UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

KAYE OLIVEIRA DA SILVA

Existência e Multiplicidade de Soluções de Problemas de Contorno Elípticos de Quarta Ordem via Métodos Topológicos

Goiânia
2012

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[x] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):	Kaye Oliveira da Silva						
E-mail:	Kayeolivera@hotmail.com						
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [x]Sim [ ] Não							
Vínculo empregatício do autor							
Agência de fomento:	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico				Sigla:	CNPq	
País:	Brasil	UF:		GO	CNPJ:	33.654.831/0001-36	
Título:	Existência e multiplicidade de soluções de problemas de contorno elípticos de quarta ordem via métodos topológicos						
Palavras-chave:	Grau topológico, Bifurcação global, Condição de Navier, Operador biharmônico						
Título em outra língua:	Existence and multiplicity of solutions to elliptic boundary value problems by topological methods						
Palavras-chave em outra língua:	Topological degree, Global bifurcation, Navier boundary conditions, Biharmonic operator						
Área de concentração:	Análise						
Data defesa:	24/02/2012						
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado em Matemática						
Orientador (a):	José Valdo Abreu Gonçalves						
E-mail:	jvg@mat.ufg.br						
Co-orientador (a):*							
E-mail:							

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

____ Data: ____ / ____ / _____

Assinatura do (a) autor (a)

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

KAYE OLIVEIRA DA SILVA

Existência e Multiplicidade de Soluções de Problemas de Contorno Elípticos de Quarta Ordem via Métodos Topológicos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós–Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. José Valdo Abreu Gonçalves

Goiânia
2012

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
GPT/BC/UFG

	Silva, Kaye Oliveira da.
S586e	Existência e multiplicidade de soluções de problemas de contorno elípticos de quarta ordem via métodos topológicos [manuscrito] / Kaye Oliveira da Silva. - 2012.
	113 f.
	Orientador: Prof. Dr. José Valdo Abreu Gonçalves.
	Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, 2012.
	Bibliografia.
	Inclui lista de símbolos.
	Apêndices.
	1. Bifurcação global. 2. Problemas elípticos lineares. I. Título.
	CDU: 517.57

KAYE OLIVEIRA DA SILVA

EXISTÊNCIA E MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES DE PROBLEMAS DE CONTORNO ELÍPTICOS DE QUARTA ORDEM VIA MÉTODOS TOPOLÓGICOS

Dissertação defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada no dia 24 de fevereiro de 2012, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

José Valdo A.

Prof. Dr. José Valdo Abreu Gonçalves
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca

Edcarlos Domingos da Silva.

Prof. Dr. Edcarlos Domingos da Silva
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Prof. Dr. Carlos Alberto Pereira dos Santos
Departamento de Matemática-UnB

Kaye Oliveira da Silva

Graduou-se em Licenciatura em Matemática na UEG - Universidade Estadual de Goiás. Durante sua graduação, participou de projetos de iniciação científica. Durante o mestrado, ma UFG - Universidade Federal de Goiás, foi bolsista do CNPq.

Ó Virgem pura, Ó Virgem imaculada, Ó Maria minha amada. Quem sou eu sem Vós? A mim se aplicam aquelas palavras: "quia pulvis es, et in púlverem revertéris"(do pó veio e ao pó voltará), contudo, essas mesmas palavras não podem se aplicar a Ti, pois, foi assunta aos céus de corpo e alma. Por isso dedico esse trabalho a Vós, já que reconhecendo o quão ínfimo sou, percebo a grande e Boa Senhora que és, tão digna de louvor, honra e glória.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, autor de todas as coisas.

Agradeço a minha esposa Kelly, por sua paciência.

Agradeço meu pai Edson e minha mãe Simone, sem os quais eu não existiria.

Sou profundamente agradecido a todos meus Professores, em particular aos Professores da Graduação em Anápolis e em especial aos Professores: Cinthya, Max e Luciana pelo incentivo (que foi também financeiro) e ajuda.

Meus sinceros agradecimentos aos Professores da Pós Graduação no IME UFG por terem contribuido na minha formação.

Agradeço ao Professor Valdo pela amizade e paciência na orientação desta Dissertação e especialmente por ter me mostrado a importância dos Métodos Topológicos no estudo das EDPs.

Agradeço ao CNPq pelo auxílio com a bolsa de mestrado.

Resumo

Neste trabalho, utilizamos métodos topológicos para estudar existência e multiplicidade de soluções de Problemas de Contorno Elípticos Não Lineares de 4ª ordem. Mais precisamente, utilizamos resultados sobre componentes conexas de pontos fixos e tambem bifurcação global, para provar existência e multiplicidade de soluções fracas de Equações Diferenciais Parciais, envolvendo o Operador Binarmônico, sob condições de fronteira de Navier. As demonstrações dos resultados abstratos que utilizamos, são apresentadas em detalhes.

Palavras–chave

Grau Topológico, Bifurcação Global, Condição de Navier, Operador Biharmônico

Abstract

In this work, we employ topological methods in order to study existence and multiplicity of solutions, of nonlinear boundary value problems of the fourth order. More precisely, we make use of results on connected components of fixed points, as well as global bifurcation, to show existence and multiplicity of weak solutions of Partial Differential Equations, involving the Biharmonic operator under Navier boundary conditions. Proofs of the abstract results used, are presented in detail.

Keywords

Topological degree, global bifurcation, Navier boundary condition, Biharmonic operator

Sumário

Lista de Símbolos

$\mathbb{R}^N$	$\{(x_1,x_2,...,x_N):\ x_i \in \mathbb{R},\ \forall\ i=1,...,N\}$.
Ω	domínio limitado em $\mathbb{R}^N$.
∂U	fronteira de U.
$\overline{U}$	fecho de U.
$int(U)$	interior de U.
conv(U)	$\{\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i:\ x_i \in U,\ \lambda_i \in\ [0,1]\ e\ \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1,\ k\ finito\}$ (envoltória convexa de U).
$deg(f,\Omega,0)$	grau da função f, no domínio Ω, com respeito a 0.
$ind(f,0)$	indíce da função f com respeito a 0.
$dist(\cdot,\cdot)$	distância entre pontos, ou conjuntos, ou ambos.
$\|\cdot\|_E$	norma no espaço E (omiti-se E quando o espaço fica subentendido).
dim(X)	dimensão do espaço vetorial X.
(x_n)	sequência em algum espaço.
$\rightharpoonup$	convergência fraca.
λ_1	primeiro autovalor do Laplaciano.
μ_1	primeiro autovalor do biharmônico.
$C^k(\Omega)$	espaço da funções k vezes diferenciáveis em Ω.
$C^k(\overline{\Omega})$	espaço da funções k vezes diferenciáveis em Ω, que podem ser estendidas k-diferenciávelmente ao fecho de Ω.
$C_0^k(\Omega)$	espaço da funções k vezes diferenciáveis em Ω, com suporte compacto.
$C^\infty(\Omega)$	$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C^i(\Omega)$.
$W^{k,p}(\Omega)$	espaço de Sobolev.
$W_0^{k,p}(\Omega)$	espaço de Sobolev cujas derivadas até ordem $k-1$ se anulam na fronteira.
$H^k(\Omega)$	$W^{k.2}(\Omega)$.

Introdução

Nesse trabalho utilizaremos métodos topológicos (técnicas envolvendo teoria do grau topológico, componentes conexas de pontos fixos e bifurcação global) para estudar existência de soluções fracas, de problemas de contorno do tipo

$$\begin{cases} Lu = f(x,u,\Delta u) & em\ \Omega, \\ \mathbf{B}u = 0 & em\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{0-1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ domínio limitado regular, L é o operador linear

$$Lu = \alpha\Delta^2 u + \beta\Delta u,$$

sendo α, β constantes, f uma função mensurável e Bu, o operador de fronteira dado por

$$\begin{cases} Bu = u & se\ \alpha = 0\ e\ \beta > 0, \\ Bu = (u, \Delta u) & se\ \alpha > 0. \end{cases}$$

O nosso primeiro teorema trata o caso em que

$$f(x,u,\Delta u) = h(x) + \mu_1 u - g(x,u),$$

onde μ_1 é o primeiro autovalor de (cf. Capítulo 4)

$$\begin{cases} \alpha\Delta^2 u + \beta\Delta u = \mu u & em\ \Omega, \\ \mathbf{B}u = 0 & em\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{0-2}$$

$g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é mensurável limitada e $h \in L^2(\Omega)$. Problemas desse tipo são chamados ressonantes. Daremos mais detalhes no Capítulo 5.

Enunciamos a seguir um resultado (Cf. [4]) sobre existência, não existência e multiplicidade de soluções para o problema ressonante

$$\begin{cases} \alpha\Delta^2 u + \beta\Delta u - \mu_1 u + g(x,u) = h & em\ \Omega, \\ \mathbf{B}u = 0 & em\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{0-3}$$

Teorema 0.1 *Suponha* $\alpha \geq 0$ *e* $-\infty < \beta < \lambda_1\alpha$*, onde* λ_1 *é o primeiro autovalor de* $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$*. Seja* $f \in L^2(\Omega)$ *com* $f = t\phi_1 + h,\ \int \phi_1 h = 0,\ t \in \mathbb{R}$*. Suponha que g satisfaz as condições de Carathéodory e*

$$|g(x,s)| \leq \widetilde{h}(x),\ x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R},\ para\ algum\ \widetilde{h} \in L^\infty(\Omega). \tag{0-4}$$

Então,

(i) *existe um conjunto limitado* $\Lambda_h \subset \mathbb{R}$ *tal que o problema 0-3 admite solução fraca* $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ *se e somente se* $t \in \Lambda_h$*.*

Ademais, se

$$sg(x,s) \leq 0,\ x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R}, \tag{0-5}$$

então

(ii) *0-3 admite solução fraca* $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ *se* $t = 0$ *e* $h \in L^\infty(\Omega)$*.*

Além disso,

(iii) *se* $h \in L^\infty$ *e g satisfaz*

$$\begin{array}{c} sg(x,s) < 0\ para\ x \in \Omega\ e\ |s| \geq T,\ para \\ algum\ T > 0, com\ g\ contínua\ em\ \Omega \times (-T,T)^c, \end{array} \tag{0-6}$$

e

$$g(x,s) \overset{s\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0,\ q.t.p.\ x \in \Omega \tag{0-7}$$

então, existem números reais a_*, b_* *com* $a_* < 0 < b_*$ *tais que*

$$\Lambda_h^* = [a_*, 0) \cup (0, b^*] \subset \Lambda_h,$$

e 0-3 admite pelo menos duas soluçoes se $t \in \Lambda_h^*$*.*

A demonstração do Teorema 0.1 será feita no Capítulo 5, e utilizará o próximo teorema (cf. [25]), que é demonstrado no Capítulo 2.

Teorema 0.2 *Seja X espaço de Banach,* $U \subset X$ *aberto limitado e* $f : \mathbb{R} \times U \to X$ *compacta contínua tal que*

i) $x \neq f(\lambda, x)\ \forall\ (\lambda, x) \in [-\infty, \infty] \times \partial U$

ii) $deg(I - f_{\lambda_0}, U, 0) \neq 0$ *para algum* $\lambda_0 \in \mathbb{R}$

Então

$$\mathfrak{S} = \{(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times \overline{U};\ x = f(\lambda, x)\},$$

contém uma componente conexa $\mathfrak{C}$ *tal que*

$$\mathfrak{C} \cap (\{\lambda\} \times X) \neq \emptyset\ \forall\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

No próximo teorema (cf. [15]), estudamos 0-1 sendo $f : \Omega \times [0,\infty) \times (-\infty,0) \to \mathbb{R}$ assintoticamente linear na origem no sentido

H1- existem constantes a_0, b_0, a^0, b^0 com

$$a_0 + b_0 > 0,\ a^0 + b^0 > 0,$$

tais que

$$a_0 u - b_0 p - \xi_1(x,u,p) \leq f(x,u,p) \leq a^0 u - b^0 p + \xi_2(x,u,p),$$

para $(x,u,p) \in \Omega \times [0,\infty) \times (-\infty,0]$, onde

$$\xi_1, \xi_2 : \Omega \times [0,\infty) \times (-\infty,0] \to [0,\infty),$$

são funções contínuas satisfazendo

$$\lim_{|(u,p)| \to 0} \frac{\xi_j(x,u,p)}{|(u,p)|} = 0 \ para\ cada\ x \in \Omega\ e\ j = \in \{1,2\},$$

e

$$\frac{|\xi_j(x,u,p)|}{|(u,p)|} \leq \gamma_j(x)\ para\ cada\ x \in \Omega,\ |(u,p)| > 0,\ j \in \{1,2\}\ e\ \gamma_j \in L^\infty(\Omega),$$

(observamos que $|(u,p)| = \sqrt{u^2 + p^2}$), assintoticamente linear no infinito no sentido

H2- existem constantes $c_\infty, d_\infty, c^\infty, d^\infty$ com

$$c_\infty + d_\infty > 0,\ c^\infty + d^\infty > 0,$$

tais que

$$c_\infty u - d_\infty p - \eta_1(x,u,p) \leq f(x,u,p) \leq c^\infty u - d^\infty p + \eta_2(x,u,p),$$

para $(x,u,p) \in \Omega \times [0,\infty) \times (-\infty,0]$, onde

$$\eta_1, \eta_2 : \Omega \times [0,\infty) \times (-\infty,0] \to [0,\infty),$$

são funções contínuas satisfazendo

$$\lim_{|(u,p)| \to 0} \frac{\eta_j(x,u,p)}{|(u,p)|} = 0 \ para\ cada\ x \in \Omega\ e\ j \in \{1,2\},$$

e

$$\frac{|\eta_j(x,u,p)|}{|(u,p)|} \leq \zeta_j(x)\ para\ cada\ x \in \Omega,\ |(u,p)| > 0,\ j \in \{1,2\}\ e\ \zeta_j \in L^\infty(\Omega).$$

Definimos
$$\mu_1(\theta,\zeta)=\frac{\lambda_1}{\theta+\zeta\lambda_1},$$
onde θ,ζ são números reais não negativos tais que
$$\theta+\zeta>0.$$

Teorema 0.3 *Suponha H1, H2 e*

H3- *existem números reais não negativos a_1,a_2 com $a_1+a_2>0$ tais que*
$$f(x,u,p)\geq a_1u-a_2p,\ \textit{para cada}\ (x,u,p)\in\Omega\times[0,\infty)\times(-\infty,0].$$

Se além disso, ou
$$\mu_1(c_\infty,d_\infty)<1<\mu_1(a^0,b^0),$$
ou
$$\mu_1(a_0,b_0)<1<\mu_1(c^\infty,d^\infty),$$
então, o problema 0-1 admite pelo menos uma solução fraca positiva $u\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$.

Teorema 0.4 *Seja X espaço de Banach real e $f:\mathbb{R}\times X\to X$ compacto contínuo.*
Seja $\Phi(\lambda,u)=u-f(\lambda,u)$ e faça $\Phi_\lambda(u)=\Phi(\lambda,u)$.
Suponha que $\Phi(\lambda,0)=0\ \forall\ \lambda\in\mathbb{R}$.
Seja $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ tal que a e b não são pontos de bifurcação da equação
$$\Phi(\lambda,u)=0,$$
com relação a curva $(\lambda,0)$ de soluções triviais.
Suponha que
$$ind(\Phi_a,0)\neq ind(\Phi_b,0).$$
Seja
$$\mathfrak{S}_0=\overline{\{(\lambda,u)\in\mathbb{R}\times X;\ \Phi(\lambda,u)=0,\ u\neq 0\}}\cup([a,b]\times\{0\})$$
Seja $\mathfrak{C}_0$ a componentes conexa de $\mathfrak{S}_0$ que contém $[a,b]\times\{0\}$.
Então, ou
$$I)\ \mathfrak{C}_0\ \textit{é ilimitada em}\ \mathbb{R}\times X,\ ou,$$
$$II)\ \mathfrak{C}_0\cap((\mathbb{R}\times[a,b])\times\{0\})\neq\emptyset.$$

A demonstração do Teorema 0.3 será feita no Capítulo 6, e utilizará o Teorema 0.4 (Cf. [24]), que é demonstrado no Capítulo 3.

No Capítulo 1, faremos uma revisão sobre a teoria do grau topológico, incluindo as principais propriedades e demonstraremos o teorema da invariância por homotopia generalizada (cf. Teorema 1.6 no Capítulo 1 e pág. 55 de [2]).

Nos Capítulos 2 e 5 apresentaremos motivação e aspectos históricos relativos aos Teoremas 0.1 e 0.2 e nos Capítulos 3 e 6 apresentaremos motivação e aspectos históricos relativos aos Teoremas 0.3 e 0.4.

CAPÍTULO 1

Teoria do Grau Topológico: Uma Revisão

Nesse capítulo, faremos um resumo da teoria do grau topológico, evidenciando aquelas propriedades que nos serão mais necessárias.

O grau é um invariante topológico, que nos permite de uma maneira "genérica", saber se uma determinada equação possui solução. Para um texto introdutório, recomendamos [6] e para uma melhor compreensão sobre o assunto, recomendamos [7] e [12].

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado.

Seja $C^k(\overline{\Omega})$ com $k \in \mathbb{N}$, o conjunto de todas as funções $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$, que possuem k derivadas contínuas até a fronteira, isto é, as derivadas podem ser estendidas continuamente até a fronteira de Ω.

Suponha que $f \in C^2(\overline{\Omega})$, $0 \notin f(\partial\Omega)$ e 0 não é valor singular de f, isto é, $\forall\, x \in \Omega$, tal que $f(x) = 0$, temos que $det f'(x) \neq 0$.

Definimos o grau de f em Ω com relação a 0 por

$$deg(f,\Omega.0) = \sum_{x \in f^{-1}(\{0\})} sgn(det f'(x)), \tag{1-1}$$

onde sgn é a função sinal. Convencionamos $\sum\limits_{\emptyset} = 0$.

Antes de mais nada, devemos mostrar que essa definição é consistente, isto é, a soma em questão faz sentido. Afirmamos que $f^{-1}(\{0\})$ é finito. De fato, suponha por absurdo que $f^{-1}(\{0\})$ seja infinito. Ora, como $\overline{\Omega}$ é compacto, segue que existe $x \in \Omega$ e uma sequência $(x_n) \subset \Omega$ tal que

$$x_n \longrightarrow x.$$

Segue da continuidade de f que $x \in f^{-1}(\{0\})$. Como x é um valor regular, e $f \in C^2(\overline{\Omega})$, concluímos utilizando o teorema da função inversa que existe um aberto U contendo x, e um aberto V contendo 0 tal que

$$f_{|U} : U \to V,$$

é um difeomorfismo.

Impossível, pois existem pontos $x_n \in U$ $(x_n \neq x)$ tais que $f(x_n) = 0$, portanto, $f^{-1}(\{0\})$ é finito.

Para exemplificar, considere a função $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^2 - 1.$$

Note que $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ e 0 não é valor singular de f, portanto, podemos calcular o grau de f. Segue da definição que

$$deg(f,(-2,2),0) = sgn(f'(1)) + sgn(f'(-1)) = 0.$$

O grau definido dessa forma, tem suas aplicações, mas ainda não nos é muito útil, pois em geral, resolver um dado problema, significa trabalhar com funções que não precisam ser diferenciáveis. Deste modo, estenderemos o grau para funções apenas contínuas e, para valores singulares. Não faremos todo o processo aqui, entrentanto, indicaremos os passos a serem dados.

1º passo: O grau para valores singulares.

Para poder considerar valores singulares, ao invés de valores regulares, utilizamos o teorema de Sard que nos diz que sob determinadas condições, a medida do conjunto de valores singulares é zero. No nosso caso, essas condições são satisfeitas, de modo que, a extensão consiste em tomar valores regulares próximos do dado valor singular e calcular o grau para esse valores regulares. Para terminar a extensão, basta mostrar que o grau não depende do valor regular que você tome desde que, a distância entre o valor regular e o singular seja pequena.

2º passo: O grau para funções contínuas.

Seja $f \in C(\overline{\Omega})$. Utilizando teorema de aproximações de funções, como por exemplo, o teorema de Weirstrass, podemos aproximar a função f por funções de classe $C^2(\overline{\Omega})$, logo, definimos o grau f em Ω com relação a 0, como sendo o grau de qualquer função $g \in C^2(\overline{\Omega})$, que esteja próxima de f. Para terminar a extensão, basta mostrar que o grau não depende da função g que tome, desde que a distância entre a função g e a função f seja pequena.

Concluímos dos passos precedentes a seguinte definição:

Definição 1.1 *Seja $f \in C(\overline{\Omega})$ e $0 \notin f(\partial\Omega)$. Definimos $deg(f,\Omega,0) \equiv deg(g,\Omega,0)$, onde $g \in C^2(\overline{\Omega})$ é qualquer função tal que $\|g - f\|_{L^\infty(\Omega)} < dist(0, f(\partial\Omega))$ e $deg(g,\Omega,0)$ é dado pelo passo 1.*

Listamos abaixo a três principais propriedades do grau.

- **Normalização** - $deg(I,\Omega,0) = 1$ se $0 \in \Omega$,

- **Aditividade** - $deg(f,\Omega,0) = deg(f,\Omega_1,0) + deg(f,\Omega_2,0)$, onde Ω_1 e Ω_2 são abertos do $\mathbb{R}^N$ tais que $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ e $0 \notin f(\overline{\Omega} \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2))$,
- **Invariância por Homotopia** - Seja $H : [0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^N$ tal que $H \in C([0,1] \times \overline{\Omega})$. Então,
$deg(H(t,\cdot),\Omega,0) = constante$, $\forall\, t \in [0,1]$ se $0 \notin H([0,1] \times \partial\Omega)$.

Segue imediatamente das propriedades acima, as seguintes propriedades:

- **Solução** - Se $deg(f,\Omega,0) \neq 0$ então, existe $x \in \Omega$ tal que $f(x) = 0$,
- **Excisão** - Seja $U \subset \Omega$ um aberto. Se $x \notin f(\overline{\Omega} \backslash U)$ então, $deg(f,\Omega,0) = deg(f,U,0)$.

Enunciamos uma última propriedade, que nos será útil adiante.

- **Produto Cartesiano** - Suponha $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ é um aberto limitado de $\mathbb{R}^N$ com Ω_1 aberto em $\mathbb{R}^p$ e Ω_2 aberto em $\mathbb{R}^q$, $p+q = N$. Suponha que $f : \overline{\Omega_1} \times \overline{\Omega_2} \to \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ seja tal que $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$, onde $f_1 : \overline{\Omega_1} \to \mathbb{R}^p$, $f_2 : \overline{\Omega_2} \to \mathbb{R}^q$ são contínuas. Suponha que $0 \notin f_i(\partial\Omega_i)$, $i = 1,2$. Então,

$$deg(f,\Omega,0) = deg(f_1,\Omega_1,0)deg(f_2,\Omega_2,0).$$

Todas as propriedade acima, utilizadas em conjunto, nos fornecem ferramentas poderosas para estudar o conjunto solução de determinadas equações. Observamos que o grau que ficou definido acima, é conhecido como o grau de Brouwer.

Segue como uma aplicação imediata do grau de Brouwer, o seguinte teorema:

Teorema 1.2 (Brouwer) *Seja $C \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto limitado, fechado e convexo. Suponha que $F : C \to C$ é contínua. Então, existe $x \in C$ tal que $F(x) = x$.*

Demonstração. Defina $T : C \to C$ por

$$T(x) = x - F(x).$$

Suponha que C é uma bola, isto é,

$$C = \{x \in \mathbb{R}^N : \ \|x\| \leq R\}, R > 0.$$

Suponha que $T(x) \neq 0$ com $x \in \partial C$, caso contrário, o teorema para o caso da bola está provado.

Defina $H : [0,1] \times C \to C$ por

$$H(t,x) = x - tF(x).$$

Afirmação 1: $H(t,x) \neq 0$ se $(t,x) \in \mathbb{R} \times \partial C$.

De fato, o caso $t = 0$ é imediato, enquanto o caso $t = 1$ segue da hipótese: $T(x) \neq 0$ com $x \in \partial C$.

Suponha por absurdo que exista $(t,x) \in (0,1) \times \partial C$ tal que

$$x = tF(x),$$

logo,

$$\|F(x)\| = \frac{\|x\|}{t} \geq \|x\| = R, \tag{1-2}$$

absurdo, pois $F(x) \in C$.

Segue da Afirmação 1 e da propriedade de invariância por homotopia que

$$deg(Id, int(C), 0) = deg(H(1,\cdot), int(C), 0) = 1,$$

portanto, utilizando a propriedade de solução, concluímos que existe $x \in int(C)$ tal que $F(x) = x$. Isso demonstra o teorema para o caso onde C éuma bola.

Se C não for uma bola, então como C é limitado, existe uma bola B que contém C. Como C é fechado e convexo, segue do teorema de Dugundji (cf. Teorema 7.1) que existe $\widetilde{F} : B \to B$ tal que

1 $\widetilde{F}$ é contínua,

2 $\widetilde{F}_{|C} = F$,

3 $\widetilde{F}(C) \subset conv(\overline{F(C)}) \subset C$.

Segue do item 3, que não existe $x \in \partial B$ tal que $\widetilde{F}(x) = x$, logo, utilizando a primeira parte da demonstração, concluímos que existe $x \in int(B)$ tal que $\widetilde{F}(x) = x$.

Utilizando o item 3 novamente, obtemos que

$$F(x) = x.$$

Isto conclui a demonstração. □

Passamos agora a extensão do grau para espaços de dimensão infinita. Essa extensão é conhecida como o grau de Leray-Schauder. Como fizemos acima, apenas comentaremos os passos, sem no entanto, dar provas apodíticas.

Seja X um espaço de Banach e $\Omega \subset X$ um conjunto aberto limitado. Seja $F : \overline{\Omega} \to X$ um operador compacto, isto é, F é contínuo e transforma conjunto limitados em conjuntos relativamente compactos. Suponha que $0 \notin (I-F)^{-1}(\{0\})$.

Passo 1: O grau não depende da base escolhida.

Notamos primeiro, que para qualquer espaço vetorial X isomorfo a $\mathbb{R}^N$, o grau está bem definido. De fato, basta usar o isomorfismo. Do mesmo modo, usando a matriz de mudança de base (que é um isomorfimo), é possível provar que o grau não depende da base.

Passo 2: Se o posto de F é finito então, está bem definido o grau para funções da forma $I-F$.

Se o posto de F é finito então, existe um subespaço de fimensão finita U, que contém 0, tal que $R(F) \subset U$ ($R(F)$ é a imagem de F). Definimos o grau de $I-F$, como sendo o grau de Brouwer de $(I-F)_{|\overline{\Omega}\cap U}$ em Ω com respeito a 0. Para completar a definição, basta provar que o grau não depende do subespaço U escolhido.

Passso 3: O grau está bem definido para funções da forma $I-F$.

De fato, é possível provar que F pode ser aproximado por operadores compactos de posto finito. Definimos o grau de $I-F$, como sendo o grau de $I-F_1$ em Ω com respeito a 0, onde F_1 é um operador compacto de posto finito, que está próximo de F. Para completar a demonstração, basta provar que o grau não depende do operador F_1 escolhido.

Com os três passos acima temos a seguinte definição:

Definição 1.3 *Seja $F : \overline{\Omega} \to X$ um operador compacto e $0 \notin (I-F)^{-1}(\{0\})$. Definimos $deg(I-F,\Omega,0) \equiv deg((I-F_1)_{\Omega_1},\Omega_1,0)$, onde F_1 é um operador compacto de posto finito tal que $\sup_{\overline{\Omega}} \|F_1x - Fx\| < dist(0,(I-F)(\partial\Omega))$, $\Omega_1 = \Omega \cap X_1$, onde X_1 é qualquer subespaço de X tal que $dim(X_1) < \infty$, $0 \in X_1$, $R(F_1) \subset X_1$ e $deg((I-F_1)_{\Omega_1},\Omega_1,0)$ é o grau de Brouwer.*

Observamos que todas as propriedade enunciadas acima para o grau de Brouwer, continuam válidas para o grau de Leray-Schauder. O operador $I-F$ com F compacto, é chamado de perturbação compacta da identidade. Ademais, temos o análogo do Teorema 1.2:

Teorema 1.4 (Schauder) *Seja X um espaço de Banach e $C \subset X$ um conjunto limitado, fechado e convexo. Suponha que $F : C \to C$ é compacto. Então, existe $x \in C$ tal que $F(x) = x$.*

Demonstração. Defina $T : C \to C$ por

$$T(x) = x - F(x).$$

Suponha que C é uma bola, isto é,

$$C = \{x \in \mathbb{R}^N : \ \|x\| \leq R\}, R > 0.$$

Suponha que $T(x) \neq 0$ com $x \in \partial C$, caso contrário, o teorema para o caso da bola está provado.

Defina $H : [0,1] \times C \to C$ por

$$H(t,x) = x - tF(x).$$

Afirmação 2: $H(t,x) \neq 0$ se $(t,x) \in \mathbb{R} \times \partial C$.

De fato, o caso $t = 0$ é imediato, enquanto o caso $t = 1$ segue da hipótese: $T(x) \neq 0$ com $x \in \partial C$.

Suponha por absurdo que exista $(t,x) \in (0,1) \times \partial C$ tal que

$$x = tF(x),$$

logo,

$$\|F(x)\| = \frac{\|x\|}{t} \geq \|x\| = R, \tag{1-3}$$

absurdo, pois $F(x) \in C$.

Segue da Afirmação 1 e da propriedade de invariância por homotopia que

$$deg(Id, int(C), 0) = deg(H(1,\cdot), int(C), 0) = 1,$$

portanto, utilizando a propriedade de solução, concluímos que existe $x \in int(C)$ tal que $F(x) = x$. Isso demonstra o teorema para o caso onde C éuma bola.

Se C não for uma bola, então como C é limitado, existe uma bola B que contém C. Como C é fechado e convexo, segue do teorema de Dugundji (cf. Teorema 7.1) que existe $\widetilde{F} : B \to B$ tal que

1 $\widetilde{F}$ é contínua,

2 $\widetilde{F}_{|C} = F$,

3 $\widetilde{F}(C) \subset conv(\overline{F(C)}) \subset C$.

Concluímos do item 3 e do Teorema de Mazur (cf. Teorema 7.3) que $\widetilde{F}$ é compacto. Além disso, não existe $x \in \partial B$ tal que $\widetilde{F}(x) = x$, logo, utilizando a primeira parte da demonstração, concluímos que existe $x \in int(B)$ tal que $\widetilde{F}(x) = x$.

Utilizando o item 3 novamente, obtemos que

$$F(x) = x.$$

Conclui-se aqui a demonstração do teorema. $\square$

Observamos que os teoremas de Brouwer e Schauder, continuam válidos para conjuntos hemeomorfos a conjuntos limitados, fechados e convexos.

Daremos agora outro resultado sobre pontos fixos, conhecido com o teorema do ponto fixo de Scheffer.

Teorema 1.5 *Seja X um espaço de Banach e $F : [0,1] \times X \to X$ um operador compacto. Suponha,*

$$F(0,u) = 0,\ \forall\, x \in X.$$

Suponha que exista $R > 0$ tal que

$$x = F(s,x) \to\ \|x\| < R,\ \forall\, (s,x) \in [0,1] \times X.$$

Então, para todo $s \in [0,1]$, existe $x = x_s \in B_R(0) = \{x \in X :\ \|x\| < R\}$ tal que

$$x = F(s,x).$$

Demonstração. Seja $H : [0,1] \times \overline{B_R(0)} \to X$ definido por

$$H(s,x) = x - F(s,x).$$

Afirmação 3: $0 \notin H([0,1] \times \partial B_R(0))$.
De fato, se existisse $(s,x) \in [0,1] \times \partial B_R(0)$ tal que

$$H(s,x) = 0,$$

então, seguiria das hipóteses que $\|x\| < R$, absurdo, pois, $x \in \partial B_R(0)$.
Logo, utilizando a propriedade da invariância por homotopia, concluímos que

$$deg(Id, B_R(0), 0) = deg(H(s,\cdot), B_R(0), 0) = 1,\ \forall\, s \in [0,1],$$

donde, pela propriedade de solução , obtemos que

$$\forall\, s \in [0,1],\ \exists\, x = x_s \in B_R(0) \text{ tal que } x = F(s,x).$$

$\square$

Para concluir esse capítulo, provaremos o seguinte teorema (cf. [24] ou [2] pág. 55), que nos será bastante útil:

Teorema 1.6 (Princípio da Invariância por Homotopia Generalizado) *Sejam X espaço de Banach, $O \subset [a,b] \times X$ aberto, limitado e $F : \overline{O} \to X$ compacto.*

Seja

$$\Phi_\lambda(x) \equiv \Phi(\lambda,x) = x - F(\lambda,x).$$

Suponha que

$$\Phi_\lambda(x) \neq 0,\ \forall\ (\lambda,x) \in \partial O. \tag{1-4}$$

Então, se $\lambda \in [a,b]$, temos que

$$deg(\Phi_\lambda, O_\lambda, 0) = constante\ se\ \lambda \in [a,b],$$

onde, $O_\lambda = \{x \in X :\ (\lambda,x) \in O\}$.

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponha que $O \neq \emptyset$. Podemos também supor que

$$a = \inf\{\lambda :\ O_\lambda \neq \emptyset\}\ e\ \ b = \sup\{\lambda :\ O_\lambda \neq \emptyset\}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, defina

$$\hat{O} \equiv O \cup (a-\varepsilon, a] \times O_a) \cup ([b, b+\varepsilon) \times O_b).$$

Note que $\hat{O}$ é um aberto limitado de $\mathbb{R} \times X$. Aplicando o teorema de Dugundji (cf. Apêndice Teorema 7.1) a função F, podemos estendê-la a uma função $\widetilde{F} : \mathbb{R} \times X \to X$ contínua.

Como $\overline{F(\overline{O})} \subset conv(\overline{F(\overline{O})})$, e pelo teorema de Dugundji (cf. Apêndice Teorema 7.1), temos que $\widetilde{F}(\mathbb{R} \times X) \subset conv(\overline{F(\overline{O})})$, concluímos usando o teorema de Mazur (cf. Apêndice Teorema 7.3) que $\widetilde{F}$ também é compacto.

Seja ,

$$\widetilde{\Phi}(\lambda,x) = (\lambda - \lambda^*, x - \widetilde{F}(\lambda,x)),\ a \leq \lambda^* \leq b\ fixo.$$

Afirmação 1: $\widetilde{\Phi}(\lambda,x) \neq (0,0)$ se $(\lambda,x) \in \partial\hat{O}$.

De fato, se $\widetilde{\Phi}(\lambda,x) = (0,0)$ então,

$$\lambda = \lambda^*\ e\ \ x = \widetilde{F}(\lambda^*,x),$$

entretanto, $\widetilde{F}(\lambda^*,x) = F(\lambda^*,x)$, pois, $\widetilde{F}$ é uma extensão de F, donde, utilizando 1-4, concluímos a Afirmação 1.

Segue da Afirmação 1 e do fato que $\widetilde{\Phi}$ é uma perturbação compacta da identidade, que $deg(\widetilde{\Phi}, \hat{O}, 0)$ está bem definido para todo $\lambda^* \in [a,b]$ e além disso, pela propriedade da invariância por homotopia,

$$deg(\widetilde{\Phi}, \hat{O}, 0) = constante\ \forall\ \lambda^* \in [a,b]. \tag{1-5}$$

Considera a homotopia $H:[0,1]\times[a,b]\times X\to\mathbb{R}\times X$ definida por

$$H(t,\lambda,x)\equiv\widetilde{\Phi}_t(\lambda,x)=(\lambda-\lambda^*,x-t\widetilde{F}(\lambda,x)-(1-t)\widetilde{F}(\lambda^*,x)).$$

Afirmação 2: $\widetilde{\Phi}_t(\lambda,x)\neq(0,0)\ \forall\ (\lambda,x)\in\partial\hat{O}\ e\ t\in[0,1]$.
Com efeito, se $\widetilde{\Phi}_t(\lambda,x)=(0,0)$ então,

$$\lambda=\lambda^*\ e\ \ x=\widetilde{F}(\lambda^*,x),$$

mas, como vimos anteriormente, isso não ocorre em $\partial\hat{O}$, logo,

$$\widetilde{\Phi}_t(\lambda,x)\neq(0,0),\ \forall\ (\lambda,x)\in\partial\hat{O}\ e\ t\in[0,1].$$

Pela propriedade da invariância por homotopia, podemos concluir da Afirmação 2 que

$$deg(\widetilde{\Phi}_1,\hat{O},0)=deg(\widetilde{\Phi}.\hat{O},0)=deg(\widetilde{\Phi}_0,\hat{O},0). \tag{1-6}$$

Como $\widetilde{\Phi}_0(\lambda,x)=(0,0)\Leftrightarrow x\in O_{\lambda^*}$ então, pela propriedade da excisão, concluímos que

$$deg(\widetilde{\Phi}_0,\hat{O},0)=deg(\widetilde{\Phi}_0,(a-\varepsilon,b+\varepsilon)\times O_{\lambda^*},0). \tag{1-7}$$

De 1-4 temos que $0\notin(x-\widetilde{F}(\lambda^*,x))(\partial O_{\lambda^*})$. Por outro lado, $\lambda-\lambda^*\neq0$ se $\lambda\in\{a-\varepsilon,b+\varepsilon\}$, logo, pela propriedade do produto cartesiano,

$$deg(\widetilde{\Phi}_0,(a-\varepsilon,b+\varepsilon)\times O_{\lambda^*},0)=deg(\lambda-\lambda^*,(a-\varepsilon,b+\varepsilon),0)deg(\Phi_{\lambda^*},O_{\lambda^*},0). \tag{1-8}$$

Pela propriedade da normalização, temos que

$$deg(\lambda-\lambda^*,(a-\varepsilon,b+\varepsilon),0)=1. \tag{1-9}$$

Segue de 1-8 e 1-9 que

$$deg(\Phi_{\lambda^*},O_{\lambda^*},0)=deg(\widetilde{\Phi}_0,(a-\varepsilon,b+\varepsilon)\times O_{\lambda^*},0), \tag{1-10}$$

portanto, de 1-5, 1-6 e 1-7 concluímos,

$$deg(\Phi_{\lambda^*},O_{\lambda^*},0)=deg(\widetilde{\Phi},\hat{O},0)=constante,\ \forall\ \lambda^*\in[a,b].$$

A útlima igualdade conclui a demonstração do teorema. □

Concluímos aqui o Capítulo 1, que será muito importante, principalmente nos Capítulos 2 e 3.

CAPÍTULO 2

Componentes Conexas de Pontos Fixos

Esse capítulo tratará sobre a topologia de determinado conjunto, a saber, o conjunto solução para uma dada equação. Ficará mais evidente a importância desse capítulo, no Capítulos 5, no entanto, vale a pena observar que os resultados obtidos aqui, são de per si muito importantes. Para ter uma idéia disso, notamos que o primeiro lema que é o teorema da continuação de Leray-Schauder, foi demonstrado a mais de um século atrás, e até hoje continua sendo usado por diversos matemáticos. Para mais detalhes o leitor pode conferir [22].

Passemos agora aos resultados. Primeiro demonstraremos o teorema da continuação de Leray-Schauder (cf. [24]).

Teorema 2.1 (Continuação de Leray-Schauder) *Seja X espaço de Banach e $D \subset X$ aberto limitado. Suponha que $f : [\alpha, \beta] \times \overline{D} \to X$ com $\alpha < \beta$ seja compacto.*

Defina $\Phi : [\alpha, \beta] \times \overline{D} \to X$ por

$$\Phi(s,x) = x - f(s,x).$$

Assuma

i) $\Phi(s,x) \neq 0 \; \forall \, s \in [\alpha, \beta]$ *e* $x \in \partial D$,

ii) $deg(\Phi(s,\cdot), D, 0) \neq 0$ *para algum* $s \in [\alpha, \beta]$.

Defina

$$S_{\alpha,\beta} = \{(s,x) \in [\alpha, \beta] \times \overline{D} \, : \, \Phi(s,x) = 0\}.$$

Então, existe $C_{\alpha,\beta}$ componente conexa tal que

$$C_{\alpha,\beta} \cap (\{\alpha\} \times D) \neq \emptyset, \tag{2-1}$$

e

$$C_{\alpha,\beta} \cap (\{\beta\} \times D) \neq \emptyset. \tag{2-2}$$

Demonstração. Por i) e ii) concluímos utilizando a propriedade de invariância por homotopia generalizada (cf. Teorema 1.6) que

$$deg(\Phi(s,\cdot),D,0) \neq 0 \ \forall \ s \in [\alpha,\beta].$$

Deste modo, utilizando a propriedade de solução (cf. pág. 16), concluímos que

$$A \equiv S_{\alpha,\beta} \cap (\{\alpha\} \times \overline{D}) \neq \emptyset,$$

e

$$B \equiv S_{\alpha,\beta} \cap (\{\beta\} \times \overline{D}) \neq \emptyset.$$

Como f é compacto então, Φ é próprio, logo,

$$S_{\alpha,\beta} = (\Phi^{-1}(\{0\}) \text{ é compacto.}$$

Note que A,B são fechados em $S_{\alpha,\beta}$, pois, são intersecção de fechados.

Suponha que não existe $C_{\alpha,\beta}$ conjunto conexo satisfazendo 2-1 e 2-2.

Então, pelo lema de Whyburn (Cf Apêndice Teorema 7.5), existem compactos M_A e M_B tais que

$$A \subset M_A,\ B \subset M_B,\ M_A \cap M_B = \emptyset \ e \ M_A \cup M_B = S_{\alpha,\beta}.$$

Seja

$$d \equiv dist(M_A, M_B) > 0.$$

Seja U uma $\frac{d}{2}$-vizinhança aberta de M_A em $[\alpha,\beta] \times \overline{D}$.

Note que:

Se $x \in \partial U \Rightarrow dist(x, M_A) = dist(x, M_B) = \frac{d}{2}$, portanto,

$$\partial U \cap S_{\alpha,\beta} = \emptyset \ e \ A \subset M_A \subset U.$$

Pela invariância do grau por homotopia generalizada, obtemos

$$deg(\Phi(s,\cdot),U_s,0) = constante,\ se\ s \in [\alpha,\beta],$$

onde $U_s = \{x \in X : (s,x) \in U\}$.

Como $A \subset U$, concluímos pela propriedade de excisão que

$$deg(\Phi(\alpha,\cdot),U_\alpha,0) = deg(\Phi(\alpha,\cdot),D,0) \neq 0.$$

Por outro lado

$$deg(\Phi(\beta,\cdot),U_\beta,0)=0,\ pois\ U_\beta\cap B=\emptyset.$$

Absurdo, logo existe $C_{\alpha,\beta}$ componente conexa que satisfaz 2-1 e 2-2.

□

O próximo resultado, é uma aplicação direta do teorema da continuação de Leray-Schauder (Conferir [5]).

Teorema 2.2 *Seja X um espaço de Banach real e $C\subset X$ convexo, fechado e limitado. Seja*

$$K:[\alpha,\beta]\times C\to C,\ \alpha<\beta,\ K\ compacto$$

e

$$S_{\alpha,\beta}=\{(s,x)\in[\alpha,\beta]\times C:\ K(s,x)=x\}.$$

Então, existe uma componente conexa $\mathfrak{C}$ que conecta

$$\{\alpha\}\times C\ \grave{a}\ \{\beta\}\times C.$$

Demonstração. Considere a envoltória convexa de $\overline{K([\alpha,\beta]\times C)}$, i.e.,

$$conv(\overline{K([\alpha,\beta]\times C)}).$$

Faça $C_0=\overline{conv(\overline{K([\alpha,\beta]\times C)})}$.

Pelo teorema de Mazur (Cf Apêndice Teorema 7.3), C_0 é compacto.

Tome uma bola aberta com centro na orgiem $B\subset X$ tal que $C\subset B$.

Pelo teorema de Dugundji (Cf Apêndice Teorema 7.1), temos que existe

$$\widetilde{K}:[\alpha,\beta]\times\overline{B}\to C_0,$$

tal que $\widetilde{K}$ é contínuo e $\widetilde{K}_{|[\alpha,\beta]\times C}=K$.

Seja $\widetilde{S}=\{(s,x)\in[\alpha,\beta]\times B:\ \widetilde{K}(s,x)=x\}$.

Afirmação 1: $\widetilde{K}$ é compacto e $\widetilde{S}=S_{\alpha,\beta}$.

De fato, como a imagem de $\widetilde{K}$ é compacta, segue que $\widetilde{K}$ é compacto. Por outro lado, como $S_{\alpha,\beta}\subset\widetilde{S}$, basta mostrar que $\widetilde{S}\subset S_{\alpha,\beta}$. Mas, se $(s,x)\in\widetilde{S}$ então $\widetilde{K}(s,x)=x$. Ora, como $x\in C_0$ e $C_0\subset B$, só podemos concluir que $x\in C$, donde, $(s,x)\in S_{\alpha,\beta}$.

Afirmação 2: $\widetilde{K}(s,x)\neq x\ \forall\ s\in[\alpha,\beta]\ e\ x\in\partial B$.

Com efeito, se $C_0\subset B$, então é impossível que $\widetilde{K}(s,x)=x$ para algum $x\in\partial B$.

Considere a homotopia $\Phi : [\alpha,\beta]\times\overline{B}\to X$ dada por

$$\Phi(s,x) = x-\widetilde{K}(s,x).$$

Seque da Afirmação 2 que $0\notin\Phi([\alpha,\beta]\times\partial B)$.

Pela propriedade de invariância por homotopia do grau de Leray-Schauder, temos

$$deg(\Phi(s,\cdot),B,0) = \ constante\ \forall\ s\in[\alpha,\beta].$$

Daí,

$$deg(\Phi(s,\cdot),B,0) = deg((I-\widetilde{K})(\alpha,\cdot),B,0)\equiv d_0.$$

Afirmação 3: $d_0\neq 0$.

Considere a homotopia $\Phi_1 : [0,1]\times\overline{B}\to\overline{B}$ dada por

$$\Phi_1(t,x) = x-t\widetilde{K}(\alpha,x).$$

Note que $0\notin\Phi_1([0,1]\times\partial B)$.

De fato, perceba que se

$$0=\Phi_1(t_0,x_0),\ t_0\in[0,1]\ e\ x_0\in\partial B$$

então,

$$x_0 = t_0\widetilde{K}(t_0,x_0).$$

Donde,

$$\|x_0\| = t_0\|\widetilde{K}(t_0,x_0)\|.$$

Portanto, $t_0\neq 0$.

Daí,

$$\frac{\|x_0\|}{t_0} = \|\widetilde{K}(t_0,x_0)\| < \|x_0\|.$$

Impossível.

Pela propriedade de invariância por homotopia, segue que

$$deg(\Phi_1(0,\cdot),B,0) = deg(\Phi_1(1,\cdot),B,0),$$

donde,

$$d_0\neq 0.$$

Utilizamos a seguir o teorema da continuação de Leray-Schauder (Cf Teorema 2.1).

Note que $\widetilde{K} : [\alpha,\beta]\times\overline{B}\to C_0\subset\overline{B}$.

Temos que

- $\Phi = I - \widetilde{K}$, onde $\widetilde{K}$ é compacto
- $0 \neq \Phi([\alpha,\beta] \times \partial B)$
- $d_0 = deg(\Phi(\alpha,\cdot),B,0) \neq 0$

Portanto, existe $\mathfrak{C} \subset S_{\alpha,\beta}$ componente conexa tal que

$$\mathfrak{C} \cap (\{\alpha\} \times B) \neq \emptyset,$$

e

$$\mathfrak{C} \cap (\{\beta\} \times B) \neq \emptyset.$$

Daí (pois como vimos $k(s,x) = x$ se e somente $x \in C$),

$$\mathfrak{C} \cap (\{\alpha\} \times C) \neq \emptyset,$$

e

$$\mathfrak{C} \cap (\{\beta\} \times C) \neq \emptyset.$$

$\square$

O próximo teorema estende o teorema da continuação de Leray-Schauder, no sentido que ao invés de intervalos compactos, podemos encontrar componentes conexas cuja projeção na reta, é toda a reta (confira [25]).

Teorema 2.3 *Seja X um espaço de Banach e $U \subset X$ aberto limitado. Suponha que $f : \mathbb{R} \times \overline{U} \to X$ é compacto.*

Defina $\Phi : \mathbb{R} \times \overline{U} \to X$ por

$$\Phi(s,x) = x - f(s,x).$$

Assuma

i) $\Phi(s,x) \neq 0 \ \forall \ (s,x) \in \mathbb{R} \times \partial U$*,*

ii) $deg(\Phi(s,\cdot),U,0) \neq 0$ *para algum* $s \in \mathbb{R}$*.*

Defina

$$S_\infty = \{(s,x) \in (-\infty,\infty) \times \overline{U} : \Phi(s,x) = 0\}.$$

Então, existe uma componente conexa $\mathfrak{C} \subset S_\infty$ tal que

$$\mathfrak{C} \cap (\{s\} \times X) \neq \emptyset, \ \forall \ s \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Note que $f_{|[-n,n]\times\overline{U}}$, $n \geq 1$ *inteiro*, satisfaz as hipóteses do Teorema 2.1, portanto, para cada n, existe uma conjunto conexo $\mathfrak{C}_n$ tal que

$$\mathfrak{C}_n \cap (\{-n\} \times U) \neq \emptyset, \tag{2-3}$$

e

$$\mathfrak{C}_n \cap (\{n\} \times U) \neq \emptyset. \tag{2-4}$$

Afirmação 4: $\forall \alpha, \beta,\ -\infty < \alpha < \beta < \infty$, o conjunto

$$(\bigcup_{1}^{\infty} \mathfrak{C}_n) \cap ([\alpha, \beta] \times U),$$

é relativamente compacto em $\mathbb{R} \times U$.

De fato, note que

$$(\bigcup_{1}^{\infty} \mathfrak{C}_n) \cap ([\alpha, \beta] \times U) \subset f^{-1}_{|[\alpha,\beta]\times\overline{U}}(\{0\}).$$

Mas, $f_{|[\alpha,\beta]\times\overline{U}}$ é própria, logo, da inclusão anterior concluímos que

$$(\bigcup_{1}^{\infty} \mathfrak{C}_n) \cap ([\alpha, \beta] \times U),$$

é compacto.

Defina

$$D = \overline{\lim_{n\to\infty}} \mathfrak{C}_n = \{x \in \mathbb{R} \times U :\ \exists\ (n_i) \subset (n)\ e\ x_{n_i} \in C_{n_i}\ tal\ que\ x_{n_i} \to x\}.$$

Afirmação 5: D é fechado em $\mathbb{R} \times U$.

Com efeito, basta usar o método da diagonal de Cantor.

Daqui em diante, vamos provar que existe C^* componente conexa em D tal que

$$C^* \cap (\{s\} \times U) \neq \emptyset,\ \forall s \in \mathbb{R}.$$

Afirmação 6: $\forall z \in D$, a componente conexa C_z que contém $z \in D$ satisfaz pelo menos uma das duas asserções:

$$inf\{s : (s,x) \in C_z\} = -\infty, \tag{2-5}$$

ou

$$sup\{s : (s,x) \in C_z\} = \infty. \tag{2-6}$$

De fato, suponha por absurdo que 2-5 e 2-6 não são satisfeitas, isto é,

$$inf\{s : (s,x) \in C_z\} = a' > -\infty, \tag{2-7}$$

e

$$sup\{s : (s,x) \in C_z\} = b' < \infty. \tag{2-8}$$

Escolha n_0 de modo que

$$n \geq n_0 \;\Rightarrow\; -n < a' \; e \; n > b'.$$

Seja U_1 uma δ-vizinhança de C_z tal que

$$\overline{U_1} \subset (-n_0, n_0) \times U.$$

Temos dois casos:

1º caso: $\partial U_1 \cap D \neq \emptyset$.

Note que $D \cap \overline{U_1}$ é compacto, pois (lembre que D é fechado pela Afirmação 5)

$$D \cap \overline{U_1} \text{ é fechado},$$

e

$$D \cap \overline{U_1} \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{C}_n \times ([-n_0, n_0] \times U)}.$$

Segue da Afirmação 4 que $D \cap \overline{U_1}$ é compacto.

Note também que C_z e $\partial U_1 \cap D$ são fechados em $D \cap \overline{U_1}$. De fato, como C_z é componente conexa em D então, C_z é fechado em D, consequentemente, C_z é fechado em $\mathbb{R} \times U$. Como

$$C_z = C_z \cap (D \cap \overline{U_1}),$$

e

$$\partial U_1 \cap D = \partial U_1 \cap (D \cap \overline{U_1}),$$

segue que C_z e $\partial U_1 \cap D$ são fechados em $D \cap \overline{U_1}$.

Note que $C_z \cap (\partial U_1 \cap D) = \emptyset$, pois

$$dist(x, C_z) = \delta, \; se \; x \in \partial U_1.$$

Note que não existe componente conexa que contenha C_z e $\partial U_1 \cap D$ ao mesmo tempo, pois, C_z é por si uma componente conexa, logo, aplicando o lema de Whyburn (Cf

Apêndice Teorema 7.5) com

$$M = D \cap \overline{U_1},\ A = C_z\ e\ B = \partial U_1 \cap D,$$

temos que existem componentes conexas $M_A, M_B \subset M$ tais que

$$A \subset M_A,\ B \subset M_B,\ M_A \cup M_B = M\ e\ M_A \cap M_B = \emptyset.$$

Note que

$$dist(M_A, M_B) > 0.$$

Sejam $\varepsilon = dist(M_A, M_B)$, U_2 uma $\frac{\delta}{3}$-vizinhança de M_A e $U' = U_1 \cap U_2$.
Então,

$$C_z \subset U',\ \partial U' \cap D = \emptyset\ e\ \overline{U'} \subset (-n_0, n_0) \times U. \tag{2-9}$$

De fato, basta provar que

$$\partial U' \cap D = \emptyset,$$

mas, pela forma como U_2 foi construído ($dist(U_2, M_B) = \frac{\delta}{3}$), temos que

$$\partial U_2 \cap D = \emptyset,$$

logo

$$\partial U' \cap D = \emptyset.$$

2ºcaso: $\partial U_1 \cap D = \emptyset$
Neste caso, basta tomar $U' = U_1$ e 2-9 será satisfeito.
Pela definição de D, $\exists (n_i) \subset (n)$ e $z_{n_i} \in C_{n_i}$ tal que

$$z_{n_i} \to z.$$

Como U' é uma vizinhança de z, podemos supor sem perda de generalidade que

$$(z_{n_i}) \subset U',\ \ \forall i.$$

Afirmamos que $C_{n_i} \cap \partial U' \neq \emptyset\ \forall n_i \geq n_0$.
Suponha por absurdo que

$$C_{n_i} \cap \partial U' = \emptyset\ para\ algum\ i\ com\ n_i \geq n_0.$$

Então, temos a seguinte cisão para C_{n_i}:

$$C_{n_i} = (C_{n_i} \cap U') \cup [C_{n_i} \cap ((\mathbb{R} \times U) \backslash \overline{U'})].$$

De fato, note que os conjuntos da cisão são, por definição, abertos em C_{n_i} e ambos são não vazios, pois, por um lado existe $z_{n_i} \in C_{n_i} \cap U'$ e por outro, como $\overline{U'} \subset (-n_0, n_0) \times U$, de 2-3 e 2-4 podemos concluir que existem pontos C_{n_i} fora de $\overline{U'}$.

Mas isso é um absurdo, pois C_{n_i} é conexo, logo,

$$C_{n_i} \cap \partial U' \neq \emptyset \; \forall n_i \geq n_0.$$

Agora, escolhemos para cada i, $y_{n_i} \in C_{n_i} \cap \partial U'$.

Note,

$$\{y_{n_i}\} \subset (\bigcup_{n=1}^{\infty}) \cap ([-n_0, n_0] \times U),$$

donde,

$$\overline{\{y_{n_i}\}} \text{é compacto em } \mathbb{R} \times U.$$

Logo, como $\partial U'$ é fechado, deve existir $y^* \in \partial U'$ e uma subsequência que denotaremos por (y_{n_i}) tal que

$$y_{n_i} \to y^*.$$

Mas, por definição,

$$y^* \in D.$$

Absurdo, pois de 2-9 temos que

$$D \cap \partial U' = \emptyset,$$

portanto, a Afirmação 6 está provada.

A partir daqui, vamos provar que ao menos uma das componentes conexas da Afirmação 6, satisfaz 2-5 e 2-6 ao mesmo tempo.

Fixe $c \in (-1, 1)$ e seja

$$D(c) = D \cap (\{c\} \times U).$$

Note,

$$D(c) \subset (\bigcup_{n=1}^{\infty}) \cap ([-1, 1] \times U),$$

portanto, como $D(c)$ é fechado (pois D é fechado pela Afirmação 5 e $\{c\} \times U$ é fechado), concluímos utilizando a Afirmação 4 que

$$D(c) \text{ é compacto.}$$

Como $\mathfrak{C}_n$ é conexo e satisfaz 2-3 e 2-4, concluímos que

$$\mathfrak{C}_n \cap (\{c\} \times U) \neq \emptyset, \ \forall\, n.$$

Vamos provar que $D(c)$ é não vazio.

Para cada n, escolha $y_n \in \mathfrak{C}_n \cap (\{c\} \times U)$. Note,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{y_n\} \subset (\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{C}_n) \cap ([-1,1] \times U),$$

portanto,

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \{y_n\}} \text{ é compacto,}$$

donde, existe $y^* \in \{c\} \times U$ e uma subsequência $(y_{n_k}) \subset (y_n)$ tal que

$$y_{n_k} \to y^*.$$

Mas por definição,

$$y^* \in D,$$

donde,

$$D(C) \neq \emptyset.$$

Agora, fixe $(c,v) \in D(c)$ e seja $E(v)$ a componente conexa em D contendo (c,v). Sejam

$$\begin{aligned} \underline{\lambda}(v) &= \inf\{\lambda : (\lambda,x) \in E(v)\}, \\ \overline{\lambda}(v) &= \sup\{\lambda : (\lambda,x) \in E(v)\}. \end{aligned}$$

Ora, se para algum $(c,v) \in D(c)$ tivermos

$$\underline{\lambda}(c) = -\infty \ e \ \overline{\lambda}(v) = \infty,$$

então, o Teorema 2.3 está provado, portanto, suponha que para cada $(c,v) \in D(c)$

$$\underline{\lambda}(c) > -\infty \ e \ \overline{\lambda}(v) < \infty.$$

A Afirmação 6 nos garante que ao menos um dos dois deve ser ilimitado.

Sejam

$$\begin{aligned} A &= \{(c,v) \in D(c) : \overline{\lambda}(c) = \infty\}, \\ B &= \{(c,v) \in D(c) : \underline{\lambda}(c) = \infty\}. \end{aligned}$$

Dado $(c,v) \in A$, tome $E'(v)$ como a componente conexa em $E(v) \cap ((-\infty,1] \times U)$ que contém (c,v) e seja $U'(v)$ uma δ-vizinhança de $E'(v)$ em $(-\infty,1] \times U$ tal que $U'(v) \subset (-\underline{\lambda},1] \times U$.

Temos dois casos:

1º Caso: $\partial U'(v) \cap D \neq \emptyset$.

Procedendo como no primeiro caso da Afirmação 6, podemos encontrar $U(v)$ aberto em $(-\infty,1] \times U]$ tal que

$$E'(v) \subset U(v),\ \partial U(v) \cap D = \emptyset \ e\ \inf\{\lambda : (\lambda,x) \in \overline{U}(v)\} > \underline{\lambda}(v), \qquad (2\text{-}10)$$

onde ∂U e $\overline{U}$ denotam a fronteira e o fecho de U em $(-\infty,1] \times U$.

2º Caso: $\partial U'(v) \cap D = \emptyset$.

Nesse caso, basta tomar $U(v) = U'(v)$ e 2-10 será satisfeito.

De modo análogo, para cada $(c,v) \in B$, obtemos um conjunto $V(v)$, aberto e limitado em $[-1,\infty) \times U$ tal que

$$E''(v) \subset V(v),\ \partial V(v) \cap D = \emptyset \ e\ \sup\{\lambda : (\lambda, v(\in \overline{V}(v)\} < \infty, \qquad (2\text{-}11)$$

onde $E''(v)$ é a componente conexa que contém $(c,v) \in B$ em $([-1,\infty) \times U) \cap E(v)$.

Note que a seguinte família é uma cobertura de abertos para $D(c)$:

$$\{U(v) \cap (\{c\} \times U) : (c,v) \in A\} \cup \{V(v) \cap (\{c\} \times U) : (c,v) \in B\},$$

logo, como $D(c)$ é compacto, existem

$$v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_p,\ p > m$$

tais que $(c,v_i) \in A$ $(1 \leq i \leq m)$, $(c,v_i) \in B$ $(m+1 \leq i \leq p)$ e a família de abertos

$$\{U(v_i) \cap (\{c\} \times U :\ i = 1, \ldots, m)\} \cup \{V(v_i) \cap (\{c\} \times U)\, i = m+1, \ldots, p\}$$

cobre $D(c)$.

Sejam

$$U_1 = \bigcup_{i=1}^{\infty} U(v_i)\ e \quad V_1 = \bigcup_{i=m+1}^{\infty} V(v_i).$$

Então, U_1 é um aberto limitado de $(-\infty,1]\times U$, e de 2-10 segue que

$$\partial U_1\cap D=\emptyset\ e\ \inf\{\lambda:\ (\lambda,x)\in\overline{U}_1\}>-\infty. \tag{2-12}$$

Da mesma forma, V_1 é um aberto limitado de $[1,\infty)\times U$, e de 2-11 segue que

$$\partial V_1\cap D=\emptyset\ e\ \sup\{\lambda:\ (\lambda,x)\in\overline{V}_1\}<\infty. \tag{2-13}$$

Seja
$$J=\partial U_1\cup\partial V_1\cup((\{c\}\times U)\backslash(U_1\cup V_1)).$$
Segue de 2-12, 2-13 e $D\cap(\{c\}\times U)\subset(\{c\}\times U)\backslash(U_1\cup V_1)$ que

$$J\cap D=\emptyset. \tag{2-14}$$

Note que deve existir n' tal que

$$n\geq n'\ \rightarrow\ \mathfrak{C}_n\cap J=\emptyset.$$

de fato, se tal n' não existisse, teríamos uma subsequência $(n_k)\subset(n)$ tal que

$$C_{n_k}\cap J=\emptyset\,\forall\,k,$$

entretanto, de 2-14, isso é um absurdo, pois, implicaria que (já que J é fechado)

$$D\cap J\neq\emptyset.$$

De 2-12 e 2-13, temos que existe n'' tal que se $n\geq n''$,

$$-n<\inf\{\lambda:\ (\lambda,x)\in\overline{U}_1\}\ e\quad n>\sup\{\lambda:\ (\lambda,x)\in\overline{V}_1\}. \tag{2-15}$$

Seja $n^*=\max\{n',n''\}$.
Sejam

$$\begin{aligned}
P_n^- &= \mathfrak{C}_n\cap\{(-\infty,c]\times U\backslash int(U_1)\cup int(V_1)\},\\
Q_n^- &= \mathfrak{C}_n\cap\{\overline{V}_1\backslash(int(U_1)\cap int(V_1))\cap((-1-\varepsilon,c)\times U)\},\\
P_n^+ &= \mathfrak{C}_n\cap\{[c,\infty]\times U\backslash int(U_1)\cup int(V_1)\},\\
Q_n^+ &= \mathfrak{C}_n\cap\{\overline{U}_1\backslash(int(U_1)\cap int(V_1))\cap((c,1+\varepsilon)\times U)\},
\end{aligned}$$

onde $\varepsilon>0$, $\overline{V}$ é o fecho de V em $\mathbb{R}\times U$ e $int(V)$ é o interior de V em $\mathbb{R}\times U$.

Seja,

$$\mathfrak{C}_n^- = P_n^- \cup Q_n^- \ e \quad \mathfrak{C}_n = P_n^+ \cup Q_n^+.$$

Vamos provar que se $\mathfrak{C}_n \cap (\{c\} \times U) \cap U_1 \cap V_1 = \emptyset$ para $n \geq n^*$, então

$$\mathfrak{C}_n = \mathfrak{C}_n^- \cup \mathfrak{C}_n^+$$

é uma cisão não trivial para $\mathfrak{C}_n$, o que é um absurdo, pois, $\mathfrak{C}_n$ é conexo, logo,

$$\mathfrak{C}_n \cap (\{c\} \times U) \cap U_1 \cap V_1 \neq \emptyset \ \forall \ n \geq n^*.$$

Provaremos que os seguintes itens são satisfeitos:

1- $\mathfrak{C}_n^- \cup \mathfrak{C}_n^+ = \mathfrak{C}_n$,

2- $\mathfrak{C}_n^- \cap \mathfrak{C}_n^+ = \emptyset$,

3- $\mathfrak{C}_n^-$ e $\mathfrak{C}_n^+$ são ambos não vazios,

4- $\mathfrak{C}_n^-$ e $\mathfrak{C}_n^+$ são abertos e fechados em $\mathfrak{C}_n$.

Item 1- note que

$$\mathfrak{C}_n = \{\mathfrak{C}_n \cap [int(U_1) \cup int(V_1)]^c\} \cup \{\mathfrak{C}_n \cap (\overline{U}_1 \cup \overline{V}_1)\}.$$

Por um lado, temos que::

$$P_n^- \cup P_n^+ = \mathfrak{C}_n \cap [int(U_1) \cup int(V_1)]^c.$$

De fato, note que

$$\begin{aligned} P_n^- \cup P_n^+ &= \{\mathfrak{C}_n \cap \{(-\infty, c] \times U \backslash int(U_1) \cup int(V_1)\}\} \cup \{\mathfrak{C}_n \cap \{[c, \infty] \times U \backslash int(U_1) \cup int(V_1)\}\}, \\ &= \mathfrak{C}_n \cap [(\mathbb{R} \times U) \backslash int(U_1) \cup int(V_1)], \\ &= \mathfrak{C}_n \cap [int(U_1) \cup int(V_1)]^c. \end{aligned}$$

Resta provar que

$$Q_n^- \cup Q_n^+ = \mathfrak{C}_n \cap (\overline{U}_1 \cup \overline{V}_1).$$

A inclusão

$$Q_n^- \cup Q_n^+ \subset \mathfrak{C}_n \cap (\overline{U}_1 \cup \overline{V}_1)$$

é imediata. Vamos provar a outra inclusão. Ora, se $u \in \mathfrak{C}_n \cap (\overline{U}_1 \cup \overline{V}_1)$, então

$$u \in \mathfrak{C}_n \cap \overline{U}_1 \ ou \ \mathfrak{C}_n \cap \overline{V}_1.$$

Se $u \in \mathfrak{C}_n \cap \overline{U}_1$, vamos considerar dois caso:

Caso 1: $u \in \mathfrak{C}_n \cap (\overline{U}_1 \backslash \overline{V}_1)$.

Nesse caso, temos que $u \in Q_n^+$.

Caso 2: $u \in \mathfrak{C}_n \cap (\overline{U}_1 \cap \overline{V}_1)$.

Nesse caso, temos duas possibilidades, ou $u \in \mathfrak{C}_n \cap (\overline{U}_1 \cap \overline{V}_1) \cap ((-1-\varepsilon, c) \times U)$, e portanto,

$$u \in Q_n^+,$$

ou $u \in \mathfrak{C}_n \cap (\overline{U}_1 \cap \overline{V}_1) \cap ((c, 1+\varepsilon) \times U)$, e portanto,

$$u \in Q_n^-.$$

Em ambos os casos, temos

$$u \in Q_n^- \cup Q_n^+.$$

Se $u \in \mathfrak{C}_n \cap \overline{V}_1$, então, de maneira análoga provamos que

$$u \in Q_n^- \cup Q_n^+.$$

Item 2- Vamos provar que

$$P_n^- \cap P_n^+ = P_n^- \cap Q_n^+ = Q_n^- \cap P_n^+ = Q_n^- \cap Q_n^+ = \emptyset,$$

e consequentemente,

$$\mathfrak{C}_n^- \cap \mathfrak{C}_n^+ = \emptyset.$$

• - $P_n^- \cap P_n^+ = \emptyset$.

Ora, se existisse intersecção entre P_n^- e P_n^+ então, essa intersecção deverá ocorres em $(\{c\} \times U) \cap [int(U_1) \cup int(V_1)]^c$. Mas, por hipótese, se $n \geq n^*$ então,

$$\mathfrak{C}_n \cap J = \emptyset,$$

logo,

$$P_n^- \cap P_n^+ = \emptyset.$$

• - $P_n^- \cap Q_n^+ = \emptyset$.

Se existir intersecção entre P_n^- e Q_n^+ então, ela deverá ocorrer na fronteira de U_1, na topologia de $\mathbb{R} \times U$, entretanto, isso só é possível (pois $\mathfrak{C}_n \cap J = \emptyset$ *se* $n \geq n^*$), se essa intersecção for em

$$\{1\} \times U,$$

no entanto, não existe pontos de $\{1\}\times U$ em P_n^-, logo,

$$P_n^- \cap Q_n^+ = \emptyset.$$

• - $Q_n^- \cap P_n^+ = \emptyset$.
Análogo ao caso $P_n^- \cap Q_n^+$.
• - $Q_n^- \cap Q_n^+ = \emptyset$.
Suponha que $u \in Q_n^-$. Então, temos duas possibilidades :
1ª: $u \in \mathfrak{C}_n \cap (\overline{V}_1 \backslash \overline{U}_1)$.
Nesse caso, temos que

$$u \notin Q_n^+.$$

2ª: $u \in \mathfrak{C}_n \cap (\overline{V}_1 \cap \overline{U}_1)$.
Nesse caso, devemos ter

$$u \in (c, 1+\varepsilon) \times U,$$

logo,

$$u \notin Q_n^+,$$

donde,

$$Q_n^- \cap Q_n^+ = \emptyset.$$

item 3- Suponha por absurdo que $\mathfrak{C}_n^- = \emptyset$ para $n \geq n^*$.
Sabemos que:

a) $\mathfrak{C}_n \cap (\{-n\} \times U) \neq \emptyset$,
b) $\inf\{\lambda : (\lambda, x) \in \overline{U}_1\} > -n$.

De a), concluímos que (pois $\mathfrak{C}_n^- \cup \mathfrak{C}_n^+ = \mathfrak{C}_n$),

$$Q_n^+ \cap (\{-n\} \times U) \neq \emptyset,$$

mas, por b), isso é um absurdo, portanto,

$$\mathfrak{C}_n^- \neq \emptyset \; para \; n \geq n^*.$$

O caso $\mathfrak{C}_n^+$ é análogo.
Item 4- Por construção, temos que

$$\mathfrak{C}_n^- \; e \; \mathfrak{C}_n^+ \text{ são fechados em } \mathfrak{C}_n,$$

logo, também são abertos em $\mathfrak{C}_n$.

Segue dos itens 1, 2, 3 e 4 que

$$\mathfrak{C}_n = \mathfrak{C}_n^- \cup \mathfrak{C}_n^+$$

é uma cisão não trivial para $\mathfrak{C}_n$ se $n \geq n^*$.

Impossível, logo,

$$\mathfrak{C}_n \cap (\{c\} \times U) \cap U_1 \cap V_1 \neq \emptyset \; \forall \, n \geq n^*. \tag{2-16}$$

Segue da definição de D e 2-16 que

$$D_1(c) \equiv D(c) \cap U_1 \cap V_1 \neq \emptyset. \tag{2-17}$$

Sejam

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(c,v) \in A : \underline{\lambda}(v) > -1\}, \\ A_n &= \{(c,v) \in A : -(n-1) \geq \underline{\lambda}(v) > -n, \; n = 2,3,\ldots\}, \\ B_1 &= \{(c,v) \in B : \overline{\lambda}(v) < 1\}, \\ B_n &= \{(c,v) \in B : n-1 \leq \overline{\lambda}(v) < n, \; n = 2,3,\ldots\}. \end{aligned}$$

Note,

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \; e \quad B = \bigcup_{n=1}^{\infty}. \tag{2-18}$$

note que $D_1(c)$ é fechado, pois,

$$D_1(c) = D(c) \cap \overline{U}_1 \cap \overline{V}_1,$$

logo, utilizando a Afirmação 4, concluímos que

$$D_1(c) \text{ é compacto.}$$

Se $(c,v) \in D_1(c)$ e $(c,v) \in A$ então,

$$\inf\{\lambda : (\lambda, x) \in E(v)\} < -1. \tag{2-19}$$

De fato, basta usar a conexidade de $E(v)$ e o fato que

$$\partial V_1 \cap D = \emptyset$$

para provar 2-19.

Segue de 2-19 que
$$(c,v) \notin A_1.$$

De modo análogo, conluímos que se $(c,v) \in D_1(c) \cap B$, então

$$(c,v) \notin B_1,$$

donde,
$$D_1(c) \cap (A_1 \cup B_1) = \emptyset. \tag{2-20}$$

Trocando $D(C)$ por $D_1(c)$, -1 e 1 por -2 e 2, concluímos usando a mesma demonstração que existe um compacto não vazio $D_2(c) \subset D_1(c)$ tal que

$$D_2(c) \cap (A_2 \cup B_2) = \emptyset, \tag{2-21}$$

logo, por indução, existem compactos $D_n(c)$ não vazios, tais que

$$D_n(c) \subset D_{n-1}(c),$$

e
$$D_n(c) \cap (A_n \cup B_n) = \emptyset. \tag{2-22}$$

Seja
$$D^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n(c).$$

Então,
$$D^* \neq \emptyset \; e \quad D^* \subset D(c).$$

Segue de 2-20, 2-21 e 2-22 que

$$D^* \cap (A_n \cup B_n) = \emptyset \; \forall \, n,$$

logo,
$$D^* \cap (A \cup B) = \emptyset,$$

entretanto, como $A \cup B = D(c)$, temos que

$$D^* \cap D(c) = \emptyset.$$

Impossível, pois
$$D^* \neq \emptyset \; e \quad D^* \subset D(c).$$

Chegamos a esse absurdo por supor que para cada $(c,v) \in D(c)$,

$$\underline{\lambda}(c) > -\infty \; e \; \overline{\lambda}(v) < \infty,$$

logo, existe $(c,v) \in D(c)$ tal que

$$\underline{\lambda}(c) = -\infty \; e \; \overline{\lambda}(v) = \infty.$$

Note que encontramos um conjunto conexo $\mathfrak{C}$ em D que satisfaz

$$\mathfrak{C} \cap (\{s\} \times X) \neq \emptyset, \; \forall \, s \in \mathbb{R}.$$

Para completar a demonstração do Teorema 2.3, devemos provar que

$$H(s,x) = 0 \; se \; (s,x) \in \mathfrak{C},$$

entretanto, se $(s,x) \in \mathfrak{C}$ então, existe $(s_n,x_n) \in \mathfrak{C}_n$ tal que

$$(s_n,x_n) \to (s,x).$$

Usando a continuidade de H concluímos que

$$H(s,x) = 0.$$

□

O próximo teorema é o resultado principal desse capítulo. Ele é uma aplicação direta do Teorema 2.3. Note que de modo análogo ao Teorema 2.3, o próximo teorema estende o Teorema 2.2.

Teorema 2.4 *Seja X um espaço de Banach real e $C \subset X$ convexo, fechado e limitado. Seja*

$$K : \mathbb{R} \times C \to C, \; K \; compacto$$

e

$$S_{\mathbb{R}} = \{(s,x) \in \mathbb{R} \times C : \; K(s,x) = x\}.$$

Então, existe uma componente conexa $\mathfrak{C} \subset S_{\mathbb{R}}$ tal que

$$\mathfrak{C} \cap (\{s\} \times X) \neq \emptyset. \; \forall \, s \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Considere a envoltória convexa de $\overline{K(\mathbb{R}\times C)}$, i.e.,

$$conv(\overline{K(\mathbb{R}\times C)}).$$

Faça $C_0 = \overline{conv(\overline{K(\mathbb{R}\times C)})}$.

Pelo teorema de Mazur (Cf Apêndice Teorema 7.3), C_0 é compacto.

Tome uma bola aberta com centro na orgiem $B \subset X$ tal que $C \subset B$.

Pelo teorema de Dugundji (Cf Apêndice Teorema 7.1), temos que existe

$$\widetilde{K} : \mathbb{R}\times\overline{B} \to C_0,$$

tal que $\widetilde{K}$ é contínuo e $\widetilde{K}_{|\mathbb{R}\times C} = K$.

Seja $\widetilde{S} = \{(s,x) \in \mathbb{R}\times B : \ \widetilde{K}(s,x) = x\}$.

Afirmação 1: $\widetilde{K}$ é compacto e $\widetilde{S} = S_{\mathbb{R}}$.

De fato, como a imagem de $\widetilde{K}$ é compacta, segue que $\widetilde{K}$ é compacto. Por outro lado, como $S_{\mathbb{R}} \subset \widetilde{S}$, basta mostrar que $\widetilde{S} \subset S_{\mathbb{R}}$. Mas, se $(s,x) \in \widetilde{S}$ então $\widetilde{K}(s,x) = x$. Ora, como $x \in C_0$ e $C_0 \subset B$, só podemos concluir que $x \in C$, donde, $(s,x) \in S_{\mathbb{R}}$.

Afirmação 2: $\widetilde{K}(s,x) \neq x \ \forall\ s \in \mathbb{R}\ e\ x \in \partial B$.

Com efeito, se $C_0 \subset B$, então é impossível que $\widetilde{K}(s,x) = x$ para algum $x \in \partial B$.

Seja $\Phi : \mathbb{R}\times\overline{B} \to X$ dada por

$$\Phi(s,x) = x - \widetilde{K}(s,x).$$

Seque da Afirmação 2 que $0 \notin \Phi(\mathbb{R}\times\partial B)$, portanto, restringindo Φ a qualquer subconjunto da forma $[\alpha,\beta]\times\overline{B}$ com $\alpha < \beta$, temos pela propriedade de invariância por homotopia do grau de Leray-Schauder que

$$deg(\Phi_{|[\alpha,\beta]\times\overline{B}}(s,\cdot),B,0) = \ constante\ \forall\ s \in [\alpha,\beta],$$

donde,

$$deg(\Phi(s,\cdot),B,0) = \ constante\ \forall\ s \in \mathbb{R}.$$

Daí,

$$deg(\Phi(s,\cdot),B,0) = deg((I-\widetilde{K})(\alpha,\cdot),B,0) \equiv d_0,\ para\ algum\ \alpha \in \mathbb{R}\ fixo.$$

Afirmação 3: $d_0 \neq 0$.

Considere a homotopia $\Phi_1 : [0,1]\times\overline{B} \to \overline{B}$ dada por

$$\Phi_1(t,x) = x - t\widetilde{K}(\alpha,x).$$

Note que $0 \neq \Phi_1([0,1] \times \partial B$.

De fato, perceba que se

$$0 = \Phi_1(t_0, x_0),\ t_0 \in [0,1]\ e\ x_0 \in \partial B$$

então,

$$x_0 = t_0 \widetilde{K}(t_0, x_0).$$

Donde,

$$\|x_0\| = t_0 \|\widetilde{K}(t_0, x_0)\|.$$

Portanto, $t_0 \neq 0$.

Daí,

$$\frac{\|x_0\|}{t_0} = \widetilde{K}(t_0, x_0) < \|x_0\|.$$

Impossível.

Pela propriedade de invariância por homotopia, segue que

$$deg(\Phi_1(0,\cdot), B, 0) = deg(\Phi_1(1,\cdot), B, 0),$$

donde,

$$d_0 \neq 0.$$

Utilizamos a seguir o Teorema 2.3. Para isso vamos verificar que as hipóteses são satisfeitas.

Note que $\widetilde{K} : \mathbb{R} \times \overline{B} \to C_0 \subset \overline{B}$.

Temos que

- $\Phi = I - \widetilde{K}$, onde $\widetilde{K}$ é compacto
- $0 \neq \Phi(\mathbb{R} \times \partial B)$
- $d_0 = deg(\Phi(\alpha,\cdot), B, 0) \neq 0$

Portanto, existe $\mathfrak{C} \subset S_{\mathbb{R}}$ componente conexa tal que

$$\mathfrak{C} \cap (\{s\} \times B),\ \forall s \in \mathbb{R}.$$

Daí (pois, como vimos $k(s,x) = x$ se e somente se $x \in C$),

$$\mathfrak{C} \cap (\{s\} \times C) \neq \emptyset,\ \forall s \in \mathbb{R}.$$

□

Finalizamos aqui o Capítulo 2.

CAPÍTULO 3

Bifurcação Global

Nesse capítulo estudaremos um resultado de bifurcação para perturbaçoes compactas da identidade. Antes de mais nada, precisamo definir o que vem a ser uma bifurcação.

Sejam X e Y espaços de Banach. Seja $T : \mathbb{R} \times X \to Y$. Queremos estudar o conjunto solução do problema

$$T(\lambda, x) = 0.$$

Suponha que

$$T(\lambda, 0) = 0, \ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Os pontos $(\lambda, 0)$ são denominados soluções triviais de T.

Seja

$$\mathfrak{S} = \{(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times X, \ x \neq 0 : \ T(\lambda, x) = 0\}.$$

Os pontos de $\mathfrak{S}$ são denominados soluções não triviais de T.

Definição 3.1 *Dizemos que $\lambda^* \in \mathbb{R}$ é um ponto de bifurcação para T, com relação a curva de soluções trivias, se existe uma sequência $(\lambda_n, u_n) \in \mathbb{R} \times X$ com $u_n \neq 0$ e $T(\lambda_n, u_n) = 0$ tal que*

$$(\lambda_n, u_n) \longrightarrow (\lambda^*, 0).$$

Passemos agora a demonstração do principal resultado desse capítulo (Conferir [24]).

Seja X espaço de Banach e $\Phi : \mathbb{R} \times X \to X$ definida por

$$\Phi(s, x) = x - F(s, x), \ F \ compacto.$$

Suponha que $F(s, 0) = 0, \ \forall\, s \in \mathbb{R}$.

Considere a equação

$$\Phi(s, x) = 0. \tag{3-1}$$

Teorema 3.2 *Seja $\Phi_s(u) = \Phi(s, x)$.*

Seja $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ tal que a e b não são pontos de bifurcação da equação 3-1. Suponha que

$$ind(\Phi_a, 0) \neq ind(\Phi_b, 0). \tag{3-2}$$

Seja

$$\mathfrak{S}_0 = \overline{\{(s,x) \in \mathbb{R} \times X : \ \Phi(s,x) = 0, \ x \neq 0\}} \cup ([a,b] \times \{0\}).$$

Seja $\mathfrak{C}$ a componente conexa de $\mathfrak{S}_0$ que contém $[a,b] \times \{0\}$.
Então, ou

$$\mathfrak{C} \text{ é ilimitada em } \mathbb{R} \times X, \tag{3-3}$$

ou

$$\mathfrak{C} \cap ((\mathbb{R} \backslash [a,b]) \times \{0\}) \neq \emptyset. \tag{3-4}$$

Observamos que

$$ind(\Phi_a, 0) = \lim_{r \to 0} deg(\Phi_a, B_r, 0),$$

onde $B_r = \{x \in X \ \|x\| < r\}$, e o limite acima está bem definido, pois, $(a, 0)$ é uma solução isolada no conjunto $\{a\} \times X$.
Demonstração. Suponha por absurdo que $\mathfrak{C}$ não satisfaça 3-3 nem 3-4, isto é,

$$\mathfrak{C} \text{ é limitado e } \mathfrak{C} \cap ((\mathbb{R} \backslash [a,b]) \times \{0\}) = \emptyset. \tag{3-5}$$

Seja

$$\mathfrak{C}' \equiv \mathfrak{C} \cap ((\mathbb{R} \times X) \backslash ((a,b) \times B_r(0))),$$

onde $B_r(0) = \{x \in X : \ \|x\| < r\}$ e $\{a\} \times B_r, \ \{b\} \times B_r$ são vizinhanças isoladas da solução trivial (lembre que tais vizinhanças existem, pois os pontos a e b não são de bifurcação).

Como $\mathfrak{C}$ é limitado, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\mathfrak{C} \subset \Phi^{-1}_{|[\alpha,\beta] \times X}(\{0\}).$$

Mas $\Phi_{|[\alpha,\beta] \times X}$ é própria, pois, F é compacto, logo, $\Phi^{-1}_{|[\alpha,\beta] \times X}(\{0\})$ é compacto. Como $\mathfrak{C}$ é fechado, segue que $\mathfrak{C}$ é compacto.

Note também que $\mathfrak{C}'$ é compacto, pois é a intersecção de um compacto com um fechado.

Como $\mathfrak{C}'$ é compacto, a e b não são pontos de bifurcação e vale 3-5, podemos concluir que

$$dist(\mathfrak{C}', \mathbb{R} \times \{0\}) > 0.$$

Logo, é possível encontrar um conjunto aberto e limitado em $\mathbb{R}\times(X\backslash\{0\})$ que denotaremos por Ω_∞ tal que

$$\partial\Omega_\infty\cap(\mathbb{R}\times(X\backslash\{0\}))\neq\emptyset \; e \; \mathfrak{C}'\subset\Omega_\infty. \tag{3-6}$$

Sejam $\Omega_0\equiv[a,b]\times B_r(0)$ e $\Omega\equiv\Omega_0\cap\Omega_\infty$.
Por costrução,

$$\mathfrak{C}\subset\Omega.$$

Vamos considerar dois casos
Caso 1: $(\partial\Omega\backslash((\{a\}\times B_r(0))\cup(\{b\}\times B_r(0)))\cap\Phi^{-1}(\{0\})\neq\emptyset$.
Nesse caso, defina

- $B_\Omega\equiv\partial\Omega\backslash((\{a\}\times B_r(0))\cup(\{b\}\times B_r(0)))$,
- $K\equiv\Phi^{-1}(0)\cap\overline{\Omega}$.

Da mesma forma que mostramos a compacidade de $\mathfrak{C}$, podemos mostrar que K é compacto. Além disso , B_Ω e $\mathfrak{C}$ são fechados em K, pois, B_Ω contém pontos de fronteira de K e $\mathfrak{C}$ é componente conexa.

Pelo lema de Whyburn (Cf Apêndice Teorema 7.5), existem compactos $K_{B_\Omega},K_{\mathfrak{C}}$ tais que

$$B_\Omega\subset K_{B_\Omega},\; \mathfrak{C}\subset K_{\mathfrak{C}},\; K_{B_\Omega}\cup K_{\mathfrak{C}}=K \; e \; K_{B_\Omega}\cap K_{\mathfrak{C}}=\emptyset.$$

Sejam $m=dist(K_{B_\Omega},K_{\mathfrak{C}})>0$, $n=dist(K_{B_\Omega},\mathbb{R}\backslash\{0\})>0$, $t=min\{m,n\}$ e V,U-$\frac{t}{3}$ vizinhanças de $K_{B_\Omega},K_{\mathfrak{C}}$ respectivamente.

Sejam $\Omega'_\infty\equiv(\Omega_\infty\cap U)\cup V$ e $\Omega^*\equiv\Omega_0\cup\Omega'_\infty$.

Por construção temos que $dist(V,\mathbb{R}\times(X\backslash\{0\}))>\frac{t}{3}>0$, portanto, Ω'_∞ é um aberto limitado que contém $\mathfrak{C}'$ e também satisfaz 3-6.

Alé disso, Ω^* é tal que

$$\mathfrak{C}\subset\Omega^* \; e \; B_{\Omega^*}=\emptyset. \tag{3-7}$$

Considere,

$$\Omega^*\cap([a,b]\times X) \text{ como um aberto de } [a,b]\times X, \tag{3-8}$$

$$\Omega'_\infty\cap([a,\overline{\lambda}]\times X) \text{ como um aberto de } [b,\overline{\lambda}]\times X, \tag{3-9}$$

$$\Omega'_\infty\cap([\underline{\lambda},b]\times X) \text{ como um aberto de } [\underline{\lambda},b]\times X, \tag{3-10}$$

onde,

$$\overline{\lambda}=sup\{s:(s,x)\in\Omega^*\},$$

e

$$\underline{\lambda} = inf\{s : (s,x) \in \Omega^*\}.$$

De 3-7 e 3-8, temos que (utilizando invariância por homotopias generalizada (Conferir Teorema 1.6)):

$$deg(\Phi_a, \Omega^*_a, 0) = deg(\Phi_b, \Omega^*_b, 0),$$

onde

$$\Omega_s \equiv \{(s,x) : (s,x) \in \Omega\}.$$

Sejam

$$A^a \equiv \Omega^*_a \backslash (\Omega^*_a \cap (\{a\} \times \overline{B_r(0)})),$$

e

$$A^b \equiv \Omega^*_b \backslash (\Omega^*_b \cap (\{b\} \times \overline{B_r(0)})).$$

Pela propriedade da excisão e da aditividade, temos que

$$deg(\Phi_a, \Omega^*_a, 0) = ind(\Phi_a, 0) + deg(\Phi_a, A^a, 0), \tag{3-11}$$

e

$$deg(\Phi_b, \Omega^*_b, 0) = deg(\Phi_b, 0) + deg(\Phi_b, A^b, 0). \tag{3-12}$$

de 3-7 e 3-9 temos que (pois, $(\Omega'_\infty)_{\overline{\lambda}}$ não contém pontos de $\Phi^{-1}(\{0\})$

$$deg(\Phi_b), (\Omega'_\infty)_b, 0) = deg(\Phi_b, (\Omega'_\infty)_{\overline{\lambda}}, 0) = 0.$$

por outro lado, temos

$$deg(\Phi_b), (\Omega'_\infty)_b, 0) = deg(\Phi_b), A^b, 0) = 0.$$

De modo análogo, concluímos usando 3-7 e 3-10 que

$$deg(\Phi_a), A^a, 0) = 0.$$

logo, por 3-11 e 3-12, obtemos

$$ind(\Phi_a, 0) = ind(\Phi_b, 0).$$

Absurdo, logo, $\mathfrak{C}$ satisfaz 3-3 e 3-4.

Caso 2: $B_\Omega \cap \Phi^{-1}(\{0\} = \emptyset$.

Nesse caso, basta proceder como no caso 1 sem utilizar o lema de Whyburn e novamente chegar à um absurdo.

Concluímos que $\mathfrak{C}$ satisfaz 3-3 3-4. □

O teorema 3.2 será essencial na demonstração do resultado do Capítulo 6, mas, para dar uma idéia da força desse teorema, daremos aqui a demonstração do famoso teorema de bifurcação global de Rabinowitz.

Seja $L : X \to X$ um operador linear. Dizemos que μ é valor característico de L, se existe $x \in X$, $x \neq 0$ tal que

$$x = \mu L x, \; i.e., \; \mu^{-1} \text{ é auto valor de L.}$$

Denotamos por $r(L)$, o conjunto dos valores característicos reais de L.

Suponha a partir de agora que $F(s,x) = sLx + A(s,x)$, onde, L é linear compacto e $A(s,x) = o(\|x\|)$ uniformemente em intervalos limitados, com A compacto.

Lema 3.3 *Se $(\mu,0)$ é ponto de bifurcação da equação 3-1 então, $\mu \in r(L)$.*

Demonstração. Veja [23] e suas referências. □

Passemos agora ao teorema (Conferir [24] pág. 59 ou [23]).

Teorema 3.4 *Suponha que $\mu \in r(L)$ tem multiplicidade ímpar. Então, existe um continuum $\mathfrak{C}$ de soluções não triviais de 3-1, que bifurca no ponto $(\mu,0)$ tal que*

i) *$\mathfrak{C}$ é ilimitado,*

ou,

ii) *$\mathfrak{C}$ também bifurca no ponto $(\eta,0)$, onde $\eta \in r(L)$.*

Demonstração. Como os valores característicos de um operador linear compacto, são isolados, podemos encontrar $\varepsilon_1 > 0$, tal que, o intervalo $[\mu-\varepsilon_1, \mu+\varepsilon_1]$ não contém outros valores característicos, além de μ.

Segue do Lema 3.3 que $ind(\Phi(\mu-\varepsilon_1,\cdot),0)$ e $ind(\Phi(\mu+\varepsilon_1,\cdot),0)$ estão bem definidos.

Note que $\mu-\varepsilon_1$ e $\mu+\varepsilon_1$ estão no resolvente de L, logo, estão bem definidos, os operadores lineares contínuos

$$(I-(\mu-\varepsilon_1)L)^{-1} \; e \; (I-(\mu+\varepsilon_1)L)^{-1}.$$

Ademais, segue da definição de A, que podemos encontrar $\delta > 0$ (esse δ é escolhido de modo que a definição de índice faça sentido) tal que

$$\frac{\|A((\mu-\varepsilon_1,x)\|}{\|x\|} < \frac{1}{\|(I-(\mu-\varepsilon_1)L)^{-1}\|},\ \|x\| \leq \delta, \tag{3-13}$$

e

$$\frac{\|A((\mu+\varepsilon_1,x)\|}{\|x\|} < \frac{1}{\|(I-(\mu+\varepsilon_1)L)^{-1}\|},\ \|x\| \leq \delta, \tag{3-14}$$

Afirmação 1:

$$ind(\Phi(\mu-\varepsilon_1,\cdot),0) = ind(I-(\mu-\varepsilon_1)L,0) \tag{3-15}$$

$$ind(\Phi(\mu+\varepsilon_1,\cdot),0) = ind(I-(\mu+\varepsilon_1)L),0) \tag{3-16}$$

Provaremos apenas 3-15. Com efeito, defina $H:[0,1]\times B_\delta(0)\to X$ por

$$H(t,x) = x-(\mu-\varepsilon_1)Lx - tA(\mu-\varepsilon_1,x).$$

Vamos provar que $0 \notin H([0,1]\times \partial B_\delta(0))$.

Se $t=0$ ou $t=1$ o resultado é imdediato, portanto, suponha por absurdo que exista $(t,x)\in(0,1)\times\partial B_\delta(0)$ tal que

$$x-(\mu-\varepsilon_1)Lx = tA(\mu-\varepsilon_1,x),$$

logo,

$$x = (I-(\mu-\varepsilon_1)L)^{-1}(A(\mu-\varepsilon_1,x)),$$

donde,

$$\|x\| \leq \|(I-(\mu-\varepsilon_1)L)^{-1}\|\|A(\mu-\varepsilon_1,x)\|,$$

portanto, utilizando 3-13 segue que

$$1<1.$$

Absurdo. Concluímos utilizando a propriedade de invariância por homotopias que

$$deg(\Phi(\mu-\varepsilon_1,\cdot),\{\mu-\varepsilon_1\}\times B_\delta(0),0) = deg(I-(\mu-\varepsilon_1)L,\{\mu-\varepsilon_1\}\times B_\delta(0),0),$$

donde,

$$ind(\Phi(\mu-\varepsilon_1,\cdot),0) = ind(I-(\mu-\varepsilon_1)L,0)$$

Além disso, podemos escolher um ε_2 (Conferir [26] pág 619) tal que

$$ind(I-(\mu-\varepsilon_2)L,0) = (-1)^{\beta} ind(I-(\mu+\varepsilon_2)L,0), \tag{3-17}$$

β é a multiplicidade do valor característico μ.

Seja $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Tomando $a = \mu - \varepsilon$ e $b = \mu + \varepsilon$, temos de (já que β é ímpar) 3-15, 3-16 e 3-17 que

$$ind(\Phi(a,\cdot),0) \neq ind(\Phi(b,\cdot),0).$$

Segue do Lema 3.3 e do Teorema 3.2 o resultado desejado. □

Para finalizar esse capítulo, mostraremos que existe uma componente conexa de soluções da equação

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda\left(\dfrac{u^2}{2}+u\right), & em\ \Omega, \\ \qquad u = 0, & em\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{3-18}$$

que bifurca do ponto $(\lambda_1, 0)$, onde λ_1 é o primeiro auto valor do problema $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$, e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado regular.

De fato, Seja $G : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ o operador de Nemytskii associado a $\dfrac{u^2}{2}+u$, isto é,

$$Gu(x) = \frac{u^2(x)}{2} + u(x).$$

Observamos que de fato, a imagem de G está em $L^2(\Omega)$, donde segue (Conferir [17]) que G é contínuo.

Seja $S : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ o operador solução associado ao problema $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$.

Segue que o operador $\lambda SG : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ é compacto. Usando a definição de derivada de Fréchet, podemos escrever

$$\lambda SG(u) = \lambda Su + \lambda o(\|u\|),$$

onde, $o(\|u\|)$ é compacto.

Sabemos que λ_1 é um auto-valor de multiplicade 1 para S, logo, utilizando o Teorema 3.4, concluímos que existe um componente conexa de soluções de 3-18, que bifurca em $(\lambda_1, 0)$.

Concluímos aqui esse capítulo.

CAPÍTULO 4

Problemas Elípticos Lineares: Uma Revisão

Considere o seguinte problema:

$$\begin{cases} \alpha\Delta^2 u + \beta\Delta u = f & em\ \Omega, \\ \mathbf{B}u = 0 & em\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{4-1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira regular, $f \in L^2(\Omega)$, $\alpha \geq 0$ e $-\infty < \beta < \alpha\lambda_1$, com λ_1 primeiro autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. O operador fronteira $\mathbf{B}u$ é dado por:

$$\mathbf{B}u = \begin{cases} u & se\ \alpha = 0, \\ (u, \Delta u) & se\ \alpha > 0. \end{cases}$$

Nesse capítulo, vamos estudar existência e unicidade de soluções para o problema 4-1. Também estudaremos seu espectro.

Seja $H \equiv H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Lema 4.1 *H é um espaço de Hilbert com o produto interno*

$$\begin{array}{rcccl} (\cdot,\cdot) & : & H \times H & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (u,v) & \longmapsto & \alpha\int_\Omega \Delta u \Delta v - \beta \int_\Omega \nabla u \nabla v \end{array}.$$

*Demonstração.*Devemos provar que

i) $(u,v) = (v,u)$, $\forall\, u,v \in H$,

ii) $(\cdot,\cdot)$ é bilinear,

iii) $(u,u) \geq 0\ \forall\, u \in H$ e $(u,u) = 0 \Leftrightarrow u \equiv 0$,

iv) H é completo com a norma $\|u\|_H = (u,u)^{\frac{1}{2}}$.

Note que i) e ii) são imediatos, portanto, resta provar iii) e iv).

iii) Consideraremos dois casos:

Caso 1: $\alpha > 0$.

Temos que

$$(u,u)=\alpha\int_\Omega|\Delta u|^2-\beta\int_\Omega\|\nabla u\|^2,\ \forall\ u\in H. \tag{4-2}$$

Lembramos que uma das identidades de Green generalizada é (cf. Apêndice Teorema 7.6)

$$\int_\Omega\nabla u\nabla v=-\int_\Omega u\Delta v,\ \forall\ u,v\in H,$$

logo,

$$\begin{aligned}\int_\Omega\|\nabla u\|^2 &= \int_\Omega\nabla u\nabla u,\\ &= -\int_\Omega u\Delta u,\\ &\leq \int_\Omega|u||\Delta u|,\\ &\leq |u|_{L^2}|\Delta u|_{L^2}.\end{aligned} \tag{4-3}$$

De 4-3 temos

$$(\int_\Omega\|\nabla u\|^2)^2\leq(|u|_{L^2}|\Delta u|_{L^2})^2$$

Usando a desigualdade de Poincaré, segue que

$$\int_\Omega\|\nabla u\|^2\leq\frac{1}{\lambda_1}\int_\Omega|\Delta u|^2,\ \forall\ u\in H,$$

donde,

$$\int_\Omega|\Delta u|^2\geq\lambda_1\int_\Omega\|\nabla u\|^2,\ \forall\ u\in H. \tag{4-4}$$

Utilizando 4-2 e 4-4, concluímos

$$\begin{aligned}(u,u) &\geq \alpha\lambda_1\int_\Omega\|\nabla u\|^2-\beta\int_\Omega\|\nabla u\|^2,\\ &= (\alpha\lambda_1-\beta)\int_\Omega\|\nabla u\|^2,\\ &= (\alpha\lambda_1-\beta)\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)},\ \forall\ u\in H.\end{aligned}$$

Portanto, usando o fato que $(\alpha\lambda_1-\beta)>0$, obtemos que

$$(u,u)\geq 0\ \forall\ u\in H\ e\quad (u,u)=0\Leftrightarrow\ u=0.$$

Caso 2: $\alpha=0$.

Nesse caso temos que

$$(u,u)=-\beta\int_\Omega\|\nabla u\|^2\ \forall\ u\in H,$$

isto é,

$$(u,u) = -\beta \|u\|^2_{H^1_0(\Omega)}.$$

Como $-\beta > 0$, o resultado segue trivialmente.

iv) Seja $(u_n) \subset H$ uma sequência de Cauchy, isto é,

$$\|u_n - u_m\|_H \to 0 \ se \ n,m \to \infty.$$

Seja $w_{nm} \equiv u_n - u_m$ e $-\Delta w_{nm} \equiv f_{nm} \in L^2(\Omega)$. Então,

$$\begin{cases} -\Delta w_{nm} = f_{nm}, & \text{em } \Omega, \\ w_{nm} \in H^1_0(\Omega). \end{cases}$$

Segue que (cf. [1] sec. 15) existe $C > 0$ tal que

$$\|w_{nm}\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|f_{nm}\|_{L^2(\Omega)} \ \forall \ n,m \in \mathbb{N}. \tag{4-5}$$

De 4-4 temos que

$$\begin{aligned} \|w_{nm}\|^2_H(\Omega) &= \alpha \int_\Omega |\Delta w_{nm}|^2 - \beta \int_\Omega \|\nabla w_{nm}\|^2, \\ &\geq \alpha \int_\Omega |\Delta w_{nm}|^2 - \frac{\beta}{\lambda_1} \int_\Omega |\Delta w_{nm}|^2, \\ &= (\alpha - \frac{\beta}{\lambda_1})\|\Delta w_{nm}\|^2_{L^2(\Omega)}, \\ &= (\alpha - \frac{\beta}{\lambda_1})\|f_{nm}\|^2_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

logo, $\|f_{nm}\|_{L^2(\Omega)} \to 0$ se $n,m \to \infty$, pois, u_n é de Cauchy.

Segue de 4-5 que

$$\|w_{nm}\|_{H^2} \to 0, \ se \ n,m \to \infty.$$

Como $H^2(\Omega)$ é completo, deve existir $u \in H^2(\Omega)$ tal que

$$u_n \to u \ em \ \Omega.$$

Agora vamos provar que $u \in H^1_0(\Omega)$. Da teoria do traço, existe $T : H^2(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ operador linear contínuo. Como $(u_n) \subset H^1_0(\Omega)$, temos que

$$T(u_n) = 0, \ \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

Usando a continuidade de T, temos

$$\|T(u_n) - T(u)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|u_n - u\|_{H^2(\Omega)} \ \rightarrow \ 0, \ se \ n \rightarrow \infty,$$

logo,

$$\|T(u)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|u_n - u\|_{H^2(\Omega)} \ \rightarrow \ 0, \ se \ n \rightarrow \infty,$$

portanto,

$$\|T(u)\|_{L^2(\partial\Omega)} = 0,$$

donde,

$$T(u) = 0.$$

Concluímos da última igualdade que $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, portanto,

$$u_n \rightarrow u \ em \ H.$$

□

Lema 4.2 $H \overset{cont}{\hookrightarrow} H_0^1(\Omega) \overset{comp}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$

Demonstração. Na demonstração do Lema 4.1, obtemos

$$\|u\|_H^2 \geq (\alpha\lambda_1 - \beta)\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2, \ \forall \ u \in H,$$

logo,

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha\lambda_1 - \beta}}\|u\|_H, \ \forall \ u \in H,$$

portanto,

$$H \overset{cont}{\hookrightarrow} H_0^1(\Omega)$$

Por outro lado, pelo teorema de Rellich-Kondrachov, temos

$$H_0^1(\Omega) \overset{comp}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$$

□

Seja $\alpha > 0$. Mostraremos que para cada $f \in L^2(\Omega)$, existe um único $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^4(\Omega)$ solução de 4-1. Observamos que o caso $\alpha = 0$ é bastante conhecido.

Lema 4.3 *Se $u \in H$ satisfaz*

$$\alpha \int_\Omega \Delta u \Delta v - \beta \int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega f v, \ \forall \ v \in H,$$

para algum $f \in L^2(\Omega)$ *então,* $u \in H^4(\Omega)$ *e*

$$u = \Delta u = 0 \ em \ \partial\Omega.$$

Demonstração. Note primeiro que se $f \in L^2(\Omega)$ então, $\exists!\ w \in H$ tal que

$$\begin{cases} \Delta w = f & \text{em } \Omega, \\ w \in H \end{cases}$$

logo,

$$\alpha \int_\Omega \Delta u \Delta v - \beta \int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega f v = \int_\Omega \Delta w v, \ \forall \ v \in H.$$

Como $u, v, w \in H$ então, valem as identidades de Green generalizadas (cf. Apêndice Teorema 7.6):

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla u \nabla v &= -\int_\Omega u \Delta v, \\ \int_\Omega \Delta w v &= \int_\Omega w \Delta v, \end{aligned}$$

donde,

$$\alpha \int_\Omega \Delta u \Delta v + \beta \int_\Omega u \Delta v = \int_\Omega w \Delta v, \ \forall \ v \in H,$$

ou seja,

$$\alpha \int_\Omega \Big(\Delta u \Delta v + \frac{\beta}{\alpha} u - \frac{w}{\alpha} \Big) \Delta v = 0, \ \forall \ v \in H. \tag{4-6}$$

Note que para cada $\phi \in L^2(\Omega)$, $\exists!\ v \in H$ tal que

$$\begin{cases} \Delta v = \phi & \text{em } \Omega, \\ v = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde,

$$\alpha \int_\Omega \Big(\Delta u + \frac{\beta}{\alpha} u - \frac{w}{\alpha} \Big) \phi = 0, \ \forall \ \phi \in L^2(\Omega).$$

Como $C_0^\infty \subset L^2(\Omega)$, segue do teorema de P. du Bois-Raymond que

$$\Delta u = \frac{w}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} u, \ q.t.p. \ em \ \Omega.$$

Como $w, u \in H_0^1(\Omega)$, obtemos que

$$\Delta u = 0 \ em \ \partial\Omega.$$

Ademais, como $w, u \in H^2(\Omega)$, segue da teoria da regularidade que

$$u \in H^4(\Omega).$$

$\square$

Utilizando o Lema 4.3 fica fácil definir solução fraca para 4-1. De fato, dizemos que $u \in H$ é solução fraca de 4-1 se

$$\alpha \int_\Omega \Delta u \Delta v - \beta \int_\Omega \nabla u \nabla v = \int_\Omega f v, \ \forall\, v \in H.$$

Note que se $u \in H$ é solução fraca de 4-1 então, pelo Lema 4.3, u é solução de 4-1.

Lema 4.4 *O problema 4-1 tem uma única solução fraca $u \in H$ para cada $f \in L^2(\Omega)$.*

Antes de demonstrar o Lema 4.4, provaremos a seguinte afirmação.

Afirmação 1: Se $u \in H$ então, existe $C > 0$ tal que

$$\int_\Omega u^2 \leq C\Big(\alpha \int_\Omega |\Delta u|^2 - \beta \int_\Omega \|\nabla u\|^2\Big).$$

Para provar a Afirmação 1, consideramos 3 casos.

Caso 1: $\beta < 0$.

Note (pois $-\beta > 0$),

$$\alpha\lambda_1 \int_\Omega u^2 \leq \frac{\alpha}{\lambda_1} \int_\Omega |\Delta u|^2, \ \forall\, u \in H, \tag{4-7}$$

$$-\beta \int_\Omega u^2 \leq \frac{-\beta}{\lambda_1} \int_\Omega \|\nabla u\|^2, \ \forall\, u \in H, \tag{4-8}$$

portanto, somando 4-7 e 4-8 membro a membro, obtemos

$$\int_\Omega u^2 \leq \frac{1}{\lambda_1(\alpha\lambda_1 - \beta)}\Big(\alpha \int_\Omega |\Delta u|^2 - \beta \int_\Omega \|\nabla u\|^2\Big), \ \forall\, u \in H.$$

Caso 2: $\beta = 0$.

Nesse caso, basta tomar $C = -\beta\lambda_1$.

Caso 3: $\beta > 0$.

Utilizando 4-5 temos,

$$\begin{aligned}(\alpha\lambda_1 - \beta)\int_\Omega u^2 &\leq \frac{\alpha\lambda_1 - \beta}{\lambda_1^2}\int_\Omega |\Delta u|^2,\\ &\leq \frac{1}{\lambda_1}\Big(\alpha \int_\Omega |\Delta u|^2 - \beta \int_\Omega \|\nabla u\|^2\Big),\ u \in H,\end{aligned}$$

Notamos que em ambos os casos, C pode ser tomado como

$$C = \lambda_1(\alpha\lambda_1 - \beta).$$

Passemos agora à demonstração do Lema 4.4.

Demonstração. Considere o funcional energia associado ao problema 4-1, isto é,

$$I(u) = \frac{1}{2}\left[\alpha\int_\Omega |\Delta u|^2 - \beta\int_\Omega \|\nabla u\|^2\right] - \int_\Omega fu, \ \forall\, u \in H.$$

Afirmação 2:

i) I é limitado inferiormente com a norma $\|\cdot\|_H$,

ii) Existe $u_0 \in H$ tal que $I(u_0) = \inf_{u\in H} I(u)$,

iii) u_0 é solução fraca de 4-1.

i) Note,

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2}\|u\|_H^2 - \int_\Omega fu, \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|_H^2 - \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Segue da úlitma desigualdade e da Afirmação 1, que existe $C > 0$ tal que

$$I(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|_H^2 - C\|u\|_H, \ \forall\, u \in H,$$

portanto, I é limitado inferiormente, ou seja, existe $m > 0$ tal que

$$I(u) \geq m, \ \forall\, u \in H.$$

ii) De i), temos que o número, $I_0 \equiv \inf_{u\in H} I(u)$, está bem definido. Tome uma seguência minimizante em H, isto é, uma sequência $(u_n) \subset H$ tal que

$$I(u_n) \longrightarrow I_0, \ se\ n \longrightarrow \infty.$$

Usando a definição de ínfimo e reenumerando a sequência se necessário, temos que

$$I_0 \leq I(u_n) \leq I_0 + 1, \ \forall\, n,$$

logo,

$$m \leq \frac{1}{2}\|u_n\|_H^2 - C\|u_n\|_H \leq I_0 + 1, \ \forall\, n.$$

Segue da última desigualdade que (u_n) é limitada em H. Como H é um espaço reflexivo então, existe uma subseguência de (u_n) que continuaremos denotando por (u_n) tal que

$$u_n \rightharpoonup u_0,\ em\ H,$$

para algum $u_0 \in H$.

Como H está imerso compactamente em $L^2(\Omega)$, segue que existe um subsequência de (u_n) ainda denotada por (u_n) tal que

$$u_n \longrightarrow u_0,\ em\ L^2(\Omega).$$

Ademais, sabemos que (reindexando a sequência novamente)

$$u_n(x) \longrightarrow u(x),\ q.t.p.\ x \in \Omega\ e \quad |u_n(x)| \leq h(x),$$

para alguma $h \in L^2(\Omega)$. Observamos também (pois $u_n \rightharpoonup u_0,\ em\ H$) que

$$\|u_0\|_H \leq \liminf \|u_n\|_H.$$

Segue que

$$\begin{aligned} I(u_0) &= \frac{1}{2}\left[\alpha \int_\Omega |\Delta u_0|^2 - \beta \int_\Omega \|\nabla u_0\|^2\right] - \int_\Omega f u_0, \\ &= \frac{1}{2}\|u_0\|_H^2 - \int_\Omega f u_0, \\ &\leq \frac{1}{2}\liminf \|u_n\|_H^2 - \lim \int_\Omega f u_n, \\ &= \frac{1}{2}\liminf \|u_n\|_H^2 - \liminf \int_\Omega f u_n, \\ &= I_0. \end{aligned}$$

Concluímos da última desigualdade (pois, $I_0 \leq I(u_0)$) que

$$I(u_0) = I_0.$$

iii) Segue da definição de ínfimo que

$$\frac{I(u_0 + tv) - I(u_0)}{t} \geq 0,\ \forall\, t > 0\ e\ \forall\, v \in H. \tag{4-9}$$

Note,

$$\begin{aligned}\frac{I(u_0+tv)-I(u_0)}{t} &= \frac{1}{t}\left\{\frac{1}{2}\left[\alpha\int_\Omega(2t\Delta u_0\Delta v+t^2|\Delta v|^2)-\beta\int_\Omega(2t\nabla u_0\nabla v+t^2\|\nabla v\|^2)\right]-\int_\Omega tfv\right\},\\ &= \frac{1}{2}\left[\alpha\int_\Omega(2\Delta u_0\Delta v+t|\Delta v|^2)-\beta\int_\Omega(2\nabla u_0\nabla v+t\|\nabla v\|^2)\right]-\int_\Omega fv,\\ &= \alpha\int_\Omega(\Delta u_0\Delta v+\frac{t}{2}|\Delta|v^2)-\beta\int_\Omega(\nabla u_0\nabla v+\frac{t}{2}\|\nabla v\|^2)-\int_\Omega fv.\end{aligned}$$

Fazendo $t\longrightarrow 0$ e usando 4-9, obtemos

$$\alpha\int_\Omega\Delta u_0\Delta v-\beta\int_\Omega\nabla u_0\nabla v\geq\int_\Omega fv,\ \forall\ v\in H.$$

Trocando v por $-v$ na última desigualdade, segue que

$$\alpha\int_\Omega\Delta u_0\Delta v-\beta\int_\Omega\nabla u_0\nabla v=\int_\Omega fv,\ \forall\ v\in H,$$

donde, usando o Lema 4.3, concluímos que u_0 é uma solução fraca de 4-1. Para completar a demonstração devemos provar que u_0 é única. Para isso, suponha que $w\in H$ também é solução fraca de 4-1. Temos

$$\alpha\int_\Omega\Delta u_0\Delta v-\beta\int_\Omega\nabla u_0\nabla v=\int_\Omega fv,\ \forall\ v\in H,$$

e

$$\alpha\int_\Omega\Delta w\Delta v-\beta\int_\Omega\nabla w\nabla v=\int_\Omega fv,\ \forall\ v\in H.$$

Subtraindo as duas últimas igualdades membro a membro, obtemos

$$\alpha\int_\Omega\Delta(u_0-w)\Delta v-\beta\int_\Omega\nabla(u_0-w)\nabla v=0\ \forall\ v\in H.$$

Tomando $v=u_0-w$ na última igualdade, concluímos que

$$\|u_0-w\|_H^2=0,$$

donde,

$$u_0=w,$$

portanto, o Lema 4.4 está demonstrado. □

Com base no Lema 4.4, definimos o operador solução S, do problema 4-1, isto é, dado $f\in L^2(\Omega)$ então, Sf é a solução fraca de 4-1.

Lema 4.5 *O operador $S:L^2(\Omega)\to H$ é linear e satisfaz*

I- *Existe $C > 0$ tal que*

$$\|Sf\|_H \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)},\ f \in L^2(\Omega),$$

II- *$S : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ é compacto,*

III- *S é simétrico em $L^2(\Omega)$, isto é,*

$$\int_\Omega Sfg = \int_\Omega fSg,\ \forall\ f,g\ \in L^2(\Omega).$$

Demonstração. Primeiro vamos provar que S é linear. Dado $f,g \in L^2(\Omega)$ e $\theta \in \mathbb{R}$, temos

$$\alpha \int_\Omega \Delta Sf \Delta v - \beta \int_\Omega \nabla Sf \nabla v = \int_\Omega fv,\ \forall\ v \in H,$$

e

$$\alpha \int_\Omega \Delta Sg \Delta v - \beta \int_\Omega \nabla Sg \nabla v = \int_\Omega gv,\ \forall\ v \in H,$$

donde,

$$\alpha \int_\Omega \Delta(\theta Sf + Sg)\Delta v - \beta \int_\Omega \nabla(\theta Sf + Sg)\nabla v = \int_\Omega (\theta f + g)v,\ \forall\ v \in H.$$

Segue da unicidade de soluções (Conferir Lema 4.4) que

$$S(\theta f + g) = \theta Sf + Sg,\ \forall \theta \in \mathbb{R}\ e\ \forall f,g \in H.$$

Passemos agora a demonstração dos itens.

I- Dado $f \in L^2(\Omega)$, $f \neq 0$, temos

$$\begin{aligned} \|Sf\|_H^2 &= \alpha \int_\Omega |\Delta Sf|^2 - \beta \int_\Omega \|\nabla Sf\|^2, \\ &= \int_\Omega fSf, \\ &\leq \|Sf\|_{L^2(\Omega)} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Segue do Lema 4.2 e da última desigualdade que

$$\|Sf\|_H^2 \leq C\|Sf\|_H \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

portanto,

$$\|Sf\|_H \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

II- de I-, temos que $S : L^2(\Omega) \to H$ é contínuo. Por outro lado, vimos no Lema 4.2 que H está imerso compactamente em $L^2(\Omega)$, ou seja, existe $i : H \to L^2(\Omega)$ compacto,

tal que
$$i(u) = u.$$
Segue que
$$S = S \circ i : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega) \text{ é compacto.}$$

III- Dado $f, g \in L^2(\Omega)$, temos
$$\alpha \int_\Omega \Delta Sf \Delta v - \beta \int_\Omega \nabla Sf \nabla v = \int_\Omega fv, \ \forall\ v \in H,$$
e
$$\alpha \int_\Omega \Delta Sg \Delta v - \beta \int_\Omega \nabla Sg \nabla v = \int_\Omega gv, \ \forall\ v \in H.$$
Tomando $v = Sg$ na primeira igualdade e $v = Sf$ na segunda, segue que
$$\int_\Omega Sfg = \int_\Omega fSg, \ \forall\ f, g \in L^2(\Omega).$$

□

Segue do Lema 4.5 e da teoria espectral, que existe uma seguência ortonormal $(\phi_n) \subset L^2(\Omega)$ e uma sequência $(\overline{\mu_n}) \subset \mathbb{R}$ tal que
$$S\phi_n = \overline{\mu_n}\phi_n \ e \ \overline{\mu_n} \longrightarrow 0.$$

Afirmação 3: $\overline{\mu_n} > 0$.

De fato, como $S\phi_n = \overline{\mu_n}\phi_n$, segue que
$$\overline{\mu_n}\Big(\alpha \int_\Omega \Delta\phi_n \Delta v - \beta \int_\Omega \nabla\phi_n \nabla v\Big) = \int_\Omega \phi_n v, \ \forall\ v \in H,$$
portanto, tomando $v = \phi_n$, segue que
$$\overline{\mu_n}\Big(\alpha \int_\Omega |\Delta\phi_n|^2 - \beta \int_\Omega \|\nabla\phi_n\|^2\Big) = \int_\Omega \phi_n^2.$$

Como (pois 0 não é autovalor) $\phi_n \neq 0$ e $\alpha \int_\Omega |\Delta\phi_n|^2 - \beta \int_\Omega \|\nabla\phi_n\|^2 > 0$, segue que
$$\overline{\mu_n} > 0.$$

Seja $\mu_n = \frac{1}{\overline{\mu_n}}$. Concluímos que $\mu_n > 0$, $\mu_n \longrightarrow \infty$ e
$$\begin{cases} \alpha\Delta^2\phi_n + \beta\Delta\phi_n = \mu_n\phi_n & \text{em } \Omega, \\ B\phi_n = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Lema 4.6 *Os autovalores do problema 4-1 satisfazem*

i) $\mu_n = \lambda_n(\alpha\lambda_n - \beta)$, *onde* (λ_n) *são os autovalores de* $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. *As correspondetes auto funções* ϕ_n *são as mesmas de* $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$,

ii) $\mu_1 = \inf\limits_{v\neq 0,\ v\in H} \dfrac{\alpha\|\Delta v\|^2_{L^2(\Omega)} - \beta\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|v\|_{L^2(\Omega)}}$,

iii) $\mu_1 \int_\Omega |v|^2 \leq \alpha \int_\Omega |\Delta v|^2 - \beta \int_\Omega \|\nabla\|^2,\ \forall\, v \in H$,

iv) $\mu_2 \int_\Omega |v|^2 \leq \alpha \int_\Omega |\Delta v|^2 - \beta \int_\Omega \|\nabla\|^2,\ \forall\, v \in H$ *e* $\int_\Omega v\phi_1 = 0$.

Demonstração. **i)** Suponha que μ seja um autovalor do problema 4-1, isto é,

$$\begin{cases} \alpha\Delta^2\phi + \beta\Delta\phi - \mu\phi = 0 & \text{em } \Omega, \\ B\phi = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Note,

$$\begin{aligned} \alpha\Delta^2\phi + \beta\Delta\phi - \mu\phi &= \alpha\Big(\Delta^2 + \frac{\beta}{\alpha}\Delta - \frac{\mu}{\alpha}\Big)\phi, \\ &= \alpha\Big[\Big(\Delta + \frac{\beta}{2\alpha} + \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\beta^2 + 4\alpha\mu}\Big) \circ \Big(\Delta + \frac{\beta}{2\alpha} - \frac{1}{2\alpha}\sqrt{\beta^2 + 4\alpha\mu}\Big)\Big]\phi. \end{aligned}$$

portanto,

$$\begin{cases} \Big[\Big(\Delta + \frac{\beta+\sqrt{\beta^2+4\alpha\mu}}{2\alpha}\Big) \circ \Big(\Delta + \frac{\beta-\sqrt{\beta^2+4\alpha\mu}}{2\alpha}\Big)\Big]\phi = 0 & \text{em } \Omega, \\ B\phi = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4-10}$$

Seja

$$\psi = \Big(\Delta + \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\mu}}{2\alpha}\Big)\phi.$$

Note que $\psi \neq 0$, caso contrário, $\frac{\beta-\sqrt{\beta^2+4\alpha\mu}}{2\alpha}$ seria autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$, o que é um absurdo, pois, $\frac{\beta-\sqrt{\beta^2+4\alpha\mu}}{2\alpha} < 0$, logo, de 4-10 segue que ψ é autofunção de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$, isto é,

$$\Big(\Delta + \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\mu}}{2\alpha}\Big)\psi = 0,$$

donde, $\lambda = \frac{\beta+\sqrt{\beta^2+4\alpha\mu}}{2\alpha}$ é um autovalor do problema $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. Segue que

$$\mu = \lambda(\lambda\alpha - \beta).$$

Para demonstrar ii), iii) e iv), note que S é um operador positivo, isto é,

$$(Sf, f)_{L^2(\Omega)} \geq 0,\ \forall\, f \in L^2(\Omega).$$

De fato,

$$\begin{aligned}(Sf,f)_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega fSf, \\ &= \alpha\int_\Omega |\Delta Sf|^2 - \beta\int_\Omega \|\nabla Sf\|^2, \\ &= \|Sf\|_H^2, \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

Como H é um espaço de Hilbert de dimensão infinita, S é auto-adjunto e positivo, segue do método de Raylegh-Ritz (Conferir [3] Problema 36) que ii) é válido. Note que iii) decorre imediatamente de ii), enquanto, iv) decorre imediatamente de uma propriedade análoga a ii) e que pode ser provada também utilizando o mesmo método. $\square$

Vale a pena observar que o item iii) do Lema 4.6 é o mesmo que a Afirmação 1. De fato, basta tomar $C = \mu_1$.

Concluímos aqui o Capítulo 4. Esse capítulo será de extrema importância para nós, principalmente por causa do estudo espectral feito aqui. O fato de que as auto funções, associadas ao problema 4-1 são as mesmas do problema $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ é bastante relevante. Com efeito, lembramos que a primeira auto função ϕ_1 é extritamente positiva em Ω e $\frac{\partial\phi_1(x)}{\partial\nu} < 0$ *se* $x \in \partial\Omega$. Essas informações a respeito de ϕ_1, juntamente com outras, nos fornecerão ferramentas apropriadas para resolver o problema ressonante do Capítulo 5, e o problema assintoticamente linear do Capítulo 6.

CAPÍTULO 5

Problemas Elípticos Ressonantes

Nesse capítulo, estudaremos o seguinte problema ressonante elíptico de quarta ordem sob condições de fronteira de Navier (cf. [4]):

$$\begin{cases} \alpha\Delta^2 u + \beta\Delta u - \mu_1 u + g(x,u) = f & \text{em } \Omega, \\ \mathbf{B}u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5-1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto aberto, limitado com fronteira regular; $f \in L^2\Omega$, $\alpha \geq 0$, $-\infty < \beta < \alpha\lambda_1$, λ_1 é o primeiro autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. O operador fronteira é definido por

$$\mathbf{B}u = \begin{cases} u & \text{se } \alpha = 0 \\ (u, \Delta u) & \text{se } \alpha > 0 \end{cases}$$

e μ_1 é o primeiro autovalor de

$$\begin{cases} \alpha\Delta^2 u + \beta\Delta u = \mu u & \text{em } \Omega, \\ \mathbf{B}u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5-2}$$

Assumiremos que $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz as condições de Carathéodory. Além disso,

$$|g(x,s)| \leq \widetilde{h}(x),\ x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R}, \tag{5-3}$$

para algum $\widetilde{h} \in L^\infty(\Omega)$ e

$$sg(x,s) \leq 0,\ x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R}. \tag{5-4}$$

Casos particulares do problema 5-1 foram bastante estudados na literatura. Por exemplo, se $\alpha = 0$ e $\beta = -1$, temos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda_1 u + g(u) = f & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5-5}$$

Landesman e Lazer (cf. [18]) provaram que se $g(t) \to g_\pm$ quando $t \to \pm\infty$ então, 5-5 admite solução se

$$g_- \int_\Omega \phi_1 < \int_\Omega f\phi_1 < g_+ \int_\Omega \phi_1,$$

onde ϕ_1 é a auto-função associada a λ_1.

Ademais, se $g_- \leq g \leq g_+$, a condição

$$g_- \int_\Omega \phi_1 < \int_\Omega f\phi_1 < g_+ \int_\Omega \phi_1,$$

é necessária para existência.

O problema

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda_1 u + g(u) = t\phi_1 + h & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

sob as condições

$$sg(s) \leq 0,\ s \in \mathbb{R}\ e\ \ g(s) \to 0\ se\ |s| \to \infty,$$

foi estudado por diversos matemáticos (cf. [11], [14] e [5]).

Ma & Yang (cf. [21]) utilizaram o método de Lyapunov-Schmidt, combinado com argumentos envolvendo componentes conexas de pontos fixos para resolver o problema:

$$\begin{cases} u''(t) + \pi^2 u + a(t)g(u) = f & \text{em (0,1)}, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

onde,

$$tg(t) \geq 0\ e\ g(t) \to 0,\ se\ |t| \to \infty.$$

Ling (cf. [19]) provou resultados de multiplicidade de soluções para

$$\begin{cases} u^4 + \beta(t)u'' - \lambda_1 u = g(t,u) + f(t) & \text{em (0,1)}, \\ u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0, \end{cases}$$

onde β e g satisfazem (dentre outras condições técnicas)

$$\beta(t) < \pi^2,\ ug(t,u) \geq 0,\ u \in \mathbb{R},\ g(t,u) \to 0\ se\ |u| \to \infty,\ t \in [0,1].$$

Segue agora o resultado principal desse capítulo (cf. [4]).

Teorema 5.1 *Seja $f \in L^2(\Omega)$ com $f = t\phi_1 + h$, $\phi_1 \perp h$, $t \in \mathbb{R}$.*

1^a Parte: Suponha que g satisfaz 5-3, então existe um conjunto limitado $\Lambda_h \subset \mathbb{R}$ tal que o problema 5-1 admite solução se e somente se $t \in \Lambda_h$.

2^a Parte: Ademais, 5-1 admite solução para $t = 0$ se 5-4 vale e $h \in L^\infty(\Omega)$.

3^a Parte: Ademais, se $h \in L^\infty$ e g satisfaz

$$sg(x,s) < 0 \; para\; x \in \Omega \; e \; |s| \geq T, \; pata\; algum\; T > 0, com\; g\; contínua\; em\; \Omega \times (-T,-T)^c, \tag{5-6}$$

e

$$g(x,s) \overset{s\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0, \; q.t.p. \; x \in \Omega. \tag{5-7}$$

Então existem números reais a_*, b_* com $a_* < 0 < b_*$ tais que

$$\Lambda_h^* = [a_*, 0) \cup (0, b^*] \subset \Lambda_h,$$

e 5-1 admite no mínimo duas soluçoes se $t \in \Lambda_h^*$.

Para provar o Teorema 5.1, faremos uso do método de Lyapunov-Schmidt e do Teorema 2.4.

Seja $D(L) = \{u \in H^4(\Omega) : \; u = \Delta u = 0 \; em \; \partial\Omega\}$ e defina o operador linear $L : D(L) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ por

$$Lu = \alpha\Delta^2 u + \beta\Delta u - \mu_1 u.$$

Afirmação 1: L é um operador desamente definido, fechado e simétrico.

• Densamente definido: De fato, suponha que $u \in L^2(\Omega)$ é tal que

$$(u,v) = \int_\Omega uv = 0 \; \forall v \in D(L).$$

Como $C_0^\infty(\Omega) \subset D(L)$, segue que

$$(u,v) = \int_\Omega uv = 0 \; \forall v \in C_0^\infty(\Omega),$$

portanto, $u = 0 \; q.t.p \; em \; \Omega$, donde, $D(L)$ é denso em $L^2(\Omega)$.

• Fechado: Veja [10].

• Simétrico: Devemos provar que

$$\int_\Omega Luv = \int_\Omega uLv \; \forall u, v \in D(L),$$

mas, como $u = \Delta u = 0 \; em \; \partial\Omega$ e $u \in H^4$ então, valem as identidades de Green generalizadas (cf. Apêndice Teorema 7.6), logo,

$$\begin{aligned}\int_\Omega Luv &= \int_\Omega (\alpha\Delta^2 u + \beta\Delta u - \mu_1 u)v \\ &= \int_\Omega \alpha\Delta u\Delta v + \int_\Omega \beta u\Delta v - \int_\Omega \mu_1 uv \\ &= \int_\Omega u(\alpha\Delta^2 v + \beta\Delta v - \mu_1 v) \\ &= \int_\Omega uLv,\ \forall u,v \in D(L).\end{aligned}$$

Segue da teoria dos operadores e do fato que $L^2(\Omega)$ é Hilbert que

$$R(L) = N(L^*)^\perp = N(L)^\perp \ e\ L^2(\Omega) = N(L) \oplus R(L).$$

Observamos que $R(L) = \{s\phi_1 :\ s \in \mathbb{R}\}$, onde ϕ_1 é a primeira auto função de 5-2. Considere o operador de Nemytskii associado à função g, i.e.,

$$Gu(x) = g(x,u(x)),\ q.t.p\ x \in \Omega,\ u \in L^2(\Omega).$$

Afirmação 2: G é um operador contínuo e limitado cuja imagem está em $L^2(\Omega)$. De fato, basta apenas mostrar (Cf [17]) que

$$Gu \in L^2(\Omega),\ \forall\ u \in L^2(\Omega),$$

entretanto, graças a 5-3 temos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |Gu(x)|^2 &= \int_\Omega |g(x,u(x))|^2 \\ &\leq \int_\Omega |\widetilde{h}|^2 \\ &< \infty,\end{aligned}$$

donde, $Gu \in L^2(\Omega)$.

Utilizando L e G podemos reescrever 5-1 da forma

$$Lu + Gu = f,\ u \in D(L). \tag{5-8}$$

Escrevendo

$$\begin{cases} u = s\phi_1 + w,\ w \in R(L), \\ f = t\phi_1 + h,\ h \in R(L), \end{cases}$$

segue que (pois $L\phi_1 = 0$)

$$Lw + G(s\phi_1 + w) = t\phi_1 + h.$$

Sejam $P : L^2(\Omega) \to N(L)$ e $Q : L^2(\Omega) \to R(L)$ as projeções ortogonais associadas a decomposição $L^2 = N(L) \oplus R(L)$.

Aplicando P e Q em 5-8 obetmos

$$\begin{cases} QLw + QG(s\phi_1 + w) = h, \\ PLw + Pg(s\phi_1 + w) = t\phi_1, \end{cases}$$

no entanto, $QLw = Lw$ e $PLw = 0$, pois, $Lw \in R(L)$, logo,

$$Lw + QG(s\phi_1 + w) = h, \tag{5-9}$$

e

$$PG(s\phi_1 + w) = t\phi_1. \tag{5-10}$$

Note que somando membro a membro 5-9 e 5-10, obtemos 5-8, portanto, resolver o problema 5-8 é equivalente a resolver o sistema 5-9 - 5-10. O método de Lyapunov-Schmidt consiste em explorar tal sistema de modo a encontrar uma solução para 5-8.

Defina $S_h \subset \mathbb{R} \times R(L)$ por

$$S_h = \{(s, w) \in \mathbb{R} \times R(L) : \ Lw + QG(s\phi_1 + w) = h\}.$$

Antes de mais nada, devemos provar que S_h é não vazio, entretanto, vamos supor por hora que S_h é não vazio e ver o que se pode deduzir disso. Mais adiante provaremos que $S_h \neq \emptyset$.

Defina $\Phi(s, w) =< G(s\phi_1 + w), \phi_1 >_{L^2(\Omega)}, \ (s, w) \in \mathbb{R} \times R(L)$, isto é,

$$\Phi(s, w) = \int_\Omega g(x, s\phi_1 + w)\phi_1, \ (s, w) \in \mathbb{R} \times R(L).$$

Afirmação 3: O sistema 5-9 - 5-10 é equivalente a equação

$$\Phi(s, w) = t, \ (s, w) \in S_h. \tag{5-11}$$

De fato, se $(s, w) \in \mathbb{R} \times R(L)$ resolve o sistema, então, de 5-9, $(s, w) \in S_h$. Segue de 5-10 que

$$< G(s\phi_1 + w) - t\phi_1, v >= 0 \ \forall \ v \in N(L),$$

portanto, tomando $v = \phi_1$, temos

$$\Phi(s, w) = t, \ (s, w) \in S_h.$$

Reciprocamente, se 5-11 é satisfeito então, pela definição de S_h temos que 5-9 é satisfeito. Ademais,

$$< G(s\phi_1 + w) - t\phi_1, \alpha\phi_1 >= 0, \; \forall \; \alpha \in \mathbb{R},$$

portanto, 5-10 é satisfeito.

Provaremos agora que $S_h \neq \emptyset$. De fato, note que $L_{|R(L)}$ é injetor, portanto, está bem definido o operador linear

$$S \equiv L^{-1}_{|R(L)} : R(L) \to R(L) \cap D(L) \subset L^2(\Omega).$$

Devemos então provar que existe $(s,w) \in \mathbb{R} \times R(L)$ tal que

$$w = S[h - QG(s\phi_1 + w)].$$

Defina

$$K(s,w) = S[h - QG(s\phi_1 + w)], \; (s,w) \in \mathbb{R} \times \overline{B}_\rho,$$

onde ρ é determinado mais adiante, na Afirmação 7. Segue da Afirmação 9 (mais adiante), que K é compacto e $R(K) \subset \overline{B}_\rho$. Portanto, fixado $s \in \mathbb{R}$, obtemos, utilizando o teorema do ponto fixo de Schauder (cf. Teorema 1.4), que existe $w \in R(L)$ tal que

$$Lw = h - QG(s\phi_1 + w).$$

Observe que com a linguagem acima, resolver o problema 5-1 é equivalente a resolver 5-11, portanto, nosso foco agora, será em entender a equação 5-11 e para isso (consequentemente para a demonstração do Teorema 5.1), precisaremos de alguns lemas técnicos, mas, que no entanto são de fácil demonstração.

Lema 5.2 *Suponha Ω regular e limitado. Seja $W \subset H^1_0(\overline{\Omega})$ limitado com respeito a norma de $C^1(\overline{\Omega})$. Então, existe um número $\beta = \beta(W) > 0$ tal que*

$$s\phi_1(x) + w(x) \geq 0 \; e \; -s\phi_1(x) + w(x) \leq 0 \; q.t.p. \; x \in \Omega,$$

para cada $s \geq \beta$ e $\forall w \in W$.

Demonstração. Dado $w \in W$, existe $C > 0$ tal que

$$\|w\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leq C,$$

logo,

$$-C \leq w(x) \leq C \; e \; -C \leq \frac{\partial w}{\partial \nu}(x) \leq C, \; x \in \overline{\Omega}_\delta, \tag{5-12}$$

onde $\Omega_\delta = \{x \in \Omega : \ dist(x, \partial\Omega) < \delta\}$ e δ é escolhido de modo a justificar todas as passagens seguintes. Note que se δ é pequeno então, a derivada normal está bem definida, pois Ω é regular.

Como $\frac{\partial \phi_1}{\partial \nu} < 0$ em $\partial\Omega$ então, usando a compacidade de $\partial\Omega$, segue que (esco lhendo um δ conveniente)

$$K \equiv \sup_{\overline{\Omega}_\delta} \frac{\partial \phi_1}{\partial \nu}(x) < 0.$$

Defina $H_1(x) \equiv s\phi_1(x) + w(x), \ s \geq 0 \ e \ x \in \Omega_\delta$.

Note,

$$\frac{\partial H_1}{\partial \nu}(x) = s\frac{\partial \phi_1}{\partial \nu}(x) + \frac{\partial w}{\partial \nu}(x) \leq sK + C \leq 0, \ se \ s \geq \frac{-C}{K} > 0 \ e \ x \in \Omega_\delta.$$

A desiguladade acima nos diz que na direção normal, H_1 é decrescente. Uma vez que

$$H_1(\{\partial\Omega\}) = \{0\},$$

segue que

$$H_1(x) \geq 0 \ se \ x \in \Omega_\delta, \ e \ s \geq \frac{-C}{K},$$

logo,

$$s\phi_1(x) + w(x) \geq 0 \ se \ s \geq \frac{-C}{K}, \ x \in \Omega_\delta. \tag{5-13}$$

Analogamente defina $H_2(x) = -s\phi_1(x) + w(x), \ x \in \Omega_\delta \ e \ s \geq 0$. Note,

$$\frac{\partial H_2}{\partial \nu}(x) = s\frac{\partial \phi_1}{\partial \nu}(x) + \frac{\partial w}{\partial \nu}(x) \leq sK + C \leq 0, \ se \ s \geq \frac{-C}{K} > 0 \ e \ x \in \Omega_\delta.$$

Como $H_2(\{\partial\Omega\}) = \{0\}$, segue que

$$H_2(x) \leq 0, \ se \ s \geq \frac{-C}{K} > 0 \ e \ x \in \Omega_\delta,$$

donde

$$-s\phi_1(x) + w(x) \geq 0, \ se \ s \geq \frac{-C}{K} > 0 \ e \ x \in \Omega_\delta, \tag{5-14}$$

Por outro lado, como $\phi_1 > 0$ em Ω, temos que

$$\frac{-C}{\phi_1} \leq \frac{w}{\phi_1} \leq \frac{C}{\phi_1} \ \forall \, x \in \Omega \backslash \Omega_\delta,$$

logo

$$\frac{-C}{\sup_{\Omega\backslash\Omega_\delta} \phi_1} \leq \frac{w}{\phi_1} \leq \frac{C}{\inf_{\Omega\backslash\Omega_\delta} \phi_1} \ \forall \, x \in \Omega \backslash \Omega_\delta,$$

portanto, existe $M > 0$ tal que

$$-M \leq \frac{w(x)}{\phi_1(x)} \leq M, \ x \in \Omega \backslash \Omega_\delta,$$

donde,

$$M\phi_1(x) + w(x) \geq 0 \ e \ -M\phi_1(x) + w(x) \leq 0, \ \forall \, x \in \Omega \backslash \Omega_\delta. \tag{5-15}$$

Segue de 5-13, 5-14 e 5-15 que tomando

$$\beta(W) = \max\left\{M, -\frac{C}{K}\right\},$$

o lema está provado.

$\square$

Lema 5.3 *Suponha 5-3, 5-4 e 5-6. Se* $W \subset H_0^1(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ *é limitado com respeito a norma de* $C^1(\overline{\Omega})$ *então, existe um número positivo* $\beta_1 = \beta_1(W)$ *tal que*

$$\Phi(s,w) < 0 \ e \ \Phi(-s,w) \geq 0 \ para \ cada \ s \geq \beta_1 \ e \ \forall \, w \in W, \tag{5-16}$$

$$\Phi(s,w) > 0 \ e \ \Phi(-s,w) \leq 0 \ para \ cada \ s \leq -\beta_1 \ e \ \forall \, w \in W. \tag{5-17}$$

Demonstração. Tome $\beta = \beta(W)$ como no Lema 5.2 e defina

$$\beta_0 \equiv \frac{T + \sup\limits_{w \in W} \|w\|_{C^1(\overline{\Omega})}}{\max\limits_{\overline{\Omega}} \phi_1},$$

onde T é dado em 5-6.

Defina

$$\beta_1 \equiv \beta + \beta_0.$$

Segue do Lema 5.2 que

$$(s - \beta_0)\phi_1(x) + w(x) \geq 0, \ \forall \, s \geq \beta_1 \ e \ w \in W,$$

e

$$-(s - \beta_0)\phi_1(x) + w(x) \leq 0 \ \forall \, s \geq \beta_1 \ e \ w \in W,$$

logo,

$$s\phi_1(x) + w(x) \geq \beta_0\phi_1(x) \ \forall \, s \geq \beta_1 \ e \ w \in W,$$

e

$$-s\phi_1(x) + w(x) \leq -\beta_0\phi_1(x) \ \forall \, s \geq \beta_1 \ e \ w \in W.$$

De 5-4 temos que

$$tg(x,t) \leq 0 \; \forall \, x \in \Omega, \; \forall \, t \in \mathbb{R},$$

logo,

$$(s\phi_1(x) + w(x))g(x, s\phi_1(x) + w(x)) \leq 0 \; \forall \, x \in \Omega, \; s \in \mathbb{R},$$

logo,

$$(s\phi_1(x) + w(x))g(x, s\phi_1(x) + w(x)) \leq 0, \; \forall \, x \in \Omega, \; s \in \mathbb{R}.$$

Se $s \geq \beta_1$ então,

$$s\phi_1 + w(x)_{\geq}\beta_0\phi_1(x) > 0 \; \forall \, x \in \Omega,$$

portanto,

$$g(x, s\phi_1(x) + w(x)) \leq 0 \; se \; s \geq \beta_1 \; e \; x \in \Omega.$$

Do mesmo modo, se $\beta \geq \beta_1$ então,

$$-s\phi_1(x) + w(x) \leq -\beta_0\phi_1(x) < 0 \; \forall \, x \in \Omega,$$

portanto,

$$g(x, -s\phi_1(x) + w(x)) \geq 0 \; se \; s \geq \beta_1 \; e \; x \in \Omega.$$

Segue que

$$\Phi(s,w) = \int_\Omega g(x, s\phi_1 + w)\phi_1, \; s \in \mathbb{R}, \; w \in W$$

é tal que (pois $\phi_1 \geq 0$)

$$\Phi(s,w) \leq 0 \; e \; \Phi(-s,w) \geq 0 \; se \; s \geq \beta_1.$$

Afirmação 4: $\Phi(s,w) < 0 \; \forall \, s \geq \beta_1$.

Seja $x_0 \in \Omega$ tal que

$$\phi_1(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} \|\phi_1\|.$$

Seja $K > 0$ tal que

$$\sup_{w \in W} \|w\|_{C^1(\overline{\Omega})} > K.$$

Note,

$$\begin{aligned} s\phi_1(x_0)+w(x_0) &\geq \beta_0 \max_{\overline{\Omega}} \|\phi_1\|, \\ &\geq \beta_0 \max_{\overline{\Omega}} \|\phi_1\| - K, \\ &> T \\ &> 0,\ \forall\, s \geq \beta_1\ e\ w \in W. \end{aligned}$$

De 5-6 temos,

$$(s\phi_1(x_0)+w(x_0))g(x_0, s\phi_1(x_0)+w(x_0)) < 0,\ \forall\, s \geq \beta_1\ e\ w \in W,$$

logo,

$$g(x_0, s\phi_1(x_0)+w(x_0)) < 0.$$

Segue também de 5-6, que existe paraca cada $s \geq \beta_1$ fixo, uma vizinhança $V = V(s, x_0)$ de x_0 tal que

$$g(x, s\phi_1(x)+w(x)) < 0,\ \forall\, x \in V,$$

donde

$$\Phi(s,w) < 0\ se\ s \geq \beta_1\ e\ w \in W.$$

Para demonstrar 5-17, note que

$$-s-\beta_0 \geq \beta\ se\ s \leq -\beta_1,$$

logo, pelo Lema 5.2 segue que

$$-(s+\beta_0)\phi_1 + w \geq 0\ \forall\, s \leq -\beta_1,\ w \in W,$$

e

$$(s+\beta_0)\phi_1 + w \geq 0\ \forall\, s \leq -\beta_1,\ w \in W,$$

donde

$$-s\phi_1 + w \geq \beta_0\phi_1\ \forall\, s \leq -\beta_1,\ w \in W,$$

e

$$s\phi_1 + w \geq -\beta_0\phi_1\ \forall\, s \leq -\beta_1,\ w \in W.$$

De 5-4 temos que

$$tg(x,t) \leq 0,\ \forall\, x \in \Omega,\ t \in \mathbb{R}.$$

De modo análogo ao que fizemos anteriormente, concluímos

$$\Phi(s,w) \geq 0 \; e \; \Phi(-s,w) \leq 0 \; se \; s \leq -\beta_1.$$

Afirmação 5: $\Phi(s,w) > 0$ para $s \leq -\beta_1 \; e \; w \in W$.
Basta notar que

$$\begin{aligned} s\phi_1(x_0) + w(x_0) &\leq -\beta_0 \max_{\overline{\Omega}} \|\phi_1\|, \\ &\leq -\beta_0 \max_{\overline{\Omega}} \|\phi_1\| + K, \\ &< -T \\ &< 0, \; \forall \, s \geq \beta_1 \; e \; w \in W, \end{aligned}$$

e proceder de maneira análoga a demonstração de 5-16. □

Passemos agora a demonstração do Torema 5.1.
Demonstração. **1ª Parte**: Sabemos que 5-1 é equivalente a

$$\Phi(s,w) = t, \; (s,w) \in S_h.$$

Defina

$$\Lambda_h = \Phi(S_h).$$

Então 5-1 admite solução se e somente se $t \in \Lambda_h$.
Afirmação 6: Φ é uma função contínua limitada.
De fato, note

$$\begin{aligned} |\Phi(s,w)| &\leq \int_{\Omega} |g(x, s\phi_1 + w)\phi_1| \\ &\leq \int_{\Omega} |\widetilde{h}\phi_1| \\ &\leq \|\phi_1\|_\infty \|\widetilde{h}\|_1, \end{aligned}$$

donde, Φ é limitada.

Para provar a continuidade de Φ, basta usar o fato que g é Carátheodory e satisfaz 5-3, e depois, aplicar o teorema de Lebesgue. Com a Afirmação 6, concluímos a 1ª Parte, pois, sendo Φ limitada, temos que a imagem de S_h por Φ é limitada.

2ª Parte: Defina

$$W = \{w : \; (s,w) \in S_h \; para \; algum \; s \in \mathbb{R}\}.$$

Afirmação 7: W é limitado em $L^2(\Omega)$.

De fato, se $w \in W$, então

$$Lw + QG(s\phi_1 + w) = h,$$

logo,

$$Lw = h - QG(s\phi_1 + w).$$

Como $h - QG(s\phi_1 + w) \in L^2$, segue de [16] que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|w\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|h - QG(s\phi_1 + w)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Observamos que

$$Pu = \frac{\int_\Omega u\phi_1}{\int_\Omega \phi_1^2}\phi_1 = (\int_\Omega u\phi_1)\phi_1,$$

e

$$Qu = u - \frac{\int_\Omega u\phi_1}{\int_\Omega \phi_1^2}\phi_1 = u - (\int_\Omega u\phi_1)\phi_1,$$

logo,

$$\begin{aligned}
\|h - QG(s\phi_1 + w)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_\Omega |h - g(x, s\phi_1 + w) + (\int_\Omega g(x, s\phi + w)\phi_1)\phi_1|^2, \\
&\leq \int_\Omega \{|h| + |g(x, s\phi_1 + w)| + |(\int_\Omega g(x, s\phi + w)\phi_1)\phi_1|\}^2, \\
&\leq \int_\Omega \{|h| + |\widetilde{h}| + \|\phi_1\|_\infty \|\widetilde{h}\|_1 \phi_1\}^2
\end{aligned}$$

Segue da última desigualdade que existe $\rho > 0$ tal que

$$\|w\|_{L^2(\Omega)} \leq C, \ \forall\, w \in W,$$

donde concluímos que

$$W \subset \overline{B}_\rho \subset L^2(\Omega).$$

Afirmação 8: W é um subconjunto limitado de $C^1(\overline{\Omega})$ se $h \in L^\infty(\Omega)$.

Com efeito, se $w \in W$, então

$$Lw + QG(s\phi_1 + w) = h,$$

logo,

$$Lw = h - g(\cdot, s\phi_1 + w) + \int_\Omega (g(x, s\phi_1 + w)\phi_1)\phi_1.$$

Como $h, g(\cdot, s\phi_1 + w), \phi_1 \ \in L^p(\Omega) \ \forall\, p$, segue de [16] que existe uma constante

$C > 0$ tal que

$$\|w\|_{W^{4,p}(\Omega)} \leq C\|h - g(\cdot, s\phi_1 + w) + \int_\Omega (g(x, s\phi_1 + w)\phi_1)\phi_1\|_{L^p(\Omega)}.$$

De modo análogo ao que fizemos anteriormente, concluímos que existe uma constante $C_p > 0$ tal que

$$\|w\|_{W^{4,p}(\Omega)} \leq C_p, \; \forall \; p \geq 1.$$

Como $W^{4,p}(\Omega)$ está imerso compactamente em $C^1(\overline{\Omega})$ para $4 > \frac{N}{p}$, segue que W é limitado em $C^1(\overline{\Omega})$.

Pelo Lema 5.2, existe $\beta = \beta(W) > 0$ tal que

$$s\phi_1 + w \geq 0 \; e \; -s\phi_1 + w \leq 0 \; q.t.p. \; x \in \Omega, \; s \geq \beta.$$

Segue de 5-4 que

$$\Phi(\beta, w) \leq 0 \; e \; \Phi(-\beta, w) \geq 0.$$

Como Φ é contínua (cf. Afirmaçao 6), concluímos que

$$0 \in \Lambda_h,$$

portanto, a 2ª Parte está demonstrada.

3ª Parte: Note que $L_{|R(L)}$ é injetor, portanto, está bem definido o operador linear

$$S \equiv L^{-1}_{|R(L)} : R(L) \to R(L) \cap D(L) \subset L^2(\Omega).$$

Note que D(L) está imerso compactamente em $L^2(\Omega)$, portanto, S é um operador compacto de $R(L)$ em $L^2(\Omega)$.

Defina

$$K(s, w) = S[h - QG(s\phi_1 + w)], \; (s, w) \in \mathbb{R} \times \overline{B}_\rho.$$

Afirmação 9: K é compacto e $R(K) \subset \overline{B}_\rho$.

De fato, K é compacto pois é a composição de um operador compacto com um operador contínuo. Por outro lado, se $u \in R(K)$, então existe $(s, w) \in \mathbb{R} \times \overline{B}_\rho$ tal que

$$u = S[h - QG(s\phi_1 + w)],$$

donde,

$$Lu = h - QG(s\phi_1 + w).$$

Mas, como vimos anteriormente,

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \rho.$$

Pelo Teorema 2.4, existe um continuum de pontos fixos de K, $\mathfrak{C}_\infty \subset S_h$ tal que

$$\mathfrak{C}_\infty \cap (\{s\} \times \overline{B}_\rho) \neq \emptyset, \; \forall \, s \in \mathbb{R}.$$

Pelo Lema 5.3, existe $\beta_1 > 0$ tal que

$$\Phi(s,w) > 0 \; \forall \, s \leq -\beta_1 \; e \; \forall \, w \in W, \tag{5-18}$$

e

$$\Phi(s,w) < 0 \; \forall \, s \geq \beta_1 \; e \; \forall \, w \in W. \tag{5-19}$$

Seja

$$a \equiv \inf_{\mathfrak{C}_\infty \cap([-\beta_1,\beta_1]\times \overline{B}_\rho)} \Phi \; e \qquad b \equiv \sup_{\mathfrak{C}_\infty \cap([-\beta_1,\beta_1]\times \overline{B}_\rho)} \Phi.$$

Segue de 5-18 e 5-19 que

$$-\infty < a < 0 < b < \infty.$$

Temos de 5-7 que

$$\Phi(s,w) \to 0, \; w \in W, \; s \to \pm\infty. \tag{5-20}$$

Segue de 5-16, 5-17 e 5-20, que existe $\gamma > \beta_1$ tal que

$$\frac{a}{2} < \Phi(s,w) < 0 \; \forall \, (s,w) \in \mathfrak{C}_\infty \cap ((\gamma,\infty) \times \overline{B}_\rho),$$

e

$$0 < \Phi(s,w) < \frac{b}{2} \; \forall \, (s,w) \in \mathfrak{C}_\infty \cap ((-\infty,-\gamma) \times \overline{B}_\rho).$$

Defina

$$a_* \equiv \inf_{\mathfrak{C}_\infty \cap((\gamma,\infty)\times \overline{B}_\rho)} \Phi,$$

e

$$b^* \equiv \sup_{\mathfrak{C}_\infty \cap((-\infty,-\gamma)\times \overline{B}_\rho)} \Phi.$$

Segue das últimas desigualdades que

$$-\infty < a < a_* < 0 < b^* < b < \infty,$$

portanto, para cada $t \in [a^*, 0)$, existe $(s_1, w_1) \in \mathfrak{C}_\infty \cap ([-\beta_1, \beta_1] \times \overline{B}_\rho)$ tal que $\Phi(s_1, w_1) = t$ e existe $(s_2, w_2) \in \mathfrak{C}_\infty \cap ((\gamma, \infty) \times \overline{B}_\rho)$ tal que $\Phi(s_2, w_2) = t$. Concluímos o mesmo se $t \in (0, b^*]$.

Definindo

$$\Lambda_h^* \equiv [a_*, 0) \cup (0, b^*],$$

segue que a 3ª Parte está demonstrada. $\square$

CAPÍTULO 6

Problemas Elípticos Assintoticamente Lineares

Considere o problema (cf. [15]):

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f(x,u,\Delta u) & \text{em } \Omega, \\ u = \Delta u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{6-1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira regular, Δ^2 é o operador biharmônico e $f : \Omega \times [0,\infty) \times (-\infty,0] \to [0,\infty)$ é uma função contínua assintoticamente linear tal que

$$f(x,u,p) > 0,\ x \in \Omega\ e\ (u,p) \in ([0,\infty) \times (-\infty,0]) \backslash \{(0,0)\}.$$

O termo assintoticamente linear, significará para nós as hipóteses H1 e H2:

H1- Existem constantes a_0, b_0, a^0, b^0 com

$$a_0 + b_0 > 0,\ a^0 + b^0 > 0,$$

tais que

$$a_0 u - b_0 p - \xi_1(x,u,p) \leq f(x,u,p) \leq a^0 u - b^0 p + \xi_2(x,u,p),$$

para $(x,u,p) \in \Omega \times [0,\infty) \times (-\infty,0]$, onde

$$\xi_1, \xi_2 : \Omega \times [0,\infty) \times (-\infty,0] \to [0,\infty),$$

são funções contínuas satisfazendo

$$\lim_{|(u,p)| \to 0} \frac{\xi_j(x,u,p)}{|(u,p)|} = 0\ para\ cada\ x \in \Omega\ e\ j = \in \{1,2\},$$

e

$$\frac{|\xi_j(x,u,p)|}{|(u,p)|} \leq \gamma_j(x)\ para\ cada\ x \in \Omega,\ |(u,p)| > 0,\ j \in \{1,2\}\ e\ \gamma_j \in L^\infty(\Omega).$$

Observamos que $|(u,p)| = \sqrt{u^2 + p^2}$.

H2- Existem constantes $c_\infty, d_\infty, c^\infty, d^\infty$ com

$$c_\infty + d_\infty > 0,\ c^\infty + d^\infty > 0,$$

tais que

$$c_\infty u - d_\infty p - \eta_1(x,u,p) \le f(x,u,p) \le c^\infty u - d^\infty p + \eta_2(x,u,p),$$

para $(x,u,p) \in \Omega \times [0,\infty) \times (-\infty,0]$, onde

$$\eta_1, \eta_2 : \Omega \times [0,\infty) \times (-\infty,0] \to [0,\infty),$$

são funções contínuas satisfazendo

$$\lim_{|(u,p)|\to\infty} \frac{\eta_j(x,u,p)}{|(u,p)|} = 0 \ \textit{para cada}\ x \in \Omega\ \textit{e}\ j \in \{1,2\},$$

e

$$\frac{|\eta_j(x,u,p)|}{|(u,p)|} \le \zeta_j(x)\ \textit{para cada}\ x \in \Omega,\ |(u,p)| > 0,\ j \in \{1,2\}\ \textit{e}\ \zeta_j \in L^\infty(\Omega).$$

Definimos

$$\mu_1(\theta,\zeta) = \frac{\lambda_1}{\zeta + \theta\lambda_1},$$

onde θ, ζ são números reais não negativos tais que

$$\theta + \zeta > 0.$$

Ruyun Ma & Jia Xu (cf. [20]) estudaram o seguinte problema

$$\begin{cases} u'''' = f(x,u,u'') & \text{em } (0,1), \\ u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0. \end{cases}$$

O resultado principal desse capítulo, está resumido no próximo teorema (cf. [15]).

Teorema 6.1 *Suponha H1, H2 e*

***H3**- Existem números reais não negativos* a_1, a_2 *com* $a_1 + a_2 > 0$ *tais que*

$$f(x,u,p) \ge a_1 u - a_2 p,\ \textit{para cada}\ (x,u,p) \in \Omega \times [0,\infty) \times (-\infty,0].$$

Se além disso, ou

$$\mu_1(c_\infty, d_\infty) < 1 < \mu_1(a^0, b^0),$$

ou

$$\mu_1(a_0,b_0) < 1 < \mu_1(c^\infty,d^\infty),$$

então, o problema 6-1 admite no mínimo uma solução positiva.

Para demonstrarmos o Teorema 6.1, faremos uso do Teorema 3.2. Para isso, devemos mostrar que resolver o problema 6-1, é equivalente a resolver uma equação envolvendo um dado operador compacto, portanto, nas linhas que se seguem, desenvolveremos a linguagem apropriada.

Defina $\widetilde{f}:\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to[0,\infty)$ por

$$\widetilde{f}=\begin{cases} f(x,u,p) & \text{se } x\in\Omega,\ u\geq 0\ e\ p\leq 0,\\ f(x,0,p) & \text{se } x\in\Omega,\ u\leq 0\ e\ p\leq 0,\\ f(x,u,0) & \text{se } x\in\Omega,\ u\geq 0\ e\ p\geq 0,\\ f(x,0,0) & \text{se } x\in\Omega,\ u\leq 0\ e\ p\geq 0.\end{cases}$$

Note que $\widetilde{f}$ é uma extensão contínua de f.

Considere a seguinte família de problemas

$$\begin{cases} \Delta^2 u=\lambda\widetilde{f}(x,u,\Delta u) & \text{em } \Omega,\\ u=\Delta u=0 & \text{em } \partial\Omega,\end{cases} \tag{6-2}$$

onde $\lambda>0$ é um parâmetro.

Seja $H\equiv H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ e $\widetilde{F}$ o operador de Nemytskii associado a $\widetilde{f}$, isto é,

$$\widetilde{F}u(x)=\widetilde{f}(x,u(x),\Delta u(x)),\ \forall u\in H.$$

Definimos em H o produto interno (cf. Capítulo 4)

$$(u,v)=\int_\Omega \Delta u\Delta v,\ u,v\in H,$$

e lembramos que H é Hilbert com esse produto interno.

Afirmação 1: $\widetilde{F}:H\to L^2(\Omega)$ é contínuo e limitado.

Antes de provar a Afirmação 1, observamos que $f(x,0,0)=0,\ \forall x\in\Omega$. Com efeito, temos de H1 que

$$|\xi_j(x,u,p)|\leq\gamma_j(x)|(u,p)|\ \textit{para cada}\ x\in\Omega,\ j\in\{1,2\}\ e\ |(u,p)|>0,$$

portanto, usando o fato que ξ_j é contínua, obtemos fazendo $(u,p)\longrightarrow(0,0)$ que

$$\xi_j(x,0,0)=0,\ \textit{para cada}\ x\in\Omega\ e\ j\in\{1,2\}.$$

Fazendo $(u,p) \longrightarrow (0,0)$ na desigualdade

$$a_0u - b_0p - \xi_1(x,u,p) \leq f(x,u,p) \leq a^0u - b^0p + \xi_2(x,u,p),$$

concluímos que

$$f(x,0,0) = 0,\ \forall x \in \Omega.$$

Passemos agora a demonstração da Afirmação 1. De fato, note que

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{F}u\|^2_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega |\widetilde{f}(x,u,\Delta u)|^2, \\
&= \int_{[u\geq 0,\ \Delta u\geq 0]} |f(x,u,0)|^2 + \int_{[u\geq 0,\ \Delta u<0]} |f(x,u,\Delta u)|^2 + \\
&\quad + \int_{[u>0,\ \Delta u\geq 0]} |f(x,0,0)|^2 + \int_{[u<0,\ \Delta u>0]} |f(x,0,\Delta u)|^2, \\
&\leq \int_\Omega |f(x,u,\Delta u)|^2 + \int_\Omega |f(x,u,0)|^2 + \int_\Omega |f(x,0,\Delta u)|^2, \\
&\leq \int_\Omega \{[a^0u - b^0 + \xi_2(x,u,\Delta u)]^2 + [a^0u + \xi_2(x,u,0)]^2 + [-b^0\Delta u + \xi_2(x,0,\Delta u)]^2\}, \\
&\leq \int_\Omega \left[\frac{(a^0)^2}{\lambda_1^2} + (b^0)^2| + \frac{C}{\lambda_1^2} + C + \frac{2a^0b^0}{\lambda_1} + \frac{2a^0}{\lambda_1}\sqrt{\frac{C}{\lambda_1^2} + C}\right] |\Delta u|^2 + \\
&\quad + \int_\Omega \left[2b^0\sqrt{\frac{C}{\lambda_1^2} + C} + \frac{(a^0)^2}{\lambda_1^2} + \frac{2a^0}{\lambda_1^2}\sqrt{C}\right] |\Delta u|^2 + \\
&\quad + \int_\Omega \left[\frac{C}{\lambda_1^2} + (b^0)^2 + 2b^0\sqrt{C} + C\right] |\Delta u|^2,\ u \in H,
\end{aligned}$$

onde $C = \|\gamma\|^2_\infty$ e nas desigualdades acima foram utilizados a hipótese H1 e as seguintes desigualdades (cf. Capítulo 4):

$$\int_\Omega |\Delta u|^2 \geq \lambda_1 \int_\Omega \|\nabla u\|^2 \ e\ \int_\Omega |\Delta u|^2 \geq \lambda_1^2 \int_\Omega |u|^2,\ u \in H.$$

Segue que existe $C > 0$ tal que

$$\|\widetilde{F}u\|_2 \leq \|u\|_H,\ \forall u \in H.$$

Da última desigualdade concluímos que $\widetilde{F} : H \to L^2(\Omega)$ é contínuo e limitado. Seja $\Phi : \mathbb{R} \times H \to H$ definido por

$$\Phi_\lambda(u) \equiv \Phi(\lambda,u) = u - T(\lambda,u),$$

onde $T : \mathbb{R} \times H \to H$ é definido por

$$T(\lambda, u) = \lambda S^2 \widetilde{F} u,$$

e S é o operador solução definido no Capítulo 4.

Observamos que $S^2 f = u$ para $f \in L^2(\Omega)$ é equivalente a

$$\int_\Omega \Delta u \Delta v = \int_\Omega f v, \ \forall v \in H.$$

De fato, suponha que $S^2 f = u$. Note que $u = S(Sf)$, donde, $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^4(\Omega)$, pois, $Sf \in H$. Além disso, $\Delta u = 0$ em $\partial\Omega$, pois, como $u = S(Sf)$ então, $-\Delta u = Sf, \ q.t.p. \ em \ \Omega$, entretanto, $Sf \in H$, logo, $\Delta u = 0$ em $\partial\Omega$. Utilizando a identidade de Green generalizada (cf. Apêndice Teorema 7.6), obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Delta u \Delta v &= -\int_\Omega \nabla(\Delta u) \nabla v, \\ &= \int_\Omega \nabla Sf \nabla v \\ &= \int_\Omega f v, \ \forall v \in H. \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha que

$$\int_\Omega \Delta u \Delta v = \int_\Omega f v, \ \forall v \in H.$$

Segue do Lema 4.3 que $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^4(\Omega)$ e $\Delta u = 0$ em $\partial\Omega$, portanto, utilizando a identidade de Green generalizada (cf. Apêndice Teorema 7.6), temos que

$$-\int_\Omega \nabla(\Delta u) \nabla v = \int_\Omega f v, \ \forall v \in H.$$

Note que

$$\int_\Omega \nabla(Sf) \nabla v = \int_\Omega f v, \ \forall v \in H,$$

logo, subtraindo as duas últimas igualdades membro a membro, obtemos

$$\int_\Omega \nabla(\Delta u + Sf) \nabla v = 0, \ \forall v \in H,$$

mas, tomando $v = \Delta u + Sf$ (lembramos que $\Delta u + Sf \in H$), temos

$$\|\Delta u + Sf\|_{H_0^1(\Omega)} = 0,$$

donde, $Sf = -\Delta u$. Segue da identidade de Green generalizada (cf. Apêndice Teorema 7.6) que

$$S^2 f = S(-\Delta u) = u.$$

Afirmação 2: Φ é uma perturbação compacta da identidade.

Devemos provar que T é compacto. Para isso, seja $(\lambda_n, u_n) \subset \mathbb{R} \times H$ uma sequência limitada, isto é,

$$|\lambda_n| + \|u_n\|_H \leq M, \ \forall n.$$

Da desigualdade acima, concluímos que existe uma subsequência $(\lambda_{n_k}) \subset (\lambda_n)$ tal que

$$\lambda_{n_k} \longrightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado, como $\widetilde{F}$ é um operador limitado, segue do fato que $\|u_n\|$ é limitado que

$$\|\widetilde{F} u_{n_k}\| \leq M_1, \ \forall k. \tag{6-3}$$

Usando a compacidade do operador $S : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, concluímos que existe uma subsequência, que também denotaremos por $\widetilde{F} u_{n_k}$ tal que

$$S^2 \widetilde{F} u_{n_k} \longrightarrow v, \ em \ L^2(\Omega). \tag{6-4}$$

Seja $w_{n_k} = \widetilde{F} u_{n_k}$ e $v_{n_k} = S^2 w_{n_k}$.

Como vimos na última observação,

$$\int_\Omega \Delta v_{n_k} \Delta \omega = \int_\Omega w_{n_k} \omega, \ \forall \omega \in H,$$

logo,

$$\int_\Omega \Delta(v_{n_k} - v_{n_r}) \Delta \omega = \int_\Omega (w_{n_k} - w_{n_r}) \omega, \ \forall \omega \in H \ e \ \forall k, r,$$

portanto, tomando $\omega = v_{n_k} - v_{n_r}$, segue que

$$\int_\Omega |\Delta(v_{n_k} - v_{n_r})|^2 = \int_\Omega (w_{n_{k} - w_{n_r}})(v_{n_k} - v_{n_r}), \ \forall k, r.$$

Concluímos utilizando 6-3 e 6-4 que

$$\begin{aligned} \|v_{n_k} - v_{n_r}\|_H^2 &= \int_\Omega |\Delta(v_{n_k} - v_{n_r})|^2, \\ &\leq \|w_{n_k} - w_{n_r}\|_{L^2(\Omega)} \|v_{n_k} - v_{n_r}\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0, \ se \ r, k \to \infty, \end{aligned}$$

portanto,

$$\lambda_{n_k} S^2 \widetilde{F} u_{n_k} \longrightarrow \lambda v, \ em H,$$

donde T é compacto.

Afirmação 3: $u \in H$ é solução fraca de 6-2, se e somente se,

$$\Phi_\lambda(u) = 0, \; u \in H \; e \; \lambda \in \mathbb{R}.$$

De fato, se $u \in H$ é solução fraca de 6-2 então,

$$\int_\Omega \Delta u \Delta v = \lambda \int_\Omega \widetilde{F} uv, \; \forall v \in H,$$

logo, do mesmo modo que na última observação, segue que

$$\lambda S^2 \widetilde{F} u = u,$$

donde,

$$\Phi_\lambda(u) = 0.$$

Reciprocamente, se $\Phi_\lambda(u) = 0$ então,

$$\lambda S^2 \widetilde{F} u = u,$$

donde, utilizando novamente a última observação, concluímos que u é solução fraca de 6-2.

Antes de fazer alguns comentários dobre as Afirmações 2 e 3, enunciamos e provamos, uma versão do princípio do máximo, para o operador biharmônico, que nos será muito útil.

Proposição 6.2 *Seja $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^4(\Omega)$ uma função tal que*

$$\begin{cases} \Delta^2 u \geq 0 & em \; \Omega, \\ u = \Delta u = 0 & em \; \partial\Omega. \end{cases}$$

Então,

$$u(x) \geq 0, \; \Delta u(x) \leq 0, \; q.t.p. \; x \in \Omega.$$

Demonstração. Defina $v \equiv \Delta u$. Então,

$$v \in H_0^1(\Omega) \cap H^4(\Omega) \; e \; \Delta v \geq 0 \; em \; \Omega$$

. Segue do Princípio do Máximo que

$$\sup_\Omega v \leq \sup_{\partial\Omega} v^+ = 0,$$

logo,

$$u \in H_0^1(\Omega) \cap H^4(\Omega) \; e \; \Delta u \leq 0 \; em \; \Omega.$$

Novamente pelo Princípio do Máximo, temos

$$\inf_{\Omega} u \geq \inf_{\partial\Omega} u^- = 0,$$

donde,

$$u \geq 0 \ em \ \Omega.$$

$\square$

Segue da Proposição 6.2 que se $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^4(\Omega)$ é solução fraca de 6-2 então (pois, $\lambda\widetilde{f}(x,u,\Delta u) \geq 0$), $u \geq 0$ e $\Delta u \leq 0$, portanto, utilizando a definição de $\widetilde{f}$ temos que u satisfaz

$$\begin{cases} \Delta^2 u = \lambda f(x,u,\Delta u) & \text{em } \Omega, \\ u = \Delta u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

De sorte que se $\lambda = 1$ então, o problema 6-1 está resolvido.

Segue das Afirmações 2 e 3 e do último parágrafo, que devemos obter uma solução para a equação

$$\Phi_1(u) = 0.$$

Notamos que Φ é o nosso operador compacto mencionado mais acima, e que nós usaremos o Teorema 3.2 nesse operador. Antes, devemos mostrar que todas as hipóteses do Teorema 3.2 são satisfeitas, e para isso precisaremos de alguns lemas.

Lema 6.3 *Suponha H1 e H2. Seja $(u_n) \subset H$ uma sequência tal que $\|u_n\|_H > 0$ e $\left(\frac{u_n}{\|u_n\|_H}\right)$ converge em H. Então,*

i) $o_n^{\xi_j} \equiv \int_\Omega \frac{\xi_j(x,u_n.\Delta u_n)}{\|u_n\|_H}\phi_1 \to 0,\ se\ \|u_n\|_H \to 0,\ j = 1,2,$

ii) $o_n^{\eta_j} \equiv \int_\Omega \frac{\eta_j(x,u_n.\Delta u_n)}{\|u_n\|_H}\phi_1 \to 0,\ se\ \|u_n\|_H \to \infty,\ j = 1,2.$

Na demonstração do Lema 6.3, precisaremos por diversas vezes, tomar subsequência de uma dada sequência, entretanto, não mudaremos a indexação, por questões de conveniência. Lembramos que ϕ_1 é a primeira auto função associada ao problema $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$.

Demonstração. Seja $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_H}$. Por hipótese, temos que

$$v_n \longrightarrow v \ em \ H.$$

Como H está imerso compactamente em $L^2(\Omega)$, segue que

$$v_n \to v \ e \ \ \Delta v_n \to \Delta v \ em \ L^2(\Omega).$$

Ademais (conferir [3]), existem $h_1, h_2 \in L^2(\Omega)$, tais que

$$v_n \to v,\ |v_n| \leq h_1\ q.t.p.\ e\ \Delta v_n \to \Delta v,\ |\Delta v_n| \leq h_1\ q.t.p.. \tag{6-5}$$

Note,

$$\frac{\xi_j(x,u_n,\Delta u_n)}{\|u_n\|_H}\phi_1 = \begin{cases} \dfrac{\phi_1 \xi_j(x,u_n,\Delta u_n)}{|(u_n,\Delta u_n)|}|(v_n,\Delta v_n)| & \text{se } |(u_n,\Delta u_n)| \neq 0, \\ 0 & \text{se } |(u_n,\Delta u_n)| = 0. \end{cases} \tag{6-6}$$

i) Defina $H(x) = \max\{h_1(x), h_2(x)\}$. De 6-6, temos que

$$\left|\frac{\xi_j(x,u_n,\Delta u_n)}{\|u_n\|_H}\right| \leq \phi_1 \gamma_j H(x),\ j = 1,2. \tag{6-7}$$

Note que $\phi_1 \gamma_j H \in L^2(\Omega)$, pois $\phi_1, H \in L^2(\Omega)$ e $\gamma_j \in L^\infty(\Omega)$.

Por outro lado, temos que (pois, $\|u_n\|_H \to 0$ e H está imerso compactamente em $L^2(\Omega)$)

$$u_n \to 0,\ e\ \Delta u_n \to 0\ em\ L^2(\Omega),$$

donde,

$$u_n \to 0\ e\ \Delta u_n \to 0,\ q.t.p.. \tag{6-8}$$

Segue de H1, 6-5, 6-6 e 6-8 que

$$\frac{\xi_j(x,u_n,\Delta u_n)}{\|u_n\|_H} \to 0,\ q.t.p. \tag{6-9}$$

Segue de 6-7, 6-9 e do teorema de Lesbegue que

$$\int_\Omega \frac{\xi_j(x,u_n,\Delta u_n)}{\|u_n\|_H}\phi_1 \to 0.$$

ii) Defina

$$\Omega_0 = \{x \in \Omega : v(x) = 0\}.$$

Segue que, (Conferir [13], Lema 7.7)

$$\Delta v = 0,\ q.t.p.\ x \in \Omega_0. \tag{6-10}$$

Note,

$$\frac{\eta_j(x,u_n,\Delta u_n)}{\|u_n\|_H}\phi_1 = \begin{cases} \dfrac{\phi_1 \eta_j(x,u_n,\Delta u_n)}{|(u_n,\Delta u_n)|}|(v_n,\Delta v_n)| & \text{se } |(u_n,\Delta u_n)| \neq 0, \\ 0 & \text{se } |(u_n,\Delta u_n)| = 0. \end{cases} \tag{6-11}$$

Segue de H2, 6-5, 6-10 e 6-11 que

$$\frac{\eta_j(x,u_n,\Delta u_n)}{\|u_n\|_H} \to 0,\ q.t.p.\ x \in \Omega_0. \tag{6-12}$$

Por outro lado, se $x \in \Omega_0^c$ então,

$$u_n(x) = \|u_n\|_H v_n(x) \longrightarrow \pm\infty,\ q.t.p.\ x \in \Omega_0^c,$$

logo, de H2, 6-5 e 6-11, segue que

$$\frac{\eta_j(x,u_n,\Delta u_n)}{\|u_n\|_H} \to 0,\ q.t.p.\ x \in \Omega_0.^c \tag{6-13}$$

Ademais, de H2 e 6-11, temos

$$\left|\frac{\eta_j(x,u_n,\Delta u_n)}{\|u_n\|_H}\right| \leq \phi_1 \zeta_j H,\ q.t.p.. \tag{6-14}$$

Concluímos de 6-12, 6-13, 6-14 e do teorema de Lebesgue que

$$\int_\Omega \frac{\eta_j(x,u_n,\Delta u_n)}{\|u_n\|_H} \to 0.$$

□

Lema 6.4 *Assuma H1. Seja* $(\lambda,0) \in \mathbb{R}^+ \times H$ *um ponto de bifurcação da equação*

$$\Phi_\lambda(u) = 0,\ u \in H.$$

Então,

$$\mu_1(a^0,b^0) \leq \lambda \leq \mu_1(a_0,b_0).$$

Demonstração. Dividiremoas a demonstração em duas partes.

1ª parte: $\lambda \leq \mu_1(a_0,b_0)$.

Como $\lambda > 0$ é ponto de bifurcação, existe $(u_n) \subset H$ e $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}^+$ tais que

$$u_n \neq 0,\ \|u_n\|_H \to 0\ e\ \lambda_n \to \lambda,$$

e

$$\begin{cases} \Delta^2 u_n = \lambda_n \widetilde{f}(x,u_n,\Delta u_n) & \text{em } \Omega, \\ u_n \in H_0^1(\Omega) \cap H^4(\Omega). \end{cases} \tag{6-15}$$

Segue da Proposição 6.2 e de 6-15 que

$$u_n \geq 0,\ \Delta u_n \leq 0,\ x \in \Omega,$$

logo, 6-15 pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \Delta^2 u_n = \lambda_n f(x, u_n, \Delta u_n) \quad \text{em } \Omega, \\ u_n \in H_0^1(\Omega) \cap H^4(\Omega). \end{cases} \tag{6-16}$$

Defina $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|_H}$. Como v_n é limitada e H é reflexivo, existe uma subsequência que denotaremos por v_n tal que

$$v_n \rightharpoonup v \ em\ H.$$

Como H está imerso compactamente em $L^2(\Omega)$, segue que

$$v_n \longrightarrow v \ em\ L^2(\Omega).$$

Ademais, de 6-16 temos que

$$\Delta^2 v_n = \lambda_n \frac{f(x, u_n, \Delta u_n)}{\|u_n\|_H} \ em\ \Omega. \tag{6-17}$$

Afirmação 4: (v_n) possui subsequência que converge em H.

De fato, temos de 6-17 que

$$v_n = \lambda_n S^2 \Big(\frac{\widetilde{F} u_n}{\|u_n\|_H} \Big),$$

logo, como S é compacto e $\widetilde{F}$ é limitado (conferir Afirmação 1) segue que existe $v \in H$ tal que

$$v_n \longrightarrow v \ em\ H.$$

Multiplicando 6-17 por ϕ_1, temos

$$\Delta^2 v_n \phi_1 = \lambda_n \frac{f(x, u_n, \Delta u_n)}{\|u_n\|_H} \phi_1,\ \forall n.$$

Integrando a última igualdade, usando H1 e notando que

$\int_\Omega \Delta\phi_1 \Delta v_n = \int_\Omega \lambda_1^2 \int_\Omega \phi_1 v_n$, segue que

$$\begin{aligned}
\lambda_1^2 \int_\Omega v_n\phi_1 &= \int_\Omega \Delta^2 v_n \phi_1, \\
&= \frac{\lambda_n}{\|u_n\|_H} \int_\Omega f(x,u_n,\Delta u_n)\phi_1, \\
&\geq \frac{\lambda_n}{\|u_n\|_H} \int_\Omega (a_0 u_n - b_0 \Delta u_n - \xi_1(x,u_n.\Delta u_n))\phi_1, \\
&= \lambda_n \int_\Omega (a_0\phi_1 - b_0\Delta\phi_1) v_n - \lambda_n o_n^{\xi_1}(1), \\
&= \lambda_n \int_\Omega (a_0 + b_0\lambda_1)\phi_1 v_n - \lambda_n o_n^{\xi_1}(1),
\end{aligned}$$

donde,

$$\left(\frac{\lambda_1^2}{a_0+b_0\lambda_1}\right) \int_\Omega v_n\phi_1 \geq \frac{-\lambda_n}{a_0+b_0\lambda_1} o_n^{\xi_1}(1).$$

Fazendo $n \longrightarrow \infty$ e usando o Lema 6.3, obtemos da última desigualdade que

$$\left(\frac{\lambda_1^2}{a_0+b_0\lambda_1}\right) \int_\Omega v\phi_1 \geq 0.$$

Como v e ϕ são não negativas e não nulas (v é não nula, pois $\|v\|_H = 1$), segue que

$$\lambda \leq \mu_1(a_0,b_0).$$

2ª parte: $\mu_1(a^0,b^0) \leq \lambda$.

A demonstração é análoga a que fizemos na 1ª parte. □

Lema 6.5 *Assuma H1. Se* $\Lambda \subset \mathbb{R}^+$ *é compacto e*

$$[\mu_1(a^0,b^0), \mu_1(a_0,b_0)] \cap \Lambda = \emptyset,$$

então, existe $\delta_1 > 0$ *tal que*

$$\Phi_\lambda(u) \neq 0, \ \textit{se}\ 0 < \|u\|_H \leq \delta, \ \lambda \in \Lambda, \ 0 < \delta \leq \delta_1.$$

Demonstração. Suponha por absurdo que existam sequências $(u_n) \subset H$ e $(\lambda_n) \subset \Lambda$ tais que

$$\Phi_{\lambda_n}(u_n) = 0, \ 0 < \|u_n\|_H \leq \frac{1}{n}.$$

Tomando subsequências se necessário, existe $\lambda \in \Lambda$ tal que

$$\lambda_n \longrightarrow \lambda.$$

Defina $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|_H}$. Procedendo como no lema anterior, podemos provar que

$$\mu_1(a^0,b^0) \leq \lambda \leq \mu_1(a_0,b_0).$$

Absurdo, pois $\lambda \notin [\mu_1(a^0,b^0),\mu_1(a_0,b_0)]$, logo, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\Phi_\lambda(u) \neq 0,\ se\ 0 < \|u\|_H \leq \delta,\ \lambda \in \Lambda,\ 0 < \delta \leq \delta_1.$$

$\square$

Lema 6.6 *Suponha H1. Então,*

$$deg(\Phi_\lambda, B_\delta, 0) = 1,$$

onde $0 < \delta \leq \delta_1$ *com* $0 < \lambda < \mu_1(a^0,b^0)$.

Demonstração. Considere a homotopia $N : [0,1] \times B_\delta \to B_\delta$ definida por

$$N(t,u) = u - \lambda t S^2 \widetilde{F} u.$$

Afirmação 5: $N(t,u) \neq 0,\ \forall t \in [0,1]\ e\ u \in \partial B_\delta$.

De fato, suponha que $t \in [0,1]$ e $u \in \partial B_\delta$. Considera a equação:

$$N(t,u) = 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\Phi_{\lambda t}(u) = 0.$$

Como $\lambda t \in [0,\lambda]$ e $[0,\lambda] \cap [\mu_1(a^0,b^0),\mu_1(a_0,b_0)] \neq 0$, pois, $\lambda < \mu_1(a^0,b^0)$, segue (note que $[0,\lambda]$ é compacto) do Lema 6.5 que não existe $u \in \overline{B}_\delta$ tal que

$$\Phi_{\lambda t}(u) = 0,$$

donde,

$$N(t,u) \neq 0,\ \forall t \in [0,1]\ e\ u \in \partial B_\delta.$$

Concluímos utilizando a Afirmação 5 e a propriedade da invariância por homotopia do grau de Leray-Schauder que

$$deg(N(0,\cdot), B_\delta, 0) = deg(N(1,\cdot), B_\delta, 0),$$

ou seja,

$$deg(\Phi_\lambda, B_\delta, 0) = deg(I, B_\delta, 0) = 1, \ \forall \lambda \in (0, \mu_1(a^0, b^0)).$$

□

Lema 6.7 *Suponha H1 e* $\lambda > \mu_1(a_0, b_0)$. *Então, existe* $\delta_2 > 0$ *tal que*

$$\Phi_\lambda(u) \neq \tau\phi_1, \ 0 < \|u\|_H \leq \delta, \ 0 < \delta \leq \delta_2.$$

Demonstração. Suponha por absurdo que existem sequências $(u_n) \subset H$ E $(\tau_n) \subset [0,1]$ tais que

$$\Phi_\lambda(u_n) = \tau_n\phi_1 \ e \ \ 0 < \|u_n\|_H \leq \frac{1}{n}.$$

Temos (tomando subsequências se necessário) que,

$$u_n \to 0 \ em \ H, \ u_n \to 0 \ em \ L^2(\Omega), \ u_n \to 0 \ q.t.p. \ em \ \Omega \ e \ |u_n| \leq h, \ h \in L^2(\Omega).$$

A equação acima pode ser reescrita como

$$u_n = \lambda S^2 \widetilde{F} u_n + \tau_n \phi_1,$$

ou equivalentemente,

$$\begin{cases} \Delta^2 u_n = \lambda \widetilde{f}(x, u_n, \Delta u_n) + \tau_n \Delta^2 \phi_1 & \text{em } \Omega, \\ u \in H. \end{cases} \tag{6-18}$$

Note que $u_n \in H^4(\Omega)$ e $\Delta u_n \in H_0^1(\Omega)$, pois $\phi_1 \in C_0^\infty(\Omega)$ e do Lema 4.3 temos que $S^2\widetilde{F}u_n \in H^4(\Omega)$ e $\Delta S^2\widetilde{F}u_n \in H_0^1(\Omega)$. Como $u_n = \lambda S^2\widetilde{F}u_n + \tau_n\phi_1$, segue que $u_n \in H^4(\Omega)$ e $\Delta u_n \in H_0^1(\Omega)$.

Segue de 6-18 e da Proposição 6.2 (note que $\lambda\widetilde{f}(x, u_n, \Delta u_n) + \tau_n\Delta^2\phi_1 \geq 0 \ em \ \Omega$) que

$$\begin{cases} \Delta^2 u_n = \lambda f(x, u_n, \Delta u_n) + \tau_n \Delta^2 \phi_1 & \text{em } \Omega, \\ u \in H, \ u_n \geq 0 \ e \ \Delta u_n \leq 0, \ em \Omega. \end{cases} \tag{6-19}$$

Seja $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|_H}$. Note que

$$v_n = \lambda \frac{S^2\widetilde{F}u_n}{\|u_n\|_H} + \frac{\tau_n}{\|u_n\|_H}\phi_1. \tag{6-20}$$

Usando a compacidade de S e a limitação de $\widetilde{F}$, segue que $\dfrac{S^2\widetilde{F}u_n}{\|u_n\|_H}$ converge em

H, logo, $\left(\dfrac{S^2\widetilde{F}u_n}{\|u_n\|_H}\right)$ é limitado em H. Como (v_n) é limitada em H, obtemos que $\left(\dfrac{\tau_n}{\|u_n\|_H}\right)$ é limitada, portanto, existe $v \in H$ tal que (tomando subsequência se necessário)

$$v_n \longrightarrow v \ em \ H.$$

De 6-19 temos,

$$\Delta^2 u_n = \lambda \frac{f(x,u_n,\Delta u_n)}{\|u_n\|_H} + \frac{\tau_n}{\|u_n\|_H}\Delta^2\phi_1. \tag{6-21}$$

Multiplicando 6-21 por ϕ_1, integrando, notando que $\tau_n \int_\Omega \dfrac{\phi_1\Delta^2\Phi_1}{\|u_n\|_H} > 0$ e usando H1, segue que

$$\begin{aligned}
\lambda_1^2 \int_\Omega v_n\phi_1 &= \int_\Omega \Delta^2 v_n\phi_1, \\
&= \lambda\int_\Omega \frac{f(x,u_n,\Delta u_n)\phi_1}{\|u_n\|_H} + \tau_n\int_\Omega \frac{\phi_1\Delta^2\Phi_1}{\|u_n\|_H}, \\
&\geq \lambda\int_\Omega \Big(a_0v_n - b_0\Delta v_n - \frac{\xi_1(x,u_n,\Delta u_n)}{\|u_n\|_H}\Big)\phi_1 + \tau_n\int_\Omega \frac{\phi_1\Delta^2\Phi_1}{\|u_n\|_H}, \\
&\geq \lambda\int_\Omega \Big(a_0v_n - b_0\Delta v_n - \frac{\xi_1(x,u_n,\Delta u_n)}{\|u_n\|_H}\Big)\phi_1, \\
&= \lambda\int_\Omega (a_0\phi_1 - b_0\Delta\phi_1)v_n - \lambda o_n^{\xi_1}(1),
\end{aligned}$$

donde, fazendo $n \to \infty$, obtemos

$$\lambda_1^2\int_\Omega v\phi_1 - \lambda\int_\Omega (a_0 + b_0\lambda_1)\phi_1 v \geq 0,$$

portanto,

$$\left(\frac{\lambda_1^2}{a_0 + b_0\lambda_1} - \lambda\right)\int_\Omega v\phi_1 \geq 0.$$

Como $v \geq 0$, $v \neq 0$ e $\phi_1 > 0$, segue que

$$\lambda_1 \leq \mu_1(a_0,b_0).$$

Impossível. □

Lema 6.8 *Suponha H1 e* $\lambda \in (\mu_1(a_0,b_0),\infty)$. *Então,*

$$deg(\Phi_\lambda, B_\delta, 0) = 0, \ 0 < \delta \leq \delta_2.$$

Demonstração. Considere a homotopia $M : [0,1] \times B_\delta \to B_\delta$ definida por

$$M(t,u) = \Phi_\lambda(u) - t\phi_1.$$

Segue do Lema 6.7 que

$$M(t,u) \neq 0, \ \forall t \in [0,1] \ e \ u \in B_\delta.$$

Utilizando a propriedade de invariância por homotopia do grau de Leray-Schauder, concluímos que

$$deg(M(0,\cdot), B_\delta, 0) = deg(M(1,\cdot), B_\delta, 0),$$

donde,

$$deg(\Phi_\lambda, B_\delta, 0) = 0, \ \forall \lambda \ \in (\mu_1(a_0, b_0), \infty).$$

□

Para provarmos o Teorema 6.1, precisaremos do próximo lema, mas antes disso, precisamos de uma definição.

Tome n de modo que

$$\mu_1(a^0, b^0) - \frac{1}{n} > 0.$$

Defina

$$a_n = \mu_1(a^0, b^0) - \frac{1}{n} \ e \ b_n = \mu_1(a_0, b_0) + \frac{1}{n}.$$

Lema 6.9 *Suponha H1. Então, existe uma componente conexa ilimitada $\mathfrak{C}_n$ de soluções positivas da equação*

$$\Phi_\lambda(u) = 0, \ \lambda \in \mathbb{R}, \ u \in H,$$

tal que $[a_n, b_n] \times \{0\} \subset \mathfrak{C}_n$ e

$$\mathfrak{C}_n \cap \{\{\mathbb{R} \backslash [a_n, b_n]\} \times \{0\}\} = \emptyset.$$

Demonstração. Como $a_n < \mu_1(a^0, b^0)$ e $b_n > \mu_1(a_0, b_0)$, segue do Lema 6.4 que a_n e b_n não são pontos de bifurcação da equação

$$\Phi_\lambda(u) = 0.$$

Ademais, se definirmos $\widetilde{\delta} = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos dos Lemas 6.6 e 6.8, que

$$ind(\Phi_{a_n}, 0) = 1 \ e \ \ ind(\Phi_{b_n}, 0) = 0.$$

Defina

$$\mathfrak{S}_n = \overline{\{(s,u) \in \mathbb{R} \times H : \ \Phi(s,u) = 0, \ u \neq 0\}} \cup ([a_n, b_n] \times \{0\}).$$

Segue do Teorema 3.2 que existe uma componente conexa $\mathfrak{C}_n \subset \mathfrak{S}_n$ que contém $[a_n, b_n] \times \{0\}$ tal que

i) $\mathfrak{C}_n$ é ilimitada em $\mathbb{R} \times H$,

ou,

ii $\mathfrak{C}_n \cap \{\{\mathbb{R} \backslash [a_n, b_n]\} \times \{0\}\} \neq \emptyset$.

Para concluir a demonstração, resta provar que ii) não é satisfeita. Mas isso segue imediatamente do Lema 6.5, pois, se $\Lambda \subset \mathbb{R} \backslash [a_n, b_n]$ é um conjunto compacto então,

$$\Phi_\lambda(u) \neq 0, \ 0 < \|u\|_H \leq \widetilde{\delta}, \ u \in H, \ \lambda \in \Lambda,$$

donde ii) não é satisfeito. □

Passemos agora a demonstração do Teorema 6.1.

Demonstração. Como vimos anteriormente, devemos encontrar uma solução para a equação

$$\Phi_1(u) = 0.$$

Ora, basta provar que

$$\mathfrak{C}_n \cap (\{1\} \times H) \neq \emptyset. \tag{6-22}$$

Para demonstrar 6-22, tome uma sequência $\{(\sigma_k, u_k)\} \subset \mathfrak{C}_n$ tal que

$$\sigma_k + \|u_k\|_H \longrightarrow \infty.$$

Como

$$\mathfrak{C}_n \cap \{\{\mathbb{R} \backslash [a_n, b_n]\} \times \{0\}\} = \emptyset,$$

segue que existe uma subsequência, ainda denotada por $\{(\sigma_k, u_k)\}$ tal que $u_k \neq 0$.

Afirmação 6: $\sigma_k > 0$.

Com efeito, como $(\sigma_k, u_k) \in \mathfrak{C}_n$ então,

$$\Delta^2 u_k = \sigma_k \widetilde{f}(x, u_k, \Delta u_k) \ em \ \Omega, \ u_k \in H_0^1(\Omega) \cap H^4(\Omega). \tag{6-23}$$

Ora, se $\sigma_k = 0$ então, de 6-23 obtemos que $u_k = 0$, absurdo. Por outro lado, se $\sigma_k < 0$ então, como $\mathfrak{C}_n$ é conexo, segue que $\mathfrak{C}_n \cap (\{0\} \times H) \neq \emptyset$, absurdo, logo, $\sigma_k > 0$.

Como $\widetilde{f} > 0$ e vale a Afirmação 6, segue da Proposição 6.2 que

$$u_k \geq 0 \; e \;\; \Delta u_k \leq 0.$$

Segue que 6-23 pode ser reescrito como

$$\Delta^2 u_k = \sigma_k f(x, u_k, \Delta u_k) \; em \; \Omega, \; u_k \in H_0^1(\Omega) \cap H^4(\Omega). \tag{6-24}$$

Afirmação 7: (σ_k) é limitada.
De fato, usando H3 e 6-24, temos que

$$\Delta^2 u_k \geq \sigma_k (a_1 u_k - a_2 \Delta u_k).$$

Multiplicando a última equação por ϕ_1 e integrando, segue que

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 \int_\Omega u_k \phi_1 &= \int_\Omega \Delta^2 u_k \phi_1, \\ &\geq \sigma_k \int_\Omega (a_1 u_k - a_2 \Delta u_k) \phi_1, \\ &= \sigma_k \int_\Omega (a_1 \phi_1 - a_2 \Delta \phi_1) u_k, \\ &= \sigma_k (a_1 + a_2 \lambda_1) \int_\Omega u_k \phi_1. \end{aligned} \tag{6-25}$$

Como $u_k \geq 0$ e $u_k \neq 0$, temos que $\int_\Omega u_k \phi_1 > 0$, portanto, segue de 6-25 que

$$0 < \sigma_k \leq \mu_1(a_1, a_2) < \infty.$$

Concluímos da Afirmação 7 que existe uma subsequência, que denotaremos por $\{(\sigma_k, u_k)\}$ tal que

$$\sigma_k \longrightarrow \sigma \; e \;\; \|u_k\|_H \longrightarrow \infty.$$

Seja

$$v_k = \frac{u_k}{\|u_k\|_H}.$$

Segue de 6-24 que

$$\begin{cases} \Delta^2 v_k = \sigma_k \dfrac{f(x, u_k, \Delta u_k)}{\|u_k\|_H} & \text{em } \Omega, \\ v_k \in H, \; v_k \geq 0, \; \Delta v_k \leq 0. \end{cases} \tag{6-26}$$

Novamente, utilizando a compacidade do operador S e a limitação do operador $\widetilde{F}$, segue, de maneira análoga ao que fizemos no Lema 6.4, ou, no Lema 6.7 que existe $h \in H$ tal que

$$v_k \to v \; em \; H \; e \;\; \|v\|_H = 1.$$

Consideraremos dois casos.

Caso 1: $\mu_1(c_\infty, d_\infty) < 1 < \mu_1(a^0, b^0)$.

Multiplicando 6-26 por ϕ_1, integrando e utilizando H2, segue que

$$\begin{aligned}
\lambda_1^2 \int_\Omega v_k \phi_1 &= \int_\Omega \Delta^2 v_k \phi_1, \\
&\geq \sigma_k \int_\Omega (c_\infty v_k - d_\infty \Delta v_k)\phi_1 - \sigma_k o_k^{\eta_1}(1), \\
&= \sigma_k \int_\Omega (c_\infty \phi_1 - d_\infty \Delta \phi_1) v_k - \sigma_k o_k^{\eta_1}(1), \\
&= \sigma_k (c_\infty + d_\infty \lambda_1) \int_\Omega \phi_1 v_k - \sigma_k o_k^{\eta_1}(1).
\end{aligned}$$

Fazendo $n \longrightarrow \infty$ e aplicando o Lema 6.3, obtemos que

$$\Big(\frac{\lambda_1^2}{c_\infty + d_\infty \lambda_1} - \sigma\Big) \int_\Omega v\phi_1 \geq 0,$$

portanto, (lembramos que $v \geq 0$ e $v \neq 0$, pois, $\|v\|_H = 1$)

$$\sigma \leq \mu_1(c_\infty, d_\infty) < 1 < \mu_1(a^0, b^0).$$

Concluímos da última desigualdade que

$$(\sigma, \mu_1(a^0, b^0)) \subset Proj_{\mathbb{R}^+} \mathfrak{C}_n,$$

donde,

$$\mathfrak{C}_n \cap (\{1\} \times H) \neq \emptyset.$$

Caso 2: $\mu_1(a_0, b_0) < 1 < \mu_1(c^\infty, d^\infty)$.

Análogo ao Caso 1.

Isso conclui a demonstração do Teorema 6.1 $\square$

CAPÍTULO 7

Apêndice

Nas demonstrações de vários resultados dos Capítulos 1, 2 e 3, foi preciso usar alguns resultados auxiliares, que estão enunciados e demonstrados aqui.

Primeiro demonstraremos uma versão para espaços de Banach, do teorema da extensão de Dugundji, que originalmente foi demonstrado por Dugundji, para espaços vetoriais topológicos localmente convexos, e além disso, notamos que o teorema de Dugundji, generaliza o teorema da extensão de Tietze (Conferir [7] e [8]).

Teorema 7.1 (Dugundji) *Sejam E,X espaços de Banach, $C \subset E$ fechado, $K \subset X$ convexo e $f : C \to K$ contínua. Então, existe $\widetilde{f} : E \to K$ contínua tal que*

$$\widetilde{f}(u) = f(u) \text{ se } u \in C. \tag{7-1}$$

Para demonstrar esse teorema precisaremos do seguinte lema:

Lema 7.2 *Seja M um espaço métrico. Então, toda cobertura aberta de M possui um refinamento local, i.e., se $\{V_\alpha\}$ é uma cobertura de M, temos que:*

i) $\exists \{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *tal que* $M \subset \cup_\lambda O_\lambda$,

ii) $\forall \lambda \in \Lambda$, $\exists V_\alpha$ *tal que* $O_\lambda \subset V_\lambda$,

iii) $\{O_\lambda\}$ $locamente\ finita.$

Lembramos que uma cobertura é dita localmente finita, se para cada ponto x do espaço M, existe uma vizinhança de x que intersecta apenas um número finito de elementos da cobertura. Notamos que a condição iii) implica, que existe apenas um número finito de $O_\lambda' s$ que contem x.

Passemos a demonstração do Teorema 7.1

Demonstração. Para cada $u \in E \backslash C$ seja,

$$r_u = \frac{1}{3} dist(u,C),$$

e

$$B_u = \{v \in E : \|v-u\| < r_u\}.$$

Note que a família $\{B_u\}_{u\in E\backslash C}$ é uma cobertura aberta de $E\backslash C$. Do Lema 7.2, existe uma família $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de abertos $E\backslash C$ de tal que:

i) $M = E\backslash C \subset \cup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$,

ii) $\forall\lambda \in \Lambda$, $\exists B_u$ *tal que* $O_\lambda \subset B_u$,

iii) $\{O_\lambda\}$ é localmente finita.

Defina $q : E\backslash C \to (0,\infty)$ por

$$q(u) = \sum_{\lambda\in\Lambda} dist(u, E\backslash O_\lambda)$$

Afirmação: q é contínua.
De fato, seja $u \in E\backslash C$ e $(u_n) \subset E\backslash C$ tal que

$$u_n \to u.$$

Por iii) existe apenas um número finito de $O'_\lambda s$ que contém u, digamos, $O_{\lambda_1}, O_{\lambda_2}, ..., O_{\lambda_k}$.
Seja

$$O = \bigcap_{r=1}^{k} O_{\lambda_r}.$$

Como $u_n \to u$, $\exists N$ tal que

$$n > N \Rightarrow u_n \in O.$$

Para $n > N$, escreva

$$q(u_n) = \sum_{r=1}^{k} dist(u_n, E\backslash O_r) + \sum_{r=k+1}^{s_n} dist(u_n, E\backslash O_r).$$

Note que

$$\begin{aligned} dist(u_n, E\backslash O_r) &\leq dist(u_n, u) + dist(u, E\backslash O_r), \\ &\leq dist(u_n, u), \qquad se\ r \in \{k+1, ..., s_n\}, \end{aligned}$$

logo,

$$q(u_n) \leq \sum_{r=1}^{k} dist(u_n, E\backslash O_r) + \sum_{r=k+1}^{s_n} dist(u_n, u).$$

Como a função distância é contínua, para concluir basta provar que (s_n) é limitado. De fato, se (s_n) fosse ilimitado então, como $n > N$, temos que existe uma vizinhança de u (podemos tomar O_{λ_1}), que intersecta um número ilimitado de $O'_{\lambda}s$, absurdo, pois a família $\{O_\lambda\}$ é localmente finita, portanto, q é contínua.

Seja $\rho_\lambda(u) = \frac{dist(u,E\backslash O_\lambda)}{q(u)}$, $\lambda \in \Lambda$ e $u \in E\backslash C$.

Note que

$$0 \leq \rho_\lambda \leq 1 \ \forall \lambda \in \Lambda \ e \ u \in E\backslash C.$$

Ademais

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda(u) = 1.$$

Afirmação: Para cada $\lambda \in \Lambda$, existe $u_\lambda \in C$ tal que

$$dist(u_\lambda, O_\lambda) \leq 2dist(O_\lambda, C) \tag{7-2}$$

De fato, dado $\varepsilon = dist(C, O_\lambda)$ existe (pela definição de distãncia) $c \in C$ tal que

$$dist(O_{\lambda,C} \leq dist(c, O_\lambda) \leq 2dist(O_\lambda, C)$$

Portanto, basta tomar $u_\lambda = c$.
Seja $\widetilde{f} : E \to K$ definida por

$$\widetilde{f}(u) = \begin{cases} f(u) & \text{se } u \in C, \\ \sum\limits_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda(u) f(u_\lambda) & \text{se } u \in E\backslash C. \end{cases}$$

Note que

$$\widetilde{f}(u) = f(u) \ se \ u \in C.$$

Afirmação: $\widetilde{f}$ é contínua.

$$\widetilde{f} = f \ em \ C \text{ é contínua em C}$$

e

$$\widetilde{f} = \sum_{\lambda \in \lambda} \rho_\lambda(u) f(u_\lambda) \text{ é contínua em } E\backslash C.$$

Resta mostrar que $\widetilde{f}$ é contínua em ∂C.
Dado $u \in \partial C$ e $v \in E\backslash C$, temos

$$\begin{aligned} \|\widetilde{f}(u)-\widetilde{f}(v)\| &= \|f(u)-\sum_\lambda \rho_\lambda(v)f(u_\lambda)\| \\ &= \|\sum_\lambda \rho_\lambda(v)f(u)-\sum_\lambda \rho_\lambda(v)f(u_\lambda)\| \\ &= \sum_{\lambda\in\Lambda} \rho_\lambda(v)\|f(u)-f(u_\lambda)\| \end{aligned} \tag{7-3}$$

Se $\rho_\lambda(v) \neq 0$

$$dist(v, E\backslash O_\lambda) > 0 \Rightarrow v \in O_\lambda.$$

Se $w \in O_\lambda$, então

$$\|v-u_\lambda\| \leq \|v-w\| + \|w-u_\lambda\|.$$

Note que

$$\|v-w\| \leq diamO_\lambda.$$

Logo

$$\|v0u_\lambda\| \leq diamO_\lambda + \|w-u_\lambda\| \; \forall w \in O_\lambda$$

De ii) existe B_u tal que

$$O_\lambda \subset B_u.$$

Logo

$$diamO_\lambda \leq diamB_u.$$

Afirmação: $diamB_u \leq dist(B_u, C$.
De fato, se $x \in B_u$ e $c \in C$, então

$$dist(u,x) \leq r_u \; e \; dist(u,c) \geq dist(u,C).$$

Como

$$dist(u,c) \leq dist(u,x) + dist(x,c),$$

segue que

$$dist(u,C) \leq r_u + dist(x,c).$$

Tomando o ínfimo em C concluímos que

$$dist(u,C) \leq r_u + dist(x,C).$$

Como

$$dist(u,C) = 3r_u \; e \; dist(x,C) \leq dist(B_u,C).$$

obtemos

$$diamB_u \leq dist(B_u, C).$$

Portanto

$$diamO_\lambda \leq dist(B_u, C) \leq dist(O_\lambda, C).$$

Donde

$$\|v - u_\lambda\| \leq dist(O_\lambda, C) + dist(u_\lambda, O_\lambda).$$

Por 7-2

$$\begin{aligned} \|v - u_\lambda\| &\leq dist(C, O_\lambda) + 2dist(C, O_\lambda) \\ &= 3dist(C, O_\lambda) \\ &= 3\|v - u\| \; v \in O_\lambda \; e \; u \in \partial C \end{aligned} \tag{7-4}$$

Daí, para cada $\lambda \in \Lambda$ tal que

$$\rho_\lambda(v) \neq 0,$$

temos

$$\|u - u_\lambda\| \leq \|u - v\| + \|v - u_\lambda\|.$$

Por 7-4

$$\begin{aligned} \|u - u_\lambda\| &\leq \|u - v\| + 3\|u - v\| \\ &= 4\|u - v\| \end{aligned}$$

Como f é contínua, temos que dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$\|u - u_\lambda\| < \delta \Rightarrow \|f(u) - f(u_\lambda)\| < \varepsilon.$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$, tome $\|u - v\| < \frac{\delta}{4}$.
Temos

$$\|u - u_\lambda\| < \delta.$$

Logo,

$$\|f(u) - f(u_\lambda)\| < \varepsilon.$$

Por 7-3 segue que

$$\|\widetilde{f}(u)-\widetilde{f}(v)\| < \varepsilon \; se \; \|u-v\| < \frac{\delta}{4},$$

provando que $\widetilde{f}$ é contínua. □

Demonstraremos agora o teorema de Mazur (Conferir [9]).

Teorema 7.3 (Mazur) *Seja E espaço de Banach e A ⊂ E compacto. Então,*

$$\overline{conv(A)} \text{ é compacto}.$$

Para demonstrar o Teorema 7.3 precisaremos do seguinte lema (cf DUNFORD & SCHAWRTZ Pág 22):

Lema 7.4 *Seja M um espaço métrico. Então, $\overline{K} \subset M$ é compacto se e somente se K é totalmente limitado e $\overline{K}$ é completo.*

Passemos agora a demonstração do Teorema 7.3:
Demonstração. De fato, como E é completo e $\overline{conv(A)}$ é fechado em E, segue que

$$\overline{conv(A)} \text{ é completo}.$$

Como A é compacto, segue do Lema 7.4 que A é totalmente limitado, isto é, dado $\varepsilon > 0$, existem $z_1, ..., z_n \in A$ tal que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_{\frac{\varepsilon}{4}}(z_i).$$

Seja $K = conv(\{z_1, ..., z_n\})$.
Seja $v : A \to \{1, ..., n\}$ *tal que*, *se* $x \in A$, então

$$|x - z_{v(x)}| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Note que se $y \in conv(A)$ então,

$$y = \sum_{i=1}^{m} a_i y_i, \; y_i \in A, \; a_i \geq 0 \; e \; \sum_{i=1}^{n} a_i = 1.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
|y-\sum_{i=1}^{m} a_i z_{v(y_i)}| &= |\sum_{i=1}^{m} a_i y_i - \sum_{i=1}^{m} a_i z_{v(y_i)}| \\
&\leq \sum_{i=1}^{m} a_i |y_i - z_{v(y_i)}| \\
&< \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\varepsilon}{4} \\
&= \frac{\varepsilon}{4}
\end{aligned}$$

Concluímos que

$$conv(A) \subset \bigcup_{k\in K} B_{\frac{\varepsilon}{4}}(k).$$

Donde

$$\overline{conv(A)} \subset \bigcup_{k\in K} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(k). \tag{7-5}$$

Note que

$$K = \{k : k = \sum_{i}^{n} a_i z_i,\ a_i \geq 0\ e\ \sum_{i}^{n} a_i = 1\}.$$

Seja $\Psi : B \equiv [0,1] \times ... \times [0,1] \times \{z_1\} \times ... \times \{z_n\} \to K$ definida por

$$\Psi(a_1,...,a_n,z_1,...,z_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i z_i.$$

Note que:

i) Ψ é contínua,

ii) Ψ é sobre.

Como B é compacto, obtemos de i) e ii) que K é compacto.
Se K é compacto então, existem $k_1,...,k_m \in K$ tal que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(k_i). \tag{7-6}$$

Segue de 7-5 e 7-6 que

$$\overline{conv(A)}.$$

□

Passamos agora a demonstração do lema de Whyburn (Conferir [7]).

Teorema 7.5 (Lema de Whyburn) *Seja M um espaço métrico compacto, $A, B \subset M$ fechados disjuntos e $A, B \neq \emptyset$.*

Então, ou

$$i)\ \exists\, M_1, M_2 \subset M \text{ compactos tais que},\ A \subset M_1,\ B \subset M_2,\ M_1 \cup M_2 = M \text{ e } M_1 \cap M_2 = \emptyset,$$

ou

$$ii)\ \exists \text{ uma componente conexa } \mathfrak{C} \subset M \text{ tal que } \mathfrak{C} \cap A \neq \emptyset \text{ e } \mathfrak{C} \cap B \neq \emptyset.$$

Demonstração. Suponha que ii) não seja satisfeito, isto é, ou A ou B é componente conexa e $A \cap B = \emptyset$. Em particular, vamos supor que A é componente conexa.

Dado $\varepsilon > 0$, defina

$$A_\varepsilon = \{x \in M : \exists a \in A \text{ tal que } x \text{ e } a \text{ são ligados por uma } \varepsilon-\text{cadeia}\}.$$

Note que

$$A \subset A_\varepsilon.$$

Afirmação: A_ε é aberto e fechado em M.

De fato, tome $y \in A_\varepsilon$. Se $z \in B_\varepsilon(y)$, então $dist(z,y) < \varepsilon$, logo $z \in A_\varepsilon$.

Por outro lado, tome $y \in M \backslash A_\varepsilon$. Se $z \in B_\varepsilon(y)$, então $dist(z,y) < \varepsilon$, logo $z \notin A_\varepsilon$.

Note que se $B \cap A_\varepsilon = \emptyset$ para algum ε então, definindo

$$M_1 = A_\varepsilon \text{ e } M_2 = M \backslash A_\varepsilon,$$

temos

$$M_1 \cap M_2 = \emptyset,\ M_1 \cup M_2 = M,\ A \subset M_1 \text{ e } B \subset M_2,$$

ou seja, i) é satisfeito.

Afirmação: $B \cap A_\varepsilon = \emptyset$ para algum ε.

Com efeito, suponha por absurdo que para todo $\varepsilon > 0$, $B \cap A_\varepsilon \neq \emptyset$.

Sejam

$$\varepsilon_n \to 0,\ (a_n) \subset A \text{ e } (b_n) \subset B,$$

tais que a_n e b_n são ligados por uma ε_n-cadeia.

Como A e B são compactos, existem subsequências que denotaremos pelos mesmos sub-índices tais que

$$(a_n) \to a_0 \in A \text{ e } (b_n) \to b_0 \in B.$$

Note que a_0 e b_0 podem ser ligados (pois $dist(a_n, a_0) \to 0$ e $dist(b_n, b_0) \to 0$) por uma ε_n-cadeia M_n, $\forall n$.

Seja

$$M_0 = \{x \in M : x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k},\ x_{n_k} \in M_{n_k}\}.$$

Afirmação: M_0 é fechado.

De fato, se $(x_n) \subset M_0$ é tal que

$$x_n \to x,$$

então para cada n temos

$$x_n = \lim_{k\to\infty} x_{n,m_k}.$$

Se usarmos o processo de diagonal de Cantor, ou seja, para cada n tomarmos o elemento

$$x_{n,m_n} \in (x_{n,m_k}),$$

obteremos uma nova sequência tal que

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n,m_n}.$$

Portanto $x \in M_0$, donde M_0 é fechado.

Afirmação: M_0 é conexo.

Suponha por absurdo que M_0 não é conexo.

Então, existem componentes conexas C_1 e C_2 tais que

$$M_0 = C_1 \cup C_2 \ e \ C_1 \cap C_2 = \emptyset.$$

Note que C_1 e C_2 são compactos, pois, M_0 é fechado no compacto M, portanto, M_0 é compacto, e como C_1 e C_2 são fechado em M_0, segue a compacidade.

Logo, existem $\delta - vizinhanas$ U e V de C_1 e C_2 respectivamente tais que

$$U \cap V = \emptyset \ e \ dist(U,V) > 0.$$

Se $\varepsilon_n < \delta$, então $\forall c_1 \in C_1$ e $\forall c_2 \in C_2$, não pode existir (pois $dist(c_1,C_2) > \delta \ e \ dist(c_2,C_1) > \delta$ uma ε_n-cadeia ligando c_1 a c_2.

Ímpossível, pois, todos os pontos de M_0 podem ser ligado por ε_n-cadeias, logo, M_0 é conexo.

Como $a_0 \in M_0 \cap A$ e A é componente conexa então, $M_0 \subset A$, pois M_0 tmabém é componente.

Logo, como $b_0 \in M_0$, então $b_0 \in A$, portanto

$$A \cap B \neq \emptyset.$$

Absurdo, logo $\exists\ \varepsilon > 0$ tal que

$$B \cap A_\varepsilon = \emptyset.$$

$\square$

Demonstraremos agora, o teorema da identidade de Green generalizado.

Teorema 7.6 *Sejam $u, v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Então,*

$$\int_\Omega v\Delta u = \int_\Omega u\Delta v,$$

e

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = -\int_\Omega \Delta u v.$$

Demonstração. Primeiro vamos provar que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = -\int_\Omega \Delta u v.$$

Como $v \in H_0^1(\Omega)$, segue que existe $(\phi_n) \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que

$$\phi_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} v, \ em\ H_0^1(\Omega). \tag{7-7}$$

Note, (utilizando a definição de $H^2(\Omega)$)

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Delta u \phi_n &= \sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\phi_n, \\ &= -\sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \phi_n}{\partial x_i}. \end{aligned} \tag{7-8}$$

Segue de 7-7 e 7-8 que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = -\int_\Omega \Delta u v.$$

Para demonstrar a outra igualdade, basta notar que um raciocínio análogo, nos mostra que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v = -\int_\Omega \Delta v u,$$

donde,

$$\int_\Omega v\Delta u = \int_\Omega u\Delta v.$$

$\square$

Concluímos aqui o apêndice.

Referências Bibliográficas

[1] AGMON, S; DOUGLIS, A. & NIRENBERG, L. **Estimates Near the Boundary for Solutions of Elliptic Partial Differential Equations Satisfying General Boundary Conditions. I**. Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. XII, 623-727, 1959.

[2] AMBROSETTI, A. & MALCHIODI, A. **Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems**. Cambridge University Press, New York, 2007.

[3] BREZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. Springer, 2011.

[4] CORRÊA, F. J. S. A; GONCALVES, J. V. & RONCALLI, A. **On a Class of Fourth Order Nonlinear Elliptic Equations Under Navier Boundary Conditions**. Anal. Appl. (Singap.) 8 (2010), no. 2, 185–197, 2010.

[5] COSTA, D. G. & GONCALVES, J. V. A. **Existence and Multiplicity Results for a Class of Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems at Resonance**. J. Math. Anal. Appl., 84, 328-337., 1981.

[6] DE ALMEIDA, O. B. **Teoria do Grau e Aplicações**. Dissertação de Mestrado, Orientador: Claudianor Oliveira Alves, 2006.

[7] DEIMLING, K. **Nonlinear Functional Analysis**. Springer-Verlag, Berlim, 1985.

[8] DUGUNDJI, J. **An extension of Tietze's theorem**. Pacific J. Math. 1, 353–367, 1951.

[9] DUNFORD, N. & SCHWARTZ, J. T. **Linear Operators Part I: General THeory**. Interscience Publishers, Inc, New York, 1957.

[10] FIGUEIREDO, D. G. **Equações Elípticas não Lineares**. Instituto de Matematica Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1977.

[11] FIGUEIREDO, D. G. & NI, W. M. **Perturbations of Seconde Order Linear Elliptic Problems by Nonlinearities Without Landesman-Lazer Condition**. Nonlinear Anal, 19, 629-634, 1979.

[12] FONSECA, I. & GANGBO, W. **Degree Theory in Analysis and Applications**. Clarendon Press, Oxford, 1995.

[13] GILBARD, D. & TRUDINGER, N. S. **Ellptic Partial Differential Equations of Second Order**. Springer-Verlag, New York, 1983.

[14] GONÇALVES, J. V. A. **On Bounded Nonlinear Perturbations of an Elliptic Equation at Resonance**. Nonlinear Anal, 5, 57-60, 1981.

[15] GONCALVES, J. V. A; SILVA, EDCARLOS. D. & SILVA, M. L. **On Positive Solutions for a Fourth Order Asymptotically Linear Elliptic Equation Under Navier Boundary Conditions**. Journal of Mathematical Analysis and Applications, v. 384, p. 387-399., 2011.

[16] GUPTA, C. P. & KWONG, Y. C. **Biharmonic Eigenvalue Problems and L^p estimates**. Internat. J. Math. Math. Sci., 13 469-480, 1990.

[17] KRASNOSELSKII, M. A; ZABREIKO, P. P; PUSTYLNIK, E. I & SBOLEVSKII, E. I. **Integral Operators in Space of Summable Functions**. Noordhoff International Publishing, 1976.

[18] LANDESMAN, E. & LAZER, A. C. **Nonlinear Perturbations of Linear Elliptic Boundary Value Problems at Resonance**. J. Math. Mech, 19, 609-623, 1970.

[19] LING, X. **Multiplicity Results for Fourth-Order Boundary-Value Problem at Resonance With Variable Coefficients**. Elect. Journal of Differential Equations, 100, 1-8, 2008.

[20] MA, R. & XU, J. **Bifurcation From Interval and Positive Solutions of a Nonlinear Fourth-Order Boundary Value Problem**. Nonlinear Anal, 72, 113-122, 2010.

[21] MA, R. & YANG, Y. **Existence Result for a Singular Nonlinear Boundary Value Problem at Resonance**. Nonlinear Analysis, 68, 671-680, 2008.

[22] MAWHIN, J. **Leray-Schauder Degree: A Half Century of Extensions and Applications**. Topological Methods in Nonlinear Analysis, 14 195-228, 1999.

[23] RABINOWITZ, P. H. **Some Global Results for Nonlinear Eigenvalue Problems**. Journal of Functional Analysis, 7, 487-513, 1971.

[24] SCHMITT, K. & THOMPSON, R. C. **Nonlinear Analysis and Partial Differential Equations: An Introduction**. http://www.math.utah.edu/ schmitt/ode1.pdf, 1998.

[25] SUN, JINGXIAN. & SONG, F. **A Property of Connected Components and its Applications**. Topology and its Applications, 125 553-560, 2002.

[26] ZEIDLER, E. **Nonlinear Functional Analysis and its Applications I - Fixed Point Theorems**. Springer-Verlag,inc, New York, 1986.