

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

JUNIOR RODRIGUES MOYSES

Hipersuperfícies de Einstein em Espaços de Produto Torcido

Goiânia
2025



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

Dissertação Tese Outro*: _____

*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

Exemplos: Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

2. Nome completo do autor

Junior Rodrigues Moyses

3. Título do trabalho

Hipersuperfícies de Einstein em Espaços de Produto Torcido

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

- a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
- b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação. O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.



Documento assinado eletronicamente por **Levi Rosa Adriano, Professor do Magistério Superior**, em 14/03/2025, às 14:53, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Junior Rodrigues Moyses, Discente**, em 14/03/2025, às 15:49, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **5235068** e o código CRC **B8B229E6**.

Referência: Processo nº 23070.005163/2025-17

SEI nº 5235068

JUNIOR RODRIGUES MOYSES

Hipersuperfícies de Einstein em Espaços de Produto Torcido

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Levi Rosa Adriano

Goiânia
2025

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Moyses, Junior Rodrigues
Hipersuperfícies de Einstein em Espaços de Produto Torcido
[manuscrito] / Junior Rodrigues Moyses. - 2025.
105 f.

Orientador: Prof. Levi Rosa Adriano.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em Matemática, Goiânia, 2025.

Bibliografia.

Inclui lista de tabelas.

1. Hipersuperfícies de Einstein. 2. Curvatura Seccional Constante. 3. Produtos Torcidos. 4. Hipersuperfícies de Rotação. 5. Hipersuperfícies Paralelas. I. Adriano, Levi Rosa, orient. II. Título.

CDU 514.77



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº 12 da sessão de Defesa de Dissertação de **Junior Rodrigues Moyses**, que confere o título de Mestre em **Matemática**, na área de concentração em **Geometria Diferencial**.

Ao **sétimo dia do mês de março do ano de dois mil e vinte e cinco**, a partir das **10h:00**, via **Web Videoconferência**, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada **“Hipersuperfícies de Einstein em Espaços de Produto Torcido”**. Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor **Levi Rosa Adriano - IME/UFG** com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor **Valter Borges Sampaio Junior - ICEN/UFPA**, membro titular externo e Professor Doutor **Tarcísio Castro Silva - MAT/UnB**, membro titular externo. Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido o candidato **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor **Levi Rosa Adriano**, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, ao **sétimo dia do mês de março do ano de dois mil e vinte e cinco**.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA



Documento assinado eletronicamente por **Tarcísio Castro Silva, Usuário Externo**, em 19/03/2025, às 14:25, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Levi Rosa Adriano, Professor do Magistério Superior**, em 19/03/2025, às 14:29, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Valter Borges Sampaio Junior, Usuário Externo**, em 19/03/2025, às 15:15, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **5246731** e o código CRC **060DC419**.

Referência: Processo nº 23070.005163/2025-17

SEI nº 5246731

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Junior Rodrigues Moyses

Graduou Licenciatura Plena em Matemática na Universidade Federal da Integração Latinoamericana. Durante a graduação, foi bolsista em projetos de monitorias em disciplinas de Cálculo e Análise Real, e em projetos de extensão e de desenvolvimento tecnológico voltados para a área da Educação Matemática. Também foi bolsista de Iniciação Científica onde desenvolveu pesquisa na área da Geometria Diferencial com ênfase na Geometria de Finsler. Durante o mestrado, foi bolsista pela CAPES.

Ao meu falecido avô Manoel Porto Rodrigues.

Agradecimentos

Agradeço ao meu professor orientador e membros da banca por todas as orientações, contribuições e ensinamentos. Aos colegas e professores do curso por todas as trocas e experiências que tivemos. À minha família e amigos por sempre acreditarem em mim e apoiarem minhas decisões e escolhas. Por fim, à CAPES pelo apoio financeiro que possibilitou minha permanência no mestrado e o desenvolvimento deste trabalho.

O inverno nunca falha em se tornar primavera

Nitiren Daishonin,
Os Verdadeiros Aspectos de Todos os Fenômenos.

Resumo

Moyses, Junior Rodrigues. **Hipersuperfícies de Einstein em Espaços de Produto Torcido**. Goiânia, 2025. 105p. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Matemática, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Neste trabalho estudamos as hipersuperfícies de Einstein em produtos torcidos da forma $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$, com $n \geq 2$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, ω a função torção e $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ denota a forma espacial simplesmente conexa de curvatura seccional constante $\varepsilon = -1, 0, 1$. Sabendo que as variedades de curvatura seccional constante (CSC, para simplificar) são os exemplos mais simples de variedades de Einstein, através de referenciais como [5], [7], [11], [13], [14] e [19] buscamos condições para que uma hipersuperfície de Einstein de $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ seja necessariamente CSC. Para certas funções torção ω , estudamos a existência dessas hipersuperfícies por meio da classe das hipersuperfícies rotacionais. Além disso, utilizando a teoria das hipersuperfícies isoparamétricas, foi caracterizado um tipo especial das hipersuperfícies de Einstein - chamadas de ideais - como gráficos locais de hipersuperfícies paralelas de $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ nas quais, sob certas condições nas curvaturas principais, são CSC.

Palavras-chave

Hipersuperfícies de Einstein, Curvatura Seccional Constante, Produtos Torcidos, Hipersuperfícies de Rotação, Hipersuperfícies Paralelas.

Abstract

Moyses, Junior Rodrigues. **Einstein Hypersurfaces of Warped Product Spaces**. Goiânia, 2025. 105p. MSc. Dissertation. Programa de Pós-Graduação em Matemática, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

In this work we studied Einstein hypersurfaces in warped products of the form $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$, with $n \geq 2$, where $I \subset \mathbb{R}$ is an open interval, ω is the warping function and $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ denotes the simply connected space form of constant sectional curvature $\varepsilon = -1, 0, 1$. Knowing that constant sectional curvature manifolds (CSC, for short) are the simplest examples of Einstein manifolds, through references such as [5], [7], [11], [13], [14] and [19] we sought conditions for an Einstein hypersurface of $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ is necessarily CSC. For certain warping functions ω , we studied the existence of these hypersurfaces through the class of rotational hypersurfaces. Furthermore, using the theory of isoparametric hypersurfaces, we characterized a special type of Einstein hypersurfaces - called ideal - as local graphs of parallel hypersurfaces of $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ in which, under certain conditions in main curvatures, are CSC.

Keywords

Einstein Hypersurfaces, Constant Sectional Curvature, Warped Products, Rotation Hypersurfaces, Parallel Hypersurfaces.

Sumário

Lista de Tabelas	13
Introdução	14
1 Preliminares	17
1.1 Variedades Riemannianas	17
1.2 Imersões Isométricas	23
1.3 Variedades Produto	26
2 Produto torcido $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$	33
2.1 Fórmulas Básicas	33
2.2 Hipersuperfícies em $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$	38
3 Hipersuperfícies Rotacionais	45
3.1 Hipersuperfícies Rotacionais em $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n \times \mathbb{R}$	46
3.2 Hipersuperfícies Rotacionais em $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$	65
4 Hipersuperfícies paralelas	79
4.1 Gráficos de Einstein em $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$	82
4.2 Hipersuperfícies Isoparamétricas	91
5 Considerações Finais	103
Referências Bibliográficas	104

Lista de Tabelas

3.1	Definição de ρ	66
3.2	Definição de ψ	67

Introdução

Sabe-se que as variedades riemannianas de curvatura seccional constante (CSC) são os tipos mais simples de variedades de Einstein e, por este motivo, serão chamadas de triviais ao longo deste trabalho. O objetivo principal deste trabalho é estabelecer condições sob as quais uma hipersuperfície de Einstein de $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ é necessariamente trivial, onde I é um intervalo aberto de \mathbb{R} , ω é a função torção e $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ denota \mathbb{R}^n , \mathbb{S}^n ou \mathbb{H}^n , com $n \geq 2$, de acordo com sua curvatura seccional constante $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon = -1$, respectivamente.

Para isso, tomamos como principal referência o trabalho de de Lima, Manfio e dos Santos [13] que foram motivados por P. Ryan que, em [17], mostrou a existência de hipersuperfícies de Einstein triviais em \mathbb{R}^{n+1} , \mathbb{H}^{n+1} e a não existência de tais hipersuperfícies em \mathbb{S}^{n+1} . Anteriormente, Manfio e Tojeiro [14] classificaram as hipersuperfícies CSC de $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n \times \mathbb{R}$, com $\varepsilon = \pm 1$ e $n \geq 3$. De certa maneira, alguns de seus resultados são estendidos em [13] ao considerar o produto torcido por ω não necessariamente constante.

Considerando produtos torcidos como espaços ambientes, Leandro, Pina e dos Santos mostraram em [12] que qualquer hipersuperfície de Einstein de $I \times_{\omega} \mathbb{S}^n$ e de $I \times_{\omega} \mathbb{H}^n$ é trivial quando ω é constante. Entretanto, para funções torções ω em geral não podemos afirmar tal resultado. Como um contra-exemplo, podemos considerar o produto $\mathbb{S}^2(1/\sqrt{2}) \times \mathbb{S}^2(1/\sqrt{2})$ de duas esferas de \mathbb{R}^3 de raio $1/\sqrt{2}$ e munidas com a métrica riemanniana canônica. Tal produto é naturalmente uma hipersuperfície de Einstein de $\mathbb{S}^5 - \{p, -p\} = (0, \pi) \times_{\sin t} \mathbb{S}^4$, para algum ponto adequado $p \in \mathbb{S}^5$, mas possui curvatura seccional não constante.

Vale destacar o trabalho de Borges e da Silva que em [3] também estudaram as hipersuperfícies de Einstein nos mesmos espaços ambientes, embora com técnicas distintas. Devido a essa relação, algumas partes deste trabalho mencionado sobrepõe alguns resultados em [13], sobretudo alguns tópicos envolvendo os últimos resultados principais, nas quais apresentaremos aqui.

Uma das propriedades mais importantes utilizadas ao longo deste trabalho é a T -propriedade que é quando o gradiente da função altura é uma das direções principais. Tal propriedade é utilizada em muitos estudos envolvendo curvaturas, tanto seccionais quanto médias, de variedades produtos $\mathbb{R} \times M$, onde M é uma variedade riemanniana, como por exemplo os trabalhos acima mencionados.

Dois trabalhos importantes que apontamos para o nosso propósito são os de Dillen Fastenakels e Van der Veken [7] e de Tojeiro [19] os quais mostraram, respectivamente, que no produto usual $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_\varepsilon^n$, para $\varepsilon \neq 0$, as hipersuperfícies rotacionais e as hipersuperfícies que são gráficos locais de hipersuperfícies paralelas de \mathbb{Q}_ε^n possuem a T -propriedade. Esses dois resultados são generalizados para o produto torcido em [13], como mostraremos nos Capítulos 3 e 4, ampliando significativamente a classe das hipersuperfícies com esta propriedade e justificando sua relevância.

Conforme a estrutura deste trabalho, inicialmente no Capítulo 1 apresentamos algumas ferramentas preliminares que utilizaremos ao longo dos demais capítulos. No Capítulo 2 trataremos $I \times_\omega \mathbb{Q}_\varepsilon^n$ na qual apresentamos algumas relações importantes, sobretudo relações envolvendo as conexões e as curvaturas do produto torcido em questão e suas fibras \mathbb{Q}_ε^n . Ainda neste capítulo, também trataremos das hipersuperfícies em $I \times_\omega \mathbb{Q}_\varepsilon^n$ para os quais são estabelecidos três lemas fundamentais, os Lemas 2.8, 2.9 e 2.10.

Já no Capítulo 3 abordaremos as hipersuperfícies rotacionais (ou de rotação) que, inicialmente, formam uma classe muito especial utilizada no Teorema 3.7 para provar a existência de hipersuperfícies de Einstein em $I \times_\omega \mathbb{Q}_\varepsilon^n$ que são triviais, em conformidade com a questão principal aqui levantada. Mais três resultados principais são apresentados neste capítulo. O Teorema 3.9 estabelece condições para que uma hipersuperfície trivial seja de rotação. Já os outros dois, Teoremas 3.10 e 3.11, envolvem uma condição a respeito de uma função β que surge naturalmente quando calculada a curvatura de $I \times_\omega \mathbb{Q}_\varepsilon^n$. O Teorema 3.10-(iii) fornece uma condição de não trivialidade para as hipersuperfícies de Einstein em que β é identicamente nula. Já no Teorema 3.11 considera-se as hipersuperfícies de Einstein na qual β nunca se anula e estabelece condições de trivialidades das mesmas, sendo neste último caso essencialmente de rotação.

As hipersuperfícies abordadas no Teorema 3.11 desempenham um papel tão importante que são chamadas em [13] de ideais e são mais abordadas no Capítulo 4. Neste capítulo é apresentada uma segunda propriedade importante, as chamadas hipersuperfícies do tipo (ϕ, g_s) -gráfico que podem ser olhadas como gráficos locais de uma família de hipersuperfícies paralelas $\{g_s\}$ de uma hipersuperfície de \mathbb{Q}_ε^n . Três resultados principais finais são apresentados neste capítulo.

O Teorema 4.8 é uma espécie de extensão para o produto torcido do resultado de Tojeiro [19, Teorema 1] (também apresentado aqui como Teorema 4.5), caracterizando as hipersuperfícies ideais cujas funções ângulo nunca se anulam como (ϕ, g_s) -gráficos locais e estabelecendo uma condição trivialidade em uma de suas curvaturas principais.

Por outro lado, é possível observar que alguns tópicos apresentados nos Teoremas 4.9 e 4.10 são generalizados em [3] para espaços da forma $I \times_\omega \mathbb{Q}^n(c)$ como havíamos mencionado. Assim como o Teorema 3.10, o Teorema 4.9 também nos fornece ferramentas para construção de casos não triviais, embora apenas em $I \times_\omega \mathbb{S}^n$.

Para finalizar, o Teorema 4.10 utiliza a teoria das hipersuperfícies isoparamétricas para classificar as hipersuperfícies ideais com respeito de suas curvaturas principais e, juntamente com o Teorema 3.11, estabelecendo a equivalência entre essas hipersuperfícies e as rotacionais, reforçando nosso objetivo principal.

Preliminares

Neste capítulo vamos apresentar algumas definições, propriedades e resultados que utilizaremos ao longo de todo o trabalho. Para maiores detalhes, o conteúdo contido neste capítulo pode ser encontrado em [2], [9], e [16].

1.1 Variedades Riemannianas

Uma variedade diferenciável M é dita riemanniana quando M é munida de uma *métrica riemanniana* na qual é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ (forma bilinear, simétrica e definida positiva) no espaço tangente T_pM , que varia diferenciavelmente da seguinte maneira:

Se $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p , com $x(x_1, \dots, x_n) = q \in x(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, então

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$$

é uma função diferenciável em U .

As funções g_{ij} são chamadas de expressão da métrica riemanniana no sistema de coordenadas $x : U \rightarrow M$.

Definição 1.1 *Sejam M e N duas variedades riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \rightarrow N$ é chamado de isometria se para todo $p \in M$ e para todo $u, v \in T_pM$ têm-se:*

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}.$$

Definição 1.2 *Sejam M e N duas variedades diferenciáveis com $\dim(M) \leq \dim(N)$. Uma função $f : M \rightarrow N$ é chamada de imersão se é diferenciável e se, para cada $p \in M$, $df_p : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ é injetiva. Se, além de imersão, f também for um homeomorfismo, dizemos que f é um mergulho. Caso $M \subset N$ e a inclusão $i : M \rightarrow N$ for um mergulho, dizemos que M é uma subvariedade de N .*

Observe que se N tem uma estrutura riemanniana então é possível induzir uma estrutura riemanniana em M por

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, \text{ com } u, v \in T_pM.$$

Neste caso f será chamada de *imersão isométrica*.

Definição 1.3 *Duas variedades riemannianas M e N são ditas conformes se existe um difeomorfismo $f : M \rightarrow N$ e uma função diferenciável $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ positiva tais que, para todo $p \in M$ e para todo $u, v \in T_pM$ têm-se:*

$$\langle u, v \rangle_p = \phi(p) \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}.$$

M e N são localmente conformes se para cada $p \in M$ existir uma vizinhança V_p na qual $f|_{V_p}$ é um difeomorfismo conforme sobre sua imagem.

Um conceito bastante importante no estudo da geometria destas variedades é a *conexão*. Tal ideia nos fornece uma maneira de derivar vetores ao longo de curvas.

Considere TM o fibrado tangente de M e $\mathcal{D}(M)$ o conjunto das funções reais de classe C^∞ definidas em M . Antes de prosseguirmos, vale ressaltar que podemos generalizar de maneira natural as definições acima considerando TM ao invés de T_pM .

Teorema 1.4 *Dada uma variedade riemanniana M existe uma única aplicação*

$$\nabla : TM \times TM \rightarrow TM$$

$$(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$
2. $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$
4. $X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$ (condição de compatibilidade com a métrica)
5. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (condição de simetria),

onde $X, Y, Z \in TM$, $f, g \in \mathcal{D}(M)$ e $[X, Y] = XY - YX$.

Tal aplicação ∇ é denominada de *conexão de Levi-Civita* (ou *riemanniana*). O Teorema acima garante que a conexão é única, mas podem existir outras conexões em M que satisfaçam apenas as propriedades 1, 2 e 3, nas quais são chamadas de *conexões afins*.

É possível mostrar que a conexão de Levi-Civita ∇ é univocamente determinada pela métrica a partir da **fórmula de Koszul**:

$$2\langle \nabla_X Y, Z \rangle = X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle - \langle X, [Y, Z] \rangle + \langle Y, [Z, X] \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle. \quad (1-1)$$

Por outro lado, a escolha de uma conexão afim ∇ dá origem à uma derivada covariante bem definida de campos ao longo de uma curva no sentido de que se V é um campo definido ao longo de uma curva $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$, isto é, $V(t) = V(c(t))$ então $\frac{DV}{dt}$ é um campo vetorial ao longo de c tal que

$$\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} V.$$

Nas condições acima, dizemos que V é um campo **paralelo** ao longo de c se $\frac{DV}{dt} = 0$. Agora, seja um vetor $V_0 \in T_{c(t_0)}M$ para algum $t_0 \in I$. Existe um único campo paralelo $V(t)$ ao longo de c tal que $V(t_0) = V_0$ na qual é chamado de **transporte paralelo**. A existência e unicidade deste campo é garantida pois é possível mostrar que as coordenadas do campo V satisfazem um sistema de equações diferenciais ordinárias.

Definição 1.5 *Uma curva parametrizada $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ é uma **geodésica** se, para todo $t \in I$,*

$$\frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = 0.$$

A equação diferencial da definição acima nos permite provar a existência e unicidade de uma geodésica passando por um certo ponto e com uma certa velocidade inicial como uma solução local de um problema de valor inicial. Desta forma, podemos denotar por

$$\gamma(t, p, v)$$

a geodésica de M passando $p \in M$ e com velocidade inicial $v \in T_pM$. Note que esta denotação possui uma natureza local, embora utilizando resultados de existências de vizinhanças e de homogeneidade (ver [9, Capítulo 3]), sempre é possível aumentar o intervalo de definição I e diminuir a velocidade da geodésica, e vice-versa.

Sendo assim, dado um $p \in M$, existe uma vizinhança $\mathcal{U} \in TM$ da forma $V \times W$ onde $V \subset M$ é uma vizinhança de p e W é um aberto em T_pM na qual podemos definir a

aplicação exponencial

$$\begin{aligned} \exp : \mathcal{U} &\rightarrow M \\ (q, v) &\mapsto \gamma(1, q, v) = \gamma\left(1, q, \frac{v}{|v|}\right), \end{aligned}$$

onde γ está definida para todo $t \in (-2, 2)$. Podemos ainda restringir a aplicação exponencial à um espaço tangente da seguinte maneira: dado $q \in M$, $\exp_q : B_\delta(0) \subset T_q M \rightarrow M$, definida na bola aberta $B_\delta(0)$ de raio $\delta > 0$ e centrada na origem de $T_q M$, dada por

$$\exp_q(v) = \exp(q, v).$$

Vale destacar que, localmente, sempre é possível obter uma vizinhança $B_\delta(0)$ em que a aplicação exponencial \exp_q é um difeomorfismo.

Prosseguindo, a partir das conexões podemos estabelecer um objeto geométrico muito importante das variedades, a curvatura.

Definição 1.6 *Seja ∇ é a conexão riemanniana de M . A curvatura R de uma variedade riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par X e Y em TM uma aplicação*

$$\begin{aligned} R(X, Y) : TM &\rightarrow TM \\ Z &\mapsto R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z. \end{aligned}$$

Vale ressaltar que na literatura é comum encontrar a definição acima distinta apenas por um sinal, como em [9] e [16]. Preferimos adotar a notação utilizada em [2] por conveniência.

A curvatura R de M satisfaz as seguintes propriedades:

1. R é bilinear em $TM \times TM$;
2. Para todo par $X, Y \in TM$ o operador curvatura $R(X, Y)$ é linear em TM .

Além das propriedades acima, a curvatura R também possui uma certa simetria da seguinte forma: se $X, Y, Z, W \in TM$, então valem as seguintes igualdades:

1. $\langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle R(Y, Z)X, W \rangle + \langle R(Z, X)Y, W \rangle = 0$ (Identidade de Bianchi);
2. $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = -\langle R(Y, X)Z, W \rangle$;
3. $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = -\langle R(X, Y)W, Z \rangle$;
4. $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(Z, W)X, Y \rangle$.

Antes de apresentar a próxima definição, dados dois campos de vetores X e Y em TM denotaremos por

$$|X \wedge Y| = \sqrt{\langle X, X \rangle^2 \langle Y, Y \rangle^2 - \langle X, Y \rangle^2},$$

na qual representa a área do paralelogramo determinado por X e Y .

Definição 1.7 Dados $\sigma \subset TM$ um subespaço bidimensional e $X, Y \in \sigma$ duas direções linearmente independentes, definimos a curvatura seccional de σ por

$$K(X, Y) = \frac{\langle R(X, Y)Y, X \rangle}{|X \wedge Y|^2}, \quad (1-2)$$

onde R é a curvatura de M . O número real $K(X, Y) = K(\sigma)$ independe da escolha da base $\{X, Y\}$ em σ .

Para o escopo deste trabalho, trataremos de variedades de curvatura seccional constante. Assim, convém enunciar o seguinte resultado:

Lema 1.8 Uma variedade riemanniana M tem curvatura seccional constante K_0 se, e somente se, a curvatura R de M é dada por

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = K_0(\langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle),$$

para todo $X, Y, Z, W \in TM$.

As variedades riemannianas com curvatura seccional constante possuem um papel muito importante no estudo da Geometria Riemanniana. Três espaços são de fundamental importância - os chamados **Espaços Modelos** ou **Formas Espaciais** - devido à um resultado clássico que nos diz que qualquer variedade riemanniana completa de curvatura seccional constante possui o recobrimento universal isométrico à um desses modelos. As Formas Espaciais são \mathbb{S}^n , \mathbb{R}^n e \mathbb{H}^n nas quais possuem curvaturas seccionais constantes 1, 0 e -1 , respectivamente.

Algumas combinações de curvaturas seccionais recebem alguns nomes especiais como é o caso da *curvatura de Ricci*.

Definição 1.9 Seja $X \in TM$ um campo unitário e $\{X_1, \dots, X_{n-1}\}$ uma base ortonormal do hiperplano de TM ortogonal à X . Definimos a curvatura de Ricci na direção X por

$$\text{Ric}(X) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(X, X_i)X, X_i \rangle.$$

Podemos relacionar a curvatura de Ricci à uma forma bilinear simétrica em TM , chamada de tensor de Ricci, que é dada por:

$$\text{Ric}(X, Y) = \text{traço}\{Z \mapsto R(X, Z)Y; Z \in TM\}, \text{ com } X, Y \in TM.$$

Em uma base ortonormal $\{X_1, \dots, X_n\}$ de TM , o tensor de Ricci fica:

$$\text{Ric}(X_i, X_j) = \sum_{k=1}^n \langle R(X_i, X_k)X_j, X_k \rangle, \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Definição 1.10 Uma variedade riemanniana M é chamada de Einstein se

$$\text{Ric} = \Lambda g,$$

onde Ric é o tensor de Ricci de M , g é a métrica riemanniana de M e Λ uma constante. Mais especificamente, M é chamada de variedade Λ -Einstein.

Dizemos que uma base $\{X_1, \dots, X_n\} \in TM$ diagonaliza o tensor de Ricci de M se

$$\text{Ric}(X_i, X_j) = 0, \forall i \neq j \in \{1, \dots, n\}.$$

Em particular, se M é de Einstein, qualquer base ortonormal em TM diagonaliza seu tensor de Ricci.

Anteriormente, falamos sobre campos ao longo de curvas ao introduzir a noção de paralelismo. Outros tipos de campos muito importantes, sobretudo no estudo de variações geodésicas, são os chamados campos de Jacobi que surgem no estudos envolvendo geodésicas e a aplicação exponencial.

Definição 1.11 Seja J campo diferenciável definido numa geodésica $\gamma : [0, l] \rightarrow M$. Dizemos que J é um **campo de Jacobi** ao longo de γ se satisfaz

$$J''(t) + R(\dot{\gamma}(t), J(t))\dot{\gamma}(t) = 0,$$

para todo $t \in [0, l]$, onde J'' denota a segunda derivada covariante $\frac{D^2 J}{dt^2}$ ao longo de γ e R é a curvatura de M .

Exemplo 1.12 Se M é um espaço de curvatura seccional constante K e γ é uma geodésica normalizada ($|\dot{\gamma}| = 1$) então a equação que determina um campo de Jacobi J ao longo de γ se reduz à

$$J''(t) + KJ = 0.$$

Note que, a partir da equação da Definição 1.11, um campo de Jacobi fica unicamente determinado pelas condições iniciais $J(0)$ e $J'(0)$. Ainda, quando impomos que $J(0) = 0$, localmente um campo de Jacobi pode ser expresso por

$$J(t) = d\left(\exp_{\gamma(0)}\right)_{t\gamma'(0)}(tJ'(0)), \quad (1-3)$$

enfatizando a relação entre estes campos e a aplicação exponencial. Note que, como mencionamos anteriormente, \exp é um difeomorfismo local então localmente fica bem definida a igualdade acima.

Definição 1.13 *Seja $p \in M$. Dizemos que $q \in M$ é um ponto conjugado de p se existem uma geodésica $\gamma: [0, l] \rightarrow M$, ligando $p = \gamma(0)$ e $q = \gamma(l)$, e um campo de Jacobi J definido ao longo de γ que satisfaz $J(0) = 0 = J(l)$.*

Observe que, de (1-3) e da definição acima, um ponto conjugado é um ponto crítico da aplicação exponencial.

O conjunto dos primeiros pontos conjugados de um ponto $p \in M$ para todas as geodésicas que partem de p é denotado por C_p .

Exemplo 1.14 (a) *Se M possui curvatura seccional constante $K \leq 0$ então C_p é vazio para todo $p \in M$;*
 (b) *Em \mathbb{S}^n , $C_p = \{p, -p\}$, para todo $p \in \mathbb{S}^n$.*

1.2 Imersões Isométricas

Como vimos nos comentários após as Definições 1.1 e 1.2, se $f: M^n \rightarrow \bar{M}^{n+k}$ é uma imersão entre variedades na qual \bar{M} possui uma estrutura riemanniana, então podemos induzir uma estrutura riemanniana em M por meio de

$$\langle U, V \rangle_M = \langle df(U), df(V) \rangle_N, \text{ para todo } U, V \in TM,$$

tornando assim f uma **imersão isométrica**. Vamos definir alguns conceitos e resultados que relacionam as geometrias de M e \bar{M} .

Como de certo modo toda imersão é localmente um mergulho, para cada $p \in M$ existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f(U) \subset \bar{M}$ é uma subvariedade de \bar{M} .

Para facilitar as notações, vamos identificar U com $f(U)$ e cada $X = (p, X) \in TM$ com $df(X) = (f(p), df(X)) \in T\bar{M}$. Tais identificações serão úteis para estender um campo local de vetores de M a um campo local de vetores em \bar{M} . Essa extensão pode ser realizada através de um processo parecido com a idéia de levantamento que iremos definir na próxima seção: para um campo local de vetores $X = (p, X_p)$ em TM , considere sua

extensão local \bar{X} em $T\bar{M}$ como o único campo tal que para cada $p \in M$, $df_p(X_p) = \bar{X}_{f(p)}$, isto é, $\bar{X} = (f(p), \bar{X}_{f(p)}) \in T\bar{M}$.

Dessa maneira, é possível decompor o fibrado tangente $T\bar{M}$ numa soma direta entre o fibrado tangente TM (identificando $TM \subset T\bar{M}$) e um complemento ortogonal de TM em $T\bar{M}$, isto é,

$$T\bar{M} = TM \oplus (TM)^\perp.$$

Assim, para cada $X \in T\bar{M}$, podemos escrever $X = X^T + X^N$, onde $X^T \in TM$ é a componente tangencial e $X^N \in (TM)^\perp$ é a componente normal de X .

Considere $\bar{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita de \bar{M} e X e Y campos locais em M com extensões locais \bar{X} e \bar{Y} em \bar{M} , respectivamente. Definimos a conexão de Levi-Civita de M relativa à métrica induzida por f por:

$$\nabla_X Y = \left(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} \right)^T.$$

Definição 1.15 O tensor bilinear simétrico $\Pi : TM \times TM \rightarrow (TM)^\perp$ dado por

$$\Pi(X, Y) = \left(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} \right)^N$$

é chamado de *tensor shape* (ou *tensor segunda forma fundamental*).

Se $\eta \in (TM)^\perp$ e N é sua extensão local, então a aplicação $A_\eta : TM \rightarrow TM$ dada por

$$A_\eta(X) = - \left(\bar{\nabla}_X N \right)^T$$

é a aplicação linear auto-adjunta associada a aplicação bilinear Π , na qual é chamada de *operador shape* com respeito à N .

Como consequência, para $X, Y \in TM$, podemos escrever

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \Pi(X, Y),$$

onde $\nabla_X Y$ é tangente à M e $\Pi(X, Y)$ é normal à M . Esta decomposição nos leva uma relação fundamental entre as curvaturas de M e \bar{M} , chamada de **Equação de Gauss**: dados $X, Y, Z, W \in TM$ e R e \bar{R} os tensores curvaturas de M e \bar{M} , respectivamente, temos que

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle + \langle \Pi(X, W), \Pi(Y, Z) \rangle - \langle \Pi(X, Z), \Pi(Y, W) \rangle.$$

Consideramos agora o caso de uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+m}$ em que a codimensão $m = 1$. Neste caso, M é denominada de **hipersuperfície**. Às vezes também podemos referir a própria imersão isométrica como uma hipersuperfície. Denotaremos uma hipersuperfície por Σ .

Dado um campo unitário $\eta \in (T\Sigma)^\perp$, como o operador shape A_η é linear e auto-adjunto, existe uma base ortonormal de autovetores $\{X_1, \dots, X_n\} \in TM$ com autovalores reais $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, isto é,

$$A_\eta(X_i) = \lambda_i X_i, \text{ para todo } i = 1, \dots, n. \quad (1-4)$$

Observa que se Σ e \overline{M} são orientáveis, podemos tomar $\{X_1, \dots, X_n\}$ como uma orientação para Σ e $\{X_1, \dots, X_n, \eta\}$ como uma orientação para \overline{M} , tornando assim o campo η univocamente determinado.

As direções X_i são chamadas de *direções principais* e os valores reais λ_i são chamados de *curvaturas principais* de Σ .

Sejam $\overline{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita de \overline{M} , N a extensão local em \overline{M} de η e A o operador shape de Σ associado ao campo normal unitário N . Assim,

$$AX = -\overline{\nabla}_X N, \text{ com } X \in T\Sigma. \quad (1-5)$$

Além disso, considerando R e \overline{R} as curvaturas de Σ e \overline{M} , respectivamente, a equação de Gauss de Σ é dada por:

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle \overline{R}(X, Y)Z, W \rangle + \langle AX, W \rangle \langle AY, Z \rangle - \langle AX, Z \rangle \langle AY, W \rangle. \quad (1-6)$$

Em uma base ortonormal de direções principais $\{X_1, \dots, X_n\}$ de Σ com curvaturas principais $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, a equação de Gauss de Σ fica

$$\langle R(X_k, Y)Z, X_k \rangle = \langle \overline{R}(X_k, Y)Z, X_k \rangle + \lambda_k \langle AY, Z \rangle - \lambda_k^2 \langle X_k, Z \rangle \langle X_k, Y \rangle,$$

visto que $\langle X_i, X_j \rangle = \delta_{ij}$. A partir desta última equação, o tensor de Ricci de Σ é dado por

$$\begin{aligned} Ric(X_i, X_j) &= \sum_{k=1}^n \langle \overline{R}(X_k, X_i)X_j, X_k \rangle + \lambda_k \langle AX_i, X_j \rangle - \lambda_k^2 \langle X_k, X_i \rangle \langle X_k, X_j \rangle \\ &= \sum_{k=1}^n \langle \overline{R}(X_k, X_i)X_j, X_k \rangle + H \delta_{ij} \lambda_i - \delta_{ij} \lambda_i^2, \end{aligned} \quad (1-7)$$

onde $i, j = 1, \dots, n$ e $H = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{traço}(A)$. H também é chamada de *curvatura média*.

1.3 Variedades Produto

Vamos considerar um tipo de variedade riemanniana obtida pelo produto de outras duas, chamadas *variedades produto*. Inicialmente, vamos considerar o produto usual e, em seguida, generalizar para *produtos torcidos* mais gerais que nos serão úteis nos próximos capítulos.

Algumas demonstrações desta seção serão omitidas mas podem ser encontradas especificamente em [16].

Sejam B e F duas variedades riemannianas, com suas respectivas métricas g_B e g_F , e o produto $M = B \times F$. Considere $\pi : M \rightarrow B$ e $\sigma : M \rightarrow F$ as projeções de $B \times F$ em B e F , respectivamente. O produto M é uma variedade riemanniana, cujo tensor métrico é dado por:

$$g_M = \pi^*(g_B) + \sigma^*(g_F),$$

onde $\pi^* : B^* \rightarrow M^*$ e $\sigma^* : F^* \rightarrow M^*$ são os *pullbacks* obtidos pelas projeções π e σ , já que são aplicações diferenciáveis.

A variedade B é chamada de base e a variedade F é chamada de fibra de M . Além disso, para cada $p \in B$ e para cada $q \in F$, as subvariedades $p \times F = \pi^{-1}(p)$ e $B \times q = \sigma^{-1}(q)$ de M são chamadas, respectivamente, de *fibras* e *folhas* do produto $B \times F$.

Note que as aplicações $\pi|_{(B \times q)}$ e $\sigma|_{(p \times F)}$ são isometrias sobrejetoras em B e F , respectivamente, e em $(p, q) \in M$ a fibra $p \times F$ e a folha $B \times q$ são ortogonais. Chamaremos de campos horizontais os campos tangentes às folhas,

Estamos interessados em algumas relações geométricas de M dadas em termos das geometrias de B e F . Para isso, precisamos de um conceito fundamental: a noção de *levantamento*.

- Definição 1.16**
1. Se $f \in \mathcal{D}(B)$, definimos o levantamento de f em $B \times F$ por $\bar{f} = f \circ \pi \in \mathcal{D}(B \times F)$;
 2. Se $(p, q) \in B \times F$ e $x \in T_p B$, definimos o levantamento de x em (p, q) como sendo o único vetor $\bar{x} \in T_{(p, q)}(B \times F)$ tal que $d\pi(\bar{x}) = x$;
 3. Se $X \in TB$, definimos o levantamento de X em $B \times F$ como sendo o campo $\bar{X} \in T(B \times F)$ para o qual seus valores em cada (p, q) é o levantamento de X_p em (p, q) . Neste caso, o levantamento de $X \in TB$ em $B \times F$ é o único campo $\bar{X} \in T(B \times F)$ que é π -relacionado à X e σ -relacionado ao campo nulo em TF .

De maneira análoga são definidos os levantamentos de F utilizando σ . Denotaremos por $\mathcal{L}(B)$ e $\mathcal{L}(F)$ o conjunto de todos os levantamentos horizontais e verticais, respectivamente.

Proposição 1.17 *Sejam $\bar{X}, \bar{Y} \in \mathcal{L}(B)$ e $\bar{V}, \bar{W} \in \mathcal{L}(F)$. Então valem:*

1. $[\bar{X}, \bar{Y}] = \overline{[X, Y]} \in \mathcal{L}(B)$ e $[\bar{V}, \bar{W}] = \overline{[V, W]} \in \mathcal{L}(F)$;
2. $[\bar{X}, \bar{V}] = 0$.

Agora com um olhar mais focado para o nosso objetivo, vamos considerar um tipo de generalização de uma variedade produto $B \times F$ realizando uma torção homotética na métrica em cada fibra $p \times F$, os chamados *produtos torcidos*.

Definição 1.18 *Sejam B e F variedades riemannianas e $f \in \mathcal{D}(B)$ positiva. O produto torcido $M = B \times_f F$ é a variedade produto $B \times F$ munida pelo tensor métrico*

$$g_M = \pi^*(g_B) + (f \circ \pi)^2 \sigma^*(g_F).$$

Explicitamente, se $x \in T_{(p,q)}(B \times F)$, então

$$\langle x, x \rangle_M = \langle d\pi(x), d\pi(x) \rangle_B + f(p)^2 \langle d\sigma(x), d\sigma(x) \rangle_F.$$

A função f é chamada de função torção (ou função warping, em inglês).

Observe que, na definição acima, se $f(p) = 1$ para todo $p \in B$, então o produto torcido se reduz ao produto usual. Além disso, as definições e propriedades vistas anteriormente para o produto usual são as mesmas considerando o produto torcido, apenas enfatizando que, neste caso, para cada $p \in B$ a aplicação $\sigma|_{(p \times F)}$ é uma homotetia positiva sobrejetora em F com fator escalar $\frac{1}{f(p)}$.

Estamos interessados em estudar como se relacionam as conexões e as curvaturas de B e F com as de $M = B \times_f F$.

Lema 1.19 *Se $h \in \mathcal{D}(B)$ então o gradiente do levantamento $h \circ \pi$ de h em $M = B \times_f F$ é o levantamento em M do gradiente de h em B .*

De certa forma, o lema acima diz que o gradiente de uma função diferenciável definida na base da variedade é o mesmo tanto em B quanto em M . Assim, não há confusão em simplificar as notações de $h \circ \pi$ e $\text{grad}(h \circ \pi)$ por apenas h e $\text{grad}(h)$, respectivamente.

Considere ∇^B , ∇^F e ∇^M as conexões de Levi-Civita de B , F e M , respectivamente. O próximo resultado relaciona estas conexões.

Proposição 1.20 *Em $M = B \times_f F$, se $X, Y \in \mathcal{L}(B)$ e $V, W \in \mathcal{L}(F)$, então:*

1. $\nabla_X^M Y \in \mathcal{L}(B)$ é o levantamento de $\nabla_X^B Y$ em B ;

2. $\nabla_X^M V = \nabla_V^M X = \frac{X(f)}{f} V$;
3. $(\nabla_V^M W)^N = \Pi(V, W) = -\frac{\langle V, W \rangle}{f} \text{grad}(f)$;
4. $(\nabla_V^M W)^T \in \mathcal{L}(F)$ é o levantamento de $\nabla_V^F W$ em F .

Prova. Observe inicialmente que, da Proposição 1.17, $[X, V] = [Y, V] = 0$ e $\langle [X, Y], V \rangle = 0$. Além disso, como $\langle X, Y \rangle$ é constante em cada fibra $p \times F$, temos que $V \langle X, Y \rangle = 0$. Portanto, segue diretamente da Fórmula de Koszul 1-1 que

$$\langle \nabla_X^M Y, V \rangle = 0,$$

ou seja, $\nabla_X^M Y$ é horizontal provando o item 1.

Agora, desde que $[X, V] = 0$, temos que $\nabla_X^M V = \nabla_V^M X$. Além disso, usando o item 1 e o fato de que $\langle Y, V \rangle = 0$, chegamos em

$$0 = \langle \nabla_X^M Y, V \rangle = -\langle \nabla_X^M V, Y \rangle.$$

Concluimos que $\nabla_X^M V$ (e, conseqüentemente, $\nabla_V^M X$ pois são iguais) é vertical.

Semelhante ao que fizemos no item 1, usando agora a Fórmula de Koszul 1-1 em $\nabla_X^M V$, obtemos

$$2 \langle \nabla_X^M V, W \rangle = X \langle V, W \rangle. \quad (1-8)$$

Por outro lado, da métrica torcida dada pela Definição 1.18, temos que

$$\langle V, W \rangle(p, q) = f(p)^2 \langle V_q, W_q \rangle_F \quad \Rightarrow \quad \langle V, W \rangle = (f \circ \pi)^2 (g_F(V, W) \circ \sigma).$$

Escrevendo $f \circ \pi = f$ por simplicidade de notação e levando em consideração que $g_F(V, W) \circ \sigma$ é constante nas folhas em que X é tangente, concluimos que

$$\begin{aligned} X \langle V, W \rangle &= X (f^2 g_F(V, W) \circ \sigma) = X(f^2) (g_F(V, W) \circ \sigma) \\ &= 2fX(f) (g_F(V, W) \circ \sigma) = 2 \frac{X(f)}{f} f^2 (g_F(V, W) \circ \sigma) = 2 \frac{X(f)}{f} \langle V, W \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, de (1-8), concluimos que

$$\nabla_X^M V = \frac{X(f)}{f} V,$$

concluindo a demonstração do item 2.

Usando o item 2 e o fato de que $V\langle X, W \rangle = 0$ obtemos

$$\langle \nabla_V^M W, X \rangle = -\langle \nabla_V^M X, W \rangle = -\left(\frac{Xf}{f}\right)\langle V, W \rangle.$$

A partir do Lema 1.19, como $f \in \mathcal{L}(B)$ temos que o gradiente de f é o mesmo em M quanto em B . Ainda, sendo $X \in \mathcal{L}(B)$, então $Xf = \langle \text{grad}(f), X \rangle$. Logo,

$$\langle \nabla_V^M W, X \rangle = -\frac{\langle \text{grad}(f), X \rangle}{f}\langle V, W \rangle = -\left\langle \frac{\langle V, W \rangle}{f} \text{grad}(f), X \right\rangle.$$

Portanto, desde que a projeção normal $(\nabla_V^M W)^N$ é em relação as fibras $p \times F$, então

$$(\nabla_V^M W)^N = \Pi(V, W) = -\frac{\langle V, W \rangle}{f} \text{grad}(f),$$

demonstrando, assim, o item 3.

Para provar o item 4, observe que

$$\nabla_V^M W = (\nabla_V^M W)^T + (\nabla_V^M W)^N.$$

Logo, $(\nabla_V^M W)^T$ é a derivada covariante de $\nabla_V^M W$ em F , isto é, são σ -relacionados. Portanto, segue o resultado visto que σ é homotetia e, consequentemente, preserva conexões riemannianas. \square

Corolário 1.21 *As folhas de um produto torcido são totalmente geodésicas e as fibras são totalmente umbílicas.*

Agora vamos estabelecer alguns resultados que relacionam as curvaturas de B e de F com a curvatura de M . Inicialmente, observe que para um tensor covariante A em B (ou em F), seu levantamento em M é o pullback dado por π^* (ou por σ^*).

Considere R^B e R^F os levantamentos em M dos tensores curvaturas de B e de F , respectivamente. Como π é isometria em cada folha, R^B nos dá a curvatura riemanniana em cada $B \times q$. O mesmo também ocorre para R^F , já que σ é homotetia em cada fibra.

Além disso, como cada folha é totalmente geodésica, R^B coincide com a curvatura R^M de M em campos horizontais. De fato, se $X, Y \in TB$, como as conexões de Levi-Civita de B e de M coincidem (item 1, Proposição 1.20), temos que para qualquer $Z \in TB$ vale

$$R^B(X, Y)Z = \nabla_X^B \nabla_Y^B Z - \nabla_Y^B \nabla_X^B Z - \nabla_{[X, Y]}^B Z = R^M(X, Y)Z.$$

Entretanto, o mesmo pode falhar para R^F e R^M .

Será conveniente definir a Hessiana de uma função $f \in \mathcal{D}(M)$ como sendo a segunda diferencial covariante $H^f = D(Df)$ e estabelecer a seguinte relação: desde que $Df = df$

$$H^f(X, Y) = D(df)(X, Y) = \nabla_Y^M(df)X = Y(df(X)) - df(\nabla_Y^M X) = XY(F) - (\nabla_X^M Y)f, \quad (1-9)$$

isto é, $H^f(X, Y) = (XY - \nabla_X^M Y)f$. Além disso, H^f é um campo tensorial $(0, 2)$ simétrico, já que da simetria da conexão, temos $XY - \nabla_X^M Y = YX - \nabla_Y^M X$.

Proposição 1.22 *Seja $M = B \times_f F$ com tensor curvatura R^M . Se $X, Y, Z \in \mathcal{L}(B)$ e $U, V, W \in \mathcal{L}(F)$, então*

1. $R^M(X, Y)Z \in \mathcal{L}(B)$ é o levantamento de $R^B(X, Y)Z$ em B ;
2. $R^M(V, X)Y = -\frac{H^f(X, Y)}{f}V$, onde H^f é a hessiana de f ;
3. $R^M(X, Y)V = R^M(V, W)X = 0$;
4. $R^M(X, V)W = -\frac{\langle V, W \rangle}{f} \nabla_X^M(\text{grad}(f))$;
5. $R^M(V, W)U = R^F(V, W)U + \frac{\langle \text{grad}(f), \text{grad}(f) \rangle}{f^2} \{ \langle V, U \rangle W - \langle W, U \rangle V \}$.

Prova. O item 1 segue diretamente das considerações feitas acima.

Da Proposição 1.17, temos que $[V, X] = 0$. Logo,

$$R^M(V, X)Y = \nabla_V^M \nabla_X^M Y - \nabla_X^M \nabla_V^M Y. \quad (1-10)$$

Agora, da Proposição 1.20, temos que

$$\begin{aligned} \nabla_X^M \nabla_V^M Y &= \nabla_X^M \left(\frac{Yf}{f} \right) V = X \left(\frac{Yf}{f} \right) V + \left(\frac{Yf}{f} \right) \nabla_X^M V \\ &= \left(\frac{X(Yf)}{f} + YfX \left(\frac{1}{f} \right) \right) V + \left(\frac{Yf}{f} \right) \left(\frac{Xf}{f} \right) V \\ &= \left(\frac{X(Yf)}{f} - Yf \left(\frac{Xf}{f^2} \right) + \left(\frac{Yf}{f} \right) \left(\frac{Xf}{f} \right) \right) V = \frac{X(Yf)}{f} V. \end{aligned} \quad (1-11)$$

Ainda da Proposição 1.20 temos que $\nabla_X^M Y \in \mathcal{L}(B)$ e que

$$\nabla_V^M (\nabla_X^M Y) = \left(\frac{(\nabla_X^M Y)f}{f} \right) V. \quad (1-12)$$

Portanto, substituindo (1-11) e (1-12) em (1-10), concluímos que

$$R^M(V, X)Y = \left(\frac{(\nabla_X^M Y)f}{f} - \frac{X(Yf)}{f} \right) V = -\frac{H^f(X, Y)}{f} V,$$

provando o item 2.

Para mostrar o item 3, vamos assumir que $[V, W] = 0$. Assim, da Proposição 1.20, temos que

$$R^M(V, W)X = \nabla_V^M \nabla_W^M X - \nabla_W^M \nabla_V^M X = \nabla_V^M \left(\frac{Xf}{f} \right) W - \nabla_W^M \left(\frac{Xf}{f} \right) V.$$

Note que $W \left(\frac{Xf}{f} \right) = V \left(\frac{Xf}{f} \right) = 0$ pois $\frac{Xf}{f}$ é constante em cada fibra. Logo,

$$R^M(V, W)X = \left(\frac{Xf}{f} \right) (\nabla_V^M W - \nabla_W^M V) = \left(\frac{Xf}{f} \right) [V, W] = 0.$$

Por outro lado, das simetrias da curvatura, temos que $\langle R^M(X, Y)V, W \rangle = \langle R^M(V, W)X, Y \rangle = 0$. Ainda, do item 1, temos que $R^M(X, Y)Z = R^B(X, Y)Z$. Desde que $R^B(X, Y)Z$ é um campo tangente as folhas $B \times q$, então

$$\langle R^M(X, Y)V, Z \rangle = -\langle R^M(X, Y)Z, V \rangle = -\langle R^B(X, Y)Z, V \rangle = 0.$$

Como as igualdades acima valem para todo $Z \in \mathcal{L}(B)$ e para todo $W \in \mathcal{L}(F)$, então fica provado o item 3.

A partir do item 2 e das simetrias da curvatura, obtemos

$$\begin{aligned} \langle R^M(X, V)W, Y \rangle &= \langle R^M(V, X)Y, W \rangle = \left\langle \left(\frac{H^f(X, Y)}{f} \right) Y, W \right\rangle = \frac{H^f(X, Y)}{f} \langle Y, W \rangle \\ &= \frac{\langle \nabla_X^M \text{grad}(f), Y \rangle}{f} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{\langle V, W \rangle}{f} \nabla_X^M \text{grad}(f), Y \right\rangle. \end{aligned} \quad (1-13)$$

Observe que $R^M(X, V)W$ é horizontal, pois do item 2, $\langle R^M(X, V)W, U \rangle = \langle R^M(W, U)X, V \rangle = 0$, para todo $U \in \mathcal{L}(F)$. Como (1-13) vale para todo $Y \in \mathcal{L}(B)$, segue que

$$R^M(X, V)W = \frac{\langle V, W \rangle}{f} \nabla_X^M \text{grad}(f),$$

demonstrando, assim, o item 4.

Para finalizar, note que $R^M(V, W)U$ é vertical, já que do item 3 e da simetria da curvatura,

$$\langle R^M(V, W)U, X \rangle = -\langle R^M(V, W)X, U \rangle = 0, \text{ para todo } X \in \mathcal{L}(B).$$

Além disso, $R^F(V, W)U \in \mathcal{L}(F)$ pois é o tensor curvatura em cada fibra. Temos

que os tensores $R^M(V, W)U$ e $R^F(V, W)U$ são relacionados pela equação de Gauss:

$$\langle R^F(V, W)U, \cdot \rangle = \langle R^M(V, W)U, \cdot \rangle + \langle \Pi(V, \cdot), \Pi(W, U) \rangle - \langle \Pi(V, U), \Pi(W, \cdot) \rangle.$$

logo, usando a Proposição 1.20, concluímos que

$$\begin{aligned} \langle R^F(V, W)U, \cdot \rangle &= \langle R^M(V, W)U, \cdot \rangle + \langle \Pi(V, \cdot), \Pi(W, U) \rangle - \langle \Pi(V, U), \Pi(W, \cdot) \rangle \\ &= \langle R^M(V, W)U, \cdot \rangle \\ &+ \left\langle \frac{\langle V, \cdot \rangle}{f} \text{grad}(f), \frac{\langle W, U \rangle}{f} \text{grad}(f) \right\rangle - \left\langle \frac{\langle V, U \rangle}{f} \text{grad}(f), \frac{\langle W, \cdot \rangle}{f} \text{grad}(f) \right\rangle \\ &= \langle R^M(V, W)U, \cdot \rangle + \frac{\langle \text{grad}(f), \text{grad}(f) \rangle}{f^2} \{ \langle V, \cdot \rangle \langle W, U \rangle - \langle V, U \rangle \langle W, \cdot \rangle \} \\ &= \left\langle R^M(V, W)U + \frac{\langle \text{grad}(f), \text{grad}(f) \rangle}{f^2} \{ \langle W, U \rangle V - \langle V, U \rangle W \}, \cdot \right\rangle, \end{aligned}$$

concluindo a demonstração do item 5. □

Ressaltamos que a proposição acima diferencia de [16, Proposição 7.42] apenas por um sinal, já que estamos considerando neste trabalho a definição do tensor curvatura com sinal trocado.

Produto torcido $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$

Neste capítulo vamos considerar o produto torcido que estudaremos no decorrer deste trabalho. Seja $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, ω é uma função diferenciável positiva definida em I e $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ é uma forma espacial simplesmente conexa de curvatura seccional constante $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$, ou seja, ou é \mathbb{H}^n (se $\varepsilon = -1$) ou \mathbb{R}^n (se $\varepsilon = 0$) ou \mathbb{S}^n (se $\varepsilon = 1$).

Vamos denotar a métrica de $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ por

$$ds^2 = dt^2 + \omega(t)^2 ds_{\varepsilon}^2, \quad (2-1)$$

onde dt^2 e ds_{ε}^2 são, respectivamente, as métricas riemannianas de \mathbb{R} e de $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$. Também denotaremos por ∂_t o gradiente da projeção π no primeiro fator I .

2.1 Fórmulas Básicas

Considere $\bar{\nabla}$ e ∇ as conexões de Levi-Civita de $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ e de $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$, respectivamente. Vale ressaltar que o item 1 da Proposição 1.20 mostra que a conexão de Levi-Civita de I coincide com a do produto torcido em I , por isso usaremos a mesma notação para ambas.

Nossa idéia inicial será estabelecer alguns resultados análogos às Proposições 1.20 e 1.22.

Proposição 2.1 *Para quaisquer campos verticais $X, Y \in T\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ valem as igualdades:*

1. $\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \frac{\omega'}{\omega} \langle X, Y \rangle \partial_t$;
2. $\bar{\nabla}_X \partial_t = \bar{\nabla}_{\partial_t} X = \frac{\omega'}{\omega} X$;
3. $\bar{\nabla}_{\partial_t} \partial_t = 0$.

Prova. A primeira identidade segue dos itens 3 e 4 da Proposição 1.20. Neste caso, temos que $\text{grad}(\omega) = \partial_t(\omega)\partial_t = \omega'\partial_t$. Logo

$$\bar{\nabla}_X Y = \left(\bar{\nabla}_X Y\right)^T + \left(\bar{\nabla}_X Y\right)^N = \nabla_X Y - \frac{\omega'}{\omega} \langle X, Y \rangle \partial_t.$$

A segunda identidade segue diretamente do item 2 da Proposição 1.20. A partir do item 1 desta mesma proposição e, lembrando que como $I \subset \mathbb{R}$, então a derivada covariante de ∂_t em qualquer direção é nula, já que as retas em \mathbb{R}^n são geodésicas. Ou seja, segue $\bar{\nabla}_{\partial_t} \partial_t = 0$. \square

Agora, considere a decomposição $X = X_t + X_\varepsilon$, com $X_t \in \mathcal{L}(I)$ e $X_\varepsilon \in \mathcal{L}(Q_\varepsilon^n)$, e escreva $X_t = x(t)\partial_t$. Analogamente, considere estas notações para os campos Y, Z e W .

Proposição 2.2 *Considere \bar{R} e R as curvaturas de $I \times_\omega Q_\varepsilon^n$ e de Q_ε^n , respectivamente. Então,*

1. $\bar{R}(\partial_t, \partial_t)Z = 0$;
2. $\bar{R}(X_\varepsilon, \partial_t)\partial_t = -\frac{\omega''}{\omega}X_\varepsilon$;
3. $\bar{R}(\partial_t, \partial_t)Z_\varepsilon = \bar{R}(X_\varepsilon, Y_\varepsilon)\partial_t = 0$;
4. $\bar{R}(\partial_t, Y_\varepsilon)Z_\varepsilon = -\frac{\omega''}{\omega}\langle Y_\varepsilon, Z_\varepsilon \rangle \partial_t$;
5. $\bar{R}(X_\varepsilon, Y_\varepsilon)Z_\varepsilon = \frac{(\omega')^2 - \varepsilon}{\omega^2} \{ \langle X_\varepsilon, Z_\varepsilon \rangle Y_\varepsilon - \langle Y_\varepsilon, Z_\varepsilon \rangle X_\varepsilon \}$.

Prova. O item 1 segue pelo fato de que a curvatura é a mesma tanto em I e quanto em $I \times_\omega Q_\varepsilon^n$. Desde que $I \subset \mathbb{R}$, segue que $\bar{R}(\partial_t, \partial_t) = 0$.

Os itens 2, 3 e 4 seguem diretamente da Proposição 1.22, apenas observando que, para o item 4, podemos escrever

$$\bar{\nabla}_{\partial_t}(\text{grad}(\omega)) = \bar{\nabla}_{\partial_t}(\omega' \partial_t) = \partial_t(\omega')\partial_t + \omega' \bar{\nabla}_{\partial_t} \partial_t = \omega'' \partial_t,$$

pois $\bar{\nabla}_{\partial_t} \partial_t = 0$.

Por fim, do Lema 1.8, como Q_ε^n tem curvatura seccional constante ε , então seu tensor curvatura R é dado por

$$\begin{aligned} \langle R(X_\varepsilon, Y_\varepsilon)Z_\varepsilon, W_\varepsilon \rangle_\varepsilon &= \varepsilon (\langle Y_\varepsilon, Z_\varepsilon \rangle_\varepsilon \langle X_\varepsilon, W_\varepsilon \rangle_\varepsilon - \langle X_\varepsilon, Z_\varepsilon \rangle_\varepsilon \langle Y_\varepsilon, W_\varepsilon \rangle_\varepsilon) \\ &= \frac{\varepsilon}{\omega^4} (\langle Y_\varepsilon, Z_\varepsilon \rangle \langle X_\varepsilon, W_\varepsilon \rangle - \langle X_\varepsilon, Z_\varepsilon \rangle \langle Y_\varepsilon, W_\varepsilon \rangle). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \langle R(X_\varepsilon, Y_\varepsilon)Z_\varepsilon, W_\varepsilon \rangle &= \omega^2 \langle R^\varepsilon(X_\varepsilon, Y_\varepsilon)Z_\varepsilon, W_\varepsilon \rangle_\varepsilon \\ &= \frac{\varepsilon}{\omega^2} (\langle Y_\varepsilon, Z_\varepsilon \rangle \langle X_\varepsilon, W_\varepsilon \rangle - \langle X_\varepsilon, Z_\varepsilon \rangle \langle Y_\varepsilon, W_\varepsilon \rangle) \end{aligned}$$

A igualdade acima junto com o item 5 da Proposição 1.22 nos dá

$$\begin{aligned}\bar{R}(X_\varepsilon, Y_\varepsilon)Z_\varepsilon &= R(X_\varepsilon, Y_\varepsilon)Z_\varepsilon + \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \{ \langle X_\varepsilon, Z_\varepsilon \rangle Y_\varepsilon - \langle Y_\varepsilon, Z_\varepsilon \rangle X_\varepsilon \} \\ &= \frac{(\omega')^2 - \varepsilon}{\omega^2} \{ \langle X_\varepsilon, Z_\varepsilon \rangle Y_\varepsilon - \langle Y_\varepsilon, Z_\varepsilon \rangle X_\varepsilon \},\end{aligned}$$

na qual mostra o item 5. □

Antes de prosseguirmos, algumas observações que facilitarão nossos cálculos

Observação 2.3 1. $\langle X_t, \partial_t \rangle = \langle X, \partial_t \rangle$, já que $\partial_t \in \mathcal{L}(I)$ e, assim, somar X_ε com X_t não altera o produto, pois $\langle X_\varepsilon, \partial_t \rangle = 0$;
2. De $\langle \partial_t, \partial_t \rangle = 1$, temos que

$$\langle X_t, W \rangle = x \langle \partial_t, W \rangle = x \langle \partial_t, \partial_t \rangle \langle \partial_t, W \rangle = \langle \partial_t, X \rangle \langle \partial_t, W \rangle$$

3. Semelhante ao item 1, como $\langle X_\varepsilon, Y_t \rangle = 0$, podemos escrever

$$\langle X_\varepsilon, Y_\varepsilon \rangle = \langle X_\varepsilon, Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \langle X_t, Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \langle \partial_t, X \rangle \langle \partial_t, Y \rangle$$

Agora, podemos obter uma fórmula para a curvatura de $I \times_\omega \mathbb{Q}_\varepsilon^n$. Desde que $\bar{R}(X, Y)Z$ é bilinear em X e Y , temos que

$$\begin{aligned}\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle &= \langle \bar{R}(X_t, Y_t)Z, W \rangle + \langle \bar{R}(X_t, Y_\varepsilon)Z, W \rangle + \langle \bar{R}(X_\varepsilon, Y_t)Z, W \rangle + \langle \bar{R}(X_\varepsilon, Y_\varepsilon)Z, W \rangle \\ &= \langle \bar{R}(X_t, Y_\varepsilon)Z, W \rangle + \langle \bar{R}(X_\varepsilon, Y_t)Z, W \rangle + \langle \bar{R}(X_\varepsilon, Y_\varepsilon)Z, W \rangle,\end{aligned}\tag{2-2}$$

pois $\bar{R}(X_t, Y_t)Z = xy\bar{R}(\partial_t, \partial_t)Z = 0$.

Por outro lado, $\bar{R}(X, Y)Z$ também é linear em Z e possui uma simetria (ver as propriedades da curvatura logo após a Definição 1.6). Isto, junto com a Proposição 2.2 e a Observação 2.3 nos dá

$$\begin{aligned}\langle \bar{R}(X_t, Y_\varepsilon)Z, W \rangle &= xz \langle \bar{R}(\partial_t, Y_\varepsilon)\partial_t, W \rangle + x \langle \bar{R}(\partial_t, Y_\varepsilon)Z_\varepsilon, W \rangle \\ &= -x \langle \partial_t, \partial_t \rangle z \langle \partial_t, \partial_t \rangle \left(-\frac{\omega''}{\omega}\right) \langle Y_\varepsilon, W \rangle + x \langle \partial_t, \partial_t \rangle \left(-\frac{\omega''}{\omega}\right) \langle Y_\varepsilon, Z_\varepsilon \rangle \langle \partial_t, W \rangle \\ &= \frac{\omega''}{\omega} \{ \langle \partial_t, X \rangle \langle \partial_t, Z \rangle \langle Y_\varepsilon, W \rangle - \langle \partial_t, X \rangle \langle Y_\varepsilon, Z \rangle \langle \partial_t, W \rangle \} \\ &= \frac{\omega''}{\omega} \{ \langle \partial_t, X \rangle \langle \partial_t, Z \rangle \langle Y, W \rangle - \langle \partial_t, X \rangle \langle \partial_t, Z \rangle \langle \partial_t, Y \rangle \langle \partial_t, W \rangle \\ &\quad - \langle \partial_t, X \rangle \langle Y, Z \rangle \langle \partial_t, W \rangle + \langle \partial_t, X \rangle \langle \partial_t, Y \rangle \langle \partial_t, Z \rangle \langle \partial_t, W \rangle \} \\ &= \frac{\omega''}{\omega} \{ \langle \partial_t, X \rangle \langle \partial_t, Z \rangle \langle Y, W \rangle - \langle \partial_t, X \rangle \langle Y, Z \rangle \langle \partial_t, W \rangle \}.\end{aligned}\tag{2-3}$$

Também temos que

$$\begin{aligned}
\langle \bar{R}(X_\varepsilon, Y_t)Z, W \rangle &= yz \langle \bar{R}(X_\varepsilon, \partial_t) \partial_t, W \rangle - y \langle \bar{R}(\partial_t, X_\varepsilon) Z_\varepsilon, W \rangle \\
&= y \langle \partial_t, \partial_t \rangle z \langle \partial_t, \partial_t \rangle \left(-\frac{\omega''}{\omega} \right) \langle X_\varepsilon, W \rangle - y \langle \partial_t, \partial_t \rangle \left(-\frac{\omega''}{\omega} \right) \langle X_\varepsilon, Z_\varepsilon \rangle \langle \partial_t, W \rangle \\
&= \frac{\omega''}{\omega} \{ -\langle \partial_t, Y \rangle \langle \partial_t, Z \rangle \langle X_\varepsilon, W \rangle + \langle \partial_t, Y \rangle \langle X_\varepsilon, Z \rangle \langle \partial_t, W \rangle \} \\
&= \frac{\omega''}{\omega} \{ -\langle \partial_t, Y \rangle \langle \partial_t, Z \rangle \langle X, W \rangle + \langle \partial_t, Y \rangle \langle \partial_t, Z \rangle \langle \partial_t, X \rangle \langle \partial_t, W \rangle \\
&\quad + \langle \partial_t, Y \rangle \langle X, Z \rangle \langle \partial_t, W \rangle - \langle \partial_t, Y \rangle \langle \partial_t, X \rangle \langle \partial_t, Z \rangle \langle \partial_t, W \rangle \} \\
&= \frac{\omega''}{\omega} \{ -\langle \partial_t, Y \rangle \langle \partial_t, Z \rangle \langle X, W \rangle + \langle \partial_t, Y \rangle \langle X, Z \rangle \langle \partial_t, W \rangle \} \tag{2-4}
\end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned}
\langle \bar{R}(X_\varepsilon, Y_\varepsilon)Z, W \rangle &= z \langle \bar{R}(X_\varepsilon, Y_\varepsilon) \partial_t, W \rangle + \langle \bar{R}(X_\varepsilon, Y_\varepsilon) Z_\varepsilon, W \rangle = \langle \bar{R}(X_\varepsilon, Y_\varepsilon) Z_\varepsilon, W \rangle \\
&= \frac{(\omega')^2 - \varepsilon}{\omega^2} \{ \langle X_\varepsilon, Z_\varepsilon \rangle \langle Y_\varepsilon, W \rangle - \langle Y_\varepsilon, Z_\varepsilon \rangle \langle X_\varepsilon, W \rangle \} \\
&= \frac{(\omega')^2 - \varepsilon}{\omega^2} \{ \langle X, Z \rangle \langle Y_\varepsilon, W \rangle - \langle \partial_t, X \rangle \langle \partial_t, Z \rangle \langle Y_\varepsilon, W \rangle \\
&\quad - \langle Y, Z \rangle \langle X_\varepsilon, W \rangle + \langle \partial_t, Y \rangle \langle \partial_t, Z \rangle \langle X_\varepsilon, W \rangle \} \\
&= \frac{(\omega')^2 - \varepsilon}{\omega^2} \{ \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle - \langle X, Z \rangle \langle \partial_t, Y \rangle \langle \partial_t, W \rangle \\
&\quad - \langle \partial_t, X \rangle \langle \partial_t, Z \rangle \langle Y, W \rangle + \langle \partial_t, X \rangle \langle \partial_t, Z \rangle \langle \partial_t, Y \rangle \langle \partial_t, W \rangle \\
&\quad - \langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle + \langle Y, Z \rangle \langle \partial_t, X \rangle \langle \partial_t, W \rangle \\
&\quad + \langle \partial_t, Y \rangle \langle \partial_t, Z \rangle \langle X, W \rangle - \langle \partial_t, Y \rangle \langle \partial_t, Z \rangle \langle \partial_t, X \rangle \langle \partial_t, W \rangle \} \\
&= \frac{(\omega')^2 - \varepsilon}{\omega^2} \{ \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle - \langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle \\
&\quad - \langle X, Z \rangle \langle \partial_t, Y \rangle \langle \partial_t, W \rangle - \langle \partial_t, X \rangle \langle \partial_t, Z \rangle \langle Y, W \rangle \\
&\quad + \langle Y, Z \rangle \langle \partial_t, X \rangle \langle \partial_t, W \rangle + \langle \partial_t, Y \rangle \langle \partial_t, Z \rangle \langle X, W \rangle \}. \tag{2-5}
\end{aligned}$$

Portanto, substituindo (2-3), (2-4) e (2-5) em (2-2), temos que a curvatura \bar{R} de $I \times_\omega \mathbb{Q}_\varepsilon^n$ é dada por:

$$\begin{aligned}
\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle &= (\alpha \circ \pi) \{ \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle - \langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle \} \\
&\quad + (\beta \circ \pi) \{ \langle X, Z \rangle \langle \partial_t, Y \rangle \langle \partial_t, W \rangle + \langle \partial_t, X \rangle \langle \partial_t, Z \rangle \langle Y, W \rangle \\
&\quad - \langle Y, Z \rangle \langle \partial_t, X \rangle \langle \partial_t, W \rangle - \langle \partial_t, Y \rangle \langle \partial_t, Z \rangle \langle X, W \rangle \}, \tag{2-6}
\end{aligned}$$

onde $\alpha \circ \pi = \alpha$ e $\beta \circ \pi = \beta$ são funções definidas em I dadas por

$$\alpha = \frac{(\omega')^2 - \varepsilon}{\omega^2} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{\omega''}{\omega} - \alpha. \quad (2-7)$$

Observação 2.4 *É imediato verificar a partir de (2-6) e do Lema 1.8 que o produto torcido $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ tem curvatura seccional constante se, e somente se, α é constante e $\beta = 0$.*

Vale a pena observar que o anulamento de β implica que α é constante, pois

$$\alpha' = \frac{2\omega'}{\omega} \left(\frac{\omega''}{\omega} - \frac{(\omega')^2}{\omega^2} + \frac{\varepsilon}{\omega^2} \right) = \frac{2\omega'}{\omega} \left(\frac{\omega''}{\omega} - \alpha \right) = \frac{2\omega'}{\omega} \beta.$$

Logo, β se anula se, e somente se, o produto torcido é uma forma espacial.

A partir da observação acima e das expressões de α e β podemos obter as funções torção ω para as quais o produto torcido $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ tenha curvatura seccional constante.

Proposição 2.5 [14, Proposição 4.6]

Para $n \geq 2$, assumamos que $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ tenha curvatura seccional constante c . Nestas condições, existem s_0 e θ_0 reais tais que para todo $s \in I$,

- (i) *se $c > 0$ então $\varepsilon = 1$ e $\omega(s) = \frac{1}{\sqrt{c}} \sin(\sqrt{c}s + \theta_0)$;*
- (ii) *se $c = 0$ então vale uma das seguintes afirmações:*

- (a) $\varepsilon = 1$ e $\omega(s) = \pm s + s_0$, com $s_0 \in \mathbb{R}$;
- (b) $\varepsilon = 0$ e $\omega(s) = s_0$;

- (iii) *se $c < 0$ então vale uma das seguintes afirmações:*

- (a) $\varepsilon = -1$ e $\omega(s) = \frac{1}{\sqrt{-c}} \cosh(\sqrt{-c}s + \theta_0)$;
- (b) $\varepsilon = 0$ e $\omega(s) = \exp(\pm \sqrt{-c}s + s_0)$;
- (c) $\varepsilon = 1$ e $\omega(s) = \frac{1}{\sqrt{-c}} \sinh(\sqrt{-c}s + \theta_0)$.

Prova. Vamos mostrar apenas (i) pois o restante é análogo.

Como vimos na Observação 2.4 temos que se $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ tem curvatura seccional constante c então

$$\alpha = \frac{(\omega')^2 - \varepsilon}{\omega^2} = -c \quad \text{e} \quad \beta = \frac{\omega''}{\omega} - \alpha = 0.$$

Logo, ω satisfaz

$$\begin{cases} (\omega')^2 + c\omega^2 = \varepsilon, \\ \omega'' + c\omega = 0. \end{cases}$$

Observe que da primeira igualdade acima já obtemos de imediato que ε só pode ser 1 pois $\varepsilon = (\omega')^2 + c\omega^2 > 0$, sendo $c > 0$ por hipótese.

Agora, a segunda igualdade acima se trata de uma EDO com coeficientes constantes cuja solução geral é dada por

$$\omega(s) = A \cos(\sqrt{c}s) + B \sin(\sqrt{c}s),$$

onde A e B são duas constantes reais. Dessa forma, A e B satisfazem

$$\begin{aligned} 1 = \varepsilon &= (\omega')^2 + c\omega^2 \\ &= \left(-A\sqrt{c}\sin(\sqrt{c}s) + B\sqrt{c}\cos(\sqrt{c}s)\right)^2 + c\left(A\cos(\sqrt{c}s) + B\sin(\sqrt{c}s)\right)^2 = c(A^2 + B^2). \end{aligned}$$

Escrevendo $A = \frac{1}{\sqrt{c}}\sin(\theta_0)$ e $B = \frac{1}{\sqrt{c}}\cos(\theta_0)$ obtemos

$$\omega(s) = \frac{1}{\sqrt{c}}\sin(\theta_0)\cos(\sqrt{c}s) + \frac{1}{\sqrt{c}}\cos(\theta_0)\sin(\sqrt{c}s) = \frac{1}{\sqrt{c}}\sin(\sqrt{c}s + \theta_0).$$

□

2.2 Hipersuperfícies em $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$

Dada uma hipersuperfície Σ em $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$, definimos a *função altura* e a *função ângulo* de Σ , respectivamente, por:

$$\xi := \pi|_{\Sigma} \quad \text{e} \quad \theta(x) := \langle N(x), \partial_t \rangle,$$

onde $x \in \Sigma$ e $N \in (T\Sigma)^{\perp}$ é um campo normal unitário de Σ em $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$.

Note que o campo $\partial_t = \text{grad}(\pi) = \pi_*$ possui duas componentes quando restrito a Σ : uma componente tangente e uma componente normal à $T\Sigma$. A componente tangente é o gradiente de ξ em Σ e a componente normal é a projeção de ∂_t em N . Denotando por T o gradiente de ξ , temos

$$T = \partial_t - \langle N, \partial_t \rangle N = \partial_t - \theta N. \quad (2-8)$$

Em particular, seu módulo é dado por

$$|T|^2 = \langle \partial_t - \theta N, \partial_t - \theta N \rangle = \langle \partial_t, \partial_t \rangle - 2\theta \langle N, \partial_t \rangle + \theta^2 \langle N, N \rangle = 1 - \theta^2. \quad (2-9)$$

Para determinar o gradiente de θ , primeiro observe que para qualquer $X \in$

$T(I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n)$, podemos escrever

$$X = x_t \partial_t + \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde x_t, x_1, \dots, x_n são funções diferenciáveis definidas em $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ e $\partial_t, \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ são os campos coordenados. Desde que $\partial_t \in \mathcal{L}(I)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathcal{L}(\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n)$, das propriedades de conexões e da Proposição 1.20, temos que

$$\bar{\nabla}_X \partial_t = \bar{\nabla}_{x_t \partial_t + \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}} \partial_t = x_t \bar{\nabla}_{\partial_t} \partial_t + \sum_{i=1}^n x_i \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \partial_t = \left(\frac{\omega'}{\omega} \right) \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Note que $\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ é a projeção vertical do campo X e podemos expressá-la por $X - \langle X, \partial_t \rangle \partial_t$. Logo,

$$\bar{\nabla}_X \partial_t = \frac{\omega'}{\omega} (X - \langle X, \partial_t \rangle \partial_t).$$

Assim, para qualquer $X \in T\Sigma$,

$$\begin{aligned} X(\theta) &= X \langle N, \partial_t \rangle = \langle \bar{\nabla}_X N, \partial_t \rangle + \langle N, \bar{\nabla}_X \partial_t \rangle \\ &= -\langle AX, \partial_t \rangle + \frac{\omega'}{\omega} (\langle N, X \rangle - \langle X, \partial_t \rangle \langle N, \partial_t \rangle) = -\langle AX, \partial_t \rangle - \frac{\omega'}{\omega} \theta \langle X, \partial_t \rangle \\ &= -\left(\langle AX, \partial_t - \theta N \rangle + \frac{\omega'}{\omega} \theta \langle X, \partial_t - \theta N \rangle \right) = -\left(\langle AX, T \rangle + \frac{\omega'}{\omega} \theta \langle X, T \rangle \right) \\ &= -\left(\langle AT, X \rangle + \frac{\omega'}{\omega} \theta \langle X, T \rangle \right) = -\left\langle AT + \frac{\omega'}{\omega} \theta T, X \right\rangle, \end{aligned} \quad (2-10)$$

onde A é o operador *shape* auto-adjunto de Σ com respeito à N dado em (1-5).

Como (2-10) vale para qualquer $X \in T\Sigma$ segue que o gradiente de θ é dado por

$$\left(A + \frac{\omega'}{\omega} \theta Id|_{\Sigma} \right) T, \quad (2-11)$$

onde $Id|_{\Sigma}$ é a aplicação identidade em Σ .

Como a função altura ξ de Σ é dada pela restrição da projeção π à Σ , a curvatura \bar{R} de $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$, calculada em (2-6), quando restrita a campos tangentes $T\Sigma$ é dada por

$$\begin{aligned}
\langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle &= (\alpha \circ \xi) \{ \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle - \langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle \} \\
&\quad + (\beta \circ \xi) \{ \langle X, Z \rangle \langle T, Y \rangle \langle T, W \rangle + \langle T, X \rangle \langle T, Z \rangle \langle Y, W \rangle \\
&\quad \quad - \langle Y, Z \rangle \langle T, X \rangle \langle T, W \rangle - \langle T, Y \rangle \langle T, Z \rangle \langle X, W \rangle \}
\end{aligned} \tag{2-12}$$

e, portanto, a equação de Gauss (1-6) de Σ fica, para todo $X, Y, Z, W \in T\Sigma$,

$$\begin{aligned}
\langle R(X, Y)Z, W \rangle &= (\alpha \circ \xi) \{ \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle - \langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle \} \\
&\quad + (\beta \circ \xi) \{ \langle X, Z \rangle \langle T, Y \rangle \langle T, W \rangle + \langle T, X \rangle \langle T, Z \rangle \langle Y, W \rangle \\
&\quad \quad - \langle Y, Z \rangle \langle T, X \rangle \langle T, W \rangle - \langle T, Y \rangle \langle T, Z \rangle \langle X, W \rangle \} \\
&\quad + \langle AX, W \rangle \langle AY, Z \rangle - \langle AX, Z \rangle \langle AY, W \rangle.
\end{aligned} \tag{2-13}$$

Definição 2.6 Uma hipersuperfície de Einstein conexa Σ de $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ é chamada de ideal se $(\beta \circ \xi)T$ nunca se anula.

A definição acima será mais utilizada no Capítulo 4. Por agora, a próxima definição estabelece uma das propriedades fundamentais deste trabalho.

Definição 2.7 Dizemos que uma hipersuperfície Σ de $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ tem a T -propriedade se T é uma direção principal de Σ .

Lembrando que, de (1-4), T é uma direção principal de Σ se T nunca se anula e existe uma função diferenciável λ em Σ tal que $AT = \lambda T$.

No decorrer deste trabalho, utilizaremos três lemas chaves para demonstrarmos os resultados principais. Vamos inicialmente apresentar dois deles e o terceiro será apresentado mais adiante, o Lema 2.10.

O primeiro lema estabelece uma condição necessária e suficiente para uma hipersuperfície arbitrária de $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ tenha a T -propriedade.

Lema 2.8 Para $n > 2$ seja Σ uma hipersuperfície de $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ na qual $(\beta \circ \xi)T$ nunca se anula. Então, Σ tem a T -propriedade se, e somente se, as direções principais X_1, \dots, X_n de Σ diagonaliza seu tensor de Ricci. Em particular, se Σ é de Einstein então possui a T -propriedade.

Prova. Para $n > 2$, podemos tomar $i \neq j \neq k \in \{1, \dots, n\}$. Assim, de (2-12),

$$\langle \bar{R}(X_k, X_i)X_j, X_k \rangle = -(\beta \circ \xi) \langle X_i, T \rangle \langle X_j, T \rangle.$$

Substituindo a igualdade acima em (1-7), como $i \neq j$, o tensor de Ricci de Σ em $(X_i, X_j) \in T\Sigma$ é dado por:

$$Ric(X_i, X_j) = \sum_{k=1}^n \langle \bar{R}(X_k, X_i)X_j, X_k \rangle = -(n-2)(\beta \circ \xi) \langle X_i, T \rangle \langle X_j, T \rangle, \quad (2-14)$$

em que o fator $n-2$ aparece pelo fato de que os termos em que $k=i$ e $k=j$ são nulos.

A partir da igualdade (2-14) o resultado do lema é obtido. De fato, se T é uma das direções principais de Σ , então T é ortogonal à X_i ou à X_j , pois $i \neq j$. Logo de (2-14), $Ric(X_i, X_j) = 0$, isto é as direções principais de Σ diagonaliza seu tensor de Ricci.

Reciprocamente, se $Ric(X_i, X_j) = 0, \forall i \neq j \in \{1, \dots, n\}$, da igualdade (2-14), T é ortogonal à X_i ou à X_j , já que pela hipótese do lema, $(\beta \circ \xi)T$ não se anula. Como vale para todo $i \neq j$, então T é necessariamente uma das direções principais, isto é, Σ tem a T-propriedade.

Em particular, se Σ é de Einstein então toda base ortogonal diagonaliza seu tensor de Ricci. Logo, também vale para uma base ortogonal de direções principais. Segue que Σ tem a T-propriedade. \square

O segundo lema chave estabelece uma condição suficiente e necessária à respeito das curvaturas principais de uma hipersuperfície de $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ possuindo a T-propriedade ser uma variedade de Einstein.

Lema 2.9 *Para $n > 2$, seja Σ uma hipersuperfície de $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ que possui a T-propriedade. Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ as curvaturas principais correspondente a base ortonormal de direções principais $\{X_1, \dots, X_n\}$ de Σ , com $X_1 = \frac{T}{|T|}$. Então Σ é uma hipersuperfície Λ -Einstein se, e somente se, valem as seguintes igualdades:*

- (i) $\lambda_1^2 - H\lambda_1 + (n-1)((\beta \circ \xi)|T|^2 + \alpha \circ \xi) + \Lambda = 0;$
- (ii) $\lambda_i^2 - H\lambda_i + (\beta \circ \xi)|T|^2 + (n-1)(\alpha \circ \xi) + \Lambda = 0, \quad 2 \leq i \leq n.$

Prova.

Basta usar a expressão do tensor de Ricci (1-7) com $X_i = X_j = X_1$ no caso (i) e $X_i = X_j \neq X_1$ no caso (ii).

De fato, usando $X_i = X_j = X_1$ em (1-7) e o fato de Σ ser Λ -Einstein, obtemos

$$\Lambda = \Lambda g(X_1, X_1) = Ric(X_1, X_1) = \sum_{k=1}^n \langle \bar{R}(X_k, X_1)X_1, X_k \rangle + H\lambda_1 - \lambda_1^2. \quad (2-15)$$

De (2-6), temos que $\langle \bar{R}(X_1, X_1)X_1, X_1 \rangle = 0$ e, para todo $k = 2, \dots, n$,

$$\langle \bar{R}(X_k, X_1)X_1, X_k \rangle = -(\alpha \circ \xi) - (\beta \circ \xi) \langle X_1, \partial_t \rangle^2.$$

Desde que $\langle X_1, \partial_t \rangle = \left\langle \frac{T}{|T|}, T + \theta N \right\rangle^2 = \frac{\langle T, T \rangle^2}{|T|^2} = |T|^2$ substituindo a igualdade acima em (2-15) chegamos em

$$\Lambda = -(n-1) \left((\alpha \circ \xi) + (\beta \circ \xi) |T|^2 \right) + H\lambda_1 - \lambda_1^2,$$

concluindo a igualdade que queríamos mostrar.

Semelhantemente mostramos (ii) usando $X_i = X_j \neq X_1$ como afirmamos inicialmente. \square

Dada uma hipersuperfície Σ de $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$, daremos uma atenção para seus subconjuntos obtidos quando fixamos um certo $t \in I$. Qualquer interseção transversal não vazia

$$\Sigma_t := \Sigma \cap (\{t\} \times \mathbb{Q}^n)$$

é uma hipersuperfície de $(\{t\} \times \mathbb{Q}^n, ds_{\varepsilon}^2)$, na qual chamaremos de seção vertical de Σ na altura t .

Se Σ é orientada por um campo normal unitário N , é fácil observar que $N - \theta \partial_t$ é tangente à $(\{t\} \times \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n)$ e ortogonal à Σ_t . Logo, temos que $\langle N - \theta \partial_t, N - \theta \partial_t \rangle_I = 0$.

Da métrica torcida (2-1),

$$\begin{aligned} \omega^2 \langle N - \theta \partial_t, N - \theta \partial_t \rangle_{\varepsilon} &= \langle N - \theta \partial_t, N - \theta \partial_t \rangle \\ &= \langle N, N \rangle - 2\theta \langle N, \partial_t \rangle + \theta^2 \langle \partial_t, \partial_t \rangle = 1 - \theta^2 = |T|^2. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$N_t = -\frac{\omega(t)(N - \theta \partial_t)}{|T|} \quad (2-16)$$

é um campo normal unitário de Σ_t em $(\{t\} \times \mathbb{Q}^n, ds_{\varepsilon}^2)$.

Assim, podemos definir o operador shape (forma) associado à segunda forma fundamental de Σ_t com respeito à N_t :

$$A_t X = -\nabla_X N_t, \text{ com } X \in T\Sigma_t \subset T\Sigma,$$

onde ∇ é a conexão de Levi Civita de $(\mathbb{Q}^n, ds_{\varepsilon}^2)$.

O seguinte lema é o terceiro lema chave mencionado anteriormente. Ele estabelece uma relação entre os operadores formas A de Σ e A_t de Σ , além de também estabelecer uma relação entre suas curvaturas principais.

Lema 2.10 Para $n \geq 2$, seja Σ uma hipersuperfície de $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ e seja Σ_t uma de suas seções verticais, considerada como uma hipersuperfície de $(\{t\} \times \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n, ds_{\varepsilon}^2)$. Então vale a seguinte identidade:

$$\langle A_t X, Y \rangle = -\frac{\omega}{|T|} \left(\langle AX, Y \rangle + \frac{\theta \omega'}{\omega} \langle X, Y \rangle \right), \text{ para todo } X, Y \in T\Sigma_t.$$

Consequentemente, se T é uma direção principal de Σ ao longo de Σ_t com curvatura principal λ_1 , as curvaturas $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ são dadas por

$$\lambda_i = -\frac{|T| \lambda_i' + \theta \omega'}{\omega}, i = 2, \dots, n,$$

onde λ_i' denota a i -ésima curvatura principal de Σ_t .

Prova. Inicialmente, dado $X \in T\Sigma_t$, das relações da Proposição 2.1 temos que

$$\bar{\nabla}_X N_t = \nabla_X N_t - \left(\frac{\omega'}{\omega} \right) \langle X, N_t \rangle \partial_t = \nabla_X N_t$$

pois $\langle X, N_t \rangle = 0$, onde $\bar{\nabla}$ e ∇ são as conexões riemannianas de $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ e $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$, respectivamente.

Por outro lado, usando a expressão de N_t em termos de N dada por (2-16),

$$\begin{aligned} -\bar{\nabla}_X N_t &= \bar{\nabla}_X \left(\frac{\omega(N - \theta \partial_t)}{|T|} \right) = X \left(\frac{\omega}{|T|} \right) (N - \theta \partial_t) + \left(\frac{\omega}{|T|} \right) \bar{\nabla}_X (N - \theta \partial_t) \\ &= X \left(\frac{\omega}{|T|} \right) (N - \theta \partial_t) + \left(\frac{\omega}{|T|} \right) \left(\bar{\nabla}_X N - X(\theta) \partial_t - \theta \bar{\nabla}_X \partial_t \right). \end{aligned}$$

Novamente da Proposição 2.1 temos que $\bar{\nabla}_X \partial_t = \frac{\omega'}{\omega} X$. Além disso, $\bar{\nabla}_X N = -AX$.

Logo

$$-\bar{\nabla}_X N_t = X \left(\frac{\omega}{|T|} \right) (N - \theta \partial_t) - \left(\frac{\omega}{|T|} \right) \left(AX + X(\theta) \partial_t + \left(\frac{\theta \omega'}{\omega} \right) X \right).$$

Dessa maneira, para todo $Y \in \Sigma_t$, que é normal a $N - \theta \partial_t$ e à ∂_t , temos que

$$\langle A_t X, Y \rangle = -\langle \nabla_X N_t, Y \rangle = -\langle \bar{\nabla}_X N_t, Y \rangle = -\frac{\omega}{|T|} \left\langle AX + \left(\frac{\theta \omega'}{\omega} \right) X, Y \right\rangle.$$

Agora, se T é uma direção principal de Σ ao longo de Σ_t então é invariante por A . Denotando por I o operador identidade de $T\Sigma_t$, da igualdade acima temos

$$A_t = -\frac{\omega}{|T|} \left(A + \left(\frac{\theta \omega'}{\omega} \right) I \right) \Big|_{T\Sigma_t} \Rightarrow A = -\frac{1}{\omega} (|T| A_t + \theta \omega' I).$$

Portanto, se $\left\{ \frac{T}{|T|}, X_2, \dots, X_n \right\}$ é uma base de direções principais onde $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ são as curvaturas principais associadas as direções X_i , com $i = 2, \dots, n$, então

$$\lambda_i X_i = AX_i = -\frac{1}{\omega} (|T|A_i(X_i) + \theta\omega'X_i) = -\frac{1}{\omega} (|T|\lambda_i^t X_i + \theta\omega'X_i)$$

e, conseqüentemente,

$$\lambda_i = -\frac{|T|\lambda_i^t + \theta\omega'}{\omega}.$$

□

Hipersuperfícies Rotacionais

A noção de hipersuperfícies rotacionais foi introduzida em [7], na qual foi utilizada em [14] para construir e classificar as hipersuperfícies rotacionais de curvatura seccional constante de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ e de $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, nos casos em que $n \geq 3$.

Com o objetivo de estudar as hipersuperfícies $f : M^n \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$, a abordagem feita em [7] foi olhar para f como uma imersão isométrica em \mathbb{E}^{n+2} , onde \mathbb{E} representa o espaço euclidiano ou o espaço lorentziano, caso $\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon = -1$, respectivamente.

Para isso, considere $(x_1, x_2, \dots, x_{n+2})$ as coordenadas em \mathbb{E}^{n+2} e a métrica do respectivo espaço dada por

$$ds^2 = \varepsilon dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_{n+2}^2.$$

Nestas notações, podemos escrever $\mathbb{E}^{n+1} = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+2}) \in \mathbb{E}^{n+2}; x_{n+2} = 0\}$ e

$$\mathbb{Q}_\varepsilon^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{E}^{n+1}; \varepsilon dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_{n+1}^2 = \varepsilon\}.$$

Dessa forma, consideramos a inclusão $i : \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^{n+1} \times \mathbb{R} = \mathbb{E}^{n+2}$ e a imersão isométrica que estamos interessados é a composição $i \circ f$, que também será denotada por f .

Agora, considere \mathbb{P}^3 um subespaço de \mathbb{E}^{n+2} , de dimensão 3 contendo as direções $\frac{\partial}{\partial x_1}$ e $\frac{\partial}{\partial x_{n+2}}$, e \mathcal{S} o grupo das isometrias de \mathbb{E}^{n+2} que fixam pontualmente um subespaço bidimensional \mathbb{P}^2 de \mathbb{P}^3 que contém a direção $\frac{\partial}{\partial x_{n+2}}$.

Note que, como \mathbb{Q}^n não contém a direção $\frac{\partial}{\partial x_{n+2}}$, então

$$(\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}) \cap \mathbb{P}^3 = \mathbb{Q}_\varepsilon^1 \times \mathbb{R}.$$

Definição 3.1 *Uma hipersuperfície rotacional em $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$ com curva geratriz γ e eixo \mathbb{P}^2 é a órbita de γ sob a ação de \mathcal{S} , onde γ é uma curva em $\mathbb{Q}_\varepsilon^1 \times \mathbb{R}$ inteiramente contida em um dos dois semiespaços de \mathbb{P}^3 determinados por \mathbb{P}^2 .*

Daqui em diante vamos considerar \mathbb{P}^3 gerado por $\frac{\partial}{\partial x_1}$, $\frac{\partial}{\partial x_{n+1}}$ e $\frac{\partial}{\partial x_{n+2}}$. Para cada

$\varepsilon \in \{1, -1\}$, vamos escolher um plano \mathbb{P}^2 conveniente e obter uma parametrização da hipersuperfície rotacional (ver [8], [14] e [18]). Ainda, por simplicidade, vamos denotar por $e_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n+2$.

3.1 Hipersuperfícies Rotacionais em $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$

Vamos analisar os casos separadamente conforme $\varepsilon = 1, -1, 0$.

CASO 1: $\varepsilon = 1$.

Considere $\mathbb{P}^2 = [e_1, e_{n+2}]$. Seja $\mathcal{O} \in \mathcal{I}$ um operador identificado com sua matriz relativa à base $\{e_i\}_{i=1}^{n+2}$ de \mathbb{R}^{n+2} dada por

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n+2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+21} & \cdots & a_{n+2n+2} \end{pmatrix}.$$

Como \mathcal{I} é o grupo das isometrias de \mathbb{R}^{n+2} que fixam pontualmente \mathbb{P}^2 , devemos ter $\mathcal{O}e_1 = e_1$ e $\mathcal{O}e_{n+2} = e_{n+2}$. Da primeira igualdade, temos que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n+2} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+21} & a_{n+22} & \cdots & a_{n+2n+2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n+21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

se, e somente se, $a_{11} = 1$ e $a_{i1} = 0$ para todo $i = 2, \dots, n+2$. Analogamente, de $\mathcal{O}e_{n+2} = e_{n+2}$ obtemos $a_{n+2n+2} = 1$ e $a_{in+2} = 0$ para todo $i = 1, \dots, n+1$. Desta maneira, podemos escrever \mathcal{O} como

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{\mathcal{O}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3-1)$$

onde $\overline{\mathcal{O}}$ é uma matriz $n \times n$ ortogonal com a métrica euclidiana em $[e_2, \dots, e_{n+1}] = \mathbb{R}^n$.

Agora, considere a curva $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{P}^3 \cap (\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}) = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ dada por

$$\gamma(s) = (\sin(\phi(s)), 0, \dots, 0, \cos(\phi(s)), \mathbf{v}(s)),$$

onde $\phi, \mathbf{v} : I \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis satisfazendo

$$|\gamma'(s)|^2 = (\phi'(s))^2 + (\mathbf{v}'(s))^2 = 1.$$

Como queremos que o traço de γ esteja inteiramente contido em um dos semi-espacos de \mathbb{P}^3 determinados por \mathbb{P}^2 , assumamos que $\cos(\phi(s)) > 0$.

Escreva $\overline{\mathcal{O}} = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ em (3-1). Fixando $s_0 \in I$, vamos obter a órbita $O(s_0)$ de $\gamma(s_0)$ sob a ação de \mathcal{S} . Assim, um ponto $\mathcal{O}(\gamma(s_0))$ de $O(s_0)$ é dado por:

$$\mathcal{O}\gamma(s_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\phi(s_0)) \\ 0 \\ \vdots \\ \cos(\phi(s_0)) \\ \mathbf{v}(s_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\phi(s_0)) \\ b_{1n} \cos(\phi(s_0)) \\ \vdots \\ b_{nn} \cos(\phi(s_0)) \\ \mathbf{v}(s_0) \end{pmatrix}, \quad (3-2)$$

onde, pelo fato de $\overline{\mathcal{O}}$ ser uma matriz ortogonal de \mathbb{R}^n , podemos considerar $b_{1n}^2 + \dots + b_{nn}^2 = 1$.

Seja $\mathbb{P}^n(s_0)$ o subespaço afim n -dimensional de \mathbb{R}^{n+2} paralelo à $[e_2, \dots, e_{n+1}]$ e que passa pelo ponto $(\sin(\phi(s_0)), 0, \dots, 0, \mathbf{v}(s_0))$, isto é,

$$\mathbb{P}^n(s_0) = \{(\sin(\phi(s_0)), p_1, \dots, p_n, \mathbf{v}(s_0)) \in \mathbb{R}^{n+2}\}.$$

Tome $p = (\sin(\phi(s_0)), p_1, \dots, p_n, \mathbf{v}(s_0)) \in \mathbb{P}^n(s_0) \cap (\mathbb{S}^n \times \mathbb{R})$. Como a projeção horizontal de p está em \mathbb{S}^n , temos que

$$\sin(\phi(s_0))^2 + p_1^2 + \dots + p_n^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n p_i^2 = \cos(\phi(s_0))^2.$$

Logo, a seção horizontal de $\mathbb{P}^n(s_0) \cap (\mathbb{S}^n \times \mathbb{R})$ é uma esfera $(n-1)$ -dimensional de centro $(\sin(\phi(s_0)), 0, \dots, 0, \mathbf{v}(s_0))$ e raio $\cos(\phi(s_0)) > 0$. Como $\mathcal{O}\gamma(s_0) \in \mathbb{P}^n(s_0) \cap (\mathbb{S}^n \times \mathbb{R})$, para todo $\mathcal{O} \in \mathcal{S}$, segue que a seção horizontal da órbita $O(s_0)$ é uma esfera $(n-1)$ -dimensional.

Por outro lado, note que de (3-2), a órbita de γ sob a ação de \mathcal{S} , na qual é a hipersuperfície rotacional com geratriz γ e eixo \mathbb{P}^2 , é dada por:

$$f(s, t) = (\sin(\phi(s)), \cos(\phi(s))\varphi_1(t), \dots, \cos(\phi(s))\varphi_n(t), \mathbf{v}(s)), \quad (3-3)$$

onde $\varphi(t) = \varphi(t_1, \dots, t_{n-1}) = (\varphi_1(t_1, \dots, t_{n-1}), \dots, \varphi_n(t_1, \dots, t_{n-1}))$ é uma parametrização

ortogonal de \mathbb{S}^{n-1} . Ainda, a métrica induzida por f é dada por

$$d\sigma^2 = ds^2 + \cos^2(\phi(s))dt^2,$$

onde dt^2 é a métrica riemanniana de \mathbb{S}^{n-1} .

Mostraremos que, de fato, f define uma hipersuperfície imersa em \mathbb{R}^{n+2} . Para isso, basta mostrar que a base $\left\{ \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial t_{n-1}} \right\}$ é linearmente independente.

Omitindo os parâmetros s, t_1, \dots, t_{n-1} para simplificar as notações, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s} &= (\phi' \cos(\phi), -\phi' \sin(\phi)\varphi_1, \dots, -\phi' \sin(\phi)\varphi_n, \nu'), \\ \frac{\partial f}{\partial t_i} &= \left(0, \cos(\phi) \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_i}, \dots, \cos(\phi) \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_i}, 0 \right), \text{ para cada } i = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Agora, como φ é uma parametrização ortogonal de \mathbb{S}^{n-1} , temos as seguintes relações:

$$\sum_{k=1}^n \varphi_k^2 = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^n \varphi_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial t_i} = 0, \text{ para todo } i = 1, \dots, n-1.$$

Desta forma, temos que

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle &= (\phi')^2 \cos^2(\phi) + (\phi')^2 \sin^2(\phi) \left(\sum_{k=1}^n \varphi_k^2 \right) + (\nu')^2 = (\phi')^2 + (\nu')^2 = 1; \\ \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t_i} \right\rangle &= -\phi' \sin(\phi) \cos(\phi) \left(\sum_{k=1}^n \varphi_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial t_i} \right) = 0; \\ \left\langle \frac{\partial f}{\partial t_i}, \frac{\partial f}{\partial t_j} \right\rangle &= \cos^2(\phi) \sum_{k=1}^n \left\langle \frac{\partial \varphi_k}{\partial t_i}, \frac{\partial \varphi_k}{\partial t_j} \right\rangle = \delta_{ij} \cos^2(\phi) \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial t_i} \right)^2, \end{aligned} \quad (3-4)$$

pois $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ é uma parametrização ortogonal de \mathbb{S}^{n-1} . Segue das igualdades acima que $\left\{ \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial t_{n-1}} \right\}$ é linearmente independente e, portanto, f é uma hipersuperfície imersa em \mathbb{R}^{n+2} .

CASO 2: $\varepsilon = -1$.

Neste caso, precisamos considerar 3 situações distintas: se \mathbb{P}^2 for lorentziano, riemanniano ou degenerado. Para cada um desses casos, vamos escolher uma base apropriada para o plano \mathbb{P}^2 .

CASO 2.1: \mathbb{P}^2 lorentziano.

Como a direção e_1 é tal que $\langle e_1, e_1 \rangle_{\mathbb{L}^{n+2}} = -1 < 0$, então considere $\mathbb{P}^2 = [e_1, e_{n+2}]$. Por hora, vamos omitir \mathbb{L}^{n+2} na métrica, ficando subentendido que estamos considerando a métrica do espaço lorentziano.

Analogamente ao Caso 1, um operador $\mathcal{O} \in \mathcal{S}$ cuja matriz associada relativa à base $\{e_i\}_{i=1}^{n+2}$ de \mathbb{L}^{n+2} é dada por

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3-5)$$

onde $(b_{ij})_{i,j=1}^n$ é uma matriz $n \times n$ ortogonal com a métrica euclidiana em $[e_2, \dots, e_{n+1}] = \mathbb{R}^n$.

Seja $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{P}^3 \cap (\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}) = \mathbb{H}^1 \times \mathbb{R}$ a curva dada por

$$\gamma(s) = (\cosh(\phi(s)), 0, \dots, 0, \sinh(\phi(s)), \mathbf{v}(s)), \quad (3-6)$$

onde $\phi, \mathbf{v}: I \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis satisfazendo:

$$|\gamma'(s)|^2 = -(\phi'(s))^2 \sinh^2(\phi(s)) + (\phi'(s))^2 \cosh^2(\phi(s)) + (\mathbf{v}'(s))^2 = (\phi'(s))^2 + (\mathbf{v}'(s))^2 = 1$$

e $\sinh(\phi(s)) > 0$, para todo $s \in I$, de modo que o traço $\gamma(I)$ esteja contido num dos semi-espaços determinado por \mathbb{P}^2 em \mathbb{P}^3 .

Assim, fixando $s_0 \in I$ e usando (3-5), um ponto $\mathcal{O}\alpha(s_0)$ de $O(s_0)$ - órbita de $\gamma(s_0)$ sob a ação de \mathcal{S} - é dado por

$$\mathcal{O}\gamma(s_0) = (\cosh(\phi(s_0)), b_{1n} \sinh(\phi(s_0)), \dots, b_{nn} \sinh(\phi(s_0)), \mathbf{v}(s_0)), \quad (3-7)$$

onde $b_{1n}^2 + \dots + b_{nn}^2 = 1$, pois (b_{ij}) é ortogonal em \mathbb{R}^n .

Seja $\mathbb{P}^n(s_0) = \{(\sin(\phi(s_0)), p_1, \dots, p_n, \mathbf{v}(s_0)) \in \mathbb{L}^{n+2}\}$ o subespaço afim n -dimensional de \mathbb{L}^{n+2} paralelo à $[e_2, \dots, e_{n+1}]$ passando pelo ponto $(\cosh(\phi(s_0)), 0, \dots, 0, \mathbf{v}(s_0))$ e tome

$$p = (\cosh(\phi(s_0)), p_1, \dots, p_n, \mathbf{v}(s_0)) \in \mathbb{P}^n(s_0) \cap (\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}).$$

Como a projeção horizontal de p está em \mathbb{H}^n , temos que

$$-\cosh(\phi(s_0))^2 + p_1^2 + \dots + p_n^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n p_i^2 = \sinh(\phi(s_0))^2.$$

Portanto, a seção horizontal de $\mathbb{P}^n(s_0) \cap (\mathbb{H}^n \times \mathbb{R})$ é uma esfera $(n-1)$ -dimensional de centro $(\cosh(\phi(s_0)), 0, \dots, 0, \mathbf{v}(s_0))$ e raio $\sinh(\phi(s_0)) > 0$. Ainda, como $\mathcal{O}\gamma(s_0) \in \mathbb{P}^n(s_0) \cap (\mathbb{H}^n \times \mathbb{R})$ para todo $\mathcal{O} \in \mathcal{S}$, temos que a seção horizontal da

órbita $O(s_0)$ é uma esfera $(n-1)$ -dimensional, assim como no Caso 1. Por esse motivo, estas hipersuperfícies rotacionais são chamadas de **esféricas**.

Agora, de (3-7), a hipersuperfície rotacional de $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ com geratriz γ e com eixo \mathbb{P}^2 , é dada por:

$$f(s, t) = (\cosh(\phi(s)), \sinh(\phi(s))\varphi_1(t), \dots, \sinh(\phi(s))\varphi_n(t), v(s)), \quad (3-8)$$

onde $\varphi(t) = \varphi(t_1, \dots, t_{n-1}) = (\varphi_1(t_1, \dots, t_{n-1}), \dots, \varphi_n(t_1, \dots, t_{n-1}))$ é uma parametrização ortogonal de \mathbb{S}^{n-1} . A métrica induzida por f é dada por

$$d\sigma^2 = ds^2 + \cos^2(\phi(s))dt^2,$$

onde dt^2 é a métrica riemanniana de \mathbb{S}^{n-1} .

Mostraremos que a base $\left\{ \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial t_{n-1}} \right\}$ é linearmente independente. Observe que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s} &= (\phi' \sinh(\phi), \phi' \cosh(\phi)\varphi_1, \dots, \phi' \cosh(\phi)\varphi_n, v'), \\ \frac{\partial f}{\partial t_i} &= \left(0, \sinh(\phi) \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_i}, \dots, \sinh(\phi) \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_i}, 0 \right), \text{ para cada } i = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Usando o fato de φ ser uma parametrização ortogonal de \mathbb{S}^{n-1} , isto é,

$$\sum_{k=1}^n \varphi_k^2 = 1, \quad \sum_{k=1}^n \varphi_k \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} = 0 \quad \text{e} \quad \left\langle \frac{\partial \varphi_k}{\partial t_i}, \frac{\partial \varphi_k}{\partial t_j} \right\rangle = \delta_{ij} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial t_i} \right)^2,$$

para todo $i, j = 1, \dots, n-1$ e $k = 1, \dots, n$, obtemos

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle &= -(\phi')^2 \sinh^2(\phi) + (\phi')^2 \cosh^2(\phi) \left(\sum_{k=1}^n \varphi_k^2 \right) + (v')^2 = (\phi')^2 + (v')^2 = 1; \\ \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t_i} \right\rangle &= \phi' \cosh(\phi) \sinh(\phi) \left(\sum_{k=1}^n \varphi_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial t_i} \right) = 0; \\ \left\langle \frac{\partial f}{\partial t_i}, \frac{\partial f}{\partial t_j} \right\rangle &= \sinh^2(\phi) \sum_{k=1}^n \left\langle \frac{\partial \varphi_k}{\partial t_i}, \frac{\partial \varphi_k}{\partial t_j} \right\rangle = \delta_{ij} \sinh^2(\phi) \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial t_i} \right)^2. \end{aligned} \quad (3-9)$$

Portanto $\left\{ \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial t_{n-1}} \right\}$ é linearmente independente e, assim, f é uma hipersuperfície imersa em \mathbb{L}^{n+2} .

CASO 2.2: \mathbb{P}^2 riemanniano.

Neste caso, $\mathbb{P}^2 = [e_{n+1}, e_{n+2}]$. Semelhante aos casos acima, um operador $\mathcal{O} \in \mathcal{I}$

na base $\{e_i\}_{i=1}^{n+2}$ de \mathbb{L}^{n+2} é dado por

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3-10)$$

onde $(b_{ij})_{i,j=1}^n$ é uma matriz $n \times n$ ortogonal com a métrica lorentziana em $[e_1, \dots, e_n] = \mathbb{L}^n$.

Considere a mesma curva γ dada em (3-6), do caso anterior, parametrizada pelo comprimento de arco mas sem a restrição de $\sinh(\phi(s)) > 0$, visto que neste caso o traço de γ já está inteiramente contido em um dos semi-espaços determinado por \mathbb{P}^2 .

A partir de (3-10) e fixado $s_0 \in I$, temos que

$$\mathcal{O}\gamma(s_0) = (b_{1n} \cosh(\phi(s_0)), \dots, b_{nn} \cosh(\phi(s_0)), \sinh(\phi(s_0)), \mathbf{v}(s_0)), \quad (3-11)$$

onde $-b_{1n}^2 + b_{2n}^2 + \dots + b_{nn}^2 = -1$, pois (b_{ij}) é ortogonal em \mathbb{L}^n .

Considere o subespaço afim n -dimensional de \mathbb{L}^{n+2} paralelo à $[e_1, \dots, e_n]$ passando pelo ponto $(0, \dots, 0, \sinh(\phi(s_0)), \mathbf{v}(s_0))$, isto é,

$$\mathbb{P}^n(s_0) = \{(p_1, \dots, p_n, \sinh(\phi(s_0)), \mathbf{v}(s_0)) \in \mathbb{L}^{n+2}\}.$$

Tomando $p = (p_1, \dots, p_n, \sinh(\phi(s_0)), \mathbf{v}(s_0)) \in \mathbb{P}^n(s_0) \cap (\mathbb{H}^n \times \mathbb{R})$, sua projeção horizontal está em \mathbb{H}^n . Logo,

$$-p_1^2 + p_2^2 \dots + p_n^2 + \sinh(\phi(s_0))^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad -p_1^2 + \sum_{i=2}^n p_i^2 = -\cosh(\phi(s_0))^2.$$

Ou seja, a seção horizontal de $\mathbb{P}^n(s_0) \cap (\mathbb{H}^n \times \mathbb{R})$ é um espaço hiperbólico $(n-1)$ -dimensional passando por $(0, \dots, 0, \sinh(\phi(s_0)), \mathbf{v}(s_0))$. Desde que $\mathcal{O}\gamma(s_0) \in \mathbb{P}^n(s_0) \cap (\mathbb{H}^n \times \mathbb{R})$ para todo $\mathcal{O} \in \mathcal{I}$, segue que a seção horizontal da órbita $\mathcal{O}(s_0)$ é um espaço hiperbólico de dimensão $(n-1)$. Assim, estas hipersuperfícies rotacionais são chamadas de **hiperbólicas**.

De (3-16), estas hipersuperfícies rotacionais podem ser parametrizadas por

$$f(s, t) = (\cosh(\phi(s))\varphi_1(t), \dots, \cosh(\phi(s))\varphi_n(t), \sinh(\phi(s)), \mathbf{v}(s)), \quad (3-12)$$

na qual $\varphi(t) = \varphi(t_1, \dots, t_{n-1}) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ é uma parametrização ortogonal de \mathbb{H}^{n-1} .

Temos também que métrica induzida por f é dada por

$$d\sigma^2 = ds^2 + \cosh^2(\phi(s))dt^2,$$

onde dt^2 é a métrica riemanniana de \mathbb{H}^{n-1} .

Vamos mostrar então que $\left\{ \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial t_{n-1}} \right\}$ é um conjunto linearmente independente.

De fato, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s} &= (\phi' \sinh(\phi)\varphi_1, \dots, \phi' \sinh(\phi)\varphi_n, \phi' \cosh(\phi), \nu'), \\ \frac{\partial f}{\partial t_i} &= \left(\cosh(\phi) \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_i}, \dots, \cosh(\phi) \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_i}, 0, 0 \right), \text{ para cada } i = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Observe que sendo φ uma parametrização ortogonal de \mathbb{H}^{n-1} então

$$-\varphi_1^2 + \sum_{k=2}^n \varphi_k^2 = -1 \Rightarrow -\varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_i} + \sum_{k=2}^n \varphi_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial t_i} = 0, \text{ para todo } i = 1, \dots, n-1.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle &= (\phi')^2 \sinh^2(\phi) \left(-\varphi_1^2 + \left(\sum_{k=2}^n \varphi_k^2 \right) \right) + (\phi')^2 \cosh^2(\phi) + (\nu')^2 \\ &= (\phi')^2 + (\nu')^2 = 1; \\ \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t_i} \right\rangle &= \phi' \sinh(\phi) \cosh(\phi) \left(-\varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_i} + \sum_{k=2}^n \varphi_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial t_i} \right) = 0; \\ \left\langle \frac{\partial f}{\partial t_i}, \frac{\partial f}{\partial t_j} \right\rangle &= \cosh^2(\phi) \sum_{k=1}^n \left\langle \frac{\partial \varphi_k}{\partial t_i}, \frac{\partial \varphi_k}{\partial t_j} \right\rangle = \delta_{ij} \cosh^2(\phi) \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial t_i} \right)^2, \end{aligned} \quad (3-13)$$

Sendo assim, $\left\{ \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial t_{n-1}} \right\}$ é linearmente independente e, dessa forma, f é uma hipersuperfície imersa em \mathbb{L}^{n+2} .

CASO 2.3: \mathbb{P}^2 degenerado.

Neste caso, vamos considerar uma base especial $\{\bar{e}_i\}$ dada por

$$\bar{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-e_1 + e_{n+1}), \quad \bar{e}_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_{n+1}) \quad \text{e} \quad \bar{e}_i = e_i, \quad i = 2, \dots, n, n+2,$$

que satisfaz

$$\langle \bar{e}_1, \bar{e}_i \rangle = \langle \bar{e}_{n+1}, \bar{e}_j \rangle = 0, \quad \langle \bar{e}_1, \bar{e}_{n+1} \rangle = 1 \quad \text{e} \quad \langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle = \delta_{ij},$$

para todo $i = 1, \dots, n, n+2$ e $j = 2, \dots, n+2$.

Observe que \bar{e}_1, \bar{e}_{n+1} e \bar{e}_{n+2} ainda geram \mathbb{P}^3 . Vamos considerar $\mathbb{P}^2 = [\bar{e}_{n+1}, \bar{e}_{n+2}]$. Por conveniência, vamos denotar

$$(x_1, \dots, x_{n+2}) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{e}_i.$$

Seja $\mathcal{O} \in \mathcal{I}$ cuja matriz associada na base escolhida é dada por

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\ n+2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+2\ 1} & \cdots & a_{n+2\ n+2} \end{pmatrix}.$$

Assim como fizemos nos casos acima, sendo \mathcal{O} um operador que fixa \mathbb{P}^2 , temos que $\mathcal{O}\bar{e}_1 = \bar{e}_1$ e $\mathcal{O}\bar{e}_{n+1} = \bar{e}_{n+1}$ se, e somente se, $a_{n+1\ n+1} = a_{n+2\ n+2} = 1$ e $a_{i\ n+1} = a_{j\ n+2} = 0$, para todo $i \neq n+1$ e para todo $j \neq n+2$.

Ainda, desde que \mathcal{O} é uma isometria, então preserva a métrica. Logo, temos que para todo $i = 2, \dots, n$ e para todo $j = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} 1 &= \langle \bar{e}_1, \bar{e}_{n+1} \rangle = \langle \mathcal{O}\bar{e}_1, \mathcal{O}\bar{e}_{n+1} \rangle = \langle a_{11}\bar{e}_1 + \dots + a_{n+2\ 1}\bar{e}_{n+2}, \bar{e}_{n+1} \rangle = a_{11}\langle \bar{e}_1, \bar{e}_{n+1} \rangle = a_{11}; \\ 0 &= \langle \bar{e}_i, \bar{e}_{n+1} \rangle = \langle \mathcal{O}\bar{e}_i, \mathcal{O}\bar{e}_{n+1} \rangle = \langle a_{1i}\bar{e}_1 + \dots + a_{n+2\ i}\bar{e}_{n+2}, \bar{e}_{n+1} \rangle = a_{1i}\langle \bar{e}_1, \bar{e}_{n+1} \rangle = a_{1i}; \\ 0 &= \langle \bar{e}_j, \bar{e}_{n+2} \rangle = \langle \mathcal{O}\bar{e}_j, \mathcal{O}\bar{e}_{n+2} \rangle = \langle a_{1j}\bar{e}_1 + \dots + a_{n+2\ j}\bar{e}_{n+2}, \bar{e}_{n+2} \rangle \\ &= a_{n+2\ j}\langle \bar{e}_{n+2}, \bar{e}_{n+2} \rangle = a_{n+2\ j}; \\ 0 &= \langle \bar{e}_1, \bar{e}_1 \rangle = \langle \mathcal{O}\bar{e}_1, \mathcal{O}\bar{e}_1 \rangle = \langle \bar{e}_1 + a_{21}\bar{e}_2 + \dots + a_{n+1\ 1}\bar{e}_{n+1}, \bar{e}_1 + a_{21}\bar{e}_2 + \dots + a_{n+1\ 1}\bar{e}_{n+1} \rangle \\ &= a_{21}^2 \langle \bar{e}_2, \bar{e}_2 \rangle + a_{n1}^2 \langle \bar{e}_n, \bar{e}_n \rangle + 2a_{n+1\ 1} \langle \bar{e}_1, \bar{e}_{n+1} \rangle = a_{21}^2 + \dots + a_{n1}^2 + 2a_{n+1\ 1}. \end{aligned}$$

Logo, podemos escrever

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n+1\ 1} & a_{n+1\ 2} & \cdots & a_{n+1\ n} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3-14)$$

onde $2a_{n+1\ 1} + a_{21}^2 + \dots + a_{n1}^2 = 0$.

Observe que, com as notações acima, um ponto em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ é dado por (x_1, \dots, x_{n+2}) tal que $2x_1x_{n+1} + x_2^2 + \dots + x_n^2 = -1$. Assim, podemos considerar a curva

$\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{P}^3 \cap (\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}) = \mathbb{H}^1 \times \mathbb{R}$ dada por

$$\gamma(s) = \left(\phi(s), 0, \dots, 0, \frac{-1}{2\phi(s)}, \nu(s) \right), \quad (3-15)$$

onde $\phi, \nu: I \rightarrow \mathbb{R}$ são diferenciáveis e satisfazem:

$$|\gamma'(s)|^2 = \left| \left(\phi'(s), 0, \dots, 0, \frac{\phi'(s)}{2\phi^2(s)}, \nu'(s) \right) \right|^2 = \left(\frac{\phi'(s)}{\phi(s)} \right)^2 + (\nu'(s))^2 = 1$$

e $\phi(s) > 0$, para que o traço $\gamma(I)$ esteja contido num dos semi-espacos determinado por \mathbb{P}^2 em \mathbb{P}^3 .

Agora, fixando $s_0 \in I$, usando (3-14) e repetindo o mesmo processo realizado nos casos anteriores, um ponto $\mathcal{O}\gamma(s_0)$ da órbita $O(s_0)$ é dado por

$$\mathcal{O}\gamma(s_0) = \left(\phi(s_0), a_{21}\phi(s_0), \dots, a_{n+11}\phi(s_0) - \frac{1}{2\phi(s_0)}, \nu(s_0) \right). \quad (3-16)$$

Seja $\mathbb{P}^n(s_0)$ o subespaço afim de dimensão n de \mathbb{L}^{n+2} paralelo à $[\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n]$ passando pelo ponto $\left(0, \dots, 0, \frac{-1}{2\phi(s_0)}, \nu(s_0) \right)$, isto é

$$\mathbb{P}^n(s_0) = \left\{ \left(p_1, \dots, p_n, \frac{-1}{2\phi(s_0)}\nu(s_0) \right) \in \mathbb{L}^{n+2} \right\}.$$

Tome $p = \left(p_1, \dots, p_n, \frac{-1}{2\phi(s_0)}, \nu(s_0) \right) \in \mathbb{P}^n(s_0) \cap (\mathbb{H}^n \times \mathbb{R})$. Como a projeção horizontal de p está em \mathbb{H}^n , temos que p satisfaz

$$\frac{-p_1}{\phi(s_0)} + p_2^2 + \dots + p_n^2 = -1 = \frac{-1}{\phi(s_0)}\phi(s_0) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\phi(s_0)}(p_1 - \phi(s_0)) = \sum_{i=1}^n p_i^2,$$

na qual é uma horosfera de dimensão $n-1$ contida em $\mathbb{P}^n(s_0)$. Como $\mathcal{O}\gamma(s_0) \in \mathbb{P}^n(s_0) \cap (\mathbb{H}^n \times \mathbb{R})$ para todo $\mathcal{O} \in \mathcal{I}$, então a seção horizontal da órbita $O(s_0)$ é uma horosfera $(n-1)$ -dimensional. Dessa forma, estas hipersuperfícies rotacionais são chamadas de **parabólicas**.

De (3-16) e a condição imposta no operador \mathcal{O} em (3-14), podemos parametrizar a hipersuperfície rotacional por

$$f(s, t_1, \dots, t_{n-1}) = \left(\phi(s), \phi(s)t_1, \dots, \phi(s)t_{n-1}, \frac{-1}{2\phi(s)} - \frac{\phi(s)}{2} \sum_{i=1}^{n-1} t_i^2, \nu(s) \right) \quad (3-17)$$

e, assim, a métrica induzida por f é dada por

$$d\sigma^2 = ds^2 + \phi(s)^2 dt^2,$$

onde dt^2 é a métrica riemanniana de \mathbb{R}^{n-1} .

Por fim, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \left(\phi', \phi' t_1, \dots, \phi' t_{n-1}, \frac{\phi'}{2\phi^2} - \frac{\phi'}{2} \sum_{i=1}^{n-1} t_i^2, v'(s) \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial t_i} = (0, 0, \dots, \phi, \dots, 0, -\phi t_i, 0)$$

e, sendo assim,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle &= \left(\frac{\phi'}{\phi} \right)^2 - (\phi')^2 \sum_{i=1}^{n-1} t_i^2 + (\phi')^2 \sum_{i=1}^{n-1} t_i^2 + (v')^2 = \left(\frac{\phi'}{\phi} \right)^2 + (v')^2 = 1, \\ \left\langle \frac{\partial f}{\partial t_i}, \frac{\partial f}{\partial t_j} \right\rangle &= \phi^2 \delta_{ij} \quad \text{e} \quad \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t_i} \right\rangle = -\phi \phi' t_i + \phi \phi' t_i = 0. \end{aligned} \quad (3-18)$$

Segue que $\left\{ \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial t_{n-1}} \right\}$ é uma base linearmente independente em \mathbb{L}^{n+2} e, portanto, f é uma hipersuperfície imersa em \mathbb{L}^{n+2} .

Observação 3.2 *Observe que, embora a Definição 3.1 tenha sido introduzida para os casos em que $\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon = -1$, podemos facilmente estender para $\varepsilon = 0$ considerando*

$$\mathbb{R}^n = \{ (x_1, \dots, x_{n+1}, x_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2}; x_{n+2} = 0 \}.$$

Analogamente aos Casos 1 e 2.1 acima, as hipersuperfícies rotacionais em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$ também são chamadas de **esféricas** pois as projeções em \mathbb{R}^n de suas órbitas são também esferas. Podemos considerar $\mathbb{P}^2 = [e_{n+1}, e_{n+2}]$ e parametrizar a curva geratriz γ por

$$\gamma(s) = (\phi(s), 0, \dots, 0, v(s)),$$

com $\phi(s) > 0$ e $(\phi'(s))^2 + (v'(s))^2 = 1$. Um operador $\mathcal{O} \in \mathcal{S}$ é dado por

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde $(a_{ij})_{i,j=1}^n$ é uma matriz ortogonal em \mathbb{R}^n .

Assim, uma parametrização da hipersuperfície rotacional é dada por

$$f(s, t) = (\phi(s)\varphi_1(t), \dots, \phi(s)\varphi_n(t), 0, \upsilon(s)), \quad (3-19)$$

na qual $\varphi(t) = \varphi(t_1, \dots, t_{n-1}) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ é uma parametrização ortogonal de \mathbb{S}^{n-1} . Verifica-se facilmente que f é uma hipersuperfície imersa em \mathbb{R}^{n+2} e sua métrica induzida é dada por

$$d\sigma^2 = ds^2 + \phi(s)^2 dt^2,$$

onde dt^2 é a métrica riemanniana de \mathbb{S}^{n-1} .

Como vimos acima, as hipersuperfícies rotacionais podem ser classificadas pelas naturezas geométricas das projeções de suas órbitas em \mathbb{Q}_ε^n . De maneira sintetizada:

Definição 3.3 *Uma hipersuperfície rotacional Σ de $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$ é chamada de*

1. **Esférica** se as projeções horizontais de suas órbitas são esferas geodésicas de \mathbb{Q}_ε^n ;
2. **Parabólica** se as projeções horizontais de suas órbitas são horosféras de \mathbb{H}^n ;
3. **Hiperbólica** se as projeções horizontais de suas órbitas são espaços hiperbólicos em \mathbb{H}^n .

Em [7] foi mostrado um fato notável sobre as hipersuperfícies rotacionais que está enunciado no próximo teorema.

Teorema 3.4 *As hipersuperfícies rotacionais de $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$ possuem a T-propriedade e suas seções horizontais em \mathbb{Q}_ε^n são totalmente umbílicas*

Prova.

A fim de simplificar os cálculos, vamos tomar casos separados.

Inicialmente, seja $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$ uma parametrização de uma hipersuperfície rotacional esférica em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ ou em $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$, isto é, de (3-3) e de (3-8),

$$f(s, t) = (g(s), h(s)\varphi_1(t), \dots, h(s)\varphi_n(t), \upsilon(s)),$$

onde $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ é uma parametrização ortogonal de \mathbb{S}^{n-1} e

$$g(s) = \begin{cases} \sin(\phi(s)), & \text{se } \varepsilon = 1 \\ \cosh(\phi(s)), & \text{se } \varepsilon = -1 \end{cases} \quad \text{e} \quad h(s) = \begin{cases} \cos(\phi(s)), & \text{se } \varepsilon = 1 \\ \sinh(\phi(s)), & \text{se } \varepsilon = -1 \end{cases}.$$

Note que as funções g e h satisfazem: $g(s)^2 + \varepsilon h(s)^2 = 1$, $g'(s) = \phi'(s)h(s)$ e $h'(s) = -\varepsilon\phi'(s)g(s)$. Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial s} &= (\phi'(s)h(s), -\varepsilon\phi'(s)g(s)\varphi_1(t), \dots, -\varepsilon\phi'(s)g(s)\varphi_n(t), \nu'(s)), \\ \frac{\partial f}{\partial t_i} &= \left(0, h(s)\frac{\partial\varphi_1(t)}{\partial t_i}, \dots, h(s)\frac{\partial\varphi_n(t)}{\partial t_i}, 0\right), \quad \text{para } i = 1, \dots, n-1.\end{aligned}$$

O campo normal unitário N de Σ é dado por

$$N = (\varepsilon\nu'(s)h(s), -\nu'(s)g(s)\varphi_1(t), \dots, -\nu'(s)g(s)\varphi_n(t), -\varepsilon\phi'(s)) \quad (3-20)$$

De fato,

$$\begin{aligned}\langle N, N \rangle &= \varepsilon(\nu')^2 h^2 + (\nu')^2 g^2 (\varphi_1^2 + \dots + \varphi_n^2) + (\phi')^2 = (\nu')^2 + (\phi')^2 = 1, \\ \left\langle N, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle &= \varepsilon^2 \nu' \phi' h^2 + \varepsilon \nu' \phi' g^2 (\varphi_1^2 + \dots + \varphi_n^2) - \varepsilon \nu' \phi' = \varepsilon \nu' \phi' (\varepsilon h^2 + g^2 - 1) = 0, \\ \left\langle N, \frac{\partial f}{\partial t_i} \right\rangle &= -\nu' g h \left(\sum_{k=1}^n \varphi_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial t_i} \right) = 0, \quad \text{visto que } \varphi \text{ parametriza } \mathbb{S}^{n-1}.\end{aligned}$$

Agora, sejam A o operador shape de Σ em relação à N , $\bar{\nabla}$ a conexão riemanniana de $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$, D a derivada covariante em \mathbb{E}^{n+2} e tome dois campos diferenciáveis quaisquer $X, Y \in T\Sigma$. Como $\langle Y, N \rangle = 0$, segue que

$$X\langle Y, N \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle \bar{\nabla}_X Y, N \rangle = -\langle \bar{\nabla}_X N, Y \rangle.$$

Logo,

$$\langle AX, Y \rangle = -\langle \bar{\nabla}_X N, Y \rangle = \langle \bar{\nabla}_X Y, N \rangle = \langle D_X Y, N \rangle. \quad (3-21)$$

Note que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial s} &= \left(0, -\varepsilon\phi'(s)g(s)\frac{\partial\varphi_1(t)}{\partial t_1}, \dots, -\varepsilon\phi'(s)g(s)\frac{\partial\varphi_1(t)}{\partial t_{n-1}}, 0\right), \\ \frac{\partial f}{\partial t_i \partial t_j} &= \left(0, h(s)\frac{\partial^2\varphi_1(t)}{\partial t_i \partial t_j}, \dots, h(s)\frac{\partial^2\varphi_n(t)}{\partial t_i \partial t_j}, 0\right), \quad \text{para } i = 1, \dots, n-1.\end{aligned}$$

Assim, de (3-21) e lembrando que φ parametriza ortogonalmente \mathbb{S}^{n-1} , obtemos

$$\begin{aligned} \left\langle A \left(\frac{\partial f}{\partial t_i} \right), \frac{\partial f}{\partial t_j} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j}, N \right\rangle = -\nu'(s)g(s)h(s) \left(\sum_{k=1}^n \varphi_k(t) \frac{\partial^2 \varphi_k(t)}{\partial t_i \partial t_j} \right) = 0, \quad i \neq j, \\ \left\langle A \left(\frac{\partial f}{\partial t_i} \right), \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial s}, N \right\rangle = \varepsilon \phi'(s) \nu'(s) g(s)^2 \left(\sum_{k=1}^n \varphi_k(t) \frac{\partial \varphi_k(t)}{\partial t_i} \right) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\left\{ \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial t_{n-1}} \right\}$ é uma base de direções principais de $T\Sigma$ pois diagonaliza o operador A . Em particular, observe que Σ possui a T -propriedade pois

$$T = \frac{\partial f}{\partial s}.$$

Denote por λ e μ_i as curvaturas principais de Σ associadas às direções principais $\frac{\partial f}{\partial s}$ e $\frac{\partial f}{\partial t_i}$, respectivamente, para todo $i = 1, \dots, n-1$. De (3-4) e (3-9), temos que

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\left\langle A \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right), \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle}{\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle} = \left\langle A \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right), \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}, N \right\rangle, \\ \mu_i &= \frac{\left\langle A \left(\frac{\partial f}{\partial t_i} \right), \frac{\partial f}{\partial t_i} \right\rangle}{\left\langle \frac{\partial f}{\partial t_i}, \frac{\partial f}{\partial t_i} \right\rangle} = \frac{\left\langle A \left(\frac{\partial f}{\partial t_i} \right), \frac{\partial f}{\partial t_i} \right\rangle}{h(s)^2 \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \right\|^2} = \frac{\left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t_i^2}, N \right\rangle}{h(s)^2 \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \right\|^2}. \end{aligned} \quad (3-22)$$

Observe que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} &= (\phi''h + \phi'h', -\varepsilon(\phi''g + \phi'g')\varphi_1, \dots, -\varepsilon(\phi''g + \phi'g')\varphi_n, \nu''), \\ \frac{\partial^s f}{\partial t_i^2} &= \left(0, h \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_i^2}, \dots, h \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t_i^2}, 0 \right). \end{aligned} \quad (3-23)$$

Ainda, do fato de φ parametrizar \mathbb{S}^{n-1} , temos que, para todo $i = 1, \dots, n-1$,

$$\sum_{k=1}^n \varphi_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial t_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^n \varphi_k \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial t_i^2} = - \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial t_i} \right)^2 = - \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \right\|^2. \quad (3-24)$$

Dessa maneira, usando (3-24) e substituindo (3-20) e (3-23) em (3-22) obtemos

$$\begin{aligned}\lambda &= \varepsilon^2 (\phi''h + \phi'h') v'h + \varepsilon v'g (\phi''g + \phi'g') (\varphi_1^2 + \dots + \varphi_n^2) - \varepsilon \phi'v'' \\ &= \varepsilon \phi''v' (\varepsilon h^2 + g^2) + \phi'v' (hh' + \varepsilon gg') - \varepsilon \phi'v'' \\ &= \varepsilon (\phi''v' - \phi'v'') + \phi'v' (-\varepsilon \phi'gh + \varepsilon \phi'hg) = \varepsilon (\phi''v' - \phi'v''), \\ \mu_i &= \frac{v'gh \sum_{k=1}^n \varphi_k \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial t_i^2}}{h^2 \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \right\|^2} = -\frac{v'g}{h}.\end{aligned}$$

Note que u_i não depende de i e, portanto, o operador shape A tem no máximo dois autovalores distintos e as seções horizontais de Σ são totalmente umbílicas, como havíamos afirmado.

De maneira similar, considerando $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície rotacional esférica em \mathbb{R}^{n+1} , cuja parametrização é dada por (3-19), verifica-se que o resultado acima também é válido, sendo um campo normal unitário de Σ dado por:

$$N = (v'(s)\varphi_1(t), \dots, v'(s)\varphi_n(t), 0, -\phi'(s)).$$

De fato, omitindo os parâmetros s e t , temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial s} &= (\phi'\varphi_1, \dots, \phi'\varphi_n, 0, v'), & \frac{\partial f}{\partial t_i} &= \left(\phi \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_i}, \dots, \phi \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_i}, 0, 0 \right), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} &= (\phi''\varphi_1, \dots, \phi''\varphi_n, 0, v''), & \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial s} &= \left(\phi' \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_i}, \dots, \phi' \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_i}, 0, 0 \right), \\ & & \text{e } \frac{\partial^2 f}{\partial t_j \partial t_i} &= \left(\phi \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_j \partial t_i}, \dots, \phi \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t_j \partial t_i}, 0, 0 \right).\end{aligned}$$

Assim, desde que $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ é uma parametrização ortogonal de \mathbb{S}^{n-1} , temos que

$$\begin{aligned}\left\langle A \left(\frac{\partial f}{\partial t_i} \right), \frac{\partial f}{\partial t_j} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j}, N \right\rangle = v'\phi \left(\varphi_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_i \partial t_j} + \dots + \varphi_n \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t_i \partial t_j} \right) = 0, \quad \text{para todo } i \neq j, \\ \left\langle A \left(\frac{\partial f}{\partial t_i} \right), \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial s}, N \right\rangle = v'\phi' \left(\varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_i} + \dots + \varphi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_i} \right) = 0, \quad \text{para todo } i,\end{aligned}$$

isto é, $\left\{ \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial t_{n-1}} \right\}$ é uma base de direções principais de $T\Sigma$ pois diagonaliza A . Em particular, Σ tem a T -propriedade, já que $T = \frac{\partial f}{\partial s}$.

Por fim, as curvaturas principais de Σ são dadas por:

$$\lambda = \frac{\left\langle A \left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s} \right), \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle}{\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle} = \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}, N \right\rangle = \phi'' \nu' (\phi_1^2 + \dots + \phi_n^2) - \nu'' \phi' = \phi'' \nu' - \nu'' \phi',$$

$$\mu_i = \frac{\left\langle A \left(\frac{\partial f}{\partial t_i}, \frac{\partial f}{\partial t_i} \right), \frac{\partial f}{\partial t_i} \right\rangle}{\left\langle \frac{\partial f}{\partial t_i}, \frac{\partial f}{\partial t_i} \right\rangle} = \frac{\left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t_i^2}, N \right\rangle}{\phi^2 \left\| \frac{\partial \phi}{\partial t_i} \right\|^2} = \frac{-\nu' \phi \left\| \frac{\partial \phi}{\partial t_i} \right\|^2}{\phi^2 \left\| \frac{\partial \phi}{\partial t_i} \right\|^2} = \frac{-\nu'}{\phi},$$

na qual as curvaturas μ_i não dependem do índice i . Logo, as seções horizontais em \mathbb{R}^n são totalmente umbílicas.

Seja agora $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ uma hipersuperfície rotacional do tipo hiperbólica. De (3-12), temos que

$$f(s, t) = (\cosh(\phi(s))\varphi_1(t), \dots, \cosh(\phi(s))\varphi_n(t), \sinh(\phi(s)), \nu(s)),$$

onde $\varphi(t) = \varphi(t_1, \dots, t_{n-1}) = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ é uma parametrização ortogonal de \mathbb{H}^{n-1} . Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial s} = (\phi'(s) \sinh(\phi(s))\varphi_1(t), \dots, \phi'(s) \sinh(\phi(s))\varphi_n(t), \phi'(s) \cosh(\phi(s)), \nu'(s)),$$

$$\frac{\partial f}{\partial t_i} = \left(\cosh(\phi(s)) \frac{\partial \varphi_1(t)}{\partial t_i}, \dots, \cosh(\phi(s)) \frac{\partial \varphi_n(t)}{\partial t_i}, 0, 0 \right), \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Com a métrica usual de \mathbb{L}^{n+2} , um campo normal unitário de Σ é dado por

$$N = (\nu'(s) \sinh(\phi(s))\varphi_1(t), \dots, \nu'(s) \sinh(\phi(s))\varphi_n(t), \xi'(s) \cosh(\phi(s)), -\phi'(s)).$$

Por simplicidade de notação, omitiremos os parâmetros s e t . Observe que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = ((\phi'' \sinh(\phi) + \phi' \cosh(\phi)) \varphi_1, \dots, (\phi'' \sinh(\phi) + \phi' \cosh(\phi)) \varphi_n, \phi'' \cosh(\phi) + \phi' \sinh(\phi), \nu''),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial s} = \left(\phi' \sinh(\phi) \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_i}, \dots, \phi' \sinh(\phi) \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_i}, 0, 0 \right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t_j \partial t_i} = \left(\cosh(\phi) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_j \partial t_i}, \dots, \cosh(\phi) \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t_j \partial t_i}, 0, 0 \right).$$

Sendo assim, de (3-21) e usando o fato de φ ser uma parametrização ortogonal

de \mathbb{H}^{n-1} , temos que

$$\begin{aligned} \left\langle A \left(\frac{\partial f}{\partial t_i}, \frac{\partial f}{\partial s} \right), \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial s}, N \right\rangle = \phi' \nu' \sinh^2(\phi) \left(-\phi_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial t_i} + \sum_{k=1}^n \phi_k \frac{\partial \phi_k}{\partial t_i} \right) = 0 \\ \left\langle A \left(\frac{\partial f}{\partial t_i}, \frac{\partial f}{\partial t_j} \right), \frac{\partial f}{\partial t_j} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j}, N \right\rangle = \nu' \cosh(\phi) \sinh(\phi) \left(-\phi_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t_i \partial t_j} + \sum_{k=1}^n \phi_k \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial t_i \partial t_j} \right) = 0, \end{aligned}$$

para todo $i \neq j$. Portanto, a base $\left\{ \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial t_{n-1}} \right\}$ diagonaliza o operador A e, consequentemente, Σ tem a T -propriedade. Suas curvaturas principais são dadas por

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\left\langle A \left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s} \right), \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle}{\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle} = \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}, N \right\rangle = \nu' \sinh(\phi) (\phi'' \sinh(\phi) + \phi' \cosh(\phi)) \left(-\phi_1^2 + \sum_{k=2}^n \phi_k^2 \right) \\ &\quad + \nu' \cosh(\phi) (\phi'' \cosh(\phi) + \phi' \sinh(\phi)) - \nu'' \phi' \\ &= -\nu' \sinh(\phi) (\phi'' \sinh(\phi) + \phi' \cosh(\phi)) + \nu' \cosh(\phi) (\phi'' \cosh(\phi) + \phi' \sinh(\phi)) - \nu'' \phi' \\ &= \nu' \phi'' - \nu'' \phi', \\ \mu_i &= \frac{\left\langle A \left(\frac{\partial f}{\partial t_i}, \frac{\partial f}{\partial t_i} \right), \frac{\partial f}{\partial t_i} \right\rangle}{\left\langle \frac{\partial f}{\partial t_i}, \frac{\partial f}{\partial t_i} \right\rangle} = \frac{\nu' \cosh(\phi) \sinh(\phi) \left(-\phi_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t_i^2} + \sum_{k=1}^n \phi_k \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial t_i^2} \right)}{\cosh^2(\phi) \left\| \frac{\partial \phi}{\partial t_i} \right\|^2}. \end{aligned}$$

De maneira análoga à (3-24), é possível mostrar que

$$-\phi_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t_i^2} + \sum_{k=1}^n \phi_k \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial t_i^2} = - \left\| \frac{\partial \phi}{\partial t_i} \right\|^2$$

e, assim, $\mu_i = -\nu' \coth(\phi)$ donde não depende de i . Logo, as seções horizontais de Σ são totalmente umbílicas, como queríamos mostrar.

Finalmente, considere $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$ uma hipersuperfície de rotação do tipo parabólica. De (3-17), f é dada pela parametrização

$$f(s, t_1, \dots, t_{n-1}) = \left(\phi(s), \phi(s)t_1, \dots, \phi(s)t_{n-1}, \frac{-1}{2\phi(s)} - \frac{\phi(s)}{2} \sum_{i=1}^{n-1} t_i^2, \nu(s) \right).$$

Temos ainda que

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \left(\phi', \phi' t_1, \dots, \phi' t_{n-1}, \frac{\phi'}{2\phi^2} - \frac{\phi'}{2} \sum_{i=1}^{n-1} t_i^2, \nu' \right) \text{ e } \frac{\partial f}{\partial t_i} = (0, 0, \dots, \phi, \dots, 0, -\phi t_i, 0)$$

Lembrando que, neste caso, estamos utilizando a métrica obtida a partir da base especial que construímos no Caso 2.3, ou seja, considerando (x_1, \dots, x_{n+2}) as coordenadas

na base canônica de \mathbb{L}^{n+2} então

$$dl^2 = 2dx_1 dx_{n+1} + dx_2^2 + \dots + dx_n^2 + dx_{n+2}^2. \quad (3-25)$$

Sendo assim, o campo

$$N = \left(\phi v', \phi v' t_1, \dots, \phi v' t_{n-1}, \frac{v'}{2\phi} - \frac{\phi v'}{2} \sum_{k=1}^{n-1} t_k^2, -\frac{\phi'}{\phi} \right)$$

é um campo normal unitário de Σ , visto que é perpendicular às direções $\frac{\partial f}{\partial s}$ e $\frac{\partial f}{\partial t_i}$, para todo $i = 1, \dots, n-1$, com a métrica (3-25).

Calculando as derivadas segundas de $\frac{\partial f}{\partial s}$ e $\frac{\partial f}{\partial t_i}$ temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} &= \left(\phi'', \phi'' t_1, \dots, \phi'' t_{n-1}, \frac{\phi'' \phi^2 - 2\phi(\phi')^2}{2\phi^4} - \frac{\phi''}{2} \sum_{i=1}^{n-1} t_i^2, v'' \right), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial s} &= (0, 0, \dots, \phi', \dots, 0, -\phi' t_i, 0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t_j \partial t_i} = (0, \dots, 0, -\phi \delta_{ij}, 0). \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} \left\langle A \left(\frac{\partial f}{\partial t_i} \right), \frac{\partial f}{\partial t_j} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j}, N \right\rangle = 0, \quad \text{para todo } i \neq j, \text{ e} \\ \left\langle A \left(\frac{\partial f}{\partial t_i} \right), \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial s}, N \right\rangle = -\phi' t_i \phi v' + \phi' \phi v' t_i = 0, \quad \text{para todo } i. \end{aligned}$$

Portanto, $\left\{ \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial t_{n-1}} \right\}$ diagonaliza A e, sendo assim, é uma base de direções principais em $T\Sigma$.

De (3-18), as curvaturas principais de Σ são dadas por:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\left\langle A \left(\frac{\partial f}{\partial s} \right), \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle}{\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle} = \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}, N \right\rangle \\ &= \phi'' \left(\frac{v'}{2\phi} - \frac{\phi v'}{2} \sum_{k=1}^{n-1} t_k^2 \right) + \phi v' \left(\frac{\phi'' \phi^2 - 2\phi(\phi')^2}{2\phi^4} - \frac{\phi''}{2} \sum_{k=1}^{n-1} t_k^2 \right) \\ &\quad + \phi'' \phi v' \sum_{k=1}^{n-1} t_k^2 - \frac{v'' \phi'}{\phi} = v' \left(\frac{\phi'}{\phi} \right)' - v'' \left(\frac{\phi'}{\phi} \right), \\ \mu_i &= \frac{\left\langle A \left(\frac{\partial f}{\partial t_i} \right), \frac{\partial f}{\partial t_i} \right\rangle}{\left\langle \frac{\partial f}{\partial t_i}, \frac{\partial f}{\partial t_i} \right\rangle} = \frac{1}{\phi^2} \left\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t_i^2}, N \right\rangle = -\xi'. \end{aligned}$$

Como queríamos mostrar, as curvaturas μ_i não dependem do índice i e, portanto, as

projeções horizontais em \mathbb{H}^n de Σ são totalmente umbílicas. □

Antes de finalizar esta seção, vamos apresentar um critério para que possamos considerar que uma hipersuperfície seja rotacional, também mostrado em [7, Teorema 2].

Teorema 3.5 *Sejam $n \geq 3$ e $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$ uma hipersuperfície com a T -propriedade e denote por λ a curvatura principal associada a direção T . Assuma que o operador shape de Σ é dado por*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \mu & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu \end{pmatrix},$$

com $\lambda \neq \mu$ e suponha que exista uma relação funcional $\lambda(\mu)$. Então Σ é uma parte aberta de uma hipersuperfície de rotação.

Prova. Denote por D_λ e D_μ as distribuições geradas pelos auto-espacos de λ e μ . Inicialmente mostraremos que estas distribuições são involutivas, isto é, para todo par de campos diferenciáveis $X, Y \in D_\lambda$ têm-se $[X, Y] \in D_\lambda$ (respectivamente D_μ). Como $D_\lambda = \{T\}$ é unidimensional, tal propriedade é imediata. Mostremos então para D_μ .

A partir da equação de Codazzi, tomando dois campos linearmente independentes $X, Y \in D_\mu$ teremos

$$A([X, Y]) = \nabla_X AY - \nabla_Y AX - \varepsilon \theta (\langle Y, T \rangle X - \langle X, T \rangle Y),$$

onde neste caso ∇ denota a conexão de Levi-Civita de Σ .

Desde que $D_\mu \subset \{D_\lambda\}^\perp$, segue que $\langle X, T \rangle = \langle Y, T \rangle = 0$. Logo,

$$A([X, Y]) = \nabla_X AY - \nabla_Y AX = \nabla_X \mu Y - \nabla_Y \mu X = X(\mu)Y - Y(\mu)X + \mu(\nabla_X Y - \nabla_Y X).$$

Da simetria da conexão ∇ e levando em consideração que $X(\mu)$ e $Y(\mu)$ são funções, concluímos que

$$(A - \mu I)([X, Y]) = X(\mu)Y - Y(\mu)X \in D_\mu,$$

onde I é o operador identidade em $T\Sigma$.

Observe que, desde que μ é autovalor de A , temos que $A - \mu I = 0$. Logo,

$$A([X, Y]) = \mu[X, Y],$$

ou seja, D_μ é involutiva pois $[X, Y] \in D_\mu$.

Por outro lado, sendo X e Y linearmente independentes, a única maneira da igualdade $X(\mu)Y - Y(\mu)X = 0$ ser satisfeita é se $X(\mu) = Y(\mu) = 0$, isto é, μ é constante ao longo das folhas de D_μ . Da relação $\lambda(\mu)$ podemos afirmar o mesmo de λ .

Vamos fixar $p \in \Sigma$ e denotar por $\Sigma_\lambda(p)$ e por $\Sigma_\mu(p)$ as folhas de D_λ e de D_μ ao longo de p , respectivamente. Numa vizinhança de p vamos escolher coordenadas (t, u_1, \dots, u_{n-1}) tais que $T = \frac{\partial}{\partial t}$ e (u_1, \dots, u_{n-1}) sejam coordenadas locais em $\Sigma_\mu(p)$. Vamos ainda denotar por $U_i = \frac{\partial}{\partial u_i}$, para cada $i = 1, \dots, n-1$, e por N o normal unitário de Σ .

Mostremos que $\Sigma_\mu(p)$ é totalmente umbílica em \mathbb{E}^{n+2} . Observe que, em \mathbb{E}^{n+2} , $\Sigma_\mu(p)$ possui 3 direções normais sendo elas N , T e o campo normal de $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$. Vamos denotar por ξ o campo normal de $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$ apontando para fora.

Sejam D a derivada covariante de \mathbb{E}^{n+2} e $\bar{\nabla}$ a conexão riemanniana de $\mathbb{Q}_\varepsilon^n \times \mathbb{R}$. Inicialmente, temos que

$$\begin{cases} D_{U_i}N = \bar{\nabla}_{U_i}N = -A(U_i) = -\mu U_i \\ D_TN = \bar{\nabla}_TN = -A(T) = -\lambda T \end{cases} \quad (3-26)$$

Agora, denotando por R a curvatura de \mathbb{E}^{n+2} (na qual é zero) e lembrando que $[T, U_i] = \left[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial u_i} \right] = 0$, temos que

$$\begin{aligned} 0 &= R(U_i, T)N = D_T D_{U_i}N - D_{U_i} D_TN + D_{[T, U_i]}N \\ &= -D_T(\mu U_i) + D_{U_i}(\lambda T) = -T(\mu)U_i - \mu D_T U_i + U_i(\lambda)T + \lambda D_{U_i}T. \end{aligned}$$

Como vimos mais acima λ é constante ao longo de U_i . Temos ainda que $D_T U_i = D_{U_i}T$ já que D é a derivada covariante do espaço \mathbb{E}^{n+2} e T e U_i são diferenciáveis. Considerando μ' a derivação de μ na direção de T e como por hipótese $\lambda \neq \mu$, segue da igualdade acima que

$$D_{U_i}T = \frac{\mu'}{\lambda - \mu} U_i. \quad (3-27)$$

Observe que ξ é o campo posição de \mathbb{Q}_ε^n . Logo,

$$D_{U_i}\xi = (U_i)_{\mathbb{Q}_\varepsilon^n} = U_i. \quad (3-28)$$

Portanto, unindo (3-26), (3-27) e (3-28), concluímos que $\Sigma_\mu(p)$ é totalmente umbílica. Isso implica que $\Sigma_\mu(p)$ esta contida num subespaço afim $\mathbb{P}^n(p)$ de dimensão n de \mathbb{E}^{n+2} . Mostremos que variando p os subespaços $\mathbb{P}^n(p)$ são paralelos.

Considere os seguintes campos ao longo de $\Sigma_{\mu}(p)$

$$X = \frac{\mu'}{\lambda - \mu}N + \mu T \quad \text{e} \quad Y = \xi + \frac{1}{\mu}N.$$

Como N , T e ξ são normais a U_i , para todo $i = 1, \dots, n-1$, temos que

$$\langle U_i, X \rangle = \langle U_i, Y \rangle = 0.$$

Além disso, usando (3-26), (3-27) e (3-28) e o fato de que λ e μ são constantes em $\Sigma_{\mu}(p)$, obtemos

$$D_{U_i}X = \frac{\mu'}{\lambda - \mu}D_{U_i}N + \mu D_{U_i}T = \frac{\mu'}{\lambda - \mu}(-\mu U_i) + \mu \left(\frac{\mu'}{\lambda - \mu}U_i \right) = 0$$

e

$$D_{U_i}Y = D_{U_i}\xi + \frac{1}{\mu}D_{U_i}N = U_i + \frac{1}{\mu}(-\mu U_i) = 0.$$

Portanto, X e Y são dois campos linearmente independentes, constantes em $\Sigma_{\mu}(p)$ e, conseqüentemente, ortogonais à $\mathbb{P}^n(p)$.

Seja $\pi(p)$ o plano gerado por $X(p)$ e $Y(p)$. Este plano é o complementar ortogonal de $\mathbb{P}^n(p)$. Para mostrarmos o paralelismo dos planos $\mathbb{P}^n(p)$ variando p basta mostrarmos que os planos $\pi(p)$ são paralelos ao variar p . Para isso, vamos mostrar que $D_T X$ e $D_T Y$ pertencem à direção $\pi(p)$.

Usando $[T, U_i] = 0$ e $R \equiv 0$, concluímos que

$$\begin{cases} D_{U_i}D_T X = D_T D_{U_i}X = 0 \\ D_{U_i}D_T Y = D_T D_{U_i}Y = 0 \end{cases}.$$

Portanto $D_T X$ e $D_T Y$ são constantes em $\Sigma_{\mu}(p)$. Sendo assim $D_T X$ e $D_T Y$ são ortogonais à $\mathbb{P}^n(p)$ e, conseqüentemente, pertencem à $\pi(p)$ como queríamos mostrar.

Finalmente, movendo \mathbb{P}^n ao longo de $\Sigma_{\mu}(p)$, sua interseção com $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n \times \mathbb{R}$ nos dá uma hipersuperfície rotacional de eixo π . \square

3.2 Hipersuperfícies Rotacionais em $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$

Para que não haja confusão ao leitor, a partir daqui vamos trocar a ordem do produto entre \mathbb{R} e $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$. Na seção inicial 3.1, foi conveniente utilizar as mesmas notações

utilizadas em [7] para o desenvolvimento dos cálculos.

Como vimos, dada uma hipersuperfície rotacional qualquer Σ de $I \times \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$, Σ pode ser parametrizada por uma curva plana definida por duas funções diferenciáveis $\phi = \phi(s)$ e $\nu = \nu(s)$ no aberto I . Analogamente, considerando agora o produto torcido, uma hipersuperfície rotacional Σ de $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ também será determinada pelas funções ϕ e ν , donde assumimos que

$$(\nu')^2 + (\omega(\nu)\phi')^2 = 1 \quad \text{ou} \quad (\nu')^2 + \left(\omega(\nu)\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 = 1 \quad (\text{caso } \Sigma \text{ parabólica}) \quad (3-29)$$

e a métrica torcida de Σ será dada por

$$d\sigma^2 = ds^2 + (\omega(\nu)\rho(\phi))^2 dt^2,$$

onde dt^2 denota a métrica de $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^{n-1}$ e ρ , dada pela Tabela 3.1, depende de ε e do tipo de Σ dado pela Definição 3.3.

Tabela 3.1: Definição de ρ

$\rho(x)$	ε	Tipo rotacional
$\cos(x)$	1	Esférico
$\sinh(x)$	-1	Esférico
x	0	Esférico
x	-1	Parabólico
$\cosh(x)$	-1	Hiperbólico

Note que na seção anterior mostramos que Σ se trata de um produto de I por alguma das formas espaciais a depender do seu tipo de hipersuperfície rotacional (esférico, hiperbólico ou parabólico). Dessa forma, da métrica torcida acima, concluímos que

$$\Sigma \cong I \times_{(\omega \circ \nu)\rho(\phi)} \overline{\mathbb{Q}}$$

onde $\overline{\mathbb{Q}}$ denota \mathbb{S}^{n-1} se Σ é esférica, \mathbb{H}^{n-1} se Σ é hiperbólica ou \mathbb{R}^{n-1} se Σ é parabólica.

Logo, da Proposição 2.5, se Σ tem curvatura seccional constante então

$$(\omega \circ \nu)\rho(\phi) = \psi(s) = \psi, \quad (3-30)$$

onde ψ é dada pela Tabela 3.2.

Tabela 3.2: Definição de ψ

$\psi(s)$	Sinal de c	ε	Tipo rotacional
$\frac{1}{\sqrt{c}} \sin(\sqrt{cs})$	$c > 0$	$0, \pm 1$	Esférico
s	$c = 0$	$0, \pm 1$	Esférico
$\frac{1}{\sqrt{-c}} \sinh(\sqrt{-cs})$	$c < 0$	$0, -1$	Esférico
$\exp(\sqrt{-cs})$	$c < 0$	-1	Parabólico
constante	$c = 0$	-1	Parabólico
$\frac{1}{\sqrt{-c}} \cosh(\sqrt{-cs})$	$c < 0$	-1	Hiperbólico

Nestas condições, o problema de determinar uma hipersuperfície rotacional $\Sigma \subset I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ com curvatura seccional constante se reduz em determinar os parâmetros ϕ e ν de (3-29) e de (3-30), ou seja, consiste em resolver os sistemas

$$\begin{cases} (\nu')^2 + (\omega(\nu)\phi')^2 = 1 \\ (\omega \circ \nu)\rho(\phi) = \psi(s) = \Psi \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} (\nu')^2 + \left(\omega(\nu)\frac{\phi'}{\phi}\right)^2 = 1 \\ (\omega \circ \nu)\rho(\phi) = \psi(s) = \Psi \end{cases} \quad (\text{caso } \Sigma \text{ for parabólica}).$$

(3-31)

Considere $\omega : I \rightarrow \omega(I)$ um difeomorfismo e suponha que $\rho(\phi)$ não se anule. Desde que $Im\left(\frac{\Psi}{\rho(\phi)}\right) \subset \omega(I)$, fica bem definida ν , a partir das segundas equações dos sistemas acima, dada por

$$\nu = \omega^{-1}\left(\frac{\Psi}{\rho(\phi)}\right). \quad (3-32)$$

Por conveniência, vamos fazer as mudanças $\chi = \omega^{-1}$ e $u = \frac{\Psi}{f(\phi)}$ na expressão de ν acima, isto é, $\nu = \chi(u)$. Dessa forma, derivando ν obtemos

$$\nu' = \chi'(u)u' = \chi'(u) \left(\frac{\Psi' f(\phi) - \Psi f'(\phi)\phi'}{(f(\phi))^2} \right), \quad (3-33)$$

que substituída na primeira equação do primeiro sistema em (3-31) chegamos em

$$\left(\frac{(\chi'(u)\Psi\rho'(\phi))^2}{(\rho(\phi))^4} + u^2 \right) (\phi')^2 - \left(\frac{2(\chi'(u))^2\Psi\Psi'\rho'(\phi)}{(\rho(\phi))^3} \right) \phi' + \left(\frac{\chi'\Psi'}{\rho(\phi)} \right)^2 - 1 = 0.$$

Observe que podemos reescrever esta última equação como uma equação do segundo grau na variável ϕ' na forma

$$a_2(s, \phi) (\phi')^2 + a_1(s, \phi) \phi' + a_0(s, \phi) = 0, \quad (3-34)$$

onde cada função a_i , ($i = 1, 2, 3$), é diferenciável e é dada por

$$\begin{cases} a_2(s, \phi) = \frac{(\chi'(u)\psi\rho'(\phi))^2}{(\rho(\phi))^4} + u^2 \\ a_1(s, \phi) = -\frac{2(\chi'(u))^2\psi\rho'(\phi)}{(\rho(\phi))^3} \\ a_0(s, \phi) = \left(\frac{\chi'(u)\psi'}{\rho(\phi)}\right)^2 - 1. \end{cases} \quad (3-35)$$

Da mesma maneira, substituindo (3-33) na primeira equação do segundo sistema em (3-31) obtemos uma equação na forma de (3-34) cujos coeficientes a_0 e a_1 são os mesmos dados por (3-35) e

$$a_2(s, \phi) = \frac{(\chi'(u)\psi\rho'(\phi))^2}{(\rho(\phi))^4} + \frac{u^2}{\phi^2}. \quad (3-36)$$

Em ambos os casos, obtemos uma EDO não linear da forma

$$a_2(s, y) (y')^2 + a_1(s, y)y' + a_0(s, y) = 0 \quad (3-37)$$

Assumindo que, para algum (s_0, y_0) ,

$$\Delta(s_0, y_0) := a_1(s_0, y_0)^2 - 4a_2(s_0, y_0)a_0(s_0, y_0) > 0,$$

a EDO (3-37) pode ser escrita como $y' = F(s, y)$, onde F é uma função diferenciável numa vizinhança de (s_0, y_0) .

Finalmente, como F é contínua, o Teorema de Peano garante a existência de uma solução local $y = \phi(s)$, definida em um aberto $I_0 \subset I$ contendo s_0 , para o problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = F(s, y) \\ y(s_0) = y_0, \end{cases}$$

na qual, consequentemente, ϕ é também solução dos sistemas (3-31) em I_0 . Basta agora substituir a solução ϕ encontrada na expressão de v em (3-32) e obtemos os parâmetros (ϕ, v) que resolvem (3-31).

Sintetizando as ideias acima, enunciamos a seguinte proposição.

Proposição 3.6 *Seja $\omega : I \rightarrow \omega(I)$ um difeomorfismo. Dado $c \in \mathbb{R}$, suponha que exista $s_0 \in \mathbb{R}$ na qual a função v dada em (3-32) está bem definida em um intervalo $I_0 \subset I$ contendo s_0 . Se, para algum $y_0 \in \mathbb{R}$, $\Delta(s_0, y_0) > 0$, então existe uma solução (ϕ, v) para os sistemas (3-31) definida em um intervalo aberto contido em I_0 . Consequentemente, existe uma hipersuperfície rotacional de curvatura seccional constante c no correspondente produto torcido $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$.*

Considerando nossa questão principal em determinar condições para que uma hipersuperfície de Einstein de $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ seja trivial, o primeiro resultado principal deste trabalho é garantir a existência de tais hipersuperfícies. Para isso, utilizaremos a Proposição 3.6.

Teorema 3.7 *Dado um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, considere $\omega : I \rightarrow \omega(I)$ um difeomorfismo tal que $|\omega'| > 1$ em I . Então valem as seguintes afirmações:*

- (i) *Para todo $c \in \mathbb{R}$, existe uma hipersuperfície rotacional do tipo esférica com curvatura seccional constante c em $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$, onde $\varepsilon = 0, -1$.*
- (ii) *Para todo $c > 0$, existe uma hipersuperfície rotacional do tipo esférica com curvatura seccional constante c em $I \times_{\omega} \mathbb{S}^n$.*
- (iii) *Para todo $c < 0$, existem em $I \times_{\omega} \mathbb{H}^n$ uma hipersuperfície rotacional do tipo parabólica e uma do tipo hiperbólica, ambas com curvatura seccional c .*
- (iv) *Existe uma hipersuperfície rotacional flat do tipo parabólica em $I \times_{\omega} \mathbb{H}^n$.*

Prova. A idéia da demonstração utilizar os resultados da Proposição 3.6 e considerar cada caso separado de acordo com ε , com o sinal de c e com o tipo da hipersuperfície rotacional. Sendo assim, considerando $\nu(s)$ dada em (3-32), vamos mostrar que, em qualquer um dos casos, existe um par (s_0, y_0) tal que ν está bem definida num intervalo aberto I_0 contendo s_0 e que $\Delta(s_0, y_0) > 0$.

Observe que, como a Proposição 3.6 tem natureza local, podemos assumir sem perda de generalidade que $\omega(I) = (0, \delta)$, com $0 < \delta \leq +\infty$, já que ω é um difeomorfismo sobre sua imagem (em particular, uma função torção não constante). Pelo mesmo motivo, também é possível assumir tal hipótese de que $|\omega'| > 1$, na qual segue que pela Regra da Cadeia que

$$|\chi'(u)| = |(\omega^{-1}(u))'| = \left| \frac{1}{|\omega'(\omega^{-1}(u))|} \right| < 1, \quad \forall u \in (0, \delta). \quad (3-38)$$

Primeiro vamos separar (i) em dois casos: vamos considerar $\varepsilon = -1$ no caso 1 e $\varepsilon = 0$ no caso 2.

Caso 1: $\varepsilon = -1$, $c \in \mathbb{R}$, tipo rotacional esférica.

De (3-32), temos que $\nu(s) = \chi(u)$ onde, da Tabela 3.1 e da Tabela 3.2, o parâmetro $u = \frac{\Psi}{\rho(\Phi)}$ é dado por:

$$u = \begin{cases} \frac{\sin(\sqrt{c}s)}{\sqrt{c} \sinh(\Phi(s))}, & c > 0 \\ \frac{s}{\sinh(\Phi(s))}, & c = 0 \\ \frac{\sinh(\sqrt{-c}s)}{\sqrt{-c} \sinh(\Phi(s))}, & c < 0 \end{cases} .$$

Note que \mathfrak{v} está bem definida em algum intervalo aberto $I_0 \subset (0, +\infty)$ contendo um $s_0 > 0$ suficientemente pequeno de forma que $u \in (0, \delta)$. Por outro lado, escrevendo $u_0 = u(s_0)$, escolhendo $y_0 = \phi(s_0)$ tal que $\sinh y_0 > 1$ e considerando a condição (3-38), os coeficientes $a_0(s_0, y_0)$ e $a_2(s_0, y_0)$, dados em (3-35) satisfazem

$$a_0(s_0, y_0) = \begin{cases} (\chi'(u_0))^2 \frac{\cos^2(\sqrt{cs_0})}{\sinh^2(y_0)} - 1, & c > 0 \\ \frac{(\chi'(u_0))^2}{\sinh^2(s_0)} - 1, & c = 0 \\ (\chi'(u_0))^2 \frac{\cosh^2(\sqrt{-cs_0})}{\sinh^2(y_0)} - 1, & c < 0 \end{cases} \Rightarrow a_0(s_0, y_0) < 0$$

e

$$a_2(s_0, y_0) = \begin{cases} \frac{\sin^2(\sqrt{cs_0})}{c \sinh^2(y_0)} \left\{ (\chi'(u_0))^2 \tanh^2(y_0) + 1 \right\}, & c > 0 \\ \frac{s_0^2}{\sinh^2(y_0)} \left\{ (\chi'(u_0))^2 \tanh^2(y_0) + 1 \right\}, & c = 0 \\ \frac{-\sinh^2(\sqrt{-cs_0})}{c \sinh^2(y_0)} \left\{ (\chi'(u_0))^2 \tanh^2(y_0) + 1 \right\}, & c < 0 \end{cases} \Rightarrow a_2(s_0, y_0) > 0.$$

Segue que $\Delta(s_0, y_0) = a_1(s_0, y_0)^2 - 4a_2(s_0, y_0)a_0(s_0, y_0) > 0$.

Pela Proposição 3.6, para todo $c \in \mathbb{R}$, existe uma hipersuperfície rotacional do tipo esférica com curvatura seccional constante c em $I \times_{\omega} \mathbb{H}^n$ ($\varepsilon = -1$).

Caso 2: $\varepsilon = 0$, $c \in \mathbb{R}$, tipo rotacional esférica.

Neste caso, a partir das Tabelas 3.1 e 3.2, o parâmetro u é dado por:

$$u = \begin{cases} \frac{\sin(\sqrt{cs})}{\sqrt{c\phi(s)}}, & c > 0 \\ \frac{s}{\phi(s)}, & c = 0 \\ \frac{\sinh(\sqrt{-cs})}{\sqrt{-c\phi(s)}}, & c < 0 \end{cases}.$$

Assim $\mathfrak{v} = \chi(u)$ também está bem definida num mesmo intervalo I_0 como no caso anterior. Escolhendo $s_0 \in I_0$ de modo que $y_0 = \phi(s_0) > 1$ e considerando (3-38), os coeficientes $a_0(s_0, y_0)$ e $a_2(s_0, y_0)$ ficam

$$a_0(s_0, y_0) = \begin{cases} (\chi'(u_0))^2 \frac{\cos^2(\sqrt{cs_0})}{y_0^2} - 1, & c > 0 \\ \frac{(\chi'(u_0))^2}{y_0^2} - 1, & c = 0 \\ (\chi'(u_0))^2 \frac{\cosh^2(\sqrt{-cs_0})}{y_0^2} - 1, & c < 0 \end{cases} \Rightarrow a_0(s_0, y_0) < 0$$

e

$$a_2(s_0, y_0) = \begin{cases} \frac{\sin^2(\sqrt{c}s_0)}{cy_0^2} \left\{ \left(\frac{\chi'(u_0)}{y_0} \right)^2 + 1 \right\}, & c > 0 \\ \frac{s_0^2}{y_0^2} \left\{ \left(\frac{\chi'(u_0)}{y_0} \right)^2 + 1 \right\}, & c = 0 \\ \frac{-\sin^2(\sqrt{-c}s_0)}{cy_0^2} \left\{ \left(\frac{\chi'(u_0)}{y_0} \right)^2 + 1 \right\}, & c < 0 \end{cases} \Rightarrow a_2(s_0, y_0) > 0.$$

Portanto $\Delta(s_0, y_0) = a_1(s_0, y_0)^2 - 4a_2(s_0, y_0)a_0(s_0, y_0) > 0$ e pela Proposição 3.6 existe uma hipersuperfície rotacional do tipo esférica com curvatura seccional constante c , para todo $c \in \mathbb{R}$, em $I \times_{\omega} \mathbb{R}^n$. Logo, concluímos a demonstração do item (i) deste teorema.

Caso 3: $\varepsilon = 1$, $c > 0$, tipo rotacional esférica.

Usando as Tabelas 3.1 e 3.2, neste caso o parâmetro u é dado por:

$$u = \frac{\Psi(s)}{\rho(\phi(s))} = \frac{\sin(\sqrt{c}s)}{\sqrt{c} \cos(\phi(s))}.$$

Temos que $v = \chi(u)$ fica bem definida num intervalo aberto I_0 de modo que $\cos(\phi(s)) \neq 0$ para todo $s \in I_0$. De (3-35), os coeficientes $a_0(s_0, y_0)$ e $a_2(s_0, y_0)$ são dados por

$$a_0(s_0, y_0) = \left(\frac{\chi'(u_0) \cos(\sqrt{c}s_0)}{\cos(y_0)} \right)^2 - 1$$

e

$$a_2(s_0, y_0) = \frac{\sin^2(\sqrt{c}s_0)}{\sqrt{c} \cos^2(y_0)} \left\{ (\chi'(u))^2 \tan^2(y_0) + 1 \right\}.$$

Escolhendo $s_0 \in I_0$ positivo suficientemente pequeno e considerando (3-38) podemos garantir que $a_2(s_0, y_0) > 0$. Por outro lado, observe que sendo \cos uma função decrescente para valores positivos e próximos de 0, podemos tomar $y_0 = \phi(s_0) < \sqrt{c}s_0$ de tal maneira que garantimos que $a_0(s_0, y_0) < 0$.

Logo, concluindo a demonstração do item (ii), pela Proposição 3.6 existe uma hipersuperfície rotacional do tipo esférica com curvatura seccional constante $c > 0$ em $I \times_{\omega} \mathbb{S}^n$, pois $\Delta(s_0, y_0) > 0$.

Assim como no item (i), dividiremos o item (iii) em dois casos: considerando o tipo rotacional parabólica no caso 4 e o tipo hiperbólica no caso 5.

Caso 4: $\varepsilon = -1$, $c < 0$, tipo rotacional parabólica.

Novamente pelas Tabelas 3.1 e 3.2, o parâmetro u é dado por:

$$u = \frac{\psi(s)}{\rho(\phi(s))} = \frac{\exp(\sqrt{-c}s)}{\phi(s)}.$$

Logo $v = \chi(u)$ fica bem definida num intervalo aberto I_0 tal que $\phi(s)$ são se anule. Suponha que I_0 contenha $s_0 = 0$ e escolha $0 < -c < y_0 = \phi(0)$.

Neste caso, a partir da condição (3-38) e de (3-35) e (3-36), os coeficientes $a_0(s_0, y_0)$ e $a_2(s_0, y_0)$ ficam

$$a_0(s_0, y_0) = \left(\frac{\chi'(u_0) \sqrt{-c} \exp(\sqrt{-c}s_0)}{y_0} \right)^2 - 1 = \left(\frac{\chi'(u_0) \sqrt{-c}}{y_0} \right)^2 - 1 < 0$$

e

$$a_2(s_0, y_0) = \frac{(\exp(\sqrt{-c}s_0))^2}{y_0^4} \{ (\chi'(u))^2 + 1 \} = \frac{1}{y_0^4} \{ (\chi'(u))^2 + 1 \} > 0.$$

Segue que $\Delta(s_0, y_0) > 0$ e pela Proposição 3.6 existe uma hipersuperfície rotacional do tipo parabólica com curvatura seccional constante $c < 0$ em $I \times_{\omega} \mathbb{H}^n$.

Caso 5: $\varepsilon = -1$, $c < 0$, tipo rotacional hiperbólica.

Neste caso as Tabelas 3.1 e 3.2 nos fornecem o parâmetro u dado por:

$$u = \frac{\psi(s)}{\rho(\phi(s))} = \frac{\cosh(\sqrt{-c}s_0)}{\sqrt{-c} \cosh(\phi(s))}.$$

Como \cosh é uma função positiva, então $v = \chi(u)$ fica bem definida em todo \mathbb{R} . Escolha novamente $s_0 = 0$ e $y_0 = \phi(0)$. Por (3-38) e (3-35) concluímos que

$$a_0(s_0, y_0) = \left(\frac{\chi'(u_0) \sinh(\sqrt{-c}s_0)}{\cosh(y_0)} \right)^2 - 1 = -1 < 0$$

e

$$a_2(s_0, y_0) = \frac{\cosh^2(\sqrt{-c}s_0)}{\cosh^2(y_0)} \{ (\chi'(u))^2 \tanh^2(y_0) + 1 \} = \frac{1}{\cosh^2(y_0)} > 0.$$

Portanto $\Delta(s_0, y_0) > 0$ e pela Proposição 3.6 existe uma hipersuperfície rotacional do tipo hiperbólica com curvatura seccional constante $c < 0$ em $I \times_{\omega} \mathbb{H}^n$ concluindo a

demonstração do item (iii).

Caso 6: $\varepsilon = -1$, $c = 0$, tipo rotacional parabólica.

Neste caso das Tabelas 3.1 e 3.2 temos que

$$u = \frac{\Psi(s)}{\rho(\phi(s))} = \frac{\Psi_0}{\phi(s)},$$

onde Ψ_0 é uma constante real. Desde que $\phi(s)$ não se anule, fica bem definida $v = \chi(u)$ em algum intervalo aberto I_0 . Escolha $s_0 \in I_0$ suponha que Ψ_0 seja não nula. Sendo assim, de (3-35) e de (3-36), temos que os coeficientes $a_0(s_0, y_0)$ e $a_2(s_0, y_0)$ satisfazem

$$a_0(s_0, y_0) = -1 < 0 \quad \text{e} \quad a_2(s_0, y_0) = \frac{\Psi_0^2}{y_0^4} \left\{ (\chi'(u))^2 + 1 \right\} > 0,$$

isto é, $\Delta(s_0, y_0) > 0$.

Finalmente, pela Proposição 3.6, concluímos a demonstração do item (iv) visto que existe uma hipersuperfície rotacional *flat* (de curvatura seccional identicamente nula) do tipo parabólica em $I \times_{\omega} \mathbb{H}^n$, concluindo também a demonstração do teorema. \square

No Teorema 3.4 vimos o fato que as hipersuperfícies rotacionais de $I \times \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$, além de possuírem seções verticais totalmente umbílicas, elas também possuem a T-propriedade. Vamos mostrar um resultado análogo para tais hipersuperfícies do produto torcido $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$.

Considere o difeomorfismo $G : I \rightarrow J = G(I)$ tal que $G = \frac{1}{\omega}$. É facilmente verificado que a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n &\rightarrow J \times \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n \\ (t, p) &\rightarrow (G(t), p) \end{aligned} \tag{3-39}$$

é um difeomorfismo conforme. Logo, do [15, Lema 3], uma hipersuperfície $\Sigma \subset I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ tem a T-propriedade se, e somente se, $\varphi(\Sigma) \subset J \times \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ tem a T-propriedade.

Além disso, como φ fixa pontualmente o segundo fator, uma seção vertical $\Sigma_t \subset \Sigma$ é totalmente umbílica em $(\{t\} \times \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n, ds_{\varepsilon}^2)$ se, e somente se, $\varphi(\Sigma_t) \subset \varphi(\Sigma)$ é totalmente umbílica em $(\{G(t)\} \times \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n, ds_{\varepsilon}^2)$. A partir do critério do Teorema 3.5 conclui-se que Σ é rotacional se, e somente se, $\varphi(\Sigma)$ é rotacional. Em suma, temos a seguinte proposição:

Proposição 3.8 *Para $n \geq 3$, seja $\Sigma \subset I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ uma hipersuperfície tendo a T-propriedade. Então Σ é rotacional se, e somente se, qualquer seção vertical $\Sigma_t \subset \Sigma$ é totalmente umbílica em $(\{t\} \times \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n, ds_{\varepsilon}^2)$.*

A partir da Proposição 3.8, é possível fornecer uma condição para que uma hipersuperfície trivial de $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ seja rotacional.

Teorema 3.9 *Para $n > 3$, seja $\Sigma \subset I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ uma hipersuperfície CSC na qual $(\beta \circ \xi)T$ nunca se anula. Então, Σ é rotacional.*

Prova. Como Σ é CSC, então é de Einstein e, pelo Lema 2.8, Σ tem a T-propriedade, isto é, T é uma de suas direções principais.

Sendo assim, considere $\{X_1, \dots, X_n\} \subset T\Sigma$ uma base ortonormal de direções principais de Σ com $X_1 = \frac{T}{|T|}$ correspondente a curvatura principal λ_1 . Considere também $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ as curvaturas principais correspondentes às direções principais verticais e c a curvatura seccional de Σ .

Da Equação de Gauss 2-13 e do tensor curvatura R de Σ dada em (2-12), obtemos que $\forall 2 \leq i, j \leq n$,

$$\begin{aligned} (\alpha \circ \xi) + c &= \lambda_i \lambda_j \\ (\alpha \circ \xi) + c &= \lambda_1 \lambda_i - (\beta \circ \xi) |T|^2. \end{aligned} \quad (3-40)$$

Suponha que, para algum $x \in \Sigma$, $(\alpha \circ \xi)(x) + c = 0$.

Da primeira igualdade em (3-40), $\lambda_i(x) = 0$, para algum $i \in \{2, \dots, n\}$. Mas, para tal i na segunda igualdade de (3-40), teríamos que $(\beta \circ \xi)T$ se anula em x , o que contraria a hipótese do teorema. Logo, $(\alpha \circ \xi) + c$ nunca se anula em Σ . Temos também $\lambda_i \neq 0$, para todo $i \in \{2, \dots, n\}$.

Desde que $n > 3$, podemos tomar $i \neq j \neq k \in \{2, \dots, n\}$ e, como a primeira igualdade de (3-40) não depende dos índices i, j e k , segue que

$$\lambda_i \lambda_j = \lambda_i \lambda_k \Rightarrow \lambda_j = \lambda_k.$$

Sendo assim, as últimas $n - 1$ curvaturas principais de Σ são iguais e não nulas. Consequentemente, da relação dada pelo Lema 2.10 entre as curvaturas principais de Σ e as curvaturas principais de uma seção vertical qualquer, temos que toda seção vertical $\Sigma_t \subset \Sigma$ é totalmente umbílica.

Portanto, da Proposição 3.8, Σ é rotacional. \square

Antes de finalizar este capítulo, vamos apresentar dois resultados importantes a respeito de $(\beta \circ \xi)T$. O primeiro deles é caracterizado pelos casos em esta função se anula em todo ponto de Σ e o segundo deles é quando tal função nunca se anula. Lembrando que neste último caso se Σ é uma hipersuperfície de Einstein conexa então Σ é **ideal** conforme a Definição 2.6. As hipersuperfícies ideais possuem propriedades interessantes e serão mais exploradas no capítulo seguinte.

Teorema 3.10 *Para $n \geq 3$, seja Σ uma hipersuperfície Λ -Einstein conexa de $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ tal que $(\beta \circ \xi)T$ se anula em Σ . Então $\alpha \circ \xi$ é constante. Além disso, definindo*

$$\sigma := \Lambda + (n - 1)(\alpha \circ \xi),$$

são válidas as seguintes afirmações:

- (i) Se $\sigma > 0$, Σ é trivial e totalmente umbílica (com função umbílica constante);
- (ii) Se $\sigma = 0$, Σ é trivial e seu operador shape tem posto no máximo 1;
- (iii) Se $\sigma < 0$, Σ é não trivial e tem precisamente duas curvaturas principais distintas com sinais opostos, ambas com multiplicidade constante ≥ 2 . Em particular, Σ tem curvatura média constante.

Prova. A partir da Observação 2.4 e da hipótese que $(\beta \circ \xi)T(x) = 0$, para todo $x \in \Sigma$, temos que

$$(\alpha \circ \xi)_*(x) = \alpha'(\xi(x))\xi_*(x) = \frac{2\omega'(\xi(x))}{\omega(\xi(x))}\beta(\xi(x))T(x) = 0.$$

Ou seja, pela conexidade de Σ , $\alpha \circ \xi$ é constante em Σ .

Agora, considere $\{X_1, \dots, X_n\}$ uma base ortonormal de direções principais de Σ com suas respectivas curvaturas principais associadas $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. De (2-12), o tensor curvatura de $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ fica

$$\langle \bar{R}(X_i, X_k)X_k, X_i \rangle = -\alpha \circ \xi, \quad (3-41)$$

para todo $i \neq k \in \{1, \dots, n\}$, onde denotaremos $\alpha \circ \xi$ apenas por α . Sendo assim, substituindo (3-41) em (1-7), o tensor de Ricci de Σ é dado por

$$Ric(X_i, X_j) = \sum_{k=1}^n \langle \bar{R}(X_i, X_k)X_k, X_i \rangle + H\delta_{ij}\lambda_i - \delta\lambda_i^2 = -(n-1)\alpha + H\delta_{ij}\lambda_i - \delta\lambda_i^2, \quad (3-42)$$

onde H é o traço do operador shape A de Σ .

Por outro lado, sendo Σ Λ -Einstein, da Definição 1.10 temos que

$$Ric(X_i, X_j) = \Lambda \langle X_i, X_j \rangle. \quad (3-43)$$

Logo, juntando (3-42) e (3-43) e usando a definição de σ no enunciado do teorema, temos que para todo $i = j$ vale $\lambda_i^2 - H\lambda_i + \Lambda + (n-1)\alpha = \lambda_i^2 - H\lambda_i + \sigma = 0$. Ou seja, toda curvatura principal de Σ é raiz da equação do segundo grau

$$s^2 - Hs + \sigma = 0. \quad (3-44)$$

Como consequência, Σ tem no máximo duas curvaturas principais distintas. Sejam elas λ e μ . Podemos considerar que, para algum $k \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda = \lambda_1 = \dots = \lambda_k$ e $\mu = \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n$. Como λ e μ são raízes de (3-44), então satisfazem

$$\begin{cases} \lambda + \mu = H \\ \lambda\mu = \sigma \end{cases}$$

Ou ainda, como $H = k\lambda + (n-k)\mu$, o sistema acima fica

$$\begin{cases} (k-1)\lambda + (n-k-1)\mu = 0 \\ \lambda\mu = \sigma \end{cases} \quad (3-45)$$

(i) **Caso $\sigma > 0$.**

Da segunda equação de (3-45), se $\lambda \neq \mu$ em algum ponto de Σ , λ e μ possuem os mesmos sinais e são não nulas. Isso na primeira equação resulta que $k-1 = 0$ e $n-k-1 = 0$. Logo, $k = 1$ e $n = k+1 = 2$, na qual é uma contradição, pois estamos considerando $n \geq 3$. Portanto, $\lambda = \mu$ em todo ponto, isto é, Σ é totalmente umbílica. Em particular, $\lambda^2 = \sigma$, ou seja, λ é constante em Σ .

Além disso, de (3-41), a equação de Gauss de Σ (2-13) fica

$$\langle R(X_i, X_j)X_j, X_i \rangle = \lambda^2 - \alpha.$$

Substituindo a igualdade acima em (1-2), a curvatura seccional de Σ é dada por $K(X_i, X_j) = \lambda^2 - \alpha$ e, como α e λ são constantes, Σ é trivial (CSC).

(ii) **Caso $\sigma = 0$.**

Da segunda equação de (3-45), $\lambda = 0$ ou $\mu = 0$. Suponha $\mu = 0$. Neste caso, $H = k\lambda$. Por outro lado, λ é solução de (3-44), isto é, $\lambda^2 + k\lambda^2 = 0$. Se $\lambda \neq 0$, então sua multiplicidade é necessariamente $k = 1$. Portanto o operador shape de Σ tem posto no máximo 1.

Além disso, para todo $i \neq j$, a equação de Gauss de Σ nos dá

$$\langle R(X_i, X_j)X_j, X_i \rangle = -\alpha$$

e, portanto, Σ tem curvatura seccional constante igual à $-\alpha$.

(iii) **Caso $\sigma < 0$.**

Neste caso, da segunda equação de (3-45), temos que λ e μ são não nulas e com sinais opostos (são necessariamente distintas). Suponha que $k = 1$. Da primeira equação temos que $n = k+1 = 2$, já que $\mu \neq 0$. Mas isso contradiz a hipótese de que $n \geq 3$. Logo,

$k > 1$ e $n - k > 1$, isto é, λ e μ possuem multiplicidades maiores ou iguais a 2.

Por outro lado, como λ e μ são funções diferenciáveis, então por (3-45), k também é diferenciável. Mas, desde que k é uma função discreta com valores em $\{2, \dots, n - 2\}$, segue que k é constante. Portanto λ e μ possuem multiplicidades constantes em Σ . Segue que a curvatura média de Σ é constante, pois é dada por $\frac{k\lambda + (n-k)\mu}{n}$.

Mostremos então que Σ é não trivial. Desde que ambas as curvaturas (distintas) possuem multiplicidades ≥ 2 em todo ponto, então podemos tomar pares ortonormais de direções principais $\{X_1, X_2\}$ e $\{Y_1, Y_2\}$ tais que $AX_i = \lambda X_i$ e $AY_i = \mu Y_i$ ($i = 1, 2$). Analogamente como fizemos no caso (i), temos que

$$K(X_1, X_2) = \lambda^2 - \alpha \neq \mu^2 - \alpha = K(Y_1, Y_2).$$

Seque que Σ não possui curvatura seccional constante (não é trivial). \square

Antes do próximo teorema, vamos lembrar de alguns resultados clássicos. Uma variedade Riemanniana M^{n+1} é dita conformemente *flat* se é localmente conforme ao espaço Euclidiano (ver Definição 1.3). As variedades Riemannianas CSC são conhecidas por serem conformemente *flat*. Por outro lado, qualquer variedade de Einstein conformemente *flat* é CSC.

Outro resultado, na qual usaremos na prova do Teorema (3.11), é que, para $n \geq 4$, qualquer hipersuperfície de uma variedade \bar{M}^{n+1} conformemente *flat* é também conformemente *flat* se, e somente se, possui uma curvatura principal de multiplicidade $n - 1$ [6, capítulo 16].

Teorema 3.11 *Para $n > 3$, seja Σ uma hipersuperfície de Einstein ideal de $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$. Então Σ tem a T-propriedade. Além disso, são equivalentes:*

- (i) Σ é trivial;
- (ii) Qualquer seção vertical Σ_t de Σ é totalmente umbílica;
- (iii) Σ é rotacional.

Prova. Sendo Σ ideal de Einstein, segue do Lema 2.8 que Σ possui a T-propriedade. Além disso, pela Proposição 3.8, (ii) é equivalente à (iii) e, pelo Teorema 3.9, (i) implica em (iii). Mostremos então que (ii) implica em (i).

Sendo Σ Λ -Einstein com a T-propriedade, segue do Lema 2.9 que qualquer curvatura principal λ_i de Σ , com $i \in \{2, \dots, n\}$, é raiz em s de

$$s^2 - Hs + (\beta \circ \xi)|T|^2 + (n - 1)(\alpha \circ \xi) + \Lambda = 0.$$

Portanto Σ possui no máximo duas curvaturas principais distintas além de λ_1 associada à direção principal T . Sejam elas λ e μ e suponha que exista $k \in \{2, \dots, n\}$ tal que

$$\lambda_2 = \dots = \lambda_k = \lambda \quad \text{e} \quad \mu_{k+1} = \dots = \mu_n = \mu.$$

Do Lema 2.10, para cada seção vertical Σ_t de Σ , as curvaturas principais λ_t^i e μ_t^j de Σ_t (com $i \in \{2, \dots, k\}$ e $j \in \{k+1, \dots, n\}$) satisfazem

$$\lambda_t^i = -\frac{\omega(t)}{|T|} \left(\lambda + \frac{\theta\omega'(t)}{\omega(t)} \right) \quad \text{e} \quad \mu_t^j = -\frac{\omega(t)}{|T|} \left(\mu + \frac{\theta\omega'(t)}{\omega(t)} \right). \quad (3-46)$$

Isto é, Σ_t também possui no máximo duas curvaturas principais distintas $\lambda_t^2 = \dots = \lambda_t^k = \lambda_t$ e $\mu_t^{k+1} = \dots = \mu_t^n = \mu_t$. Mas, como por hipótese toda seção vertical de Σ é totalmente umbílica, então $\lambda_t = \mu_t$, para todo $t \in I$.

Portanto das relações em (3-46), temos que $\lambda = \mu$ em todo ponto de Σ , ou seja, Σ possui uma curvatura principal de multiplicidade $n - 1$. Das considerações feitas logo antes do enunciado do teorema, como $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ é conformemente *flat* (segue direto da definição da métrica torcida), temos que Σ também a é. Isso somado com o fato de também ser uma hipersuperfície de Einstein resulta que Σ é trivial, concluindo a demonstração. \square

Hipersuperfícies paralelas

Seja $g : M^{n-1} \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n$ uma hipersuperfície orientada com o campo normal unitário denotado por η . A hipersuperfície paralela à $g(M)$ com distância $s \in \mathbb{R}$ é a aplicação $g_s : M \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n$ na qual associa à cada $p \in M$ o ponto $g_s(p)$ obtido viajando à uma distância s ao longo da geodésica em \mathbb{Q}_ε^n com ponto inicial $g(p)$ e vetor tangente inicial $\eta_p = \eta(p)$ (ver [5] e [11]). Em [4] e [5] os autores explicitam tal geodésica com as condições mencionadas anteriormente em cada forma espacial e são dadas por:

$$\begin{cases} g_s(p) = g(p) + s\eta_p, & \text{se } \varepsilon = 0; \\ g_s(p) = \cos(s)g(p) + \sin(s)\eta_p, & \text{se } \varepsilon = 1; \\ g_s(p) = \cosh(s)g(p) + \sinh(s)\eta_p, & \text{se } \varepsilon = -1. \end{cases} \quad (4-1)$$

Localmente, para s suficientemente pequeno, g_s também é uma hipersuperfície imersa. Entretanto, se considerarmos g uma imersão de M em uma variedade diferenciável \bar{M} qualquer, nem sempre g_s é subvariedade de \bar{M} pois pode conter singularidades em pontos focais da hipersuperfície original $g(M)$, que são pontos $q = g_s(p)$ em que a diferencial $(g_s)_*$ tem nulidade maior que zero em p (ver [5],[10]).

Equivalentemente, neste contexto, temos que um ponto focal também é um ponto crítico da aplicação exponencial normal e também um ponto conjugado de \bar{M} (Definição 1.13). Logo, supondo que exista um aberto \mathcal{U} de $(TM)^\perp$ sem pontos focais de g , a restrição da aplicação exponencial $exp_M^\perp|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \rightarrow M$ é um difeomorfismo sobrejetor sobre sua imagem $exp_M^\perp(\mathcal{U})$. Daqui em diante estaremos identificando M com $g(M)$, por abuso de notação.

Sendo $\bar{M} = \mathbb{Q}_\varepsilon^n$, existe um intervalo I_0 contendo 0 de tal forma que, para todo $s \in I_0$ e para todo $p \in M$, a curva

$$\gamma_p(s) = exp(g(p), s\eta_p)$$

é uma geodésica bem definida em \mathbb{Q}_ε^n sem pontos conjugados (Exemplo 1.14). Logo, para

cada $s \in I_0$, a paralela

$$\begin{aligned} g_s : M &\rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n \\ p &\mapsto \gamma_p(s) \end{aligned}$$

é, de fato, uma imersão já que $(g_s)_*$ é injetiva, pois possui posto máximo em todo ponto.

Um método bastante útil para estudar o comportamento geométrico de uma subvariedade movida ao longo de direções normais é utilizar a teoria de campos de Jacobi. Para mais detalhes desse método ver [1] e [10].

Nosso objetivo agora é, fixado $r \in I_0$, determinar o operador shape da paralela $g_r(M) = M_r$ para então conseguirmos determinar suas curvaturas principais λ_i^r , visto que estas nos serão úteis mais adiante. Para isso, considere $F(s, t) = \gamma_s(t)$ o variacional geodésico de $\gamma_p = \gamma_0$ tal que $c(s) = F(s, 0) = \gamma_s(0) \in M$ e $\eta(s) = \gamma'_s(0) \in (T_{\gamma_s(0)}M)^\perp$.

Observe que $F(s, t) = \exp(g(p), t\eta(s))$ é a variação constituída de geodésicas de \mathbb{Q}_ε^n que intersectam M perpendicularmente. Seja J o campo de Jacobi ao longo de γ_p correspondente ao campo variacional de F , isto é,

$$J(s) = \frac{\partial F}{\partial t}(s, 0)$$

na qual é determinado pelo PVI

$$\begin{cases} \frac{D^2 J}{ds^2} + R(J, \gamma'_p)\gamma'_p = 0 \\ J(0) = c'(0) \\ \frac{DJ}{ds}(0) = \nabla_{J(0)}\eta(0) \end{cases},$$

onde R é a curvatura de M e ∇ é a conexão riemanniana de \mathbb{Q}_ε^n . Em particular, um campo de Jacobi J como acima satisfazendo as condições $J'(0) \in T_pM$ e $\frac{DJ}{ds}(0) + \nabla_{J(0)}\eta(0) \in (T_pM)^\perp$ é chamado de campo M -Jacobi ao longo de γ_p (ver [10, Capítulo 1.3]).

Dessa forma, para cada $r \in I_0$, temos

$$T_{\gamma_p(r)}M_r = \{J(r); J \text{ é um campo } M\text{-Jacobi ao longo de } \gamma_p\} \quad \text{e} \quad A_r J(r) = - \left(\frac{DJ}{ds}(r) \right)^T, \quad (4-2)$$

onde A_r é o operador shape de M_r com respeito ao campo normal $\eta(r) = \gamma'_r(0)$ e a projeção tangencial é com respeito ao espaço tangente de M_r .

Podemos expressar o operador shape A_r de uma maneira ainda mais eficiente.

Para cada $X \in T_p M$, denote por J_X o campo M -Jacobi em γ_p dado por

$$\begin{cases} J_X(0) = X \\ \frac{DJ_X}{ds}(0) = -AX \end{cases},$$

onde A é o operador shape de M com respeito ao campo normal η . Agora defina $D(r)$ por $D(r)(g_r)_*X = J_X(r)$, na qual $(g_r)_*$ é calculado em p . Em particular, o espaço tangente $(g_r)_*(T_p M)$ de g_r em p é o transporte paralelo de $T_p M$ ao longo de γ_p de 0 à r .

Observe que da maneira como o definimos, D é o campo tensorial com valor final em $\{\gamma'_p\}^\perp$ ao longo de γ determinado por

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 D}{\partial s^2} + R(v, \gamma'_p)\gamma'_p \circ D = 0, \\ D(0) = I, \\ \frac{\partial D}{\partial s}(0) = -A, \end{cases} \quad (4-3)$$

onde I é a aplicação identidade em $T_p M$ e $v \in \{\gamma'_p\}^\perp$. De (4-2), temos

$$A_r D(r)(g_r)_*X = A_r J_X(r) = -\left(\frac{DJ_X}{ds}(r)\right)^T = -\frac{\partial D}{\partial s}(r)(g_r)_*X.$$

Desde que M não possui pontos focais em γ_p , o endorfismo D é não singular. Portanto, por simplicidade de notação, denotando $\frac{\partial D}{\partial s} = D'$, podemos escrever

$$A_r = -D'(r)D^{-1}(r). \quad (4-4)$$

Note que, de (4-1) temos

$$(g_r)_*X = C_\varepsilon(r)X + S_\varepsilon(r)\nabla_X \eta_p = (C_\varepsilon(r)I - S_\varepsilon(r)A)X,$$

onde

$$C_\varepsilon(r) = \begin{cases} 1, & \text{se } \varepsilon = 0 \\ \cos(r), & \text{se } \varepsilon = 1 \\ \cosh(r), & \text{se } \varepsilon = -1 \end{cases} \quad \text{e} \quad S_\varepsilon = \begin{cases} r, & \text{se } \varepsilon = 0 \\ \sin(r), & \text{se } \varepsilon = 1 \\ \sinh(r), & \text{se } \varepsilon = -1. \end{cases} \quad (4-5)$$

Logo, podemos expressar $D(r) = C_\varepsilon(r)I - S_\varepsilon(r)A$ e é imediato verificar que D satisfaz (4-3) [11, Lema 2.4]. Em particular, observe que as funções C_ε e S_ε satisfazem $C'_\varepsilon = -\varepsilon S_\varepsilon$ e $S'_\varepsilon = C_\varepsilon$.

Finalmente, considere $X_i \in T_p M$ uma direção principal de g com curvatura

principal λ_i . Desde que

$$D'(r) = -\varepsilon S_{\varepsilon}(r)I - C_{\varepsilon}(r)A,$$

segue que

$$\begin{aligned} A_r(g_r)_*X_i &= -D'(r)D^{-1}(g_r)_*X_i \\ &= (\varepsilon S_{\varepsilon}(r)I + C_{\varepsilon}(r)A)(C_{\varepsilon}(r)I - S_{\varepsilon}(r)A)^{-1}(g_r)_*X_i \\ &= \frac{\varepsilon S_{\varepsilon}(r) + C_{\varepsilon}(r)\lambda_i}{C_{\varepsilon}(r) - S_{\varepsilon}(r)\lambda_i}(g_r)_*X_i. \end{aligned}$$

Portanto, o transporte $(g_r)_*X_i$ é uma direção principal de M_r cuja curvatura principal associada é

$$\lambda_i^r(p) = \frac{\varepsilon S_{\varepsilon}(r) + C_{\varepsilon}(r)\lambda_i}{C_{\varepsilon}(r) - S_{\varepsilon}(r)\lambda_i}. \quad (4-6)$$

4.1 Gráficos de Einstein em $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$

Nesta seção vamos definir e estudar uma segunda propriedade fundamental de [13], as chamadas hipersuperfícies do tipo (ϕ, g_s) -gráfico.

Definição 4.1 *Seja $\phi : I \rightarrow \phi(I) \subset \mathbb{R}$ um difeomorfismo crescente ($\phi' > 0$). Com as notações acima, chamaremos*

$$\Sigma = \{(\phi(s), g_s(p)) \in I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n ; p \in M, s \in I\} \quad (4-7)$$

de gráfico determinado por ϕ e por $\{g_s ; s \in I\}$ ou apenas de (ϕ, g_s) -gráfico.

Observação 4.2 *Observe que em (4-7) estamos identificando I com $\phi(I)$, pois o parâmetro s está sendo tomado em I .*

Seja $\Sigma \subset I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ um (ϕ, g_s) -gráfico com a norma induzida de $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$. Dado $x \in \Sigma$ qualquer, o espaço tangente $T_x\Sigma$ pode ser decomposto como a soma direta

$$T_x\Sigma = (g_s)_*(T_pM) \oplus [\partial_s],$$

onde $[\partial_s]$ é o subespaço gerado por

$$\partial_s = \eta_s + \phi'(s)\partial_t,$$

com η_s sendo um campo normal unitário de g_s . De fato, $(g_s)_*(T_pM)$ é o espaço tangente em $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ de dimensão $n - 1$, sobrando duas direções em $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$: a direção normal η_s e

a direção do primeiro fator ∂_t . Além disso no gradiente da função altura de Σ aparece o fator ϕ' pois, pela Regra da Cadeia,

$$\xi_*(x) = \xi_*(\phi(s), g_s(p))\phi'(s) = \xi_*(x)\phi'(s) = \phi'(s)\partial_t.$$

Dado um campo qualquer $X \in T_x\Sigma$ e escrevendo $X = X_0 + k(\eta_s + \phi'\partial_t) = X_0 + k\partial_s$, com $X_0 \in (g_s)_*(T_pM_0)$ e k uma constante, temos que

$$\left\langle X, -\frac{\phi'}{\omega^2}\eta_s + \partial_t \right\rangle = k\phi' \langle \partial_t, \partial_t \rangle_I - \left(\frac{\phi'}{\omega^2} \right) \omega^2 \langle X_0 + k\eta_s, -\eta_s \rangle_{\varepsilon} = k\phi' - k\phi' = 0,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_I$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\varepsilon}$ denotam as métricas em I e $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$, respectivamente, e por abuso de notação escrevemos $\omega \circ \phi = \omega$. A igualdade acima nos dá que $-\frac{\phi'}{\omega^2}\eta_s + \partial_t$ é uma direção normal à $T_x\Sigma$. Além disso, sua norma é dada por

$$\sqrt{\left\langle -\frac{\phi'}{\omega^2}\eta_s + \partial_t, -\frac{\phi'}{\omega^2}\eta_s + \partial_t \right\rangle} = \sqrt{\langle \partial_t, \partial_t \rangle_I + \frac{(\phi')^2}{\omega^4} \omega^2 \langle \eta_s, \eta_s \rangle_{\varepsilon}} = \sqrt{1 + \left(\frac{\phi'}{\omega} \right)^2}.$$

Portanto, o campo normal unitário de Σ é dado por

$$N = \frac{-\left(\frac{\phi'}{\omega}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\phi'}{\omega}\right)^2}} \eta_s + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\phi'}{\omega}\right)^2}} \partial_t.$$

Observe que a função ângulo de Σ é dada por:

$$\theta = \langle N, \partial_t \rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\phi'}{\omega}\right)^2}}. \quad (4-8)$$

Assim, considerando $\rho = \frac{\phi'}{\omega}\theta$, o campo N pode ser escrito como

$$N = -\frac{\rho}{\omega}\eta_s + \theta\partial_t. \quad (4-9)$$

Note que $\rho^2 + \theta^2 = 1$ e, portanto, $\rho^2 = 1 - \theta^2 = |T|^2$, sendo T o gradiente da função altura de Σ . Também, ao olhar para θ como uma função que só depende de s , podemos escrever:

$$\begin{aligned} \theta' = \partial_s(\theta) &= -\frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{\phi'}{\omega} \right)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} 2 \left(\frac{\phi'}{\omega} \right) \left(\frac{\phi'}{\omega} \right)' = -\theta^3 \left(\frac{\rho}{\theta} \right) \left(\frac{\rho}{\theta} \right)' \\ &= -\theta^2 \rho \left(\frac{\rho'\theta - \rho\theta'}{\theta^2} \right) = -\rho\rho'\theta + \rho^2\theta'. \end{aligned}$$

Segue que

$$\theta' = -\frac{\rho\rho'\theta}{1-\rho^2} = -\frac{\rho\rho'\theta}{\theta^2} = -\frac{\rho\rho'}{\theta} = -\frac{\phi'\rho'}{\omega}. \quad (4-10)$$

Vale ressaltar que, em (4-10), estamos considerando θ como uma função real e seu gradiente, na qual é dado de maneira geral por (2-11), pode ser expresso por $\theta'\partial_s$.

Vamos mostrar que ∂_s é uma direção principal de Σ . Considere A o operador shape de Σ com respeito ao normal unitário N dado em (4-9). Assim, pelas propriedades da conexão de Levi-Civita $\bar{\nabla}$ de $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ temos

$$A\partial_s = -\bar{\nabla}_{\partial_s}N = -\bar{\nabla}_{\partial_s}\left(-\frac{\rho}{\omega}\eta_s + \theta\partial_t\right) = \frac{\rho}{\omega}\bar{\nabla}_{\partial_s}\eta_s + \partial_s\left(\frac{\rho}{\omega}\right)\eta_s - \theta\bar{\nabla}_{\partial_s}\partial_t - \partial_s(\theta)\partial_t. \quad (4-11)$$

Novamente, utilizando o abuso de notação $\omega \circ \phi = \omega$ e as identidades da Proposição 2.1, como $\eta_s \in T\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$, segue que

$$\bar{\nabla}_{\partial_s}\eta_s = \bar{\nabla}_{(\eta_s + \phi'\partial_t)}\eta_s = \bar{\nabla}_{\eta_s}\eta_s + \bar{\nabla}_{\phi'\partial_t}\eta_s = \nabla_{\eta_s}\eta_s - \frac{\omega'}{\omega}\langle\eta_s, \eta_s\rangle\partial_t + \frac{\omega'}{\omega}\eta_s,$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$. Observe que, como $\eta_s = \gamma'(s)$ e γ é uma geodésica em $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$, segue que $\nabla_{\eta_s}\eta_s = 0$, já que é a derivada covariante de η_s na direção de η_s . Logo, sendo η_s unitário, temos

$$\bar{\nabla}_{\partial_s}\eta_s = -\omega'\omega\partial_t + \frac{\omega'}{\omega}\eta_s. \quad (4-12)$$

Ainda, temos que

$$\bar{\nabla}_{\partial_s}\partial_t = \bar{\nabla}_{(\eta_s + \phi'\partial_t)}\partial_t = \bar{\nabla}_{\eta_s}\partial_t + \bar{\nabla}_{\phi'\partial_t}\partial_t = \frac{\omega'}{\omega}\eta_s. \quad (4-13)$$

Por outro lado, como $\frac{\rho}{\omega}$ e θ só dependem de s , temos que

$$\partial_s\left(\frac{\rho}{\omega}\right) = \left(\frac{\rho}{\omega}\right)' \quad \text{e} \quad \partial_s(\theta) = \theta' = -\frac{\phi'\rho'}{\omega}. \quad (4-14)$$

Portanto, substituindo (4-12), (4-13) e (4-14) em (4-11), obtemos

$$\begin{aligned}
 A\partial_s &= \frac{\rho}{\omega} \left(-\omega' \omega \partial_t + \frac{\omega'}{\omega} \eta_s \right) + \left(\frac{\rho}{\omega} \right)' \eta_s - \theta \frac{\omega'}{\omega} \eta_s + \frac{\phi' \rho'}{\omega} \partial_t \\
 &= \left(\frac{\rho \omega'}{\omega^2} + \frac{\rho' \omega - \rho \omega'}{\omega^2} - \theta \frac{\omega'}{\omega} \right) \eta_s + \left(\frac{\phi' \rho'}{\omega} - \rho \omega' \right) \partial_t \\
 &= \left(\frac{\rho'}{\omega} - \theta \frac{\omega'}{\omega} \right) \eta_s + \left(\frac{\phi' \rho'}{\omega} - \frac{\phi' \theta}{\omega} \omega' \right) \partial_t \\
 &= \left(\frac{\rho'}{\omega} - \theta \frac{\omega'}{\omega} \right) (\eta_s + \phi' \partial_t) = \left(\frac{\rho'}{\omega} - \theta \frac{\omega'}{\omega} \right) \partial_s. \tag{4-15}
 \end{aligned}$$

Portanto, ∂_s é uma direção principal de Σ . Escrevendo $\zeta = \frac{\omega'}{\omega}$, a curvatura principal associada à ∂_s é dada por

$$\lambda_1 = \frac{\rho'}{\omega} - \theta \zeta.$$

Proposição 4.3 *Seja Σ um (ϕ, g_s) -gráfico em $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ com normal unitário N dado pela métrica induzida, como em (4-9). Então Σ tem a T -propriedade e suas curvaturas principais são dadas por*

$$\lambda_1 = \frac{\rho'(s)}{\omega(\phi(s))} - \theta(s) \zeta(\phi(s)), \quad \lambda_i = -\frac{\rho(s)}{\omega(\phi(s))} \lambda_i^s(p) - \theta(s) \zeta(\phi(s)), \quad i = 2, \dots, n,$$

onde θ é dado por (4-8), $\zeta \circ \phi = \frac{(\omega \circ \phi)'}{\omega \circ \phi}$ e $\lambda_i^s(p)$ é a i -ésima curvatura principal da paralela $g_s : M_0 \rightarrow \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ em $p \in M_0$.

Prova. Inicialmente, temos que

$$\begin{aligned}
 T &= \partial_t - \theta N = \partial_t - \theta \left(-\frac{\rho}{\omega} \eta_s + \theta \partial_t \right) \\
 &= (1 - \theta^2) \partial_t + \frac{\rho \theta}{\omega} \eta_s = \rho^2 \partial_t + \frac{\rho^2}{\phi'} \eta_s = \frac{\rho^2}{\phi'} (\phi' \partial_t + \eta_s) = \frac{\rho^2}{\phi'} \partial_s.
 \end{aligned}$$

Além disso, desde que $\phi' > 0$, então $\theta < 1$. Segue que $|T|^2 = 1 - \theta^2 > 0$. Portanto, T é não nulo e paralelo à ∂_s e, de (4-15), T é uma direção principal de Σ com curvatura principal associada dada por

$$\lambda_1 = \frac{\rho'}{\omega} - \theta \zeta.$$

Por outro lado, as outras curvaturas principais λ_i ($i = 2, \dots, n$) de Σ seguem diretamente do Lema 2.10, visto que as i -ésimas direções principais de Σ também são direções principais de suas seções verticais $\Sigma_s = \Sigma_{\phi(s)}$ com curvaturas principais

associadas dadas por

$$\lambda_i^s = -\frac{\omega}{|T|} \left(\lambda_i + \theta \frac{\omega'}{\omega} \right) = -\frac{\omega}{\rho} (\lambda_i + \theta \zeta).$$

□

Como vimos no final da seção anterior, de (4-6), as curvaturas principais da paralela g_s são dadas por

$$\lambda_i^s(p) = \frac{\varepsilon S_{\varepsilon}(s) + C_{\varepsilon}(s) \lambda_i^0(p)}{C_{\varepsilon}(s) - S_{\varepsilon}(s) \lambda_i^0(p)}, \quad (4-16)$$

onde $\lambda_i^0(p)$ é a i -ésima curvatura principal de $g = g_0$ em p e as funções C_{ε} e S_{ε} são dadas em (4-5).

É imediato observar que as curvaturas λ_1 e λ_i^s satisfazem:

$$\lambda_1 = -\frac{\theta}{\phi'} \frac{d}{ds} \ln(\theta\omega) \quad e \quad \frac{d}{ds} \lambda_i^s(p) = \varepsilon + \lambda_i^s(p)^2. \quad (4-17)$$

Em contrapartida com a Proposição 4.3, em [19], o autor mostrou que para o produto usual $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$, qualquer hipersuperfície com a T -propriedade, com a função ângulo constante e não nula, é essencialmente um (ϕ, g_s) -gráfico. Mais adiante, no Teorema 4.9, vamos generalizar esse resultado para o produto torcido. A menos de notações, as demonstrações abaixo são as mesmas apresentadas em [19].

Convém demarcarmos algumas relações já feitas anteriormente, agora no contexto do produto usual (neste caso, temos que $\omega' = 0$).

Dada uma hipersuperfície $f : M^n \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$, sejam T o gradiente de sua função altura, θ sua função ângulo, N seu campo normal unitário e A seu operador shape com respeito à N .

Para todo campo $X \in TM$, considere a decomposição $X = x\partial_t + X_{\varepsilon}$, onde x é uma função diferenciável e X_{ε} é o levantamento de X em $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$. Das identidades da Proposição 2.1, temos que

$$\bar{\nabla}_X \partial_t = x \bar{\nabla}_{\partial_t} \partial_t + \bar{\nabla}_{X_{\varepsilon}} \partial_t = 0.$$

Logo, $\bar{\nabla}_X \partial_t = 0$, para todo $X \in TM$. Assim, diferenciando $\partial_t = f_* T + \theta N$, obtemos

$$\bar{\nabla}_X T = -\bar{\nabla}_X \theta N = \theta AX. \quad (4-18)$$

Note ainda que, a partir de (2-10), temos que para todo $X \in TM$

$$X(\theta) = -\langle AX, T \rangle. \quad (4-19)$$

Agora, denotando por η o campo normal unitário apontando para fora de $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ em \mathbb{E}^{n+2} (espaço Euclidiano, se $\varepsilon = 0, 1$, ou espaço de Lorentz, se $\varepsilon = -1$) ao longo de f e A_{η} o correspondente operador shape, então

$$A_{\eta} T = -\theta^2 T \quad \text{e} \quad A_{\eta} X = -X, \quad \text{para todo } X \in \{T\}^{\perp}. \quad (4-20)$$

Convém enunciar o seguinte lema que utilizaremos na demonstração do Teorema 4.5. Primeiro, observe que para qualquer campo gradiente T em TM temos a seguinte relação: denotando por F uma função diferenciável talque $\bar{\nabla} F = T$, da simetria da hessiana (1-9), obtemos

$$\langle \bar{\nabla}_X T, Y \rangle = \langle \bar{\nabla}_X \bar{\nabla} F, Y \rangle = H^F(X, Y) = H^F(Y, X) = \langle X, \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla} F \rangle = \langle X, \bar{\nabla}_Y T \rangle, \quad (4-21)$$

para todo $X, Y \in TM$.

Lema 4.4 *Seja T é um campo gradiente qualquer em TM . Se $|T|$ é constante ao longo da distribuição ortogonal $\{T\}^{\perp}$ então as curvas integrais de T são pré-geodésicas de M .*

Prova. Desde que T é um campo gradiente, de (4-21), temos que para todo $X \in \{T\}^{\perp}$,

$$\langle \bar{\nabla}_T T, X \rangle = \langle \bar{\nabla}_T X, T \rangle = \frac{1}{2} X \langle T, T \rangle = \frac{1}{2} X (|T|^2) = 0,$$

já que $|T|$ é constante ao longo de X . Ainda, desde que T é o campo gradiente da função altura, segue que sua distribuição ortogonal $\{T\}^{\perp}$ é integrável. Assim, a relação acima nos diz que as curvas integrais de T são geodésicas em M . \square

Teorema 4.5 *Qualquer hipersuperfície $f : M^n \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$, com $n \geq 2$, na qual a função ângulo nunca se anula e que possui a T -propriedade é localmente um (ϕ, g_s) -gráfico.*

Prova. Desde que $\{T\}^{\perp}$ é integrável, existe um difeomorfismo local $\psi : I_0 \times M^{n-1} \rightarrow M^n$, onde I_0 é um intervalo aberto contendo 0, tal que:

- (i) $\psi(\cdot, x) : I_0 \rightarrow M^n$ são curvas integrais de T para qualquer $x \in M^{n-1}$;
(ii) $\psi(s, \cdot) : M^{n-1} \rightarrow M^n$ são folhas de $\{T\}^{\perp}$ para todo $s \in I_0$.

Em particular, de (ii) temos que, para todo $X \in TM^{n-1}$, $\psi_*X \in \{T\}^{\perp}$. Definina $F = f \circ \psi$ e considere uma curva c em M^{n-1} tal que $c'(0) = X$. Dessa forma,

$$X \langle F, \partial_t \rangle = \left\langle \frac{\partial F}{\partial u}(c(u)) \Big|_{u=0}, \partial_t \right\rangle = \langle f_* \circ \psi_*(c'(0)), f_*T + \theta N \rangle = \langle \psi_*X, T \rangle = 0.$$

Portanto, $\langle F(s, x), \partial_t \rangle = v(s)$ é uma função suave que depende apenas de s , pois é constante em $\{T\}^{\perp}$.

Por outro lado, como T é uma direção principal, então de (4-19), para todo $X \in \{T\}^{\perp}$ temos

$$X(\theta) = -\langle AT, X \rangle = -\lambda \langle T, X \rangle = 0,$$

onde λ é a curvatura principal associada à T . Desde que $|T|$ é uma θ -função, a partir de $|T|^2 = 1 - \theta^2$, segue que tanto θ quanto $|T|$ são constantes ao longo de $\{T\}^{\perp}$. Sendo assim, do Lema (4.4) as curvas integrais $\gamma = \psi(\cdot, x)$ de T são pré-geodésicas de M^n , isto é, suas reparametrizações por comprimento de arco são geodésicas de M^n .

Afirmção: Considerando π_{ε} a projeção vertical de $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$, afirmamos que $\pi_{\varepsilon} \circ F(\cdot, x) : I_0 \rightarrow \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ é uma pré-geodésica de $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$. Por uma questão de conveniência, verificaremos essa afirmação mais adiante.

Por agora, observe que desde que $|T|$ e θ são constantes ao longo de $\{T\}^{\perp}$, então para todo ponto $\psi(s, x) = p \in M^n$, a função $r : I_0 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $r(s) = |T|\theta(p)$ é uma função suave bem desinida para todo $s \in I_0$.

Sejam $\varphi : I_0 \rightarrow \mathbb{R}$ e $\bar{\psi} : J = \varphi(I_0) \rightarrow M^n$ dadas, respectivamente, por $\varphi(s) = \int_0^s r(\sigma) d\sigma$ e $\bar{\psi}(s, x) = \psi(\varphi^{-1}(s), x)$ e considere $\phi = v \circ \varphi^{-1}$. Em particular, J é um intervalo bem definido pois, desde que θ nunca se anula, então podemos considerar r sendo uma função positiva e φ um difeomorfismo sob sua imagem.

Finalmente, definindo a hipersuperfície $g : M^{n-1} \rightarrow \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ por $g = \pi_{\varepsilon} \circ F(0, \cdot)$ na qual, pela nossa afirmação, sua família de hipersuperfícies paralelas são dadas por $g_s = \pi_{\varepsilon} \circ F(s, \cdot)$, concluímos que

$$\begin{aligned} f \circ \bar{\psi}(s, x) &= F(\varphi^{-1}(s), x) = \pi_I \circ F(\varphi^{-1}(s), x) + \pi_{\varepsilon} \circ F(\varphi^{-1}(s), x) \\ &= \langle F(\varphi^{-1}(s), x), \partial_t \rangle \partial_t + g_s(x) = v \circ \varphi^{-1}(s) \partial_t + g_s(x) \\ &= \phi(s) \partial_t + g_s(x) \cong (\phi(s), g_s(x)). \end{aligned}$$

Ou seja, f é localmente um (ϕ, g_s) -gráfico.

Nos resta apenas verificar que $\pi_{\varepsilon} \circ F(\cdot, x)$ é, de fato, uma pré-geodésica de $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$, ou ainda, definindo $c = \pi_{\varepsilon} \circ f \circ \gamma$, sua reparametrização por comprimento de arco é uma geodésica de $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$. Para isso, basta mostrar que a derivada covariante de T ao longo de c (parametrizada pelo comprimento de arco) pertence à direção do campo normal η de $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ ao longo de f em \mathbb{E}^{n-2} , se $\varepsilon = \pm 1$ ou que se anula se $\varepsilon = 0$. Mostraremos para os casos $\varepsilon = \pm 1$ e para a prova do caso em que $\varepsilon = 0$, basta omitir os termos que envolvem η .

Inicialmente, observe que como a diferencial $(\pi_{\varepsilon})_*$ é a própria identidade em $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ e $\gamma' = T(\gamma)$, a componente tangencial de c' em $T\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ é dada por

$$[c']^T = \frac{d}{ds}(\pi_{\varepsilon} \circ f \circ \gamma) = (\pi_{\varepsilon})_*(f \circ \gamma)_* \gamma' = f_* T(\gamma).$$

Assim, por simplicidade de notação, o vetor velocidade de c é dado por

$$c' = [c']^T + [c']^N = f_* T - \langle f_* T, \partial_t \rangle \partial_t,$$

cujo seu comprimento é dado por $\tau = |T|\theta$. De fato, desde de $\langle f_* T, \partial_t \rangle = \langle \partial_t - \theta N, \partial_t \rangle = 1 - \theta^2 = |T|^2$, então

$$\tau^2 = |c'|^2 = \langle f_* T, f_* T \rangle - 2|T|^2 \langle f_* T, \partial_t \rangle + |T|^4 = |T|^2 - |T|^4 = |T|^2 \theta^2.$$

Portanto, o que queremos mostrar é que

$$D_T (f_* (\tau^{-1} T) - \langle f_* (\tau^{-1} T), \partial_t \rangle \partial_t) \quad (4-22)$$

se anula para $\varepsilon = 0$ ou é paralelo à η para $\varepsilon = \pm 1$, onde D é a derivada covariante do espaço ambiente \mathbb{E}^{n+2} .

Escrevendo $\bar{T} = \frac{T}{|T|}$, temos que

$$D_T f_* (\tau^{-1} T) = D_T f_* (\theta^{-1} \bar{T}) = T (\theta^{-1}) f_* \bar{T} + \theta^{-1} D_T f_* \bar{T}. \quad (4-23)$$

Agora, como $D_T f_* \bar{T}$ pode ser decomposto numa soma direta entre sua componente tangencial em M (dada pela conexão $\bar{\nabla}$), sua componente normal em $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ (dada pela projeção no campo normal unitário N de M) e sua componente normal em \mathbb{E}^{n+2} (dada pela projeção em η). Entretanto, do Lema 4.4, temos que $\bar{\nabla}_T T = 0$, isto é, a componente

tangencial em M se anula. Logo,

$$D_T f_* \bar{T} = \langle AT, \bar{T} \rangle N + \langle A_{\eta} T, \bar{T} \rangle \eta, \quad (4-24)$$

onde A e A_{η} são os operadores shapes, respectivamente, de M com relação à N e à η , respectivamente.

De (4-19) e sabendo que $\theta = \sqrt{1 - |T|^2}$ temos

$$\langle AT, \bar{T} \rangle = \frac{1}{|T|} \langle AT, T \rangle = -\frac{1}{|T|} T(\theta) = -\frac{1}{|T|} \left(\frac{-2|T|}{2\theta} \right) T(|T|) = \theta^{-1} T(|T|). \quad (4-25)$$

Temos também que, de (4-20),

$$\langle A_{\eta} T, \bar{T} \rangle = \frac{1}{|T|} \langle -\theta^2 T, T \rangle = -\theta^2 |T|. \quad (4-26)$$

Portanto, substituindo (4-25) e (4-26) em (4-24), obtemos

$$D_T f_* \bar{T} = \theta^{-1} T(|T|) N - \theta^2 |T| \eta. \quad (4-27)$$

Ainda, semelhante ao que fizemos em (4-25), temos que

$$T(\theta^{-1}) f_* \bar{T} = -\theta^{-2} T(\theta) f_* \bar{T} = \theta^{-3} |T| T(|T|) f_* \bar{T} = \theta^{-3} T(|T|) f_* T. \quad (4-28)$$

Seque então que substituindo (4-27) e (4-28) em (4-23) obtemos

$$\begin{aligned} D_T f_* (\tau^{-1} T) &= \theta^{-3} T(|T|) f_* T + \theta^{-1} [\theta^{-1} T(|T|) N - \theta^2 |T| \eta] \\ &= \theta^{-3} T(|T|) (f_* T + \theta N) - \theta |T| \eta = \theta^{-3} T(|T|) \partial_t - \theta |T| \eta. \end{aligned} \quad (4-29)$$

Por outro lado, como $D_T \partial_t = \bar{\nabla}_T \partial_t = 0$, temos que

$$\begin{aligned} D_T \langle f_* (\tau^{-1} T), \partial_t \rangle \partial_t &= T(\langle f_* (\tau^{-1} T), \partial_t \rangle) \partial_t = T\left(\left\langle f_* \left(\theta^{-1} \frac{T}{|T|}\right), \partial_t \right\rangle\right) \partial_t \\ &= T\left(\frac{\theta^{-1}}{|T|} \langle f_* T, \partial_t \rangle\right) \partial_t = T\left(\frac{\theta^{-1}}{|T|} \langle f_* T, f_* T + \theta N \rangle\right) \partial_t \\ &= T\left(\frac{\theta^{-1}}{|T|} |T|^2\right) \partial_t = T(\theta^{-1} |T|) \partial_t = [T(\theta^{-1}) |T| + \theta^{-1} T(|T|)] \partial_t \\ &= [\theta^{-3} T(|T|) |T|^2 + \theta^{-1} T(|T|)] \partial_t = \left[\frac{|T|^2 + \theta^2}{\theta^3}\right] T(|T|) \partial_t \\ &= \theta^{-3} T(|T|) \partial_t, \end{aligned} \quad (4-30)$$

desde que $|T|^2 + \theta^2 = 1$.

Finalmente, substituindo (4-29) e (4-30) em (4-22) chegamos em

$$D_T (f_* (\tau^{-1} T) - \langle f_* (\tau^{-1} T), \partial_t \rangle \partial_t) = \theta^{-3} T (|T|) \partial_t - \theta |T| \eta - \theta^{-3} T (|T|) \partial_t = -\theta |T| \eta,$$

na qual é o que queríamos mostrar. Omitindo os termos envolvendo η , no caso em que $\varepsilon = 0$, o lado direito da igualdade acima é zero, também como queríamos mostrar.

Portanto, $c = \pi_\varepsilon \circ f \circ \psi(\cdot, x)$ é uma pré-geodésica em \mathbb{Q}_ε^n , para cada $x \in M^{n-1}$.

□

4.2 Hipersuperfícies Isoparamétricas

Nesta seção, vamos utilizar os resultados obtidos anteriormente junto com a teoria clássica de hipersuperfícies isoparamétricas com o objetivo de dar uma caracterização para as hipersuperfícies ideais de Einstein de $I \times_\omega \mathbb{Q}_\varepsilon^n$. Para mais sobre a teoria das hipersuperfícies isoparamétricas ver [5].

Definição 4.6 *Sejam $g : M_0 \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n$ uma hipersuperfície e $\mathcal{F} = \{g_s : M_0 \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n; s \in I\}$ (com $0 \in I$) uma família de hipersuperfícies paralelas à $g = g_0$. Dizemos que g é **isoparamétrica** se qualquer hipersuperfície paralela g_s tem curvatura média constante.*

Élie Cartan provou que g é isoparamétrica se, e somente se, qualquer paralela g_s tem curvaturas principais constantes $\lambda_i^s(p)$, possivelmente dependendo de i ou de s . Além disso, supondo que para algum inteiro $k > 1$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ são curvaturas principais distintas de uma hipersuperfície isoparamétrica $g : M_0 \rightarrow \mathbb{Q}_\varepsilon^n$, então fixado algum $i \in \{1, \dots, k\}$ vale a seguinte fórmula

$$\sum_{i \neq j} n_j \frac{\varepsilon + \lambda_i \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j},$$

na qual é conhecida como a **fórmula de Cartan**, onde n_j é a multiplicidade de λ_j (ver [5] e [11]). Note que, se $n > 2$ e f tem apenas duas curvaturas principais distintas λ e μ , então de (4-16), cada paralela g_s também possui apenas duas curvaturas principais distintas λ^s e μ^s e, neste caso, a fórmula acima se reduz à

$$\lambda^s \mu^s = -\varepsilon, \text{ para todo } s \in I. \quad (4-31)$$

Observação 4.7 *Um fato sobre as hipersuperfícies isoparamétricas de \mathbb{Q}_ε^n que possuem no máximo 2 curvaturas distintas é que elas são completamente classificadas ([5],[11]). No caso que possui apenas 1 curvatura principal são hipersuperfícies totalmente*

umbílicas e no caso em que possuem 2 curvaturas principais distintas são tubos ao redor de subvariedades totalmente geodésicas.

Teorema 4.8 Para $n > 3$, seja Σ uma hipersuperfície ideal orientada de Einstein de $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ tal que a função ângulo θ nunca se anula. Então, valem as seguintes afirmações:

- (i) Σ tem a T -propriedade e é localmente um (ϕ, g_s) -gráfico em $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$;
- (ii) A família paralela $\{g_s\}$ de qualquer (ϕ, g_s) -gráfico local de Σ é isoparamétrica e cada g_s tem no máximo duas curvaturas principais distintas;
- (iii) Se a curvatura principal associada à T se anula em todo ponto então Σ é trivial.

Prova. Inicialmente, segue direto do Lema 2.8 que Σ tem a T -propriedade, visto que Σ é Einstein.

Por outro lado, considere o difeomorfismo $\varphi : I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n \rightarrow J \times \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ definido em (3-39). Como vimos no capítulo anterior, $\varphi(\Sigma)$ também tem a T -propriedade em $J \times \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$. Além disso, desde que φ é um difeomorfismo conforme e a função ângulo de Σ nunca se anula, então vale o mesmo para $\varphi(\Sigma)$. Logo, da Proposição 4.5, $\varphi(\Sigma)$ é localmente um $(\bar{\phi}, g_s)$ -gráfico em $J \times \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$. Mas, como φ só altera o primeiro fator I , isto é, $\varphi(t, p) = (G(t), p)$ para todo $(t, p) \in I \times \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$, segue que Σ é localmente um (ϕ, g_s) -gráfico, com $\phi = G^{-1} \circ \bar{\phi}$, concluindo a demonstração da afirmação (i).

Considere agora $\{X_1, \dots, X_n\}$ uma base ortonormal de direções principais de Σ com $X_1 = \frac{T}{|T|}$ e Σ uma hipersuperfície Λ -Einstein. Como $\rho = |T|$, do Lema 2.9, valem:

$$\begin{cases} \lambda_1^2 - H\lambda_1 + (n-1)(\beta\rho^2 + \alpha) + \Lambda = 0 \\ \lambda_i^2 - H\lambda_i + \beta\rho^2 + (n-1)\alpha + \Lambda = 0, \text{ com } i = 2, \dots, n, \end{cases} \quad (4-32)$$

onde H é o traço do operador shape de Σ .

Da segunda equação de (4-32), Σ possui no máximo duas curvaturas principais distintas dentre as $n-1$ últimas. Sejam elas λ e μ . Logo, essas curvaturas satisfazem:

$$\begin{cases} \lambda + \mu = H \\ \lambda\mu = \beta\rho^2 + (n-1)\alpha + \Lambda. \end{cases} \quad (4-33)$$

Suponha que λ_1 se anule num aberto $I_0 \subset I$ e denote por n_{λ} e n_{μ} as multiplicidades de λ e de μ , respectivamente. Logo, $H = n_{\lambda}\lambda + n_{\mu}\mu$. Além disso, da primeira igualdade de (4-32), obtemos $(n-1)\alpha + \Lambda = -(n-1)\beta\rho^2$. Assim, (4-33) pode ser reescrita como

$$\begin{cases} (1 - n_{\lambda})\lambda + (1 - n_{\mu})\mu = 0 \\ \lambda\mu = -(n-2)\beta\rho^2. \end{cases} \quad (4-34)$$

Desde que $n > 2$ e $\beta\rho$ nunca se anula (pois Σ é ideal), então da segunda igualdade de (4-34) temos que $\lambda\mu < 0$. Logo, λ e μ são não nulas e distintas. Assim, escrevendo $\lambda = -\frac{(n-2)\beta\rho^2}{\mu}$ temos de (4-34) que λ e μ dependem apenas de s . Como λ_1 também depende apenas s , segue que cada paralela g_s tem curvaturas principais constantes, isto é, g_s é isoparamétrica pelo resultado de Cartan.

Agora, suponha que λ_1 nunca se anule. Desde que λ_1 e $\beta\rho^2 + \alpha$ dependem apenas de s , da primeira igualdade de (4-32), H também depende apenas de s . Sendo assim, como H não depende de p , segue que as curvaturas principais de cada paralela g_s , dadas por (4-16), dependem apenas de s . Logo, cada g_s possui curvatura média H_s constante e, portanto, g_s é isoparamétrica.

Para provar o item (iii), suponha por contradição que $\lambda \neq \mu$. Da Proposição 4.3, as curvaturas principais λ^s e μ^s de cada paralela também são distintas e, desde que $\lambda_1 = 0$,

$$\begin{cases} \theta\zeta = \frac{\rho'}{\omega} \\ \lambda = -\frac{\rho\lambda^s + \rho'}{\omega} \\ \mu = -\frac{\rho\mu^s + \rho'}{\omega}. \end{cases} \quad (4-35)$$

Substituindo (4-35) em (4-34) chegamos em

$$\begin{cases} (n_\lambda - 1)\lambda^s + (n_\mu - 1)\mu^s + (n-3)\frac{\rho'}{\rho} = 0 \\ \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2 + \frac{\rho'}{\rho}(\lambda^s + \mu^s) + \lambda^s\mu^s + (n-2)\beta\omega^2 = 0. \end{cases} \quad (4-36)$$

Note que, como $\beta = \frac{\omega''}{\omega} - \alpha = \frac{\omega''}{\omega} - \frac{(\omega')^2 - \varepsilon}{\omega^2}$ e, da fórmula de Cartan (4-31), $\varepsilon = -\lambda^s\mu^s$, segue que

$$\beta\omega^2 = \frac{\omega''\omega - (\omega')^2}{\omega^2}\omega^2 + \varepsilon = \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)'\omega^2 - \lambda^s\mu^s = \zeta'\omega^2 - \lambda^s\mu^s.$$

Assim, da igualdade acima, (4-36) pode ser reescrita como

$$\begin{cases} (n_\lambda - 1)\lambda^s + (n_\mu - 1)\mu^s + (n-3)\frac{\rho'}{\rho} = 0 \\ \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2 + \frac{\rho'}{\rho}(\lambda^s + \mu^s) - (n-3)\lambda^s\mu^s + (n-2)\zeta'\omega^2 = 0. \end{cases} \quad (4-37)$$

Como $\lambda_1 = 0$ e, por hipótese, $\theta \neq 0$, da primeira identidade de (4-17), temos que $\theta\omega = c$, onde c é uma constante real positiva. Assim, da primeira equação de (4-35), $\zeta = \frac{\rho'}{c}$. Portanto, como $\rho = \frac{\phi'\theta}{\omega}$, segue que

$$\zeta'\phi'\omega^2 = \frac{\rho''}{c}\omega^2 \Rightarrow \zeta'\omega^2 = \frac{\omega}{\phi'\theta}\rho'' = \frac{\rho''}{\rho}.$$

Por outro lado, temos que

$$\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)' = \frac{\rho''\rho - (\rho')^2}{\rho^2} = \zeta'\omega^2 - \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2 \Rightarrow \zeta'\omega^2 = \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)' + \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2.$$

Substituindo a igualdade acima na segunda equação de (4-37), obtemos

$$(n-1)\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2 + \frac{\rho'}{\rho}(\lambda^s + \mu^s) - (n-3)\lambda^s\mu^s + (n-2)\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)' = 0. \quad (4-38)$$

Agora, a primeira equação em (4-37) nos dá

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{1-n_\lambda}{n-3}\lambda^s + \frac{1-n_\mu}{n-3}\mu^s \quad (4-39)$$

e a partir das identidades (4-17), como $\frac{d}{ds}\lambda^s = \varepsilon + (\lambda^s)^2$ e $\frac{d}{ds}\mu^s = \varepsilon + (\mu^s)^2$, segue que

$$\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)' = \frac{d}{ds} \left[\frac{1-n_\lambda}{n-3}\lambda^s + \frac{1-n_\mu}{n-3}\mu^s \right] = \frac{1-n_\lambda}{n-3}(\varepsilon + (\lambda^s)^2) + \frac{1-n_\mu}{n-3}(\varepsilon + (\mu^s)^2).$$

Sendo $n_\lambda + n_\mu = n-1$ e $\varepsilon = -\lambda^s\mu^s$, reescrevemos a igualdade acima como

$$\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)' = \frac{1-n_\lambda}{n-3}(\lambda^s)^2 + \frac{1-n_\mu}{n-3}(\mu^s)^2 - \varepsilon = \frac{1-n_\lambda}{n-3}(\lambda^s)^2 + \frac{1-n_\mu}{n-3}(\mu^s)^2 + \lambda^s\mu^s. \quad (4-40)$$

Finalmente, substituindo (4-39) e (4-40) em (4-38), obtemos

$$(n-1)\left(\frac{1-n_\lambda}{n-3}\lambda^s + \frac{1-n_\mu}{n-3}\mu^s\right)^2 + \left(\frac{1-n_\lambda}{n-3}\lambda^s + \frac{1-n_\mu}{n-3}\mu^s\right)(\lambda^s + \mu^s) - (n-3)\lambda^s\mu^s \\ + (n-2)\left(\frac{1-n_\lambda}{n-3}(\lambda^s)^2 + \frac{1-n_\mu}{n-3}(\mu^s)^2 + \lambda^s\mu^s\right) = 0,$$

na qual pode ser reescrito como

$$\frac{(n-1)(1-n_\lambda)(1-n_\mu)}{(n-3)^2} \left\{ (\lambda^s)^2 \left[\frac{1-n_\lambda}{1-n_\mu} + \frac{n-3}{(n-1)(1-n_\mu)} + \frac{(n-2)(n-3)}{(n-1)(1-n_\mu)} \right] \right. \\ + (\mu^s)^2 \left[\frac{1-n_\mu}{1-n_\lambda} + \frac{n-3}{(n-1)(1-n_\lambda)} + \frac{(n-2)(n-3)}{(n-1)(1-n_\lambda)} \right] \\ + \lambda^s\mu^s \left[2 + \frac{n-3}{(n-1)(1-n_\lambda)} + \frac{n-3}{(n-1)(1-n_\mu)} \right. \\ \left. \left. + \frac{(n-3)^2}{(n-1)(1-n_\lambda)(1-n_\mu)} \right] \right\} = 0. \quad (4-41)$$

Observe que, como $n_\lambda + n_\mu = n - 1$, então

$$\frac{1 - n_\lambda}{1 - n_\mu} + \frac{n - 3}{(n - 1)(1 - n_\mu)} + \frac{(n - 2)(n - 3)}{(n - 1)(1 - n_\mu)} = \frac{n - 2 - n_\lambda}{1 - n_\mu} = -1 \quad (4-42)$$

e, analogamente,

$$\frac{1 - n_\mu}{1 - n_\lambda} + \frac{n - 3}{(n - 1)(1 - n_\lambda)} + \frac{(n - 2)(n - 3)}{(n - 1)(1 - n_\lambda)} = -1. \quad (4-43)$$

Além disso, como $n - 3 = n_\lambda + n_\mu - 2 = (n_\lambda - 1) + (n_\mu - 1)$, então

$$\begin{aligned} \frac{n - 3}{(n - 1)(1 - n_\lambda)} + \frac{n - 3}{(n - 1)(1 - n_\mu)} + \frac{(n - 3)^2}{(n - 1)(1 - n_\lambda)(1 - n_\mu)} &= \\ &= \frac{n - 3}{n - 1} \left(\frac{1}{1 - n_\lambda} + \frac{1}{1 - n_\mu} + \frac{n - 3}{(1 - n_\lambda)(1 - n_\mu)} \right) \\ &= \frac{n - 3}{n - 1} \left(\frac{1}{1 - n_\lambda} + \frac{1}{1 - n_\mu} - \frac{1}{1 - n_\lambda} - \frac{1}{1 - n_\mu} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4-44)$$

Portanto, substituindo (4-42), (4-43) e (4-44) em (4-41), obtemos

$$-\frac{(n - 1)(1 - n_\lambda)(1 - n_\mu)}{(n - 3)^2} (\lambda^s - \mu^s)^2 = 0. \quad (4-45)$$

Observe que, de (4-34), como λ e μ são ambos não nulos, caso $1 - n_\lambda = 0$, segue que $1 - n_\mu = 0$ também, decorrendo que $n = n_\lambda + n_\mu + 1 = 3$. Mas isso contraria a hipótese de que $n > 3$. Logo, tanto $n_\lambda > 1$ quanto $n_\mu > 1$. Sendo assim, de (4-45), temos que $\lambda^s = \mu^s$. Entretanto, da Proposição 4.3, $\lambda = \mu$, na qual é um absurdo, pois supomos inicialmente que $\lambda \neq \mu$.

Concluimos então que, desde que a curvatura λ_1 se anule em todo ponto de Σ , então as outras $n - 1$ curvaturas principais são necessariamente iguais. Ou seja, toda seção vertical de Σ é totalmente umbílica. Sendo Σ ideal, pelo Teorema 3.11, Σ é trivial, como queríamos mostrar. □

O Teorema 3.10–(iii) nos abre possibilidades para obter exemplos de hipersuperfícies de Einstein não triviais em $I \times_\omega \mathbb{Q}_\varepsilon^n$, embora não seja uma tarefa muito fácil para produtos torcidos em geral. Neste sentido, o próximo resultado também pode ser utilizado para encontrar mais casos não triviais.

Teorema 4.9 *Para $n > 3$, seja Σ uma hipersuperfície conexa, orientada e Λ –Einstein (não necessariamente ideal) de $I \times_\omega \mathbb{Q}_\varepsilon^n$ com função ângulo constante $\theta \in [0, 1)$. Então*

valem as seguintes afirmações:

- (i) Se $\theta \neq 0$, ω é necessariamente constante e Σ é trivial;
- (ii) Se $\theta = 0$, ω é necessariamente solução da EDO

$$(\omega')^2 + \frac{\Lambda}{n-1}\omega^2 + c = 0,$$

com $c \in \mathbb{R}$ constante, num aberto de I e $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ tem curvatura seccional não constante se $c + \varepsilon \neq 0$. Sobre Σ :

- (a) Se $c + \varepsilon = 0$ então Σ é trivial e seu operador shape tem posto no máximo 1;
- (b) Se $c + \varepsilon < 0$ então Σ é trivial e é constituída por um cilindro sobre uma hipersuperfície totalmente umbílica de $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$;
- (c) Se $c + \varepsilon > 0$ então Σ é não trivial e é constituída por um cilindro sobre o produto de duas esferas de \mathbb{S}^n (neste caso, $\varepsilon = 1$).

Prova. Relembrando de (2-11) e de (2-9) que

$$\text{grad}(\theta) = -\left(AT + \frac{\omega'}{\omega}\theta T\right) \quad \text{e} \quad |T|^2 = 1 - \theta^2.$$

Logo, como $\theta \in [0, 1)$ é constante, então $AT = -\frac{\omega'}{\omega}\theta T$ e T é não nulo. Segue que Σ tem a T -propriedade e a curvatura principal associada à T é dada por

$$\lambda_1 = -\frac{\omega'}{\omega}\theta. \quad (4-46)$$

Suponha que $\beta \circ \xi$ se anule num aberto conexo $\Sigma' \subset \Sigma$. Do Teorema 3.10, segue que $\alpha \circ \xi$ é constante em Σ' e Σ' é CSC à menos que

$$\sigma = \Lambda + (n-1)(\alpha \circ \xi) < 0.$$

Considere este caso. Da demonstração do Teorema 3.10-(iii), temos que todas as curvaturas principais de Σ' são constantes (em particular λ_1). De (4-46), $\frac{\omega'}{\omega}$ é constante em Σ' . Da definição de α em (2-7),

$$\alpha = \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 - \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \text{constante}.$$

Logo ω é constante em Σ' e, de (4-46), $\lambda_1 = 0$. Por outro lado, do Lema 2.9,

$$0 = \lambda_1^2 - H\lambda_1 + \sigma = \sigma < 0,$$

na qual é claramente um absurdo.

Logo, pela conexidade de Σ , podemos assumir que $\beta \circ \xi$ nunca se anula, isto é, Σ é ideal. Assumindo que $\theta \neq 0$, do Teorema 4.8 temos que Σ é localmente um (ϕ, g_s) -gráfico e a família de paralelas $\{g_s\}$ é isoparamétrica. Do item (iii) deste mesmo teorema se mostrarmos que $\lambda_1 = 0$ podemos concluir que Σ é trivial. Note que, de (4-46), $\lambda_1 = 0$ se, e somente se, $\omega' = 0$, isto é, ω constante.

De fato, de (4-46) e das relações (4-17) podemos escrever λ_1 como

$$-\frac{\omega'}{\omega}\theta = \lambda_1 = -\frac{\theta}{\phi'} \frac{d}{ds} \ln(\theta\omega).$$

Sendo $\theta \neq 0$ e lembrando que $\omega' = \omega'(\phi)\phi'$, das igualdades acima temos que

$$\int \frac{\omega'(\phi(s))(\phi'(s))^2}{\omega(\phi(s))} ds = \ln(\theta\omega),$$

ou ainda,

$$\omega(\phi(s)) = \frac{1}{\theta(s)} \exp\left(\int \frac{\omega'(\phi(s))(\phi'(s))^2}{\omega(\phi(s))} ds\right). \quad (4-47)$$

Lembrando que θ é constante e usando a Regra da Cadeia para derivar a igualdade acima obtemos

$$\begin{aligned} \omega'(\phi(s))\phi'(s) &= \frac{1}{\theta(s)} \exp\left(\int \frac{\omega'(\phi(s))(\phi'(s))^2}{\omega(\phi(s))} ds\right) \left(\frac{\omega'(\phi(s))(\phi'(s))^2}{\omega(\phi(s))}\right) \\ &= \omega(\phi(s)) \left(\frac{\omega'(\phi(s))(\phi'(s))^2}{\omega(\phi(s))}\right) = \omega'(\phi(s))(\phi'(s))^2. \end{aligned}$$

Desde que ϕ é um difeomorfismo crescente (ou decrescente, sem perda de generalidade) então $\phi' \neq 0$. Logo, novamente usando o abuso de notação $\omega = \omega \circ \phi$, concluímos das igualdades acima que

$$\omega'(1 - \phi') = 0,$$

isto é, $\omega' = 0$ ou $\phi' = 1$. Se $\phi' = 1$ então de (4-47) temos que

$$\omega = \frac{1}{\theta} \exp\left(\int \frac{\omega'}{\omega} ds\right) = \frac{1}{\theta} \exp(\omega).$$

Derivando a igualdade acima,

$$\omega' = \frac{1}{\theta} \exp(\omega)\omega' = \omega\omega' \quad \Rightarrow \quad \omega'(1 - \omega) = 0.$$

Portanto $\omega' = 0$ ou $\omega = 1$. Em todo caso teremos que ω é necessariamente constante, como queríamos. Segue então, de (4-46), que $\lambda_1 = 0$ e, pelo Teorema 4.8-(iii), Σ é trivial.

Agora, considere $\theta = 0$. Por (4-46), temos que $\lambda_1 = 0$. Ainda, por (2-9), $|T| = 1$. Sendo assim, do Lema 2.9, considerando $\alpha \circ \xi = \alpha$ e $\beta \circ \xi = \beta$, valem:

$$\begin{cases} (n-1)(\beta + \alpha) + \Lambda = 0 \\ \lambda_i^2 - H\lambda_i + \beta + (n-1)\alpha + \Lambda = 0, \quad i = 2, \dots, n. \end{cases} \quad (4-48)$$

Observe que, $\beta + \alpha = \frac{\omega''}{\omega} - \alpha + \alpha = \frac{\omega''}{\omega}$. Essa igualdade na primeira equação de (4-48) nos dá

$$\omega'' = -\frac{\Lambda}{n-1}\omega. \quad (4-49)$$

Para ω não constante, multiplicando (4-49) por ω' , obtemos a equação

$$\omega'\omega'' = -\frac{\Lambda}{n-1}\omega\omega'$$

e, integrando em ambos os lados da igualdade acima, ω satisfaz a EDO

$$(\omega')^2 + \frac{\Lambda}{n-1}\omega^2 + c = 0, \quad c \in \mathbb{R} \text{ constante.} \quad (4-50)$$

Note que, de (4-49) e de (4-50), podemos escrever

$$\alpha = \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 - \frac{\varepsilon}{\omega^2} = -\frac{\Lambda}{n-1} - \frac{\varepsilon+c}{\omega^2} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{\omega''}{\omega} - \alpha = -\frac{\Lambda}{n-1} + \frac{\Lambda}{n-1} + \frac{\varepsilon+c}{\omega^2} = \frac{\varepsilon+c}{\omega^2}. \quad (4-51)$$

Dessa maneira, a partir da Observação 2.4, se $\varepsilon + c \neq 0$ então $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ tem curvatura seccional não constante.

Vamos então verificar as afirmações sobre Σ nos itens (ii) – $(a-c)$ do Teorema, a partir do sinal de $\varepsilon + c$.

(a) Considere $\varepsilon + c = 0$.

Neste caso, de (4-51), temos que $\beta = 0$ e $\alpha = -\frac{\Lambda}{n-1}$. Como consequência do Teorema 3.10–(ii), desde que $\sigma = (n-1)\alpha + \Lambda = 0$, temos que Σ é trivial e seu operador shape tem posto no máximo 1.

Antes de prosseguirmos para os itens (b) e (c), observe que, como estamos considerando $\theta = 0$, então $T = \partial_t - \theta N = \partial_t$. Isto é, o gradiente da função altura de Σ é o próprio gradiente da função altura de $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$. Logo, Σ é constituída por um cilindro

sobre uma hipersuperfície $\Sigma_0 \subset \mathbb{Q}_\varepsilon^n$.

Denotando por λ_i^0 a i -ésima curvatura principal de Σ_0 , pelo Lema 2.10,

$$\lambda_i = -\frac{\lambda_i^0}{\omega}, \quad i = 2, \dots, n, \quad (4-52)$$

é a i -ésima curvatura principal de Σ , já que $|T| = 1$ e $\theta = 0$. Além disso, como $\lambda_1 = 0$, a curvatura média de Σ fica

$$H = \sum_{i=1}^n \lambda_i = -\frac{1}{\omega} \sum_{i=2}^n \lambda_i^0 = -\frac{1}{\omega} H_0,$$

onde H_0 é a curvatura média de Σ_0 .

Agora, utilizando as relações (4-51) e a segunda equação de (4-48), obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\lambda_i^0}{\omega}\right)^2 - \frac{H_0 \lambda_i^0}{\omega^2} + \frac{\varepsilon + c}{\omega^2} + (n-1) \left(-\frac{\Lambda}{n-1} - \frac{\varepsilon + c}{\omega^2}\right) + \Lambda &= 0 \\ \Rightarrow (\lambda_i^0)^2 - H_0 \lambda_i^0 - (n-2)(\varepsilon + c) &= 0. \end{aligned} \quad (4-53)$$

Segue que Σ_0 tem no máximo 2 curvaturas principais distintas em todo ponto. Sejam elas λ_0 e μ_0 .

(b) Considere $\varepsilon + c < 0$.

Suponha que, em algum ponto de Σ_0 , $\lambda_0 \neq \mu_0$. Suponha também que k seja a multiplicidade de λ_0 e, conseqüentemente, $n - k - 1$ é a multiplicidade de μ_0 . Como $H_0 = k\lambda_0 + (n - k - 1)\mu_0$, de (4-53), λ_0 e μ_0 satisfazem

$$\begin{cases} (k-1)\lambda_0 + (n-k-2)\mu_0 = 0 \\ \lambda_0\mu_0 = -(n-2)(\varepsilon + c). \end{cases} \quad (4-54)$$

Note que, como estamos considerando $\varepsilon + c < 0$ e, por hipótese, $n > 2$, a segunda equação acima nos dá que $\lambda_0\mu_0 > 0$. Ou seja, λ_0 e μ_0 são não nulas e possuem sinais iguais. Logo, da primeira equação acima, segue que

$$k-1 = 0 = n-k-2 \quad \Rightarrow \quad n = 3$$

contrariando a hipótese de que $n > 3$.

Portanto, $\lambda_0 = \mu_0$ em todo ponto de Σ_0 , isto é, Σ_0 é totalmente umbílica. Em particular, de (4-52), toda seção vertical de Σ é totalmente umbílica.

Por outro lado, tanto em (b) quanto em (c), como $\beta = \frac{\varepsilon + c}{\omega^2} \neq 0$, temos que Σ é ideal. Segue então do Teorema 3.11 que Σ é trivial, a partir das considerações do

parágrafo anterior.

(c) **Considere** $\varepsilon + c > 0$.

Neste caso, a partir da segunda equação de (4-54), λ_0 e μ_0 são não nulas e possuem sinais opostos. Ou seja, λ_0 e μ_0 são necessariamente distintas. Ainda, substituindo

$$\mu_0 = -\frac{(n-2)(\varepsilon+c)}{\lambda_0},$$

na primeira equação de (4-54), concluímos que λ_0 é constante e, conseqüentemente, μ_0 também.

Portanto, Σ é isoparamétrica e, pela fórmula de Cartan,

$$0 > \lambda_0 \mu_0 = -\varepsilon.$$

Dessa forma, ε é necessariamente igual a 1, isto é, $\mathbb{Q}_\varepsilon^n = \mathbb{S}^n$.

Em particular, denotando por $\mathbb{S}^m(c)$ a esfera m -dimensional de curvatura seccional constante c , por [17, Teoremas 2.5 e 3.4], temos que Σ é congruente a

$$\mathbb{S}^k(c_1) \times \mathbb{S}^{n-k-1}(c_2),$$

com $c_1 = \frac{n-3}{k-1}$ e $c_2 = \frac{n-3}{n-k-2}$. Ou seja, Σ_0 é o produto de duas esferas de \mathbb{S}^n . Além disso, como $c_1 \neq c_2$ (pois, caso contrário, teríamos $n = 3$ contrariando a hipótese), então Σ não pode ter curvatura seccional constante. □

Note que, a partir do Teorema 4.9, exceto no caso (ii)-(a), qualquer hipersuperfície de Einstein (nas condições do teorema) é necessariamente ideal.

Por outro lado, vale destacar que em [13] não foi mostrado no Teorema 4.9-(i) que ω é necessariamente constante como provamos acima.

Finalmente, partiremos para o último resultado principal do trabalho de [13] na qual caracteriza as hipersuperfícies ideais e triviais de Einstein:

Teorema 4.10 *Seja Σ uma hipersuperfície ideal de Einstein de $I \times_\omega \mathbb{Q}_\varepsilon^n$, com $n > 3$. Então Σ tem um número constante de curvaturas principais distintas (2 ou 3) com multiplicidades constantes. Ainda, Σ é trivial se, e somente se, possui necessariamente 2 curvaturas principais distintas em todo ponto. Neste caso, Σ é rotacional.*

Prova. Inicialmente, observe que, do Teorema 3.11, Σ tem a T -propriedade e, do Lema 2.9, possui no máximo 3 curvaturas principais distintas. Ainda do Lema 2.9, como $\beta \circ \xi$

nunca se anula, a curvatura principal λ_1 associada à T não pode satisfazer ambas as equações do Lema. Logo, Σ tem 2 ou 3 curvaturas principais distintas em todo ponto.

Mostremos que esse número é constante, assim como as multiplicidades de cada curvatura principal. Para isso, considere duas curvaturas principais distintas de λ_1 denotadas por λ e μ e defina o conjunto

$$C = \{x \in \Sigma; \lambda(x) = \mu(x)\}.$$

Note que, se $C = \Sigma$, então Σ possui duas curvaturas principais distintas com multiplicidades 1 e $n - 1$ e não há nada mais para mostrar. O mesmo ocorre se C é vazio. Neste caso, Σ tem 3 curvaturas principais distintas em todo ponto. Para mostrar que as multiplicidades de λ e de μ são constantes, vamos utilizar um método análogo ao desenvolvido em [17, Proposição 2.2].

Desde que $\{T\}^\perp$ é invariante por A e C é vazio, então λ e μ são os únicos autovalores de $A|_{\{T\}^\perp}$. Para cada $x_0 \in \Sigma$, seja $k \in \{2, \dots, n\}$ tal que

$$\lambda(x_0) = \lambda_2(x_0) = \dots = \lambda_k(x_0) > \lambda_{k+1}(x_0) = \dots = \lambda_n(x_0) = \mu(x_0).$$

Sem perda de generalidade estamos supondo $\lambda > \mu$ em x_0 . Como cada λ_i é uma função contínua, então existe uma vizinhança $V \subset \Sigma$ de x_0 tal que, reordenando os λ_i 's caso necessário, valem as desigualdades

$$\lambda_2(x) \geq \dots \geq \lambda_k(x) > \frac{\lambda(x_0) + \mu(x_0)}{2} > \lambda_{k+1}(x) \geq \dots \geq \lambda_n(x), \text{ para todo } x \in V.$$

Entretanto, $A|_{\{T\}^\perp}$ só possui λ e μ como autovalores em todo ponto. Segue que, para todo $x \in V$,

$$\lambda(x) = \lambda_2(x) = \dots = \lambda_k(x) > \lambda_{k+1}(x) = \dots = \lambda_n(x) = \mu(x).$$

Sendo Σ ideal, em particular conexa, λ e μ possuem multiplicidades constantes, como queríamos.

Agora, mostremos que os casos em que $C = \Sigma$ e C é vazio são os únicos casos possíveis. Assim, suponha por contradição que C e $\Sigma - C$ são ambos não vazios.

Seja x um ponto da fronteira de $\Sigma - C$. Afirmamos que não existe aberto $\Sigma(x)$ contendo x em que a função ângulo θ se anule. De fato, caso exista tal aberto, então sendo Σ ideal, estamos nos casos (ii) – (b) e (ii) – (c) do Teorema 4.9. Dessa forma, ou $\lambda = \mu$ ou $\lambda \neq \mu$ em todo ponto de $\Sigma(x)$. Entretanto, isso não pode ocorrer pois $x \in \Sigma(x)$ é um ponto da fronteira de $\Sigma - C$.

Logo, para cada aberto $\Sigma(x) \subset \Sigma$ em x , existe $y \in \Sigma(x) \cap (\Sigma - C)$ tal que $\theta(y) \neq 0$. Portanto, do Teorema 4.8, existe um (ϕ, g_s) -gráfico local $\Sigma(y)$ em $\Sigma - C$ contendo y onde a família paralela $\{g_s\}$ é isoparamétrica. Em particular, cada g_s tem precisamente 2 curvaturas principais distintas, visto que $\Sigma(y) \subset \Sigma - C$. Segue então, da Observação 4.7, que cada g_s é um tubo ao redor de uma subvariedade totalmente geodésica.

Observe que, diminuindo $\Sigma(x)$ caso necessário, podemos tomar y de modo que $x \in \partial\Sigma(y)$. Logo, considerando a projeção vertical $\sigma : I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n \rightarrow \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$, existe uma vizinhança U contendo $\sigma(x)$ em $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ que é o conjunto limite de uma família de subconjuntos abertos paralelos de tubos de $\{g_s\}$. Neste caso U também é um tubo.

Por outro lado, existe uma seção vertical Σ_t de Σ em x tal que $\sigma(\Sigma_t)$ contém U . Como $x \in \partial(\Sigma - C)$ e C é fechado (pois é imagem inversa do compacto $\{0\}$ pela função contínua $(\lambda - \mu) : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$), temos que $x \in C$ e, portanto, Σ_t é totalmente umbílica. Segue que $\sigma(\Sigma_t)$ também é totalmente umbílica e, conseqüentemente, U também o é. Entretanto, isto é um absurdo visto que tubos não possuem pontos umbílicos.

Portanto, $\Sigma - C$ e C não podem ser ambos vazios, concluindo a primeira parte da demonstração. A segunda parte é um resultado imediatamente direto do Teorema 3.11.

□

Considerações Finais

Nesta dissertação foram estudadas as hipersuperfícies de Einstein no contexto de produtos torcidos $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$, onde I é um intervalo aberto em \mathbb{R} e $\mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$ é uma das formas espaciais \mathbb{R}^n , \mathbb{S}^n ou \mathbb{H}^n de acordo com sua curvatura seccional ε . O objetivo principal foi investigar condições para que estas hipersuperfícies sejam triviais. Fundamentados principalmente no referencial teórico de Lima, Manfio e Santos [13], foram generalizados alguns resultados já obtidos em trabalhos anteriores com respeito as variedades produtos usuais $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$.

Algumas dessas generalizações destacam-se a inclusão de todas as hipersuperfícies rotacionais e as hipersuperfícies dos tipos (ϕ, g_s) –gráficos, ambas em $I \times_{\omega} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$, na classe das hipersuperfícies que possuem a T –propriedade, como mostrado, respectivamente, em [7] e em [19] para o produto usual. Além disso, o Teorema 4.8 também estende para o produto torcido a condição imposta sobre a função ângulo em [19] - quando constante e não nula - para que estas hipersuperfícies sejam caracterizadas como gráficos locais da forma (ϕ, g_s) . Ainda sobre esta condição com respeito à função ângulo, o Teorema 4.9 afirma que nestes casos a função torção ω é necessariamente constante, fato que observamos e provamos e que não é abordada em [13].

Voltando para o foco principal, antes de estudar condições de trivialidade se faz relevante mostrar que tais hipersuperfícies existem. Esta existência foi provada no Teorema 3.7, em especial utilizando as hipersuperfícies rotacionais devido suas particularidades de também serem espaços de produtos torcidos na forma $I \times_{\psi} \mathbb{Q}_{\varepsilon}^n$, consequência direta a partir de suas classificações como esféricas, hiperbólicas e parabólicas.

Também no contexto das rotacionais, quando adicionada a natureza de idealidade, o Teorema 3.11 mostra que estas hipersuperfícies de Einstein, além de também possuírem a T –propriedade, são caracterizadas por serem triviais e por condições em suas curvaturas principais, caracterização que é generalizada no Teorema 4.10 utilizando a teoria das hipersuperfícies isoparamétricas. Por este motivo, destacam-se a importância de condições de idealidade e rotacionalidade para o estudo.

Para finalizar, ferramentas para a construção de exemplos não triviais também são fornecidas no texto, em resultados como o Teorema 3.10 e o Teorema 4.9.

Referências Bibliográficas

- [1] BERNDT, J.; CONSOLE, S.; OLMOS, C. E. **Submanifolds and holonomy**. CRC Press, 2016.
- [2] BOOTHBY, W. M. **An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry**. Academic press, 1986.
- [3] BORGES, V.; DA SILVA, A. **On einstein hypersurfaces of $i \times \mathbb{Q}^n(c)$** . *Journal of Geometry and Physics*, 173:104448, 2022.
- [4] CECIL, T. E. **A characterization of metric spheres in hyperbolic space by morse theory**. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 26(3):341–351, 1974.
- [5] CECIL, T. E.; OTHERS. **Isoparametric and dupin hypersurfaces**. *SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, 4:062, 2008.
- [6] DAJCZER, M.; TOJEIRO, R.; DAJCZER, M.; TOJEIRO, R. **The basic equations of a submanifold**. *Submanifold Theory: Beyond an Introduction*, p. 1–61, 2019.
- [7] DILLEN, F.; FASTENAKELS, J.; VEKEN, J. **Rotation hypersurfaces in $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$** . *Note Mat.*, 29(1):41–54, 2009.
- [8] DO CARMO, M. P.; CARMO, M. D.; DAJCZER, M. **Rotation hypersurfaces in spaces of constant curvature**. Springer, 2012.
- [9] DO CARMO, M. P. **Geometria Riemanniana**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2 edition, 1988.
- [10] DOMÍNGUEZ VÁZQUEZ, M. **Isoparametric foliations and polar actions on complex space forms**. PhD thesis, 2013.
- [11] DOMÍNGUEZ-VÁZQUEZ, M. **An introduction to isoparametric foliations**. *Preprint*, 2018.
- [12] LEANDRO, B.; PINA, R.; DOS SANTOS, J. P. **Einstein hypersurfaces of $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$** . *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, 52:537–546, 2021.

- [13] LIMA, R. D.; MANFIO, F.; SANTOS, J. D. **Einstein hypersurfaces of warped product spaces.** *Results in Mathematics*, 77(6):228, 2022.
- [14] MANFIO, F. **Hypersurfaces with constant sectional curvature of $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$.** *Illinois J. Math.*, 55(1):397, 2011.
- [15] MANFIO, F.; TOJEIRO, R.; VAN DER VEKEN, J. **Geometry of submanifolds with respect to ambient vector fields.** *Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923-)*, 199(6):2197–2225, 2020.
- [16] O'NEILL, B. **Semi-Riemannian geometry with applications to relativity.** Academic press, 1983.
- [17] RYAN, P. J. **Homogeneity and some curvature conditions for hypersurfaces.** *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 21(3):363–388, 1969.
- [18] SUZUKI, C. D. A. **Hipersuperfícies de rotação em espaços de curvatura constante.** PhD thesis, Universidade de São Paulo, 1989.
- [19] TOJEIRO, R. **On a class of hypersurfaces in $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$.** *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, 41(2):199–209, 2010.