is not a Carathéodory set, implying that w_1, w_2 and w_3 are distinct vertices.

Now, we observe the subgraph induced by $C' = \{v_1, v_2, w_1, v_3, w_2, w_3, v_1\}$ in Figure 2.3a. If $w_3 v_3, w_3 w_1, w_3 v_2$, or $w_2 v_1$ (resp. $w_2 v_2, w_2 w_1$, or $v_1 w_1$) belong to $E(G)$, then $v_1 \in H(S \setminus \{v_1\})$ (resp. $v_2 \in H(S \setminus \{v_2\})$). Again by Fact 1, S is not a Carathéodory set, a contradiction. Thus, the subgraph induced by C' does not contain any chords, forming an induced C_6 , which leads to a contradiction.

Case 2: *The set S is an independent set.*

Case 2.1: *There is a vertex $v \in S$ that does not belong to the neighborhood of the convex hull of two other vertices of S .* Without loss of generality, consider that v_3 is such a vertex and that $v_3 \notin N(H(\{v_1, v_2\}))$. By Lemma 3, $H(\{v_1, v_2, v_3\})$ is a dominating set and, by Proposition 3, we have that $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ is a hull set. So, $v_5 \in H(S \setminus \{v_5\})$ implying S is not a Carathéodory set.

Case 2.2: *Every vertex $v \in S$ belongs to the neighborhood of the convex hull of any two other vertices of S .* Without loss of generality, consider $\{v_3, v_4, v_5\} \subset N(H(\{v_1, v_2\}))$. Since v_3 and v_4 are not adjacent, there exists a vertex x such that $v_3 x, x v_4 \in E(G)$. Note that $x \notin V(G) \setminus N[H(\{v_1, v_2\})]$, otherwise, by Case 2.1, $\{v_1, v_2, v_3, x\}$ is a hull set, implying that $v_5 \in H[S \setminus \{v_5\}]$.

If $x \in N(H(\{v_1, v_2\}))$, then $v_4 \in H(\{v_1, v_2, v_3\})$, and S is not a Carathéodory set. So, $x \in H(\{v_1, v_2\})$. Using a similar argument, we obtain that every vertex y that is a common neighbor of two vertices in $\{v_3, v_4, v_5\}$, also belongs to the set $H(\{v_1, v_2\})$. Consider the vertices y_1 and y_2 such that $v_3 y_1, y_1 v_4, v_3 y_2, y_2 v_5 \in E(G)$. If $y_1 \neq y_2$ and since $y_1, y_2 \in H(\{v_1, v_2\})$, we have that $v_3 \in H(\{v_1, v_2\})$ and S is not a Carathéodory set. Therefore, there is a unique vertex y such that $v_3 y, v_4 y, v_5 y \in E(G)$ (see Figure 2.3b).

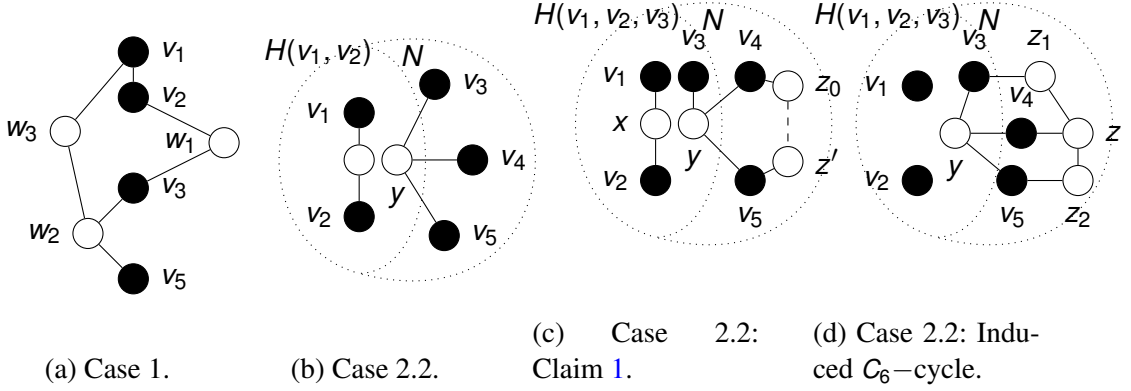


Figure 2.3: Proof of Theorem 3: the black vertices are supposed to be in the Carathéodory set S

Claim 1 *There exists a vertex $z \in N(H(\{v_1, v_2, v_3\}))$ such that $v_4z \in E(G)$ or $v_5z \in E(G)$*

Proof.[Proof of Claim:] By Proposition 1 (ii), vertex v_5 has a neighbor $z \in N(H(\{v_1, v_2, v_3, v_4\}))$. If $z \in N(H(\{v_1, v_2, v_3\}))$, the claim is valid. We refer to Figure 2.3c. If $z \notin N(H(\{v_1, v_2, v_3\}))$, then the vertex v_4 is necessary for $z \in N(H(\{v_1, v_2, v_3, v_4\}))$. Therefore, there must exist a path $P = (v_4, z_0, \dots, z', v_5)$, and if we set $z' = z$, then we have $z \in N(H(\{v_1, v_2, v_3\}))$. \square

Without loss of generality, let $z \in N(H(\{v_1, v_2, v_3\}))$ and $v_4z \in E(G)$ (see Figure 2.3d). The previous fact that there exists a unique vertex y such that $v_3y, v_4y, v_5y \in E(G)$, implies that $v_3z, v_5z \notin E(G)$. Since G has diameter two and S is an independent set, there must exist z_1 and z_2 such that $v_3z_1, z_1z, zz_2, z_2v_5 \in E(G)$. Note that $z_1 \neq z_2$, otherwise $v_4 \in H(\{v_1, v_2, v_3, v_5\})$ and S is not a Carathéodory set. Now we show that the subgraph induced by $C = \{v_3, z_1, z, z_2, v_5, y\}$ is a C_6 -cycle with no chords.

If $e \in \{v_3z_2, yz_2, v_5z_1\} \subseteq E(G)$, then $v_4 \in H(\{v_1, v_2, v_3, v_5\})$. If $e = yz_1$ then, since v_4 is adjacent to y and $z \in N(H(v_1, v_2, v_3))$, $z \in N(H(v_1, v_2, v_3))$, and consequently $v_4 \in H(v_1, v_2, v_3)$, which is a contradiction. Similarly for the case $e = yz$. If the edge z_1z_2 exists, then z_1 and z_2 belong to $H(\{v_1, v_2, v_3, v_4\})$. Since both are adjacent to v_5 , it follows that $v_5 \in H(\{v_1, v_2, v_3, v_4\})$, which is not possible because S is a Carathéodory set.

Lastly, whether $v_3z \in E(G)$ or $v_5z \in E(G)$, there must exist the edges v_3z, v_4z, v_5z where $z \in H(\{v_1, v_2\})$, and in this case, $v_5 \in H(\{v_1, v_2, v_3, v_4\})$. In both cases, S is not a Carathéodory set. So the cycle C is an induced C_6 , a contradiction. Therefore, $c(G) \leq 4$. \square

Now, we analyze Carathéodory sets in biconnected graphs with diameter two in general, and present a polynomial-time algorithm that returns a sufficient condition for a subset of vertices to share the same convex hull as a Carathéodory set, constructing a path

whose vertex set forms a dominating convex hull and providing an upper bound for the Carathéodory number of the graph.

First, we construct a special path $P_{k+1} = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_k)$ in G , such that $H(V(P_{k+1}))$ is a dominating set. Algorithm 2.1 starts by selecting an arbitrary initial vertex v_0 and including it in an empty set $V(P_h)$. Let v_i be the last vertex that was included in the set $V(P_h)$, with path $P_h = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_i)$. Iteratively, the algorithm selects a new vertex v_{i+1} such that $v_i v_{i+1} \in E(G)$ and $v_{i+1} \notin H(V(P_h))$. Note that when leaving the loop at Line 3, every neighbor of vertex v_k belongs to the set $H(V(P_h))$. Moreover, since G is a graph with diameter two, by Proposition 2 (ii), we conclude that $H(V(P_h))$ is a dominating set.

Algoritmo 2.1: $MakeP_{k+1}(G)$

Entrada: biconnected graph G with diameter two.

Saída: path P_{k+1} .

```

1  $i \leftarrow 0$ ;  $P_h \leftarrow \emptyset$ 
2  $V(P_h) \leftarrow v_i$ , where  $v_i \in V(G)$ 
3 enquanto  $N(v_i) \setminus H(V(P_h)) \neq \emptyset$  faça
4    $V(P_h) \leftarrow V(P_h) \cup \{v_{i+1}\}$ , where  $v_{i+1} \in N(v_i) \setminus H(V(P_h))$ 
5    $i \leftarrow i + 1$ 
6 fim
7 retorna  $V(P_i) = V(P_h)$ 

```

In order to guarantee the existence of a path $P_{k+1} = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ constructed by Algorithm 2.1, we establish in the next result a lower bound on the degree of the last vertex v_k of the path P_{k+1} .

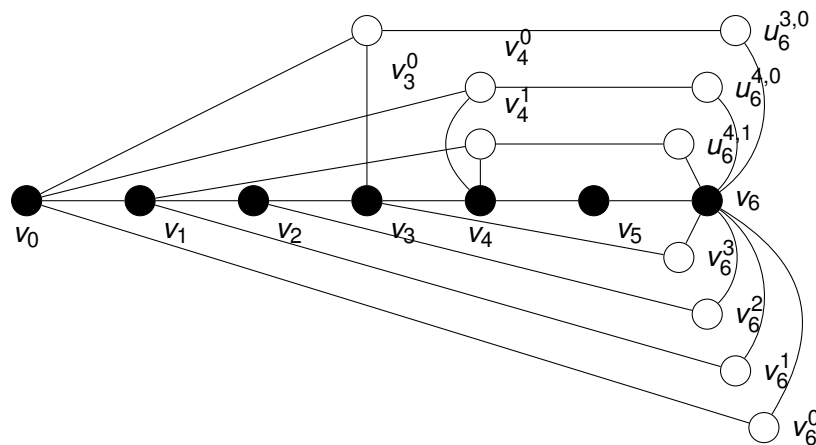


Figura 2.4: Proof of Lemma 4, example for $k = 6$: the vertices in black belong to the path $P_{k+1} = (v_0, v_1, \dots, v_6)$ of G constructed by Algorithm 2.1.

Lemma 4 *Let G be a biconnected graph with diameter two and let $P_{k+1} = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ be a path of G constructed by Algorithm 2.1. If $k \geq 3$ then $d(v_k) \geq \frac{k^2-5k+10}{2}$.*

Proof.

First, we consider a path of length $k = 3$, say $P_4 = (v_0, v_1, v_2, v_3)$. Note that $v_2 v_3 \in E(G)$, and since G is a biconnected graph with diameter two, there must exist a vertex v_3^0 adjacent to both v_0 and v_3 . Therefore, $d(v_3) \geq 2 = \frac{3^2-5 \cdot 3+10}{2}$.

Now, let $P_k = (v_0, v_1, \dots, v_{k-1})$, with $k \geq 4$, be a path constructed by Algorithm 2.1. If in the next iteration the condition of Line 3 of Algorithm 2.1 fails, it means that $N[v_{i-1}] \subseteq H(V(P_h))$. Otherwise, a new vertex v_i adjacent to v_{i-1} is selected. Similarly to the previous case, since G has diameter two, if $k = 4$, then there must exist three vertices $v_3^0, v_4^0, v_4^1 \in V(G)$ such that $v_0 v_3^0, v_3 v_3^0, v_0 v_4^0, v_4 v_4^0, v_1 v_4^1, v_4 v_4^1 \in E(G)$. These three vertices are distinct, otherwise $N[v_3] \setminus H(V(P_h)) = \emptyset$ and the vertex v_4 is not added to the path. Now, for $k \geq 5$, since v_5 is not adjacent to any vertex in $\{v_0, v_1, v_2, v_3^0\}$, there exist four additional vertices: v_5^0, v_5^1, v_5^2 , and a vertex $u_5^{3,0}$ adjacent to v_5 and v_3^0 . See an example in Figure 2.4 for $k = 6$, where the vertices in color black belong to the path $P_{k+1} = (v_0, v_1, \dots, v_6)$ of G constructed by Algorithm 2.1.

Generalizing this process, in each step of the algorithm, every vertex $v_i \in V(P_h)$, $i \geq 5$ is adjacent to: $i - 2$ vertices, denoted v_i^ℓ , adjacent to v_i and v_ℓ , $0 \leq \ell \leq i - 2$; and to $\sum_{j=3}^{i-2} (j - 2)$ vertices, denoted $u_i^{j,j'}$, adjacent to v_i and $v_j^{j'}$, $3 \leq j \leq i - 2$, $0 \leq j' \leq j - 3$. Again, all these vertices are distinct, otherwise $N[v_{i-1}] \setminus H(V(P_h)) = \emptyset$ and the vertices v_i , $i \geq 4$ are not added to the path.

Finally, we compute $d(v_k)$. Vertex v_k is adjacent to: vertex v_{k-1} ; $k - 2$ vertices v_k^ℓ , $0 \leq \ell \leq i - 2$; and to $\sum_{j=3}^{k-2} (j - 2)$ vertices $u_i^{j,j'}$, $3 \leq j \leq i - 2$, $0 \leq j' \leq j - 3$. Hence, $d(v_k) \geq 1 + (k - 2) + \sum_{j=1}^{k-4} j = 1 + (k - 2) + ((k - 4) * (k - 3) / 2)$. Developing the inequality, we obtain $d(v_k) \geq \frac{k^2-5k+10}{2}$. \square

As a consequence of Lemma 4, we determine the maximum length that a path P_{k+1} , obtained by Algorithm 2.1, can reach in a graph of diameter two.

Corollary 1 *If G is a biconnected graph with diameter two and $P_{k+1} = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ is a path of G constructed by Algorithm 2.1, then $k \leq \lceil \frac{5+\sqrt{8\Delta-15}}{2} \rceil$.*

Proof. By Lemma 4, we have that $\frac{k^2-5k+10}{2} \leq d(v) \leq \Delta$, which implies $k \leq \lceil \frac{5+\sqrt{25-40+8\Delta}}{2} \rceil$. \square

Consider a set S such that for every $v \in S$, we have $v \notin H(S \setminus \{v\})$. Among the paths generated by Algorithm 2.1, we show that there is at least one path that contains a subpath whose vertices have the same convex hull as the set S .

Lemma 5 *If G is a biconnected graph with diameter two and $S \subseteq V(G)$ is a set such that, for every $s \in S$, $s \notin H(S \setminus \{s\})$, then there exists a path $P_{k+1} = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ in G , constructed by Algorithm 2.1, and a subpath P_{l+1} of P_{k+1} , with $V(P_{l+1}) = \{v_0, v_1, \dots, v_l\}$, $l+1 \leq k$, such that $H(V(P_{l+1})) = H(S)$ and $|V(P_{l+1})| \geq |S|$.*

Proof. Consider a set S under the hypotheses of the statement. The proof is by induction on the cardinality of the set S . First, let $|S| = 2$, say $S = \{s_1, s_2\}$. If s_1 and s_2 are adjacent, then there exists a subpath $P_2 = (s_1, s_2) \subseteq P_{k+1}$, $l < k$, such that $H(V(P_2)) = H(S)$ and $|V(P_2)| \geq |S|$. If s_1 and s_2 are not adjacent, then since G has diameter two, there exists a vertex w adjacent to both s_1 and s_2 . If $s_2 \in H(\{s_1, w\})$, then there exists a subpath of $P_2 = (s_1, w) \subseteq P_{k+1}$, $l < k$, such that $H(V(P_2)) = H(S)$ and $|V(P_2)| = |S|$. Otherwise, if $s_2 \notin H(\{s_1, w\})$, then there exists a subpath of $P_3 = (s_1, w, s_2) \subseteq P_{k+1}$, $l < k$, such that $H(V(P_3)) = H(S)$ and $|V(P_3)| > |S|$.

Now, let $|S| \geq 3$. We observe that, for each $s \in S$, if $S' = S \setminus \{s\}$, then for every $v \in S'$, we have $v \notin H(S' \setminus \{v\})$. Thus, by induction hypothesis, there exists a path $P_{k+1} = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ in G , constructed by Algorithm 2.1, and a subpath P_l of P_{k+1} , with $V(P_l) = \{v_0, v_1, \dots, v_{l-1}\}$, with $l+1 \leq k$, such that $H(V(P_l)) = H(S')$ and $|V(P_l)| \geq |S'| = |S| - 1$.

If $s \in N(v_{l-1})$ then, by the Line 4 of Algorithm 2.1, there exists a subpath P_{l+1} of P_{k+1} , with $V(P_{l+1}) = \{v_0, v_1, \dots, v_{l-1}, s\}$, with $l+1 \leq k$, such that $H(V(P_{l+1})) = H(S)$ and $|V(P_{l+1})| \geq |S|$. If $s \notin N(v_{l-1})$ then, since G has diameter two, there exists a vertex w adjacent to both v_{l-1} and s . We refer to Figure 2.5, where the black vertices belong to the path P_{k+1} of G , with $k = 5$, constructed by Algorithm 2.1.

First, we consider $w \notin H(V(P_l))$ (see Figure 2.5a). Again, by the Line 4 of Algorithm 2.1, the path $P_{l+1} = (v_0, v_1, \dots, v_{l-1}, w)$ is a subpath of P_{k+1} . If $s \in H(\{v_0, v_1, \dots, v_{l-1}, w\})$, then there exists a subpath P_{l+1} of P_{k+1} , with $V(P_{l+1}) = \{v_0, v_1, \dots, v_{l-1}, w\}$, $l+1 \leq k$, such that $H(V(P_{l+1})) = H(S)$ and $|V(P_{l+1})| \geq |S|$. Otherwise, if $s \notin H(\{v_0, v_1, \dots, v_l, w\})$, then there exists a subpath P_{l+2} of P_{k+1} , with $V(P_{l+1}) = \{v_0, v_1, \dots, v_{l-1}, w, s\}$, $l+1 \leq k$, such that $H(V(P_{l+2})) = H(S)$ and $|V(P_{l+2})| \geq |S|$.

Now, we consider $w \in H(V(P_l))$ (see Figure 2.5b). We recall that P_l is a subpath of the path P_{k+1} generated by the Algorithm 2.1, thus vertex w does not dominate $V(P_l)$, otherwise vertices v_i , $i \geq 2$ are not added to the path. Since G is biconnected and, for every $s \in S$, $s \notin H(S \setminus \{s\})$, there exists a vertex $v_s \in N(s)$ such that $v_s \notin V(P_l) \cup \{w\}$, and $v_s \in N(H(V(P_l)))$. If $v_s v_{l-1} \in E(G)$ then $s \in H(S \setminus \{s\})$, a contradiction. So, $v_s v_{l-1} \notin E(G)$ and, by Fact 2, there exists a vertex $v_l \in N(v_{l-1}) \setminus H(P_l)$ such that $v_l v_s \in E(G)$. Thus, there exists a subpath P_{l+1} of P_{k+1} , with $P_{l+1} = (v_0, v_1, \dots, v_{l-1}, v_l)$, such that $H(V(P_{l+1})) = H(S)$ and $|P_{l+1}| \geq |S|$, and the result follows. \square

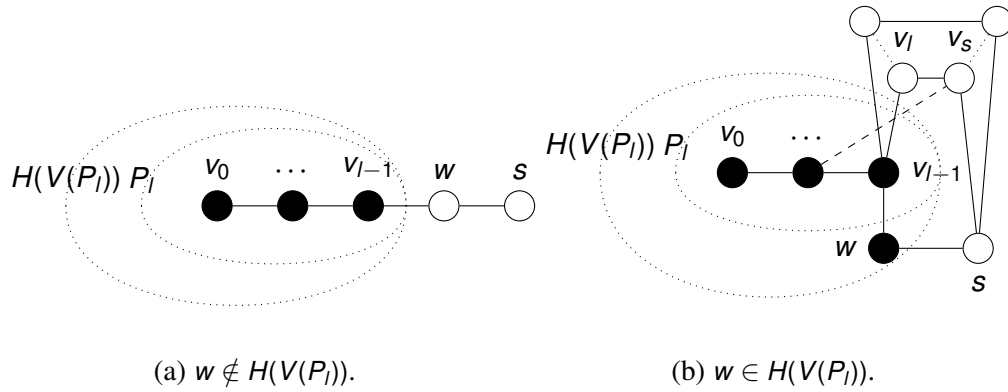


Figura 2.5: Proof of Lemma 5: $s \notin N(v_{l-1})$. Black vertices belong to the path P_l of G constructed by Algorithm 2.1.

Due to Fact 1, every Carathéodory set satisfies the conditions of Lemma 5, and the next result uses this fact to establish an upper bound for the Carathéodory number.

Theorem 4 *If G is a biconnected graph of diameter two, then $c(G) \leq \frac{5+\sqrt{8\Delta-15}}{2}$.*

Proof. By Corollary 1 and Lemma 5, every set $S' \subseteq V(G)$ with $|S'| \geq \frac{5+\sqrt{8\Delta-15}}{2}$ is such that, for every $v \in S'$, $v \in H(S' \setminus \{v\})$. Hence, by Fact 1, $c(G) \leq \frac{5+\sqrt{8\Delta-15}}{2}$. \square

2.3 Conclusion

In this paper, we have shown how the concept of the P_3 -convexity can be used to compute the P_3 -Carathéodory number of graphs with diameter two. We show that if G is a graph with diameter two and a cut-vertex then $c(G) = 2$; and for biconnected graphs with diameter two, we present upper bounds for $c(G)$ in the function of its maximum degree. The results for graphs with diameter two are summarized in Table 2.1. We observe that the bound given by Theorem 4 improves a previous result due to Barbosa et al. (Barbosa et al. 2012) for biconnected graphs with distance two, for $\Delta < \frac{(n-4)^2+15}{8}$.

Graphs with diameter two	$c(G)$	Ref.
G has a cut-vertex	2	Thm. 1
G is biconnected and C_6 -free	≤ 4	Thm. 3
G is biconnected with $\Delta = 2$	≤ 3	Thms. 2, 4
G is biconnected with $\Delta = 3$	≤ 4	Thms. 2, 4
G is biconnected with $\Delta \geq 4$	$\leq \frac{5+\sqrt{8\Delta-15}}{2}$	Thm. 4

Tabela 2.1: Upper bounds for P_3 -Carathéodory number $c(G)$ in graphs with diameter two.

We present a polynomial-time algorithm that, given a biconnected diameter two graph, constructs a special path in which the convex hull of the set formed by its vertices is a dominating set. We also show that among all the paths generated by this algorithm, there is at least one in which a subset of its vertices has the same convex hull as a Carathéodory set. By establishing an upper bound on the length of the paths generated by the algorithm, we derive an upper bound for the Carathéodory number.

We observe that the first results on this table establishes that the P_3 -Carathéodory number of biconnected C_6 -free diameter two graphs is limited by a constant. Note that, for any graph class, the existence of a constant upper bound implies the existence of a polynomial-time algorithm to determine the P_3 -Carathéodory number in such graphs. Therefore, we leave as an open problem whether there exists a constant c such that any biconnected graph G with diameter two has P_3 -Carathéodory number at most c .

Conjecture 1 *If G is a graph with diameter two, then $c(G) \leq c$.*

We also note that, in computational tests for graphs with $\Delta \leq 112$ in (Brinkmann et al. 2013), we could not find a graph with diameter two whose Carathéodory number is greater than or equal to 5. This provides evidence that $c < 5$.

Número de P_3 -Carathéodory em Grafos Circulantes

Neste capítulo apresentamos um artigo que investiga o número de Carathéodory na convexidade P_3 para grafos circulantes. Apresentamos limites inferiores para o número de Carathéodory em grafos circulantes da forma $C_n(1, r)$ e determinamos o número de Carathéodory para a subclasse de grafos Potência de Ciclo. Também propomos conjecturas para limites superiores do número de Carathéodory em grafos circulantes. Foi apresentado no LVI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional ([Silva et al. 2024](#)) e os autores são Braully Rocha da Silva, Erika Morais Martins Coelho, Hebert Coelho da Silva.

3.1 Preliminares

Esta seção contém mais algumas definições e terminologias fundamentais utilizadas ao longo do artigo.

Seja G um grafo, $V(G)$ seus vértices, $E(G)$ sua arestas, v um vértice qualquer de $V(G)$ e S um subconjunto de $V(G)$. Podemos definir a *vizinhança aberta* de um vértice v , denotada por $N(v)$, como o conjunto de vértices adjacente a v , ou seja, $N(v) = \{w \in V(G) \mid vw \in E(G)\}$.

Um *subgrafo* H de um grafo G é um grafo tal que $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Seja S um subconjunto de vértices de G , o *subgrafo induzido* por S , denotado por $G[S]$, possui S como conjunto de vértices e o conjunto de arestas é o subconjunto de todas as arestas de G que tenham as duas extremidades em S .

Os *grafos circulantes* são definidos por dois parâmetros, n o número de vértice e L uma lista de números inteiros. De maneira simples podemos dizer que o i -ésimo vértice é adjacente ao $(i+j)$ -ésimo e ao $(i-j)$ -ésimo vértice para cada elemento j da lista L . Ou de maneira mais formal, podemos dizer que $C_n(L)$ tem vértices $V(C_n(L)) = \{1, 2, \dots, n\}$ e arestas $st \in E(C_n(L)) \mid (s+t) \bmod n \in L$. Os *grafos potência de ciclo* são uma subclasse

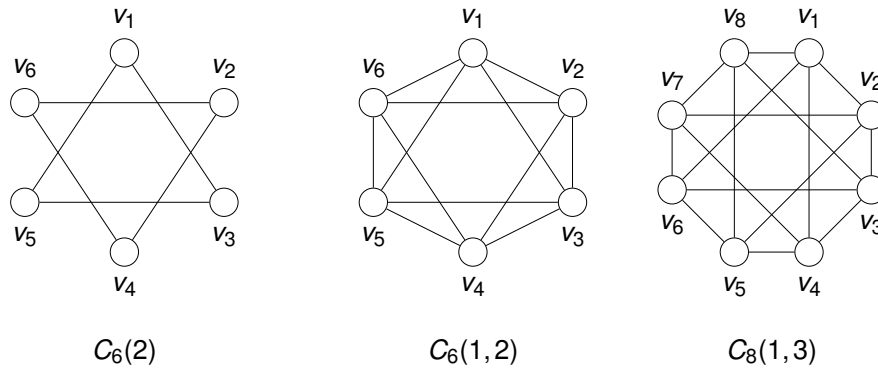


Figura 3.1: Exemplos de Grafos Circulantes.

dos grafos circulantes. Dizemos que o ciclo de tamanho n está elevado a potência C_n^r , quando temos um grafo circulante $C_n(d_1, \dots, d_r)$ tal que $d_i = d_{i-1} + 1$ e $d_r \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Na Figura 3.1 temos exemplos de grafos circulantes. O primeiro é o grafo $C_6(2)$ que é um exemplo de grafo circulante com 6 vértices e lista de inteiros (2), possui com duas componentes conexas. As arestas da primeira componente conexa são: $v_1 v_3$ pois $1 + 2 = 3$, $v_3 v_5$ pois $3 + 2 = 5$ e $v_5 v_1$ pois $5 + 2 = 7$ e como $7 > n$ então $7 \bmod n = 1$. As arestas da segunda componente conexa seguem a mesma definição e são $v_2 v_4$, $v_4 v_6$ e $v_6 v_2$.

O segundo grafo é o $C_6(1,2)$ possui 6 vértices, lista de inteiros (1,2), e cujo as arestas são as mesma do exemplo anterior e acrescido das arestas $v_1 v_2$ pois $1 + 1 = 2$, $v_2 v_3$ pois $2 + 1 = 3$, de forma análoga temos as arestas $v_3 v_4$, $v_4 v_5$, $v_5 v_6$ e por fim a aresta $v_6 v_1$ pois $(6 + 1) \bmod 6 = 1$.

O terceiro grafo é o $C_8(1,3)$ que possui 8 vértices, lista de inteiros (1,3) e arestas conforme definição e exemplos anteriores.

Para ilustrar melhor as definições dos parâmetros de convexidade definidos na introdução, tomemos como exemplo o grafo circulante $G = C_8(1,3)$ da Figura 3.2 e o subconjunto $S_0 = \{1,2,3\}$. Vamos encontrar o menor conjunto convexo P_3 que contém S_0 , utilizando a função intervalo, tal como se segue: $I^0[S_0] = S_0 = \{1,2,3\}$; $I^1[S_0] = I[S_0] \cup \{4,8\}$; $I^2[S_0] = I^1[S_0] \cup \{5,7\}$; $I^3[S_0] = I^2[S_0] \cup \{6\}$; $I^4[S_0] = I^3[S_0]$. Ao final de $I^3[S_0]$ temos o conjunto $H(S_0) = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ que é o menor conjunto convexo P_3 que contém S_0 , que coincidentemente é um conjunto de todos os vértices de G , ou seja, $H(S_0) = V(G)$.

(Barbosa et al. 2012) demonstrou algumas propriedades elementares dos conjuntos de Carathéodory, que utilizaremos aqui, para demonstrar um limite inferior para o número de Carathéodory em grafos circulantes na convexidade P_3 .

Proposition 4 (Barbosa et al. 2012) *Seja G um grafo e S um conjunto de Carathéodory de G .*

- (a) Se G tem ordem de pelo menos 2 e é completo ou um caminho ou um ciclo, então $c(G) = 2$.
- (b) Se S tem ordem pelo menos dois, então todo vértice de u em S está em um caminho uvw de ordem 3 tal que $v \in V(G) \setminus H_G(S \setminus \{u\})$ e $w \in H_G(S \setminus \{u\})$
- (c) Nenhum subconjunto próprio S' de S satisfaz $HG(S') = V(G)$.
- (d) O fecho convexo $H_G(S)$ de S induz um subgrafo conexo de G .

Em (Shaheen et al. 2022) de modo geral foi demonstrado que o limite superior para número de 2-conversão irreversível de um grafo circulante $C_n(1, r)$ é $\lceil \frac{r}{2} \rceil + 1$, nesse trabalho foi demonstrado algumas propriedades dos grafos circulantes que serão usadas em nossas demonstrações. A seguir trazemos uma propriedades dos grafos circulantes na convexidade P_3 que pode ser concluída a partir da Nota 2 de (Shaheen et al. 2022).

Proposition 5 *Seja G um grafo circulante $C_n(1, r)$ e S um conjunto de vértices tal que $S = \{v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_{i+(r-1)}\}$, então S é um conjunto envoltório.*

Proof. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $i = 1$, pois o grafo circulante é invariante por rotação. Seja $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$, então temos o seguinte processo de percolação:

- $I^0[S] = S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$
- $I^1[S] = I^0[S] \cup \{v_{r+1}, v_n\}$
- $I^2[S] = I^1[S] \cup \{v_{r+2}, v_{n-1}\}$
- $I^3[S] = I^2[S] \cup \{v_{r+3}, v_{n-2}\}$

O processo segue até pelo menos $I^x[S]$ onde $r + x \leq n - (x - 1)$, ao final da percolação teremos $I^*[S] = H(S) = V(G)$. Portanto, S é um conjunto de envoltória. \square

Na figura 3.2 temos um exemplo da Proposição 5 no grafo $C_8(1, 3)$, temos o conjunto $S = \{v_1, v_2, v_3\}$, o processo de percolação computado pelo intervalo fechado e ao final o fecho $H(S) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_8, v_5, v_7, v_6\} = V(G)$.

3.2 Resultados

Iremos inicialmente estabelecer o número de Carathéodory para os grafos circulantes com lista de inteiros $(1, 2)$ e um n qualquer.

Fact 4 *Seja G um grafo e S um conjunto de Carathéodory de G , então S possui pelo menos dois vértices u e v tal que $w \in N(u) \cap N(v)$, onde $w \in V(G)$.*

Lemma 6 *Seja $G = C_n(1, 2)$, então $c(G) = 2$.*

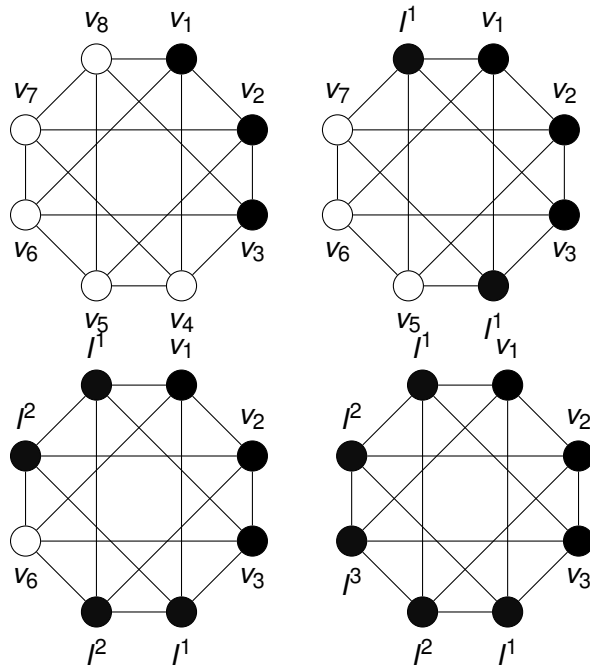


Figura 3.2: Exemplo da Proposição 5 no $C_8(1,3)$.

Proof. Seja $G = C_n(1,2)$ e suponha por contradição que $c(G) > 2$. Considere $S = \{v_u, v_h, v_x\}$ um conjunto de Carathéodory de G . Pelo Fato 4 existem pelo menos dois vértices em S , digamos v_u e v_h , tal que $w \in N(v_u) \cap N(v_h)$, onde $w \in V(G)$.

Como w é adjacente a v_u , por definição de G temos que $w \in \{v_{u-1}, v_{u-2}, v_{u+1}, v_{u+2}\}$. Se $w \in \{v_{u-1}, v_{u+1}\}$ então pela Proposição 5 $\{v_u, w\}$ é um conjunto envoltório. Logo, $\{v_u, v_h\}$ é um conjunto envoltório, o que é uma contradição da Propriedade (c). Se $w \in \{v_{u-2}, v_{u+2}\}$, então $\{v_{u-1}, v_{u+1}\} \subseteq H(\{v_u, v_h\})$ e $\{v_u, v_{u+1}\}$ forma um conjunto envoltório. Uma contradição da Propriedade (c). Portanto, $c(G) = 2$. \square

Como consequência direta podemos concluir também esse resultado para as subclasses potência circulante.

Proposition 6 *Seja C_n^k um grafo potência circulante, então $c(C_n^k) = 2$.*

Proof. No primeiro caso com $k = 1$, temos que C_n^k é isomorfo ao grafo ciclo com n vértices. E pela Proposição (a) $c(C_n^k) = 2$.

Seja $k \geq 2$. De maneira análoga a demonstração do Lema 6 temos que qualquer conjunto de Carathéodory S de C_n^k possui dois vértices que formam um conjunto envoltório. Logo $|S| \leq 2$. Portanto $c(C_n^k) = 2$. \square

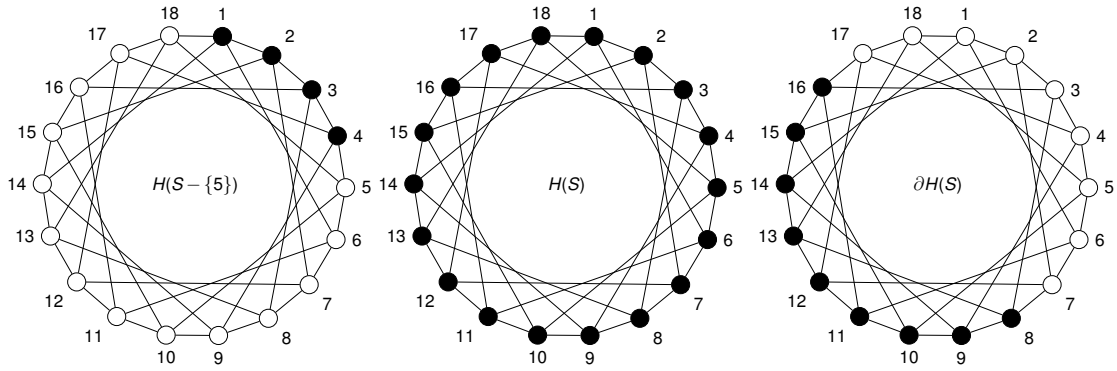


Figura 3.3: Exemplo de um conjunto de Carathéodory para $C_{18}(1, 5)$

Lemma 7 *Considere o grafo $G = C_n(1, r)$ tal que $3|(r + 1)$ e $S \subseteq V(G)$. Se $S = \{v_i \mid 3 \nmid i$ para $1 \leq i \leq r\}$ então $v_{2r} \in H(S)$.*

Proof. Por definição da função intervalo temos que $I^1[S] = I^0[S] \cup \{v_i \mid 3 \mid i \text{ tal que } 1 \leq i \leq r\} \cup \{v_{r+1}, v_n\}$, $I^2[S] = I^1[S] \cup \{v_{r+2}, v_{n-1}\}$, $I^3[S] = I^2[S] \cup \{v_{r+3}, v_{n-2}\}$ e para alguma iteração r temos que $I^r[S] = I^{r-1}[S] \cup \{v_{2r}, v_{n-(r-1)}\}$. Logo, $v_{2r} \in H(S)$.

□

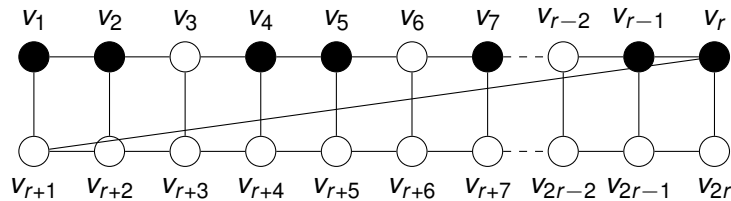


Figura 3.4: Processo de percolação no sentido horário do Lema 7

Nas figuras 3.4 e 3.5 visualizamos uma representação da configuração do conjunto S e dos vértices contaminados conforme demonstrado no Lema 7. Podemos aludir esse processo percolação ao efeito dominó, e as peças de dominó como os vértices. Caso na configuração inicial todas as peças do conjunto S estejam presentes no processo de percolação todos as demais peças caem em cascata, mas caso alguma peça do conjunto S esteja faltando o processo é encerrado ao chegar nessa peça como uma barreira.

Porém para que o conjunto S construído conforme o Lema 7 seja um conjunto de Carathéodory, é necessário que v_{2r} não esteja em $\partial H(S)$. Constatamos que isso é verdade a partir de um determinado valor de n , que é o foco do próximo lema.

Lemma 8 *Considere o grafo $G = C_n(1, r)$ tal que $3|(r + 1)$ e $S = \{v_i \in V(G) \mid 3 \nmid i$ para $1 \leq i \leq r\}$. Se $n \geq 4r - 2$ então $v_{2r} \in \partial H(S)$.*

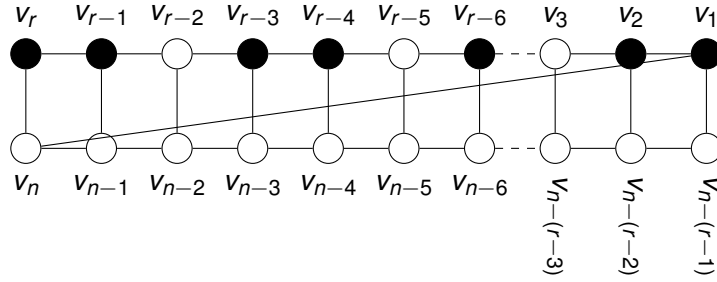


Figura 3.5: Processo de percolação no sentido anti-horário do Lema 7

Proof. Vamos provar que S é um conjunto de Carathéodory. Observe que $H(S \setminus \{v_j\}) = S \setminus \{v_j\} \cup \{v_i \mid 3 \mid i \text{ tal que } 1 \leq i \leq r\}$, para $j = 1, r$.

Agora, considere $v_j \in S$ tal que $1 < j < r$. Aplicando a função intervalo vamos determinar o conjunto envoltório do conjunto $S' = S \setminus \{v_j\}$. Vamos considerar dois casos:

Caso 1: $3 \mid (j+1)$. Observe que $I[S'] = S' \cup \{v_i \mid 3 \mid i \text{ onde } 1 \leq i \leq r \text{ e } i \neq j+1\} \cup \{v_{r+1}\} \cup \{v_n\}$ e $I^2[S'] = I[S'] \cup \{v_{r+2}\} \cup \{v_{n-1}\}$.

Observe que para todo l , com $1 < l < j$, temos que $v_{r+l} \in I^l[S']$ e que $v_{r+j} \notin I^l[S']$. E para todo m , com $1 < m < r-j$, temos que $v_{n-(m-1)} \in I^m[S']$ até o limite dado, ou seja $v_{n-((r-j-1)-1)} \in I^{r-j-1}(S')$ e $v_{n-((r-j)-1)} \notin I^{r-j}(S')$.

O processo de percolação de S' se encerra no passo $k = \max\{l, m\}$ até a inclusão dos vértices v_{r+l} e $v_{n-(m-1)}$. Como l e m dependem de j , temos que $I^k[S'] = S' \cup \{v_i : 3 \mid i \text{ onde } 1 \leq i \leq r \text{ e } i \neq j+1\} \cup \{v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_{r+(j-1)}\} \cup \{v_n, v_{n-1}, \dots, v_{n-(r-j-2)}\}$.

Vamos mostrar que $I^k[S'] = H(S')$. Supomos por contradição que o processo de percolação não encerra em k e exista um vértice $v_c \notin I^k[S']$ que é incluído em $I^{k+1}[S']$. Se $I^{k+1}[S']$, logo v_c precisa ter dois vizinhos pertencentes a $I^k[S']$.

Considere dois subconjuntos de $I^k[S']$, o conjunto $A = \{v_{j+2}, v_{j+3}, \dots, v_{r+j-1}\}$ e $B = \{v_{j-1}, v_{j-2}, \dots, v_1, v_n, v_{n-1}, \dots, v_{n-(r-j-2)}\}$. Como $|A| < r$ e $|B| < r$ por definição de G temos que $|N(v_c) \cap A| < 2$ e $|N(v_c) \cap B| < 2$.

Então $|N(v_c) \cap A| = 1$ e $|N(v_c) \cap B| < 1$, ou seja $c-r \leq r+l$ e $(c+r) \geq n-(m-1)$. Como l e m dependem de j , podemos concluir que $c-r \leq r+j-1$ e $c+r \geq n-(r-j-2)$. Expandido as duas inequações temos que $c \leq 2r+j-1$ e $c \geq n-2r+j+2$, assim temos que $n-2r+j+2 \leq 2r+j-1$ então $n \leq 4r-3$, o que é uma contradição com a definição. Logo $I^k[S'] = H(S')$ para o caso 1.

Caso 2: $3 \nmid (j-1)$. Observe que $I[S'] = S' \cup \{v_i \mid 3 \mid i \text{ onde } 1 \leq i \leq r \text{ e } i \neq j-1\} \cup \{v_{r+1}\} \cup \{v_n\}$ e $I^2[S'] = I[S'] \cup \{v_{r+2}\} \cup \{v_{n-1}\}$.

Observe que para todo l , com $1 < l < j-1$, temos que $v_{r+l} \in I^l[S']$, porém $v_{r+j-1} \notin I^l[S']$. E para todo m , com $1 < m < r-(j+1)$, temos que $v_{n-(m-1)} \in I^m[S']$ porém $v_{n-((r-(j+1))-1)} \notin I^{r-(j+1)}(S')$.

Assim como no caso anterior o processo de percolação de S' se encerra no passo $k = \max\{l, m\}$ até a inclusão dos vértices v_{r+l} e $v_{n-(m-1)}$. Vamos mostrar que $I^k[S'] = H(S')$.

Supomos por contradição que o processo de percolação não encerra em k e exista um vértice $v_c \notin I^k[S']$ que é incluído em $I^{k+1}[S']$. Se $v_c \in I^{k+1}[S']$, logo v_c precisa ter dois vizinhos pertencentes a $I^k[S']$.

Considere dois subconjuntos de $I^k[S']$, o conjunto $A = \{v_{j+1}, v_{j+2}, \dots, v_{r+j-2}\}$ e $B = \{v_{j-2}, v_{j-3}, \dots, v_1, v_n, v_{n-1}, \dots, v_{n-(r-j-1)}\}$.

Como $|A| < r$ e $|B| < r$ por definição de G temos que $|N(v_c) \cap A| < 2$ e $|N(v_c) \cap B| < 2$.

Ou seja $c - r \leq r + l$ e $(c + r) \geq n - (m - 1)$. Como l e m dependem de j , podemos concluir que $c - r \leq r + j - 2$ e $c + r \geq n - (r - j - 1)$. Expandido as duas inequações temos que $c \leq 2r + j - 2$ e $c \geq n - 2r + j + 1$, assim temos que $n - 2r + j + 1 \leq 2r + j - 2$ então $n \leq 4r - 3$, o que é uma contradição com a definição. Logo $I^k[S'] = H(S')$ para todos os casos.

Em todos os casos temos que $v_{2r} \notin H(S')$, como $v_{2r} \in H(S)$ pelo Lema 7 podemos concluir então que $v_{2r} \in \partial H(S)$. □

Como consequência direta do Lema 8 temos o seguinte resultado.

Theorem 5 *Seja $G = C_n(1, r)$ tal que $3 \nmid (r+1)$ e $n \geq 4 \times r - 2$ então $c(G) \geq \frac{2(r+1)}{3}$.*

Proof. O conjunto $S = \{v_i \mid 3 \nmid i \text{ para } 1 \leq i \leq r\}$ pelo Lema 7 temos que $v_{2r} \in H(S)$, e pelo Lema 8 temos que $v_{2r} \in \partial H(S)$, portanto S é um conjunto de Carathéodory de G . O conjunto S tem cardinalidade $\frac{2(r+1)}{3}$ consequentemente o número de Carathéodory de G é maior ou igual $\frac{2(r+1)}{3}$. □

Vamos verificar dois exemplos para o Teorema 5, primeiramente o exemplo $C_{18}(1, 5)$ dado que $n \geq 4r - 2$ o teorema é válido, e por fim o exemplo $C_{17}(1, 5)$ dado que $n < 4r - 2$ o teorema não é valido.

Pelo Teorema 5 o grafo $C_{18}(1, 5)$ possui um conjunto de Caratheódory $S = \{1, 2, 4, 5\}$. Agora vamos verificar se S é um conjunto de Carathéodory. Para isso vamos computar $H(S)$ e $\partial H(S)$.

Temos que $H(S - 1) = \{2, 4, 5, 3\}$, $H(S - 2) = \{1, 4, 5, 6, 18, 17\}$, $H(S - 4) = \{1, 2, 5, 6, 7\}$, $H(S - 5) = \{1, 2, 4, 3\}$, e $H(S) = V(C_{18}(1, 5))$. Portanto $\partial H(S) = \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$, conforme podemos ver nas Figuras 3.6 e 3.3. Logo $v_8 \in \partial H(S)$ e S é um conjunto de Carathéodory. Verificamos exaustivamente que não existe um conjunto de Carathéodory de maior cardinalidade, então S também é um conjunto de Carathéodory máximo, o número de Carathéodory de $C_{18}(1, 5)$ é 4.

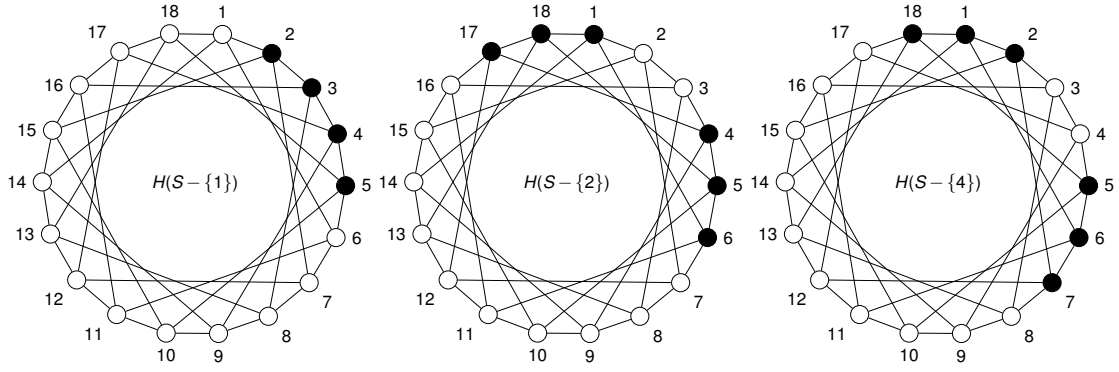


Figura 3.6: Exemplo de um conjunto de Carathéodory para $C_{18}(1,5)$

O mesmo não ocorre para $C_{17}(1,5)$, pois $n < 4r - 2$, e portanto o Teorema 5 não é válido. Vamos verificar se S é um conjunto de Carathéodory para $C_{17}(1,5)$.

Temos que $S = \{1, 2, 4, 5\}$, e $H(S - 1) = \{2, 4, 5, 3\}$, porém $H(S - 2) = \{1, 4, 5, 6, 16, 11, 10, 12, 9, 15, 7, 13, 3, 14, 2, 8\} = V(C_{17}(1,5))$. Podemos visualizar melhor na Figura 3.7, em que temos $v_{10} \in H(S - 2)$, portanto $v_{10} \notin \partial H(S)$, conforme prevemos no Teorema 8. Como $S - 2$ é um conjunto envoltória, S não é um conjunto de Carathéodory, conforme Propriedade (c). Verificamos que esse grafo não possui um conjunto de Carathéodory de tamanho 4, portanto seu número de Carathéodory é menor que 4.

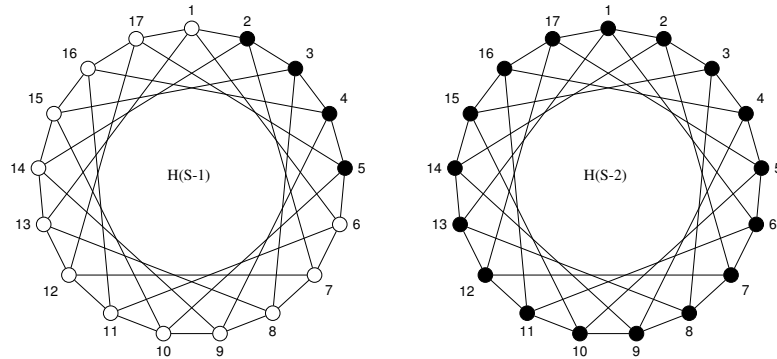


Figura 3.7: Exemplo de um conjunto não Carathéodory para $C_{17}(1,5)$

De forma análoga vamos concluir um limite inferior para o número de Carathéodory para $C_n(1, r)$, onde $r + 1$ não é múltiplo de 3.

Lemma 9 *Seja $G = C_n(1, r)$ tal que $3 \nmid (r + 1)$ e $S \subseteq V(G)$. Se $S = \{v_r\} \cup \{v_i \mid 3 \mid i \text{ tal que } 1 \leq i < r - 1\}$ então $v_{2r} \in H(S)$.*

Proof. Por definição da função intervalo temos que $I^1[S] = I^0[S] \cup \{v_i \mid 3 \mid i \text{ tal que } 1 \leq i < r - 1\} \cup \{v_{r+1}, v_n\} \cup \{v_{r-1}\}$, $I^2[S] = I^1[S] \cup \{v_{r+2}, v_{n-1}\}$, $I^3[S] = I^2[S] \cup \{v_{r+3}, v_{n-2}\}$ e para alguma iteração r temos que $I^r[S] = I^{r-1}[S] \cup \{v_{2r}, v_{n-(r-1)}\}$. Logo, $v_{2r} \in H(S)$. \square

Na figura 3.8 temos exemplos de conjuntos de S conforme definição no Lema 9 para $C_n(1, r)$ com $r \in \{4, 6, 7, 9\}$. E em seguida demonstraremos que são conjuntos de Carathéodory.

Lemma 10 *Considere o grafo $G = C_n(1, r)$ tal que $3 \nmid (r+1)$ e $S = \{v_i \mid 3 \mid i \text{ tal que } 1 \leq i < r-1\} \cup \{v_r\}$. Se $n \geq 4r-2$ então $v_{2r} \in \partial H(S)$.*

Proof. Vamos provar que S é um conjunto de Carathéodory. Seja $H(S \setminus \{v_j\})$, para $j = r$ temos o mesmo comportamento do Lema 8, porém para $j = 1$ temos que $H(S \setminus \{v_1\}) = S \setminus \{v_1\} \cup \{v_i \mid 3 \mid i \text{ tal que } 1 \leq i < r-1\} \cup \{v_{r-1}\}$.

Agora, considere $v_j \in S$ tal que $1 < j < r-1$. Aplicando a função intervalo vamos determinar o conjunto envoltório do conjunto $S' = S \setminus \{v_j\}$. Vamos considerar dois casos:

Caso 1: $3 \mid (j+1)$. Observe que $I[S'] = S' \cup \{v_i \mid 3 \mid i \text{ onde } 1 \leq i \leq r \text{ e } i \neq j+1\} \cup \{v_{r+1}\} \cup \{v_n\} \cup \{v_{r-1}\}$ e $I^2[S'] = I[S'] \cup \{v_{r+2}\} \cup \{v_{n-1}\}$. O restante da demonstração é análoga ao Caso 1 do Lema 8.

Caso 2: $3 \nmid (j-1)$. Observe que $I[S'] = S' \cup \{v_i \mid 3 \mid i \text{ onde } 1 \leq i \leq r-1 \text{ e } i \neq j-1\} \cup \{v_{r+1}\} \cup \{v_n\} \cup \{v_{r-1}\}$ e $I^2[S'] = I[S'] \cup \{v_{r+2}\} \cup \{v_{n-1}\}$. O restante da demonstração segue igual ao Caso 2 do Lema 8.

Podemos então concluir, para todo os casos, que $v_{2r} \in \partial H(S)$, e portanto S é um conjunto de Carathéodory de G . \square

Theorem 6 *Seja $G = C_n(1, r)$ tal que $3 \nmid (r+1)$ e $n \geq 4 \times r - 2$ então $c(G) \geq \lfloor \frac{2r+1}{3} \rfloor$.*

Proof. Seja $S = \{v_i \mid 3 \mid i \text{ tal que } 1 \leq i < r-1\} \cup \{v_r\}$, pelo Lema 9 temos que $v_{2r} \in H(S)$, e pelo Lema 10 temos que $v_{2r} \in \partial H(S)$, portanto S é um conjunto de Carathéodory. E S tem cardinalidade $\lfloor \frac{2r-1}{3} \rfloor + 1$. Consequentemente o número de Carathéodory de G é maior ou igual a $\lfloor \frac{2r+1}{3} \rfloor$. \square

3.3 Conclusões

Concluimos que grafos circulares $C_n(1, r)$ com $n \geq 4r-2$ tem um conjunto de Carathéodory de cardinalidade pelo menos igual a $\lfloor \frac{2r+1}{3} \rfloor$ quando $3 \nmid (r+1)$ e $\frac{2(r+1)}{3}$ caso $3 \mid (r+1)$. Para os grafos potência de ciclo e circulares $C_n(1, 2)$ então o número de Carathéodory é igual a 2. Sabendo por (Barbosa et al. 2012) que para determinar se um grafo G possui um conjunto de Carathéodory de tamanho k é um problema NP -difícil, acreditamos que nossos resultados contribuem para o estudo desse parâmetro em grafos

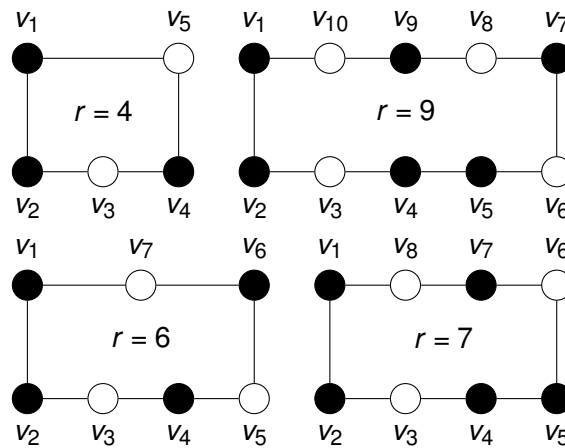


Figura 3.8: Exemplos de S para quando $3 \nmid (r + 1)$ conforme Lema 9

circulantes. Para trabalhos futuros pretendemos determinar o limite superior do número de Carathéodory nesses grafos e explorar o parâmetro número de Carathéodory para outras classes de grafo da família Cayley. (Brešar e Valencia-Pabon 2020) e (Grippio et al. 2021) exploraram o número envoltória na convexidade P_3 para os grafos de Hipercubo, Hamming e Kneser, porém sem explorar o parâmetro de Carathéodory. Por serem também grafos de Cayley acreditamos que nossos resultados possam ser estendidos para algumas dessas classes, que compartilham características semelhantes com os circulantes.

Limites para o número de Carathéodory em Grafos de Hamming

Este capítulo apresenta um artigo que estabelece um limite inferior para o número de Carathéodory em grafos de Hamming. Demonstramos que o número de Carathéodory para o grafo de Hamming de dimensão n é, no mínimo, n . O trabalho foi aceito como trabalho completo no LV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional (SBPO) (Silva et al. 2025), realizado em Gramado, RS, Brasil, em outubro de 2025. O artigo é de autoria de Braully Rocha da Silva, Erika Morais Martins Coelho, Hebert Coelho da Silva e Simone Dantas. O trabalho foi submetido ao evento em maio de 2025 e aceito em junho do mesmo ano, após revisão por pares, incorporando pequenas modificações sugeridas pelos revisores. A saber que em setembro de 2025, um *preprint* contendo resultados similares foi disponibilizado no arXiv (Dratman et al. 2025) por outros autores. Eles estabeleceram o mesmo limite inferior para o número de Carathéodory em grafos de Hamming, porém utilizando uma abordagem distinta, baseada no parâmetro denominado *maior conjunto de envoltória minimal* para grafos de Hamming. O trabalho apresentado neste capítulo é independente do *preprint* mencionado, e ambos os resultados foram obtidos de forma autônoma, sem conhecimento prévio um do outro. A submissão e aceite deste artigo no SBPO ocorreu antes da divulgação do *preprint*, reforçando a originalidade e independência dos resultados apresentados aqui.

4.1 Preliminares

Nesta seção contém mais algumas definições e terminologias fundamentais utilizadas ao longo do artigo. Seja G um grafo, $v \in V(G)$ e S um subconjunto de $V(G)$. A *vizinhança aberta* de um vértice v é dada por $N(v) = \{w \in V(G) | vw \in E(G)\}$. Um *subgrafo* H de um grafo G é um grafo tal que $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Seja S um subconjunto de vértices de G , o *subgrafo induzido* por S , denotado por $G[S]$, ou $\langle S \rangle$, possui S como conjunto de vértices, e o subconjunto de arestas de G que tenham as duas

extremidades em S . Um *caminho* entre dois vértices u e v é uma sequência de vértices u_1, u_2, \dots, u_k tal que $u_1 = u$, $u_k = v$ e $u_i u_{i+1} \in E(G)$ para todo $1 \leq i < k$.

Os primeiros resultados conhecidos sobre o número de Carathéodory na convexidade foram exibidos por P_3 (Barbosa et al. 2012). Além de demonstrarem que é que decidir se um grafo bipartido possui um conjunto de Carathéodory de cardinalidade k é NP-difícil e apresentaram um limite superior para o número de Carathéodory para grafos gerais, eles provaram diversas propriedades fundamentais dos conjuntos de Carathéodory.

Proposition 7 (Barbosa et al. 2012) *Seja G um grafo e S um conjunto Carathéodory de G .*

- (a) *Se G tem ordem pelo menos 2 e é um grafo completo, um caminho ou um ciclo, então $c(G) = 2$.*
- (b) *Se S tem pelo menos dois elementos, então para todo vértice $u \in S$, existe um caminho uvw de comprimento 2 tal que $v \in V(G) \setminus H_G(S \setminus \{u\})$ e $w \in H_G(S \setminus \{u\})$.*
- (c) *Nenhum subconjunto próprio $S' \subset S$ satisfaz $H_G(S') = V(G)$.*
- (d) *O envoltório convexo $H_G(S)$ induz um subgrafo conexo de G .*

Observe que uma das propriedades elencadas no resultado anterior afirma que a envoltória convexa de todo conjunto de Carathéodory de um grafo G é um subgrafo conexo de G . Seja $\mathcal{X} = G_1 \square G_2 \square \dots \square G_n$, com $n \geq 1$. (Brešar e Valencia-Pabon 2020), mostraram que todo conjunto convexo e conexo de \mathcal{X} é formado pelo produto cartesiano entre conjuntos convexos de cada grafo G_i , com $1 \leq i \leq n$.

Theorem 7 (Brešar e Valencia-Pabon 2020) *Seja $\mathcal{X} = G_1 \square G_2 \square \dots \square G_n$, com $n \geq 1$. Se S é um conjunto convexo de \mathcal{X} e o subgrafo induzido $\langle S \rangle$ é conexo, então $S = Z_1 \times \dots \times Z_n$, onde cada Z_i é um conjunto convexo no grafo G_i .*

Para ilustrar o resultado do Teorema 7, considere a Figura 4.1, onde o grafo \mathcal{X} é um grafo produto cartesiano entre G e K_3 . O conjunto $S = \{(4, a), (0, a), (3, a)\}$ é um conjunto convexo de \mathcal{X} , e o subgrafo induzido $\langle S \rangle$ é conexo, então pelo Teorema 7, S é o produto cartesiano de um conjunto convexo de G e outro conjunto convexo de K_3 , neste caso $S = \{4, 0, 3\} \times \{a\}$, onde $S_1 = \{4, 0, 3\}$ é um conjunto convexo de G e $S_2 = \{a\}$ é um conjunto convexo de K_3 . Assim, o conjunto S é o produto cartesiano entre os conjuntos convexos S_1 e S_2 .

De forma contrária também podemos concluir que $S = \{(4, a), (0, a), (3, a), (3, b)\}$ apesar de induzir um subgrafo conexo de \mathcal{X} , não é um conjunto convexo, pois não é o produto cartesiano entre conjuntos convexos de G e K_3 , $S = \{4, 0, 3\} \times \{a, b\}$, onde $S_1 = \{4, 0, 3\}$ é um conjunto convexo de G e $S_2 = \{a, b\}$ não é um conjunto convexo de

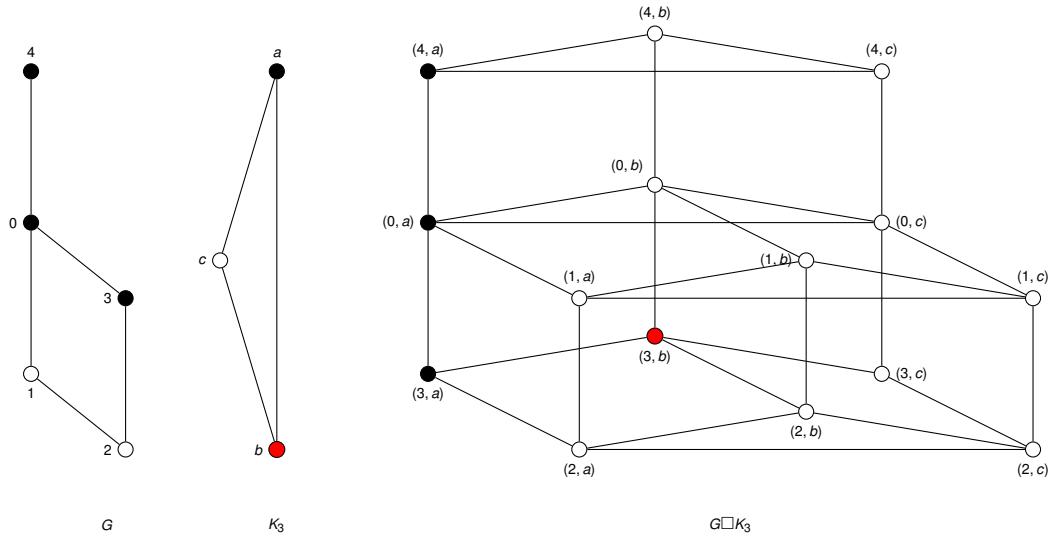


Figura 4.1: Grafo de exemplo para o Teorema 7

K_3 . Portanto, o Teorema 7 nos fornece uma caracterização dos conjuntos convexos em produtos de grafos e também em particular em grafos de Hamming.

Em (Coelho et al. 2017) foi demonstrado o número de Carathéodory para o produto de dois grafos completos não triviais conforme o teorema a seguir.

Theorem 8 (Coelho et al. 2017) *Considere $n_1, n_2 \geq 2$ e $G = K_{n_1} \square K_{n_2}$. Então $c(G) = 2$.*

Esse resultado é particularmente interessante, pois estabelece que o número de Carathéodory para grafos de Hamming de dimensão 2 é igual a 2. No entanto, para dimensões superiores, o número de Carathéodory, até onde sabemos, ainda não tinha sido investigado. Motivados para investigar essa questão, na próxima seção apresentamos um limite inferior para o número de Carathéodory para grafos de Hamming de dimensão $n > 2$.

4.2 Resultados

A seguir vamos apresentar uma série de resultados que nos permitem estabelecer um limite inferior para o número de Carathéodory para grafos de Hamming.

Em particular, focamos no grafo de Hamming \mathcal{H} com dimensão $n > 2$, pois o número de Carathéodory para grafos de Hamming de dimensão 2 já foi estabelecido em trabalho anterior (Coelho et al. 2017).

Considere o grafo $\mathcal{H} = G \square K_n$, formado pelo produto cartesiano de um grafo qualquer G e um grafo completo com n vértices. Iniciaremos mostrando como obter um conjunto de envoltória em \mathcal{H} a partir de um conjunto de envoltória no grafo G .

Lemma 11 *Seja G um grafo conexo, K_n um grafo completo e $\mathcal{H} = G \square K_n$. Se S é um conjunto envoltória de G , $u, v \in V(K_n)$ e $w \in V(G)$, então $S' = S \times \{u\} \cup \{(w, v)\}$ é um conjunto envoltória de \mathcal{H} .*

Proof. Considere S um conjunto envoltória de G . De acordo com a definição do produto cartesiano, o conjunto $H_{\mathcal{H}}(S \times \{u\})$ induz um subgrafo de \mathcal{H} isomorfo a G .

$S_1 = H_{\mathcal{H}}(S \times \{u\})$ e $S_2 = V(\mathcal{H}) - S_1$. Como G é conexo, existe em $\mathcal{H}[S_2]$ um caminho entre (w, v) e qualquer outro vértice (x, y) , tal que $x \in G$ e $y \in K_n$ com $y \neq v$. Como K_n é um grafo completo, todo vértice de $\mathcal{H}[S_2]$ tem um vizinho em S_1 . Além disso, $(w, v) \in S'$, então temos que $(x, y) \in H_{\mathcal{H}}(S')$, para todo $x \in G$ com $x \neq w$ e para todo $y \in K_n$ com $y \neq v$. □

Considere o grafo G ilustrado na Figura 4.2 e tomemos o conjunto $S = \{1, 2, 4\}$ como um subconjunto de vértices de G . É possível verificar que S é um conjunto de envoltória de G , uma vez que a envoltória convexa abrange todos os vértices de G . Agora, consideremos o produto cartesiano $\mathcal{H} = G \square K_2$, que é formado a partir de G e o grafo completo K_2 . Nesse grafo, é possível verificar que há duas cópias do grafo G unidas por arestas entre seus pares equivalentes. Observa-se que $S' = \{1, 2, 4\} \times \{0\} \cup \{(0, 1)\}$ é um conjunto de envoltória de \mathcal{H} .

Nosso próximo resultado estabelece que um vértice p pertence à envoltória convexa de um subconjunto de vértices de um grafo G sempre que o vértice (p, v) pertence à envoltória convexa de um subconjunto S'' de vértices do produto cartesiano $\mathcal{H} = G \square K_n$, sendo S'' formado por vértices selecionados de G e K_n . Em outras palavras, a inclusão de (p, v) na envoltória convexa de \mathcal{H} implica a inclusão de p na envoltória convexa correspondente em G .

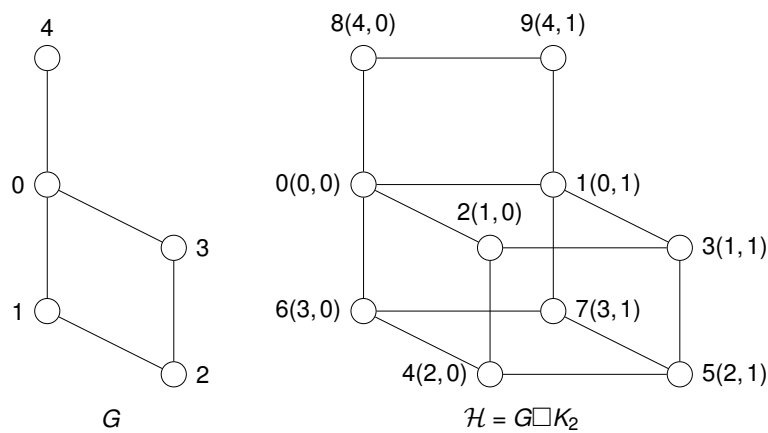


Figura 4.2: Exemplo do Lema 11

Lemma 12 *Seja $\mathcal{H} = G \square K_n$, $S \subset V(G)$, $w \in H_G(S)$ e $u, v \in V(K_n)$. Se $p \notin H_G(S)$ então $(p, x) \notin H_{\mathcal{H}}(S \times \{u\} \cup \{(w, v)\})$, para todo $x \in V(K_n)$.*

Proof. Considere $S' = S \times \{u\}$ e $S'' = S' \cup \{(w, v)\}$. Suponha que $p \notin H_G(S)$ e, por contradição que $(p, x) \in H_{\mathcal{H}}(S'')$, para algum $x \in V(K_n)$. Vamos analisar dois casos distintos:

Caso 1: $H_{\mathcal{H}}(S'')$ induz um subgrafo conexo em \mathcal{H} . Pelo Teorema 7 temos que $H_{\mathcal{H}}(S'') = H_G(S) \times H_{K_n}(\{u, v\})$. Seja $x \in V(K_n)$. Se $(p, x) \in H_{\mathcal{H}}(S'')$ então $p \in H_G(S)$. Uma contradição.

Caso 2: $H_{\mathcal{H}}(S'')$ induz um subgrafo não conexo em \mathcal{H} . Sejam G_1, G_2, \dots, G_k as componentes conexas de $H_{\mathcal{H}}(S'')$. Suponha, por contradição, que $(p, x) \in H(S'')$, para algum $x \in V(K_n)$. Se (p, x) e (w, v) pertencem a mesma componente conexa G_j de $H_{\mathcal{H}}(S'')$, então, ao considerarmos $H_{\mathcal{H}}(S'') = G_j$ concluímos, pelo Caso 1, que $p \in H_G(S)$. Uma contradição.

Então a única possibilidade é (p, x) e (w, v) estarem em componentes distintas de $H(S'')$. Isso implica em não haver um caminho entre eles no subgrafo induzido por $H_{\mathcal{H}}(S'')$. Logo, $(p, x) \in H(S')$. Portanto, $p \in H_G(S)$. Uma contradição.

Portanto, a única possibilidade é que (p, x) e (w, v) pertençam a componentes conexas distintas de $H(S'')$. Isso implica que não existe um caminho entre esses dois vértices no subgrafo induzido por $H_{\mathcal{H}}(S'')$. Assim, concluímos que $(p, x) \in H_{\mathcal{H}}(S')$ o que, por definição do produto cartesiano, implica que $p \in H_G(S)$. Chegamos, portanto, a uma contradição.

Portanto, Se $p \notin H_G(S)$ então $(p, x) \notin H_{\mathcal{H}}(S \times \{u\} \cup \{(w, v)\})$, para todo $x \in V(K_n)$.

□

A seguir apresentamos a demonstração do Lema 13 que constitui o principal resultado utilizado na prova do limite inferior para o número de Carathéodory de um grafo de Hamming. Esse lema estabelece as condições sob as quais é possível construir um conjunto de Carathéodory no produto cartesiano $\mathcal{H} = G \square K_n$ a partir de um conjunto de Carathéodory de G .

Lemma 13 *Seja $\mathcal{H} = G \square K_n$, onde G é um grafo conexo, $S \subset V(G)$ e $u, v \in V(K_n)$, com $u \neq v$. Suponha que S seja um conjunto envoltória e Carathéodory em G , e exista um vértice $w \in V(G)$ tal que $w \in H_G(S - \{x\})$ para todo $x \in S$. Então, o conjunto $S'' = S \times \{u\} \cup \{(w, v)\}$ é um conjunto envoltória e Carathéodory em \mathcal{H} .*

Proof.

É fácil ver que S'' é um conjunto envoltória de \mathcal{H} , já que S e (w, v) satisfazem as condições do Lema 11. Agora, vamos provar que S'' é um conjunto Carathéodory de \mathcal{H} .

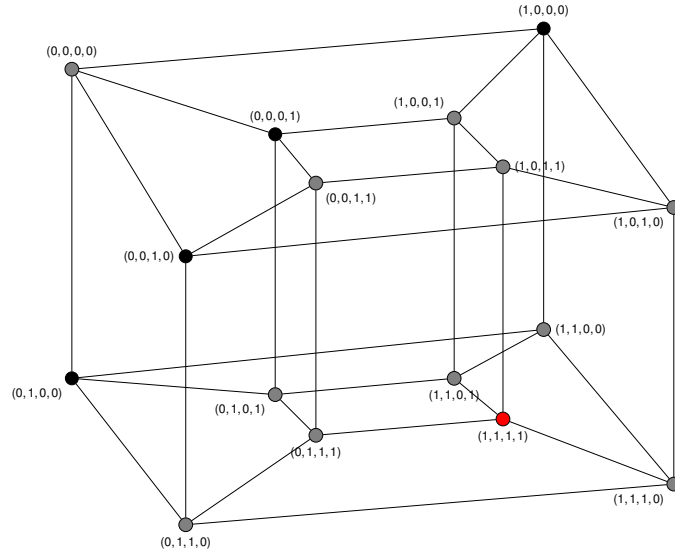


Figura 4.3: Grafo tesseracto $\mathcal{H} = K_2 \square K_2 \square K_2 \square K_2$

Considere $u \in K_n$ e $S' = S \times \{u\}$. Como S é um conjunto envoltória de G , então o subgrafo de $\mathcal{H} = G \square K_n$ induzido por $H(S')$ induz um subgrafo em \mathcal{H} que é isomorfo a G .

Seja $p \in \partial H_G(S)$. Observe que $H_{\mathcal{H}}(S')$ é um conjunto Carathéodory de \mathcal{H} e que $(p, u) \in \partial H_{\mathcal{H}}(S')$. Como todo vértice $(z, v) \in \mathcal{H}$ satisfaz $|N((z, v)) \cap H_{\mathcal{H}}(S')| = 1$, onde $z \in V(G)$, segue-se que tanto (p, v) quanto (w, v) não estão em $H_{\mathcal{H}}(S') = H_{\mathcal{H}}(S' - (w, v))$.

Mostraremos que $(p, v) \in \partial H(S'')$. Agora considere $(x, u) \in S''$ e $S''' = S'' - \{(x, u)\}$. Como S é um conjunto Carathéodory de G e $N((w, v)) \cap \{(y, u) | y \in V(G)\} = \{(w, u)\}$, temos que $(x, u) \notin H_{\mathcal{H}}(S \times \{u\})$. Além disso, como S é um conjunto Carathéodory de G , $(p, u) \notin H(S \times \{u\})$. Portanto, pelo Lema 12 $(p, v) \notin H(S \times \{u\} \cup (w, v))$. Portanto, $(p, v) \in \partial H(S'')$. □

Utilizando o Lema 13 podemos estabelecer um limite inferior para o número de Carathéodory de um grafo de Hamming. A estratégia da demonstração consiste em apresentar um procedimento construtivo que permite obter um conjunto de Carathéodory para o grafo $\mathcal{H} = K_{r_1} \square K_{r_2} \square \dots \square K_{r_n}$ a partir de um conjunto de Carathéodory previamente conhecido para o subproduto $\mathcal{H} = K_{r_1} \square K_{r_2} \square \dots \square K_{r_{n-1}}$.

Theorem 9 *Seja $\mathcal{H} = K_{r_1} \square K_{r_2} \square \dots \square K_{r_n}$ um grafo de Hamming não trivial de dimensão n , com $n \geq 3$. Então $c(\mathcal{H}) \geq n$.*

Proof. Considere $S = \{(0, 0, \dots, 0, 1), (0, 0, \dots, 1, 0), \dots, (1, 0, \dots, 0, 0)\}$ um subconjunto com n vértices do grafo de Hamming \mathcal{H} . Vamos provar por indução em n que S é um conjunto de Carathéodory do grafo \mathcal{H} .

Para $n = 3$, considere o conjunto $S = \{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ um conjunto do grafo $\mathcal{H} = K_{r_1} \square K_{r_2} \square K_{r_3}$. Observe que $(1, 1, 1) \in \partial\mathcal{H}$ e temos $w = (0, 0, 0) \in H(S - x)$ para todo $x \in S$. Portanto $c(\mathcal{H}) \geq 3$.

Agora, suponha que para um grafo de Hamming $\mathcal{H}' = K_{r_1} \square K_{r_2} \cdots \square K_{r_{n-1}}$, com $n > 2$, que S seja um conjunto de Carathéodory. Seja K_m , com $m \geq 2$, um grafo completo com conjunto de vértices $V(K_m) = \{0, 1, \dots, m-1\}$. Considere ainda, $w = (0, 0, \dots, 0, 0) \in V(\mathcal{H})$, $u = 0$ e $v = 1$. Desde que w é vizinho de todo vértice em S , temos que $w \in H_{\mathcal{H}'}(S - \{x\})$ para todo $x \in S$. Logo pelo Lema 13 o conjunto $S'' = S \times \{u\} \cup (w, v)$ é um conjunto de Carathéodory, da forma descrita, para o grafo $\mathcal{H} = K_{r_1} \square K_{r_2} \cdots \square K_{r_n}$. Portanto, como mostramos que o conjunto S com cardinalidade n , é um conjunto de Carathéodory do grafo \mathcal{H} , concluímos que $c(\mathcal{H}) \geq n$. □

Vejamus um exemplo do Teorema 9. Para tal vamos estabelecer o grafo tesseracto, que é um grafo de Hamming obtido através do produto cartesiano de quatro grafos completos com 2 vértices. Pelo Teorema 7 sabemos que o grafo tem um conjunto de Carathéodory de tamanho 4. Podemos verificar que o conjunto $S = \{(0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0)\}$ é um conjunto de Carathéodory do grafo tesseracto, com $(1, 1, 1, 1) \in \partial H(S)$.

4.3 Conclusões

Além de suas diversas aplicações, o número de Carathéodory é conhecido por ser um problema NP-difícil, mesmo quando restrito a grafos bipartidos. Essa complexidade torna o parâmetro especialmente relevante e objeto de amplo interesse na literatura, tanto na tentativa de verificar se sua dificuldade se mantém em classes mais restritas de grafos quanto na busca por algoritmos de tempo polinomial aplicáveis a essas classes específicas.

Neste artigo, estabelecemos um limite inferior para o número de Carathéodory para a classe dos grafos de Hamming. Nosso principal resultado demonstra que, para um grafo de Hamming \mathcal{H} , esse número é sempre maior ou igual a n , sendo n a dimensão do grafo. É importante ressaltar que esse limite inferior é definido exclusivamente em função da dimensão, não dependendo do número total de vértices do grafo.

Como direções para trabalhos futuros, propomos a investigação de um limite superior para o número de Carathéodory em grafos de Hamming. Vale destacar que, caso se comprove que o limite superior também é n , o número de Carathéodory poderá ser computado em tempo polinomial para essa classe específica de grafos.

Uma Heurística Gulosa para Conjunto Alvo Majorado em Redes Sociais

Este capítulo apresenta um artigo que propõe uma heurística gulosa para o problema de seleção de conjunto alvo majorado em redes sociais. Investigamos os principais parâmetros que influenciam o desempenho da heurística e conduzimos uma análise experimental comparativa com as principais abordagens da literatura. Identificamos o parâmetro de melhor desempenho e propomos uma heurística gulosa que supera as abordagens anteriores, tanto em tempo de execução quanto na qualidade das soluções encontradas. A seção de introdução foi unificada no Capítulo 1, por isso omitimos a introdução neste capítulo. O idioma do artigo é o inglês, e por isso o texto deste capítulo também está em inglês.

O trabalho foi apresentado na conferência ASONAM 2023 (IEEE/ACM International Conference on Advances in Social Networks Analysis and Mining), realizada em Kuşadasi, Turquia, em novembro de 2023. O artigo é de autoria de Braully Rocha da Silva, Erika Morais Martins Coelho, Hebert Coelho da Silva e Fábio Protti.

5.1 Previous results

In (Kempe et al. 2003; Chen et al. 2009), greedy algorithms for the target set problem are described. With slight variations from each other, such heuristics choose at each iteration the next available node of maximum degree. Some formulations with meta-heuristics have also been proposed (Wang et al. 2014).

The well-known heuristics by (Shakarian et al. 2013) and (Cordasco et al. 2018) use simple and scalable algorithms, based on graph decomposition strategies, as the target set is built. Both present good performances for large graphs, such as social networks.

5.1.1 Our results

Considering the majority target set problem, we realize that the heuristics in (Shakarian et al. 2013) and (Cordasco et al. 2018) do not perform well. They are slower and generate lower quality solutions than those in (Kempe et al. 2003; Chen et al. 2009). In addition, the heuristic in (Cordasco et al. 2018) does not perform well when the activation function is a percentage of neighbors.

We evaluated parameters for a greedy heuristic, which maximizes the performance for the majority target set. We also identified a parameter that greatly improves the results when compared with the heuristics in (Kempe et al. 2003; Shakarian et al. 2013; Cordasco et al. 2018).

We repeated the experiments of the abovementioned heuristics and compared the results with our approach. We obtained better results regarding solution quality and execution time for the majority target set problem.

We also performed experiments for the target set problem with activation functions ranging from 10% to 70% of the node degree. This kind of experiment had already been performed in (Shakarian et al. 2013), but not repeated in (Cordasco et al. 2018). In this variant, our greedy heuristic also obtains better results than both.

5.2 Preliminaries and Definitions

A social network is represented by a graph G , its individuals are the nodes in $V(G)$, and its relationships are the edges in $E(G)$. Let v be a node of $V(G)$. Its neighbors form the set $N(v)$, the degree of v is $d(v) = |N(v)|$, the degree of v in S is $d_S(v) = |N(v) \cap S|$, the open neighborhood of v is $N(v) = \{w \in V(G) | vw \in E(G)\}$, and the value of its threshold function is $f(v)$.

Given a subset $S \subseteq V(G)$, the *activation process* is given by the sequence $I^p[S]$ where $I^0[S] = S$, $I^1[S] = I[S] \cup \{v \in V | d_\rho(v) \geq f(v)\}$, and $I^p[S] = I[I^{p-1}]$ for $p \geq 2$. When for some p we have $I^q[S] = I^p[S]$ for all $q \geq p$, the stabilization of the activation process occurs, i.e., the process stops.

According to the problem's specification, there are different threshold functions for the nodes; in this work we will only discuss the majority function: $f(v) = \lceil \frac{d(v)}{2} \rceil$.

Consider the graph G in Figure 5.1 and the subset $S_0 = \{4, 5, 8, 9\}$. Since G is a 3-regular graph, $f(v) = \lceil \frac{d(v)}{2} \rceil = 2$. At each step, we add the not-yet-influenced nodes that have exceeded the value of the threshold function, as follows:

- $I^0[S_0] = S_0 = \{4, 5, 8, 9\}$
- $I^1[S_0] = I[S_0] = \{0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- $I^2[S_0] = I[I^1[S_0]] = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

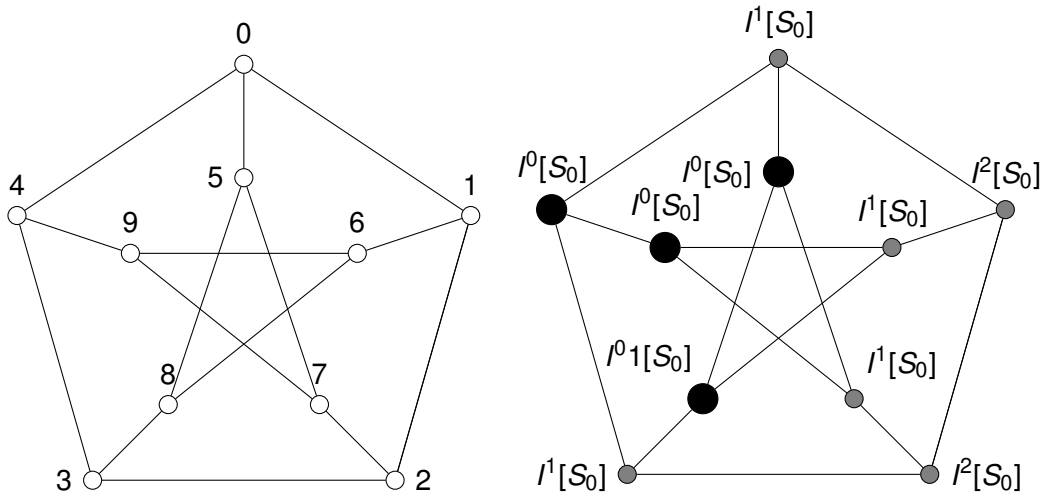


Figura 5.1: Petersen graph and its activation process in majority target set selection

- $I^3[S_0] = I^2[S_0] = I^1[S_0] = I^0[S_0] = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Since $I^3[S_0] = V(G)$, S_0 is indeed a set that has activated all nodes of the graph, i.e., it is a target set.

In the graph of Figure 5.1, observe that there are target sets of cardinality smaller than $|S_0|$, for example $S_1 = \{4, 7, 8\}$.

5.3 Algorithm

We propose a generic greedy algorithm that receives as input a graph $G = (V, E)$, a set of thresholds $t(v)$ for each node $v \in V$, and a precedence order p of the parameters, to evaluate which node is chosen at each iteration.

The function $GREATER(x, y, p)$ evaluates whether the parameters of x are greater than those of y , according to the precedence determined by p . For example, let $x = [degree = 3, delta = 2, distDelta = 1]$ and $y = [degree = 3, delta = 1, distDelta = 2]$. If $p = [degree, delta]$ then $GREATER(x, y, p) = False$, but if $p = [degree, distDelta]$ then $GREATER(x, y, p) = True$.

At the end of each iteration, the node with the maximum evaluation given by the $GREATER$ function is added to the set S . This cycle repeats until all nodes of the graph are influenced. At the end, the algorithm returns a set S that is a majority target set.

5.3.1 Parameter selection

Which combination of parameters produces smaller target sets? To answer this question, we generated a random database with node sizes from 50 to 150, and percentages from 0.1 to 0.9, tested with all combinations of size up to two, for all generated

Algoritmo 5.1: GenericGreedy**Entrada:** $G = (V, E)$, Thresholds $t(v)$ for $v \in V$, precedence of parameters**Saída:** Majority Target Set S

```

1   $S = \emptyset$ 
2   $C = \emptyset$ 
3  enquanto  $|C| \leq |V|$  faça
4       $v = \emptyset$ 
5       $maxDif\Delta = \emptyset$ 
6       $A = V \setminus C$ 
7      para cada  $u \in A$  faça
8           $uC = I^*[S \cup \{u\}]$ 
9           $u\Delta = uC \setminus C$ 
10          $uDif\Delta = \sum_{i \in u\Delta} (t(i) - d_C(i))$ 
11         se  $v = \emptyset \vee uDif\Delta > maxDif\Delta$  então
12              $v = u$ 
13              $maxDif\Delta = uDif\Delta$ 
14         fim
15      $A = A \setminus u\Delta$ 
16 fim
17  $S = S \cup \{v\}$ 
18  $C = I[S]$ 
19 fim
20 para cada  $v \in S$  faça
21     se  $d_S(v) \geq f(v)$  então
22          $S \leftarrow S \setminus \{v\}$ 
23     fim
24 fim
25 retorna  $S$ 

```

parameters, and compared the results with the algorithms in (Shakarian et al. 2013) and (Cordasco et al. 2018).

Table 5.1 shows the results for the parameters that did better than (Shakarian et al. 2013; Cordasco et al. 2018). We chose the parameter *difDelta* because it appears in the list of best results for percentage 50% (column “0.5”) and the maximum sum of best results than the reference heuristics.

We can now build an optimized algorithm for the *difDelta* parameter. Despite the good results, this algorithm can be computationally expensive and have poor time performance. However, we can improve the execution time with caching and some pruning in the search for the best vertices.

The values of *difDelta*(v) may be cached for the next iteration if v and none of its neighbors were contaminated, or partially contaminated, by the best vertex in the previous iteration. Finally, we can perform pruning on the evaluation of the vertices at

Tabela 5.1: Result for exploration parameters

Algoritmo	percentage of neighbors								Total
	0.5	0.1	0.2	0.3	0.6	0.7	0.8	0.9	
delta-difDelta	101	234	171	0	117	117	127	127	994
delta-difficulty	99	234	171	0	117	120	128	127	996
delta-dist	100	243	179	149	74	0	0	0	745
delta-distDelta	101	243	179	149	77	0	0	0	749
delta-partial	118	245	188	0	126	115	116	110	1018
difDelta	112	234	168	0	125	133	140	140	1052
DifDelta-degDelta	105	234	171	0	123	127	137	142	1039
difDelta-delta	103	234	170	0	122	129	136	139	1033
difDelta-difficulty	102	234	169	0	120	136	140	144	1045
difDelta-dist	100	234	166	0	92	110	136	144	982
difDelta-distDelta	106	234	169	0	97	119	140	155	1020
difDelta-grau	105	234	171	0	123	127	137	142	1039
difDelta-partial	107	234	170	0	125	133	139	142	1050
distDelta	122	243	180	152	0	0	0	0	697
DistDelta-degDelta	114	243	180	152	0	0	0	0	689
distDelta-delta	114	243	179	152	0	0	0	0	688
distDelta-difDelta	108	247	187	148	0	0	0	0	690
distDelta-difficulty	103	247	187	148	0	0	0	0	685
distDelta-dist	120	243	180	152	0	0	0	0	695
distDelta-grau	114	243	180	152	0	0	0	0	689
distDelta-partial	112	243	180	153	0	0	0	0	688

each iteration, any vertex that has been contaminated by another vertex in the process of evaluating the best vertex in the current iteration can be discarded from the evaluation. For example, we are in iteration 1 of the algorithm and we have v, u, \cdot, w vertices not activated, we compute then $difDelta(v)$ if $u \in \Delta(v)$ we can discard the evaluation of u because $\Delta(u) \subseteq \Delta(v)$, consequently $difDelta(u) \leq difDelta(v)$.

With these optimizations, we implemented a new heuristic and compared our results with the algorithms in (Shakarian et al. 2013) and (Cordasco et al. 2018), using the same social network datasets of their research.

5.4 Results

To compare our results with previous studies, we used a dataset of random graphs and a dataset of real social network graphs.

The random graph dataset is composed of (Gilbert 1959) graphs, from 5 to 100 nodes and density ranging from 0.1 to 0.9. This dataset was used to find the best choice of parameters for the greedy heuristic.

Tabela 5.2: Result for Majority TSS

Grafo	n	m	TSSC		TIP-Dec.		GreedyDifTotal		
			TSS	T(m)	TSS	T(m)	TSS	T(m)	$\Delta\%$
BlogCatalog	2093195	88784	977	43	4598	44	353	22	64
BlogCatalog2	1668647	97884	527	44	4391	46	175	23	67
BlogCatalog3	333983	10312	274	44	834	46	127	23	54
BuzzNet	2763066	101168	1445	45	7080	47	186	24	87
Delicious	145049	103144	1725	46	4572	48	743	24	57
Digg	2011447	116893	5554	2	5402	2	2905	4	46
Douban	327094	154907	5155	48	32996	50	3657	27	29
Flickr	5899882	80513	4352	3	6671	3	2984	42	31
Foursquare	1996522	106218	36	5	2074	413	18	42	50
Hyves	2777176	1402611	50708	297	329883	714	22503	216	56
Last.fm	1043029	108493	5913	49	6534	52	1934	33	67
LiveJournal	12816184	2238731	60523	1315	150551	1796	13045	927	78
Livemocha	2193083	104438	3227	51	11279	53	1226	41	62
YouTube	76765	15088	867	1315	1439	1796	365	928	58
YouTube2	2990443	1138499	49861	1533	137315	2025	36807	1000	26
ca-AstroPh	198050	18772	2476	51	2569	53	1523	42	38
ca-CondMat	93439	23133	3586	51	4252	53	2617	42	27
ca-GrQc	14484	5242	1060	51	1173	53	940	42	11
ca-HepPh	118489	12008	1894	51	1911	53	1409	42	26
ca-HepTh	25973	9877	1552	51	1796	53	1234	42	20
Tempo total(min)			5095		7400		3586		30

We performed two sets of experiments with the social network datasets.

In the first experiment we used only the majority target set, with all the graphs used by (Cordasco et al. 2018) plus some used only by (Shakarian et al. 2013), available at (Leskovec e Krevl 2014; Zafarani e Liu 2009). In table 5.2 we show the results of this experiment. Our heuristic produced lower values than the best results obtained by (Cordasco et al. 2018; Shakarian et al. 2013) and in less time, on average 30%. For example, for the social network graph Buzznet(Leskovec e Krevl 2014) the proposed heuristic found a target set of size 186, while the best result between (Shakarian et al. 2013) and (Cordasco et al. 2018) was 1445, which gives an improvement of 87%.

In Table 5.2 we show the results of the first experiment for the majority target set. We can observe that the results achieved by the proposed heuristic are better than the results obtained in (Shakarian et al. 2013) and (Cordasco et al. 2018), spending less computational time.

The results of the second experiment are shown in Figures 2 to 16. It was run on the intersection of the datasets from (Cordasco et al. 2018) and (Shakarian et al. 2013) (fourteen instances), and using a threshold function ranging from 10% to 70% of the number of neighbors. Figure 5.2 shows that the proposed heuristic was in average 30%

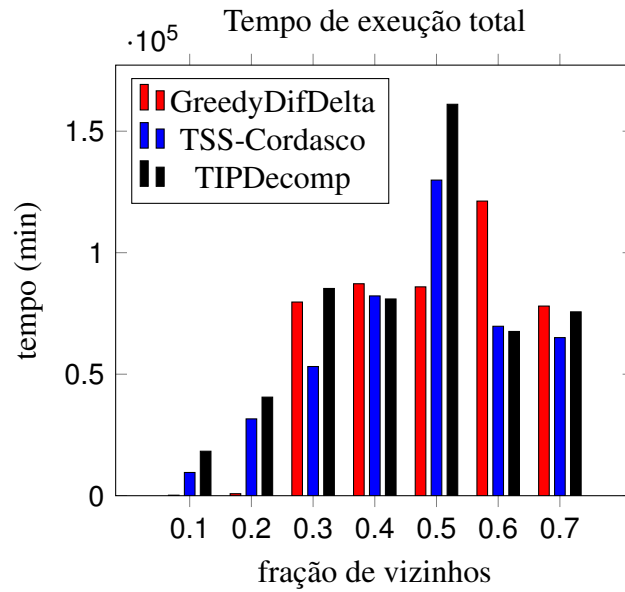


Figura 5.2: Total execution time

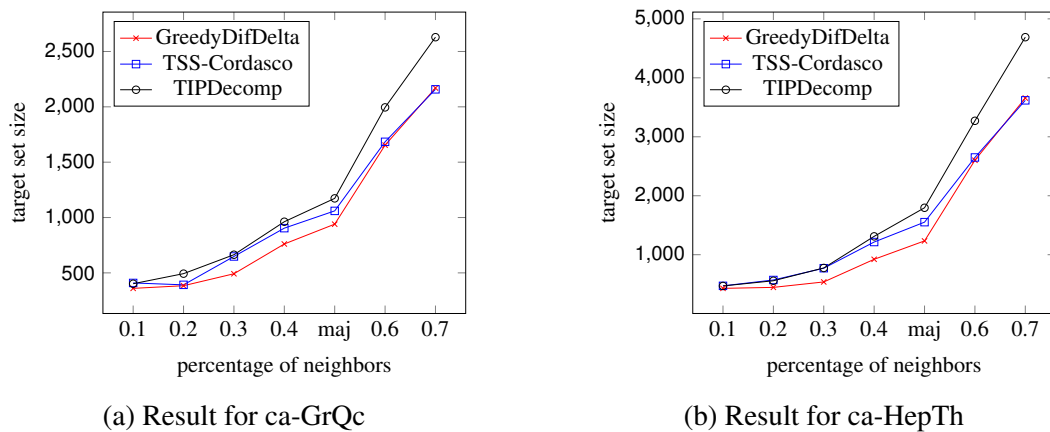
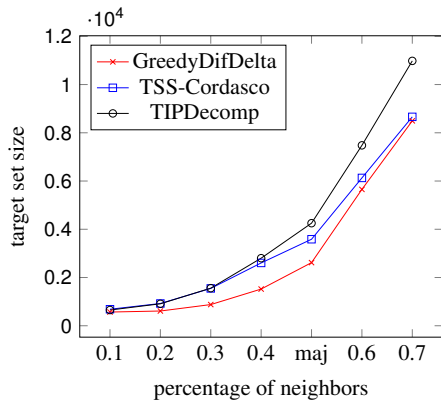


Figura 5.3: Results for ca-GrQc and ca-HepTh datasets

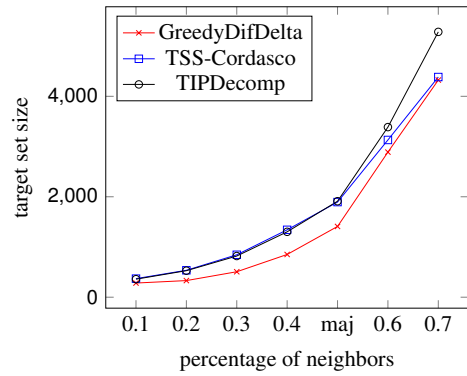
faster. Moreover, it presented better solution values in all the fourteen instances (Figures 2 to 15).

5.5 Conclusions

The heuristic proposed in this work proved to be faster and achieved better results than related works. It basically explores greedy strategies, which can occasionally lead to locally optimal solutions. As a next step, we can incorporate strategies based on random choices and simulated annealing, in order to escape from local optima.

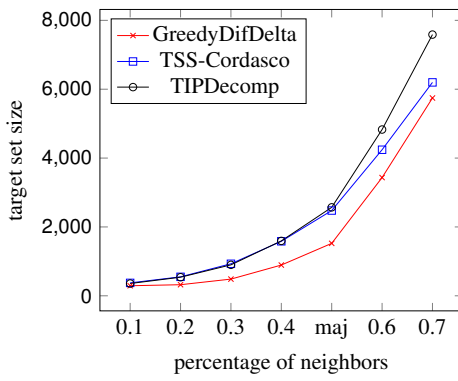


(a) Result for ca-CondMat

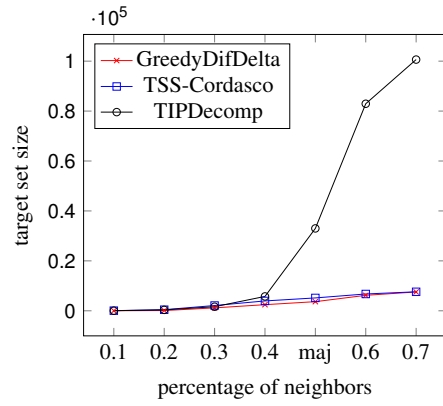


(b) Result for ca-HepPh

Figure 5.4: Results for ca-CondMat and ca-HepPh datasets

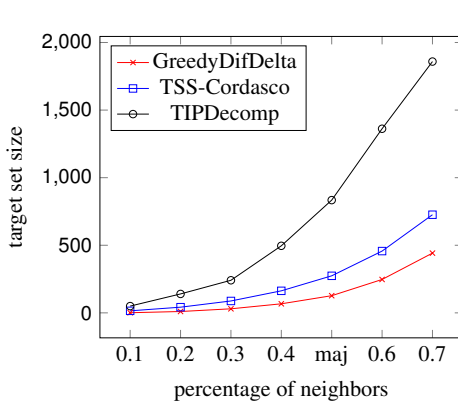


(a) Result for ca-AstroPh

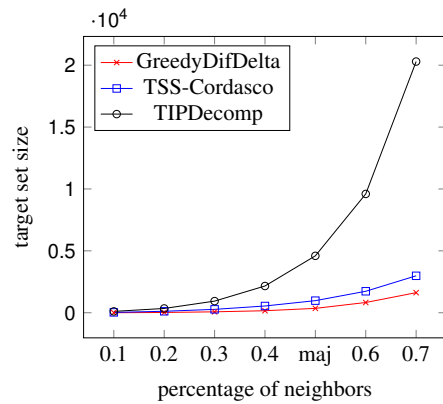


(b) Result for Douban

Figure 5.5: Results for ca-AstroPh and Douban datasets

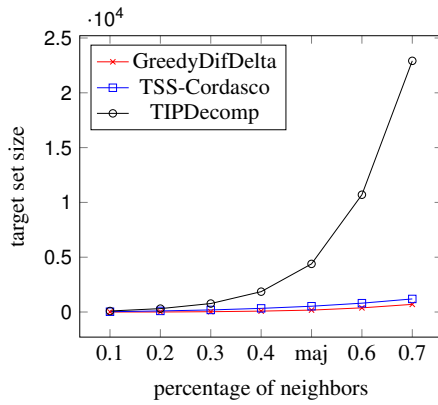


(a) Result for BlogCatalog3

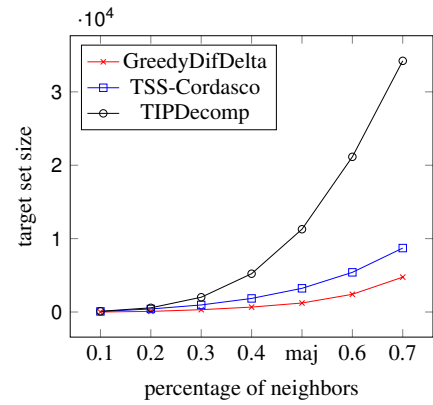


(b) Result for BlogCatalog

Figure 5.6: Results for BlogCatalog3 and BlogCatalog datasets

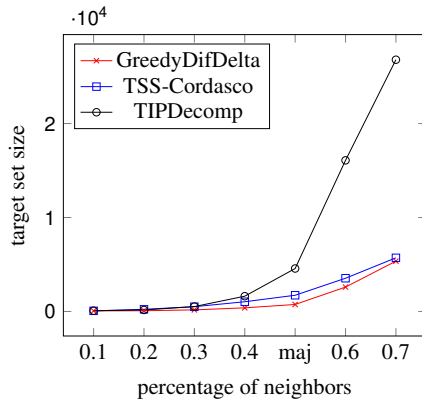


(a) Result for BlogCatalog2

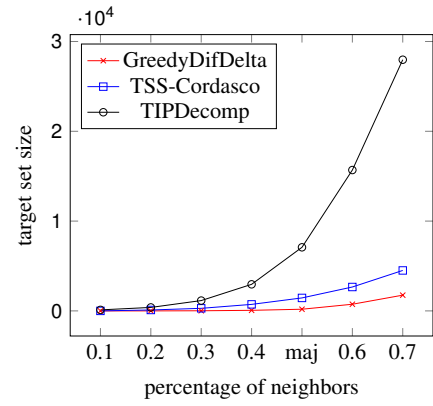


(b) Result for Livemocha

Figure 5.7: Results for BlogCatalog2 and Livemocha datasets

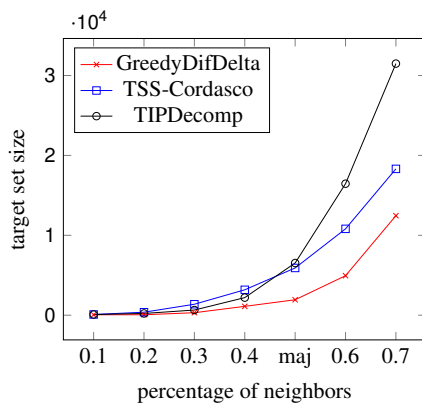


(a) Result for Delicious

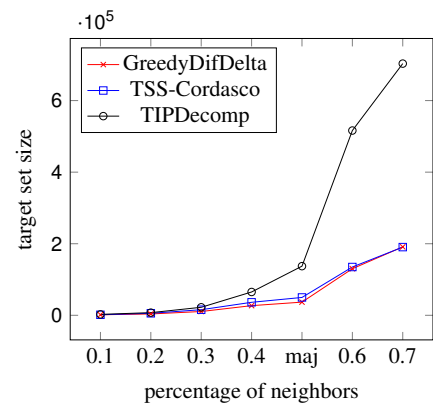


(b) Result for BuzzNet

Figure 5.8: Results for Delicious and BuzzNet datasets



(a) Result for Last.fm



(b) Result for YouTube2

Figure 5.9: Results for Last.fm and YouTube2 datasets

Uma Heurística Gulosa para Seleção de Conjunto Alvo em Redes Sociais

Neste capítulo apresentamos na íntegra os resultados do artigo científico intitulado “Uma Heurística Gulosa para Seleção de Conjunto Alvo em Redes Sociais” (Silva et al. 2023), que foi submetido e aceito para publicação na conferência SBPO 2023 (Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional). A sessão de introdução foi adaptada para o formato da tese, mas o restante do artigo está inalterado. Trata-se de um trabalho de continuação do artigo científico apresentado no capítulo 5, com a abordagem utilizada para encontrar um parâmetro ideal para a heurística gulosa do problema do conjunto alvo majorado, construímos uma heurística gulosa para o problema do conjunto alvo com função limite constante k . A heurística proposta apresentou resultados melhores que os trabalhos relacionados, tanto em instâncias de redes sociais reais, como em instâncias pequenas geradas aleatoriamente. Apesar de não ser um trabalho diretamente relacionado com a convexidade em grafos, o problema do conjunto alvo é um modelo clássico de propagação de influência, que pode ser modelado através do ponto de vista da convexidade em grafos.

6.1 Algoritmo

Construímos um algoritmo guloso, que busca encontrar o menor conjunto alvo possível. Para isso, o algoritmo inicia com um conjunto de vértices S vazio, e a cada iteração adiciona o melhor vértice v que não está em S , terminando quando $I^*[S] = V(G)$, ou seja, quando o conjunto S é um conjunto alvo.

Ao final da construção do conjunto alvo, o algoritmo executa uma função de refinamento, fazendo uma poda nos vértices de S que podem ser ativados por outros vértices em S , assim produzindo um conjunto alvo minimal. Essa poda ao final não impacta significativamente a performance do algoritmo, pois é feita ao final da construção do conjunto alvo e tem complexidade $O(|S|)$.

A heurística proposta por (Cordasco et al. 2018) e (Shakarian et al. 2013) realiza uma decomposição do grafo à medida que vão construindo o conjunto alvo; essa também é uma estratégia de poda, porém feita durante a construção. Essa estratégia se mostra desvantajosa caso o conjunto alvo seja muito pequeno em relação ao tamanho do grafo, pois o algoritmo passará a maior parte do tempo fazendo a decomposição do grafo, e não construindo o conjunto alvo.

Três critérios são importantes na escolha do melhor vértice $u \in V(G)$ a ser incluído na construção do conjunto alvo; serão chamados de Δ , *dificuldade* e *dist*. O critério Δ representa a quantidade de novos vértices que serão ativados pela inclusão de um novo vértice v , isto é, $\Delta(u) = |I^*[S \cup \{u\}] \setminus I^*[S]|$. A *dificuldade* é a quantidade de vizinhos que faltam para um certo vértice ser ativado, ou seja, $dificuldade(u) = k - d_u(I^*[S])$. O critério *dist* é a diferença entre o grau do vértice v e o valor $f(v)$, descontada a quantidade de vizinhos já ativados, isto é, $dist(u) = (d(u) - k) - d_u(I^*[S])$. O critério *dist* é o mesmo priorizado pela função de poda do algoritmo (Shakarian et al. 2013), por isso optamos por manter o mesmo nome.

O melhor vértice v escolhido a cada iteração para compor o conjunto alvo é aquele que maximiza a expressão $\sum_{u \in \Delta(v)} = dist(u)$. E', em caso de empate, a escolha é pelo vértice que maximiza $\sum_{u \in \Delta(v)} = dificuldade(u)$ (linhas 14-22).

Agora que descrevemos o critério de escolha do melhor vértice, descreveremos um pouco mais o algoritmo. Os grafos das redes sociais em geral são grafos desconexos, contendo mais de uma componente conexa. Logo, o algoritmo irá procurar por um conjunto alvo em cada componente conexa para montar um conjunto alvo de G . Logo, utilizaremos a função $CC(G)$ que retorna as componentes conexas de um grafo G . O algoritmo recebe como entrada um grafo G e um inteiro $k = f(v)$.

- O algoritmo inicia com um conjunto de vértices S vazio (linha 1) e utiliza a função $CC(G)$ para identificar e iterar pelas componentes conexas G' de G (linha 2);
- Para cada $G' \in CC(G)$ o algoritmo construirá um conjunto alvo S' de G' ;
- Os vértices serão ordenados pelo valor decrescente de seus graus (linha 3);
- Os vértices v tal que $d(v) < f(v)$ serão incluídos em S' (linhas 4-6);
- O conjunto S' será expandido por adições sucessivas de melhores vértices, até que ele seja um conjunto alvo (linha 9-27);
- Ao final desse processo, o conjunto S' passará por um refinamento, para remover vértices redundantes (linhas 28-32).

Podemos ver no Algoritmo 6.1 o pseudo-código que descrevemos até aqui. Esse algoritmo é uma heurística que determina um conjunto alvo, considerando $f(v)$ igual a um valor constante k .

Algoritmo 6.1: *DistDifDelta* – *refine(G)***Entrada:** G e k **Saída:** Um conjunto alvo S

```

1  $S \leftarrow \emptyset$ 
2 para cada  $G' \in CC(G)$  faça
3    $O \leftarrow \text{ordenarGrauDescendente}(V(G'))$ 
4    $S' \leftarrow \emptyset$ 
5   para cada  $v \in V(G') \mid d(v) < k$  faça
6      $S' \leftarrow \{v\} \cup S'$ 
7   fim
8    $H \leftarrow I^*[S']$ 
9   enquanto  $|H| < |V(G')|$  faça
10      $v \leftarrow \emptyset$ 
11      $dist\Delta \leftarrow 0$ 
12      $dif\Delta \leftarrow 0$ 
13      $C \leftarrow O \setminus H$ 
14     para cada  $w \in C$  faça
15        $w\Delta \leftarrow I^*[S' \cup \{w\}] \setminus H$ 
16        $wdist\Delta \leftarrow \sum_{i \in w\Delta} ((d(i) - k) - d_H(i))$ 
17        $wdif\Delta \leftarrow \sum_{i \in w\Delta} (k - d_H(i))$ 
18       se  $wdist\Delta > dist\Delta \vee (wdist\Delta = dist\Delta \wedge wdif\Delta > dif\Delta)$  então
19          $v \leftarrow w$ 
20          $dist\Delta \leftarrow wdist\Delta$ 
21          $dif\Delta \leftarrow wdif\Delta$ 
22       fim
23      $C \leftarrow C \setminus w\Delta$ 
24     fim
25      $S' \leftarrow S' \cup \{v\}$ 
26      $H \leftarrow I^*[S']$ 
27   fim
28   para cada  $u \in S'$  faça
29     se  $|I^*[S' \setminus \{u\}]| = |V(G')|$  então
30        $S' \leftarrow S' \setminus \{u\}$ 
31     fim
32   fim
33    $S \leftarrow S \cup S'$ 
34 fim
35 retorna  $S$ 

```

6.1.1 Algoritmo Exaustivo

Implementamos um modelo de programação linear inteira utilizando o *CPLEX* para o problema da seleção de conjunto alvo. Porém, esse modelo se apresentou muito lento e inviável para o banco de dados de grafos que os autores pretendiam estudar. (Shakarian et al. 2013) também propuseram um modelo de programação linear inteira para o problema, que também não obteve bons resultados. (Cordasco et al. 2018) também implementou um modelo de programação linear e precisou de vários dias para encontrar o resultado ótimo para 17 grafos aleatórios de 30 e 50 vértices. Logo, não aprofundamos muito na análise comparativa com resultados exatos.

Desenvolvemos então um algoritmo exato com algumas otimizações, que para alguns casos é até cinquenta vezes mais rápido que o modelo de programação linear inteiro proposto por ambos. Conseguimos executar o algoritmo exato para limites $1 \leq f(v) \leq 4$ em grafos de até 100 vértices, com densidade p variando na faixa $0,1 \leq p \leq 0,9$, em um tempo razoável de 3h.

Por se tratar de um problema de minimização, intuitivamente em um processo algorítmico de força bruta começamos por subconjuntos de vértices com as menores cardinalidades, testamos se os mesmos são conjuntos alvo, e em caso de insucesso, aumentamos o tamanho dos subconjuntos até encontrar um conjunto alvo de cardinalidade mínima para G . Evidentemente, esse processo nos leva a um algoritmo com complexidade exponencial, por testar várias combinações de subconjuntos de $V(G)$.

Na nossa implementação, partimos do pressuposto que as heurísticas erram por muito pouco em relação ao resultado ótimo. Então, em vez de procurar uma solução começando por subconjuntos de vértices com a menor cardinalidade, utilizamos a melhor solução dos Algoritmos 6.1 e (Cordasco et al. 2018) como ponto de partida. Como os Algoritmos 6.1 e (Cordasco et al. 2018) fornecem um inteiro k tal que o grafo G possui um conjunto alvo de cardinalidade k , iniciaremos os testes com subconjuntos de $V(G)$ com cardinalidade $k - 1$. Caso nenhum dos subconjuntos com essa cardinalidade seja um conjunto alvo então encerramos a busca com a resposta que a heurística havia fornecido. Caso exista algum conjunto alvo de cardinalidade $k - 1$, então significa que os algoritmos heurísticos não forneceram uma solução ótima, e o algoritmo deve continuar a busca por conjuntos alvos de cardinalidade $k - 2$. Caso não exista conjunto alvo de cardinalidade $k - 2$, então $k - 1$ é o número que buscamos e o algoritmo é encerrado, caso contrário continuamos a busca por $k - 3$. e assim por diante.

O Algoritmo 6.2 é um algoritmo exato que utiliza heurísticas para reduzir o espaço de busca, auxiliando na determinação de um conjunto alvo de cardinalidade mínima.

É fácil verificar que o Algoritmo 6.2 está correto, porque o mesmo realiza um processo de força bruta. Para grafos com até 20 vértices tivemos bons resultados.

Algoritmo 6.2: *ExaustivoTSS(G, k)*

Entrada: grafo G , k -limite
Saída: inteiro $tEncontrado$, tamanho do menor conjunto alvo de G para k -limite

```

1  $tEncontrado \leftarrow \text{Min}(\text{DistDifDelta-refine}(G), \text{TSSC}(G))$ 
2  $tBuscaAtual \leftarrow tEncontrado - 1$ 
3  $fim \leftarrow \mathbf{F}$ 
4 enquanto  $\neg fim \wedge tEncontrado \geq 0$  faça
5   se  $\text{temConjuntoAlvoKLimiteTamanhoT}(G, k, tBuscaAtual)$  então
6      $tEncontrado \leftarrow tBuscaAtual$ 
7      $tBuscaAtual \leftarrow tEncontrado - 1$ 
8   fim
9   senão
10     $fim \leftarrow \mathbf{V}$ 
11  fim
12 fim
13 retorna  $tEncontrado$ 

```

Conseguimos até mesmo esgotar algumas classes com todos os grafos até 20 vértices disponíveis em (Brinkmann et al. 2013). Para auxiliar outros estudos, disponibilizamos também uma implementação de referência desse algoritmo em (Silva 2023).

6.2 Resultados e discussões

Comparamos os resultados da nossa heurística com as seguintes heurísticas propostas:

- **Grau-refine** (Kempe et al. 2003): Nessa heurística a escolha de um novo vértice a ser incluído no conjunto alvo é sempre o vértice de maior grau.
- **TIPDecomp** (Shakarian et al. 2013): Nessa abordagem, o grafo é decomposto, excluindo vértices até que os vértices restantes sejam um conjunto alvo.
- **TSSC** (Cordasco et al. 2018): Neste algoritmo o grafo é decomposto, eliminando vértices até obter um grafo vazio. A medida que os vértices são retirados, são testados para compor o conjunto alvo.
- **Delta-Parcial** (Kempe et al. 2003; Dinh et al. 2014; Panizzi et al. 2017): A cada iteração escolhe o vértice que contamina o maior número de novos vértices, e em caso de empate escolhe aquele que contamina mais vértices parcialmente.

Como na nossa heurística fazemos uma poda ao final do processamento, para sermos justos aplicamos às heurísticas Delta-Parcial e Grau-refine o mesmo refinamento do resultado final que usamos na nossa heurística. Não o aplicamos nas heurísticas TSSC e

TIPDecomp, pois elas já fazem um refinamento prévio do grafo na construção do conjunto alvo.

Utilizamos dois bancos de grafos para realizarmos os testes e comparações: um banco de grafos randômicos e o mesmo banco de grafos de redes sociais de trabalhos anteriores.

Disponibilizamos em (Silva 2023) os resultados da execução, uma cópia dos bancos de grafos e os códigos implementados, juntamente com alguns *scripts* que facilitam a execução.

6.2.1 Grafos randômicos

Geramos um banco de grafos randômicos, com quantidades de vértices variando de 5 até 100, com incrementos de 5 em 5. As arestas aleatórias foram geradas com probabilidade $0.1 \leq p \leq 0.9$, com incremento de 0.1, conforme o modelo de (Gilbert 1959). Ao todo são 180 grafos: 9 grafos com 5 vértices, sendo um para cada probabilidade, 9 grafos com 10 vértices, sendo um para cada probabilidade, e assim por diante.

Nesse banco de grafos, executamos um algoritmo exaustivo (exato), para determinar valores de referência para a comparação com os resultados dos algoritmos heurísticos. Dado a complexidade do problema e o tempo de execução, até a escrita deste artigo só conseguimos executar o algoritmo exato para os grafos com valores $f(v) \in \{1, 2, 3, 4\}$. Ao todo foram realizadas 720 execuções para cada algoritmo, sendo 180 grafos com 4 limites de contaminação diferentes.

No Quadro 6.1 apresentamos a quantidade de grafos para os quais cada heurística foi executada. A segunda coluna apresenta a quantidade de grafos cuja execução retornou a solução ótima. A terceira coluna contém a quantidade de grafos cuja execução retornou valores diferentes do ótimo. As colunas seguintes, com exceção da última, contêm a quantidade de grafos cuja execução retornou um conjunto alvo respectivamente com 1, 2, 3, 4 e 5 unidades a mais que o ótimo. A última coluna exibe o tempo total de execução de cada algoritmo.

Nosso algoritmo acertou mais vezes a solução ótima em comparação com as demais heurísticas. E mesmo para os casos em que não acertou, ficou mais próximo da solução ótima. Nossa heurística e a de (Cordasco et al. 2018) foram as únicas em que a diferença da solução ótima foi no máximo de duas unidades.

Algoritmo	Resultado							Tempo Total(ms)
	Ótimos	Não ótimos					Total	
		Delta						
		1	2	3	4	5		
Grau-refine	649	71	45	9	9	5	3	223
TIPDecomp	675	45	30	12	3			257
Delta-Parcial-refine	681	39	29	7	3			369
TSS-Cordasco	685	35	31	4				273
DistDifDelta-refine	691	29	25	4				527
Exaustivo (Exato)	720							~03h

Tabela 6.1: Resumo de resultados para grafos randômicos.

6.2.2 Redes sociais reais

Comparamos nossos resultados com os mesmos bancos de grafos de estudos anteriores.

Em (Shakarian et al. 2013; Cordasco et al. 2018) foram utilizados dados de redes sociais reais, disponíveis em (Leskovec e Krevl 2014; Zafarani e Liu 2009). Usamos os grafos do banco de grafos que estão na intersecção desses dois trabalhos, a saber: ca-AstroPh, ca-CondMat, ca-GrQc, ca-HepPh e ca-HepTh, BlogCatalog, BlogCatalog2, BlogCatalog3, BuzzNet, Delicious, Douban, Last.fm e Livemocha. São grafos que representam redes sociais variando de 5 mil a 1 milhão de vértices.

Executamos nosso algoritmo e comparamos nossos resultados com o melhor resultado dentre os trabalhos relacionados, já citados anteriormente. Executamos com $f(v)$ variando de 1 até 5. Apresentamos o resultado nos quadros 6.2, 6.3, 6.4, 6.5 e 6.6, cada um para um valor determinado de $f(v)$. Para cada algoritmo testado, apresentamos o tempo de execução em minutos ($T(m)$) e a cardinalidade do conjunto alvo encontrado ($|TSS|$). Na última coluna apresentamos a melhor solução entre todos os algoritmos heurísticos (*Melhor*). Nas últimas linhas apresentamos a quantidade de vezes em que cada algoritmo retornou a melhor solução (*Total melhor*) e a média da diferença entre a melhor solução e a solução encontrada pelo algoritmo (Média Δ melhor).

Podemos ver que para $f(v) = 1$ nossa heurística sempre retorna a solução ótima, empatando com a heurística *Delta-parcial-refine* no tempo de execução e no tamanho da solução. Para $f(v) = 2$ tivemos a melhor solução em 13 dos grafos, enquanto a heurística de (Cordasco et al. 2018) acertou em 11 dos grafos. Quanto ao tempo de execução, nossa heurística foi 223 vezes mais rápida. Para $f(v) = 3$ tivemos a melhor solução em 12 dos grafos e o tempo de execução foi 73 vezes menor que a segunda melhor solução (Cordasco et al. 2018), que acertou 8 dos casos. Para $f(v) = 4$ temos uma repetição do

Grafo	Grau-ref		TIPDec.		Delta-p-ref		TSSC		DDDR		Melhor
	TSS	T(m)	TSS	T(m)	TSS	T(m)	TSS	T(m)	TSS	T(m)	
BlogCatalog	1	0,0	1	1,0	1	0,0	1	90,4	1	0,0	1
BlogCatalog2	1	0,0	1	2,0	1	0,0	1	93,8	1	0,0	1
BlogCatalog3	1	0,0	1	2,0	1	0,0	1	93,9	1	0,0	1
BuzzNet	6	0,1	6	3,6	6	0,1	6	96,9	6	0,1	6
Delicious	58870	0,1	58877	4,3	58870	0,1	58877	97,8	58870	0,1	58870
Douban	1	0,1	1	6,9	1	0,1	1	106,0	1	0,1	1
Last.fm	4596	0,1	4596	8,3	4596	0,1	4596	109,0	4596	0,1	4596
Livemocha	336	0,1	336	9,6	336	0,1	336	113,5	336	0,1	336
ca-AstroPh	290	0,1	298	9,7	290	0,1	298	113,5	290	0,1	290
ca-CondMat	567	0,1	594	9,7	567	0,1	594	113,6	567	0,1	567
ca-GrQc	355	0,1	380	9,7	355	0,1	380	113,6	355	0,1	355
ca-HepPh	278	0,1	291	9,7	278	0,1	291	113,6	278	0,1	278
ca-HepTh	429	0,1	453	9,7	429	0,1	453	113,6	429	0,1	429
Total tempo	0,8		86,1		1,1		1369,3		1,1		
Total melhor	13		7		13		7		13		
Média Δ melhor	0,0		17,3		0,0		17,3		0,0		

Tabela 6.2: Resultados para redes sociais e $f(v) = 1$

Grafo	Grau-ref		TIPDec.		Delta-p-ref		TSSC		DDDR		Melhor
	TSS	T(m)	TSS	T(m)	TSS	T(m)	TSS	T(m)	TSS	T(m)	
BlogCatalog	20290	0,1	20291	10,6	20290	0,1	20290	82,3	20290	0,3	20290
BlogCatalog2	27638	0,1	27638	11,7	27638	0,1	27638	82,4	27638	0,3	27638
BlogCatalog3	270	0,1	270	11,7	270	0,1	270	82,4	270	0,3	270
BuzzNet	7561	0,1	7561	12,8	7561	0,2	7561	82,4	7561	0,3	7561
Delicious	76693	0,1	76688	13,3	76681	0,2	76681	83,9	76681	0,3	76681
Douban	103158	0,2	103158	14,6	103158	0,2	103158	88,2	103158	0,4	103158
Last.fm	13465	0,2	13463	16,3	13460	0,2	13460	88,2	13460	0,4	13460
Livemocha	7182	0,2	7182	17,9	7182	0,2	7182	88,2	7182	0,5	7182
ca-AstroPh	1882	0,2	1868	17,9	1859	0,2	1859	88,2	1858	0,5	1858
ca-CondMat	3631	0,2	3608	17,9	3554	0,2	3554	88,2	3554	0,5	3554
ca-GrQc	1694	0,2	1690	17,9	1666	0,2	1665	88,2	1665	0,5	1665
ca-HepPh	2033	0,2	2019	17,9	2003	0,2	2003	88,2	2003	0,5	2003
ca-HepTh	2774	0,2	2742	17,9	2725	0,2	2724	88,3	2723	0,5	2723
Total tempo	2,0		198,6		2,3		1119,3		5,4		
Total melhor	6		5		10		11		13		
Média Δ melhor	32,6		16,9		1,3		1,0		0,0		

Tabela 6.3: Resultados para redes sociais e $f(v) = 2$

Grafo	Grau-ref		TIPDec.		Delta-p-ref		TSSC		DDDR		Melhor
	TSS	T(m)	TSS	T(m)	TSS	T(m)	TSS	T(m)	TSS	T(m)	
BlogCatalog	30769	0,2	30770	18,7	30769	0,2	30769	73,5	30769	0,6	30769
BlogCatalog2	40662	0,2	40662	19,6	40662	0,2	40662	74,1	40662	0,6	40662
BlogCatalog3	643	0,2	643	19,6	643	0,2	643	74,1	643	0,6	643
BuzzNet	19630	0,2	19630	20,7	19630	0,3	19630	74,2	19630	0,7	19630
Delicious	84508	0,2	84487	21,1	84480	0,3	84478	76,0	84477	0,7	84477
Douban	125197	0,2	125199	21,8	125197	0,3	125197	82,1	125197	0,8	125197
Last.fm	21539	0,3	21521	23,5	21516	0,3	21516	82,2	21516	1,4	21516
Livemocha	13605	0,3	13604	25,0	13603	0,3	13603	82,2	13603	1,5	13603
ca-AstroPh	3679	0,3	3631	25,1	3625	0,3	3624	82,2	3622	1,5	3622
ca-CondMat	7130	0,3	7026	25,1	6985	0,3	6970	82,2	6966	1,5	6966
ca-GrQc	2727	0,3	2702	25,1	2682	0,3	2679	82,2	2678	1,6	2678
ca-HepPh	3847	0,3	3815	25,1	3806	0,3	3799	82,3	3798	1,6	3798
ca-HepTh	4686	0,3	4632	25,1	4622	0,3	4614	82,3	4615	1,6	4614
Total tempo	3,3		295,5		3,7		1029,6		14,7		
Total melhor	5		3		7		8		12		
Média Δ melhor	55,9		14,7		7,5		1,8		1,0		

Tabela 6.4: Resultados para redes sociais e $f(v) = 3$

Grafo	Grau-ref		TIPDec.		Delta-p-ref		TSSC		DDDR		Melhor
	TSS	T(m)	TSS	T(m)	TSS	T(m)	TSS	T(m)	TSS	T(m)	
BlogCatalog	37618	0,3	37617	25,8	37616	0,3	37616	67,4	37616	1,7	37616
BlogCatalog2	48604	0,3	48604	26,6	48604	0,3	48604	68,3	48604	1,7	48604
BlogCatalog3	995	0,3	995	26,6	995	0,3	995	68,4	995	1,7	995
BuzzNet	23647	0,3	23647	27,9	23647	0,4	23647	68,4	23647	1,8	23647
Delicious	88739	0,3	88710	28,1	88702	0,4	88704	70,3	88702	1,9	88702
Douban	133846	0,4	133846	28,7	133846	0,4	133846	73,0	133846	1,9	133846
Last.fm	28702	0,4	28665	30,3	28655	0,4	28655	73,1	28654	2,6	28654
Livemocha	19346	0,4	19345	31,9	19345	0,4	19345	73,2	19345	2,8	19345
ca-AstroPh	5199	0,4	5147	31,9	5135	0,4	5131	73,2	5130	2,8	5130
ca-CondMat	10045	0,4	9857	31,9	9847	0,4	9817	73,2	9811	2,9	9811
ca-GrQc	3398	0,4	3348	31,9	3341	0,4	3332	73,2	3333	2,9	3332
ca-HepPh	5208	0,4	5158	31,9	5146	0,4	5143	73,2	5141	2,9	5141
ca-HepTh	5892	0,4	5853	31,9	5845	0,4	5837	73,2	5837	2,9	5837
Total tempo	4,7		385,4		5,2		928,4		30,5		
Total melhor	4		5		7		8		12		
Média Δ melhor	64,3		16,5		10,7		2,4		1,0		

Tabela 6.5: Resultados para redes sociais e $f(v) = 4$

Grafo	Grau-ref		TIPDec.		Delta-p-ref		TSSC		DDDR		Melhor
	TSSI	T(m)	TSSI	T(m)	TSSI	T(m)	TSSI	T(m)	TSSI	T(m)	
BlogCatalog	42444	0,4	42441	32,6	42440	0,5	42440	60,4	42440	3,1	42440
BlogCatalog2	54171	0,4	54171	33,4	54171	0,5	54171	61,7	54171	3,1	54171
BlogCatalog3	1370	0,4	1369	33,4	1369	0,5	1369	61,7	1369	3,1	1369
BuzzNet	27243	0,4	27242	34,5	27242	0,5	27242	61,8	27242	3,2	27242
Delicious	91473	0,4	91433	34,8	91426	0,5	91423	63,8	91424	3,3	91423
Douban	138188	0,5	138187	35,2	138187	0,5	138187	66,6	138187	3,3	138187
Last.fm	35092	0,5	35045	36,6	35032	0,5	35030	66,8	35030	4,2	35030
Livemocha	24467	0,5	24466	38,3	24466	0,5	24466	66,9	24466	4,4	24466
ca-AstroPh	6365	0,5	6325	38,3	6311	0,5	6302	66,9	6302	4,4	6302
ca-CondMat	12246	0,5	12043	38,4	12051	0,5	12008	66,9	12006	4,5	12006
ca-GrQc	3782	0,5	3756	38,4	3749	0,5	3744	66,9	3744	4,5	3744
ca-HepPh	6094	0,5	6048	38,4	6038	0,5	6031	66,9	6029	4,6	6029
ca-HepTh	6703	0,5	6655	38,4	6642	0,5	6636	66,9	6635	4,6	6635
Total tempo	6,0		470,5		6,6		844,1		50,2		
Total melhor	1		5		6		10		12		
Média Δ melhor	49,5		17,1		11,4		1,7		1,0		

Tabela 6.6: Resultados para redes sociais e $f(v) = 5$

caso anterior, porém com tempo de execução 20 vezes menor. Para $f(v) = 5$ acertamos em 12 grafos com a melhor solução enquanto que (Cordasco et al. 2018) acertou em 10 grafos com tempo de execução 16 vezes mais lento que o nosso algoritmo.

Também podemos ver que, nos poucos casos em que não obtivemos a melhor solução, ficamos a uma unidade de distância da melhor solução ótima. Obtivemos a maior quantidade de acertos da melhor solução em todos os casos, e também a melhor média de diferença entre a melhor solução e a solução encontrada, com tempo de execução menor ou igual ao tempo da segunda melhor heurística.

Além disso, as variantes do algoritmo desenvolvido neste trabalho foram utilizadas pelos autores para formular conjecturas sobre o problema de seleção de conjunto alvo considerando $f(v) = 2$. Algumas das conjecturas levantadas foram demonstradas, e contribuíram para a escrita de um artigo científico na área de convexidade em grafos. Acreditamos que os algoritmos desenvolvidos neste trabalho também podem ser úteis a outros interessados em estudos teóricos, em aplicações de propagação de influência em redes sociais ou problemas correlatos.

Conclusões

Nesta tese, investigamos a convexidade P_3 na figura do parâmetro número de Carathéodory, bem como sua conexão com processos de difusão e com o problema de seleção de conjunto alvo em redes. Em conjunto, os resultados obtidos reforçam o papel do arcabouço de convexidade de grafos no estudo de propriedades estruturais, complexidade computacional e aplicações em propagação de influência.

No contexto de grafos com diâmetro dois, mostramos como a convexidade P_3 pode ser empregada para obter resultados efetivos sobre o número de Carathéodory. Em particular, provamos que, se G tem diâmetro dois e possui vértice de corte, então $c(G) = 2$. Para grafos biconexos de diâmetro dois, estabelecemos limites superiores para $c(G)$ em função do grau máximo $\Delta(G)$, incluindo o caso constante $c(G) \leq 4$ para grafos biconexos C_6 -livres. Esses limites aprimoram o limite geral de (Barbosa et al. 2012) em regimes onde $\Delta < \frac{(n-4)^2+15}{8}$. Além disso, propomos um algoritmo em tempo polinomial que, dado um grafo biconexo de diâmetro dois, constrói um caminho especial cujo fecho convexo induz um conjunto dominante; mostramos ainda que, entre os caminhos gerados, existe ao menos um cuja envoltória coincide com a envoltória de um conjunto de Carathéodory. Ao limitar o comprimento desses caminhos, obtemos diretamente limites superiores para $c(G)$. Esses resultados fornecem evidências adicionais de que o número de Carathéodory pode ser limitado por uma constante em classes de pequeno diâmetro, motivando o seguinte problema em aberto: determinar se existe uma constante c tal que todo grafo biconexo de diâmetro dois satisfaça $c(G) \leq c$. Observamos ainda que, em testes computacionais reportados em (Brinkmann et al. 2013) para grafos com $\Delta \leq 112$, não foram encontrados exemplos de grafos de diâmetro dois com $c(G) \geq 5$, o que sugere que tal constante, se existir, pode ser menor que 5.

Para grafos circulantes $C_n(1, r)$, obtivemos limites inferiores não triviais para o número de Carathéodory na convexidade P_3 . Mostramos que, para $n \geq 4r - 2$, existe um conjunto de Carathéodory com cardinalidade pelo menos $\lfloor \frac{2r+1}{3} \rfloor$ quando $3 \nmid (r+1)$, e pelo menos $\frac{2(r+1)}{3}$ quando $3 \mid (r+1)$. Em casos particulares, determinamos valores exatos: para $C_n(1, 2)$ e para a subclasse dos grafos potência de ciclo, vale $c(G) = 2$. Considerando que decidir se um grafo possui um conjunto de Carathéodory de tamanho k

é *NP*-difícil (Barbosa et al. 2012), esses resultados contribuem para o entendimento do parâmetro em grafos de alta regularidade e sugerem novas direções, como a determinação de limites superiores (idealmente constantes ou dependentes apenas de r) e a extensão das técnicas para outras classes da família de grafos de Cayley. Trabalhos como (Brešar e Valencia-Pabon 2020; Grippo et al. 2021) exploram o número de envoltória na convexidade P_3 em classes como hipercubos, grafos de Hamming e grafos de Kneser; por serem também grafos de Cayley, é plausível investigar versões análogas para o número de Carathéodory. Futuros trabalhos também pretendem utilizar a mesma abordagem empregada nos grafos circulantes para determinar limites para o número de Carathéodory em grafos hamiltonianos.

Para grafos de Hamming, estabelecemos um limite inferior linear na dimensão. Demonstramos que, para um grafo de Hamming \mathcal{H} de dimensão n , vale $c(\mathcal{H}) \geq n$, sendo esse limite inferior determinado exclusivamente pela dimensão, e não pelo número total de vértices. Como continuidade natural, propomos investigar um limite superior para essa classe; em particular, caso se prove que $c(\mathcal{H}) \leq n$, então o número de Carathéodory poderá ser computado em tempo polinomial para grafos de Hamming, fortalecendo a compreensão do parâmetro em produtos cartesianos e sua relação com estruturas provenientes da teoria da codificação (Barta e Montemanni 2017; El-Shanawany et al. 2022).

No eixo algorítmico e aplicado, estudamos o problema de seleção de conjunto alvo sob modelos de contaminação irreversível, com atenção especial à variante por maioria. Desenvolvemos e avaliamos uma heurística gulosa que, em comparação com abordagens relacionadas, apresentou melhor qualidade de solução e menor tempo de execução, tanto em instâncias reais quanto em instâncias aleatórias. Em particular, construímos um banco de grafos aleatórios segundo o modelo de (Gilbert 1959), com ordens variando de 5 a 100 (incrementos de 5) e probabilidades $0.1 \leq p \leq 0.9$ (incrementos de 0.1), totalizando 180 grafos. Para esse conjunto, executamos um algoritmo exaustivo para obter referências ótimas quando $f(v) \in \{1, 2, 3, 4\}$, perfazendo 720 execuções por algoritmo (180 grafos e 4 valores de limiar). Os resultados indicaram que nossa heurística obteve mais soluções ótimas do que as demais e, quando não foi ótima, permaneceu mais próxima do ótimo; notadamente, nossa heurística e a de (Cordasco et al. 2018) foram as únicas cuja diferença para o ótimo foi, no máximo, de duas unidades.

Em redes sociais reais utilizadas em (Shakarian et al. 2013; Cordasco et al. 2018) e disponibilizadas em (Leskovec e Krevl 2014; Zafarani e Liu 2009) (incluindo, por exemplo, ca-AstroPh, ca-CondMat, ca-GrQc, ca-HepPh, ca-HepTh, além de instâncias como BlogCatalog, BuzzNet, Delicious, Douban, Last.fm e Livemocha), com ordens variando de milhares a milhões de vértices, comparamos nosso método ao melhor desempenho disponível entre heurísticas de referência. Para $f(v) = 1$, nossa heurística retornou soluções ótimas em todos os casos; para $f(v) \in \{2, 3, 4, 5\}$, obtivemos a maior quanti-

dade de melhores soluções (ou empates na melhor solução) e médias de diferença (Δ) inferiores às demais, com tempos de execução substancialmente menores (por exemplo, chegando a ser centenas de vezes mais rápida em alguns cenários). Mesmo quando não atingimos a melhor solução, a diferença típica foi de apenas uma unidade. Além disso, variantes do algoritmo proposto foram úteis na formulação de conjecturas para o caso $f(v) = 2$, algumas das quais foram demonstradas e contribuíram para o desenvolvimento de resultados teóricos na área de convexidade em grafos.

Por fim, reconhecemos que estratégias gulosas podem ocasionalmente estagnar em ótimos locais. Como passos futuros promissores, indicamos a incorporação de mecanismos para escapar desses ótimos, como escolhas aleatórias controladas e meta-heurísticas, bem como uma investigação sistemática de parâmetros e garantias teóricas que aproximem os resultados experimentais de caracterizações estruturais do problema.

Em síntese, esta tese contribui (i) com limites e algoritmos para o número de Carathéodory na convexidade P_3 em classes relevantes (diâmetro dois, circulantes e Hamming), (ii) com evidências e problemas abertos sobre a existência de limites constantes em classes de pequeno diâmetro, e (iii) com heurísticas eficazes para seleção de conjunto alvo em redes, reforçando a conexão entre teoria combinatória e aplicações em difusão de influência.

Para o número de Carathéodory, destacamos como direções futuras a investigação de limites superiores para grafos circulantes $C_n(1, r)$ e para grafos de Hamming, bem como a exploração de outras classes de grafos de Cayley. Para o problema de seleção de conjunto alvo, sugerimos aprimoramentos na heurística desenvolvida, incluindo técnicas para escapar de ótimos locais e ajustes sistemáticos de parâmetros, além da formulação e prova de garantias teóricas que expliquem o desempenho observado em experimentos.

A conjectura de que o número envoltório em grafos de diâmetro dois é limitado por uma constante, proposta em (Cappelle et al. 2022) e reforçada por evidências computacionais em (Brinkmann et al. 2013), sugere que o número de Carathéodory também pode ser limitado por uma constante nessa classe, dado que $c(G) \leq h(G) \leq k$ para todo grafo G . Assim, um passo futuro promissor é investigar se a existência de um limite constante para o número envoltório em grafos de diâmetro dois implica diretamente um limite constante para o número de Carathéodory, e vice-versa. Uma possibilidade é analisar o maior conjunto envoltório minimal, conforme abordado por (Grippe et al. 2021) para grafos de Hamming. A resolução dessa questão pode fortalecer a compreensão da relação entre esses parâmetros e fornecer insights sobre a estrutura de grafos de pequeno diâmetro.

Essa questão foi investigada no início deste trabalho de doutorado, mas não foi obtida uma resposta definitiva. Os trabalhos desenvolvidos por (Ibrahim et al. 2024; Ibrahim et al. 2025) confirmam os resultados apresentados em (Cappelle et al. 2022) e

reforçam a conjectura de que o número de envoltória em grafos de diâmetro dois é limitado por uma constante. Em testes computacionais, verificou-se que o grafo de Moore possui número de envoltória igual a 4. Como esse grafo é 57-regular, possui diâmetro dois e apresenta densidade aproximada de 0,017, esse resultado sugere que o número de envoltória em grafos biconexos de diâmetro dois pode ser limitado por 4. Esse fato reforça a conjectura de que grafos com diâmetro dois possuem número de Carathéodory limitado por uma constante.

Considerando os grafos de Hamming, em (Dratman et al. 2025) está proposto um limite superior para o número de Carathéodory em grafos de Hamming. Neste trabalho, ainda não revisado por pares, os autores determinam um limite superior para o número de Carathéodory para grafos de Hamming cujo produto cartesiano não é gerado por K_2 . Uma questão interessante, seria determinar algum limite superior para os grafos de Hamming que possuem ao menos um K_2 e para a subclasse formada somente pelo produto cartesiano do grafo K_2 , os chamados grafos hipercubos.

Na ótica das heurísticas, elas podem ser melhoradas com técnicas de meta-heurísticas, como *simulated annealing*, para escapar de ótimos locais. Uma versão paralela é altamente desejável, visto que a heurística é eficiente e pode ser aplicada em grafos de grande escala, como as redes sociais reais utilizadas nos experimentos. Por fim, a formulação de garantias teóricas para o desempenho da heurística, como limites de aproximação ou caracterizações estruturais do problema, mesmo que para casos particulares, é um passo futuro promissor que pode fortalecer a conexão entre os resultados experimentais e a teoria combinatória subjacente ao problema de seleção de conjunto alvo.

Referências Bibliográficas

- [Al-Ezeh et al. 2017]AL-EZEH, H. et al. The hull number of powers of cycles. Communications of the Korean Mathematical Society, v. 32, n. 4, p. 805–810, 2017. ISSN 22343024.
- [Anand et al. 2020]ANAND, B. S. et al. On the carathéodory and exchange numbers of geodetic convexity in graphs. Theoretical Computer Science, v. 804, p. 46–57, 2020. ISSN 0304-3975. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304397519306917>>.
- [Araujo et al. 2025]ARAUJO, J. et al. The iteration time and the general position number in graph convexities. Applied Mathematics and Computation, v. 487, p. 129084, 2025.
- [Araújo e Sampaio 2023]ARAÚJO, R.; SAMPAIO, R. Domination and convexity problems in the target set selection model. Discrete Applied Mathematics, v. 330, p. 14–23, 2023. ISSN 0166-218X. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X2200484X>>.
- [Association for Computing Machinery 2025]Association for Computing Machinery. ACM Publications Policies: Publication Rights and Licensing Policy. 2025. <https://www.acm.org/publications/policies/publication-rights-and-licensing-policy>. Acessado em: 1 de Janeiro de 2026.
- [Balogh et al. 2010]BALOGH, J. et al. Bootstrap percolation in high dimensions. Combinatorics, Probability and Computing, Cambridge University Press, v. 19, n. 5-6, p. 643–692, 2010.
- [Barbosa et al. 2012]BARBOSA, R. M. et al. On the Carathéodory Number for the Convexity of Paths of Order Three. SIAM Journal on Discrete Mathematics, v. 26, n. 3, p. 929–939, jul 2012. ISSN 0895-4801. Disponível em: <<http://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/110828678>>.
- [Barta e Montemanni 2017]BARTA, J.; MONTEMANNI, R. Hamming graphs and permutation codes. In: 2017 Fourth International Conference on Mathematics and Computers in Sciences and in Industry. [S.I.]: IEEE, 2017. v. 1, p. 154–158.

- [Bedo et al. 2023]BEDO, M. et al. Geodetic convexity and kneser graphs. Applied Mathematics and Computation, v. 449, p. 127964, 2023.
- [Ben-Zwi et al. 2011]BEN-ZWI, O. et al. Treewidth governs the complexity of target set selection. Discrete Optimization, v. 8, p. 87–96, 02 2011.
- [Benevides et al. 2015]BENEVIDES, F. et al. The maximum time of 2-neighbour bootstrap percolation: Algorithmic aspects. European Journal of Combinatorics, v. 48, p. 88–99, 2015. ISSN 0195-6698. Selected Papers of EuroComb'13. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0195669815000347>>.
- [Berger 2001]BERGER, E. Dynamic Monopolies of Constant Size. Journal of Combinatorial Theory, Series B, v. 83, n. 2, p. 191–200, 2001. ISSN 0095-8956. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0095895601920453>>.
- [Blaum e Marengo 2023]BLAUM, M.; MARENCO, J. Complete characterizations of the 2-domination and p_3 -hull number polytopes. Discrete Applied Mathematics, v. 338, p. 30–45, 2023. ISSN 0166-218X. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X2300135X>>.
- [Bollobas 1998]BOLLOBAS, B. Modern Graph Theory. Springer New York, 1998. (Graduate Texts in Mathematics). ISBN 9780387984889. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=SbZKSZ-1qrwC>>.
- [Bondy e Murty 1976]BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. Graph Theory with Applications. [S.l.]: Macmillan, 1976.
- [Brešar e Valencia-Pabon 2020]BREŠAR, B.; VALENCIA-PABON, M. On the P_3 -hull number of Hamming graphs. Discrete Applied Mathematics, v. 282, p. 48–52, 2020. ISSN 0166-218X. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X19305244>>.
- [Brinkmann et al. 2013]BRINKMANN, G. et al. House of graphs: a database of interesting graphs. Discrete Applied Mathematics, Elsevier B.V., v. 161, n. 1-2, p. 311–314, 2013. Acesso em: 2022 abr. Disponível em: <<http://hog.grinvin.org>>.
- [Cappelle et al. 2022]CAPPELLE, M. R. et al. p_3 -convexity on graphs with diameter two: Computing hull and interval numbers. Discrete Applied Mathematics, v. 321, p. 368–378, 2022. ISSN 0166-218X. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X22002736>>.
- [Cappelle et al. 2022]CAPPELLE, M. R. et al. p_3 -convexity on graphs with diameter two: computing hull and interval numbers. Discrete Applied Mathematics, v. 321, p. 368–378, 2022. ISSN 0166-218X.

- [Carathéodory 1911]CARATHÉODORY, C. Über den Variabilitätsbereich der Fourier'schen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen. Rend. del Circ. Mat. Palermo, v. 32, n. 1, p. 193–217, dec 1911. ISSN 0009-725X.
- [Centeno et al. 2011]CENTENO, C. C. et al. Irreversible conversion of graphs. Theoretical Computer Science, Elsevier B.V., v. 412, n. 29, p. 3693–3700, 2011. ISSN 03043975. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.tcs.2011.03.029>>.
- [Chandran et al. 2022]CHANDRAN, U. S. V. et al. Computational and structural aspects of the geodetic and the hull numbers of shadow graphs. Discrete Applied Mathematics, v. 307, p. 50–61, 2022. ISSN 0166-218X. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X21004236>>.
- [Changat et al. 2001]CHANGAT, M. et al. The all-paths transit function of a graph. Czechoslovak Mathematical Journal, v. 51, p. 439–448, 05 2001.
- [Charikar et al. 2016]CHARIKAR, M. et al. On approximating target set selection. In: Approximation, Randomization, and Combinatorial Optimization. Algorithms and Techniques. Dagstuhl, Germany: Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2016. (Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs), v. 60), p. 1–16. ISBN 978-3-95977-018-7. ISSN 1868-8969.
- [Chen 2009]CHEN, N. On the approximability of influence in social networks. SIAM Journal on Discrete Mathematics, v. 23, n. 3, p. 1400–1415, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1137/08073617X>>.
- [Chen et al. 2009]CHEN, W. et al. Efficient influence maximization in social networks. In: Proceedings of the 15th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, 2009. (KDD '09), p. 199–208. ISBN 9781605584959. Disponível em: <<https://doi.org/10.1145/1557019.1557047>>.
- [Chiang et al. 2011]CHIANG, C.-Y. et al. Some results on the target set selection problem. Journal of Combinatorial Optimization, v. 25, 11 2011.
- [Chopin et al. 2012]CHOPIN, M. et al. Constant thresholds can make target set selection tractable. In: Design and Analysis of Algorithms. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2012. (Lecture Notes in Computer Science, v. 55), p. 120–133. ISBN 978-3-642-34861-7.
- [Coelho et al. 2019]COELHO, E. M. M. et al. On the p_3 -hull number of some products of graphs. Discrete Applied Mathematics, v. 253, p. 2–13, 2019. ISSN 0166-218X. 14th Cologne-Twente Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization (CTW 2016). Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X18302440>>.

- [Coelho et al. 2023]COELHO, E. M. M. et al. p_3 -carathéodory number on graphs with diameter two (brief announcement). Procedia Computer Science, v. 223, p. 388–390, 2023. ISSN 1877-0509. XII Latin-American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium (LAGOS 2023).
- [Coelho et al. 2017]COELHO, E. M. M. et al. The carathéodory number of the p_3 convexity of cartesian product of graphs. Anais do XLIX - Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, v. 25, p. 3350–3358, 8 2017.
- [Coelho et al. 2014]COELHO, E. M. M. et al. The Carathéodory number of the convexity of chordal graphs. Discrete Applied Mathematics, v. 172, p. 104–108, 2014. ISSN 0166218X. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0166218X14001279>>.
- [Coelho et al. 2015]COELHO, E. M. M. et al. Inapproximability results for graph convexity parameters. Theoretical Computer Science, v. 600, p. 49–58, 2015. ISSN 0304-3975. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304397515005794>>.
- [Coordenadoria, PPGCC-UFG 2023]Coordenadoria, PPGCC-UFG. Resolução INF Nº2 02/2023/PPGCC: Formato de dissertações e teses do PPGCC. 2023. https://files.cercomp.ufg.br/weby/up/1289/o/Resolucao_PPGCC_n_02_2023_Formato_de_dissertacoes_teses.pdf. Acessado em: 31 dez. 2025.
- [Cordasco et al. 2018]CORDASCO, G. et al. Discovering Small Target Sets in Social Networks: A Fast and Effective Algorithm. Algorithmica, v. 80, n. 6, p. 1804–1833, 2018. ISSN 14320541.
- [Cormen et al. 2002]CORMEN, T. et al. Algoritmos: teoria e prática. Campus/RJ, 2002. ISBN 9788535209266. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=OtSHPgAACAAJ>>.
- [Dinh et al. 2014]DINH, T. N. et al. Cost-effective viral marketing for time-critical campaigns in large-scale social networks. IEEE/ACM Transactions on Networking, v. 22, n. 6, p. 2001–2011, 2014. ISSN 10636692.
- [Domingos e Richardson 2001]DOMINGOS, P.; RICHARDSON, M. Mining the network value of customers. In: ACM. Proceedings of the seventh ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining. [S.I.], 2001. p. 57–66.
- [Dourado et al. 2013]DOURADO, M. et al. Algorithmic and structural aspects of the p_3 -radon number. Annals of Operations Research, p. 1–17, 2013.

- [Dourado et al. 2022]DOURADO, M. C. et al. The hull number in the convexity of induced paths of order 3. Theoretical Computer Science, v. 906, p. 52–63, 2022. ISSN 0304-3975. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304397522000093>>.
- [Dourado et al. 2020]DOURADO, M. C. et al. On the monophonic rank of a graph. Discret. Math. Theor. Comput. Sci., v. 24, 2020. Disponível em: <<https://api.semanticscholar.org/CorpusID:222134192>>.
- [Dratman et al. 2025]DRATMAN, E. et al. Formulas and Upper Bounds for the Carathéodory Number of Hamming Graphs. arXiv, 2025. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2509.01645>>.
- [Dreyer e Roberts 2009]DREYER, P. A.; ROBERTS, F. S. Irreversible k-threshold processes: Graph-theoretical threshold models of the spread of disease and of opinion. Discrete Applied Mathematics, Elsevier, v. 157, n. 7, p. 1615–1627, 2009.
- [Dreyer e Roberts 2009]DREYER, P. A.; ROBERTS, F. S. Irreversible k-threshold processes: Graph-theoretical threshold models of the spread of disease and of opinion. Discrete Applied Mathematics, Elsevier B.V., v. 157, n. 7, p. 1615–1627, 2009. ISSN 0166218X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.dam.2008.09.012>>.
- [Duchet 1988]DUCHET, P. Convex sets in graphs, ii. minimal path convexity. Journal of Combinatorial Theory, Series B, v. 44, n. 3, p. 307–316, 1988. ISSN 0095-8956. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0095895688900391>>.
- [Dvorak et al. 2022]DVORAK, P. et al. Target set selection in dense graph classes. SIAM Journal on Discrete Mathematics, v. 36, n. 1, p. 536–572, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1137/20M1337624>>.
- [El-Shanawany et al. 2022]EL-SHANAWANY, R. et al. Graph based approach for error-detecting and correcting codes. Applied Mathematics & Information Sciences, Natural Sciences Publishing, v. 16, n. 6, p. 995–1003, nov. 2022. ISSN 2325-0399. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.18576/amis/160616>>.
- [Erdos et al. 1972]ERDOS, P. et al. Some remarks on simple tournaments. Algebra Universalis, Springer, v. 2, n. 1, p. 238–245, 1972.
- [Frasca e Rossi 2022]FRASCA, P.; ROSSI, F. Caratheodory solutions and their associated graphs in opinion dynamics with topological interactions*. IFAC-PapersOnLine, v. 55, n. 30, p. 436–441, 2022. ISSN 2405-8963. 25th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems MTNS 2022. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405896322027252>>.

- [Gajavalli e Greeni 2023]GAJAVALLI, S.; GREENI, A. B. On geodesic convexity in mycielskian of graphs. Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics, v. 27, n. 1, p. 119–123, 2023.
- [Gilbert 1959]GILBERT, E. N. Random graphs. The Annals of Mathematical Statistics, Institute of Mathematical Statistics, v. 30, n. 4, p. 1141–1144, 1959. ISSN 00034851. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/2237458>>.
- [González et al. 2021]GONZÁLEZ, L. M. et al. Formulas in connection with parameters related to convexity of paths on three vertices: caterpillars and unit interval graphs. Australasian journal of combinatorics, v. 79, n. 3, p. 401–423, 2021.
- [Grippio et al. 2021]GRIPPO, L. et al. On the p_3 -hull number of kneser graphs. The Electronic Journal of Combinatorics, v. 28, 07 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.37236/9903>>.
- [Harary 1971]HARARY, F. Graph Theory. Addison-Wesley, 1971. (Addison Wesley series in mathematics). Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=q8OWtwEACAAJ>>.
- [Harary e Nieminen 1981]HARARY, F.; NIEMINEN, J. Convexity in graphs. Journal of Differential Geometry, Lehigh University, v. 16, n. 2, p. 185–190, 1981.
- [Hartmann 2018]HARTMANN, T. A. Target set selection parameterized by clique-width and maximum threshold. In: SOFSEM 2018: Theory and Practice of Computer Science. Cham: Springer International Publishing, 2018. p. 137–149. ISBN 978-3-319-73117-9.
- [Hon et al. 2016]HON, W. et al. On the p_3 -convexity of some classes of graphs with few p_4 s and permutation graphs. In: Proceedings of the Australasian Computer Science Week Multiconference. New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, 2016. ISBN 9781450340427. Disponível em: <<https://doi.org/10.1145/2843043.2843055>>.
- [Ibrahim et al. 2024]IBRAHIM, R. et al. Bootstrap percolation, connectivity, and graph distance. The Art of Discrete and Applied Mathematics, v. 7, 03 2024.
- [Ibrahim et al. 2025]IBRAHIM, R. et al. Minimum 2-percolating sets in 2-connected, diameter 2 graphs. Australas. J Comb., v. 93, p. 60–89, 2025. Disponível em: <http://ajc.maths.uq.edu.au/pdf/93/ajc_v93_p060.pdf>.
- [Keiler et al. 2021]KEILER, L. et al. Target set selection with maximum activation time. Procedia Computer Science, v. 195, p. 86–96, 2021. ISSN 18770509. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877050921021530>>.

- [Kempe et al. 2003]KEMPE, D. et al. Maximizing the spread of influence through a social network. In: Proceedings of the Ninth ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, 2003. p. 137–146. ISBN 1581137370. Disponível em: <<https://doi.org/10.1145/956750.956769>>.
- [Leskovec e Krevl 2014]LESKOVEC, J.; KREVL, A. SNAP Datasets: Stanford Large Network Dataset Collection. 2014. <http://snap.stanford.edu/data>.
- [Linial et al. 1993]LINIAL, N. et al. Sphere packing and local majorities in graphs. In: [1993] The 2nd Israel Symposium on Theory and Computing Systems. [S.l.: s.n.], 1993. p. 141–149.
- [N. Zehmakan 2021]N. Zehmakan, A. On the spread of influence in graphs. Information and Computation, Elsevier Inc., v. 281, p. 104808, 2021. ISSN 10902651. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.ic.2021.104808>>.
- [Nichterlein et al. 2010]NICTERLEIN, A. et al. On tractable cases of target set selection. In: Algorithms and Computation. [S.l.: s.n.], 2010. (Lecture Notes in Computer Science, v. 3), p. 378–389. ISBN 78-3-642-17517-6.
- [Obradović et al. 2005]OBRADOVIĆ, N. et al. Minimum chromaticity of circulant graphs. Discrete Mathematics, v. 299, n. 1-3, p. 288–296, 2005. ISSN 0012365X.
- [Panizzi et al. 2017]PANIZZI, A. R. et al. Modelagem e soluções heurísticas para o problema de conjunto convergente mínimo. Anais do XLIX Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, v. 25, p. 2443–2454, 2017.
- [Peleg 1998]PELEG, D. Size bounds for dynamic monopolies. Discrete Applied Mathematics, v. 86, n. 2, p. 263–273, 1998. ISSN 0166-218X. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X98000432>>.
- [Peleg 2002]PELEG, D. Local majorities, coalitions and monopolies in graphs: a review. Theoretical Computer Science, Elsevier, v. 282, n. 2, p. 231–257, 2002.
- [Richardson e Domingos 2002]RICHARDSON, M.; DOMINGOS, P. Mining Knowledge-Sharing Sites for Viral Marketing. Proceedings of the ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining, 2002.
- [Shaheen et al. 2022]SHAHEEN, R. et al. Irreversible k -threshold conversion number of circulant graphs. Journal of Applied Mathematics, v. 2022, 2022. ISSN 16870042.

- [Shakarian et al. 2013]SHAKARIAN, P. et al. A scalable heuristic for viral marketing under the tipping model. Social Network Analysis and Mining, v. 3, n. 4, p. 1225–1248, 2013. ISSN 18695469.
- [Silva 2023]SILVA, B. R. HNV Code and Data for the Article: A Heuristic for Hull Set. [S.I.]: GitHub, 2023. <https://github.com/braully/hnv-code-data-article>.
- [Silva et al. 2026]SILVA, B. R. et al. Bounds on the p_3 -carathéodory number. Discrete Applied Mathematics, v. 385, p. 318–327, 2026. ISSN 0166-218X. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X26001083>>.
- [Silva et al. 2025]SILVA, B. R. et al. Limites para o número de carathéodory em grafos de hamming. In: Anais do LVI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional. [S.I.]: Galoa, 2025. Electronic proceedings; submitted May 18, 2025; accepted August 8, 2025; to appear from October, 2025.
- [Silva et al. 2024]SILVA, B. R. d. et al. A greedy heuristic for majority target set selection in social networks. In: Proceedings of the 2023 IEEE/ACM International Conference on Advances in Social Networks Analysis and Mining. New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, 2024. (ASONAM '23), p. 419–426. ISBN 9798400704093. Disponível em: <<https://doi.org/10.1145/3625007.3627726>>.
- [Silva et al. 2024]SILVA, B. R. d. et al. p_3 -carathéodory em grafos circulantes. In: Anais do Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional. Galoa, 2024. v. 56. ISSN 2965-1476. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.59254/sbpo-2024-193668>>.
- [Silva et al. 2023]SILVA, B. R. d. et al. Uma heurística gulosa para seleção de conjunto alvo em redes sociais. In: Anais do Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional. Galoa, 2023. (SBPO 2023). ISSN 2965-1476. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.59254/sbpo-2023-174933>>.
- [Silva 2018]SILVA, B. Rocha da. Algoritmos e limites para os números envoltório e de Carathéodory na convexidade P_3 . Dissertação (Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação)) — Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2018. Disponível em: <<http://repositorio.bc.ufg.br/tede/handle/tede/9008>>.
- [Socievole et al. 2016]SOCIEVOLE, A. et al. Assessing network robustness under sis epidemics: The relationship between epidemic threshold and viral conductance. Computer Networks, v. 103, p. 196–206, 2016. ISSN 1389-1286. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1389128616301141>>.

[Wang et al. 2014]WANG, C. et al. A global optimization algorithm for target set selection problems. Information Sciences, v. 267, p. 101–118, 2014. ISSN 0020-0255. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020025513006750>>.

[Zafarani e Liu 2009]ZAFARANI, R.; LIU, H. Social Computing Data Repository at ASU. 2009. Disponível em: <<http://socialcomputing.asu.edu>>.

Aceites de Artigos

Todos os artigos científicos que compõem esta tese já foram aceitos e publicados em anais de conferências e revista científica, e estão listados a seguir. O aceite ou o certificado de publicação de cada artigo está disponível para consulta, e os documentos correspondentes estão anexados a esta tese.

Bounds on the P_3 -Carathéodory number

Braully R. Silva^{a,c,d,*}, Erika M.M. Coelho^a, Hebert Coelho^{a,b}, Simone Dantas^b^a Universidade Federal de Goiás, Brazil^b Universidade Federal Fluminense, Brazil^c Universidade Estadual de Goiás, Brazil^d Instituto Federal Goiano, Brazil

ARTICLE INFO

Article history:

Received 13 March 2025

Received in revised form 11 December 2025

Accepted 17 February 2026

Available online 26 February 2026

Keywords:

Carathéodory number

 P_3 -convexity

Graphs with diameter two

ABSTRACT

The P_3 -convex hull $H(S)$ of a set $S \subseteq V(G)$ is the smallest set containing S such that, for every pair of vertices $u, v \in S$, all vertices on any path of three vertices between them are also included in the set.

The P_3 -Carathéodory number $c(G)$ is the smallest integer c such that, for every set S and every $v \in H(S)$, there exists a subset $S' \subseteq S$ of size at most c , such that $v \in H(S')$. In 2014, Barbosa et al. proved that, for a given graph G and a positive integer k , the problem of deciding whether $c(G) \geq k$ is NP-complete.

In this paper, we present upper bounds on the P_3 -Carathéodory number of graphs with diameter two, and establish that: $c(G) = 2$ for graphs with cut-vertex; $c(G) \leq \frac{5+\sqrt{8\Delta-15}}{2}$ for biconnected graphs; and $c(G) \leq 4$ for biconnected C_6 -free graphs. Moreover, we show a polynomial-time algorithm for biconnected diameter-two graphs, that constructs a special path from which we compute an upper bound for the Carathéodory number. These results also provide supporting evidence for the conjecture that the P_3 -Carathéodory number is bounded by a constant in graphs with a limited diameter.

© 2026 The Authors. Published by Elsevier B.V. This is an open access article under the CC BY license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

1. Introduction

The influence of individuals on a network is a recurring theme in many research fields, just as the disease spread serves as an example where the main subject of this paper can be directly applied.

Imagine the following situation: A group of scientists wants to conduct a study on the behavior of some diseases. Given a sample R of guinea pigs, a set S is initially infected with such a disease. Through the transmission of the disease from the initially infected guinea pigs, another set of guinea pigs will also become infected. Scientists are particularly interested in ensuring that a specific guinea pig, denoted as u , which possesses an antigen for the disease, is included in the final group of infected subjects. Given the cost and effort required to infect the initial guinea pigs set S , the question arises: What is the minimum number of guinea pigs that must be initially infected to guarantee the presence of the guinea pig u in the final group? This problem, along with others in various contexts requiring a disseminating process, such as marketing strategies [14], the spread of opinion [16], and distributed computing [22], can be modeled and eventually solved from a graph convexity perspective.

Let $G = (V(G), E(G))$ be an undirected, finite, and simple graph, with vertex set $V(G)$ and edge set $E(G)$. A *graph convexity* on $V(G)$ is a collection \mathcal{C} of subsets of $V(G)$ such that $\emptyset, V(G) \in \mathcal{C}$, and \mathcal{C} is closed under intersections, and the sets in \mathcal{C} are called *convex sets*.

* Corresponding author at: Instituto Federal Goiano, Brazil.

E-mail addresses: braully.silva@ifgoiano.edu.br (B.R. Silva), erika_coelho@ufg.br (E.M.M. Coelho), hebert@ufg.br (H. Coelho), sdantas@id.uff.br (S. Dantas).

CERTIFICADO



A SOBRAPO - Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional certifica que o trabalho intitulado

Limites para o número de Carathéodory em Grafos de Hamming

de autoria de:

Braully Rocha da Silva, Erika Morais Martins Coelho, Hebert Coelho, Simone Dantas

foi apresentado na forma de *Trabalho completo (Oral)* no **LVII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional**, realizado entre os dias 05 a 09 de outubro de 2025, em Gramado-RS.

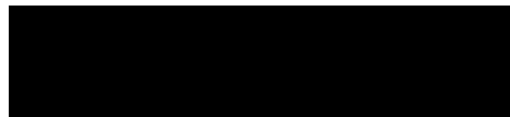
LUIZ SATORU OCHI
Coordenador Científico do LVII SBPO

Certification by Galoá



CARTA DE ACEITE

Temos o prazer de informar que o seu trabalho intitulado **P3-Carathéodory em Grafos Circulantes** dos autores **Braully Rocha da Silva, Erika Moraes Martins Coelho, Hebert Coelho da Silva** foi aceito na categoria Trabalho completo (Oral) para apresentação e publicação nos anais do **LVI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional**, a ser realizado entre os dias 04 e 07 de novembro de 2024, em Fortaleza/CE.



LUIZ SATORU OCHI
Coordenador Científico do LVI SBPO

Certification by Galoá

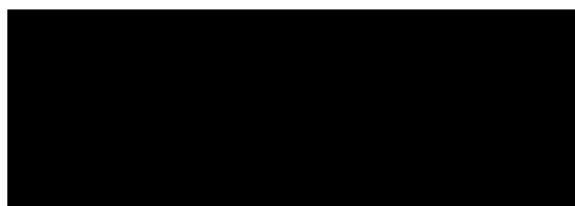




CERTIFICADO

Prezado(a) **Braully Rocha da Silva**

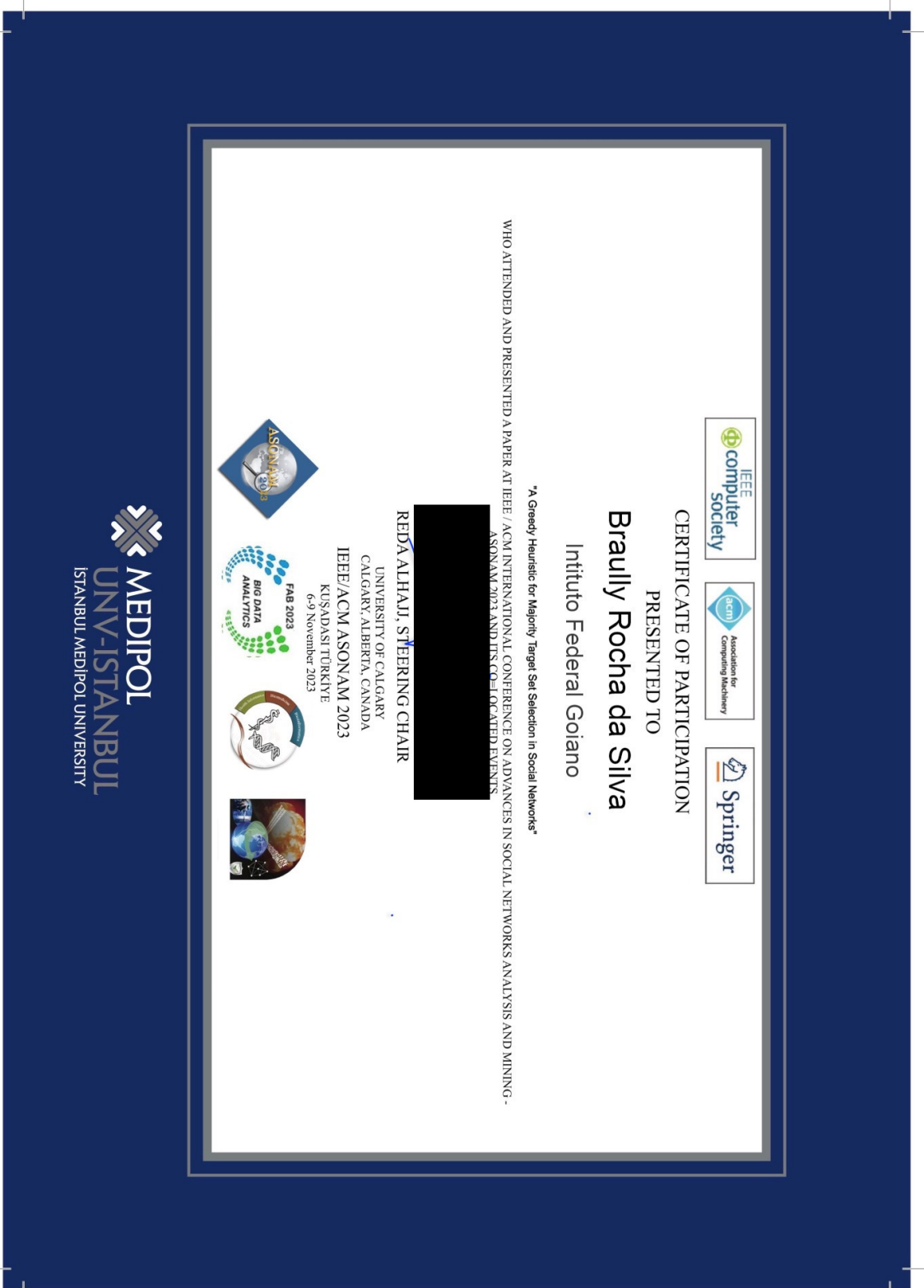
Temos o prazer de informar que o seu trabalho intitulado **Uma Heurística Gulosa para Seleção de Conjunto Alvo em Redes Sociais** dos autores **Braully Rocha da Silva, Erika Moraes Martins Coelho, Hebert Coelho da Silva, Fabio Protti** foi aceito na categoria Trabalho completo (oral) para publicação nos anais do evento **LV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional**.



LUIZ SATORU OCHI
Coordenador Científico do LV SBPO

Certification by Galoá





Permissão de Reuso

As permissões de reuso dos artigos científicos que compõem esta tese estão listadas a seguir. Os artigos foram publicados sob licenças Creative Commons, permitindo o uso e a reprodução do conteúdo, desde que sejam atribuídos os devidos créditos aos autores originais e sejam mantidas as condições da licença. O artigo "Bounds on the P_3 -Carathéodory number"([Silva et al. 2026](#)) foi publicado na revista Discrete Applied Mathematics (DAM) sob a licença CC BY 4.0, que permite o compartilhamento e adaptação do trabalho, desde que seja dada a atribuição adequada.

O artigo "A Greedy Heuristic for Majority Target Set Selection in Social Networks"([Silva et al. 2024](#)) foi apresentado na conferência ASONAM 2023 e está disponível no repositório de anais da conferência na biblioteca digital da ACM, com direito dos autores para reutilização do conteúdo ([Association for Computing Machinery 2025](#)), conforme direito dos autores da conferência, permitindo a inclusão do artigo nesta tese.

Os artigos "Limites para o número de Carathéodory em Grafos de Hamming"([Silva et al. 2025](#)), "Limites para o número de Carathéodory em Grafos Circulantes"([Silva et al. 2024](#)) e "Heurística para seleção de conjunto alvo em redes sociais"([Silva et al. 2023](#)) foram apresentados na conferência SBPO 2023-2025 e estão disponíveis no repositório de anais da conferência, e a autorização para reuso foi concedida pelos organizadores da conferência, permitindo a inclusão dos artigos nesta tese.



AUTORIZAÇÃO PARA INCLUSÃO DE ARTIGO EM TESE/DISSERTAÇÃO

A Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional – SOBRAPO, na qualidade de organizadora do Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, **autoriza o pesquisador Braully Rocha da Silva**, doutorando da PPGCC/INF/UFG, a **incluir em sua tese de doutorado os artigos** de sua autoria, intitulados:

Limites para o número de Carathéodory em Grafos de Hamming

Publicado nos anais do SBPO 2025, sob o DOI: **10.59254/sbpo-2025-212182**;

P3-Carathéodory em Grafos Circulantes


Publicado nos anais do SBPO 2024, sob o DOI: **10.59254/sbpo-2024-193668**; e

Uma Heurística Gulosa para Seleção de Conjunto Alvo em Redes Sociais

Publicado nos anais do SBPO 2023, sob o DOI: **10.59254/sbpo-2023-174933**

Esta autorização refere-se exclusivamente à inclusão integral dos artigos na referida tese, devendo a publicação citar corretamente a fonte e manter os créditos aos autores e ao evento.

Rio de Janeiro, 31 de março de 2026.

 Documento assinado digitalmente
SIMONE DE LIMA MARTINS
Data: 31/03/2026 10:16:00-0300
Verifique em <https://validar.it.gov.br>

Simone Lima Martins

2º Vice-Presidente

SOBRAPO – Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional

Coordenadora do Comitê de Programa do SBPO nos anos de 2025, 2024 e 2023