

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

THAMARA POLICARPO MENDES DE ANDRADE

Superfícies Translacionais no Espaço Isotrópico

Goiânia
2019

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR
VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES
NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: ☒ **Dissertação** ☐ **Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

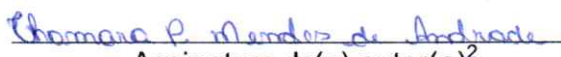
Nome completo do autor: Thãmara Policarpo Mendes de Andrade

Título do trabalho: Superfícies Translacionais no Espaço Isotrópico

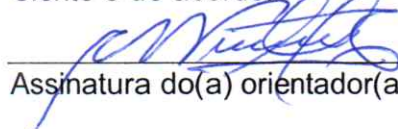
3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento ☒ SIM ☐ NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.


Assinatura do(a) autor(a)²

Ciente e de acordo:


Assinatura do(a) orientador(a)²

Data: 13 / 03 / 2019

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

² A assinatura deve ser escaneada.

THAMARA POLICARPO MENDES DE ANDRADE

Superfícies Translacionais no Espaço Isotrópico

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria.

Orientador: Prof. Armando Mauro Vasquez Corro

Goiânia
2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Andrade, Thamara Policarpo Mendes de
Superfícies Translacionais no Espaço Isotrópico [manuscrito] /
Thamara Policarpo Mendes de Andrade. - 2019.
LXI, 61 f.

Orientador: Prof. Dr. Armando Mauro Vasquez Corro.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto
de Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em
Matemática, Goiânia, 2019.
Bibliografia.

1. Espaço Isotrópico. 2. Superfícies Translacionais. 3. Superfícies de
Weingarten. I. Corro, Armando Mauro Vasquez, orient. II. Título.

CDU 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Campus Samambaia – Caixa Postal 131 – CEP: 74.001-970 – Goiânia-GO.

Fones: (62) 3521-1208 e 3521-1137 www.ime.ufg.br

ATA DA REUNIÃO DA BANCA EXAMINADORA DA DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE THAMARA POLICARPO MENDES DE ANDRADE – Ao primeiro dia do mês de março do ano de dois mil e dezenove (01/03/2019), às 10 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora: Prof. Armando Mauro Vasquez Corro – Orientador, Profa. Rosane Gomes Pereira, e Prof. José Luis Teruel Carretero, para, sob a presidência do primeiro, e em sessão pública realizada no Auditório do Instituto de Matemática e Estatística, procederem a avaliação da defesa de dissertação intitulada: **“Superfícies Translacionais no Espaço Isotrópico”**, em nível de Mestrado, área de concentração em Geometria Diferencial, de autoria de Thamara Policarpo Mendes de Andrade, discente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pelo Presidente da Banca, Prof. Armando Mauro Vasquez Corro, que fez a apresentação formal dos membros da Banca. A seguir, a palavra foi concedida a autora da dissertação que, em 45 minutos procedeu à apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da Banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da defesa. Tendo-se em vista o que consta na Resolução nº. 1513 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta o Programa de Pós-Graduação em Matemática e procedidas às correções recomendadas, a dissertação foi **APROVADA** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**, na área de concentração em Geometria Diferencial, pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega na secretaria do PPGM da versão definitiva da dissertação, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 13 horas a presidência da mesa encerrou esta sessão de defesa de dissertação e para constar eu, Ana Maria Pereira Pinto, secretária do PPGM, lavrei a presente Ata que, depois de lida e aprovada, será assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.


Prof. Dr. Armando Mauro Vasquez Corro
Presidente - IME/UFG


Prof. Dra. Rosane Gomes Pereira
Membro – IME/UFG


Prof. Dr. José Luis Teruel Carretero
Membro – MAT/UNB

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Thamara Policarpo Mendes de Andrade

Bacharela em Matemática pela Universidade Federal de Goiás - UFG.

Às minhas filhas Ana Júlia e Alice, e também ao meu esposo Alessandro.

Agradecimentos

Quero agradecer primeiramente àquele que me concedeu a vida, que é o meu Deus. Foi Ele quem me concedeu a oportunidade de estar aqui e concluir mais essa etapa da minha vida acadêmica.

Agradeço em especial ao meu esposo Alessandro que esteve ao meu lado durante todo o período de estudos. Desde a graduação até o mestrado, você tem sido o meu melhor companheiro, a quem devo muito do que sou hoje. Também agradeço aos meus pais Ana e Lázaro que proporcionou a mim o máximo que puderam, no que diz respeito a estudo além de me formarem de maneira integral como pessoa. Claro, não poderia esquecer da minha irmã Thainara que sempre me ajuda em tudo, desde levar documentos no IME até corrigir o português da minha dissertação. Valeu mana te amo.

Meus sinceros agradecimentos à minha sogra Luzia que por inúmeras vezes ficou com as minhas filhas Alice e Ana Júlia para que eu pudesse estudar. Sem a senhora eu não teria conseguido. Obrigada filhas, pelos momentos de alegria que vocês me proporcionaram durante períodos de total tensão. Amo demais vocês. Se hoje eu luto por uma vida melhor, é pensando no bem estar de vocês (mamã ama!).

Sou grata a todos os meus familiares próximos, em especial a minha prima Regiane. Acredito que sem você eu nem saberia o que é UFG, sou muito grata por tudo o que fez por mim. Agradeço também ao meu tio Antônio e minha tia Maria, sem os quais eu não teria sequer feito o vestibular da graduação.

Agradeço a todos os funcionários do IME, em especial agradeço aos professores que me formaram como profissional, que me orientaram sempre que precisei. Agradeço a professora Rosângela, foi com você que comecei a me apaixonar por esta área incrível que é a Geometria. Meu muito obrigada aos coordenadores da pós Glaydston Carvalho e Durval José que sempre se dispunham a resolver meus problemas. Um agradecimento especial ao diretor do IME Maurício, talvez eu nunca te falei, mas sou muito grata por você ter me mantido como professora substituta mesmo grávida. Foi muito valioso o que fez por mim.

Meu forte agradecimento aos meus amigos Laredo, Nara, Lucy, Paula e Ilton. Vocês foram fundamentais para tornar os meus dias na Universidade melhores.

Amo muito cada um de de vocês. Laredo, obrigada por plotar os gráficos que estão nessa dissertação (kkkkk), ah e espero que você não coma mais os meus salgados. Narinha, obrigada pelas longas conversas sobre tudo, menos matemática (hahaha), que tivemos e pelos conselhos e ensinamentos que sempre me deu. Paulinha, nem sei o que falar, obrigada pelo seu apoio e amizade que foram essenciais. Lucy e Ilton, obrigada por tudo, em especial pela companhia na viagem para Posse.

Por fim , agradeço ao meu orientador Armando, que mesmo passando por um momento tão difícil sempre esteve à disposição para me ajudar.

"Quem planta as sementes chorando colherá
as espigas com cantos de alegria.
Quem sai com a cesta de sementes chorando
enquanto lança a semente voltará carregado
de feixes de espigas, cantando de alegria."

Salmo 126: 5,6,

Resumo

Policarpo Mendes de Andrade, Thamara. **Superfícies Translacionais no Espaço Isotrópico**. Goiânia, 2019. 60p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Superfícies Translacionais são obtidas pela translação de duas curvas contidas em planos não paralelos. Neste trabalho foram estudados resultados do artigo Aydin, M.E; Ergut, M. Affine Translation Surfaces in the Isotropic Space, [3]. São consideradas Superfícies Translacionais Afim de Tipo 1 no Espaço Isotrópico $\mathbb{I}^3$, obtidas pela translação de duas curvas em planos não necessariamente ortogonais. O objetivo foi caracterizar as Superfícies Translacionais Afim de Weingarten, as quais satisfazem certas condições de relação entre as curvaturas Gaussiana e Média. Além disso, foram obtidos resultados para as Superfícies Translacionais que satisfazem $\Delta^{I,II}r_i = \lambda_i r_i$, encontrando soluções explícitas para a parametrização de tais superfícies. Alguns exemplos são apresentados, bem como os seus respectivos gráficos que foram plotados utilizando o software Matemática.

Palavras-chave

Espaço Isotrópico, Superfícies Translacionais, Superfícies de Weingarten.

Abstract

Policarpo Mendes de Andrade, Thamara. ... Goiânia, 2019. 60p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Translation Surfaces are obtained by translating curves contained in non-parallel planes. In this paper, the results of the Aydin, M. E; Ergut, M. Affine Translation Surfaces in the Isotropic Space [3]. Are considered the Affine Translation Surfaces type 1 in the Isotropic 3- Space $\mathbb{I}^3$, obtained for translating of two curves in the planes not necessarily orthogonal. The objective was to characterize the Weingarten Affine Translation Surfaces, which satisfy certain conditions with respect to gaussian and mean curvatures. In addition, results were obtained for Translation Surfaces satisfying $\Delta^{I,II}r_i = \lambda_i r_i$, finding explicit solutions for the parameterization of such surfaces. Some examples are presented, as well as their respective graphs that were plotted using the Mathematical software.

Keywords

Isotropic 3-space, Translation Surfaces, Weingarten Surfaces

Introdução

A Geometria Diferencial de Espaços Isotrópicos foi apresentada por Strubecker (1942), Sachs (1978, 1990a, 1990b), Palman (1979) e outros. Já o estudo de superfícies Translacionais Afim foi introduzido por Liu e Yu (2017). A partir daí, começou-se o estudo de superfícies Translacionais no Espaço Isotrópico.

A Geometria Isotrópica estuda as propriedades geométricas que são preservadas pelas transformações afim $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dadas por; $T : (x, y, z) \rightarrow (x', y', z')$

$$\begin{aligned}x' &= a + x \cos(\phi) - y \sin(\phi) \\y' &= b + x \sin(\phi) + y \cos(\phi) \\z' &= c + c_1 x + c_2 y + z\end{aligned}$$

com $a, b, c, c_1, c_2, \phi \in \mathbb{R}$.

O Estudo de Superfícies Translacionais começou com a descoberta da Superfície Mínima de Scherk e com esse advento, surgiu o interesse em estudos sobre superfícies Translacionais no Espaço Isotrópico.

Uma superfície translacional no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$ dada pela translação de duas curvas em planos ortogonais é dado pelo gráfico de uma função $z(x, y) = f(x) + g(y)$ para o sistema de coordenadas usuais de $\mathbb{R}^3$. A famosa Superfície Translacional de $\mathbb{R}^3$ é a Superfície Translacional de Scherk, citada acima. Sua equação é dada por

$$z(x, y) = \frac{1}{c} \log \left| \frac{\cos(cx)}{\cos(cy)} \right|, c \in \mathbb{R} - \{0\}$$

e seu gráfico pode ser encontrado em [7].

Em 2013, Liu e Yu [10] definiram uma superfície translacional afim em $\mathbb{R}^3$ como o gráfico de uma função

$$z(x, y) = f(x) + g(y + ax), a \in \mathbb{R} - \{0\}$$

e descreveram as superfícies translacionais afim mínimas. Eles encontraram a

chamada superfície de Scherk afim dada de forma explícita como

$$z(x, y) = \frac{1}{c} \log \left| \frac{\cos(c\sqrt{1+a^2}x)}{\cos(c[y+ax])} \right|, a, c \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Essas superfícies encontradas são, de fato, as superfícies translacionais obtidas a partir da translação de duas curvas em planos não ortogonais. Então Liu e Jung [10], obtiveram uma caracterização das superfícies translacionais afim em $\mathbb{R}^3$ com curvatura média constante arbitrária. Logo após, Yang e Fu [16] classificaram as superfícies translacionais afim com curvatura Gaussiana constante.

No espaço isotrópico $\mathbb{I}^3$ existem três diferentes tipos de superfícies translacionais afim que são obtidas a partir da translação de duas curvas contidas em planos ortogonais ver [12]. Abaixo estão apresentados esses tipos bem como as características principais de cada um deles.

Tipo 1. Duas curvas transladando nos planos isotrópicos ortogonais $x = 0$ e $y = 0$,

$$z(x, y) = f(x) + g(y);$$

Tipo 2. Uma das curvas contidas no plano não isotrópico $z = 0$ e a outra, no plano isotrópico $x = 0$,

$$y(x, z) = f(x) + g(z);$$

Tipo 3. Duas curvas transladando que estão contidas nos planos não isotrópicos $y - z = \pi$ e $y + z = \pi$,

$$x(y, z) = \frac{1}{2} \left(f \left(\frac{y+z-\pi}{2} \right) + g \left(\frac{\pi-y+z}{2} \right) \right),$$

onde x , y e z são as coordenadas padrão em $\mathbb{I}^3$. Uma superfície de um tipo, não pode ser levada em outro tipo por isometrias de $\mathbb{I}^3$. Cada superfície com curvaturas média e gaussiana constante são obtidas em [12] bem como as de Weingarten. Em [3] Aydin e Ergut apresentam uma caracterização para as superfícies translacionais afim de Tipo 1 que satisfazem

$$\Delta^{I,II} r_i = \lambda_i r_i, \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3,$$

onde r_i é o vetor posição da superfície, e $\Delta^{I,II}$ é o operador Laplaciano com relação a Primeira e Segunda Forma Fundamental respectivamente.

No presente trabalho foi realizado um estudo sobre Superfícies Translacionais Afim no Espaço Isotrópico $\mathbb{I}^3$ que satisfazem as seguintes condições:

- Superfícies Translacionais Afim de Weingarten satisfazendo $K_x H_y - K_y H_x = 0$

- Superfícies Translacionais Afim de Weingarten satisfazendo $\alpha K + \beta H = \gamma$
- Superfícies Translacionais Afim Satisfazendo $\Delta^{I,II} r_i = \lambda_i r_i$.

São apresentados resultados, isto é, parametrizações de superfícies que satisfazem cada um das condições abaixo, bem como exemplos de tais superfícies.

Sumário

1	Geometria Isotrópica	13
1.1	Teoria de curvas	13
1.2	i - Circunferências e i - Esferas	20
1.3	Teoria de Superfícies tipo gráfico	22
2	Superfícies translacionais afim de Weingarten	27
2.1	Conceitos básicos	27
2.2	Superfícies Translacionais Afim de Weingarten satisfazendo $K_x H_y - K_y H_x = 0$	29
2.3	Superfícies Translacionais Afim de Weingarten satisfazendo $\alpha K + \beta H = \gamma$	33
3	Superfícies Translacionais Afim Satisfazendo $\Delta^{I,II} r_i = \lambda_i r_i$	38
3.1	Caso $\Delta^I r_i = \lambda_i r_i$	38
3.2	Caso $\Delta^{II} r_i = \lambda_i r_i$	44
	Referências Bibliográficas	59

Geometria Isotrópica

Isotropia é uma palavra que vem do Grego, Iso (igual), Tropos (Caminho). Em várias áreas do conhecimento, tais como física e engenharia é comum encontrar esse termo. Na física, uma determinada substância é considerada isotrópica se esta possui as mesmas propriedades físicas independente da direção tomada.

Neste capítulo será tratada a teoria da Geometria Isotrópica, que basicamente utiliza projeções que vão do espaço isotrópico $\mathbb{I}^3$ em $\mathbb{R}^2$.

1.1 Teoria de curvas

A Geometria Isotrópica estuda as propriedades geométricas que são preservadas pelas transformações afim $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dadas por; $T : (x, y, z) \rightarrow (x', y', z')$

$$\begin{aligned} x' &= a + x \cos(\phi) - y \sin(\phi) \\ y' &= b + x \sin(\phi) + y \cos(\phi) \\ z' &= c + c_1 x + c_2 y + z \end{aligned} \tag{1-1}$$

com $a, b, c, c_1, c_2, \phi \in \mathbb{R}$.

Definição 1.1 O espaço vetorial afim $\mathbb{R}^3$ é chamado **Espaço Isotrópico** e será denotado por $\mathbb{I}^3$. O grupo formado pelas transformações afim T com a operação composição é chamado de **Grupo de Movimentos Isotrópicos** e será denotado por G_6 . A geometria $(\mathbb{I}^3, G_6)$ é a **Geometria Isotrópica de movimentos**.

Abaixo são apresentados alguns resultados que diz respeito às propriedades que são preservadas pelas transformações afim dadas em (1-1).

Teorema 1.2 Sejam l uma reta contida em $\mathbb{I}^3$ que passa pelo ponto $(a_0, b_0, c_0) \in \mathbb{I}^3$ paralela ao eixo z , e $T \in G_6$. Então a reta $T(l)$ é paralela ao eixo z .

Demonstração. Como l é paralela ao eixo z , sua equação pode ser escrita da forma:

$$l(t) = (a_0, b_0, c_0) + t(0, 0, z_0)$$

onde $z_0 \neq 0$ constante, e $t \in \mathbb{R}$. Aplicando a transformação afim T sobre l , tem-se:

$$\begin{aligned} T(l) &= T((a_0, b_0, c_0 + tz_0)) \\ &= (a + a_0 \cos(\phi) - b_0 \sin(\phi), b + a_0 \sin(\phi) + b_0 \cos(\phi), c + c_1 a_0 + c_2 b_0 + c_0 + tz_0) \\ &= (a + a_0 \cos(\phi) - b_0 \sin(\phi), b + a_0 \sin(\phi) + b_0 \cos(\phi), c + c_1 a_0 + c_2 b_0 + c_0) + t(0, 0, z_0). \end{aligned}$$

Logo, $T(l)$ é uma reta que passa pelo ponto $(a + a_0 \cos(\phi) - b_0 \sin(\phi), b + a_0 \sin(\phi) + b_0 \cos(\phi), c + c_1 a_0 + c_2 b_0 + c_0)$ com vetor direção dado por $(0, 0, z_0)$. $\square$

O Teorema (1.2) mostra que as retas paralelas ao eixo z preservam a sua direção sobre $T \in G_6$. Assim, essa é uma propriedade invariante.

Definição 1.3 *As retas paralelas ao eixo z são chamadas **Retas Isotrópicas**, planos que contém tais retas são denominados **Planos Isotrópicos**.*

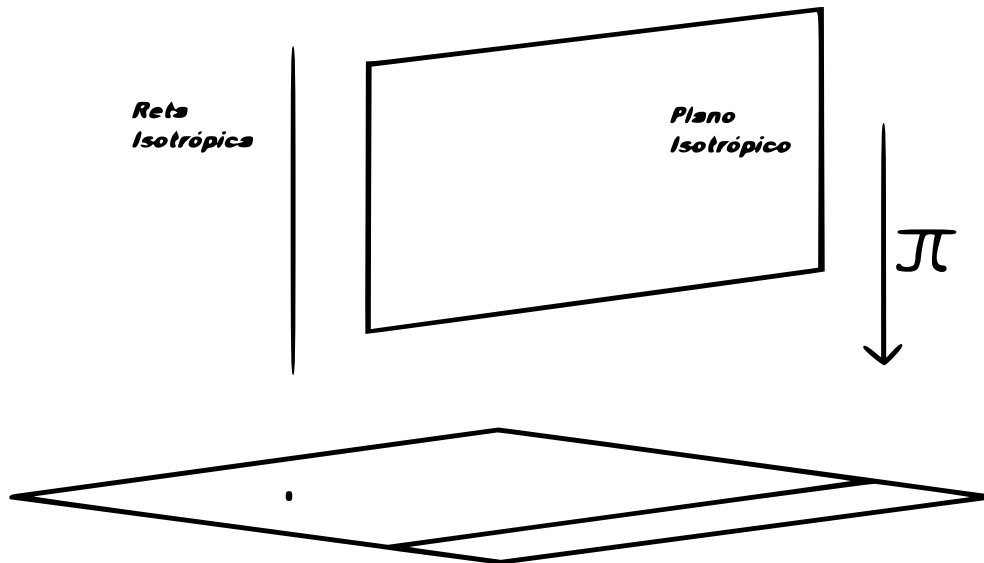
Definição 1.4 *Seja $\pi : \mathbb{I}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:*

$$\pi(x, y, z) = (x, y) \quad (1-2)$$

*esta projeção especial é chamada de **Vista por Cima**.*

É notório que planos e retas isotrópicas são levados em retas e pontos, respectivamente, pela projeção Vista por Cima.

Figura 1.1: *Vista por cima: Reta e Plano Isotrópico*



Note que um movimento isotrópico $T \in G_6$ é um movimento Euclidiano pela Vista por cima, pois

$$\begin{aligned} x' &= a + x \cos(\phi) - y \sin(\phi) \\ y' &= b + x \sin(\phi) + y \cos(\phi) \end{aligned}$$

T é composta pela rotação por um ângulo ϕ seguida de uma translação pelo vetor $(a, b)^T$.

Definição 1.5 *Sejam $A = (x_1, y_1, z_1)$, $B = (x_2, y_2, z_2)$ dois pontos de $\mathbb{I}^3$. A **Distância Isotrópica** D_i entre A e B é dada por:*

$$D_i(A, B) = d(\pi(A), \pi(B)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

onde $\pi(A) = (x_1, y_1)$, $\pi(B) = (x_2, y_2)$ e d é a distância usual de $\mathbb{R}^2$.

Teorema 1.6 *A distância isotrópica D_i é uma propriedade invariante sobre $T \in G_6$.*

Demonstração. Para demonstrar o teorema é necessário que $D_i(T(A), T(B)) = D_i(A, B)$. Assim, sejam $A = (x_1, y_1, z_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{I}^3$. Pela definição (1.4) segue que:

$$\pi(T(A)) = (a + x_1 \cos(\phi) - y_1 \sin(\phi), b + x_1 \sin(\phi) + y_1 \cos(\phi))$$

e

$$\pi(T(B)) = (a + x_2 \cos(\phi) - y_2 \sin(\phi), b + x_2 \sin(\phi) + y_2 \cos(\phi)).$$

Aplicando na definição (1.5) implica que:

$$\begin{aligned} D_i(T(A), T(B))^2 &= d(\pi(T(A)), \pi(T(B)))^2 \\ &= [(x_1 - x_2) \cos(\phi) - (y_1 - y_2) \sin(\phi)]^2 \\ &\quad + [(x_1 - x_2) \sin(\phi) + (y_1 - y_2) \cos(\phi)]^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 \cos^2(\phi) + (y_1 - y_2)^2 \sin^2(\phi) \\ &\quad + (x_1 - x_2)^2 \sin^2(\phi) + (y_1 - y_2)^2 \cos^2(\phi) \\ &= (x_1 - x_2)^2 (\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi)) + (y_1 - y_2)^2 (\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi)) \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \\ &= d(\pi(A), \pi(B))^2 \\ &= D_i(A, B)^2 \end{aligned}$$

□

Definição 1.7 *Seja $l \subset \mathbb{I}^3$ uma reta isotrópica. Dois pontos diferentes sobre l , isto é, $A = (x, y, z_1)$ e $B = (x, y, z_2) \in l$ com $z_1 \neq z_2$ têm distância isotrópica zero, tais pontos são chamados **pontos paralelos**. A diferença*

$$d_s(A, B) = |z_1 - z_2|$$

*é chamado **Vazamento da Distância isotrópica** ou **s - Distância**.*

Teorema 1.8 *A s - distância é uma propriedade geométrica invariante sobre $T \in G_6$.*

Demonstração. Sejam $A = (x, y, z_1)$ e $B = (x, y, z_2) \in \mathbb{I}^3$ dois pontos paralelos. Tem-se que

$$T(A) = (a + x \cos(\phi) + y \sin(\phi), b + x \sin(\phi) + y \cos(\phi), c + c_1 x + c_2 y + z_1)$$

e

$$T(B) = (a + x \cos(\phi) + y \sin(\phi), b + x \sin(\phi) + y \cos(\phi), c + c_1 x + c_2 y + z_2)$$

Assim,

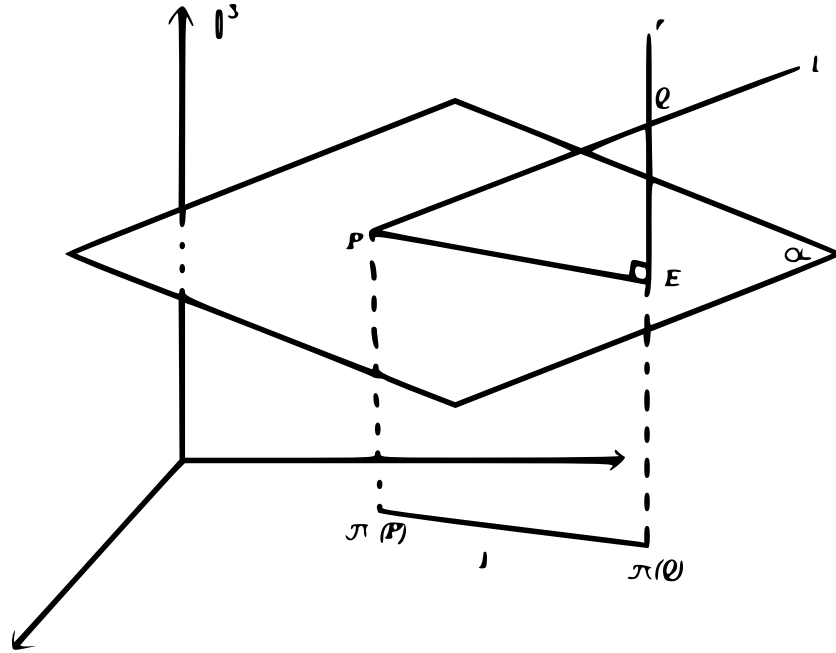
$$T(B) - T(A) = (0, 0, z_2 - z_1)$$

donde

$$d_s(T(A), T(B)) = z_2 - z_1 = d_s(A, B).$$

□

Definição 1.9 *O **ângulo entre duas retas não isotrópicas** é o ângulo Euclidiano das retas vistas por cima. O **ângulo entre uma reta não isotrópica l e um plano não isotrópico α** é zero se são paralelos em $\mathbb{I}^3$. Caso contrário, eles interseção em um ponto $p \in \mathbb{I}^3$. Tomando-se dois pontos paralelos Q, E tais que $Q \in l$ e $E \in \alpha$, e $D_i(p, Q) = D_i(p, E) = 1$, define-se o ângulo entre a reta l e o plano α como $\theta := d_s(E, Q)$. A figura 1.2 mostra com detalhes a definição de um ângulo entre reta e plano.*

Figura 1.2: Ângulo entre uma reta e um plano

Teorema 1.10 *O ângulo entre uma reta não isotrópica l e um plano não isotrópico α é uma propriedade geométrica invariante sobre $T \in G_6$.*

Demonstração. Sejam $A, B \in \mathbb{I}^3$. Combinando o teorema (1.8) com a definição de ângulo tem-se o desejado. $\square$

Definição 1.11 *Sejam α_1, α_2 dois planos não isotrópicos com imagens $z = u_1x + v_1y + w_1$ e $z = u_2x + v_2y + w_2$, respectivamente. Defina-se:*

$$\psi(\alpha_1, \alpha_2) = \sqrt{(u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2} \quad (1-3)$$

como sendo o ângulo entre os planos não isotrópicos α_1 e α_2 .

Considere uma curva $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}^3$ de classe C^2 a qual não possui retas tangentes isotrópicas tem representação $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$ com $t \in I$. Então

$$T(c(t)) = (a + x(t)\cos(\phi) + y(t)\sin(\phi), b + x(t)\sin(\phi) + y(t)\cos(\phi), c + c_1x(t) + c_2y(t) + z(t))$$

é a imagem de uma transformação afim T aplicada nas funções coordenadas da curva c .

Definição 1.12 Comprimento de Arco Isotrópico. *Seja $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}^3$ de classe C^2 a qual não possui retas tangentes isotrópicas. Então define o comprimento de arco isotrópico como:*

$$s(c(t)) = \left\| \pi \left(\frac{dc(t)}{dt} \right) \right\|$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma usual de $\mathbb{R}^2$.

Teorema 1.13 *O comprimento de arco isotrópico é uma propriedade geométrica invariante sobre $T \in G_6$.*

Demonstração. Seja $c(t) = (x(t), y(t), z(t)) \subset \mathbb{I}^3$ u acurva de classe C^2 . Como

$$\frac{dT(c(t))}{dt} = (a + x'(t)\cos(\phi) + y'(t)\sin(\phi), b + x'(t)\sin(\phi) + y'(t)\cos(\phi), c + c_1x'(t) + c_2y'(t) + z'(t))$$

então pela definição (1.12), tem-se:

$$\begin{aligned} s(T(c(t))) &= \left\| \pi \left(\frac{dT(c(t))}{dt} \right) \right\| \\ &= \sqrt{[x'(t)\cos(\phi) - y'(t)\sin(\phi)]^2 + [x'(t)\sin(\phi) + y'(t)\cos(\phi)]^2} \\ &= \sqrt{(x'(t))^2[\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)] + (y'(t))^2[\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)]} \\ &= \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \\ &= \left\| \pi(c'(t)) \right\| \\ &= s(c(t)). \end{aligned}$$

□

Definição 1.14 *Seja $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}^3$ uma curva de classe C^2 que não possui retas tangentes isotrópicas. Além disso, considere $c(t)$ parametrizada pelo comprimento de arco isotrópico $s(t) = 1$. Define-se:*

$$k(c(t)) = \left\| \pi \left(\frac{d^2c(t)}{dt^2} \right) \right\| = \left\| \pi(c''(t)) \right\|, \text{ se } \left\| \pi(c''(t)) \right\| \neq 0$$

Se $\left\| \pi(c''(t_0)) \right\| = 0$ para algum $t_0 \in I$, a curvatura da curva c em t_0 como $k(c(t_0)) = z''(t_0)$. A função k é chamada **curvatura isotrópica** da curva c em $t \in I$.

Teorema 1.15 *A curvatura k de uma curva $c \in \mathbb{I}^3$ é uma propriedade geométrica invariante sobre $T \in G_6$*

Demonstração. Seja $c(t) = (x(t), y(t), z(t)) \subset \mathbb{I}^3$ uma curva de classe C^2 . Como

$$\frac{d^2T(c(t))}{dt^2} = (x''(t)\cos(\phi) - y''(t)\sin(\phi), x''(t)\sin(\phi) + y''(t)\cos(\phi), c_1x''(t) + c_2y''(t) + z''(t))$$

então pela definição (1.14), tem-se:

$$\begin{aligned}
 k(T(c(t))) &= \left\| \pi \left(\frac{d^2 c(t)}{dt^2} \right) \right\| \\
 &= \sqrt{[x''(t) \cos(\phi) - y''(t) \sin(\phi)]^2 + [x''(t) \sin(\phi) + y''(t) \cos(\phi)]^2} \\
 &= \sqrt{(x''(t))^2 [\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)] + (y''(t))^2 [\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)]} \\
 &= \sqrt{(x''(t))^2 + (y''(t))^2} \\
 &= \left\| \pi(c''(t)) \right\| \\
 &= k(c(t)).
 \end{aligned}$$

□

Definição 1.16 *Seja $c: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{I}^3$ uma curva de classe C^2 a qual não possui retas tangentes isotrópicas. Se $k(c(t)) \neq 0$, o vetor **normal principal** é definido por:*

$$n(t) = \frac{c''(t)}{\left\| \pi(c''(t)) \right\|} \quad (1-4)$$

Definição 1.17 *Dados dois vetores $u, v \in \mathbb{I}^3$, diz-se que u é **ortogonal isotrópico** a v se $\langle \pi(u), \pi(v) \rangle = 0$.*

Teorema 1.18 *O vetor normal principal é ortogonal isotrópico a $c'(t)$ e satisfaz $c''(t) = k(c(t))n(t)$.*

Demonstração. Considere $c(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{I}^3$ uma curva de classe C^2 . Além disso, suponha que $c(t)$ é parametrizada pelo comprimento de arco isotrópico. Então

$$\left\| \pi(c'(t)) \right\|^2 = \langle (x'(t), y'(t)), (x'(t), y'(t)) \rangle = 1 \quad (1-5)$$

Derivando a expressão (1-5) em relação a t , obtém-se:

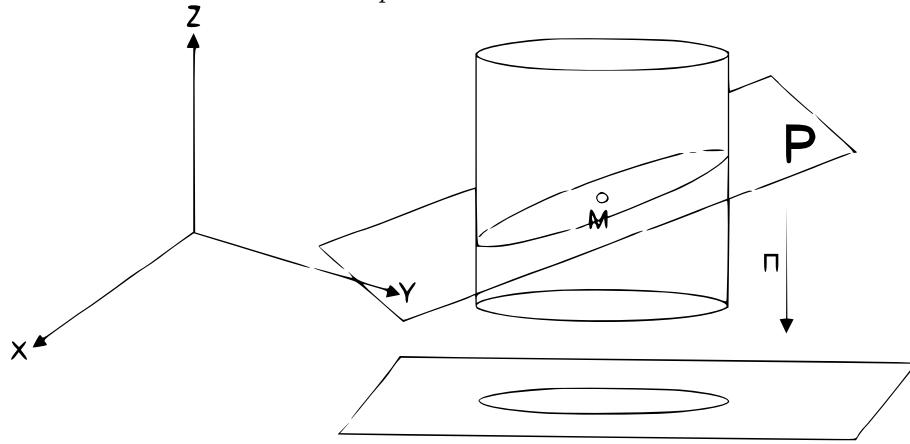
$$\begin{aligned}
 \frac{d \left\| \pi(c'(t)) \right\|^2}{dt} &= 2 \langle (x''(t), y''(t)), (x'(t), y'(t)) \rangle \\
 &= 2k(c(t)) \langle \pi(n(t), \pi(c'(t))) \rangle = 0
 \end{aligned}$$

□

1.2 i - Circunferências e i - Esferas

Definição 1.19 Uma i - **circunferência do tipo elíptica em um plano não isotrópico** P é uma elipse em P onde sua projeção pela vista de cima é uma circunferência Euclidiana. Essa i - circunferência do tipo elíptica com centro $m \in P$, e raio ($r > 0$) é o conjunto de pontos $x \in P$ tais que $D_i(m, x) = r$. A figura abaixo apresenta um esquema enfatizando uma i - circunferência do tipo elíptica,

Figura 1.3: i - circunferência do tipo elíptica em um plano não isotrópico



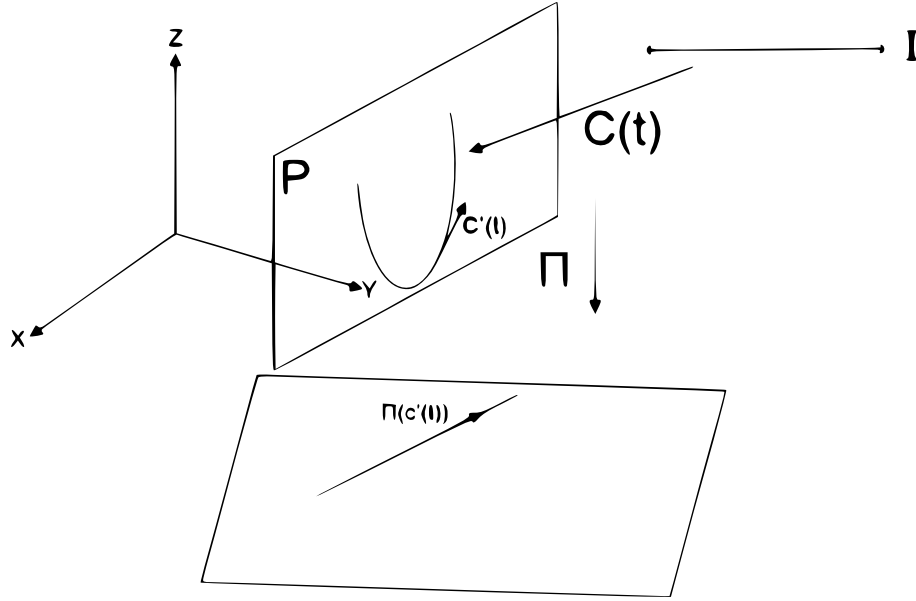
Note que uma i - circunferência do tipo elíptica é a curva obtida pela intersecção de um cilindro vertical e um plano não isotrópico.

Definição 1.20 Uma i - **circunferência do tipo parabólica** é uma parábola com eixo z paralelo, portanto, ela está necessariamente contida em um plano isotrópico P_i .

Uma i - circunferência do tipo parabólica não pode ser observada como um conjunto de pontos os quais a distância isotrópica D_i de um ponto fixo m é sempre um número $r > 0$, porém ela pode ser vista como uma curva com curvatura isotrópica constante. Para isso, seja $c(t)$ uma i - circunferência do tipo parabólica no plano isotrópico P_i que não possua retas tangentes isotrópicas, além disso, sem perda de generalidade, suponha $y = 0$ em P_i . Então a componente $z(t)$ pode ser escrita como $z(t) = at^2 + bt + c$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$. Logo $c(t) = (t, 0, at^2 + bt + c)$, donde $c''(t) = (0, 0, 2a)$. assim, a curvatura isotrópica da curva $c(t)$ é igual a $2a$ uma constante.

Definição 1.21 As i - esferas do tipo parabólico são dadas por gráficos de funções do tipo

$$z(x, y) = \frac{A}{2}(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D \quad (1-6)$$

Figura 1.4: i - circunferência do tipo parabólica

com $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$. As i - esferas do tipo parabólico são divididas em dois casos:

(i) **Tipo 1.** A i - esfera parabólica do tipo 1 tem equação da forma

$$z(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad (1-7)$$

onde $R = \frac{1}{2}$ é chamado de raio da i - esfera parabólica.

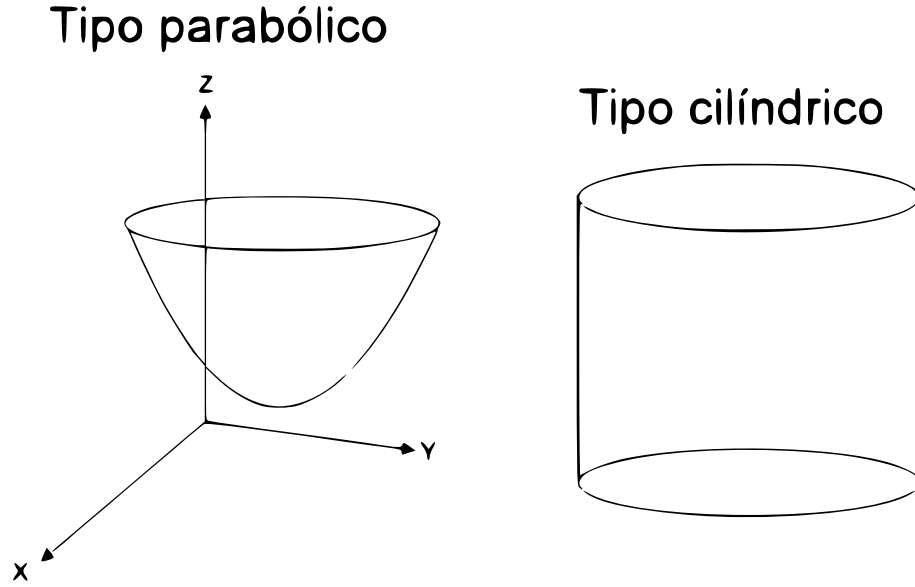
(ii) **Tipo 2.** A i - esfera de tipo 2 tem equação da forma

$$x^2 + y^2 = r^2, r > 0, \quad (1-8)$$

onde r é chamado raio da i - esfera de tipo cilíndrico.

Note que em uma perspectiva Euclidiana, são paraboloides de revolução com eixo paralelo ao eixo z . As interseções dessas i - esferas do tipo parabólico com planos P serão sempre i - circunferências. Se P não é um plano isotrópico, então a interseção é uma i - circunferência do tipo elíptica. Se P é um plano isotrópico, a interseção se torna uma i - circunferência do tipo parabólica.

As interseções das i -esferas do tipo cilíndrico com planos não isotrópicos P serão sempre i - circunferências do tipo elíptica.

Figura 1.5: i - esferas

1.3 Teoria de Superfícies tipo gráfico

Teorema 1.22 *Seja p um ponto de uma superfície regular S . Então S é localmente o gráfico de uma função diferenciável $z = z(u, v)$ em $p = (u, v)$ se, e somente se, S não tem planos tangentes isotrópicos.*

Demonstração. Seja S uma superfície regular obtida como o gráfico de uma função diferenciável $z = z(u, v)$. Assim, S tem parametrização da forma $X(u, v) = (u, v, z(u, v))$, onde z está definida nos pontos $p = (u, v)$ de um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Logo,

$$X_u(u, v) = (1, 0, z_u(u, v))$$

e

$$X_v(u, v) = (0, 1, z_v(u, v)).$$

Portanto, o vetor normal unitário do plano tangente da superfície S no ponto $p = (u, v)$ é dado por

$$N(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{(-z_u, -z_v, 1)}{\sqrt{z_u^2 + z_v^2 + 1}}.$$

Como a terceira componente é diferente de zero para todo $p \in U$, segue que S não possui planos tangentes isotrópicos.

Por outro lado, considere $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização de S em $p = (u, v)$, isto é

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in U$$

Por hipótese, S não tem planos tangentes isotrópicos, portanto,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$$

em $X^{-1}(p) = q$. Considere a aplicação $\pi \circ X : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, então

$$\pi \circ X(u, v) = (x(u, v), y(u, v)),$$

e como $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$, aplicando o teorema da função inversa, tem-se a existência de vizinhanças V de q , e W de $\pi \circ X(q)$, tais que $(\pi \circ X)$ é um difeomorfismo entre V e W , como X é um homeomorfismo, $X(V)$ é uma vizinhança de p em S . Considere a composta $X^{-1} \circ \pi^{-1} : (x, y) \rightarrow (u(x, y), v(x, y))$ com a função $(u, v) \rightarrow z(u, v)$, $X(V)$ é o gráfico de uma função diferenciável $z = z(u(x, y), v(x, y))$. $\square$

A superfície regular S pode ser vista como o gráfico de uma função diferenciável $z = z(u, v)$ simplesmente fazendo a união de cada aberto W gerado pela construção anterior dado $p \in S$.

Definição 1.23 Uma **seção normal** de uma superfície regular S no ponto $p = (u, v, z(u, v)) \in S$ é a interseção de S com um plano isotrópico P_i que contém o ponto P .

Teorema 1.24 As Curvaturas das curvas de uma superfície regular S dada pelo gráfico de uma função $z = z(u, v)$ no ponto $p = (u_0, v_0, z(u_0, v_0)) \in S$ são dadas pelas derivadas direcionais de z em (u_0, v_0) .

Demonstração. Sejam $X(u, v) = (u, v, z(u, v))$ uma parametrização da superfície S e $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ uma curva dada pela interseção de S com um plano isotrópico P_i o qual contém o ponto $p = (u_0, v_0, z(u_0, v_0)) = c(t_0)$ para algum $t_0 \in I$. Fazendo a projeção $\pi(c(t)) = (x(t), y(t))$, tem-se que $\pi(c(t))$ é uma reta no plano XY com vetor velocidade $\pi(c'(t))$. Portanto,

$$\pi(c(t)) = (x(t_0) + tx'(t_0), y(t_0) + ty'(t_0)),$$

onde $x(t_0) = u_0$ e $y(t_0) = v_0$. Logo, $c(t)$ pode ser parametrizada na superfície S como:

$$X(t) = (x(t_0) + tx'(t_0), y(t_0) + ty'(t_0), z(x(t_0) + tx'(t_0), y(t_0) + ty'(t_0))).$$

Fazendo $u(t) = x(t_0) + tx'(t_0)$ e $v(t) = y(t_0) + ty'(t_0)$ e derivando a expressão em relação a t tem-se:

$$X'(t) = (u'(t), v'(t), z_u(u(t), v(t))u'(t) + z_v(u(t), v(t))v'(t)).$$

donde

$$\begin{aligned} X''(t) = & (u''(t), v''(t), z_{uu}(u(t), v(t))u'(t)^2 + z_{vu}(u(t), v(t))u'(t)v'(t) + \\ & v(t))u'(t)v'(t) + z_u(u(t), v(t))u''(t) + z_{vv}(u(t), v(t))v'(t)^2 + \\ & z_{uv}(u(t), v(t))v'(t)u'(t) + z_v(u(t), v(t))v''(t)) \end{aligned}$$

como $u''(t) = v''(t) = 0$, para todo $t \in I$, tem-se que a curvatura da curva $c(t)$ no ponto p com respeito ao plano isotrópico P_i é dada por:

$$k(c(t_0)) = z_{uu}(u(t_0), v(t_0))u'(t_0)^2 + 2z_{uv}(u(t_0), v(t_0))u'(t_0)v'(t_0) + z_{vv}(u(t_0), v(t_0))v'(t_0)^2$$

A curvatura $k(c(t_0))$ pode ser representada por

$$k(c(t_0)) = (u'(t_0), v'(t_0))^T \begin{pmatrix} z_{uu}(u(t_0), v(t_0)) & z_{vu}(u(t_0), v(t_0)) \\ z_{uv}(u(t_0), v(t_0)) & z_{vv}(u(t_0), v(t_0)) \end{pmatrix} (u'(t_0), v'(t_0)) \quad (1-9)$$

□

Definição 1.25 *Seja S uma superfície regular dada pelo gráfico de uma função diferenciável $z = z(u, v)$. Seja $r \in S^1$ onde $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$. A **curvatura normal isotrópica** em $p = (u_0, v_0, z(u_0, v_0)) \in S$ na direção r é dada por:*

$$k_n(r) = r^T \cdot \nabla^2 z(u_0, v_0) \cdot r \quad (1-10)$$

onde $\nabla^2 z$ denota a Hessiana de z , e r é um vetor unitário em S^1 .

A matriz $\nabla^2 z$ é um operador simétrico já que f é uma função diferenciável. Além disso ela é uma aplicação auto adjunta e existe uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ tais que $\nabla^2 z(e_1) = \lambda_1 e_1$ e $\nabla^2 z(e_2) = \lambda_2 e_2$ (isto é, e_1 e e_2 são autovetores, e λ_1 e λ_2 são auto-valores de $\nabla^2 z$). Na base $\{e_1, e_2\}$, a matriz de $\nabla^2 z$ é diagonal e os elementos λ_1 e λ_2 , $\lambda_1 \leq \lambda_2$ da diagonal são o máximo e o mínimo, respectivamente, da forma quadrática $Q(v) = \langle \nabla^2 z(v), v \rangle$ sobre o círculo unitário de $\mathbb{R}^2$. Assim, seguem as definições abaixo.

Definição 1.26 Os valores extremos k_1 e k_2 de $k_n(r)$ são dados pelos autovalores da aplicação linear $\nabla^2 z$ sobre S^1 , elas são chamadas **curvaturas principais**. As correspondentes direções ortonormais r_1 e $r_2 \in S^1$ são autovetores de $\nabla^2 z$, elas são chamadas de **direções principais**.

Definição 1.27 Sejam k_1 e k_2 as curvaturas principais de S . Definam-se

$$K = k_1 k_2 = \det(\nabla^2 z) = z_{uu} z_{vv} - z_{uv}^2 \quad (1-11)$$

e

$$2H = k_1 + k_2 = \text{tr}(\nabla^2 z) = z_{uu} + z_{vv}. \quad (1-12)$$

K é chamada **curvatura gaussiana isotrópica** e H é chamada de **curvatura média isotrópica**.

Definição 1.28 Seja S uma superfície regular dada pelo gráfico de uma função diferenciável $z = z(u, v)$. S é uma superfície mínima isotrópica se $H = 0$, para todo $p \in S$.

Proposição 1.29 Se S é o gráfico de uma função diferenciável $z = z(u, v)$, tem-se que S é mínima isotrópica se, e somente se, z é uma função harmônica.

A demonstração decorre imediatamente da definição (1-12).

Acima, na definição (1.28), já foi definido K como a curvatura Gaussiana. É possível verificar que a versão isotrópica da Curvatura Gaussiana é exatamente esta. Note que na versão isotrópica a teoria de curvatura Gaussiana toma a i -esfera parabólica Tipo 1.

$$s(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

Seja S uma superfície regular dada pelo gráfico de uma função diferenciável $z = z(x, y)$. A cada ponto $p = (x, y, z(x, y)) \in S$ associa-se como imagem Gaussiana o ponto $\sigma(p) = (x, y, s(x, y))$ cujo o plano tangente é paralelo ao plano tangente de S em p , isto é, os vetores normais orientados N_1, N_2 de p e $\sigma(p)$, respectivamente, são paralelos. Assim, existe $\lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$ tal que $N_1 = \lambda N_2$. Como $N_1 = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \times \frac{\partial z}{\partial y} \right) = (-z_x, -z_y, 1)$, e $N_2 = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \times \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right) = (-x, -y, 1)$. Observando a terceira componente percebe-se que $\lambda = 1$, e assim, segue que $x = z_x$, $y = z_y$, e

$$\sigma(p) = \left(z_x, z_y, \frac{1}{2}(z_x^2 + z_y^2) \right).$$

Com isso, a derivada da aplicação σ é dada por:

$$\partial\sigma = \begin{pmatrix} z_{xx} & z_{yx} \\ z_{xy} & z_{yy} \\ z_x z_{xx} + z_y z_{xy} & z_x z_{yx} + z_y z_{yy} \end{pmatrix} \quad (1-13)$$

Logo, a vista por cima da derivada da aplicação σ dada em (1-13) coincide com $\nabla^2 z$, e assim, a curvatura K definida em (1-11) é de fato, a curvatura Gaussiana de S .

Superfícies translacionais afim de Weingarten

Neste capítulo são abordadas algumas superfícies translacionais afim de Weingarten de tipo 1 no espaço isotrópico $\mathbb{I}^3$. Os teoremas (2.4) e (2.7) trazem uma classificação para tais superfícies.

2.1 Conceitos básicos

No capítulo anterior foi realizado um estudo sobre o espaço isotrópico $\mathbb{I}^3$, bem como a teoria de superfícies do tipo gráfico nesse mesmo espaço. A seguir é realizado um estudo classificatório de superfícies translacionais afim de Weingarten, que consiste em classificar superfícies que possuem relações diferenciáveis entre as curvaturas Gaussiana e Média.

Uma Superfície Translacional de tipo 1 é obtida pela translação de duas curvas nos planos isotrópicos $x = 0$ e $y = 0$, sendo o gráfico de uma função do tipo

$$z(x, y) = f(x) + g(y).$$

Definição 2.1 *Seja S uma superfície que é o gráfico em $\mathbb{I}^3$ de uma função diferenciável $z(x, y) = f(u) + g(v)$, onde*

$$u = ax + by \tag{2-1}$$

$$v = cx + dy \tag{2-2}$$

*Se $ad - bc \neq 0$, diz-se que a superfície S é uma **superfície translacional afim de Tipo 1** em $\mathbb{I}^3$ e o par (u, v) são as **coordenadas dos parâmetros afim**.*

Definição 2.2 *Uma superfície é dita de **Weingarten**, ou **W - Superfície**, desde*

que as curvaturas principais k_1 e k_2 da mesma satisfazem a relação

$$W(k_1, k_2) = 0.$$

Utilizando a fórmula encontrada em [6] segue que

$$\begin{aligned} k_1 &= H + \sqrt{H^2 - K} \\ k_2 &= H - \sqrt{H^2 - K}. \end{aligned}$$

Assim, pode-se concluir que uma superfície é de Weingarten se existe uma relação

$$U(H, K) = 0.$$

Se a matriz dos coeficientes dada em (2-1) e (2-2) for ortogonal, a superfície se reduz a uma superfície translacional do tipo 1 em $\mathbb{I}^3$.

A proposição abaixo apresenta as curvaturas Média e Gaussiana de uma superfície translacional afim de Weingarten.

Proposição 2.3 *Seja S uma superfície translacional afim. Então suas curvaturas média e Gaussiana são dadas por*

$$K = f'' g'' (ad - bc)^2 \quad (2-3)$$

e

$$2H = f'' (a^2 + b^2) + g'' (c^2 + d^2). \quad (2-4)$$

Demonstração. Se S é uma superfície translacional afim, ela pode ser escrita como o gráfico de uma função diferenciável $z = z(x, y) = f(ax + by) + g(cx + dy)$. Derivando a função z com respeito as parâmetros u e v , tem-se a Hessiana de z da forma:

$$H = \begin{pmatrix} f'' a^2 + g'' c^2 & f'' ab + g'' cd \\ f'' ab + g'' cd & f'' b^2 + g'' d^2 \end{pmatrix}$$

Utilizando as definições (1-11) e (1-12) segue que

$$\begin{aligned} 2H &= (f'' a^2 + g'' c^2) + (f'' b^2 + g'' d^2) \\ &= f'' (a^2 + b^2) + g'' (c^2 + d^2) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} K &= (f'' a^2 + g'' c^2)(f'' b^2 + g'' d^2) - (f'' ab + g'' cd)^2 \\ &= f'' g'' (ad - bc)^2 \end{aligned}$$

□

2.2 Superfícies Translacionais Afim de Weingarten satisfazendo $K_x H_y - K_y H_x = 0$

Nessa seção é abordado o teorema (2.4) que trata de classificar superfícies translacionais afim de Weingarten em $\mathbb{I}^3$ que satisfazem

$$K_x H_y - K_y H_x = 0.$$

Teorema 2.4 *Seja S uma superfície translacional afim de Weingarten satisfazendo as seguintes condições.*

$$K_x H_y - K_y H_x = 0. \quad (2-5)$$

Então S é o gráfico de alguma das funções descritas abaixo.

- S é o gráfico de

$$z(x, y) = c_1 u^2 + \frac{c_1(a^2 + b^2)}{(c^2 + d^2)} v^2 + c_2 u + c_3 v + c_4$$

- S é o gráfico da função abaixo, se $f''' \neq 0$

$$z(x, y) = f(u) + c_1 v^2 + c_2 v + c_3$$

ou

- S é o gráfico da função abaixo, se $fg''' \neq 0$

$$z(x, y) = g(v) + c_1 u^2 + c_2 u + c_3$$

onde $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ e (u, v) são as coordenadas dos parâmetros afim dados em (2-1) e (2-2).

Demonstração. Seja S uma superfície translacional afim de Weingarten. Unindo (2-3) e (2-4) e a hipótese $K_x H_y - K_y H_x = 0$. Tem-se

$$\begin{aligned}
k_x H_y - K_y H_x &= (f''' g''' (ad-bc)^2 a + f''' g''' (ad-bc)^2 c) \left(\frac{f''' (a^2+b^2)b + g''' (c^2+d^2)d}{2} \right) \\
&- (f''' g''' (ad-bc)^2 b + f''' g''' (ad-bc)^2 d) \left(\frac{f''' (a^2+b^2)a + g''' (c^2+d^2)c}{2} \right) \\
&= f''' g''' g''' (ad-bc)^3 (c^2+d^2) - f''' g''' f''' (ad-bc)^3 (a^2+b^2).
\end{aligned}$$

Como $(ad-bc) \neq 0$ segue que

$$\begin{aligned}
k_x H_y - K_y H_x &= f''' g''' g''' (c^2+d^2) - f''' g''' f''' (a^2+b^2) \\
&= f''' g''' [f''' (a^2+b^2) + g''' (c^2+d^2)] = 0
\end{aligned}$$

Assim segue que

$$f''' g''' [f''' (a^2+b^2) + g''' (c^2+d^2)] = 0. \quad (2-6)$$

Para resolver (2-6) deve-se solucionar os seguintes casos:

- **Caso 1.** $f''' = 0$, $g''' \neq 0$ e $f''' (a^2+b^2) \neq g''' (c^2+d^2)$. Integrando f''' com relação ao parâmetro u segue que

$$f(u) = c_1 u^2 + c_2 u + c_3$$

Assim, $z(x, y) = g(v) + c_1 u^2 + c_2 u + c_3$, onde c_1, c_2 e $c_3 \in \mathbb{R}$

- **Caso 2.** $f''' \neq 0$, $g''' = 0$ e $f''' (a^2+b^2) \neq g''' (c^2+d^2)$. É análogo ao caso anterior, assim $z(x, y) = f(u) + c_1 v^2 + c_2 v + c_3$, onde c_1, c_2 e $c_3 \in \mathbb{R}$
- **Caso 3.** $f''' (a^2+b^2) = g''' (c^2+d^2)$. Para este caso tem-se que

$$g''' = f''' \frac{(a^2+b^2)}{(c^2+d^2)} = c_1. \quad (2-7)$$

Como f depende de u e g depende de v , integrando (2-7) de ambos os lados tem-se que $z(x, y) = c_1 u + c_2 u + c_1 \frac{(a^2+b^2)}{(c^2+d^2)} + c_3 v + c_4$ onde c_1, c_2 e $c_3, c_4 \in \mathbb{R}$.

□

Exemplo 2.5 Dada S a superfície translacional afim de Weingarten em $\mathbb{I}^3$ com parametrização dada por

$$X(x, y) = (x, y, (x+y)^2 + 2x),$$

ela satisfaz a equação (2-5) e seu gráfico é dado pela figura (2.1). Note que $u = x + y$, $v = 2x$. Assim, $a = 1$, $b = 1$, $c = 2$ e $d = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} f(u) &= (x + y)^2 \\ g(v) &= 2x. \end{aligned}$$

Calculando a matriz hessiana $\nabla^2 z$ obtém-se:

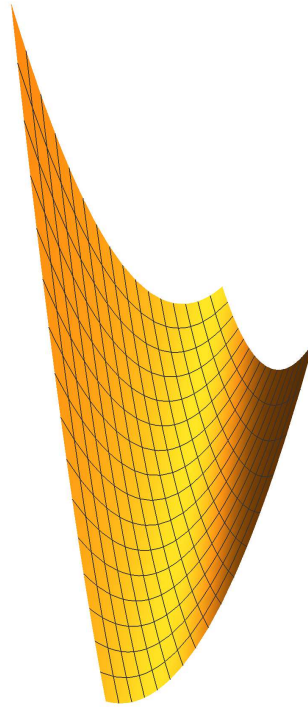
$$\nabla^2 z = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

logo, as curvaturas Gaussiana e Média serão:

$$\begin{aligned} k &= -4 \\ H &= 1. \end{aligned}$$

Como os valores de H e K são constantes, segue que $k_x = H_x = K_y = H_y = 0$. Logo, a relação dada em (2-5) é satisfeita.

Figura 2.1: $z(x, y) = (x + y)^2 + 2x$



Exemplo 2.6 Dada S a superfície translacional afim de Weingarten em $\mathbb{I}^3$ com parametrização dada por

$$X(x, y) = (x, y, \cos(y) + (x - y)^2),$$

ela satisfaz a equação (2-5) e seu gráfico é dado pela figura (2.2). Note que $u = y$, $v = x - y$. Assim, $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$ e $d = -1$. Logo,

$$\begin{aligned} f(u) &= \cos(y) \\ g(v) &= (x - y)^2. \end{aligned}$$

Calculando a matriz hessiana $\nabla^2 z$ obtém-se:

$$\nabla^2 z = \begin{pmatrix} 2 & -\cos(y) - 2 \\ -2 & -\cos(y) + 2 \end{pmatrix}$$

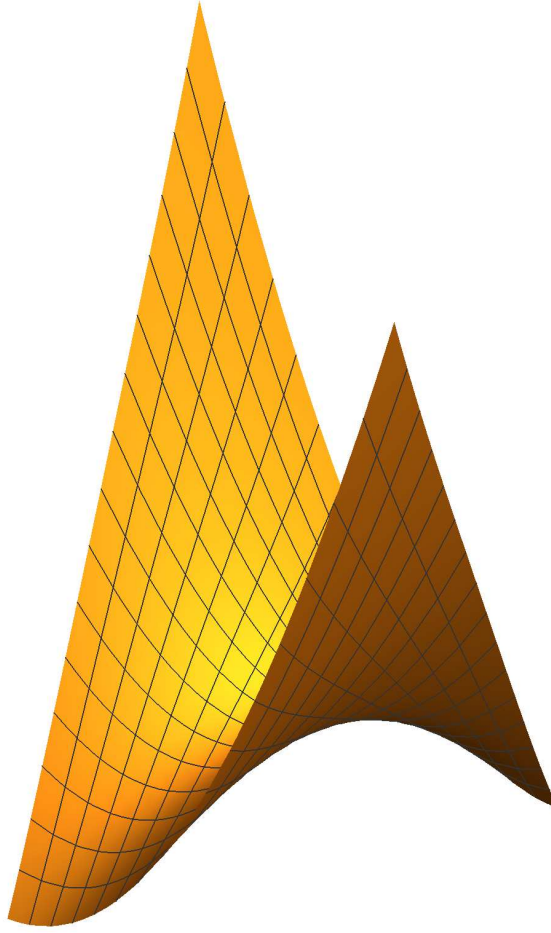
logo, as curvaturas Gaussiana e Média serão:

$$\begin{aligned} K &= 2(-\cos(y) + 2) + 2(-\cos(y) - 2) \\ &= -2\cos(y) - 2\cos(y) \\ &= -4\cos(y) \\ H &= \frac{-\cos(y) + 4}{2}. \end{aligned}$$

Neste caso segue que

$$\begin{aligned} K_x &= 0 \\ K_y &= 4\sin(y) \\ H_x &= 0 \\ H_y &= \frac{1}{2}\sin(y). \end{aligned}$$

Logo, a equação (2-5) é satisfeita.

Figura 2.2: $z(x, y) = \cos(y) + (x - y)^2$ 

2.3 Superfícies Translacionais Afim de Weingarten satisfazendo $\alpha K + \beta H = \gamma$

Essa seção se destina a classificar as superfícies translacionais afim de Weingarten que satisfazem $\alpha K + \beta H = \gamma$. Sem perda de generalidade pode-se supor $\alpha \neq 0$ e dividir a expressão por α . Assim,

$$K + 2m_0H = n_0, 2m_0 = \frac{\beta}{\alpha}, n_0 = \frac{\gamma}{\alpha}. \quad (2-8)$$

Considerando a equação (2-8), segue o teorema abaixo.

Teorema 2.7 *Seja S uma superfície translacional afim de Weingarten de tipo 1 em $\mathbb{I}^3$ satisfazendo (2-8). Então tem-se:*

- S é o gráfico de

$$z(x, y) = c_1 u^2 + c_2 v^2 + c_3 u + c_4 v + c_5$$

- S é o gráfico de

$$z(x, y) = f(u) - \frac{m_0(c^2 + d^2)}{2(ad - bc)^2} v^2 + c_1 v + c_2, f''' \neq 0$$

ou

$$z(x, y) = g(v) - \frac{m_0(c^2 + d^2)}{2(ad - bc)^2} u^2 + c_1 u + c_2, g''' \neq 0$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ e (u, v) são as coordenadas dos parâmetros afim dados em (2-1) e (2-2).

Demonstração. Substituindo as expressões para a curvatura dados em (2-3) e (2-4) em (2-8) segue que

$$(ad - bc)^2 f'' g'' + m_0(a^2 + b^2) f'' + m_0(c^2 + d^2) g'' = n_0. \quad (2-9)$$

Derivando a expressão dada em (2-9) com respeito a u de ambos os lados, onde $u = ax + by$ e dividindo por a , tem-se:

$$f''' [(ad - bc)^2 g'' + m_0(a^2 + b^2)] = 0. \quad (2-10)$$

Derivando a expressão dada em (2-9) com respeito a v de ambos os lados, onde $v = cx + dy$ e dividindo por c , tem-se:

$$g''' [(ad - bc)^2 f'' + m_0(c^2 + d^2)] = 0. \quad (2-11)$$

Observando as expressões (2-10) e (2-11), pode-se considerar três casos diferentes para a solução das equações.

- **Caso** $g''' = f''' = 0$. Integrando f com relação a u e g com relação a v segue que

$$z(x, y) = c_1 u^2 + c_2 v^2 + c_3 u + c_4 v + c_5 \quad (2-12)$$

onde $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{R}$ e (u, v) são as coordenadas dos parâmetros afim dados em (2-1) e (2-2).

- **Caso** $g''' \neq 0$. Neste caso segue que $[(ad - bc)^2 f'' + m_0(c^2 + d^2)] = 0$. Assim,

$$f'' = \frac{-m_0(c^2 + d^2)}{(ad - bc)^2}.$$

Integrando f com relação a u e considerando que g é livre tem-se:

$$z(x, y) = g(v) - \frac{m_0(c^2 + d^2)}{2(ad - bc)^2} u^2 + c_1 u + c_2, g''' \neq 0$$

- **Caso** $f''' \neq 0$. Para este caso tem-se que $[(ad - bc)^2 g'' + m_0(a^2 + b^2)] = 0$. De maneira análoga, integrando g com relação a v e f ficando livre tem-se:

$$z(x, y) = f(u) - \frac{m_0(c^2 + d^2)}{2(ad - bc)^2} v^2 + c_1 v + c_2, f''' \neq 0$$

□

Exemplo 2.8 Considere a superfície translacional afim de tipo 1 em $\mathbb{I}^3$ dada por

$$X(x, y) = (x, y, (x - y)^2 + (x + y)^2)$$

.

Ela satisfaz a condição dada em (2-8) e seu gráfico está plotado na figura (2.3). Note que $u = x - y$, $v = x + y$. Assim, $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$ e $d = 1$. Logo,

$$\begin{aligned} f(u) &= (x - y)^2 \\ g(v) &= (x + y)^2. \end{aligned}$$

Calculando a matriz hessiana $\nabla^2 z$ obtém-se:

$$\nabla^2 z = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

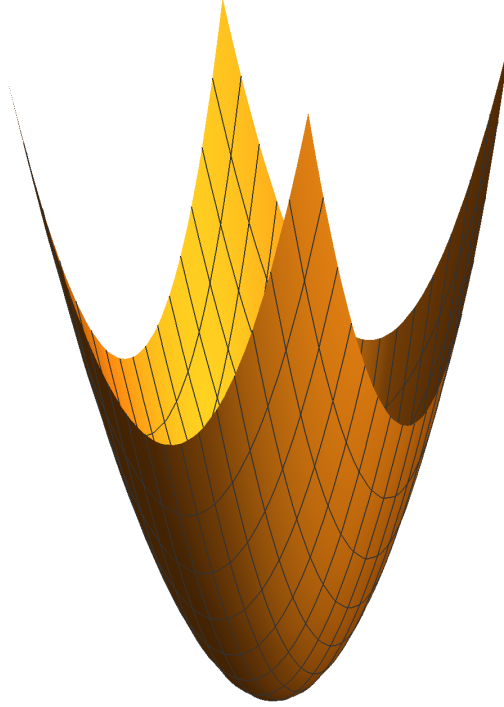
logo, as curvaturas Gaussiana e Média serão:

$$\begin{aligned} K &= 16 \\ H &= 4. \end{aligned}$$

Neste caso segue que

$$K + 4H = 32$$

e assim, a equação (2-8) é satisfeita para $m_0 = 2$ e $n_0 = 32$.

Figura 2.3: $z(x, y) = (x - y)^2 + (x + y)^2$ 

Exemplo 2.9 Considere a superfície translacional afim de tipo 1 em $\mathbb{I}^3$ dada por

$$X(x, y) = (x, y, \ln(x + y) - y^2)$$

.

Ela satisfaz a condição dada em (2-8) e seu gráfico está plotado na figura (2.4). Note que $u = x + y$, $v = y$. Assim, $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$ e $d = 1$. Logo,

$$\begin{aligned} f(u) &= \ln(x + y) \\ g(v) &= -y^2. \end{aligned}$$

Calculando a matriz hessiana $\nabla^2 z$ obtém-se:

$$\nabla^2 z = \begin{pmatrix} -\frac{1}{(x+y)^2} & -\frac{1}{(x+y)^2} \\ -\frac{1}{(x+y)^2} & -\frac{1}{(x+y)^2} - 2 \end{pmatrix}$$

logo, as curvaturas Gaussiana e Média serão:

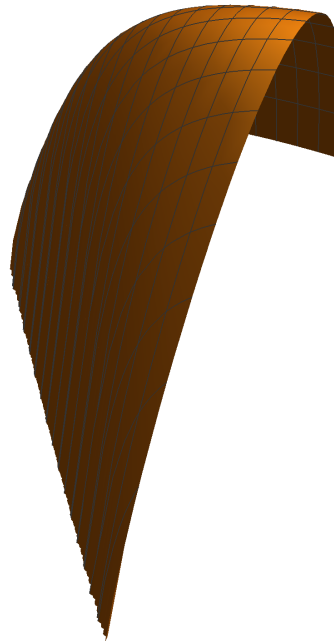
$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{(x+y)^4} + \frac{2}{(x+y)^2} - \frac{1}{(x+y)^4} \\ &= \frac{2}{(x+y)^2} \\ H &= -\frac{1}{(x+y)^2} - 1 \end{aligned}$$

Neste caso segue que

$$K + 2H = 2$$

e assim, a equação (2-8) é satisfeita para $m_0 = 1$ e $n_0 = 2$.

Figura 2.4: $z(x, y) = \ln(x + y) - y^2$



Superfícies Translacionais Afim

Satisfazendo $\Delta^{I,II}r_i = \lambda_i r_i$

Neste capítulo são abordadas as superfícies translacionais de tipo 1 no espaço isotrópico $\mathbb{I}^3$ que satisfazem certas equações em termos do vetor posição e do operador Laplaciano. Essas equações são dadas em termos do Laplaciano com relação a primeira e segunda forma fundamental da superfície.

Abaixo seguem dois teoremas (3.5) e (3.14) que classificam as superfícies translacionais afim de tipo 1 em $\mathbb{I}^3$ que satisfazem essas condições. São apresentados também algumas proposições e lemas necessários para a demonstrações dos teoremas, bem como exemplos de superfícies que satisfazem as referidas equações.

3.1 Caso $\Delta^I r_i = \lambda_i r_i$

Esta seção trata as superfícies translacionais afim de tipo 1 em $\mathbb{I}^3$ que satisfazem $\Delta^I r_i = \lambda_i$, onde $\Delta^I r_i$ é o Laplaciano com relação à primeira forma fundamental e r_i é o vetor posição da superfície. Uma parametrização para tais superfícies é do tipo

$$X(x, y) = (r_1(x, y), r_2(x, y), r_3(x, y)) \quad (3-1)$$

que para superfícies translacionais afim se torna

$$X(x, y) = (x, y, f(ax + by) + g(cx + dy)) \quad (3-2)$$

Abaixo, seguem algumas definições e proposições necessárias para demonstrar o teorema (3.5).

Definição 3.1 Na métrica isotrópica, o **produto interno entre dois vetores** $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$ é dado por:

$$\begin{aligned}\langle u, v \rangle_i &= \langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle \\ &= x_1 x_2 + y_1 y_2\end{aligned}$$

Proposição 3.2 Seja S uma superfície translacional afim de tipo 1 em $\mathbb{I}^3$ gráfico de uma função $z(x, y) = f(ax + by) + g(cx + dy)$. Então seus coeficientes da Primeira Forma Fundamental são $E = 1$, $F = 0$ e $G = 1$.

Demonstração. Seja $X(x, y) = (x, y, f(ax + by) + g(cx + dy))$ uma parametrização para S . Então tem-se que

$$X_x = (1, 0, af'(ax + by) + cg'(cx + dy)) \quad (3-3)$$

$$X_y = (0, 1, bf'(ax + by) + dg'(cx + dy)). \quad (3-4)$$

Assim segue que:

$$E = \langle X_x, X_x \rangle = \langle (1, 0), (1, 0) \rangle = 1$$

$$F = \langle X_x, X_y \rangle = \langle (1, 0), (0, 1) \rangle = 0$$

$$G = \langle X_y, X_y \rangle = \langle (0, 1), (0, 1) \rangle = 1$$

□

Definição 3.3 Seja S uma superfície e ϕ uma função diferenciável. Então o **Operador de Laplaciano com respeito a Primeira Forma Fundamental** é dado por:

$$\Delta^I \phi = -\frac{1}{\sqrt{W}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{G\phi_x - F\phi_y}{\sqrt{W}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{F\phi_x - E\phi_y}{\sqrt{W}} \right) \right\} \quad (3-5)$$

onde $W = EG - F^2$.

Proposição 3.4 Seja S uma superfície translacional em $\mathbb{I}^3$, então o Operador Laplaciano com relação a Primeira Forma Fundamental é dado por

$$\Delta^I = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} \quad (3-6)$$

Demonstração. Como $E = G = 1$ e $F = 0$, substituindo esse valores em (3.3) tem-se que:

$$\begin{aligned}\Delta^I \phi &= \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(\phi_x) - \frac{\partial}{\partial y}(-\phi_y) \right\} \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(\phi_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\phi_y) \right\} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} \right) (\phi)\end{aligned}$$

□

Teorema 3.5 *Seja S uma superfície translacional afim de tipo 1 em $\mathbb{I}^3$ satisfazendo $\Delta^I r_i = \lambda_i r_i$. então S é o gráfico de uma das seguintes funções:*

- $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, 0)$

$$z(x, y) = c_1 u^2 - \frac{c_1(a^2 + b^2)}{(c^2 + d^2)} v^2 + c_3 u + c_4 v + c_5$$

- $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, \lambda > 0)$

$$z(x, y) = c_1 e^{\sqrt{\frac{\lambda}{a^2+b^2}} u} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{a^2+b^2}} u} + c_3 e^{\sqrt{\frac{\lambda}{a^2+b^2}} v} + c_4 e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{a^2+b^2}} v}$$

- $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, \lambda < 0)$

$$z(x, y) = c_1 \cos \left(\sqrt{\frac{-\lambda}{a^2+b^2}} u \right) + c_2 \sin \left(\sqrt{\frac{-\lambda}{a^2+b^2}} u \right) + c_3 \cos \left(\sqrt{\frac{-\lambda}{c^2+d^2}} v \right) + c_4 \sin \left(\sqrt{\frac{-\lambda}{c^2+d^2}} v \right)$$

Demonstração. Já é conhecido que o Operador Laplaciano com relação à Primeira Forma Fundamental em $\mathbb{I}^3$ é dado por $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Seja S uma superfície translacional afim parametrizada como $X(x, y) = (x, y, f(ax + by) + g(cx + dy))$, onde $r_1 = x$, $r_2 = y$ e $r_3 = f(ax + by) + g(cx + dy)$. Aplicando o Laplaciano nas coordenadas da parametrização de S tem-se que

$$\Delta^I r_1 = \frac{\partial^2(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(x)}{\partial y^2} = 0. \quad (3-7)$$

De forma análoga segue que

$$\Delta^I r_2 = \frac{\partial^2(y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(y)}{\partial y^2} = 0. \quad (3-8)$$

Calculando $\Delta^I r_3$ tem-se que

$$\begin{aligned}\Delta^I r_3 &= \frac{\partial^2(f(ax+by)+g(cx+dy))}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(f(ax+by)+g(cx+dy))}{\partial y^2} \\ &= f''(ax+by)a^2 + g''(cx+dy)c^2 + f''(ax+by)b^2 + g''(cx+dy)d^2 \\ &= f''(ax+by)(a^2+b^2) + g''(cx+dy)(c^2+d^2).\end{aligned}$$

Assim, impondo a condição do operador Laplaciano com relação a Primeira Forma Fundamental e omitindo os termos dentro dos parênteses e fazendo $\lambda_3 = \lambda$ segue que

$$\lambda(f+g) = f''(ax+by)(a^2+b^2) + g''(cx+dy)(c^2+d^2). \quad (3-9)$$

Note que essa equação diferencial parcial é de variáveis separáveis, e pode-se considerar três possibilidades, a saber, $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ e $\lambda > 0$.

- **Caso** $\lambda = 0$. Se tem-se $\lambda = 0$, a equação se reduz a

$$f''(a^2+b^2) = -g''(c^2+d^2).$$

Assim, como as variáveis são separáveis, segue que

$$g'' = -\frac{(a^2+b^2)}{(c^2+d^2)}f'' = \bar{c}_1.$$

Donde

$$g'' = -\bar{c}_1 \frac{(a^2+b^2)}{(c^2+d^2)} \quad (3-10)$$

integrando a equação (3-10), e colocando $c_1 = \frac{\bar{c}_1}{2}$, segue que:

$$g(v) = c_1 \frac{(a^2+b^2)}{c^2+d^2} v^2 + c_3 v + \bar{c}_5$$

De forma análoga, obtém-se que

$$f(u) = c_1 u^2 + c_2 u + \bar{c}_4.$$

Assim, fazendo $c_4 = \bar{c}_4 + \bar{c}_5$ tem-se que

$$z(x,y) = c_1 u^2 + c_1 \frac{(a^2+b^2)}{c^2+d^2} v^2 + c_2 u + c_3 v + c_4. \quad (3-11)$$

- **Caso** $\lambda \neq 0$. Neste caso, utilizando a equação (3-9) segue que existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que

$$(a^2 + b^2)f'' - \lambda f = \mu = -(c^2 + d^2)g'' + \lambda. \quad (3-12)$$

Resolvendo a equação (3-12) para f e g segue que

$$f'' - \frac{\lambda}{(a^2 + b^2)}f = \frac{\mu}{(a^2 + b^2)} \quad (3-13)$$

e

$$g'' - \frac{\lambda}{(c^2 + d^2)}g = -\frac{\mu}{(c^2 + d^2)} \quad (3-14)$$

A solução dessa equação diferencial ordinária de segunda ordem é obtida a partir da equação característica. Assim, a solução é

1. Se $\lambda > 0$,

$$f(u) = c_1 e^{\left(\sqrt{\frac{\lambda}{a^2 + b^2}}u\right)} + c_2 e^{\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{a^2 + b^2}}u\right)} - \frac{\mu}{\lambda} \quad (3-15)$$

e

$$g(v) = c_1 e^{\left(\sqrt{\frac{\lambda}{c^2 + d^2}}v\right)} + c_2 e^{\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{c^2 + d^2}}v\right)} + \frac{\mu}{\lambda} \quad (3-16)$$

2. se $\lambda < 0$,

$$f(u) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{a^2 + b^2}}u\right) + c_2 \sin\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{a^2 + b^2}}u\right) - \frac{\mu}{\lambda} \quad (3-17)$$

e

$$g(v) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{c^2 + d^2}}v\right) + c_2 \sin\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{c^2 + d^2}}v\right) + \frac{\mu}{\lambda} \quad (3-18)$$

onde c_1, c_2, c_3 e $c_4 \in \mathbb{R}$.

□

Exemplo 3.6 Seja S uma superfície translacional afim de tipo 1 em $\mathbb{I}^3$ que é o gráfico de

$$z(x, y) = \cos(x + y) + \sin(x - y), -\pi \leq x, y \leq \pi.$$

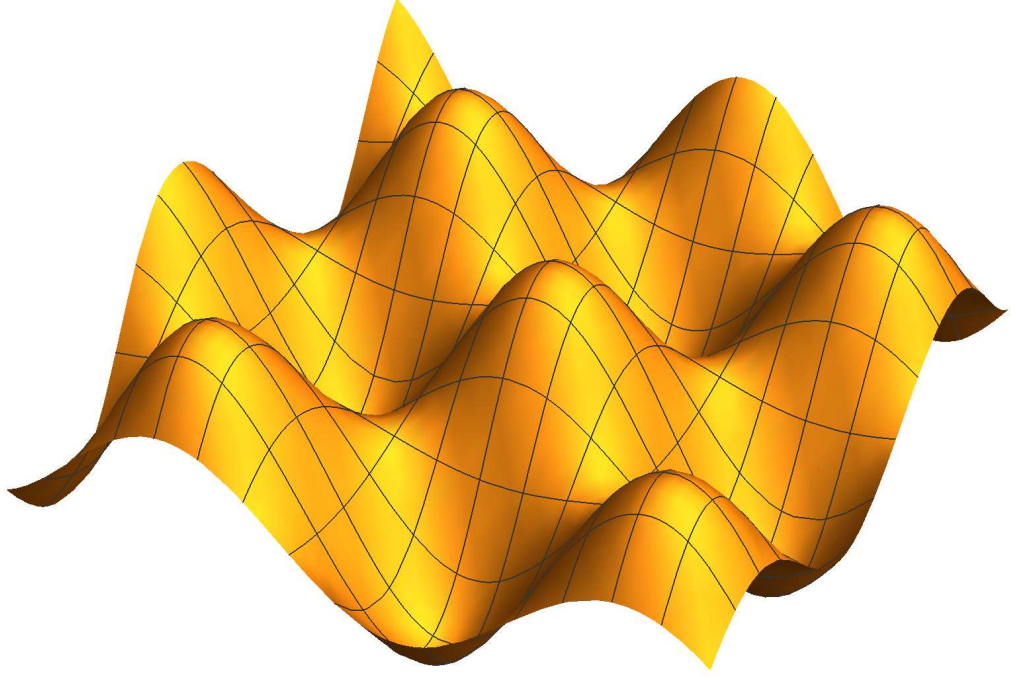
Então ela satisfaz $\Delta^I r_i = \lambda_i r_i$ para $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = -2$. Seu gráfico está plotado na figura (3.1). Note que $u = x + y$, $v = x - y$. Assim, $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$ e $d = -1$. Logo,

$$\begin{aligned} f(u) &= \cos(x + y) \\ g(v) &= \sin(x - y). \end{aligned}$$

Aplicando o operador Laplaciano com relação à Primeira Forma Fundamental, segue que

$$\Delta^I r_3 = -2(\cos(x+y) + \sin(x-y)) = -2r_3.$$

Figura 3.1: $z(x, y) = \cos(x+y) + \sin(x-y)$



Abaixo segue um exemplo de superfície que satisfaz $\Delta^I r_i = \lambda_i r_i$. Ela é o gráfico de uma função que envolve funções trigonométricas hiperbólicas.

Exemplo 3.7 Considere a superfície translacional afim de tipo 1 em $\mathbb{I}^3$ dada por

$$X(x, y) = (x, y, 2 \cosh(x+y) + 2 \cosh(x-y))$$

.

Ela satisfaz $\Delta^I r_i = \lambda_i r_i$ para $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = 2$. Seu gráfico está na figura (3.2). Note que $u = x+y$, $v = x-y$. Assim, $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$ e $d = -1$. Logo,

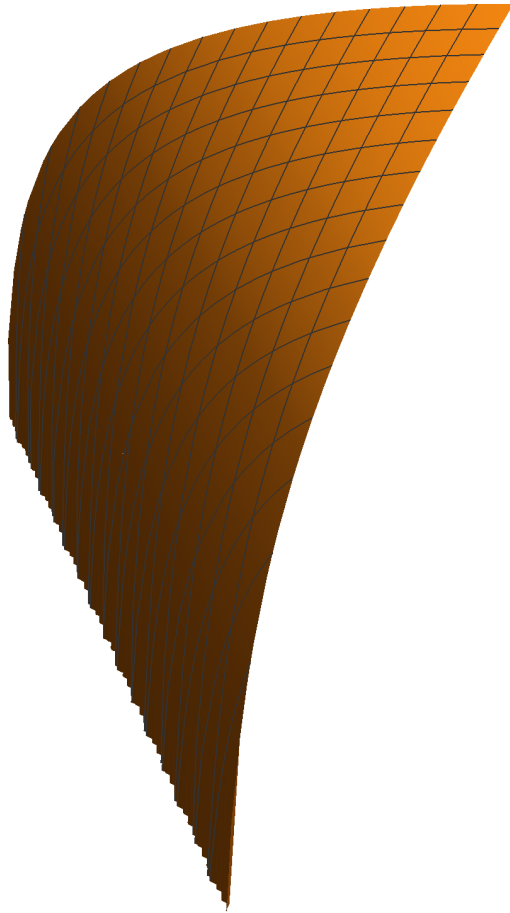
$$f(u) = 2 \cosh(x+y)$$

$$g(v) = 2 \cosh(x-y).$$

Aplicando o Operador Laplaciano com relação à Primeira Forma Fundamental, segue que

$$\Delta^I r_3 = 2(\cosh(x+y) + \cosh(x-y)) = 2r_3.$$

Figura 3.2: $z(x, y) = 2 \cosh(x+y) + 2 \cosh(x-y)$



3.2 Caso $\Delta^{II} r_i = \lambda_i r_i$

Com a definição dada em (3.1), é possível calcular os coeficientes de Segunda Forma Fundamental de uma superfície translacional afim em $\mathbb{I}^3$. A proposição abaixo é referente a esses coeficientes.

Definição 3.8 Dada S uma Superfície parametrizada $X(x, y) = (x(x, y), y(x, y), z(x, y))$, os coeficientes da **Segunda Forma Fundamental** são dados por:

$$\begin{aligned} L &= \langle N, X_{xx} \rangle \\ M &= \langle N, X_{xy} \rangle \\ N &= \langle N, X_{yy} \rangle. \end{aligned}$$

Proposição 3.9 Seja S uma superfície translacional afim de tipo 1 em $\mathbb{I}^3$ gráfico de uma função $z(x, y) = f(ax + by) + g(cx + dy)$. Então seus coeficientes da Segunda Forma Fundamental são:

$$L = a^2 f''(ax + by) + c^2 g''(cx + dy) = z_{xx} \quad (3-19)$$

$$M = ab f''(ax + by) + cd g''(cx + dy) = z_{xy} \quad (3-20)$$

$$N = b^2 f''(ax + by) + d^2 g''(cx + dy) = z_{yy}. \quad (3-21)$$

Demonstração. Se S é uma superfície translacional afim de tipo 1 com parametrização $X(x, y) = (x, y, f(ax + by) + g(cx + dy))$, já é conhecido as derivadas de primeira ordem X_x e X_y em (3-3) e (3-4). Assim, calculando as derivadas de segunda ordem segue que

$$\begin{aligned} X_{xx} &= (0, 0, a^2 f'(ax + by) + c^2 g'(cx + dy)) \\ X_{xy} &= (0, 0, ab f'(ax + by) + cd g'(cx + dy)) \\ X_{yy} &= (0, 0, b^2 f'(ax + by) + d^2 g'(cx + dy)) \end{aligned}$$

Utilizando a definição (3.8) tem-se que

$$\begin{aligned} L &= \langle N, X_{xx} \rangle = \frac{(X_x, X_y, X_{xx})}{\sqrt{EG - F^2}} = a^2 f''(ax + by) + c^2 g''(cx + dy) = z_{xx} \\ M &= \langle N, X_{xy} \rangle = \frac{(X_x, X_y, X_{xy})}{\sqrt{EG - F^2}} = ab f''(ax + by) + cd g''(cx + dy) = z_{xy} \\ N &= \langle N, X_{yy} \rangle = \frac{(X_x, X_y, X_{yy})}{\sqrt{EG - F^2}} = b^2 f''(ax + by) + d^2 g''(cx + dy) = z_{yy} \end{aligned}$$

□

Note que a matriz

$$\nabla^2 z = \begin{pmatrix} z_{uu} & z_{vu} \\ z_{uv} & z_{vv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \quad (3-22)$$

corresponde também aos coeficientes da segunda forma fundamental.

Definição 3.10 *Seja S uma superfície que não possui pontos parabólicos, isto é, $K \neq 0$ e ϕ uma função diferenciável. Então o **Operador Laplaciano com respeito a Segunda Forma Fundamental** é dado por:*

$$\Delta^{II}\phi = -\frac{1}{\sqrt{|\omega|}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{N\phi_x - M\phi_y}{\sqrt{|\omega|}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{M\phi_x - L\phi_y}{\sqrt{|\omega|}} \right) \right\} \quad (3-23)$$

onde $|\omega| = LN - M^2$.

Lema 3.11 *Seja S uma Superfície Translacional Afim em $\mathbb{I}^3$, gráfico da função $Z(x,y) = f(ax+by) + g(cx+dy)$ e L, M, N os coeficientes da Segunda forma Fundamental. Então*

$$\begin{aligned} N_x &= ab^2 f'''(ax+by) + cd^2 g'''(cx+dy) \\ M_y &= ab^2 f'''(ax+by) + cd^2 g'''(cx+dy) \\ L_y &= a^2 b f'''(ax+by) + c^2 d g'''(cx+dy) \\ M_x &= a^2 b f'''(ax+by) + c^2 d g'''(cx+dy). \end{aligned}$$

Demonstração. Com efeito, a proposição (3.9) traz os coeficientes da Segunda Forma Fundamental. Derivando e aplicando a regra da cadeia obtém-se o desejado. $\square$

Lema 3.12 *Se S uma superfície translacional afim em $\mathbb{I}^3$ dada pelo gráfico de $z(x,y) = f(ax+by) + g(cx+dy)$. Então, se ω é a matriz Hessiana de z dada em (3-22), o determinante de ω , $|\omega|$ é*

$$|\omega| = LN - M^2 = (ad - bc)^2 f'' g''. \quad (3-24)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} |\omega|_x &= (ad - bc)^2 (a f''' g'' + c g''' f'') \\ |\omega|_y &= (ad - bc)^2 (b f''' g'' + d g''' f'') \end{aligned}$$

Demonstração. De fato, tem-se que

$$\begin{aligned} |\omega| &= LN - M^2 \\ &= (a^2 f'' + c^2 g'')(b^2 f'' + d^2 g'') - (ab f'' - cd g'')^2 \\ &= a^2 d^2 f'' g'' + c^2 b^2 f'' g'' - 2abcd f'' g'' \\ &= (ad - bc)^2 f'' g''. \end{aligned}$$

Como $f = f(ax + by)$ e $g = g(cs + dy)$, aplicando-se a regra da cadeia, obtém-se as derivadas de $|\omega|$ como o desejado. $\square$

Proposição 3.13 *Seja S uma superfície translacional afim de tipo 1 em $\mathbb{I}^3$ e ϕ uma função diferenciável. Então seu operador de Laplace com relação a Segunda Forma Fundamental é dado por*

$$\begin{aligned} \Delta^{II} \phi &= \frac{(f'' g'')^{-2}}{2(ad-bc)} \left[(-b\phi_x + a\phi_y)(f'')^2 g''' + (d\phi_x - c\phi_y) f''' (g'')^2 \right] \\ &+ \frac{(f'' g'')^{-1}}{(ad-bc)^2} \left[(2ab\phi_{xy} - b^2\phi_{xx} - a^2\phi_{yy}) f'' + (2cd\phi_{xy} - d^2\phi_{xx} - c^2\phi_{yy}) g'' \right]. \end{aligned}$$

Demonstração. Seja S uma superfície translacional afim de tipo 1 em $\mathbb{I}^3$. Utilizando a definição (3.10), colocando $\omega = |\omega|$ e derivando, obtém-se

$$\begin{aligned} \Delta^{II} \phi &= -\frac{1}{\sqrt{\omega}} \left\{ \frac{(N_x\phi_x + N\phi_{xx} - M_x\phi_y - M\phi_{xy})}{\sqrt{\omega}} - \frac{(N\phi_x - M\phi_y)\omega_x}{2\omega^{\frac{3}{2}}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(M_x\phi_x + M\phi_{xy} - L_y\phi_y - L\phi_{yy})}{\sqrt{\omega}} - \frac{(M\phi_x - L\phi_y)\omega_y}{2\omega^{\frac{3}{2}}} \right\} \\ &= -\frac{N_x\phi_x + N\phi_{xx} - M_x\phi_y - M\phi_{xy}}{\omega} + \frac{(N\phi_x - M\phi_y)\omega_x}{2\omega^2} \\ &\quad + \frac{M_y\phi_x + M\phi_{xy} - L_y\phi_y - L\phi_{yy}}{\omega} + \frac{(M\phi_x - L\phi_y)\omega_y}{2\omega^2}. \end{aligned}$$

Agrupando os termos de maneira diferente segue que

$$\begin{aligned} \Delta^{II} \phi &= \frac{(M_y - N_x)\phi_x}{\omega} + \frac{(N\omega_x - M\omega_y)\phi_x}{2\omega^2} + \frac{(M_x - L_y)\phi_y}{\omega} \\ &+ \frac{(L\omega_y - M\omega_x)\phi_y}{2\omega^2} + \frac{N\phi_{xx} + 2M\phi_{xy} - L\phi_{yy}}{\omega}. \end{aligned}$$

Pelo Lema (3.11), o primeiro e o terceiro termo da equação acima são iguais a zero. Assim,

$$\Delta^{II} \phi = \frac{(N\omega_x - M\omega_y)\phi_x}{2\omega^2} + \frac{(L\omega_y - M\omega_x)\phi_y}{2\omega^2} + \frac{N\phi_{xx} + 2M\phi_{xy} - L\phi_{yy}}{\omega}. \quad (3-25)$$

Utilizando a proposição (3.9) e o lema (3.12), substituindo os valores de L ,

M, N, ω, ω_x e ω_y segue que

$$\begin{aligned}\Delta^{II}\phi &= \frac{[N(ad-bc)^2(af'''g'' + cg'''f'') - M(ad-bc)^2(bf'''g'' + dg'''f'')]\phi_x}{2(ad-bc)^4(f''g'')^2} \\ &+ \frac{[L(ad-bc)^2(bf'''g'' + dg'''f'') - M(ad-bc)^2(af'''g'' + cg'''f'')]\phi_y}{2(ad-bc)^4(f''g'')^2} \\ &+ \frac{N\phi_{xx} + 2M\phi_{xy} - L\phi_{yy}}{(ad-bc)^2(f''g'')^2}.\end{aligned}$$

Ajustando os termos, segue que

$$\begin{aligned}\Delta^{II}\phi &= \frac{[(b^2f'' + d^2g'')(af'''g'' + cg'''f'') - (abf'' + cdg'')(bf'''g'' + dg'''f'')]\phi_x}{2(ad-bc)^2(f''g'')^2} \\ &+ \frac{[(a^2f'' + c^2g'')(cf'''g'' + dg'''f'') - (abf'' + cdg'')(af'''g'' + cg'''f'')]\phi_y}{2(ad-bc)^2(f''g'')^2} \\ &+ \frac{(b^2f'' + d^2g'')\phi_{xx} + 2(abf'' + cdg'')\phi_{xy} - (a^2f'' + c^2g'')\phi_{yy}}{(ad-bc)^2f''g''}.\end{aligned}$$

Assim, simplificando termos, segue que

$$\begin{aligned}\Delta^{II}\phi &= \frac{[cb^2(f'')^2g''' + ad^2f'''(g'')^2 - abd(f'')^2g''' - bcd f'''(g'')^2]\phi_x}{2(ad-bc)^2(f''g'')^2} \\ &+ \frac{[da2(f'')^2g''' + bc^2f'''(g'')^2 - abc(f'')^2g''' - acd f'''(g'')^2]\phi_y}{2(ad-bc)^2(f''g'')^2} \\ &+ \frac{f''(-b^2\phi_{xx} + 2ab\phi_{xy} - a^2\phi_{yy}) + g''(-d^2\phi_{xx} + 2cd\phi_{xy} - c^2\phi_{yy})}{(ad-bc)^2(f''g'')^2}\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}\Delta^{II}\phi &= \frac{(f'')^2g'''(cb^2\phi_x - abd\phi_x + a^2d\phi_y - abc\phi_y)}{2(ad-bc)^2(f''g'')^2} \\ &+ \frac{(g'')^2f'''(ad^2\phi_x - bcd\phi_x + c^2b\phi_y - acd\phi_y)}{2(ad-bc)^2(f''g'')^2} \\ &+ \frac{(f''g'')^{-1}}{(ad-bc)^2} [(2ab\phi_{xy} - b^2\phi_{xx} - a^2\phi_{yy})f'' + (2cd\phi_{xy} - d^2\phi_{xx} - c^2\phi_{yy})g''].\end{aligned}$$

Ajustando os termos da equação, tem-se o desejado

$$\begin{aligned}\Delta^{II}\phi &= \frac{(f''g'')^{-2}}{2(ad-bc)} \left[(-b\phi_x + a\phi_y)(f'')^2 g''' + (d\phi_x - c\phi_y)f'''(g'')^2 \right] \\ &+ \frac{(f''g'')^{-1}}{(ad-bc)^2} \left[(2ab\phi_{xy} - b^2\phi_{xx} - a^2\phi_{yy})f'' + (2cd\phi_{xy} - d^2\phi_{xx} - c^2\phi_{yy})g'' \right].\end{aligned}$$

□

Teorema 3.14 *Seja S uma Superfície Translacional Afim de tipo 1 em $\mathbb{I}^3$ que satisfaz $\Delta^{II}r_i = \lambda_i r_i$. Então, S é o gráfico de uma das seguintes funções:*

- $(\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, 0),$

$$z(x, y) = \ln \left| u^{\frac{1}{\lambda_1}} v^{\frac{1}{\lambda_2}} \right| + c_1, c_1 \in \mathbb{R}$$

- $(\lambda \neq 0, \lambda, 0),$

$$z(u, v) = \ln \left| (uv)^{\frac{1}{\lambda}} \right| + c_1, c_1 \in \mathbb{R}$$

Demonstração. Seja S uma superfície translacional afim de tipo 1 em $\mathbb{I}^3$ que satisfaz $\Delta^{II}r_i = \lambda_i r_i$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Então, de (3-1) e pela equação do Laplaciano com relação a segunda forma que aparece em (3.13) segue que

- Para $\Delta^{II}r_1 = \lambda_1 r_1$, como $r_1 = x$, substituindo $\phi = x$ na equação do Laplaciano dada em (3.13) obtém-se

$$\frac{1}{2(f''g'')^2(ad-bc)} \left(-b(f'')^2 g''' + df'''(g'')^2 \right) = \lambda_1 r_1.$$

Donde

$$d \frac{f'''}{(f'')^2} - b \frac{g'''}{(g'')^2} = 2(ad-bc)\lambda_1 x \quad (3-26)$$

- Para $\Delta^{II}r_2 = \lambda_2 r_2$, como $r_2 = y$, substituindo $\phi = y$ na equação do Laplaciano dada em (3.13) obtém-se

$$\frac{1}{2(f''g'')^2(ad-bc)} \left(a(f'')^2 g''' - cf'''(g'')^2 \right) = \lambda_2 r_2.$$

Donde

$$-c \frac{f'''}{(f'')^2} + a \frac{g'''}{(g'')^2} = 2(ad-bc)\lambda_2 y \quad (3-27)$$

- Para $\Delta^{II}r_3 = \lambda_3 r_3$, como $r_3 = f(ax+by) + g(cx+dy)$, substituindo igualmente $\phi = f(ax+by) + g(cx+dy)$ na equação do Laplaciano dada em (3.13) obtém-se

$$\begin{aligned}
\Delta^{II} r_3 &= \frac{[-b(af' + cg') + a(bf' + dg')](f'')^2 g''' + [d(af' + cg') - c(bf' + dg')] f''' (g'')^2}{2(ad - bc)(f'' g'')^2} \\
&+ \frac{[2ab(abf''' + cdg'') - b^2(a^2 f'' + c^2 g'') - a^2(b^2 f'' + d^2 g'')](f'')^2}{2(ad - bc)^2 (f'' g'')^2} \\
&+ \frac{[2cd(abf''' + cdg'') - d^2(a^2 f'' + c^2 g'') - c^2(b^2 f'' + d^2 g'')](f'')^2}{2(ad - bc)^2 (f'' g'')^2} \\
&= \frac{(ad - bc)g'(f''')^2 f''' + (ad - bc)f'(g'')^2 f'''}{2(ad - bc)(f'' g'')^2} + 2 \frac{(ad - bc)^2 g'' f''}{(ad - bc)^2 f'' g''}
\end{aligned}$$

Donde segue que

$$\frac{g' g'''}{2(g'')^2} + \frac{f' f'''}{2(f'')^2} - 2 = \lambda_3(f + g).$$

Assim, multiplicando ambos os lados por 2,

$$\frac{g' g'''}{(g'')^2} + \frac{f' f'''}{(f'')^2} - 4 = 2\lambda_3(f + g). \quad (3-28)$$

Para se obter as soluções faz-se necessário resolver o sistema de equações formado por (3-26), (3-27) e (3-28). Considerando $ad - bc \neq 0$, pode-se distinguir dois casos baseados nas constantes a , b , c e d .

Caso A. Neste caso, considera-se que duas das constantes a , b , c , d são zero. Sem perda de generalidade pode-se supor que $(b = c = 0)$ e $(a = d = 1)$. Assim, as equações dadas em (3-26) e (3-27) se resumem a

$$\frac{f'''}{(f'')^2} = 2\lambda_1 x \quad (3-29)$$

e

$$\frac{g'''}{(g'')^2} = 2\lambda_2 y. \quad (3-30)$$

Note que se $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, tem-se uma contradição de (3-28), devido o fato de f e g serem funções não constantes. Assim, é necessário considerar os seguintes casos.

Caso A.1. Se $\lambda_1 = 0$, segue que $f''' = 0$. Daí substituindo (3-29) e (3-30) em (3-28) segue que

$$2\lambda_2 y g' - 4 = 2\lambda_3(f + g).$$

Donde tem-se que

$$\lambda_2 y g' - 2 = \lambda_3 g. \quad (3-31)$$

e $\lambda_3 f = 0$. Assim, $\lambda_3 = 0$ e a equação (3-31) se reduz a $\lambda_2 y g' = 2$, cuja solução é

$$g(y) = \frac{1}{\lambda_2} \ln(y) + c_1, c_1 \in \mathbb{R}.$$

Derivando a função g e substituindo em (3-30), tem-se uma contradição visto que

$$\frac{g'''}{(g'')^2} = \lambda_2 y,$$

diferente do apresentado em (3-30), que é $2\lambda_2 y$.

Caso A.2. Se $\lambda_2 = 0$, segue que $g''' = 0$. Da mesma forma mencionada no caso A.1, obtém-se $\lambda_3 = 0$ e

$$f(x) = \frac{1}{\lambda_1} \ln(x) + c_1, c_1 \in \mathbb{R}.$$

E, analogamente tem-se uma contradição de (3-29).

Caso A.3. Neste caso, são considerados $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$. Assim, substituindo (3-29) e (3-30) em (3-28), segue que

$$\lambda_1 x f' + \lambda_2 y g' - 2 = \lambda_3 (f + g). \quad (3-32)$$

Assim, o caso A.3 pode ser dividido considerando $\lambda_3 = 0$ e $\lambda_3 \neq 0$.

Caso A.3.1. Se $\lambda_3 = 0$, então

$$\lambda_1 x f' + \lambda_2 y g' = 2. \quad (3-33)$$

Aqui tem-se a soma de duas equações com variáveis separáveis sendo igual uma constante, assim, $\lambda_1 x f' = \psi$ e $\lambda_2 y g' = 2 - \psi$, cujas soluções são

$$f(x) = \frac{\psi}{\lambda_1} \ln(x) + c_1 \quad (3-34)$$

e

$$g(y) = \frac{2 - \psi}{\lambda_2} \ln(y) + c_2 \quad (3-35)$$

Agora, é necessário encontrar o valor de ψ . Para isto, substitui-se as soluções encontradas em (3-29) e (3-30) e obtém-se

$$\frac{f'''}{(f'')^2} = 2\lambda_1 x = \frac{2\lambda_1 x}{\psi} \quad (3-36)$$

e

$$\frac{g'''}{(g'')^2} = 2\lambda_2 y = \frac{2\lambda_2 y}{\psi} \quad (3-37)$$

donde tem-se $\psi = 1$ e assim unindo (3-34) e (3-35) obtém-se a solução

$$z(u, v) = \ln \left| x^{\frac{1}{\lambda_1}} y^{\frac{1}{\lambda_2}} \right| + c_1, c_1 \in \mathbb{R}.$$

Caso A.3.2. Se $\lambda_3 \neq 0$, então, voltando na equação (3-32), tem-se que

$$\lambda_1 x f' - \lambda_3 f = \mu = \lambda_2 y g' - \lambda_3 g, \mu \in \mathbb{R}^*. \quad (3-38)$$

Resolvendo as equações dadas em (3-38) conclui-se que

$$f(x) = -\frac{2-\mu}{\lambda_3} + c_1 x^{\frac{\lambda_3}{\lambda_1}} \quad (3-39)$$

e

$$g(y) = \frac{\mu}{\lambda_3} + c_2 y^{\frac{\lambda_3}{\lambda_2}} \quad (3-40)$$

onde c_1 e $c_2 \in \mathbb{R}$.

Procedendo como nos casos anteriores, quando substituímos essas soluções encontradas em (3-39) e (3-40), percebe-se que não são soluções de (3-29) e (3-30).

Caso B. Neste caso, supõe-se que no máximo um entre a , b , c e d é igual a zero. Além disso, suponha que $\lambda_1 = 0$ em (3-26). Assim, segue que

$$\frac{df'''}{(f'')^2} - \frac{bg'''}{(g'')^2} = 0. \quad (3-41)$$

Assumindo que $b, d \neq 0$, já que apenas um entre a , b , c e d pode ser zero e voltando na equação (3-41), segue que

$$\frac{f'''}{(f'')^2} = \frac{c_1}{d} \quad (3-42)$$

e

$$\frac{g'''}{(g'')^2} = \frac{c_1}{b}. \quad (3-43)$$

Se $c_1 = 0$, segue que

$$\frac{f'''}{(f'')^2} = \frac{g'''}{(g'')^2} = 0. \quad (3-44)$$

Substituindo em (3-28), tem-se que $f + g = -2\lambda_3$, que é uma constante. Assim, tem-se um absurdo, pois $f'' g'' \neq 0$. Caso contrário, considerando (3-43) e (3-

44) em (3-27), resulta em $\frac{c_1}{bd} = 2\lambda_2$, o que não é possível, uma vez que y é uma variável independente. Isto implica que λ_1 deve ser diferente de zero e pode ser similarmente mostrado que λ_2 também é diferente de zero. Daí de (3-26) e (3-27), segue que

$$\frac{df'''}{(f'')^2} - \frac{bg'''}{(g'')^2} = 2(ad - bc)\lambda_1 x \quad (3-45)$$

$$-\frac{cf'''}{(f'')^2} + \frac{ag'''}{(g'')^2} = 2(ad - bc)\lambda_2 y. \quad (3-46)$$

Multiplicando (3-45) por c e (3-46) por d tem-se que

$$\frac{cdf'''}{(f'')^2} - \frac{cbg'''}{(g'')^2} = 2c(ad - bc)\lambda_1 x \quad (3-47)$$

$$-\frac{cdf'''}{(f'')^2} + \frac{adg'''}{(g'')^2} = 2d(ad - bc)\lambda_2 y. \quad (3-48)$$

Somando (3-47) e (3-48) obtém-se

$$\frac{g'''}{(g'')^2} = 2(c\lambda_1 x + d\lambda_2 y). \quad (3-49)$$

De maneira análoga, multiplicando (3-45) por a e (3-46) por b e somando as equações obtidas segue que

$$\frac{f'''}{(f'')^2} = 2(a\lambda_1 x + b\lambda_2 y). \quad (3-50)$$

Condição de compatibilidade em (3-49) ou (3-50) dá $\lambda_1 = \lambda_2$. Colocando $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ e substituindo (3-49) e (3-50) em (3-28) tem-se

$$(2a\lambda x + 2b\lambda y)f' + (2c\lambda x + 2d\lambda y)g' = \lambda_3(f + g) \quad (3-51)$$

$$2\lambda(ax + by)f' + 2\lambda(cx + dy)g' - 4 = \lambda_3(f + g). \quad (3-52)$$

Como $u = ax + by$ e $v = cx + dy$ são os parâmetros de coordenadas afim, segue que

$$\lambda u f^1 + \lambda v g^1 - 2 = \lambda_3(f + g). \quad (3-53)$$

Assim, é possível dividir a equação (3-53) em dois casos.

Caso B.1. Se $\lambda_3 = 0$, a equação (3-53) se reduz a

$$\lambda u f' + \lambda v g' = 2. \quad (3-54)$$

Assim, como $\lambda u f' + \lambda v g' = 2$ segue que $\lambda u f' = \psi$ e $\lambda v g' = 2 - \psi$. Resolvendo as equações diferenciais acima tem-se

$$f(u) = \frac{\psi}{\lambda} \ln(u) + c_1 \quad (3-55)$$

e

$$g(v) = \frac{2 - \psi}{\lambda} \ln(v) + c_2. \quad (3-56)$$

Substituindo (3-55) e (3-56) em (3-49) e (3-50) respectivamente, tem-se que $\psi = 1$. Assim,

$$z(x, y) = \ln \left| (uv)^{\frac{1}{\lambda}} \right|$$

Caso B.2. Se $\lambda = \lambda_3 \neq 0$, pode-se reescrever a equação como

$$\lambda u f' - \lambda_3 f - 2 = \mu = -\lambda v g' + \lambda_3 g, \mu \in \mathbb{R}. \quad (3-57)$$

Resolvendo (3-57) tem-se

$$f(u) = -\frac{2 + \mu}{\lambda_3} + c_1 u^{\frac{\lambda_3}{\lambda}} \quad (3-58)$$

e

$$g(v) = \frac{\mu}{\lambda_3} + c_2 v^{\frac{\lambda_3}{\lambda}} \quad (3-59)$$

onde c_1 e $c_2 \in \mathbb{R}$.

Considerando (3-58) e (3-59) em (3-49) e (3-50), encontramos, respectivamente, $\lambda_3 = 0$, porém isso é uma contradição.

□

Exemplo 3.15 Considere a superfície translacional afim de tipo 1 em $\mathbb{I}^3$ dada por

$$X(x, y) = (x, y, \ln(x + y) + \ln(x - y))$$

Ela satisfaz $\Delta^{II} r_i = \lambda_i r_i$ para $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 0$. Seu gráfico está na figura (3.4). Note que para este caso tem-se $u = x + y$ e $v = x - y$. Assim,

$$\begin{aligned} f(u) &= \ln(x + y) \\ g(v) &= \ln(x - y). \end{aligned}$$

Além disso $a = b = c = 1$ e $d = -1$. logo, $ad - bc = -2$. Calculando as derivadas de f e g com relação aos parâmetros u e v segue que:

$$\begin{aligned} f(u) &= \ln(u) \\ f'(u) &= \frac{1}{u} \\ f''(u) &= -\frac{1}{u^2} \\ [f''(u)]^2 &= \frac{1}{u^4} = \frac{1}{(x + y)^4} \\ f'''(u) &= \frac{2}{u^3} = \frac{2}{(x + y)^3} \end{aligned}$$

da mesma forma:

$$\begin{aligned} g(v) &= \ln(v) \\ g'(v) &= \frac{1}{v} \\ g''(v) &= -\frac{1}{v^2} \\ [g''(v)]^2 &= \frac{1}{v^4} = \frac{1}{(x - y)^4} \\ g'''(v) &= \frac{2}{v^3} = \frac{2}{(x - y)^3}. \end{aligned}$$

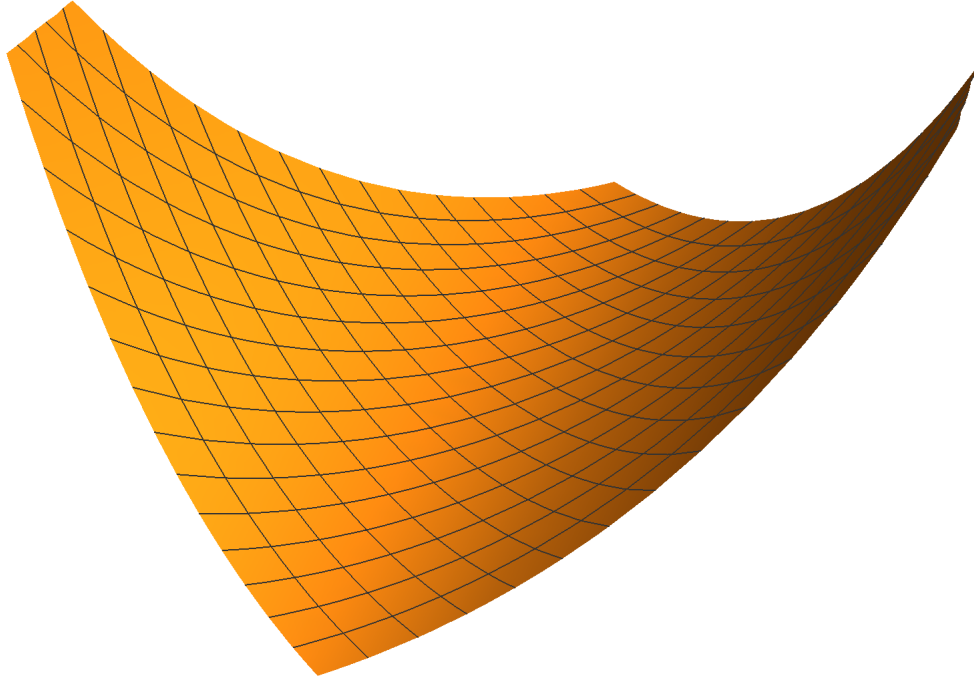
Assim, aplicando os valores das derivadas encontradas acima no Operador Laplaciano da definição (3.13), obtém-se:

$$\begin{aligned} \Delta^{II}(x) &= -\frac{1}{4}(x + y)^4(x - y)^4 \left[-\frac{1}{(x + y)^4} \frac{2}{(x - y)^3} - \frac{2}{(x + y)^3} \frac{1}{(x - y)^4} \right] \\ &= -\frac{1}{4}(x + y)^4(x - y)^4 \left[\frac{-2(x - y) - 2(x + y)}{(x + y)^4(x - y)^4} \right] = 1x. \end{aligned}$$

De Forma análoga, mostra-se que

$$\Delta^{II}(y) = 1y.$$

Figura 3.3: $z(x, y) = \ln(x + y) + \ln(x - y)$



Exemplo 3.16 Considere a superfície translacional afim de tipo 1 em $\mathbb{I}^3$ dada por

$$X(x, y) = (x, y, \ln(x - y) + \ln(2x + y))$$

.

Ela satisfaz $\Delta^{II} r_i = \lambda_i r_i$ para $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -\frac{1}{3}$ e $\lambda_3 = 0$. Seu gráfico está na figura (3.3). Note que para este caso tem-se $u = x - y$ e $v = 2x + y$. Assim,

$$\begin{aligned} f(u) &= \ln(x - y) \\ g(v) &= \ln(2x + y). \end{aligned}$$

Além disso $a = d = 1$, $b = -1$ e $c = 2$. logo, $ad - bc = 3$. Calculando as derivadas de

f e g com relação aos parâmetros u e v segue que:

$$\begin{aligned} f(u) &= \ln(u) \\ f'(u) &= \frac{1}{u} \\ f''(u) &= -\frac{1}{u^2} \\ [f''(u)]^2 &= \frac{1}{u^4} = \frac{1}{(x-y)^4} \\ f'''(u) &= \frac{2}{u^3} = \frac{2}{(x-y)^3} \end{aligned}$$

da mesma forma:

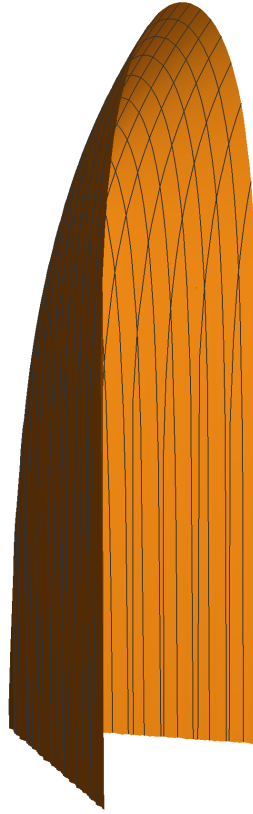
$$\begin{aligned} g(v) &= \ln(v) \\ g'(v) &= \frac{1}{v} \\ g''(v) &= -\frac{1}{v^2} \\ [g''(v)]^2 &= \frac{1}{v^4} = \frac{1}{(2x+y)^4} \\ g'''(v) &= \frac{2}{v^3} = \frac{2}{(2x+y)^3}. \end{aligned}$$

Assim, aplicando os valores das derivadas encontradas acima no Operador Laplaciano da definição (3.13), obtém-se:

$$\begin{aligned} \Delta^{II}(x) &= \frac{1}{6}(x-y)^4(2x+y)^4 \left[\frac{1}{(x-y)^4} \frac{2}{(2x+y)^3} + \frac{2}{(x-y)^3} \frac{1}{(2x+y)^4} \right] \\ &= \frac{1}{6}(x-y)^4(2x+y)^4 \left[\frac{2}{(x-y)^4(2x+y)^3} + \frac{2}{(x-y)^3(2x+y)^4} \right] \\ &= \frac{1}{6} [2(2x+y) + 2(x-y)] = 1x \end{aligned}$$

De Forma análoga, tem-se que

$$\begin{aligned} \Delta^{II}(y) &= \frac{1}{6}(x-y)^4(2x+y)^4 \left[\frac{1}{(x-y)^4} \frac{2}{(2x+y)^3} - \frac{2}{(x-y)^3} \frac{2}{(2x+y)^4} \right] \\ &= \frac{1}{6}(x-y)^4(2x+y)^4 \left[\frac{2}{(x-y)^4(2x+y)^3} - \frac{24}{(x-y)^3(2x+y)^4} \right] \\ &= \frac{1}{6} [2(2x+y) - 4(x-y)] = -\frac{1}{3}y. \end{aligned}$$

Figura 3.4: $z(x, y) = \ln(x - y) + \ln(2x + y)$ 

Como os teoremas apresentados em (3.5) e (3.14) fornecem soluções bem específicas para as funções que satisfazem as condições previamente dadas, grande parte dos exemplos são diferenciados pela presença de constantes.

Referências Bibliográficas

- [1] AYDIN, M. E; OGRENMIS, A. O. Homothetical and translation hypersurfaces with constant curvature in the isotropic space. In: PROCEEDINGS—THE INTERNATIONAL CONFERENCE OF DIFFERENTIAL GEOMETRY AND DYNAMICAL SYSTEMS (DGDS-2015), volume 23 de BSG Proc., p. 1–10. Balkan Soc. Geometers, Bucharest, 2016.
- [2] AYDIN, M. E. A generalization of translation surfaces with constant curvature in the isotropic space. J. Geom., 107(3):603–615, 2016.
- [3] AYDIN, M. E; ERGUT, M. Affine translation surfaces in the isotropic 3-space. Int. Electron. J. Geom., 10(1):21–30, 2017.
- [4] BEKKAR, M; SENOUSSE, B. Translation surfaces in the 3-dimensional space satisfying $\Delta^{III}r_i = \mu_i r_i$. J. Geom., 103(3):367–374, 2012.
- [5] CHEN, B.-Y. On submanifolds of finite type. Soochow J. Math., 9:17–33, 1983.
- [6] DO CARMO, M. P. Differential geometry of curves & surfaces. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2016. Revised & updated second edition of [MR0394451].
- [7] DO CARMO, M. P. A. Introdução à geometria diferencial global. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Conselho Nacional de Pesquisas, Rio de Janeiro, 1970.
- [8] JUNG, S. D; LIU, H; LIU, Y. Weingarten affine translation surfaces in Euclidean 3-space. Results Math., 72(4):1839–1848, 2017.
- [9] LIU, H. Translation surfaces with constant mean curvature in 3-dimensional spaces. J. Geom., 64(1-2):141–149, 1999.
- [10] LIU, H; JUNG, S. D. Affine translation surfaces with constant mean curvature in Euclidean 3-space. J. Geom., 108(2):423–428, 2017.

- [11] LIU, H; YU, Y. **Affine translation surfaces in Euclidean 3-space.** Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., 89(9):111–113, 2013.
- [12] MILIN ŠIPUŠ, V. **Translation surfaces of constant curvatures in a simply isotropic space.** Period. Math. Hungar., 68(2):160–175, 2014.
- [13] POTTMANN, H; GROHS, P; MITRA, N. J. **Laguerre minimal surfaces, isotropic geometry and linear elasticity.** Adv. Comput. Math., 31(4):391–419, 2009.
- [14] SCHERK, H. F. **Bemerkungen über die kleinste Fläche innerhalb gegebener Grenzen.** J. Reine Angew. Math., 13:185–208, 1835.
- [15] STRUBECKER, K. **Geometrie in einer isotropen Ebene. III.** Math. Naturwiss. Unterricht, 15:385–394, 1962/1963.
- [16] YANG, D; FU, Y. **On affine translation surfaces in affine space.** J. Math. Anal. Appl., 440(2):437–450, 2016.