



Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional



Teorema de Napoleão: origem, demonstrações e aplicações

Gean Carlos Sousa Gonzaga

Goiânia

2015

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: ☒ **Dissertação** ☐ **Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):	Gean Carlos Sousa Gonzaga				
E-mail:	geanmaf@gmail.com				
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? ☒ Sim ☐ Não					
Vínculo empregatício do autor	Professor da RME de Goiânia				
Agência de fomento:				Sigla:	
País:	Brasil	UF:Go		CNPJ:	
Título:	Teorema de Napoleão: origem, demonstrações e aplicações				
Palavras-chave:	Afinidade, Barlotti, Napoleão, Regularidade, Transformações Rígidas				
Título em outra língua:	Theorem of Napoleon: source, demonstrations and applications				
Palavras-chave em outra língua:	Affinity, Barlotti, Napoleon, Regularity, Rigid Transformations				
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico				
Data defesa: (06/08/2015)	06 de Agosto de 2015				
Programa de Pós-Graduação:	Profmat UFG				
Orientador (a):	Profª Drª Ivonildes Ribeiro Martins Dias				
E-mail:	ivonildes.ufg@gmail.com				
Co-orientador (a):*					
E-mail:					

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento ☒ SIM ☐ NÃO

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Assinatura do Autor

Data: / / 2015

Gean Carlos Sousa Gonzaga

**Teorema de Napoleão: origem,
demonstrações e aplicações**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Matemática

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Ivonildes Ribeiro Martins Dias

Goiânia

2015

Ficha catalográfica elaborada automaticamente
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob orientação do Sibi/UFG.

Gonzaga, Gean Carlos Sousa
Teorema de Napoleão: Origem, Demonstrações e Aplicações
[manuscrito] / Gean Carlos Sousa Gonzaga. - 2015.
XIII, 83 f.

Orientador: Profa. Dra. Ivonildes Ribeiro Martins Dias.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de
Matemática e Estatística (IME) , Programa de Pós-Graduação em
Matemática, Goiânia, 2015.

Inclui lista de figuras.

1. Afinidade. 2. Barlottri. 3. Napoleão. 4. Regularidade. 5.
Transformações Rígidas. I. Dias, Ivonildes Ribeiro Martins , orient. II.
Título.

Gean Carlos Sousa Gonzaga

**Teorema de Napoleão: Origem,
Demonstrações e Aplicações**

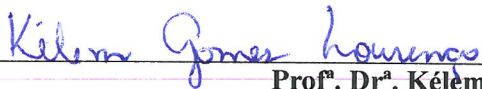
Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 06 de agosto de 2015, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



Prof.ª Dr.ª Ivonildes Ribeiro Martins Dias
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca



Prof.ª Dr.ª Silvia Cristina Belo e Silva
Membro Externo PUC/GO



Prof. Dr. Kélem Gomes Lourenço
Instituto de Matemática e Estatística - UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

Gean Carlos Sousa Gonzaga graduou-se em Matemática pela Universidade Estadual Vale do Acaraú IDEC-Cristo Rei e se especializou em Métodos e Técnicas de Ensino pela Universidade Salgado de Oliveira. Atua como professor de Matemática efetivo da Rede Municipal de Ensino de Goiânia.

*Dedico este trabalho a minha esposa Su-
elen Aparecida Costa Gonzaga, a mi-
nha filha Júlia Costa Gonzaga e aos
meus pais Maria de Fátima Sousa Gon-
zaga e João Luiz Gonzaga (in memo-
riam)*

Agradecimentos

Agradeço a Deus por essa oportunidade única de prosseguir meus estudos e ganhar um entendimento mais profundo e significativo de minha formação e habilitação profissional. Agradeço a minha esposa, Suelen Aparecida Costa Gonzaga, pelo apoio incondicional e incentivo sempre presente. Agradeço aos professores do programa pela presteza e empenho, em especial a querida prof^a. Dr^a. Ivonildes Ribeiro Martins Dias, pela orientação e apoio que tornaram possível a realização deste Trabalho de Conclusão de Curso. Por fim, agradeço à CAPES pelo suporte financeiro, sem o qual o segmento do curso que agora concluo não teria sido possível.

Resumo

O presente trabalho aborda o teorema de Napoleão em perspectivas históricas e conceituais, enfocando demonstrações e propriedades. No primeiro capítulo, são abordados aspectos da biografia de Napoleão Bonaparte. No segundo capítulo são abordadas noções de Geometria Plana, de Álgebra Linear, de Transformações Rígidas, de Números Complexos e Transformações Afins. No terceiro capítulo, são apresentadas demonstrações, generalizações (em especial, o chamado Teorema de Barlotti), propriedades e aplicações em exercícios.

Palavras-chave

Afinidade, Barlotti, Napoleão, Regularidade, Transformações Rígidas

Abstract

This paper addresses the theorem of Napoleon on historical, conceptual perspectives, and focusing on demonstrations and applications properties as well. In the first chapter, are discussed aspects of the history and Napoleon Bonaparte biography. In the second chapter are addressed notions of Plane Geometry, Linear Algebra, of Rigid Transformation of Complex Numbers and Related Transformations. In the third chapter, statements are presented, generalizations (especially the so-called Barlotti Theorem), properties and applications in exercises.

Keywords

Affinity, Barlotti, Napoleon, Regularity, Rigid Transformations

Lista de Figuras

2.1	Simetria em torno de um ponto	20
2.2	Reflexão em torno da reta	21
2.3	Reflexão do retângulo e sentidos de rotação	21
2.4	Translação fora da reta AB	22
2.5	Rotação	22
2.6	Reflexão deslizante	23
2.7	Composição de translações	24
2.8	Composição de duas reflexões em eixos concorrentes	24
2.9	Composição de duas reflexões em eixos paralelos	25
2.10	Composição de três reflexões em eixos paralelos	25
2.11	Composição de três reflexões em eixos concorrentes	26
2.12	Composição de três reflexões em eixos nem paralelos nem concorrentes	26
2.13	Composição de duas rotações	27
2.14	Composição de rotação com translação ordem e centro das transformações	28
2.15	Teorema fundamental das transformações rígidas existência	28
2.16	Teorema fundamental das transformações rígidas unicidade	29
3.1	Demonstração clássica por semelhança de triângulos	32
3.2	Demonstração clássica por semelhança de triângulos	33
3.3	Demonstração trigonométrica	35
3.4	Demonstração por arcos capazes	36
3.5	Demonstração por rotações	38
3.6	Demonstração por notação complexa	39
3.7	Demonstração do teorema de Thébault	44
3.8	Demonstração do Teorema de Barlotti	46
3.9	Configuração de Napoleão como corolário de Barlotti	48

3.10	Coincidência de baricentros	50
3.11	Propriedade dos baricentros e expressões afins	51
3.12	Propriedade da intersecção das linhas em um único ponto	52
3.13	Triângulo equilátero circunscrito a $\triangle ABC$	53
3.14	Pontos médios nas configurações interna e externa	54
3.15	Propriedade do hexágono de Napoleão	55
3.16	Problema do hexágono	57
3.17	Problema da determinação do ângulo	62
3.18	Problema da linha poligonal	63

Sumário

Introdução	1
1 Contextualização Histórica do Teorema de Napoleão	3
1.1 Napoleão: de Ajaccio até Santa Helena	4
1.2 Era Napoleônica e as Ciências: Teorema de Napoleão	9
2 Conceitos e Pressupostos Teóricos	12
2.1 Alguns Teoremas em Geometria Plana	12
2.2 Espaços Vetoriais	13
2.2.1 Exemplos de Transformações Lineares no Plano	15
2.3 Números Complexos	16
2.4 Transformações Rígidas no Plano	19
2.4.1 Composição de Transformações Rígidas	23
2.4.2 Teorema Fundamental das Transformações Rígidas	27
2.5 Transformações Afins	30
3 Demonstrações e Propriedades Associadas ao Teorema de Napoleão	31
3.1 Demonstrações Propostas ao Teorema de Napoleão	31
3.1.1 Demonstração por Semelhança de Triângulos	32
3.1.2 Demonstração por Trigonometria	34
3.1.3 Demonstração Via Arcos Capazes	36
3.1.4 Demonstração por Rotações	38
3.1.5 Demonstração por Rotações em Notação Complexa	39
3.1.6 Generalização de Honsberger do Teorema de Napoleão	41
3.1.7 Demonstração Sintética de Honsberger	42
3.1.8 Teorema de Thébault	43

3.2	Generalização: Teorema de Barlotti	44
3.2.1	Teorema de Barlotti	45
3.2.2	Teorema de Napoleão como Corolário do Teorema de Barlotti	47
3.3	Propriedades Decorrentes da Configuração de Napoleão	50
3.3.1	Propriedade Relativa aos Baricentros	50
3.3.2	Propriedade da Intersecção de Segmentos Nas Configurações Interna e Externa	52
3.3.3	Propriedade do Perpendicularismo	53
3.3.4	Propriedade do Triângulo Equilátero Circunscrito	53
3.3.5	Propriedade dos Pontos Médios	54
3.3.6	Propriedade do Hexágono de Napoleão	55
3.4	Algumas Aplicações dos Conceitos Desenvolvidos em Problemas de Geometria Plana	56
3.4.1	Problema do Hexágono	57
3.4.2	Problema dos n Pontos da Circunferência	59
3.4.3	Problema da Determinação do Ângulo	62
3.4.4	Problema da Linha Poligonal	63
	Considerações finais	64
	Referências Bibliográficas	66

Introdução

O estudo da Geometria Euclidiana revela nuances e transformações em objetos das artes e arquiteturas. Em um período histórico em que se julgava que a Geometria Euclidiana já estivesse concluída, surge o primeiro grande teorema sobre o triângulo desenvolvido após a Grécia Antiga [17], conhecido como teorema de Napoleão. Embora Napoleão Bonaparte seja um famoso militar e conquistador, sua relação com o teorema que leva seu nome ainda é pouco conhecida ou discutida.

O teorema de Napoleão é fascinante por ter uma combinação rara de enunciado simples e diversas possibilidades de ilustração visual (por desenho geométrico ou geometria dinâmica computacional), demonstração e propriedades adjuntas. Além disso, as demonstrações dos teoremas de Thebault e Barlotti (apresentados no texto) e dos teoremas de Douglas e de Kiepert (presentes em Coxeter [16], por exemplo), mostram a abrangência e profundidade teórica presente na configuração de Napoleão.

Além disso, tão polêmica quanto a biografia de Napoleão (lembrado ao mesmo tempo como gênio e genocida) é a associação do famoso imperador ao teorema que leva seu nome. Para muitos autores (como Crilly [17]) associar Napoleão ao enunciado e demonstração do teorema não passa de reproduzir uma lenda. Ao passo que outros autores (como Medina [33]) não só defendem a autoria do teorema por parte do Imperador como apontam as inspirações para o enunciado e a demonstração.

Tomando este teorema como referencial o presente trabalho trata de conceitos da Geometria Euclidiana e suas relações nem sempre óbvias com outras áreas de conhecimento matemático como a Trigonometria, Transformações Rígidas, Números Complexos, Álgebra Linear e Transformações Afins. Com intuito de propor uma organização metodológica e didática coerente, o texto foi subdividido em três capítulos.

No primeiro capítulo traça-se um panorama histórico do teorema através da trajetória de Napoleão Bonaparte e sua influência no desenvolvimento posterior das Ciências na Europa (com enfoque especial na convivência direta de Napoleão com matemáticos

de seu tempo e as prováveis origens do teorema que leva seu nome). Assim, propõe-se uma discussão sobre a autoria do teorema ser ou não do Imperador.

No segundo capítulo são apresentados pressupostos teóricos que fundamentam as demonstrações e propriedades da chamada configuração de Napoleão, tais como a Semelhança de Triângulos, Trigonometria, Álgebra Linear, Transformações Rígidas, Números Complexos e Transformações Afins.

No terceiro capítulo é apresentado o enunciado de Napoleão e suas principais demonstrações. Além desse enunciado as configurações dos teorema de Thébault e Barlotti (propostas de extrapolação da Configuração de Napoleão) e as propriedades da configuração de Napoleão somam-se a quatro resoluções de exercícios de Geometria Plana com aplicações de conceitos como Transformações Geométricas e Números Complexos, propondo essa abordagem para o Ensino Básico e preparação para vestibulares e olimpíadas.

Capítulo 1

Contextualização Histórica do Teorema de Napoleão

O conhecimento matemático adquirido ao longo da evolução humana está diretamente relacionado ao contexto sociocultural. A História Total ou Marxista avalia essa evolução sob a perspectiva dos modos de produção conforme Piletti [36]. Nesta perspectiva historiográfica, os modos de produção se sucedem e sobrepõem, de sorte que as contradições internas de um modelo lançam as bases para a inauguração de outro: do modo de produção primitivo surge o modo de produção asiático; deste surge o modo de produção escravista; deste surge o modo de produção feudal e; por fim, deste surge o modo de produção capitalista (para maiores detalhes sobre História Total, veja Piletti [36]).

É na fase industrial do modo de produção capitalista que surgem as disputas políticas entre os burgueses e nobres, com significativas vitórias da burguesia através de duas grandes revoluções: Independência dos Estados Unidos, e Revolução Francesa. É no conturbado período que vai desde a queda do Antigo Regime (como era conhecida a monarquia absolutista francesa) até a restauração monárquica que está situada a história pessoal e política de um dos maiores gênios militares do Ocidente: Napoleão Bonaparte.

1.1 Napoleão: de Ajaccio até Santa Helena

Certo dia, numa pequena capela na região montanhosa da Córsega, Letizia Bonaparte levava seu filho para ser batizado. Como todos os presentes, o padre julgava que o pequeno filho de Letizia teria, entre seus nomes, uma referência à Virgem Maria.

Mas a jovem tinha outra intenção : o nome seria Napoleão, uma homenagem a um dos tios de Letizia que havia morrido a pouco, combatendo os franceses. Originalmente, o nome Napoleão era associado sempre ao mártir cristão alexandrino que foi flagelado durante o governo do imperador romano Diocleciano [18].

Napoleão demonstrava energia e vivacidade de intelecto, ao ponto de receber o apelido de Rabulião que no linguajar corso significa *aquele que se intromete em tudo*. Era agressivo e muitas vezes rolava no chão do jardim com seu irmão (dezenove anos mais velho) e as vezes ganhava, conforme Cronin [18].

Conta-se que as habilidades matemáticas de Napoleão eram muito precoces. Com oito anos ele caminhou junto com um fazendeiro local para verificar um moinho e calculou as quantidades moídas em um dia, uma semana e também o volume de água necessário para ativar as mós [18].

As famílias da Córsega poderiam até ser nobres mas não eram ricos nem tinham privilégios. Eram corretos, afetuosos e de modos simples, além de darem grande valor ao trabalho e as certezas mais simples da vida como comida, amigos ou roupas. Letizia acreditava que um nobre corso devia ser ativo e forte mesmo na privação ou pobreza.

Por diversas vezes Napoleão e o irmão foram para cama sem jantar, não por castigo ou privação mas para aprenderem a suportar o desconforto sem demonstrar. Bonaparte cresceu convivendo com nobres e servos, sendo que seus melhores amigos na infância eram os filhos de sua ama de leite [18].

A sorte dos Bonaparte mudou quando os corsos escolheram Carlo Bonaparte para representar a ilha na corte de Luis XVI, onde pôde estreitar laços comerciais para a ilha e para si.

Mesmo vivendo de forma bem confortável para os padrões corsos Napoleão, com nove anos, costumava trocar pães brancos por rações de soldado pois queria se acostumar a rotina militar até na alimentação. No Natal de 1778, Napoleão desembarcou na França e de imediato enfrentou a tarefa de aprender a língua francesa.

Napoleão estudou na Academia Militar de Brienne, dirigida pelos irmãos Louis e Jean Baptiste Berton, ambos frades franciscanos. Há três grandes momentos de destaque na passagem de Napoleão por Brienne: durante um castigo ele se recusou

histericamente a se ajoelhar em público; durante uma celebração de feriado ele proibiu a esposa do zelador de entrar nas dependências da escola sem convite; e o jardim que ele plantou anexando as hortas dos colegas, onde fez seu próprio refúgio corso.

Conforme é mencionado em Cronin [18], o jovem Bonaparte nutriu duas grandes paixões nos tempos em Brienne: Aritmética e História. Bonaparte sempre foi um questionador da moral cristã e dos dogmas católicos. Cronin [18] comenta que durante um sermão na capela da escola, Napoleão enfureceu-se quando o pregador afirmou que Júlio César estava no inferno e vociferou ser absurdo condenar um dos mais brilhantes homens de Roma por não seguir uma fé que ele sequer conhecera. Após Brienne, Bonaparte foi estudar na École Militaire no mesmo ano em que o pai, Carlo Bonaparte, faleceu.

A despeito do drama familiar e financeiro, Napoleão continuou sendo um excelente aluno em Matemática, Geografia, História, razoável em Cartografia e sofrível em Língua Alemã. Ainda assim, ele concluiu o preparatório um ano antes do esperado e recebeu a patente de oficial aos dezesseis anos no Exército, dentro do corpo de Artilharia.

Após um ano como oficial novato Napoleão assumiu, em janeiro de 1786 o posto de segundo-tenente, de acordo com Cronin [18]. Sua rotina incluía manobras de artilharia (canhões) pela manhã e aulas sobre balística à tarde. A preferência pela artilharia e pelas manobras vem do talento natural para Trigonometria e Geometria. Acredita-se que a amizade de Bonaparte com o geômetra e militar francês Gaspar Monge tenha começado nesse período, segundo infere Cronin [18].

O jovem oficial corso desenvolveu elevado patriotismo e senso de dever, mas não necessariamente lealdade à monarquia. Assim, a queda do Antigo Regime e o movimento popular de diversas bandeiras e ideologias liberais conhecido como Revolução Francesa contava com Napoleão em suas fileiras. Esse jovem militar e militante político era dotado de um raro nacionalismo, senso prático de justiça e compromisso com o bem maior de Córsega e da França.

A Assembleia Revolucionária (que acabara de executar os monarcas franceses a tomar o poder) era dividida em girondinos (liberais moderados, que se sentavam à direita na Assembléia), jacobinos (liberais exaltados, que se sentavam à esquerda na Assembléia), e planície (burgueses ricos, pouco ideológicos e oportunistas, que se sentavam ao centro na Assembléia) [24]. Devido ao fato de os ideais sociais mais transformadores dos jacobinos desagradarem os conservadores em geral, girondinos e planície formavam uma coalização para garantir o poder e neutralizar os reformadores.

Assim, o controle girondino da Assembleia levou os diversos grupos jacobinos a se

revoltarem e tomarem o poder. Instituiu-se uma fase revolucionária conhecida como Terror Jacobino.

Napoleão era amigo do irmão mais novo de Robespierre, grande líder jacobino na fase do Terror, e era respeitado por todos os líderes da Revolução. Mas estava descontente com o frenesi de perseguições ao qual o gabinete de Robespierre havia levado a França, culminando com a execução de líderes destacados da Revolução, como Danton e Lavoisier.

Os resultados destes e outros exageros do Terror foram as guerras civis rebeldes em Marselha, o movimento separatista em Córsega e, por fim, a deposição de Robespierre e sua posterior condenação à morte (veja Cronin [18]).

O novo governo via Bonaparte com extrema desconfiança pois ele havia sido promovido de segundo-tenente para tenente-coronel e brigadeiro-general em menos de dois anos, exatamente os anos do Terror.

É digno de nota que Napoleão Bonaparte é o mais jovem oficial promovido a general em qualquer exército europeu moderno, com menos de vinte e quatro anos de idade. Sua habilidade, lealdade e rápida ascensão o colocaram em posição desconfortável com o novo governo. Assim, foi condenado a prisão domiciliar por seis meses e teve sua requisição de serviço na Turquia negada. No entanto, uma nova constituição havia sido aprovada e uma nova guerra civil parecia se aproximar.

Sendo defensor fervoroso da nova constituição Napoleão se aproximou do líder maior dos constitucionalistas Paul Barras. A amizade de Barras suscitou duas grandes mudanças na vida de Napoleão: ele circulava pelos meios políticos mais prestigiados da República e conheceu a rica e excêntrica Rose Josephe Tascher (Josephine), com quem se casaria menos de um ano depois. Além disso, recebeu o comando das tropas francesas baseadas na Itália (conforme Cronin [18]). Na Itália ele derrotou as tropas de Francisco II da Áustria e Vitor Amadeu III de Piemonte (Itália).

Em Paris, o Diretório desconfiava da carreira ousada e independente do general corso e temia sua promoção política por meio de suas vitórias e propaganda entre os acordos de paz. No entanto, seus subordinados estavam criando o mito do gênio imbatível de Bonaparte: vitórias improváveis, marchas forçadas alternadas entre combates, escaramuças e movimentos de flanco rápidos e brilhantes. De acordo com Cronin [18], os exércitos de Napoleão não só derrotaram unidades maiores e mais aparelhadas, como conseguiram fazer grande número de prisioneiros ao preço de reduzidas baixas.

Bonaparte conseguiu convencer o Diretório de que seria mais prudente e eficaz conquistar o Egito do que tentar enfrentar diretamente a Inglaterra. O Egito também caiu

frente as modernas tropas de Napoleão. A campanha do Egito deixaria duas marcas na História: a tradução da Pedra de Roseta pelo oficial francês Jean François Champolion (permitindo a decodificação da antiga escrita hieroglífica do Egito) e a destruição do nariz da Esfinge de Gizé por tropas de Napoleão (ver mais em Grimberg [24]). Antes de partir do Egito, Bonaparte financiou um grupo de pensadores e cientistas que publicaria a primeira enciclopédia sobre o Egito.

Contudo, conforme menciona Grimberg [24], em 9 de Novembro de 1799, Napoleão derrubou o Diretório, com apoio de suas tropas e dos girondinos. A tomada de poder de Bonaparte ficaria conhecida com Golpe de 18 Brumário. Tinha início a chamada Era Napoleônica, que é dividida em três momentos: Consulado (1799-1804), Império (1804-1815) e Governo dos Cem Dias (1815).

O período do Consulado sucedeu imediatamente ao Diretório. Embora Napoleão dividisse o poder com outros dois cônsules (Roger Ducos e Emanuel Sieyès) ele era o primeiro cônsul da República. O Consulado promoveu grandes reformas, como a econômica e religiosa (ver Cronin [18]). Outras propostas de reforma se voltaram para o direito e educação [18].

Um plebiscito realizado em 1804 ratificou o governo napoleônico como Império. Napoleão foi coroado na Catedral de Notre-Dame em 2 de Dezembro do mesmo ano. Simbolizando sua separação com a Igreja, Napoleão tomou do papa Pio VII a coroa e se autoproclamou imperador (conforme Grimberg [24]). A seguir, coroou Josephine imperatriz.

Napoleão não tardou em criar sua própria corte: familiares, oficiais militares, burgueses e intelectuais (historiadores, filósofos, matemáticos e diversos pensadores com destacado serviço à Revolução) (conforme [18]). No seu auge, em 1812, o Império Napoleônico estendia-se por toda a Europa Ocidental e suas colônias, compreendendo um terço da população mundial.

As diversas guerras de conquista empreendidas por Napoleão em toda sua carreira militar e política fizeram dele o maior expoente de uma doutrina militar conhecida como alocação geométrica ¹.

Como reação à expansão ininterrupta do Império Napoleônico, a Inglaterra criou

¹Também conhecida como estratégia da aniquilação, combinava a estratégia geométrica clássica com as batalhas de atrito e uma mudança de foco dos objetivos militares: ao invés de aniquilar exércitos e suprimentos, o objetivo era ocupar os territórios inimigos e manter essa ocupação politicamente, conforme Bernardino [5].

com as nações europeias restantes diversos pactos de alianças para tentar deter novos avanços napoleônicos, em especial com Áustria, Prússia e Rússia. Como sua rival era poderosa em termos navais e industriais, Napoleão I decreta um bloqueio continental à Inglaterra, logo após a famosa batalha naval de Trafalgar (para maiores detalhes, ver Cronin [18]).

Forçada a romper o bloqueio continental devido a dificuldades comerciais, a Rússia foi invadida pelas tropas napoleônicas em 1812. Tentando depor o Czar Alexandre II e manter o bloqueio até a esperada rendição da Inglaterra Napoleão comanda pessoalmente sua Grande Armada (como era conhecido o exército de Napoleão) com 600000 soldados pelo território russo (conforme Grimberg [24]).

Inferiores em número, experiência e equipamentos os russos fugiam para o leste. Na verdade, o Czar havia ordenado que a cada retirada todos os campos e cidadelas fossem queimados para que os franceses não pudessem se abastecer no vasto território russo². Outro aspecto desfavorável à Grande Armada era o inverno pois somente os russos estavam preparados para invernos de proporções polares e tinham tropas de retaguarda preparadas para os rigores das estepes (Conforme lembra Cronin [18]).

Com exército de 120000 homens os russos venceram a Grande Armada. Simultaneamente grupos franceses descontentes apoiados por setores das burguesia e da antiga nobreza executam um golpe de Estado na França. Forçado a voltar para Paris, Napoleão reassume o governo mas por pouco tempo. Apoiados pela Rússia os países ocupados reorganizaram suas tropas e invadiram a França.

Forçado a abdicar pelo chamado Tratado de Fontainebleau (1814) Napoleão recebe um principado na Ilha de Elba (Conforme menciona Cronin [18]). Pouco depois Bonaparte escapa para a França (fevereiro de 1815).

Ele invadiu Paris e reconquistou o poder por cem dias, ao fim dos quais uma coligação de tropas prussianas e inglesas o derrotam na famosa Batalha de Waterloo (para mais sobre Waterloo, ver Cronin [18]).

Depois da derrota em Waterloo Napoleão foi exilado na ilha africana de Santa Helena em 15 de Outubro de 1815. O imperador deposto foi acompanhado no exílio por pequeno grupo de seus fiéis seguidores. É na Ilha de Santa Helena que Bonaparte permanece até a morte (1821), conforme Grimberg [24].

Cronin [18] comenta que esse grupo de seguidores conhecia bem o enunciado e

²esse comportamento das tropas frente a um invasor é chamado de estratégia da Terra Seca, conforme Bernadino [5]

demonstração do teorema de Napoleão e que o Imperador tinha prazer em apresentá-lo e demonstrá-lo.

É interessante ressaltar que a primeira publicação que mencionou o teorema de Napoleão foi feita por um jornal britânico (1825), conforme menciona Crilly [17]. Como um grupo de militares britânicos mantinha a vigilância da Ilha de Santa Helena, de modo a garantir o exílio de Bonaparte e seus partidários, é bem possível que esses mesmos militares tenham entrado em contato com o teorema pelas exposições do próprio Napoleão.

1.2 Era Napoleônica e as Ciências: Teorema de Napoleão

Além das já citadas intervenções de Napoleão ante aos nascentes estudos de Egptologia é digna de nota a intensa efervescência cultural e científica que permearam tanto a Revolução Francesa em si como as diversas fases do período conhecido como Era Napoleônica.

A chamada Era Napoleônica produziu grandes descobertas científicas e avanços matemáticos. Garbi (ver [22]) tece um comentário sobre Napoleão dizendo que ele possuía talento precoce em matemática e que seu gênio militar e notável inteligência lógica ficaram evidentes nas estratégias aplicadas para vencer batalhas.

Garbi (ver [22]) ainda infere que Napoleão teria tido sucesso em Ciências Exatas não fossem, segundo o mesmo autor, a ambição e o gênio natural para liderar mais notáveis que suas aptidões matemáticas. Essa visão peculiar de mundo pela ótica lógico-matemática explica a razão de Napoleão gostar da companhia de expoentes da matemática francesa como Lagrange, Laplace, Legendre, Fourier, Monge, dentre outros, e compreender o que eles falavam.

Crilly (ver [17]) menciona o teorema de Napoleão nos seguintes termos: “em qualquer triângulo ABC triângulos equiláteros podem ser construídos em cada lado e, a partir dos seus centros, pode ser construído um novo triângulo DEF . O teorema de Napoleão afirma que para qualquer triângulo ABC o triângulo DEF equilátero”.

O mesmo Crilly (ver [17]) menciona que o referido teorema foi publicado em um jornal inglês no ano de 1825, após a morte de Napoleão. O autor relembra que as habilidades matemáticas de Napoleão foram decisivas para seu ingresso na Academia

Militar e que, com sua ascensão ao poder como imperador, ele esteve em contato constante com a elite de matemáticos franceses.

Neste ponto, Crilly (ver [17]) lança dúvidas quanto a autoria argumentando que como muitos outros resultados matemáticos o teorema é atribuído a alguém que não se relaciona com a descoberta ou sua prova. Já Garbi (ver [22]) argumenta que a autoria de Napoleão do teorema que leva seu nome é uma lenda, pois Napoleão chamava a si mesmo de geômetra amador.

Em um artigo para o público espanhol, Medina (ver [33]) relembra dois grandes exemplos de relacionamento entre governantes e a ciência, em especial a Matemática: o vigésimo presidente norte-americano (James Garfield) ³ e Napoleão Bonaparte. Esse autor dá especial enfoque ao Imperador por lembrar sua amizade com os melhores matemáticos de seu tempo, a saber Gaspar Monge (que foi professor de Bonaparte na Ecole Militaire), Pierre Laplace e Joseph Lagrange.

Medina (ver [33]) relembra duas histórias relacionando Bonaparte com Laplace e Lagrange: a apresentação que Laplace fez da chamada *Teoria da Mecânica Celeste* ao Imperador e a apresentação que Bonaparte fez a Laplace e Lagrange sobre construções geométricas de Lorenzo Mascheroni. ⁴

Na primeira ocasião mencionada por Medina [33], Napoleão comentou que Laplace escreveu um maravilhoso livro sobre o Universo e não mencionou seu Criador. Laplace respondeu que não necessitou desta hipótese (a necessidade de o Universo ter um Criador) para construir seus argumentos. Lagrange comentaria após saber da conversa que, de qualquer forma, é uma bela hipótese.

Já na segunda ocasião Medina (ver [33]) conta que durante uma discussão entre Laplace e Lagrange, Bonaparte intervém e mostra a ambos o trabalho de Mascheroni, que eles ainda não conheciam. Diz-se que Laplace comentou esperar muitas coisas de uma conversa com o Imperador mas não uma aula de Geometria. Medina (ver [33]) comenta então que Napoleão dá nome a um teorema. Segundo Medina [33] o teorema de Napoleão é fortemente influenciado pelo trabalho de Mascheroni e isso comprova que a autoria é mesmo de Bonaparte.

³Presidente dos EUA pelos seis primeiros meses de 1881, quando foi assassinado. É conhecido pela demonstração que fez aos 16 anos do Teorema de Pitágoras

⁴Lorenzo Mascheroni (1750 -1800) foi um eminente matemático e escritor italiano. Suas contribuições dizem respeito à análise matemática, cálculo integral e logaritmos naturais. Apresentou estudos originais sobre o cálculo na ruptura dos arcos e da geometria.

A questão da autoria ainda é objeto de discussão para diversos autores. Garbi (ver [22]) e Crilly (ver [17]) não acreditam que Bonaparte é o autor do teorema. Ambos porém argumentam que o Imperador tinha atributos matemáticos para compreender as mais sofisticadas inovações matemáticas de seu tempo e que este ainda se dispôs a divulgar na França os trabalhos de Monge.⁵

Isso dito, mais importante que determinar com exatidão se Napoleão enunciou e demonstrou seu teorema é concluir se ele tinha ou não condições para fazê-lo. O próprio Garbi [22], que manifesta sua opinião como contrária a autoria de Bonaparte, deixa ao leitor o desafio de demonstrar o teorema de Napoleão pela via da semelhança de triângulos.

Conforme visto anteriormente, não só a aptidão natural e convivência com diversos expoentes da Matemática foram notáveis na vida do Imperador, como suas habilidades em Geometria e Trigonometria faziam parte de sua carreira militar e conquistas.

⁵Gaspard Monge (1746 -1818). Matemático francês, criador da geometria descritiva e pai da geometria diferencial.

Capítulo 2

Conceitos e Pressupostos Teóricos

Neste capítulo serão abordados alguns conceitos necessários para a compreensão do teorema de Napoleão, tanto nas suas demonstrações quanto propriedades da chamada configuração de Napoleão. Omitiremos as demonstrações de alguns teoremas mas estas podem ser encontradas em Avritzer [1], Boldrini [9], Lima [29] e Machado [31].

2.1 Alguns Teoremas em Geometria Plana

Nesta seção iremos enunciar alguns resultados fundamentais para a compreensão das demonstrações relativas a semelhança de triângulos e trigonometria mas que também fundamentam todas as demais demonstrações. O leitor interessado pode verificar demonstrações destes teoremas em Machado [31].

Iniciaremos com o *Teorema de Tales* proposto pelo filósofo grego Tales de Mileto. Sábio do século VI a.C., Tales é conhecido como pai da geometria descritiva.

Teorema 2.1.1. *Um feixe de retas paralelas determina sobre duas ou mais secantes quaisquer segmentos proporcionais.*

Na Geometria Plana dizemos que dois triângulos são *semelhantes* se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que ângulos correspondentes sejam iguais e lados correspondentes sejam proporcionais. Mas não é necessário que se conheça todos os lados e ângulos dos triângulos para que tenhamos a semelhança assegurada. É isso que nos dizem os critérios de semelhança descritos no seguinte teorema (ver Barbosa [3]).

Teorema 2.1.2. *Sejam dois triângulos ABC e DEF . Temos que*

- (i) *(Caso AA) Se $\angle A = \angle D$ e $\angle B = \angle E$ então os triângulos são semelhantes.*
- (ii) *(Caso LAL) Se $\angle A = \angle D$ e $\overline{AB}/\overline{DE} = \overline{AC}/\overline{DF}$ então os triângulos são semelhantes.*
- (iii) *(Caso LLL) Se $\overline{AB}/\overline{DE} = \overline{AC}/\overline{DF} = \overline{BC}/\overline{EF}$ então os triângulos são semelhantes.*

Sabendo que dado um triângulo $\triangle ABC$ com lados $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$ e suas respectivas alturas relativas h_a , h_b e h_c , podemos calcular sua área S pela seguinte fórmula :

$$A = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}.$$

Além disso, se θ é o ângulo θ formado pelos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$. Então, essa área é dada por

$$A = \frac{1}{2}bc \sin \theta.$$

A Lei dos Cossenos, conforme enunciado no teorema abaixo, permite calcular o comprimento de um lado de qualquer triângulo conhecendo o comprimento dos demais lados e a medida do ângulo oposto a esse.

Teorema 2.1.3. *Dado um triângulo qualquer $\triangle ABC$, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos duas vezes o produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo que eles formam.*

$$|\overline{AB}|^2 = |\overline{BC}|^2 + |\overline{AC}|^2 - 2 \cdot |\overline{BC}| \cdot |\overline{AC}| \cdot \cos \theta$$

Com $\theta = \angle(\overline{BC}, \overline{AC})$

2.2 Espaços Vetoriais

A noção de espaço vetorial (ver Boldrini [9]) é a base onde desenvolve toda a Álgebra Linear e embora este assunto seja vasto e com muitos resultados importantes nos restringiremos aos tópicos que são necessários para o desenvolvimento deste trabalho.

Definição 2.2.1. Um espaço vetorial $(V, +, \cdot)$ sobre $\mathbb{R}$ é um conjunto, cujos elementos são chamados vetores, no qual está definida uma operação $+$, denominada adição, que a cada par de vetores $u, v \in V$ associa um novo vetor $u + v \in V$, chamado a soma de u e v , e uma multiplicação $\cdot$, denominada produto por um escalar, que a cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e $v \in V$ associa o vetor $\alpha v \in V$ tais que as seguintes condições são satisfeitas, para todos $u, v, w \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$(A1) \quad (u + v) + w = u + (v + w);$$

$$(A2) \quad u + v = v + u;$$

$$(A3) \quad \text{Existe um vetor } 0 \in V, \text{ denominado vetor nulo, tal que } v + 0 = 0 + v = v;$$

$$(A4) \quad \text{Existe o vetor } (-v) \in V, \text{ denominado vetor oposto, de modo que } v + (-v) = 0;$$

$$(A5) \quad (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v);$$

$$(A6) \quad (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v;$$

$$(A7) \quad \alpha(u + v) = \alpha u + \beta v;$$

$$(A8) \quad 1u = u \text{ com } 1 \in \mathbb{R}.$$

Denotaremos o espaço vetorial $(V, +, \cdot)$ por V . Dizemos que um subconjunto S , não vazio, de um espaço vetorial é um *subespaço vetorial* de V se $(S, +, \cdot)$ é um espaço vetorial [9].

Definição 2.2.2. Sejam V e W espaços vetoriais. Uma aplicação T de V em W , $T : V \longrightarrow W$, é denominada *transformação linear* se para todos $u, v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ as seguintes condições são satisfeitas.

$$(i) \quad T(u + v) = T(u) + T(v);$$

$$(ii) \quad T(\alpha u) = \alpha T(u).$$

Definição 2.2.3. (i) Um **isomorfismo** de V em W é uma transformação linear $T : V \rightarrow W$ bijetiva

(ii) **Operador linear** é a uma transformação de um espaço vetorial em si mesmo, ou seja $T : V \rightarrow V$. Um operador linear especial é o operador identidade $I : V \rightarrow V$ definido por $I(v) = v$ para todo $v \in V$

(iii) O **núcleo** da transformação linear é o subconjunto de todos os vetores de V tais que $T(v) = 0 \in W$. Denotado por

$$N(T) = \{v \in V : T(v) = 0\}.$$

(iv) A **imagem** de T é o subconjunto de W denotado por

$$Im(T) = \{T(v) : v \in V\}.$$

2.2.1 Exemplos de Transformações Lineares no Plano

As transformações lineares no plano são operadores em $\mathbb{R}^2$, ou seja, $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma transformação linear (ver Boldrini [9]).

Exemplo 2.2.4. As **Reflexões** são simetrizações de pontos no plano considerando um certo eixo. Alguns tipos notáveis são:

1. Reflexões em relação aos eixos coordenados

- (i) Em torno do eixo das abscissas $T(x, y) = (x, -y)$;
- (ii) Em torno do eixo das ordenadas $T(x, y) = (-x, y)$;
- (iii) Em torno da origem $T(x, y) = (-x, -y)$.

2. Reflexões em relação às bissetrizes dos quadrantes

- (i) Em torno da bissetriz dos quadrantes ímpares $T(x, y) = (y, x)$;
- (ii) $T(x, y) = (-y, -x)$;

Exemplo 2.2.5. **Dilatação** é alteração nas dimensões de um vetor. Alguns tipos notáveis são:

- (i) Dilatação ou contração do vetor $T(x, y) = k(x, y)$;
- (ii) Dilatação ou contração na direção do eixo das abscissas $T(x, y) = (kx, y)$;
- (iii) Dilatação ou contração na direção do eixo das ordenadas $T(x, y) = (x, ky)$;

Exemplo 2.2.6. Rotações são deslocamentos angulares de um ponto ou vetor em torno de um ponto fixo. Um caso notável é a rotação no plano em torno da origem em um ângulo θ dada por

$$T(x, y) = (x \cos(\theta) - y \sin(\theta), x \sin(\theta) + y \cos(\theta)).$$

Exemplo 2.2.7. Cisalhamento é o deslocamento de uma coordenada como função linear de outra. Alguns tipos notáveis são:

- (i) Em torno do eixo das abscissas $T(x, y) = (x + ky, y)$,
- (ii) Em torno do eixo das ordenadas $T(x, y) = (x, y + kx)$.

2.3 Números Complexos

A representação algébrica de um número complexo Z é dada por $Z = a + bi$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Dizemos que a é *parte real* e b a *parte imaginária* (ver mais detalhes [25]). Além disso, $i^2 = -1$. Assim $\mathbb{C} = \{z = a + bi : a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$. Considerando $Z_1 = a + bi$ e $Z_2 = c + di$, temos em $\mathbb{C}$ as seguintes operações:

$$Z_1 + Z_2 = (a + c) + (b + d)i \quad \text{e} \quad Z_1 \cdot Z_2 = (ac - bd) + (bc + ad)i.$$

Denotamos o conjugado de $Z = a + bi$ por $\bar{Z} = a - bi$. Com as mesmas notações, pela definição de soma e produto temos as seguintes propriedades.

Proposição 2.3.1. *Sejam $Z_1 = a + bi$ e $Z_2 = c + di$*

- (i) $Z_1 \cdot \bar{Z}_1 = a^2 + b^2$;
- (ii) $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{-ad + cb}{c^2 + d^2}i$
- (iii) $|Z_1| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Os números complexos podem também ser representados pela *forma trigonométrica* dada por $Z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ onde $\rho = |Z|$ (ver [25]). Dessa representação surgem várias propriedades conforme a proposição abaixo.

Proposição 2.3.2. *Sejam $Z_1 = \rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ e $Z_2 = \rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$. Então*

- (i) $Z_1 \cdot Z_2 = (\rho_1 \cdot \rho_2)(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i(\sin(\theta_1 + \theta_2)))$
- (ii) $Z_1 / Z_2 = (\rho_1 / \rho_2)(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i(\sin(\theta_1 - \theta_2)))$
- (iii) $(Z_1)^n = (\rho_1^n)(\cos(n \cdot \theta_1) + i \sin(n \cdot \theta_1))$,
- (iv) $\sqrt[n]{Z_1} = (\sqrt[n]{\rho_1})(\cos(\frac{\theta_1 + 2k\pi}{n}) + i \sin(\frac{\theta_1 + 2k\pi}{n}))$ com $(k, n) \in \mathbb{N}$, com $n \in \mathbb{N}$

Para $\rho = 1$ e $\theta = \frac{2\pi}{n}$, onde $n \in \mathbb{N}$, temos que $\omega = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i \sin(\frac{2\pi}{n})$ é denominado raiz n -ésima da unidade já que de acordo como item (iii) da proposição anterior, $\omega^n = 1$ em notação específica¹. Para maiores detalhes, ver Guimarães [25].

Sabemos que as expansões em séries de potências (para mais detalhes, ver Guimarães [25]) das funções $e^x, \cos(x), \sin$ são dadas por:

- (i) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$
- (ii) $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$
- (iii) $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$

Tomando $x = i\theta$ para e^x e $x = \theta$ para $\cos(x)$ e $\sin(x)$ temos que

- (i) $e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots$
- (ii) $\cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots$
- (iii) $\sin(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots$
onde $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$.

Tomando $x = Z$, temos

$$e^Z = e^{x+iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y))$$

Uma relação essencial em Geometria Plana é a semelhança de triângulos. Caracterizar essa relação no ambiente de números complexos é vital para conseguirmos estabelecer conexões que permitam explorar as potencialidades desse conjunto numérico. Para maiores detalhes, ver Martini [32].

¹A notação ω^k , com $k = 1, 2, 3, \dots, n-1$ indica a k -ésima raiz da unidade dentre as n raízes da unidade de ω

Definição 2.3.3. *Dados Z_1, Z_2, Z_3, W_1, W_2 e W_3 números complexos. Dizemos que os triângulos $\triangle Z_1Z_2Z_3$ e $\triangle W_1W_2W_3$ são semelhantes e escrevemos $\triangle Z_1Z_2Z_3 \sim \triangle W_1W_2W_3$ se, e somente se, os ângulos correspondentes em seus vértices forem congruentes. Além disso, a orientação por eles definida deve ser a mesma.*

Caso as orientações sejam distintas, mas os ângulos todos congruentes, os triângulos são ditos reversos.

Dados três números complexos distintos X_1, X_2 e X_3 , a medida do ângulo orientado determinado por X_1X_2 e por X_1X_3 é dada por²

$$\arg \frac{X_2 - X_1}{X_3 - X_1} = \arg(X_2 - X_1) - \arg(X_3 - X_1).$$

O teorema a seguir caracteriza o triângulo equilátero formado por números complexos como vértices

Teorema 2.3.4. *Os complexos Z_1, Z_2, Z_3 formam um triângulo equilátero se, e somente se*

$$Z_1 + \omega.Z_2 + \omega^2.Z_3 = 0$$

onde ω é uma raiz cúbica da unidade, diferente de 1.

Demonstração. Admita-se que Z_1, Z_2, Z_3 formam um triângulo equilátero (conforme Guimarães [25]). Se isso é verdadeiro, então os lados $\overline{Z_2Z_1}$ e $\overline{Z_2Z_3}$ formam ângulo de $\frac{\pi}{3}$ e seus comprimentos são equivalentes.

Assim, um segmento pode ser tomado como rotação de $\frac{\pi}{3}$ do outro. Logo

$$Z_3 - Z_2.e^{i\frac{\pi}{3}} = Z_1 - Z_2.$$

Desenvolvendo a expressão acima

$$Z_1 + Z_2.(e^{i\frac{\pi}{3}} - 1) - Z_3.e^{i\frac{\pi}{3}} = 0 \tag{2.1}$$

Note que

$$e^{\frac{2\pi}{3}} = (e^{i\frac{\pi}{3}} - 1) = \omega \tag{2.2}$$

$$e^{\frac{4\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}} = -\omega^2. \tag{2.3}$$

Substituindo as equações 2.2 e 2.3 na equação 2.1, temos que

$$Z_1 + \omega.Z_2 + \omega^2.Z_3 = 0$$

□

²o termo $\arg$ representa a medida do argumento ou ângulo

O seguinte teorema caracteriza a semelhança dos triângulos complexos.

Teorema 2.3.5. *Sejam Z_1, Z_2, Z_3, W_1, W_2 e W_3 números complexos. Tem-se $\triangle Z_1 Z_2 Z_3 \sim \triangle W_1 W_2 W_3$ se, e somente se,*

$$\frac{Z_2 - Z_1}{Z_3 - Z_1} = \frac{W_2 - W_1}{W_3 - W_1} = \left| \begin{array}{ccc} Z_1 & W_1 & 1 \\ Z_2 & W_2 & 1 \\ Z_3 & W_3 & 1 \end{array} \right| = 0.$$

Demonstração. Tomando como referência o caso *LAL* de semelhança [31], as razões entre lados correspondentes são iguais e ângulos correspondentes são congruentes e mantêm a mesma orientação (conforme Martini [32]). Assim,

$$\frac{Z_2 - Z_1}{Z_3 - Z_1} = \frac{W_2 - W_1}{W_3 - W_1}$$

$$\arg\left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_3 - Z_1}\right) = \arg\left(\frac{W_2 - W_1}{W_3 - W_1}\right)$$

Donde conclui-se que

$$\frac{Z_2 - Z_1}{Z_3 - Z_1} = \frac{W_2 - W_1}{W_3 - W_1} = \left| \begin{array}{ccc} Z_1 & W_1 & 1 \\ Z_2 & W_2 & 1 \\ Z_3 & W_3 & 1 \end{array} \right| = 0.$$

□

2.4 Transformações Rígidas no Plano

As transformações rígidas no plano (também conhecidas como isometrias) são tais que, aplicadas a uma figura geométrica, preservam distâncias entre pontos.

Definição 2.4.1 (Conforme Tinoco [41]). *Uma aplicação $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ diz-se uma transformação rígida se tomando dois subconjuntos X e Y de $\mathbb{R}^2$ temos que $d_Y(\psi(x_1), \psi(x_2)) = d_X(x_1, x_2)$, para quaisquer $x_1, x_2 \in X$.*

Logo chamamos de transformações rígidas às aplicações que transformam uma figura geométrica numa outra geometricamente igual à primeira, ou seja, é uma aplicação

que conserva as distâncias entre os pontos e a amplitude dos ângulos. Uma transformação rígida podem ser:

- (i) uma **reflexão**, que consiste em uma simetria ortogonal em relação a uma reta,
- (ii) uma **translação**, que consiste em um deslocamento paralelo em linha reta na direção e sentido de um objeto em função de um vetor percorrendo a mesma distância,
- (iii) uma **rotação**, que consiste em um movimento circular de um objeto ao redor de um centro ou ponto de rotação;
- (iv) uma **reflexão deslizante**, que consiste de uma reflexão seguida de uma translação.

Vejamos agora algumas características dos quatros tipos básicos de transformações rígidas

Reflexão

É uma transformação rígida que fixa os pontos que pertencem ao eixo de reflexão e inverte os sentido dos ângulos.

Simetria em torno de um ponto. Seja A um ponto do plano.

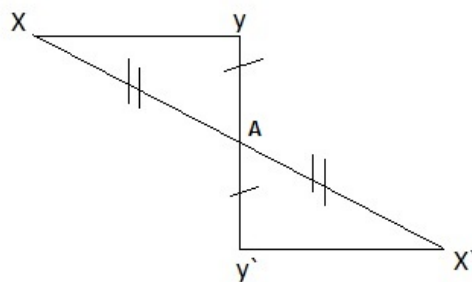


Figura 2.1: Simetria em torno de um ponto

A transformação definida por $\psi_A(A) = A$ para $X \neq A$, fazemos $\psi_A(X) = X'$ onde X' é o simétrico por A de X , ou seja, considerando a reta r que passa por A e X

tomamos $X' \in r$ tal que $d(A, X) = d(A, X')$. Veja vide Figura 2.1 (adaptada de Lima [29]). A é o ponto médio do segmento $\overline{XX'}$.

Reflexão em torno de uma reta. É importante ressaltar que uma reflexão em torno da reta inverte a orientação do objeto em relação ao plano. Um exemplo é um paralelogramo $ABCD$ descrito nas Figura 2.2 e 2.3 (adaptadas de Lima [29]).

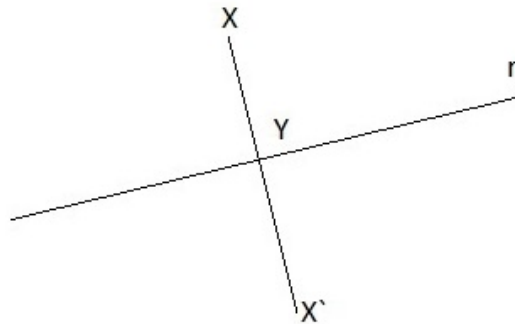


Figura 2.2: Reflexão em torno da reta

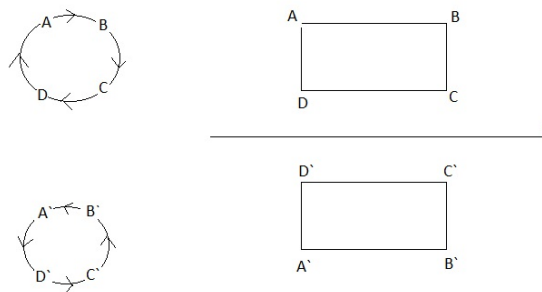


Figura 2.3: Reflexão do retângulo e sentidos de rotação

Translação

É uma transformação rígida que envia segmentos em correspondentes paralelos (ver mais detalhes em Tinoco [41]).

Sejam A e B pontos distintos em um plano. Ver Figura 2.4 (adaptada de Lima [29]).

A translação $\phi_{AB} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é definida da seguinte maneira:

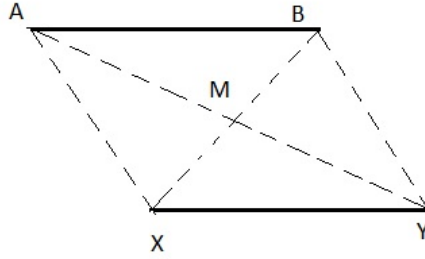


Figura 2.4: Translação fora da reta AB

- (i) Se X não for colinear a A e B , definimos que $\psi_{AB}(X) = Y$, onde Y é o quarto vértice do paralelogramo $ABYX$.
- (ii) Se X for colinear a A e B , definimos $\psi_{AB}(X) = X$.

Rotação

Definição 2.4.2. Caracteriza-se por um centro de rotação O e por uma amplitude θ . Se a rotação de centro O e amplitude θ for aplicada a um ponto A , de tal modo que $A \neq O$, obtém-se A' tal que $\overline{OP} = \overline{OP'}$, e o ângulo orientado $\angle(\overline{OP}, \overline{OP'}) = \theta$.

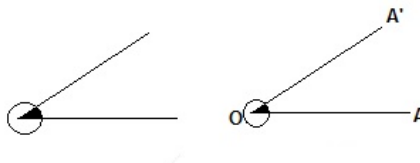


Figura 2.5: Rotação

Reflexão Deslizante

Definição 2.4.3. Uma reflexão deslizante é uma transformação rígida obtida por composição de uma reflexão em relação a uma reta r , seguida por uma translação. Ver exemplo em Figura 2.6.

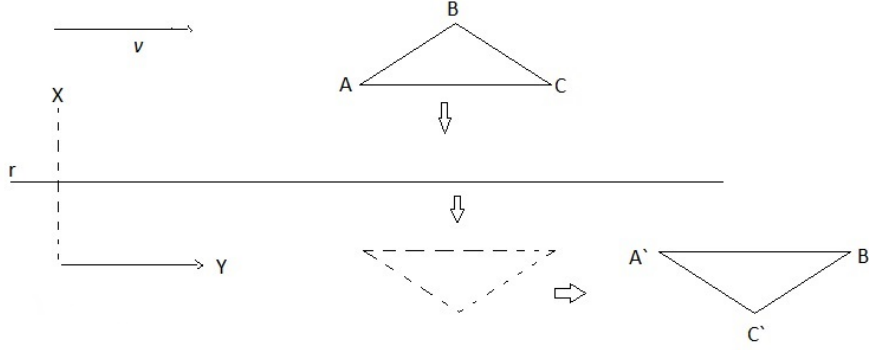


Figura 2.6: Reflexão deslizante

2.4.1 Composição de Transformações Rígidas

Nesta seção serão avaliadas as composições entre duas ou mais transformações rígidas e as suas respectivas resultantes, conforme Tinoco [41]. A seguir será enunciado um importante teorema sobre composição de transformações rígidas

Teorema 2.4.4. *a composição de duas ou mais transformações rígidas é uma transformação rígida [41].*

Demonstração. Sejam f a composição de duas transformações rígidas $\psi_1 \circ \psi_2$, aplicadas a dois pontos A e B : $f(A) = \psi_2 \circ \psi_1(A)$ e $f(B) = \psi_2 \circ \psi_1(B)$. Considerando os pontos A e B , e as imagens destes dois pontos, $\psi_1(A)$, $\psi_1(B)$, $\psi_2 \circ \psi_1(A)$ e $\psi_2 \circ \psi_1(B)$ então a distância d é tal que:

$$d(\psi_2 \circ \psi_1(A), \psi_2 \circ \psi_1(B)) = d(A, B)$$

A função composta $\psi_2 \circ \psi_1$ é uma transformação rígida pois preserva as distâncias entre dois pontos. Generalizando para a composição de n transformações rígidas: $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_n$. Assim:

$$d(\psi_n \circ \dots \circ \psi_3 \circ \psi_2 \circ \psi_1(A), \psi_n \circ \dots \circ \psi_3 \circ \psi_2 \circ \psi_1(B)) = d(A, B)$$

Logo, o resultado da composição de transformações rígidas é também uma transformação rígida. $\square$

A seguir serão apresentadas algumas possibilidades de composições de transformações rígidas. As demonstrações dos teoremas desta seção podem ser consultadas em Tinoco [41].

Teorema 2.4.5. Quando se compõem translações a transformação rígida resultante é uma translação (veja Figura 2.7).

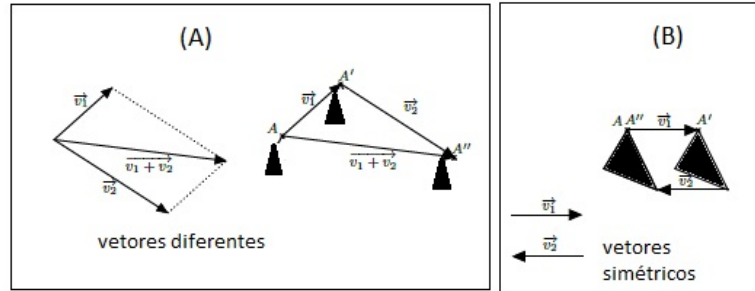


Figura 2.7: Composição de translações

A seguir é apresentada a composição de duas reflexões sucessivas em eixos concorrentes.

Teorema 2.4.6. Seja ψ a transformação rígida composta por duas reflexões sucessivas ψ_1 e ψ_2 em retas concorrentes e $\psi = \psi_2 \circ \psi_1$. (veja figura 2.8 adaptada de Tinoco [41]). A transformação rígida resultante ψ é uma rotação com centro no ponto de interseção das duas retas e de amplitude igual ao dobro do ângulo que as duas retas fazem entre si.

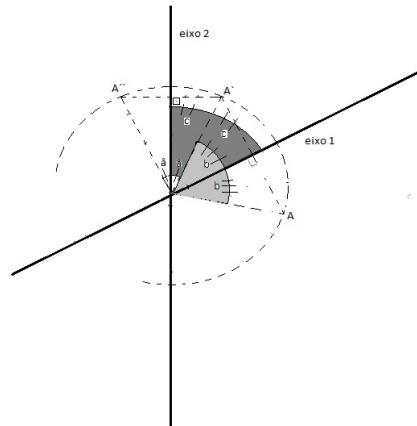


Figura 2.8: Composição de duas reflexões em eixos concorrentes

A seguir é apresentada a composição de duas reflexões em eixos paralelos.

Teorema 2.4.7. *Seja ψ a transformação rígida composta por duas reflexões sucessivas ψ_1 e ψ_2 em retas paralelas e $\psi = \psi_2 \circ \psi_1$ (ver Figura 2.9 adaptada de Tinoco [41]). A transformação rígida resultante ψ é a translação por um vetor perpendicular às retas e de comprimento igual ao dobro da distância entre elas.*

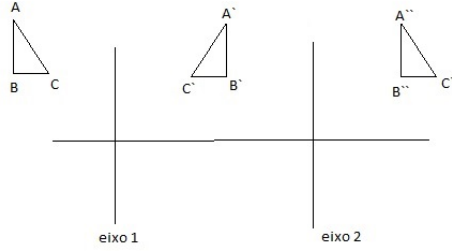


Figura 2.9: Composição de duas reflexões em eixos paralelos

A seguir é apresentada a composição de três reflexões em eixos paralelos.

Teorema 2.4.8. *Seja ψ a transformação rígida composta por três reflexões em eixos paralelos r , s e t . A transformação resultante é $\psi = \psi_t \circ \psi_s \circ \psi_r$ (veja a Figura 2.10,*

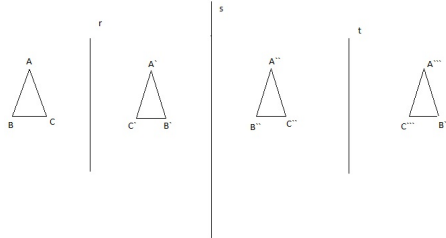


Figura 2.10: Composição de três reflexões em eixos paralelos

adaptada de Tinoco [41]). Então a transformação rígida resultante ψ é uma reflexão num eixo u paralelo aos outros três, sendo esse eixo u único.

A seguir é apresentada a composição de três retas concorrentes.

Teorema 2.4.9. *Sejam r , s e t três retas concorrentes num ponto P (ver Figura 2.11. adaptada de Tinoco [41]). Então existe uma única reta l que passa no ponto P tal que a transformação rígida obtida por composição da reflexão sucessiva em cada uma das três retas é uma reflexão em outra reta também concorrente em P .*

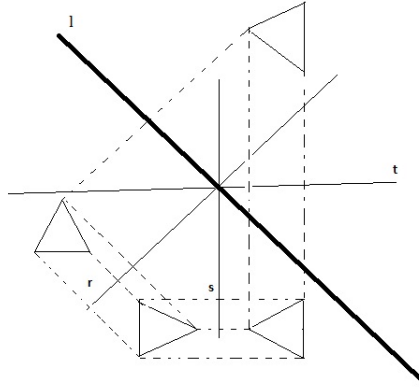


Figura 2.11: Composição de três reflexões em eixos concorrentes

A seguir é apresentada a composição de três reflexões em eixos nem paralelos nem concorrentes.

Teorema 2.4.10. *Sejam r , s e t retas distintas que não são paralelas nem concorrentes (ver Figura 2.12 adaptada de Tinoco [41]).*

Então a transformação rígida ψ obtida por composição da reflexão sucessiva em cada uma das três retas $\psi = \psi_r \circ \psi_s \circ \psi_t$ é uma reflexão deslizante.

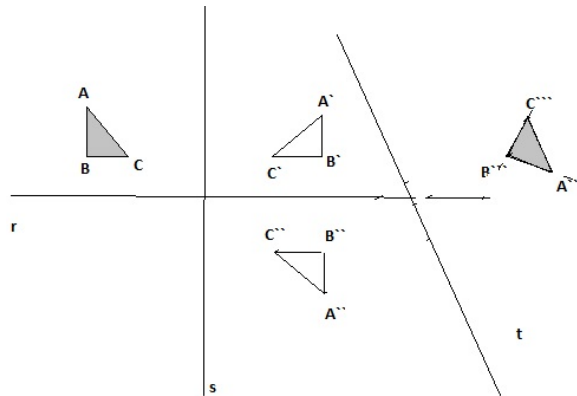


Figura 2.12: Composição de três reflexões em eixos nem paralelos nem concorrentes

A seguir é apresentada a composição de duas rotações.

Teorema 2.4.11. *Seja ψ uma transformação rígida no plano (ver Figura 2.13 adaptada de Tinoco [41]). Para quaisquer dois pontos A e B e respectivas imagens $\psi(A) =$*

A' , $\psi(B) = B'$ tem-se $A \neq A'$ e $B \neq B'$ o ângulo orientado entre AB e $A'B'$. Então, essa transformação rígida ψ é uma rotação de amplitude α [41].

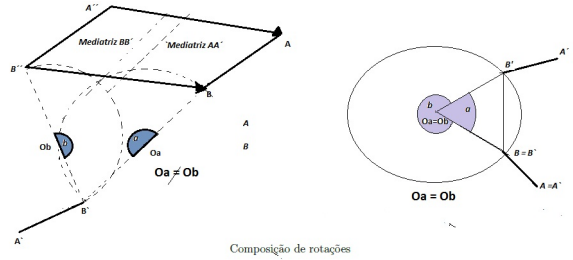


Figura 2.13: Composição de duas rotações

2.4.2 Teorema Fundamental das Transformações Rígidas

Um importante teorema para compreensão e operação adequada com transformações rígidas é o chamado teorema fundamental das transformações rígidas, cujo enunciado vem a seguir.

Teorema 2.4.12. *Sejam os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$ congruentes. Então existe uma, e somente uma transformação rígida ϕ tal que $\psi(A) = D$, $\psi(B) = E$ e $\psi(C) = F$.*

Demonstração. Temos que obter a transformação rígida ψ como composição de transformações rígidas ψ_1 , ψ_2 e ψ_3 . Para isso, serão verificados os seguintes casos:

- (i) $A = D$,
- (ii) $B = E$,
- (iii) $C = F$,
- (iv) Se $A = D$ então ψ_1 é a identidade.

Se $A \neq D$ então ψ_1 é uma reflexão na mediatriz do segmento $\overline{AD}$.

Realizada a reflexão ψ_1 as imagens dos vértices de $\triangle ABC$. (Ver Figura 2.14 adaptada de Tinoco [41]) serão

$$\psi_1(A) = D \tag{2.4}$$

$$\psi_1(B) = B_1 \tag{2.5}$$

$$\psi_1(C) = C_1. \tag{2.6}$$

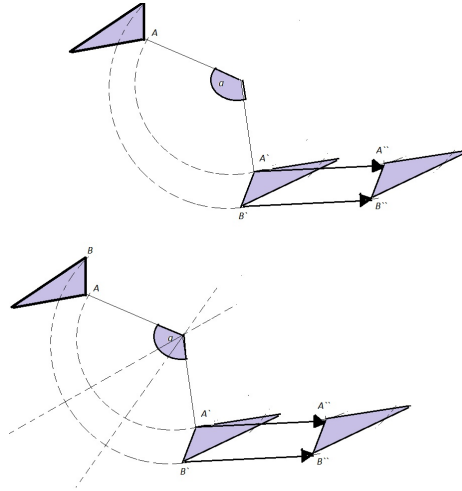


Figura 2.14: Composição de rotação com translação ordem e centro das transformações

Se $E = B_1$ então a transformação rígida ψ_2 é a identidade. Se $E \neq B_1$ então ψ_2 será a reflexão na mediatriz do segmento $\overline{B_1E}$ pois D está na mediatriz de $\overline{B_1E}$ já que os triângulos são congruentes por hipótese e ψ_1 é uma transformação rígida. Após a reflexão ψ_2 as imagens dos vértices do triângulo $\triangle DB_1C_1$ são

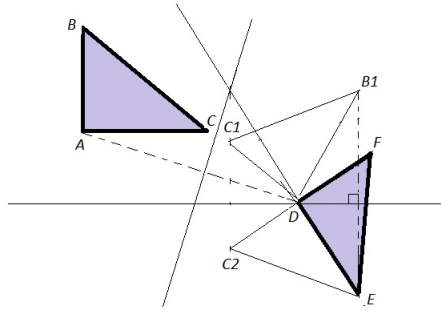


Figura 2.15: Teorema fundamental das transformações rígidas existência

$$\psi_2(D) = D \quad (2.7)$$

$$\psi_2(B_1) = E \quad (2.8)$$

$$\psi_2(C_1) = C_2. \quad (2.9)$$

Se $C_2 = F$ então a transformação rígida ψ_3 é a identidade. Se $C_2 \neq F$ ψ_3 então a

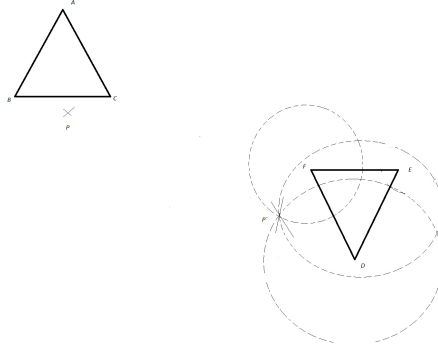


Figura 2.16: Teorema fundamental das transformações rígidas unicidade

transformação rígida será a reflexão na mediatriz do segmento de $\overline{C_2F}$ pois D e E estão na mediatriz do segmento $\overline{C_2F}$. (Ver Figura 2.15, adaptada de Tinoco [41]).

Após a reflexão ψ_3 as imagens dos vértices do triângulo $\triangle DEC_2$ são

$$\psi_3 D = D \quad (2.10)$$

$$\psi_3 E = E \quad (2.11)$$

$$\psi_3 C_2 = F. \quad (2.12)$$

Logo existe pelo menos uma transformação rígida ψ capaz de levar $\triangle ABC$ em $\triangle DEF$.

Dado um certo ponto P e outro D no domínio de ϕ , a distância entre dois pontos do domínio equivale a distância entre suas imagens (ver figura 2.16). Pela intersecção das circunferências λ_1 (circunferência centrada em D com raio $\overline{PA}$), λ_2 (circunferência centrada em E com raio $\overline{PB}$), e λ_3 (circunferência centrada em F com raio $\overline{PC}$). Essa intersecção ocorre na imagem de P . A transformação ψ existe e é única.

□

Um importante resultado do estudo de transformações rígidas é o corolário do teorema 2.4.11, apresentado a seguir.

Corolário 2.4.13. *Seja ψ uma transformação rígida no plano, então ψ é uma translação, rotação, reflexão ou uma reflexão deslizante.*

A demonstração em detalhes pode ser encontrada em Tinoco [41].

2.5 Transformações Afins

Definição 2.5.1. *Uma transformação afim τ é uma aplicação $\tau : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que para cada par ordenado (x, y) do plano.*

$$\tau(x, y) = (ax + by + c, dx + ey + f)$$

com $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}$ fixados.

Ou seja, uma transformação é dita afim quando pode ser escrita como soma de uma transformação linear e uma translação. Esse tipo de transformação preserva

- (i) **Colinearidade.** Ou seja, se três pontos do plano $\mathbb{R}^2$ p_1 , p_2 e p_3 colineares então $\tau(p_1)$, $\tau(p_2)$ e $\tau(p_3)$ também o são.
- (ii) **Distância entre os pontos.** Isto é, se os pontos colineares distintos p_1 , p_2 e p_3 então $\frac{|p_1 - p_2|}{|p_3 - p_2|}$.

Capítulo 3

Demonstrações e Propriedades

Associadas ao Teorema de Napoleão

As diversas demonstrações, propriedades e conhecimentos associados ao teorema de Napoleão compõem uma gama de técnicas que abrangem diversas áreas da Matemática. É justamente essa diversidade que faz renovada a vitalidade ao teorema, cujo enunciado vem em seguida.

3.1 Demonstrações Propostas ao Teorema de Napoleão

Teorema 3.1.1. *Dado um triângulo $\triangle ABC$, construímos sobre seus lados triângulos equiláteros. Os centros dos triângulos equiláteros assim construídos formam um triângulo também equilátero.*

A chamada configuração de Napoleão contempla tanto a sua apresentação interna quanto a sua apresentação externa. Todas as demonstrações propostas compreendem ambas as apresentações.

3.1.1 Demonstração por Semelhança de Triângulos

Demonstração. ¹Sendo X , Y e Z os baricentros dos triângulos $\triangle ADB$, $\triangle BEC$ e $\triangle CFA$; todos equiláteros (Figura 3.1).

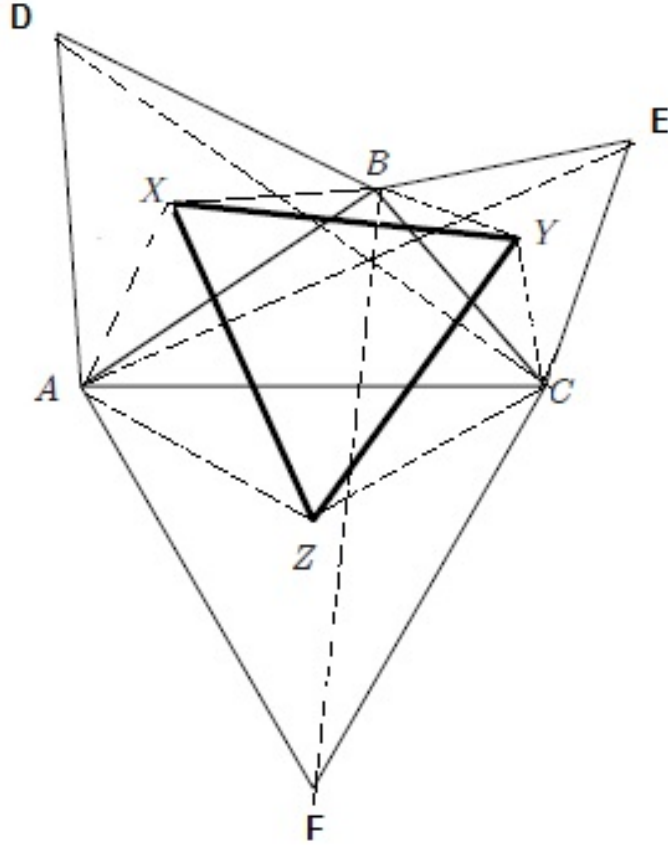


Figura 3.1: Demonstração clássica por semelhança de triângulos

Considere os triângulos $\triangle FBC$ e $\triangle AEC$. Como $\overline{AC} \equiv \overline{FC}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{EC}$, e os ângulos $\angle FBC$ e $\angle ACE$ congruentes. Então $\triangle AEC \equiv \triangle FBC$ e $\overline{AE} \equiv \overline{FB}$ (conforme [17]). Analogamente, $\overline{AE} \equiv \overline{FB} \equiv \overline{DC}$. Agora,

$$|\overline{ZC}| = \frac{2}{3}|\overline{FC}|\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$|\overline{CY}| = \frac{2}{3}|\overline{BC}|\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

¹Essa demonstração é a mais clássica e que atribui-se a Napoleão Bonaparte

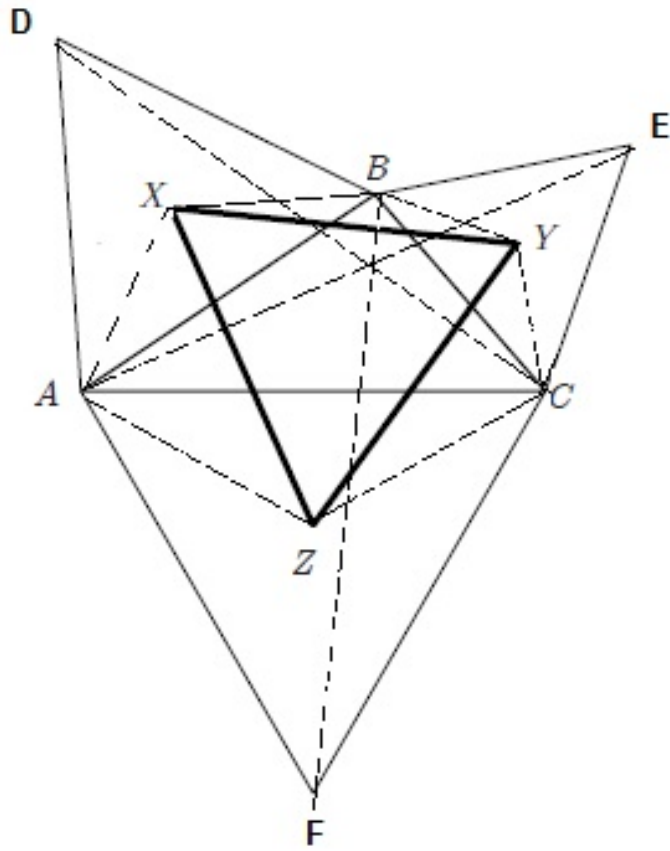


Figura 3.2: Demonstração clássica por semelhança de triângulos

Os ângulos $\angle ZCY$ e $\angle FCB$ congruentes. Temos

$$\frac{\overline{ZC}}{\overline{FC}} = \frac{\overline{CY}}{\overline{BC}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

o que denota

$$\frac{\overline{ZC}}{\overline{FC}} = \frac{\overline{CY}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{YZ}}{\overline{BF}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Note que os ângulos $\angle ABE$ e $\angle XBY$ são congruentes e

$$\overline{BY} = \frac{2}{3}\overline{BE}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$|BX| = \frac{2}{3}|BA|\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Partindo disso, percebe-se que

$$\triangle ABE \sim \triangle XBY$$

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{XY}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BX}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{BY}}.$$

Os ângulos $\angle DAE$ e $\angle XAZ$ são congruentes e

$$\overline{AZ} = \frac{2}{3}\overline{AC}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{XA} = \frac{2}{3}\overline{DA}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

É perceptível a semelhança

$$\triangle DAC \sim \triangle XAZ$$

e

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{XZ}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{AX}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AZ}}.$$

Como $\overline{BF} = \overline{DC} = \overline{AE}$ e

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{XZ}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{YZ}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{XY}}.$$

É fácil observar que $\overline{XZ} = \overline{YZ} = \overline{XY}$ e que $\triangle XYZ$ é equilátero. □

3.1.2 Demonstração por Trigonometria

Demonstração. ²Tomemos os segmentos $\overline{CZ}$, $\overline{AX}$, $\overline{BY}$, $\overline{BZ}$ e $\overline{AZ}$ de comprimentos $\overline{CZ} = x$, $\overline{AX} = m$, $\overline{BY} = l$, $\overline{BZ} = k$ e $\overline{AZ} = k$ (Figura 3.2).

Os ângulos $\angle ABZ$ e $\angle CBY$ são congruentes e de medida 30° [11]. Observe o triângulo $\triangle ZAX$. Podemos determinar o ângulo $\angle CAB = \theta + 60^\circ$. Através do teorema 2.1.5 ($\overline{ZY} = n$), temos

²Essa demonstração foi desenvolvida pelo Dr. Scoot Brodie (diretor clínico do Mont Sinai Hospital, NY), com contribuição Michael Lambrou (Universidade de Creta).

Com $\overline{BC} = a$, $\overline{AB} = c$ e $\overline{AC} = b$. Substituindo l e k nas equações 3.1 e 3.2:

$$3n^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos(\theta + 60^\circ) \quad (3.3)$$

$$3p^2 = c^2 + b^2 - 2cb \cos(\phi + 60^\circ) \quad (3.4)$$

Igualando as equações 3.1 e 3.2 com 3.3 e 3.4 depreende-se que $\overline{XZ} \equiv \overline{YZ}$. Tomando $\triangle BAE$ e $\triangle BCE$ tem-se que $\overline{XZ} \equiv \overline{XY}$. Portanto $\overline{XZ} \equiv \overline{YZ} \equiv \overline{XY}$, completando a demonstração. $\square$

3.1.3 Demonstração Via Arcos Capazes

Demonstração. ³Tomando as circunferências circunscritas aos triângulos equiláteros construídos sobre os lados de $\triangle ABC$, observem-se os arcos AC , CB e BA que contém os vértices D , E e F e que pertencem aos círculos de centros X , Y e Z . Tais círculos circunscrevem $\triangle ADC$, $\triangle CEB$ e $\triangle ABF$ (Figura 3.3).

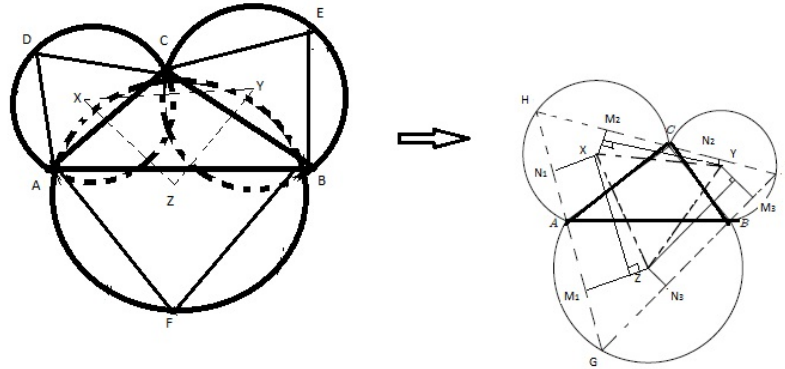


Figura 3.4: Demonstração por arcos capazes

Tomemos um ponto qualquer G do arco AB (ver Honsberger [27]). Considere a reta que passa pelo segmento $\overline{AG}$. Ela intersecta o arco AC em um ponto H .

Os ângulos $\angle AHC$ e $\angle AGB$ são inscritos nos mesmos arcos que os ângulos $\angle ADC$ e $\angle AFB$. Logo, possuem as mesmas medidas em graus que estes. Fica claro que o

³Essa demonstração foi desenvolvida pelo canadense Ross Honsberger (1929), titular da Universidade de Ontário e autor destacado em Matemática Recreativa

encontro das retas $\overline{CH}$ e $\overline{GB}$ se dá em um ponto I tal que o ângulo $\angle GHI$ meça 60° . Assim, o triângulo $\triangle GHI$ é equilátero.

Como $\overline{CB}$ é a corda da circunferência de centro Y cujo arco determina ângulos inscritos de 60° , temos que o ponto I pertence ao arco CB . Pelo exposto até aqui, pode-se afirmar que os arcos construídos em torno de $\triangle ABC$ permitem a construção de um triângulo equilátero que circunscreva $\triangle ABC$, tendo em vista que cada lado de $\triangle ABC$ determina um arco capaz de 60° .

A seguir, traçam-se perpendiculares a $\overline{GH}$, $\overline{HI}$ e $\overline{IG}$ pelos pontos Z , X e Y . Essas perpendiculares determinam pontos médios sobre os argumentos do triângulo $\triangle GHI$ determinados pelos vértices de $\triangle ABC$. Assim, temos: M_1 e N_1 sobre $\overline{GA}$ e $\overline{AH}$, M_2 e N_2 sobre $\overline{CH}$, M_3 e N_3 sobre $\overline{IB}$ e $\overline{BG}$.

Consideremos o primeiro par de pontos médios M_1 e N_1 e os pontos X e Y . Traçando por X uma paralela à $\overline{GH}$, ela intersecta $\overline{ZM_1}$ em um ponto J_1 , formando o retângulo $XJ_1M_1N_1$.

Pela natureza de M_1 e N_1 , temos que $\overline{GH} \equiv 2\overline{M_1N_1} \equiv 2\overline{J_1X}$. Note que o triângulo $\triangle XJ_1Z$ é retângulo, com catetos $\overline{XJ_1}$ e $\overline{J_1Z}$ e a hipotenusa $\overline{XZ}$. Além disso $\overline{XJ_1}$ é paralela a $\overline{GH}$.

Suponha que G esteja mais próximo de A que de B . Nesta configuração (em que G está mais próximo de B do que de A), $\triangle XJ_1Z$ é interno a $\triangle XYZ$.

Conclui-se daí que o arco AB possui um ponto D no qual o cateto $\overline{XJ_1}$ atinge o seu máximo comprimento, equivalendo a $\overline{XZ}$. Considerando o segundo par de pontos médios M_2 e N_2 e o ponto Y com o ponto auxiliar J_2 , temos o retângulo $YJ_2M_2N_2$. Analogamente, no retângulo $YJ_2M_2N_2$ temos que o arco AC possui um ponto H no qual o cateto $\overline{YJ_2}$ atinge seu máximo comprimento equivalendo a $\overline{XY}$.

Considerando o terceiro par de pontos médios M_3 e N_3 , o ponto Z e o ponto auxiliar J_3 , temos o retângulo $ZJ_3M_3N_3$ e, analogamente aos segmentos dos retângulos já analisados, ZJ_3 atinge seu máximo comprimento equivalendo a $\overline{YZ}$.

Por definição, $\overline{GH} \equiv 2\overline{XJ_1}$, $\overline{HI} \equiv 2\overline{YJ_2}$ e $\overline{IG} \equiv 2\overline{ZJ_3}$. Como $\triangle GHI$ é sempre equilátero, concluímos que como $2\overline{XJ_1} \equiv 2\overline{XZ}$, e $2\overline{ZJ_3} \equiv 2\overline{XZ}$. Então $\triangle XYZ$ é equilátero. $\square$

3.1.4 Demonstração por Rotações

Demonstração. ⁴Considere os ângulos orientados $\angle AXB$, $\angle BYC$ e $\angle CZA$. Como X , Y e Z são centros de seus respectivos triângulos os ângulos orientados acima mencionados medem 120° . Assim, centrando rotações (aqui denotadas por ψ) destes ângulos em cada um dos pontos X , Y e Z , temos que $\psi(A) = B$, $\psi(B) = C$, e $\psi(C) = A$. A composição transformações rígidas $\psi_Z \circ \psi_Y \circ \psi_X$, nesse caso, é centrada no ponto A (ver Lima [29]).

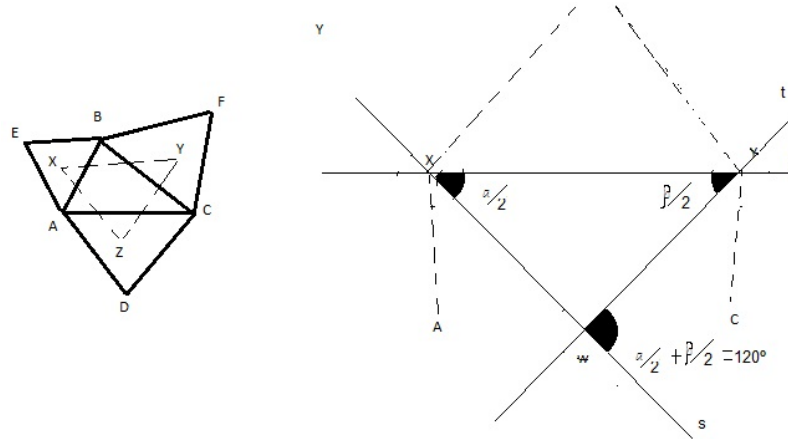


Figura 3.5: Demonstração por rotações

Compondo as transformações rígidas $\psi_X \circ \psi_Y$ o ângulo de rotação da composta será a soma dos ângulos individuais de cada rotação. Então, $\psi_X \circ \psi_Y$ é uma rotação de 240° em torno de um centro de rotação distinto de X e de Y , que chamaremos de W . Como $\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2} = 60^\circ$, temos que $\triangle XYW$ é equilátero.

A rotação $\psi_Z \circ \psi_Y \circ \psi_X$ gera um ângulo que representa a soma das rotações individuais. Logo, o ângulo de $\psi_Z \circ \psi_Y \circ \psi_X$ é de 360° é determina duas opções: identidade ou translação. Sabemos que $\psi_Z \circ \psi_Y \circ \psi_X(A) = A$, ou seja, a transformação rígida deixa A como ponto fixo.

No entanto, translações não deixam pontos fixos. Então, $\psi_Z \circ \psi_Y \circ \psi_X$ é uma identidade. Isso dito, a transformação $\psi_Z \circ \psi_Y \circ \psi_X(Z) = Z$ revela que o centro W coincide com Z . Como $W = Z$ e $\triangle XYW$ é equilátero, conclui-se que $\triangle XYZ$ também o é. $\square$

⁴Essa demonstração provém do livro *Isometrias*, de Elon Lages Lima [29]. O autor é renomado pesquisador brasileiro com intensa participação na Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência (SBPC), dentre outras instituições.

3.1.5 Demonstração por Rotações em Notação Complexa

Demonstração. Tomemos um triângulo qualquer com vértices pertencentes ao plano complexo $\mathbb{C}$ (ver Lopes [30]) correspondentes a Z_1 , Z_2 e Z_3 .

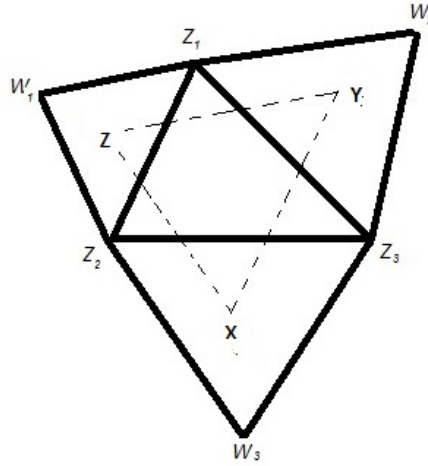


Figura 3.6: Demonstração por notação complexa

$$W_3 = (Z_2 - Z_3).e^{i\frac{\pi}{3}} + Z_3$$

$$W_3 = (0 - 1).e^{i\frac{\pi}{3}} + 1$$

$$W_3 = 1 - e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Como o ponto W_2 é obtido por rotação horária do ponto Z_3 em torno de Z_1 podemos escrever o ponto W_2 como

$$W_2 = (Z_3 - Z_1).e^{i\frac{\pi}{3}} + Z_1$$

$$W_2 = (1 - z).e^{i\frac{\pi}{3}} + z.$$

Como o ponto W_1 é obtido por rotação horária do ponto Z_1 em torno do ponto Z_2 , podemos escrever o ponto W_1 como

$$W_1 = (Z_1 - Z_2).e^{i\frac{\pi}{3}} + Z_2$$

$$W_1 = (z - 0).e^{i\frac{\pi}{3}} + 0$$

$$W_1 = z.e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Como os pontos X , Y e Z são baricentros de seus respectivos triângulos podemos representá-los como média aritmética dos vértices de seus respectivos triângulos (vide Boldrini [9]). Assim

$$X = \frac{Z_2 + Z_3 + W_3}{3}$$

$$Y = \frac{Z_3 + Z_1 + W_2}{3}$$

$$Z = \frac{Z_1 + Z_2 + W_1}{3}.$$

Isso dito podemos escrever os referidos pontos X , Y e Z na forma exponencial

$$X = \frac{2 - e^{i\frac{\pi}{3}}}{3}$$

$$Y = \frac{(2 - e^{i\frac{\pi}{3}}).z + 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}}{3}$$

$$Z = \frac{(1 + e^{i\frac{\pi}{3}}).z}{3}.$$

Note que se um dos vértices de um triângulo puder ser escrito como rotação de 60° de um outro vértice sobre o último, esse triângulo só pode ser equilátero. E tal fato pode ser evidenciado da seguinte forma

$$X = (Z - Y).e^{i\frac{\pi}{3}} + Y$$

$$Y = (X - Z).e^{i\frac{\pi}{3}} + Z$$

$$Z = (Y - X).e^{i\frac{\pi}{3}} + X.$$

Como em $\triangle XYZ$ podemos escrever Y como rotação de $\frac{\pi}{3}$ de X em torno de Z .

$$\begin{aligned}
Y &= (X - Z).e^{i\frac{\pi}{3}} + Z \\
&= \left(\frac{2 - e^{i\frac{\pi}{3}}}{3} - \frac{(1 + e^{i\frac{\pi}{3}}).z}{3}\right).e^{i\frac{\pi}{3}} \\
&\quad + \frac{(1 + e^{i\frac{\pi}{3}}).z}{3} \\
&= \frac{(2 - e^{i\frac{\pi}{3}}).z + 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}}{3} = Y.
\end{aligned}$$

Assim os pontos X , Y e Z oferecem uma configuração onde um deles pode ser escrito como uma rotação de $\frac{\pi}{3}$ de outro vértice sobre o terceiro. Logo $\triangle XYZ$ é equilátero. $\square$

3.1.6 Generalização de Honsberger do Teorema de Napoleão

Teorema 3.1.2. ⁵*Dado um triângulo qualquer $\triangle ABC$ constroem-se sobre seus lados triângulos $\triangle ABD$, $\triangle BCE$ e $\triangle CAF$ tais que $m(\angle ADB) + m(\angle DCE) + m(\angle CAF) = 180^\circ$ (ver Honsberger [27]). As circunferências circunscritas a cada um deles tem circuncentros X , Y e Z tais que $m(\angle ZXY) \equiv m(\angle ADC)$, $m(\angle XYZ) \equiv m(\angle BCE)$ e $m(\angle XZY) \equiv m(\angle CAF)$.*

Demonstração. O ponto O é a intersecção entre os círculos ACF e BEC . O quadrilátero $AOCF$ está inscrito ao círculo de centro Z . Assim, $m(\angle AOB) + m(\angle ADB) = 180^\circ$. Analogamente, do quadrilátero $BOCE$ inscrito ao círculo de centro Y temos: $m(\angle BOC) + m(\angle BEC) = 180^\circ$. Como $m(\angle AOC) + m(\angle BOC) + m(\angle AOB) = 360$ temos

$$\begin{aligned}
m(\angle AOC) + m(\angle BOC) + m(\angle AOB) &= 360^\circ \\
&= m(\angle AOC) + 180^\circ - m(\angle BEC) + 180^\circ - m(\angle ADB) = 360^\circ
\end{aligned}$$

$$m(\angle AOC) = m(\angle BEC) + m(\angle ADB).$$

⁵Atribuído a Honsberger [27]

Aplicando o *Teorema do Ângulo Externo*⁶ no sentido horário e anti-horário de $\triangle ABC$ podemos perceber que:

$$m(\angle ADB) + m(\angle BEC) + m(\angle AFC) = 180^\circ.$$

E ainda que

$$m(\angle AFC) = 180^\circ - m(\angle AOC)$$

Deste modo observa-se que além de os três círculos concorrerem em O as cordas comuns a cada dois círculos secantes são perpendiculares aos segmentos que unem seus respectivos centros. Assim $\overline{XZ}$ e $\overline{OA}$ são perpendiculares. Do mesmo modo, $\overline{XY}$ e $\overline{OB}$ são perpendiculares bem como $\overline{YZ}$ e $\overline{OC}$.

Chamemos às intersecções entre $\overline{OA}$ e $\overline{XZ}$, $\overline{OB}$ e $\overline{XY}$ e $\overline{OC}$ e $\overline{YZ}$ de O_1 , O_2 e O_3 , respectivamente. O quadrilátero OO_1ZO_3 é tal que os ângulos $\angle AOC$ e $\angle XZY$ são suplementares bem como $\angle BOC$ e $\angle XYZ$ também o são. Mas se $m(\angle AFC) = 180^\circ - m(\angle AOC)$ e $m(\angle XZY) = 180^\circ - m(\angle ADC)$ então $m(\angle XZY) = m(\angle AFC)$. Analogamente, $m(\angle ADB) = m(\angle ZXY)$ e $m(\angle BEC) = m(\angle XYZ)$. Os ângulos do triângulo formado pelos circuncentros são, portanto, equivalentes aos ângulos de seus respectivos triângulos circunscritos.

□

3.1.7 Demonstração Sintética de Honsberger

Essa é uma demonstração do teorema 3.1.1 (Teorema de Napoleão), em que a configuração de Napoleão é considerada um caso particular da configuração apresentada no teorema 3.1.2 (Generalização de Honsberger).

Demonstração. Tomando um triângulo $\triangle ABC$ qualquer e nele aplicando a configuração de Napoleão (ver Honsberger [27]), temos que os triângulos com bases sobre $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ são equiláteros e seus circuncentros equivalem a seus respectivos centros, pelo teorema 3.1.2. Logo:

$$m(\angle ADB) = m(\angle ZXY)$$

⁶O ângulo externo de um triângulo tem medida equivalente à soma das medidas dos ângulos internos que não são adjacentes

$$m(\angle BEC) = m(\angle XYZ)$$

$$m(\angle AFC) = m(\angle XZY)$$

Como sabemos, por definição que

$$m(\angle ADB) = m(\angle BEC) = m(\angle AFC) = 60^\circ.$$

Então

$$m(\angle ZXY) + m(\angle XYZ) + m(\angle XZY) = 60^\circ.$$

Logo, o triângulo $\triangle XYZ$ é equilátero. $\square$

3.1.8 Teorema de Thébault

Teorema 3.1.3. ⁷ *Sobre os lados de um paralelogramo qualquer $ABCD$ são construídos quadrados. Tomando os centros destes quadrados como vértices de um quadrilátero, temos que o mesmo é um quadrado.*

Demonstração. Uma das características de um quadrado é que suas diagonais se intersectam em seus pontos médios e são perpendiculares entre si (ver mais em Barbosa [3]). Logo, podemos concluir que quadrados construídos sobre dois lados paralelos de $ABCD$ são congruentes entre si e ainda

$$\overline{DE} \equiv \overline{BG}$$

$$\overline{DH} \equiv \overline{FB}.$$

Note que os ângulos $\angle EDH$ e $\angle FBG$ são congruentes. Isso dito, podemos perceber que

$$\triangle EDH \equiv \triangle FBG.$$

Analogamente, temos que

$$\triangle AEF \equiv \triangle HCG.$$

⁷Esse teorema é enunciado e provado pelo matemático francês Victor Thébault (1882-1960), compondo um dos chamados Problemas de Thébault [2]

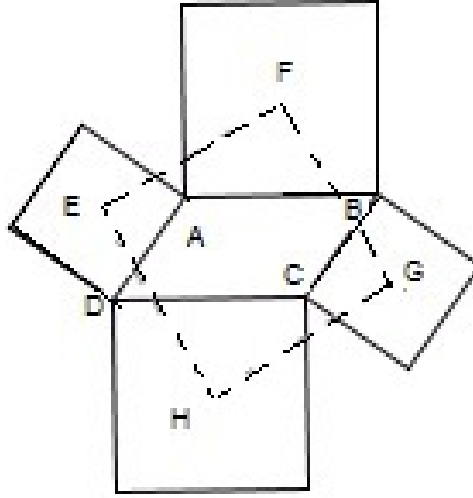


Figura 3.7: Demonstração do teorema de Thébault

Como os ângulos $\angle EAF$, $\angle FBG$, $\angle GCH$ e $\angle HDE$ são congruentes podemos estabelecer a seguinte congruência entre os segmentos

$$\overline{AE} \equiv \overline{AF} \equiv \overline{FB} \equiv \overline{BG} \equiv \overline{GC} \equiv \overline{CH} \equiv \overline{HD} \equiv \overline{DE}.$$

Temos que os quatro triângulos mencionados anteriormente são congruentes entre si. Isso dito, o quadrilátero $EFGH$ é um losango. Note-se que os ângulos $\angle DEH$ e $\angle GFB$ são congruentes. Como os ângulos $\angle CGH$ e $\angle GHA$ são congruentes, temos que os ângulos $\angle FGH$ e $\angle EHG$ também são congruentes. Consequentemente, os ângulos $\angle HEF$ e $\angle EFG$ também são congruentes.

Como o quadrilátero $EFGH$ é um losango, conclui-se que é equiângulo e, portanto, um quadrado. $\square$

3.2 Generalização: Teorema de Barlotti

8

⁸Adriano Barlotti(1923-2008) foi um matemático italiano que lidou com a geometria e combinatória. Em 1955, apresentou uma generalização à Configuração de Napoleão, hoje conhecida como Teorema de Barlotti.

Como visto, o Teorema 3.1.1 (Teorema de Napoleão) admite generalizações. Barlotti [4] propôs responder a seguinte pergunta: é possível que os centros (mais especificamente, os baricentros), de polígonos regulares n -ângonos (n lados e n ângulos) construídos sobre cada um dos n lados de um polígono n -ângono qualquer; formem um polígono n -ângono regular?

A conclusão a que Barlotti chegou é curiosa: a resposta da pergunta, tal como foi acima enunciada, é não. Mas ele provou que reformulando o enunciado chegamos a uma generalização. Embora essa generalização não admita um polígono n -ângono qualquer como premissa, tem como premissa um tipo específico de polígono n -ângono que circunscreve o caso de Napoleão: é possível que os baricentros de polígonos regulares n -ângonos construídos sobre *certos* polígonos n -ângonos formem polígonos regulares igualmente n -ângonos.

A condição para essa ocorrência é que os polígonos regulares sejam construídos sobre os lados de um polígono n -ângono específico, de sorte que seja possível escrevê-lo como a imagem por uma transformação afim de um polígono n -ângono regular.

Os polígonos que tem a característica de poderem ser escritos como imagem por uma transformação afim de um polígono regular são chamados de *regulares afins*. O triângulo qualquer (premissa do Teorema 3.1.1) e o paralelogramo (premissa do Teorema 3.1.3) são exemplos de polígonos *regulares afins* e, por isso, o *Teorema de Barlotti* (conhecido também como *Teorema de Napoleon-Barlotti*) generaliza e circunscreve os dois teoremas anteriormente mencionados. O caminho usado por Barlotti foi o da *trigonometria no plano complexo*, em especial das transformações nesse plano.

3.2.1 Teorema de Barlotti

Teorema 3.2.1. *Seja P_n um polígono n -ângono qualquer e Q_n o polígono n -ângono cujos vértices são baricentros dos polígonos n -ângonos regulares construídos sobre cada um dos n lados de P_n . Se P_n é regular afim, então Q_n é regular [4].*

Demonstração. Note-se que um polígono n -ângono que seja submetido a transformações rígidas mantém suas características métricas e angulares (um n -ângono regular que seja submetido a uma transformação rígida ψ no plano mantém-se regular) [41]. O mesmo vale para o caso de a referida transformação ser uma *homotetia*.

Dito isso, uma *transformação afim* que tenha P_n por imagem terá apenas um componente passível de variações significativas. Nesse caso é necessário apenas considerar

a *transformação linear* (ressalte-se que uma *transformação* é dita *afim* quando é a composta de uma *transformação linear* e de uma *translação*).

Assim, para toda *transformação linear* $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (plano complexo), os baricentros dos polígonos $n - gonos$ regulares construídos sobre os lados de P_n são tais que $P_n = L(Q_n)$. Esses baricentros são os vértices de um $n - gono$ regular R_n (note-se que os vértices de $Q(n)$ são representados como as raízes $n - simas$ da unidade)

A demonstração seguirá supondo que L seja uma transformação inversível: se L é uma transformação dita linear e inversível, pode-se tomar como premissa de identidade que $L(1) = 1$ e a partir disso concluir que $L(i) = Z$. Sendo

$$Z \in \mathbb{C}$$

$$i = \sqrt{-1}.$$

Tendo o exposto acima em perspectiva para cada $Z \in \mathbb{C}$ e suas respectivas raízes unitárias

$$1, \omega, \dots, \omega^{n-1}$$

temos que $L(1), L(\omega), \dots, L(\omega^{n-1})$ são vértices de um polígono $n - ágono$ em cujos lados constroem-se polígonos $n - ágonos$ regulares. (veja Figura 3.8 adaptada de Lopes [30]). Os centros são

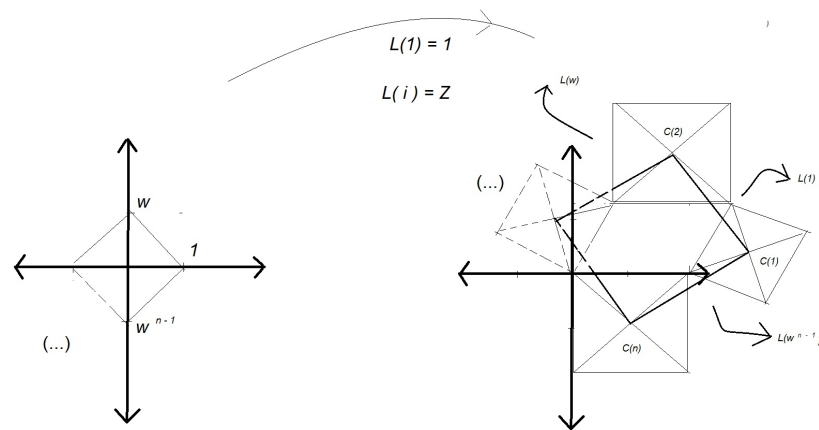


Figura 3.8: Demonstração do Teorema de Barlotti

$$C_1(Z), C_2(Z), \dots, C_n(Z).$$

Estes polígonos n -ágonos regulares formam vértices de um outro n -ágono regular. Para demonstrar tal característica devemos verificar que a diferença entre dois centros consecutivos $C_k(Z)$ e $C_{k+1}(Z)$ é tal que:

$$C_{k+1}(Z) = C_k \cdot e^{\frac{2\pi}{n}} \quad (3.5)$$

Com $k \in \mathbb{N}$ ($n \in \mathbb{N}$ e $k = 1, 2, \dots, n$). Por definição os números complexos $C_k(Z)$ são tais que podem ser representados como expressões afins do próprio Z (notação algébrica $Z = a + bi$). Isso se deve ao fato de que cada vértice $L_k(\omega^k)$ é uma expressão afim de Z , dado que todo ω^k é tal que $\omega^k = A_k + iB_k$:

$$L(\omega^k) = L(A_k + iB_k) \quad (3.6)$$

Como L é uma *transformação linear*

$$L(A_k + iB_k) = A_k L(1) + A_k L(i). \quad (3.7)$$

Como $A_k(L(1)) = A_k$ e $B_k(L(i)) = B_k \cdot Z$ temos então que

$$L(\omega^k) = A_k + ZB_k.$$

São necessárias pelo menos duas soluções particulares de $C_{k+1}(Z) = C_k \cdot e^{\frac{2\pi}{n}}$ para os quais o teorema 3.2.1 é verdadeiro. Tomemos Z_1 e Z_2 como $Z_1 = i$ e $Z_2 = -i$. No caso de $Z_1 = i$ L configura a identidade e no caso de $Z_2 = -i$ L configura uma reflexão em relação ao eixo $\mathbb{R}$ do plano complexo. Essa transformação é dita linear. Logo, é uma transformação afim, o que completa a demonstração. $\square$

3.2.2 Teorema de Napoleão como Corolário do Teorema de Barlotti

Como visto o Teorema 3.2.1 garante que o polígono formado pelos baricentros dos polígonos regulares construídos sobre um polígono regular afim é regular. Isso dito, para demonstrar o Teorema 3.1.1 basta provar que um triângulo $\triangle ABC$ qualquer é um polígono regular afim.

Corolário 3.2.2. *Seja P_3 um triângulo qualquer e Q_3 o triângulo cujos vértices cujos são baricentros dos triângulos equiláteros construídos sobre cada um dos três lados de P_3 . Se P_3 é regular afim, então Q_3 é regular.*

Demonstração. Seja um triângulo $\triangle ABC$ no plano complexo com vértices z_1, z_2 , e z_3 , com $z_n \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Para demonstrar os baricentros dos triângulos equiláteros obtidos na configuração de Napoleão geram um triângulo equilátero, basta mostrar que o triângulo de referência (um triângulo qualquer $\triangle ABC$) é regular afim. Tal equivale a dizer que os vértices z_n do triângulo $\triangle ABC$ são tais que $P_3 \equiv T(Q_3) \equiv \psi \circ L(Q_3)$, sendo T a transformação afim, ψ a translação (transformação rígida) e L a transformação linear (ver Figura 3.8). Note que P_3 corresponde ao triângulo $\triangle ABC$ e Q_3 corresponde ao triângulo equilátero centrado na origem do plano complexo cujos vértices são as raízes cúbicas da unidade, ou seja, $1, \omega$ e ω^2 .

Como $L(1) = a + ib$, $L(i) = c + id$, $\psi(z_n) = z_n + \alpha + i\beta$, tomando z_n um ponto no plano complexo e os coeficientes a, b, c , e d pertencentes a $\mathbb{R}$.

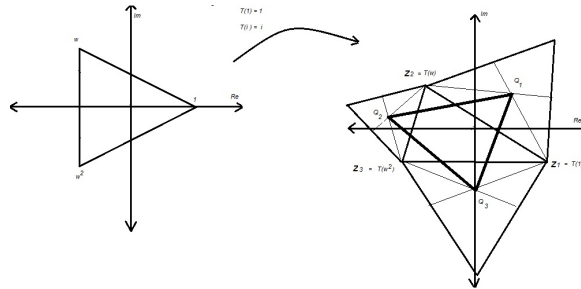


Figura 3.9: Configuração de Napoleão como corolário de Barlotti

Aplicando a transformação afim τ teremos a seguinte configuração

$$\tau(z_n) = L(z_n) + (\alpha + i\beta)$$

$$\tau(z_n) = x_n L(1) + y_n L(i) + (a + ib) + (\alpha + i\beta)$$

$$\tau(z_n) = x_n(a + ib) + y_n(c + id) + (\alpha + i\beta).$$

Reorganizando a expressão de $\tau(z_n)$ como um número complexo na forma trigonométrica, temos

$$\tau(z_n) = (x_na + y_nc + \alpha) + i(y_nb + x_nd + \beta). \quad (3.8)$$

Sendo que a equação acima corresponde ao número complexo que é imagem por τ . Como os vértices do triângulo equilátero que representa as raízes cúbicas da unidade são 1, $\omega = e^{\frac{i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, e $\omega^2 = e^{-\frac{i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, aplicando τ nas três referidas raízes:

$$\tau(1) = (a + \alpha) + i(b + \beta) = x_1 + iy_1 \quad (3.9)$$

$$\tau(\omega) = \left(-\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}c + \alpha\right) + i\left(-\frac{1}{2}b + \frac{\sqrt{3}}{2}d + \beta\right) = x_2 + iy_2 \quad (3.10)$$

$$\tau(\omega^2) = \left(-\frac{1}{2}a - \frac{\sqrt{3}}{2}c + \alpha\right) + i\left(-\frac{1}{2}b - \frac{\sqrt{3}}{2}d + \beta\right) = x_3 + iy_3 \quad (3.11)$$

Assim, podemos concluir que:

$$a = \frac{2x_1 - x_2 - x_3}{3} \quad (3.12)$$

$$b = \frac{2y_1 - y_2 - y_3}{3} \quad (3.13)$$

$$c = \frac{x_2 - x_3}{\sqrt{3}} \quad (3.14)$$

$$d = \frac{y_2 - y_3}{\sqrt{3}} \quad (3.15)$$

$$\alpha = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad (3.16)$$

$$\beta = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \quad (3.17)$$

Tais valores correspondem na equação que representa a imagem por T de um número complexo z_n ao seguinte formato

$$\tau(z_n) = \left(x \frac{2x_1 - x_2 - x_3}{3} + y \frac{x_2 - x_3}{\sqrt{3}} + \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) + i \left(y \frac{2y_1 - y_2 - y_3}{3} + x \frac{y_2 - y_3}{\sqrt{3}} + \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right).$$

Note-se que a transformação é afim. Ou seja, o teorema 3.2.1 é aplicável a essa situação. Assim, temos que o referido $\triangle ABC$ (por definição, um triângulo qualquer), é regular afim. Isso dito, os vértices dos triângulos equiláteros construídos formam um triângulo equilátero.

□

3.3 Propriedades Decorrentes da Configuração de Napoleão

O enunciado do Teorema 3.1.1, como já mencionado, vale tanto para triângulos equiláteros construídos por *fora* (que resulta na configuração externa) como para triângulos equiláteros construídos por *dentro* (que resulta na configuração interna).

Os triângulos equiláteros correspondentes a união de baricentros são respectivamente chamados de externo (construção por *fora*) e interno (construção por *dentro*).

Todas as demonstrações feitas anteriormente do Teorema 3.1.1 embora focadas na configuração *externa* também podem ser adaptadas para a configuração *interna* como menciona Honsberger [27]. Além disso, há propriedades que associam as duas configurações.

3.3.1 Propriedade Relativa aos Baricentros

Propriedade 1. *O baricentro do triângulo de Napoleão (externo ou interno) coincide com o baricentro do triângulo de referência.*

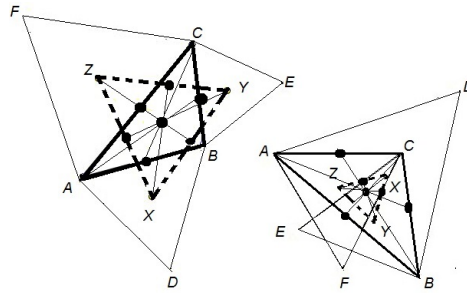


Figura 3.10: Coincidência de baricentros

Demonstração. De acordo com o exposto acima e com $A = 0$, $B = 1$ e $C = z$ podemos escrever o referido ponto P (obtido por rotação) utilizando a notação exponencial de números complexos ($z = |z|.e^{i\theta}$).

Os baricentros dos triângulos externo e interno de Napoleão do triângulo $\triangle ABC$ são expressões afins em z . Veja Figuras 3.10.

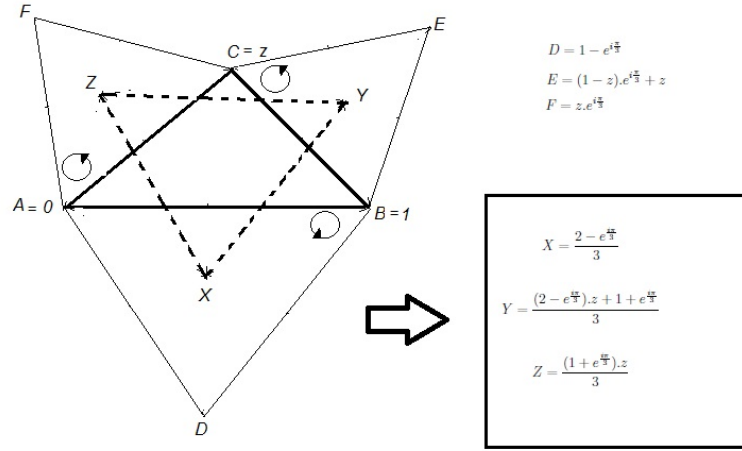


Figura 3.11: Propriedade dos baricentros e expressões afins

A coincidência ou não de baricentros dos três triângulos (configuração interna de Napoleão, configuração externa de Napoleão e triângulo de referência) é também dependente de uma expressão afim de Z (ver mais em Bogomolny [10]). Ou seja, temos apenas que mostrar duas configurações dos baricentros em suas expressões afins de seus vértices para garantir que há coincidência entre os baricentros, visto que essa coincidência pode ser descrita por uma expressão afim de z . Veja a figura 3.11.

Temos que um triângulo de baricentros $\triangle XYZ$, escrito na notação complexa exponencial e formado por rotações, possui um dos vértices que pode ser escrito como rotação anti-horária de um outro vértice sobre o terceiro, sendo essa rotação de $60^\circ = \frac{\pi}{3}$.

Uma possível equação dessa rotação em particular pode ser vista a seguir:

$$Y = (X - Z) \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} + Z$$

Que pode ser reescrita como:

$$Y - (X - Z) \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} - Z = 0$$

É evidente que X , Y e Z são expressões afins de z . Como a equação anterior depende de z (pois X , Y e Z são expressões afins de z), basta que dois valores de z sejam tais que configurem soluções da equação acima (com $A = 0$, $B = 1$ e $C = z$).

Duas soluções simples são os conjugados $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$ e $\bar{z} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$. Note que os baricentros, evidentemente, coincidem. □

3.3.2 Propriedade da Intersecção de Segmentos Nas Configurações Interna e Externa

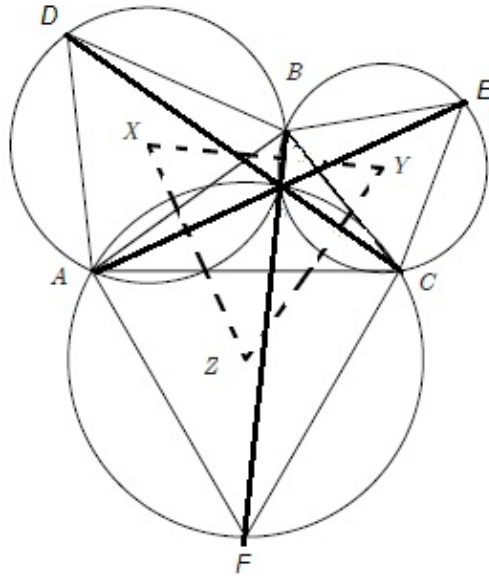


Figura 3.12: Propriedade da intersecção das linhas em um único ponto

Propriedade 2. Os segmentos $\overline{BF}$, $\overline{AE}$, e $\overline{CD}$ se intersectam em um ponto interior ao $\triangle ABC$.

Demonstração. Os segmentos $\overline{DC}$ e $\overline{AE}$ formam, entre si, ângulos 60° e 120° , o mesmo valendo para $\overline{DC}$ e $\overline{BF}$, e $\overline{AE}$ e $\overline{BF}$. Vide Figura 3.11.

Como observado na demonstração via arcos capazes, além de os segmentos dos três círculos concorrerem em um único ponto as cordas comuns a cada dois círculos secantes são perpendiculares aos segmentos que unem seus respectivos centros. Esse ponto foi chamado, na referida demonstração, de O .

Isso dito, os segmentos $\overline{BF}$, $\overline{AE}$, e $\overline{CD}$ se intersectam em um ponto interior (o ponto O) ao $\triangle ABC$.

Observação: o ponto O é ponto de $\triangle ABC$ com distância mínima de seus vértices, é chamado de *Ponto de Fermat* (ver Bogomolny [10]).

□

3.3.3 Propriedade do Perpendicularismo

Propriedade 3. *Os lados do triângulo dos baricentros são perpendiculares aos segmentos $\overline{BF}$, $\overline{AE}$, e $\overline{CD}$ (que se intersectam no ponto O , chamado de Ponto de Fermat).*

Demonstração. Note que os pontos X , Y e Z são centros de suas circunferências circunscritas aos triângulos $\triangle ABD$, $\triangle BCE$ e $\triangle CAF$, enquanto que AO , BO e CO são as cordas comuns às circunferências em que estão inscritos. Tal característica garante a perpendicularidade de cada segmento formador do *Ponto de Fermat* e um dos lados do triângulo dos baricentros (ver Bogomolny [10]). $\square$

3.3.4 Propriedade do Triângulo Equilátero Circunscrito

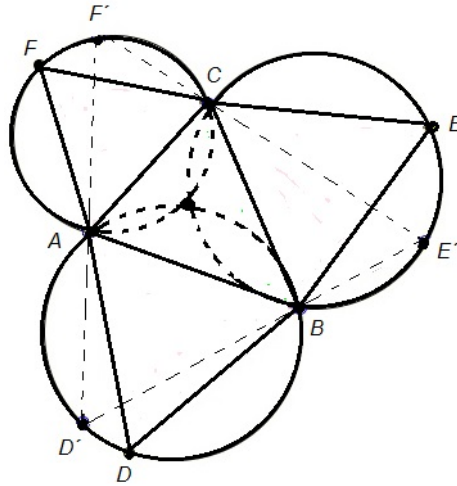


Figura 3.13: Triângulo equilátero circunscrito a $\triangle ABC$

Propriedade 4. *Pode-se, escolhendo arbitrariamente um ponto de partida, construir um triângulo $\triangle DEF$ com vértices sobre cada uma das circunferências que circunscrevem os triângulos equiláteros que originam o triângulo dos baricentros, de tal modo que circunscreva $\triangle ABC$ e seja equilátero.*

Demonstração. Tomando arbitrariamente um ponto D' no arco ADB e considerando a reta $\overleftrightarrow{ADB}$, marca-se no arco AFC um ponto F' (ver Figura 3.13, adaptada de Bogomolny [10]).

Traçando sobre o arco CEB as retas CF' e $D'B$, elas se intersectam exatamente em um ponto E' do arco CEB , pois as cordas $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ determinam arcos capazes com 60° denotando que a intersecção das retas anteriormente mencionadas forma ângulo mínimo de 60° . Logo, seu ponto de intersecção se dá no arco capaz de $\overline{CB}$, que é CEB . O triângulo agudo formado $\triangle D'E'F'$ é equilátero (Conforme Honsberger [27]). $\square$

3.3.5 Propriedade dos Pontos Médios

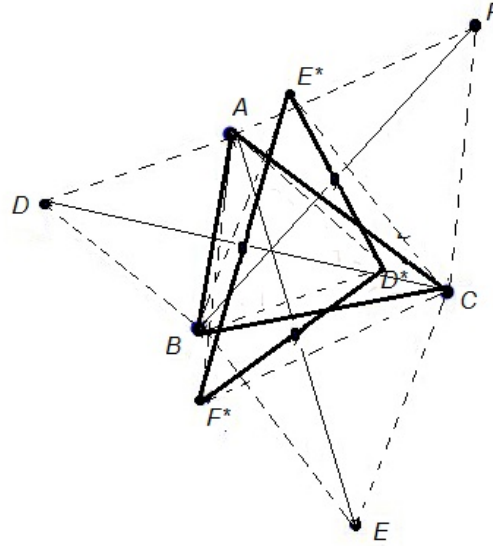


Figura 3.14: Pontos médios nas configurações interna e externa

Propriedade 5. *Considere os pares de vértices D e D^* , E e E^* , e F e F^* . Esses pares são, respectivamente, os vértices da configuração externa e interna de Napoleão (Figura 3.14). Os segmentos $\overline{DC}$, $\overline{BF}$, $\overline{AE}$, intersectam $\overline{E^*F^*}$, $\overline{E^*D^*}$ e $\overline{D^*F^*}$, respectivamente. Esses pontos de intersecção é comum a ambos os segmentos que se intersectam.*

Demonstração. A demonstração dessa propriedade da intersecção de segmentos em seus pontos médios será desenvolvida a partir da notação de números complexos e da rotação complexa. Seja $z = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$ uma rotação anti-horária, através de um ângulo de 60° . Como visto na demonstração por rotações com notação complexa podemos reescrever um determinado vértice com rotação de um outro vértice sobre o terceiro. Deste modo:

$$E = C + (B - C)z \quad (3.18)$$

$$F^* = C + (A - C)z \quad (3.19)$$

$$D^* = A + (B - A)z \quad (3.20)$$

Desta forma podemos concluir que:

$$\frac{A + E}{2} = \frac{(A + C) + (B - C)z}{2}$$

Tratando os outros pontos médios de forma semelhante podemos concluir que cada ponto de intersecção é ponto médio dos segmentos que o determinam.

□

3.3.6 Propriedade do Hexágono de Napoleão

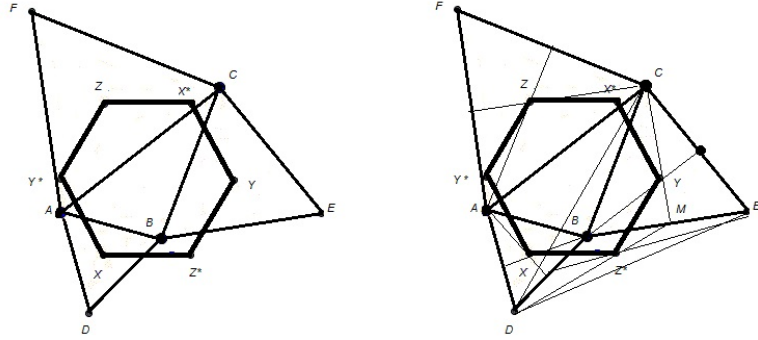


Figura 3.15: Propriedade do hexágono de Napoleão

Propriedade 6. *É possível determinar um hexágono com os baricentros de triângulos advindos da configuração de Napoleão. O referido hexágono é regular.*

Demonstração. Sejam X , Y e Z os baricentros dos triângulos $\triangle ADB$, $\triangle BEC$ e $\triangle AFC$ (Figura 3.15). Tomemos os triângulos $\triangle ECF$, $\triangle FAB$ e $\triangle DBE$ cujos baricentros são X^* , Y^* e Z^* respectivamente. Ligando os baricentros citados tem-se o hexágono $XY^*ZX^*YZ^*$.

Tomemos os baricentros dos triângulos equiláteros construídos sobre os lados do triângulo $\triangle ABC$, que chamaremos de X , Y e Z . Seja M o ponto médio de $\overline{BE}$.

Em $\triangle CDM$, notamos que as retas determinadas pelos segmentos $\overline{YZ^*}$ e $\overline{CD}$ são paralelas. Além disso, pela propriedade do baricentro e pela proporcionalidade advinda da semelhança entre $\triangle CDE$ e $\triangle Z^*MY$, temos que $\overline{YZ^*} = \frac{\overline{CD}}{3}$. Procedendo analogamente, concluímos que $\overline{ZY^*}$ e $\overline{CD}$ são paralelos e que $\overline{ZY^*} = \frac{\overline{CD}}{3}$.

Do exposto anteriormente concluímos que $\overline{ZY^*} \equiv \overline{YZ^*}$ e que as retas suportes desses mesmos segmentos são paralelas. Seguindo o mesmo raciocínio anterior, podemos avaliar os outros dois pares de lados opostos do hexágono de maneira análoga.

Contudo, sabemos que os segmentos $\overline{AE}$, $\overline{BF}$ e $\overline{CD}$ tem uma intersecção comum, que é caracterizada como um *Ponto de Fermat*. Logo, os ângulos formados pela intersecção (*Ponto de Fermat*) e os pares de pontos E e F medem 120° . O mesmo vale para os ângulos formados pela intersecção (*Ponto de Fermat*) e os pares de pontos D e F , assim como D e E .

Isso dito, concluímos que o hexágono $XY^*ZX^*YZ^*$ é equilátero (todos os lados medem $\frac{\overline{CD}}{3}$) e equiângulo (pois os ângulos determinados pelo *Ponto de Fermat* são congruentes e iguais a 120° , o que determinam ângulos entre lados adjacentes medindo 120°), sendo enfim um hexágono regular. Note que o baricentro de $\triangle ABC$ coincide com o baricentro do hexágono $XY^*ZX^*YZ^*$.

□

3.4 Algumas Aplicações dos Conceitos Desenvolvidos em Problemas de Geometria Plana

A utilização de conceitos como as transformações rígidas ou afins é um grande desafio à prática da resolução de problemas em Geometria. No entanto, é uma alternativa já defendida por diversos autores como Yaglon [43]. Esse pesquisador soviético propôs cursos inteiros de Geometria para formação de estudantes do Ensino Básico utilizando transformações geométricas.

Diversos autores brasileiros voltados para preparação de candidatos a institutos militares (ITA, IME ou AMAM) já aplicam propriedades de números complexos em Geometria Plana, como Guimarães [25]. Outros trabalhos como o de Sousa [39] vem redescobrimo a abordagem de Yaglon [43] e propõem resoluções interessantes de pro-

blemas geométricos por transformações.

Nesse sentido são apresentados quatro enunciados de Geometria Plana com respectivas soluções envolvendo conceitos abordados no presente trabalho.

3.4.1 Problema do Hexágono

Exemplo 3.4.1 ((PUTNAM 1967)). *Seja um hexágono $ABCDEF$ inscrito em uma circunferência de raio r , tal que $\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{EF} = r$ (Figura 3.16). Sejam M , N e P os pontos médios de $\overline{AF}$, $\overline{BC}$ e $\overline{DE}$, respectivamente. Mostre que $\triangle MNP$ é equilátero.*

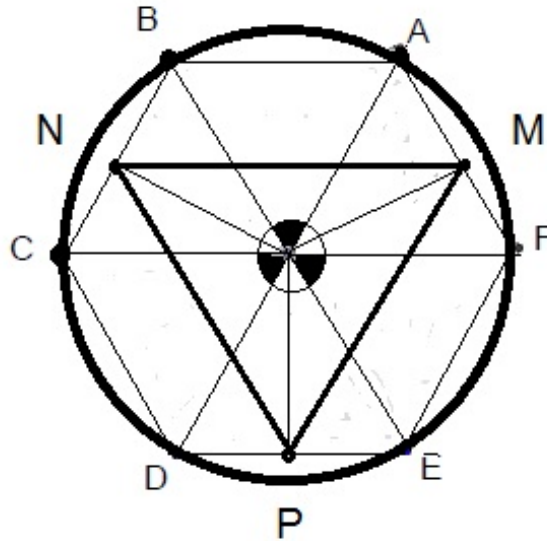


Figura 3.16: Problema do hexágono

Demonstração. Consideremos que $ABCDEF$ é centrado na origem O do plano complexo de Gauss. Logo, seus vértices são afixos de números complexos de módulo r . Como $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO} = \overline{DO} = \overline{EO} = \overline{FO} = r$, então $\triangle AOB \equiv \triangle COB \equiv \triangle EOF$, todos equiláteros de lado r .

Podemos concluir que $\triangle AOF \sim \triangle BOC \sim \triangle DOE$ com ângulo θ como vértice.

Escrevendo os afixos

$$F = r,$$

$$A = re^{i\theta},$$

$$B = re^{i(\theta + \frac{\pi}{3})},$$

$$C = re^{i(2\theta + \frac{\pi}{3})},$$

$$D = re^{i(2\theta + \frac{2\pi}{3})},$$

$$D = re^{i(2\theta + \frac{2\pi}{3})},$$

$$E = re^{i(3\theta + \frac{2\pi}{3})},$$

$$F = re^{i(2\pi)}.$$

temos que

$$3\theta + \pi = 2\pi,$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}.$$

Assim temos que os demais triângulos de $ABCDEF$ são equiláteros. Como M , N , e P são pontos médios, M tem argumento $\frac{\theta}{2}$ e módulo $\frac{r\sqrt{3}}{2}$.

Deste modo podemos escrever M , N e P com

$$M = \frac{r\sqrt{3}}{2}e^{\frac{i\pi}{6}},$$

$$N = \frac{r\sqrt{3}}{2}e^{5(\frac{i\pi}{6})},$$

$$P = \frac{r\sqrt{3}}{2}e^{3(\frac{i\pi}{2})}.$$

Em notação trigonométrica temos

$$M = \frac{r\sqrt{3}}{2}(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$$

$$N = \frac{r\sqrt{3}}{2}(\cos 5\frac{\pi}{6} + i \sin 5\frac{\pi}{6})$$

$$P = \frac{r\sqrt{3}}{2}(\cos 3\frac{\pi}{2} + i \sin 3\frac{\pi}{2}).$$

Como as raízes cúbicas da unidade $(1, \omega, \omega^2)$ são, em notação complexa

$$\omega^0 = 1,$$

$$\omega = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3},$$

$$\omega^2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}.$$

Faça-se $N\omega + P\omega^2$. Para tanto

$$N\omega = \frac{r\sqrt{3}}{2}(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}).(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$$

$$\therefore N\omega = \frac{r\sqrt{3}}{2}.(-i)$$

$$P\omega^2 = \frac{r\sqrt{3}}{2}(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}).(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3})$$

$$\therefore P\omega^2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

Logo temos que

$$N\omega + P\omega^2 = \frac{r\sqrt{3}}{2}.(-\frac{3}{2} - i\frac{1}{2}) = -M.$$

Isso dito tem-se que $N\omega + P\omega^2 + M = 0$ do que depreende-se $\triangle MNP \sim \triangle 1\omega\omega^2$ sendo que $\triangle MNP$ é, consequentemente, equilátero. $\square$

3.4.2 Problema dos n Pontos da Circunferência

Exemplo 3.4.2 (Olimpíada Universitária da Hungria (1995)). . *São dados n pontos numa circunferência unitária de modo que o produto das distância de qualquer ponto da circunferência a estes pontos é menor ou igual a 2. Prove que são pontos de um polígono n -gono regular.*

Demonstração. Considere uma circunferência unitária centrada na origem do plano complexo de Gauss e sejam $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, \dots, Z_n$ números complexos que representam os n pontos citados.

Observe que para todo Z_k com $K \in \mathbb{N}$ temos que Z_k é um número complexo de módulo unitário. Escreva-se Z_k em sua forma exponencial $Z_k = |Z_k|e^{i\theta_k}$, ou seja, temos que Z_k é um número complexo de módulo unitário. Deste modo podemos representar os produtos dos diversos vértices consecutivos como

$$Z_1 = e^{i\theta_1},$$

$$Z_2 = e^{i\theta_2},$$

...

$$Z_n = e^{i\theta_n}.$$

Os produtos dos diversos Z_k consecutivos geram

$$Z_1.Z_2.(...)Z_n = e^{i(\theta_1+\theta_2+(...)+\theta_n)}.$$

O argumento do produtório é $n\pi$ e $n\pi \equiv 0$, se n par, e $n\pi \equiv \pi$, se n ímpar. Logo

$$Z_1.Z_2.....Z_n = (-1)^n$$

Reescrevendo a expressão acima temos que

$$(-1)^n.Z_1.Z_2.....Z_n = 1.$$

Tomemos um polinômio $P(W)$ com raízes $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, \dots, Z_n$. Assim

$$P(W) = (W - Z_1).(W - Z_2).(...).(W - Z_n).$$

Ainda de $P(W)$, temos que

$$P(W) = W^n + a_1W^{n-1} + a_2W^{n-2} + \dots + a_{n-1}W + 1$$

aplicando $P(W)$ em sua forma euclidiana

$$P(W) = D(W).Q(W) + R(W).$$

E essa expressão pode ser reescrita como

$$P(W) = Q(W) + W^n + 1.$$

Sendo $W = Z_n$, $|P(Z_k)|$ representa o produto das distâncias de certo Z_k aos outros pontos da circunferência indicados. Como $|Z_n| = 1$, então

$$|P(Z_k)| = |Q(Z_k) + (Z_k)^n + 1|.$$

Note que $Q(Z_k) + (Z_k)^n \leq 1$. Assim

$$|P(Z_k)| = |Q(Z_k) + (Z_k)^n + 1| \leq 2. \quad (3.21)$$

Sendo $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$ as raízes da unidade. Sabe-se que:

$$1 + \omega^2 + \dots + \omega^{(n-1)} = 0.$$

Podemos então concluir que

$$Q(1) + Q(\omega) + (\dots) + Q(\omega^{n-1}) = 0.$$

Suponha que $Q(Z)$ não seja identicamente nulo (todos os seus coeficientes nulos). Em caso afirmativo, algum $j \in \mathbb{N}$ é tal que $Q(\omega^{n-1})$ é não-nulo e tem parte real não-negativa, pois $Q(0) = 0$ e que tem no máximo $n - 1$ raízes (Teorema Fundamental da Álgebra⁹). Consequentemente, temos que

$$P(\omega_j) = |Q(\omega_j) + \omega_j + 1| = |Q_{\omega_j} + 2|.$$

Ora, mas assim dito, temos que

$$|P(\omega_j)| > 2.$$

Tal resultado contradiz a equação 3.28. Logo, por contradição, $Q(Z)$ é identicamente nulo. Assim podemos reescrever $P(Z) = Q(Z) + Z^n + 1$ como

⁹Afirma que qualquer polinômio $p(z)$ com coeficientes complexos de uma variável e de grau n tem n raízes, ainda que complexas.

$$P(Z) = Z^n + 1. \quad (3.22)$$

Agora $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ são raízes de $P(Z)$ e elas se localizam, no plano complexo, nas mesmas posições das raízes da unidade. As mesmas formam um polígono n -ágono regular. $\square$

3.4.3 Problema da Determinação do Ângulo

Exemplo 3.4.3. (SOUSA-2014 Adaptado [39]) ABC é um triângulo qualquer, $BCDE$ e $ACFG$ são quadrados. Queremos determinar o valor do ângulo EPB (Figura 3.17).

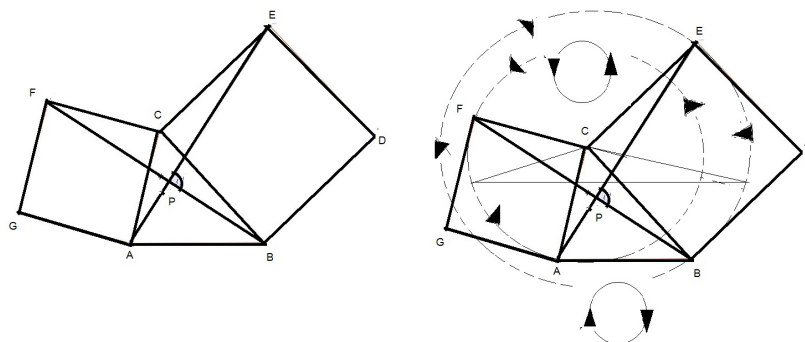


Figura 3.17: Problema da determinação do ângulo

Aplicam-se rotações do triângulo $\triangle CBF$ em torno de seu vértice C , o que se dará tanto em sentido horário quanto anti-horário, escolhendo convenientemente o ângulo de rotação (neste caso, será o ângulo de 90°).

A primeira rotação de 90° é tal que faz CF coincidir com CA .

Aplicando a segunda rotação em sentido oposto do segmento CB , segundo um ângulo reto no sentido anti-horário e em torno de C , o lado CB obrigatoriamente irá coincidir com CE pois $BDEC$ é um quadrado.

A mesma rotação irá fazer coincidir o segmento FB com o segmento AE pois o triângulo $\triangle CFB$ não foi deformado durante a rotação (o que é esperável dado a natureza rígida dessa transformação).

Em uma rotação todos os segmentos correspondentes giram de um mesmo ângulo em uma mesma direção. Podemos concluir que o segmento de reta FB também foi rotacionado de 90° para coincidir com AE . O ângulo EPB é, portanto, um ângulo também de 90° .

3.4.4 Problema da Linha Poligonal

Exemplo 3.4.4. (PUTNAM1955) A linha poligonal $A_1, A_2, \dots, A_n$ é um polígono regular inscrito em uma circunferência de raio r e centro O (Figura 3.20). O ponto P é tal que está sobre a semirreta $\overrightarrow{OA_1}$. Mostre que:

$$\overline{PA_1} \cdot \overline{PA_2} \dots \overline{PA_n} + (\overline{OA_1})^n = (\overline{OP})^n \quad (3.23)$$

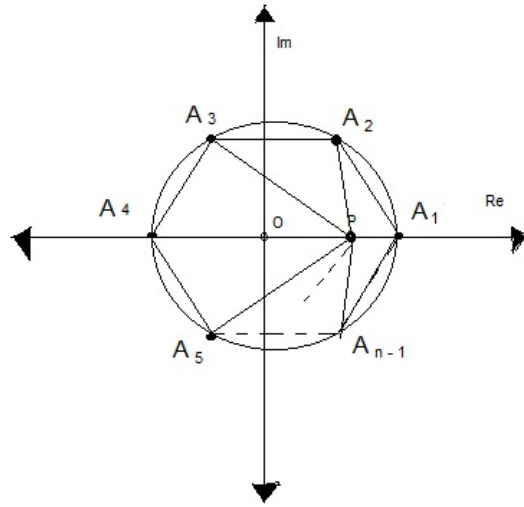


Figura 3.18: Problema da linha poligonal

Demonstração. Note que é suficiente tomar $\overline{OA_1} = 1$. Então, centra-se o polígono regular inscrito ao plano complexo e A_k , com $k = 1, 2, 3, \dots, n$, representado como raiz n -ésima da unidade (o polígono é regular). Logo,

$$A_k = e^{2\frac{ki\pi}{n}}. \quad (3.24)$$

Representaremos P pelo número $\lambda \in \mathbb{R}$. Assim,

$$|\lambda - 1| \cdot |\lambda - \omega| \dots |\lambda - \omega^{n-1}| + 1 = (\lambda)^n.$$

Note que o polinômio $\lambda^n - 1$ pode ser representado como

$$\lambda^n - 1 = (\lambda - 1) \cdot (\lambda - \omega) \cdot (\lambda - \omega^2) \dots (\lambda - \omega^{n-1})$$

Como as diferenças de λ com as raízes da unidade são todas positivas, temos

$$\lambda^n - 1 = |\lambda - 1| \cdot |\lambda - \omega| \cdot |\lambda - \omega^2| \dots |\lambda - \omega^{n-1}|.$$

Assim, o produtório acima completa a demonstração.

□

Considerações finais

Segundo o Major Bernadino [5], a Revolução Francesa e as Guerras Napoleônicas são referidas por diversos pensadores como os eventos que determinam a forma de estudar a arte da guerra. O conhecimento ímpar do campo de batalha e da alocação de linhas de suprimentos e comunicação fizeram de Napoleão a grande referência moderna do que hoje é conhecido como *alocação geométrica*.

As doutrinas militares napoleônicas são tão influentes que: na Batalha de Waterloo, o Duque de Wellington derrotou as tropas de Napoleão usando doutrinas dele, e o uso ostensivo das mesmas por parte de estrategistas da Primeira Guerra Mundial levou ao chamado Impasse das Trincheiras e, na Segunda Guerra, à criação da ofensiva alemã conhecida como Guerra Relâmpago (*blitzkrieg*). Até hoje as diversas academias militares ocidentais fazem uso das doutrinas napoleônicas [5].

Geômetra nato e exímio estudioso de História e das Ciências, Napoleão tem grandes condições de ser o autor do enunciado do teorema que leva seu nome bem como da demonstração por semelhança, independentemente de que a ideia original provenha dele, até por que o teorema de Napoleão responde aos chamados *Problemas de Mascheroni*, que Bonaparte orgulhava-se de ter introduzido na França. Cronin [18] menciona que, em Santa Helena, os comensais do Imperador tinham quase que por retribuição de hospitalidade mencionar o teorema e até que ponto entendiam a demonstração proposta pelo Imperador.

Outro ponto digno de nota é a diversidade de formações dos muitos que se debruçaram (Broudie [11], Yaglon [43], Honsberger [27]) nas demonstrações e estudo de propriedades da Configuração de Napoleão. Leon Gerber [23], matemático estadunidense, propôs em 1980, uma generalização da configuração de Napoleão (não apresentada aqui por julgar-se que ela não é alternativa significativa à Generalização de Honsberger), mostrando que o interesse pelo teorema permanece vivo.

Por fim, as diversas propostas de demonstração e as muitas propriedades advindas

da configuração de Napoleão permitem, além da interdisciplinaridade latente ao histórico do teorema (História Contemporânea, Geopolítica e Sociologia) uma comunicação profícua entre diversos instrumentos matemáticos, permitindo visualizações de problemas geométricos com ferramentas como a Álgebra Linear, Transformações Rígidas, Transformações Afins e Números Complexos.

A grande vitalidade do saber matemático reside na curiosidade que desperta e a relevância que encerra na cultura e diálogo histórico-cultural das civilizações. Nesse sentido, o teorema de Napoleão é um forte expoente desta mesma vitalidade e do amor pelo desafio, raciocínio e diversidade de estratégias de solução que marcam tanto a história de Napoleão Bonaparte quanto do seu teorema.

Referências Bibliográficas

- [1] AVRITZER, D . *Geometria analítica e álgebra linear: uma visão geométrica* ,Belo Horizonte ,Editora UFMG (2009)
- [2] AYME, J-L, *Sawayama and Thébault 's Theorem*, Fórum Geom (2003)
- [3] BARBOSA, J.L.M . *Geometria Euclidiana Plana*,Coleção do Professor de Matemática Rio de Janeiro, SBM (1999)
- [4] BARLOTTI, A, *Una proprietà degli n -agoni che si ottengono trasformando in una affinità un n -agono regolare* ,Un. Mat. Ital (1955).
- [5] BERNARDINO, L.M.B . *Conceitos Actuais da Estratégia Militar de Jomini.A Arte da Guerra JOMINI, Antoine Henri (1779 – 1869)*,REVISTA MILITAR(Edição Eletrônica) (2012)
- [6] BASTOS, R. . *Notas sobre o ensino de Geometria:Transformações Geométricas*,Lisboa, Revista da APM (2007)
- [7] BERNSTEIN, P.L . *Desafio aos Deuses*,Rio de Janeiro, Elsevier (2011)
- [8] BOYER, C.B . *História da Matemática*,São Paulo, Editora da USP (1974)
- [9] BOLDRINI, J.L . *Álgebra Linear*, Campinas, Ed.Harbra (2002)
- [10] BOGOMOLNY, A . *Theorem of Complete Quadrilateral: What is It?*, AAM (2002)
- [11] BRODIE, S . LAMBROU,M*Napoleon's Theorem*, AAM (2000)
- [12] CHANG, G.Z . DAVIS,P.J,*A Circulant Formulation of the Napoleon-Douglas-Neumann Theorem.Linear Algebra and Its Applications*, AAM (1983)

- [13] COURANT, R . ROBBINS,H,*What is mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods*, London, Oxford University Press (1941)
- [14] COX, D.J.L, OSHEA, D. . *Ideals, Varieties, and Algorithms. An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra. Undergraduate Texts in Mathematics*, New York City, Springer-Verlag (1992)
- [15] COXETER, H.S.M,GREITZER,S.L . *Geometry Revisited*, Washington, The Mathematical Association of América (1967)
- [16] COXETER, H.S.M . *Interlocked Rings of Spheres*, Script Mathematica, (1952)
- [17] CRILLY, T . *50 ideias matemáticas que você precisa saber*, Alfragide(Portugal), Publicações Dom Quixote (2011)
- [18] CRONIN, V . *Napoleão: uma vida*, Barueri-SP, Amarulys Editora (2014)
- [19] DETEMPLE, D . HUDESON, M,*Square-Banded Polygons and Affine Regularity*,The American Mathematical Monthly (2001)
- [20] DOUGLAS ,J. . *On Linear Polygon Transformations.*, Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society (1940)
- [21] EVES, H. . *Tópicos de História da Matemática - Geometria. Tradução Hygino H.Domingues.*, São Paulo, Atual (1992)
- [22] GARBI, GILBERTO G.A. . *Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática*, São Paulo, Editora Livraria da Física, (2009)
- [23] GERBER ,L . *Napoleon's Theorem and the Parallelogram Inequality for Affine-Regular Polygons*, The American Mathematical Monthly (1980)
- [24] GRIMBERG,C . *História Universal*, Rio de Janeiro, PubliFolha (1998)
- [25] GUIMARAES,C.S. . *Matemática Em Nível IME/ITA Volume 1: Números Complexos e Polinômios*, São José dos Campos, Editora Vestseller (2008)
- [26] HANHN L. SHIN . *Complex Numbers and Geometry*, Washington, The Mathematical Association of America (1994)

- [27] HONSBERGER, R . *Mathematical Gems from Elementary Combinatorics, Number Theory, and Geometry* , Washington, The Mathematical Association of America (1973)
- [28] LIMA, E.L . *Medida e Forma em Geometria*, Rio de Janeiro, SBM (1996).
- [29] LIMA, E.L, *Isometrias*, Rio de Janeiro, SBM (1996).
- [30] LOPES, S.M.R. . *Complexidade em Geometria Plana Euclidiana*, Dissertação de Mestrado. Rio de Janeiro, PUC (2002).
- [31] MACHADO, P.F . *Fundamentos de geometria plana*, Belo Horizonte, CAED-UFMG (2012)
- [32] MARTINI, H . *On the Theorem of Napoleon and Related Topics Mathematische Semesterberichte* , Vancouver, AAM (1996)
- [33] MEDINA, M.A.M . *El Teorema del Emperador*, Madri, Blog Gaussianos (2013)
- [34] MOTTA, E . *Aplicações dos Números Complexos em Geometria*, Rio de Janeiro, SBM (1999)
- [35] NADAL, C.A . *Transformações geométricas nos espaços bidimensional e tridimensional*, Curitiba, UFPR (2004)
- [36] PILETTI, N . *Toda a História*, Rio de Janeiro, ed. Saraiva (1999).
- [37] REIS, G.ATSUCHIYA, L.Y . *O Teorema de Barlotti*, Uberlândia, Famat em Revista (2010)
- [38] SACCHETTO, L.K . *Fundamentos de Geometria Complexa*, Dissertação de Mestrado, São Paulo, USP (2012)
- [39] SOUSA, D.M . *Uso de Transformações Geométricas na Revigoração do Ensino de Geometria Plana*, Dissertação de Mestrado, Rio de Janeiro, IMPA (PROFMAT) (2014)
- [40] THEBAULT, V . *Solution to Problem 169*, New York, National Mathematics (1938)
- [41] TINOCO, M.J . *Isometrias*, Dissertação de Mestrado, Porto (Portugal) (2012)

- [42] WAGNER, E . *Construções Geométricas*, Rio de Janeiro, SBM (1998)
- [43] YAGLON, I.M . *Geometric Transformations I*, Washington, The Mathematical Association of America (1973)