

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

Victor Gonçalves Netto

Emaranhamento Genuíno nas Variáveis Espaciais de
Sistemas Tripartidos e Quadripartidos de Fótons

Goiânia
Março de 2020



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE FÍSICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

Dissertação Tese

2. Nome completo do autor

Victor Gonçalves Netto

3. Título do trabalho

Emaranhamento genuíno nas variáveis espaciais de sistemas tripartidos e quadripartidos de fótons

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);

b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.

O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.



Documento assinado eletronicamente por **VICTOR GONÇALVES NETTO, Discente**, em 29/05/2020, às 15:49, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ardiley Torres Avelar, Professor do Magistério Superior**, em 29/05/2020, às 19:14, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1354909** e o código CRC **46C8CBCC**.

Referência: Processo nº 23070.009490/2020-33

SEI nº 1354909

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

Victor Gonçalves Netto

Emaranhamento Genuíno nas Variáveis Espaciais de
Sistemas Tripartidos e Quadripartidos de Fótons

Trabalho de Dissertação de Mestrado
realizado sob orientação do Professor
Dr. Ardiley Torres Avelar.

Goiânia
Março de 2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Netto, Victor Gonçalves
Emaranhamento Genuíno nas Variáveis Espaciais de Sistemas
Tripartidos e Quadripartidos de Fótons [manuscrito] / Victor Gonçalves
Netto. - 2020.
vi, 69 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Ardiley Torres Avelar.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto
de Física (IF), Programa de Pós-Graduação em Física, Goiânia, 2020.
Bibliografia. Apêndice.
Inclui abreviaturas, gráfico, tabelas.

1. Óptica quântica. 2. Informação e computação quântica. 3.
Emaranhamento quântico. 4. SPDC. I. Avelar, Ardiley Torres, orient. II.
Título.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE FÍSICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº 183 da sessão de Defesa de Dissertação de Victor Gonçalves Netto, que confere o título de Mestre em Física, na área de concentração em Física.

Aos 27 dias do mês de abril de 2020, a partir das 14h00min, por meio de videoconferência, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada “Emaranhamento genuíno nas variáveis espaciais de um sistema tripartido de fótons”. Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor Ardiley Torres Avelar (IF/UFG), com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor Emile Raymond Ferreira Taillebois (IFGOIANO), membro titular externo; e Professor Doutor Rafael de Moraes Gomes (IF/UFG), membro titular interno. Durante a arguição, os membros da banca fizeram sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido o candidato aprovado pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor Ardiley Torres Avelar, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos 27 dias do mês de abril de 2020.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

Emaranhamento Genuíno nas Variáveis Espaciais de Sistemas Tripartidos e Quadripartidos de Fótons



Documento assinado eletronicamente por **Ardiley Torres Avelar, Coordenador de Curso**, em 27/04/2020, às 16:56, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Emile Raymond Ferreira Taillebois, Usuário Externo**, em 27/04/2020, às 16:56, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rafael De Moraes Gomes, Professor do Magistério Superior**, em 27/04/2020, às 16:59, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1291075** e o código CRC **DC249573**.

Sumário

| | |
|---|-----------|
| Sumário | i |
| Agradecimentos | iii |
| Resumo | v |
| 1 Introdução | 1 |
| 1.1 Motivações | 2 |
| 1.2 Trabalho Relacionados | 4 |
| 1.3 Estrutura do Texto | 6 |
| 2 Base Teórica | 7 |
| 2.1 Emaranhamento Quântico | 8 |
| 2.2 Quantização do Campo Elétrico | 11 |
| 2.3 Variáveis Contínuas | 15 |
| 2.4 SPDC | 19 |
| 2.4.1 Breve Descrição Teórica | 20 |
| 2.4.2 Variáveis Contínuas e SPDC | 28 |
| 2.4.3 Correlações Entre Fótons Gêmeos | 28 |
| 3 Caracterização de Emaranhamento | 31 |
| 3.1 Exemplos Iniciais | 32 |
| 3.2 Emaranhamento Bipartido | 33 |
| 3.3 Emaranhamento Tripartido | 35 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 4 | Sistemas Tripartido e Quadripartido de Fótons | 39 |
| 4.1 | Sistema Tripartido de Fótons | 40 |
| 4.1.1 | Produção do Sistema Tripartido de Fótons | 40 |
| 4.1.2 | Aplicação do Teste de Emaranhamento | 43 |
| 4.2 | Sistema Quadripartido de Fótons | 46 |
| 4.2.1 | Produção do Estado Quadripartido de Fótons | 46 |
| 4.2.2 | Variância dos Vetores de Onda | 49 |
| 4.2.3 | Variância da Posição | 53 |
| 4.2.4 | Aplicação do Teste de Emaranhamento | 54 |
| 5 | Considerações Finais | 61 |
| A | Expressões da Seção 4.1 | 63 |
| | Referências bibliográficas | 65 |

Agradecimentos

Gostaria de agradecer minha Mãe, Indaira, e meus irmãos, Felipe e Luan, pela compreensão, apoio e correções que recebi durante a escrita deste trabalho.

Agradeço também ao meu orientador, Professor Ardiley, pelo seu entusiasmo, incentivo e discussões. Estendo o agradecimento também à todos os outros professores e alunos do Instituto de Física da UFG.

Agradeço finalmente à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior pelo apoio financeiro.

Resumo

Esta dissertação trata do emaranhamento genuíno nas variáveis espaciais de um sistema tripartido de fótons e de um sistema quadripartido de fótons. Cada termo usado na frase anterior foi investigado ao longo da realização deste trabalho e os primeiros capítulos desta dissertação são reservados para discutir o significado desses termos. Os estados de fótons são alcançados com o uso de um esquema experimental que usa o fenômeno SPDC, do inglês *spontaneous parametric down-conversion*. Dedicamos algumas páginas para tratar do SPDC, mas com um objetivo em mente: obter os estados de fótons. Esses estados são então submetidos ao critério de emaranhamento de *van Loock-Furusawa*, confirmando que, sob determinadas condições, ocorre emaranhamento genuíno.

Palavras-chave: *Óptica quântica, Informação e computação quântica, Emaranhamento quântico, SPDC.*

Abstract

This dissertation deals with the genuine entanglement in the spatial variables of a tripartite photon system and of a quadripartite photon system. Each term used in the previous sentence was investigated during the course of this work and the first chapters of this dissertation are reserved to discuss the meaning of these terms. The photon states are reached with the use of an experimental scheme that uses the *spontaneous parametric down-conversion*, SPDC. We dedicate a few pages to deal with SPDC, but with one goal in mind: to obtain the tripartite state of photons. These states is then submitted to the *van Loock-Furusawa* entanglement criterion, confirming that, under certain conditions, genuine entanglement occurs.

Keywords: *Quantum Optics, Quantum information and computation, Quantum entanglement, SPDC.*

Capítulo 1

Introdução

Esta dissertação trata do *emaranhamento quântico* nas variáveis espaciais de um sistema de três fótons e de um sistema de quatro fótons. Ao longo deste trabalho, discutiremos emaranhamento e detecção de emaranhamento sem, claro, esgotar o tema. Discutiremos também o fenômeno e o aparato que produz esses estados de três e quatro fótons. Este capítulo serve como base para o resto do texto, dando motivações e o conjunto de referências usadas para escrevê-lo. Na última seção deste capítulo apresentaremos um resumo da estrutura do texto.

1.1 Motivações

Em 1900, *Max Planck* inaugura a (velha) mecânica quântica e ali já surge, mesmo que sutilmente, algumas propriedades paradoxais dessa nova teoria [1]. Depois disso, vários trabalhos levaram a teoria quântica um passo adiante, culminando numa formulação coesa dessa teoria em 1925-26 [2, 3]. Essa (nova) mecânica quântica não era unanimidade na comunidade científica, especialmente por ser muito diferente de tudo que havia de ciência até então. Dentre o grupo de cientistas que criticavam essa mecânica quântica, se destaca *Albert Einstein*, que manteve um frutífero debate com *Niels Bohr* a esse respeito. É justo dizer que o artigo de *Einstein, Podolsky e Rosen* [4] foi o mais importante resultado dessa discussão, já que trouxe o emaranhamento quântico ao palco da mecânica quântica, um aspecto até então não explorado¹.

Além de ser fundamental para os fundamentos da teoria quântica [5], o emaranhamento quântico é um recurso valioso para a computação e a informação quântica [6]. Na computação quântica, o estado de um sistema quântico é alterado por meio de *portas* que, basicamente, são operações unitárias no sistema. Vamos aqui estender esse conceito para incluir também operações de medição. O sistema em si é composto por *qubits*². Para entender a importância do emaranhamento para a computação quântica, considere um sistema formado por 3 qubits e que nesse sistema atuam duas portas, P_1 e P_2 ³. A porta P_1 age sobre um único qubit por vez, enquanto que a porta P_2 age sobre dois qubits por vez. Digamos que o sistema tenha a seguinte *estrutura*: o primeiro e o segundo qubit estão emaranhados entre si e não estão emaranhados, ambos, com o terceiro qubit. Matematicamente,

$$|\psi_T\rangle = |\psi_{12}\rangle \otimes |\psi_3\rangle.$$

Se P_1 atuar sobre o terceiro qubit de $|\psi_T\rangle$, a estrutura de emaranhamento

¹A definição de emaranhamento está presente na Seção **2.1**.

²Formalmente, um qubit é um sistema quântico de dois níveis.

³Um exemplo de uma porta como P_1 é a *porta Hadamard* e exemplos de portas como P_2 são as portas de 1 qubit controladas.

do sistema não muda. Por outro lado, se P_1 atuar sobre o primeiro ou o segundo qubit de $|\psi_T\rangle$, o emaranhamento entre esses qubits pode continuar ou pode acabar, mas ambos ainda estarão não emaranhados com o terceiro qubit. Resumindo:

$$\begin{aligned} |\psi_{12}\rangle \otimes (P_1 |\psi_3\rangle) &\rightarrow |\psi_{12}\rangle \otimes |\psi'_3\rangle, \\ (P_1 |\psi_{12}\rangle) \otimes |\psi_3\rangle &\rightarrow |\psi'_{12}\rangle \otimes |\psi_3\rangle \text{ ou } |\psi'_1\rangle \otimes |\psi'_2\rangle \otimes |\psi_3\rangle. \end{aligned}$$

Se P_2 atuar sobre o primeiro e o segundo qubit, novamente o emaranhamento entre os qubits 1 e 2 pode continuar ou acabar. Agora, se P_2 atuar no primeiro (ou no segundo) e no terceiro qubit, $|\psi_T\rangle$ pode assumir qualquer configuração de emaranhamento, desde de um *emaranhamento genuíno* até um estado *totalmente separável* (ver Seção 2.1). Resumindo:

$$\begin{aligned} P_2(|\psi_{12}\rangle \otimes |\psi_3\rangle) &\rightarrow \text{indefinido}, \\ (P_2 |\psi_{12}\rangle) \otimes |\psi_3\rangle &\rightarrow |\psi'_{12}\rangle \otimes |\psi_3\rangle \text{ ou } |\psi'_1\rangle \otimes |\psi'_2\rangle \otimes |\psi_3\rangle, \end{aligned}$$

ficando subentendido que, na primeira linha, P_2 atua sobre o qubit 1 ou 2 e sobre o qubit 3. Não há diferença na atuação das portas P_1 e P_2 nos qubits 1 e 2 quando olhamos para o resultado final. Isso ocorre porque os dois qubits estão emaranhados. Desse breve exemplo tiramos duas conclusões: por um lado, se estivermos *processando* dois qubits emaranhados e desejarmos alterar ambos no processo, uma porta que atue em um único qubit pode ser o suficiente. Do lado prático, isso significa, em geral, uma simplificação do aparato que implementa o processamento dos dois qubits. Por outro lado, algum tipo de rotina quântica pode exigir que qubits emaranhados sejam produzidos. P_1 não é capaz de produzir, partindo de qubits não emaranhados, um estado emaranhado. Para isso, é necessário portas como P_2 . Saber como implementar P_2 é, portanto, um conhecimento valioso na computação quântica.

Colocando a discussão do parágrafo anterior num exemplo concreto, considere o protocolo de *teletransporte quântico* de *Bennett* [7]. Esse protocolo inicia com o compartilhamento entre a emissora (Alice) e o receptor (Bob)

de dois qubits emaranhados. Assim, produzir qubits emaranhados é crucial para o funcionamento do protocolo ou, posto de outra forma, a capacidade de construir uma porta como P_2 é essencial para o funcionamento do protocolo. Na sequência, Alice efetua operações no seu qubit compartilhado e no qubit que quer teleportar. Isso causa uma *mudança* no estado do qubit de Bob, possibilitando o teletransporte quântico. O ponto importante aqui está na palavra *mudança*: operações feitas por Alice no seu qubit *muda* o estado do qubit de Bob. O que torna essa *mudança* induzida no qubit de Bob é o fato desse seu qubit estar emaranhado com um dos qubits de Alice.

O emaranhamento pode estar presente nos mais diversos sistemas quânticos: átomos, moléculas, fótons etc. Tanto sistemas com espectro discreto quanto sistemas com espectro contínuo podem apresentar emaranhamento, como exemplificado na Seção 2.1. Este trabalho tem como principal foco o emaranhamento em variáveis contínuas de um sistema de fótons. Existem bons motivos para seguir esse caminho, incluindo a própria curiosidade científica e a alta eficiência de esquemas experimentais baseados em variáveis contínuas [8].

1.2 Trabalho Relacionados

O tema *caracterização de emaranhamento* abordado no Capítulo 3 é bastante amplo. Para esta dissertação, um dos trabalhos mais importante nessa direção é devido à *P. van Loock* e *A. Furusawa* [9], que trata do emaranhamento em variáveis contínuas de sistemas com três ou mais partes. O artigo de van Loock e Furusawa é uma extensão do artigo de *Lu-Ming Duan, G. Giedke, J. I. Cirac* e *P. Zoller* [10], que aborda o assunto de emaranhamento em variáveis contínuas para sistemas bipartido.

Outros dois trabalhos de caracterização de emaranhamento, mais especificamente o critério PPT⁴, são [11] e [12]. No primeiro trabalho, *A. Peres* desenvolve o critério PPT e mostra que ele é mais forte que a *desigualdade de Bell* [5]. No segundo trabalho, *R. Simon* estende o critério PPT para

⁴Ver Seção 3.1.

variáveis contínuas.

Em 2015, *F. Toscano, A. Saboia, A. T. Avelar* e *S. P. Walborn* [13], usando o critério PPT e outras técnicas, mostraram uma forma sistemática de construir critérios de emaranhamento em variáveis contínuas para sistemas multipartido. O critério de van Loock e Furusawa é, conforme aponta os autores, um caso especial do método desenvolvido por eles.

Para o leitor interessado nesse tema, o artigo de revisão de *O. Gühne* e *G. Tóth* [14] é um bom começo. Outro trabalho de revisão que vale ser citado, agora focado no tema *emaranhamento quântico* em geral, é [15], devido à *R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki* e *K. Horodecki*. A revisão feita por *S. L. Braunstein* e *P. van Loock* [8] também trata de emaranhamento e caracterização de emaranhamento, agora no contexto de variáveis contínuas e com ênfase em óptica quântica.

O Capítulo 2 contém um breve tratamento da teoria quântica do SPDC e é baseado, em sua maior parte, no artigo de revisão de *S.P. Walborn et al.* [16]. Esse trabalho trata do SPDC de uma maneira mais ampla, e trata também de correlações espaciais dos fótons gêmeos, experimentos de fenda dupla com fótons gêmeos, aplicações para informação quântica entre outros assuntos. A teoria do SPDC desenvolvida no trabalho de *S.P. Walborn et al.* é embasada no trabalho de *C. K. Hong* e *L. Mandel* [17], que também trata do intervalo de criação dos fótons gêmeos.

Existem na literatura vários trabalhos que ligam esses dois temas: emaranhamento e SPDC. Em particular o artigo de *A. T. Avelar* e *S. P. Walborn* [18], que é a principal referência desta dissertação. Esse trabalho propõe um método para produzir um sistema tripartido de fótons com as variáveis espaciais emaranhadas. Outros dois trabalhos que fazem essa junção de temas é o esquema de teletransporte quântico por *S. P. Walborn, D. S. Ether, R. L. de Matos Filho* e *N. Zagury* [19] e, mais recentemente, o trabalho de *Xi-Lin Wang et al.* [20], que reporta um experimento em que o emaranhamento de 10 fótons espacialmente separados é atingido.

1.3 Estrutura do Texto

Demos ao longo deste capítulo as motivações e as referências desta dissertação. Os próximos parágrafos são reservados à um rápido resumo de cada um dos capítulos seguintes.

O segundo capítulo traz uma breve revisão de conceitos usados ao longo do resto do texto, incluindo *emaranhamento quântico*, *quantização do campo elétrico* e *variáveis contínuas*. O final desse capítulo é dedicado ao SPDC, trazendo a teoria quântica desse fenômeno, uma discussão de variáveis contínuas no contexto de SPDC e, por último, correlações quântica entre os fótons produzidos no SPDC.

No terceiro capítulo, após uma breve introdução aos critérios de caracterização de emaranhamento, apresentaremos o critério de *van Loock-Furusawa*, que utilizaremos em nossos resultados.

O quarto capítulo junta tudo que foi desenvolvido até ali para tratar do emaranhamento em variáveis contínuas de um sistema tripartido de fótons e de um sistema quadripartido de fótons. Esse capítulo conta com duas seções principais: um para o sistema tripartido e outro para o sistema quadripartido de fótons. A estrutura dessas seções são similares, iniciando com a descrição da produção dos estados de fótons e concluindo com a aplicação do critério de *van Loock-Furusawa* nesses estados.

No capítulo 5 finalizaremos a dissertação trazendo comentários sobre os resultados obtidos neste trabalho e perspectivas futuras.

Capítulo 2

Base Teórica

Este capítulo tem como objetivo relembrar alguns conceitos de mecânica e óptica quântica e, ao mesmo tempo, fixar algumas notações. De modo geral, essa revisão será baseada nos livros [6,21,22]. Também dedicamos parte deste capítulo para falar sobre o SPDC

A primeira seção define emaranhamento quântico na linguagem de vetores de estado e na linguagem de operadores densidade, com um foco maior ao emaranhamento em sistemas bipartido e tripartido. A segunda seção é dedicada à quantização do campo eletromagnético e a terceira seção trata de variáveis contínuas. A discussão contida nessas duas seções servem de base para a última seção, que trata do SPDC.

2.1 Emaranhamento Quântico

Uma forma de descrever matematicamente um sistema quântico é por meio de vetores do *Espaço de Hilbert* [21]. Esses vetores são chamados de *kets*, ou *vetores de estado*, e denotados por $|\cdot\rangle$. Essa afirmação fica mais interessante quando consideramos um sistema composto, isto é, formado por duas ou mais partes. Nesse cenário, tanto o sistema composto como cada subsistema podem ser descritos usando *kets* de espaços de Hilbert distintos. Se denotarmos por V_C e V_i , respectivamente, o espaço de Hilbert do sistema composto e do i -ésimo subsistema, então, considerando que existam N partes, vale que [21]:

$$V_C = V_1 \otimes \cdots \otimes V_N. \quad (2.1)$$

Seja $\{|e_{\alpha_i,i}\rangle\}$ uma base do espaço V_i , com α_i indexando os diferentes vetores dessa base. O estado mais geral do sistema composto é dado por:

$$|\psi_C\rangle = \sum_{\alpha_1} \cdots \sum_{\alpha_N} c_{\alpha_1 \cdots \alpha_N} |e_{\alpha_1,1}\rangle \otimes \cdots \otimes |e_{\alpha_N,N}\rangle, \quad (2.2)$$

em que $c_{\alpha_1 \cdots \alpha_N}$ são números complexos satisfazendo a condição de normalização $\sum_{\alpha_1} \cdots \sum_{\alpha_N} |c_{\alpha_1 \cdots \alpha_N}|^2 = 1$. Apesar da notação de somatório utilizada, os índices α_i podem tomar valores discretos ou contínuos.

Cabe uma pausa aqui para alguns comentários e definições. O estado dado pela Eq. (2.2) é o mais geral possível e nos servirá de ponto de partida. Não vamos explorar a fundo nenhum sistema cujo vetor de estado precise ser escrito com tal generalidade. Ainda assim, a Eq. (2.2) nos será útil para, por exemplo, definir emaranhamento quântico. Também não vamos, em geral, tratar de sistemas com um número de partes N arbitrário, e sim de sistemas compostos por duas e três partes, chamados de *bipartidos* e *tripartidos*, respectivamente.

Para um sistema com N partes, a forma mais simples da Eq. (2.2) ocorre quando existem vetores $|e_i\rangle$ para cada espaço V_i tal que $|\psi_C\rangle$ é um produto tensorial desses vetores. Nesse caso,

$$|\psi_C\rangle = |e_1\rangle \otimes \cdots \otimes |e_N\rangle, \quad (2.3)$$

e $|\psi_C\rangle$ é dito *separável*. E quando não é possível escrever $|\psi_C\rangle$ como na Eq. (2.3), o sistema composto está *emaranhado* [14, 15].

Um bom exemplo de sistema quântico emaranhado é o estado $|EPR\rangle$, proposto por *Einstein, Podolsky e Rosen* para questionar os fundamentos da mecânica quântica [4]. Esse estado representa duas partículas criadas num mesmo ponto do espaço e com momentos lineares opostos [16]:

$$\begin{aligned} |EPR\rangle &= \int \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) |\mathbf{x}_1\rangle |\mathbf{x}_2\rangle \\ &= \int \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) |\mathbf{p}_1\rangle |\mathbf{p}_2\rangle. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Conforme apontado por [4], a medição da posição de uma partícula implica no conhecimento da posição da outra partícula. O mesmo vale para o momento linear. Essa correlação entre as duas partículas foi a base do argumento dado em [4]. Apesar de existirem sistemas clássicos com propriedades semelhantes, o emaranhamento quântico de fato se diferencia de tudo que existe no *mundo clássico*, como apontado por *Bell* [5] e subsequentes experimentos [23–30].

Outro bom exemplo de sistemas quânticos emaranhados são os *estados de Bell*. Os estados de Bell são bipartidos, assim como o estado $|EPR\rangle$, e cada uma dessas partes é definida num espaço de Hilbert de dimensão finita igual a 2, de modo diferente ao estado $|EPR\rangle$, cujas partes são definidas em espaços de Hilbert de dimensão infinita. Considerando a base de cada subsistema como sendo $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, os estados de Bell são dados por [6]:

$$|\Phi_{12}^{\pm}\rangle = (|0\rangle |0\rangle \pm |1\rangle |1\rangle) / \sqrt{2}, \quad (2.5a)$$

$$|\Psi_{12}^{\pm}\rangle = (|0\rangle |1\rangle \pm |1\rangle |0\rangle) / \sqrt{2}. \quad (2.5b)$$

Os estados de Bell formam uma base para o sistema composto [6] e são usados, por exemplo, no protocolo de teleporte quântico proposto por *Bennett et al.* [7].

Até agora tratamos de sistemas quânticos por meio de vetores de estado do espaço de Hilbert. Existe uma segunda maneira, que no lugar de encarar um sistema quântico como um vetor de estado, o encara como um operador

do espaço de Hilbert. Esse objeto recebe o nome *operador densidade* [6]. Formalmente, um operador densidade é um operador positivo¹ de traço igual a 1 no espaço de Hilbert. Essa maneira de descrever um sistema quântico é útil na situação mais geral em que não se sabe com certeza o (vetor de) estado do sistema, apenas é sabido a probabilidade p_i do sistema estar no estado $|\psi_i\rangle$ [6, 14]. Nesse cenário o operador densidade é dado por:

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|. \quad (2.6)$$

Naturalmente, como p_i é uma probabilidade, $p_i \geq 0$ e $\sum_i p_i = 1$. Podemos usar ρ dado pela Eq. (2.6) para descrever o sistema quântico de maneira direta, não sendo necessário lidar com os $|\psi_i\rangle$ separadamente e após isso com as probabilidades p_i .

Da observação que levou até à Eq. (2.6) vem duas definições. Quando existir algum vetor de estado $|\psi\rangle$ tal que o operador densidade possa ser escrito como $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$, então ρ é dito *estado puro*. Quando não existir tal vetor de estado, ρ é dito *estado misturado* [6].

Da definição de operador densidade segue que uma *soma convexa*² de operadores densidade ρ_i ,

$$\rho = \sum_i p_i \rho_i, \quad (2.7)$$

também é um operador densidade. Novamente $p_i \geq 0$ e $\sum_i p_i = 1$. No Capítulo 3 faremos uso dessa forma de escrever o operador densidade. Por ora, vamos usar a Eq. (2.7) para mais algumas definições.

Ao falar de operador densidade não fizemos distinção entre sistemas compostos ou *sistemas simples* (com somente 1 parte). Faremos isso agora para definir emaranhamento usando operadores densidade. Considere então um sistema tripartido cujo operador densidade é dado pela Eq. (2.7) ou, para ser

¹Um operador ρ é dito positivo se para qualquer vetor $|\phi\rangle$ do espaço Hilbert vale que $\langle \phi | \rho | \phi \rangle \geq 0$. De maneira equivalente, ρ é positivo se, em qualquer uma de suas representações matriciais, os elementos da diagonal principal são não negativos. Uma terceira caracterização é que ρ é positivo se seus autovalores são não negativos.

²Soma ponderada com pesos não negativos cuja soma é igual a 1.

mais explícito, por

$$\rho = \sum_i p_i \rho_{i,123}. \quad (2.8)$$

Quando for possível escrever cada $\rho_{i,123}$ como $\rho_{i,1} \otimes \rho_{i,2} \otimes \rho_{i,3}$, dizemos que o sistema é (*totalmente*) *separável*³. Quando isso não for possível, então o estado ρ está *emaranhado*. Podemos dividir os sistemas tripartidos emaranhados em duas classes: *bisseparáveis* e *genuinamente emaranhados*. Sistemas bisseparáveis são aqueles onde cada $\rho_{i,123}$ pode ser escrito como $\rho_{i,km} \otimes \rho_{i,n}$, com (k, m, n) sendo uma permutação fixa de $(1, 2, 3)$. Quando um sistema não for nem separável nem bisseparável, ele é dito genuinamente emaranhado [14].

A extensão das definições dadas no parágrafo anterior para sistemas bipartidos é direta. Nesse caso, $\rho_{i,123}$ é trocado por $\rho_{i,12}$ e o sistema é dito separável se todo $\rho_{i,12} = \rho_{i,1} \otimes \rho_{i,2}$. Se isso não for possível, então o sistema está emaranhado. As definições se estendem para sistemas com 4 ou mais partes, com os devidos ajustes.

2.2 Quantização do Campo Elétrico

Com o objetivo de relembrar e introduzir alguns conceitos, faremos agora a quantização do campo eletromagnético. Nosso foco é a quantização do campo elétrico, de forma que optaremos por essa expressão quando falarmos de quantização. Esta revisão seguirá o texto de [22].

Considere o campo elétrico \mathbf{E} e magnético \mathbf{B} no vácuo numa região sem cargas, isto é, com densidade de carga e de corrente nulas. Esses campos satisfazem as *equações de Maxwell* [31]:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0. \end{aligned}$$

³Em geral omitiremos o termo *totalmente* quando estivermos falando de um sistema totalmente separável.

Podemos escrever os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} por meio do potencial vetor \mathbf{A} como⁴ [31]:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t).\end{aligned}$$

Adotando o *calibre de Coulomb*⁵, segue que o potencial vetor \mathbf{A} satisfaz a equação de onda

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (2.9)$$

em que $c = \sqrt{1/\mu_0 \varepsilon_0}$ é a velocidade da luz.

As soluções da Eq. (2.9) são ondas planas e, como trata-se de uma equação diferencial homogênea, combinação linear de soluções também é solução. Assim, a solução geral da Eq. (2.9) pode ser escrita como [22]:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \mathbf{e}_{\mathbf{k}, \sigma} [A_{\mathbf{k}, \sigma}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + A_{\mathbf{k}, \sigma}^*(t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}], \quad (2.10)$$

em que $A_{\mathbf{k}, \sigma}(t)$ é a amplitude complexa, $\mathbf{e}_{\mathbf{k}, \sigma}$ é o vetor de polarização real e \mathbf{k} é o vetor de onda. O somatório é feito sobre todos os vetores de onda e sobre todas as polarizações, indicado pelo índice σ . Os vetores de polarização satisfazem as condições [22]:

$$\mathbf{e}_{\mathbf{k}, \sigma} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad (2.11a)$$

$$\mathbf{e}_{\mathbf{k}, \sigma} \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{k}, \sigma'} = \delta_{\sigma \sigma'}. \quad (2.11b)$$

A dependência temporal de $A_{\mathbf{k}, \sigma}(t)$ é obtida ao substituir a Eq. (2.10) na Eq. (2.9). Desse procedimento surge uma equação diferencial ordinária em t para as amplitudes $A_{\mathbf{k}, \sigma}(t)$ e a solução dessa equação é:

$$A_{\mathbf{k}, \sigma}(t) = A_{\mathbf{k}, \sigma} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}. \quad (2.12)$$

Como comumente é feito, definimos $A_{\mathbf{k}, \sigma} \equiv A_{\mathbf{k}, \sigma}(0)$. A frequência angular $\omega_{\mathbf{k}}$

⁴Note que, como assumimos que não existem cargas livres, então o potencial escalar Φ é constante. Assim, o termo $-\nabla \Phi$ não contribui para o campo elétrico \mathbf{E} .

⁵ $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0$.

que aparece na Eq. (2.12) é dada por $\omega_k = |\mathbf{k}|c$.

Após substituir a Eq. (2.10) nas expressões para \mathbf{E} e \mathbf{B} , podemos calcular a energia eletromagnética,

$$H = \frac{1}{2} \int_V \left(\varepsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \right) dV,$$

como sendo [22]:

$$H = 2\varepsilon_0 V \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \omega_k^2 A_{\mathbf{k}, \sigma} A_{\mathbf{k}, \sigma}^*. \quad (2.13)$$

Nessa equação, V é o volume onde se calculou a energia eletromagnética.

A forma da Eq. (2.13) assemelha ao hamiltoniano do *oscilador harmônico* escrito em termos dos *operadores de criação* \hat{a}_λ^\dagger e *aniquilação* \hat{a}_λ ,

$$\hat{H}_{har} = \sum_\lambda \hbar \omega_\lambda \left(\hat{a}_\lambda^\dagger \hat{a}_\lambda + \frac{1}{2} \right).$$

Isso sugere que façamos a quantização do campo elétrico trocando $A_{\mathbf{k}, \sigma}$ e $A_{\mathbf{k}, \sigma}^*$ por operadores de aniquilação e criação $\hat{a}_{\mathbf{k}, \sigma}$ e $\hat{a}_{\mathbf{k}, \sigma}^\dagger$, respectivamente. Faremos isso em duas etapas: primeiro vamos introduzir as variáveis canônicas $q_{\mathbf{k}, \sigma}$ e $p_{\mathbf{k}, \sigma}$ e, na sequência, definir os operadores $\hat{a}_{\mathbf{k}, \sigma}$ e $\hat{a}_{\mathbf{k}, \sigma}^\dagger$. As variáveis canônicas são dadas implicitamente por [22]:

$$A_{\mathbf{k}, \sigma} = \frac{\omega_k q_{\mathbf{k}, \sigma} + i p_{\mathbf{k}, \sigma}}{2\omega_k \sqrt{\varepsilon_0 V}}, \quad (2.14a)$$

$$A_{\mathbf{k}, \sigma}^* = \frac{\omega_k q_{\mathbf{k}, \sigma} - i p_{\mathbf{k}, \sigma}}{2\omega_k \sqrt{\varepsilon_0 V}}. \quad (2.14b)$$

Tal escolha permite que a energia dada na Eq. (2.13) seja reescrita como o hamiltoniano de um oscilador harmônico:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \sigma} (p_{\mathbf{k}, \sigma}^2 + \omega_k^2 q_{\mathbf{k}, \sigma}^2).$$

A quantização do campo elétrico é completada ao promovermos as variá-

veis canônicas $q_{\mathbf{k},\sigma}$ e $p_{\mathbf{k},\sigma}$ ao status de operadores,

$$q_{\mathbf{k},\sigma} \rightarrow \hat{q}_{\mathbf{k},\sigma} \quad e \quad p_{\mathbf{k},\sigma} \rightarrow \hat{p}_{\mathbf{k},\sigma},$$

e fixarmos as relações de comutação:

$$[\hat{q}_{\mathbf{k},\sigma}, \hat{q}_{\mathbf{k}',\sigma'}] = [\hat{p}_{\mathbf{k},\sigma}, \hat{p}_{\mathbf{k}',\sigma'}] = 0, \quad (2.15a)$$

$$[\hat{q}_{\mathbf{k},\sigma}, \hat{p}_{\mathbf{k}',\sigma'}] = i\hbar\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{\sigma\sigma'}. \quad (2.15b)$$

Por fim, os operadores de criação $\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger$ e aniquilação $\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}$ são definidos em termos de $\hat{q}_{\mathbf{k},\sigma}$ e $\hat{p}_{\mathbf{k},\sigma}$ como [22]:

$$\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma} = \frac{\omega_k \hat{q}_{\mathbf{k},\sigma} + i\hat{p}_{\mathbf{k},\sigma}}{\sqrt{2\hbar\omega_k}}, \quad (2.16a)$$

$$\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger = \frac{\omega_k \hat{q}_{\mathbf{k},\sigma} - i\hat{p}_{\mathbf{k},\sigma}}{\sqrt{2\hbar\omega_k}}. \quad (2.16b)$$

Das relações de comutação entre $\hat{q}_{\mathbf{k},\sigma}$ e $\hat{p}_{\mathbf{k},\sigma}$ obtemos:

$$[\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}, \hat{a}_{\mathbf{k}',\sigma'}] = [\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger, \hat{a}_{\mathbf{k}',\sigma'}^\dagger] = 0, \quad (2.17a)$$

$$[\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}, \hat{a}_{\mathbf{k}',\sigma'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{\sigma\sigma'}. \quad (2.17b)$$

Os operadores $\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}$ e $\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger$ atuam nos estados do *espaço de Fock* da seguinte maneira [22]:

$$\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma} |n_{\mathbf{k},\sigma}\rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k},\sigma}} |(n-1)_{\mathbf{k},\sigma}\rangle, \quad (2.18a)$$

$$\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger |n_{\mathbf{k},\sigma}\rangle = \sqrt{(n+1)_{\mathbf{k},\sigma}} |(n+1)_{\mathbf{k},\sigma}\rangle. \quad (2.18b)$$

A notação $|n_{\mathbf{k},\sigma}\rangle$ representa o estado em que existem n *fótons* com vetor de onda \mathbf{k} e polarização σ . A escolha dos nomes *criação* e *aniquilação* fica clara nas equações (2.18), em que o operador de aniquilação reduz em uma unidade a quantidade de fótons com vetor de onda \mathbf{k} e polarização σ e em que o operador de criação aumenta em uma unidade essa quantidade de fótons.

Das equações (2.14a) e (2.16a) obtemos a relação entre a amplitude $\hat{A}_{\mathbf{k},\sigma}$,

agora um operador, e o operador de aniquilação $\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}$:

$$A_{\mathbf{k},\sigma} \rightarrow \hat{A}_{\mathbf{k},\sigma} = \left(\frac{\hbar}{2\omega_k \varepsilon_0 V} \right)^{1/2} \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}.$$

E da mesma forma para $\hat{A}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger$. O potencial vetor quantizado $\hat{\mathbf{A}}$ é dado por:

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k},\sigma} \left(\frac{\hbar}{2\omega_k \varepsilon_0 V} \right)^{1/2} \mathbf{e}_{\mathbf{k},\sigma} [\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t)} + \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t)}]. \quad (2.19)$$

O campo elétrico quantizado é finalmente dado por:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ &= i \sum_{\mathbf{k},\sigma} \left(\frac{\omega_k \hbar}{2\varepsilon_0 V} \right)^{1/2} \mathbf{e}_{\mathbf{k},\sigma} [\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t)} - \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t)}]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

É comum escrever o campo elétrico quantizado como a soma de um campo com frequências positivas $\hat{\mathbf{E}}^{(+)}$, que oscila como $e^{-i\omega_k t}$ com $\omega_k > 0$, e outro campo com frequências negativas $\hat{\mathbf{E}}^{(-)}$, que também oscila como $e^{-i\omega_k t}$, mas com $\omega_k < 0$ [16, 22]. Da Eq. (2.20) vemos que esses campos são proporcionais a $\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}$ e a $\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger$, respectivamente, e que $\hat{\mathbf{E}}^{(-)}$ é o operador adjunto de $\hat{\mathbf{E}}^{(+)}$. Resumindo:

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t), \quad (2.21)$$

com

$$\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k},\sigma} \left(\frac{\omega_k \hbar}{2\varepsilon_0 V} \right)^{1/2} \mathbf{e}_{\mathbf{k},\sigma} \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t)} \quad (2.22)$$

e

$$\hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{r}, t) = [\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{r}, t)]^\dagger. \quad (2.23)$$

2.3 Variáveis Contínuas

O emaranhamento quântico em *variáveis contínuas* é o principal objeto de estudo deste trabalho. Ainda não comentamos muito sobre variáveis

contínuas, ou mesmo introduzimos o tema adequadamente. Esta seção é dedicada a esse tema e, mais especificamente, às variáveis contínuas em óptica quântica.

O estado quântico de uma partícula sem *spin* pode ser expandido nas bases $\{|\mathbf{r}\rangle\}$ e $\{|\mathbf{p}\rangle\}$, conhecidas, respectivamente, como *representação de posição* e *representação de momento* [21]. Os vetores dessas bases são caracterizados por três valores contínuos:

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}_0\rangle &= |x_0, y_0, z_0\rangle, \\ |\mathbf{p}_0\rangle &= |p_{x0}, p_{y0}, p_{z0}\rangle. \end{aligned}$$

Valem as relações de ortogonalidade e completeza na representação de posição,

$$\langle \mathbf{r} | \mathbf{r}' \rangle = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (2.24a)$$

$$\int d\mathbf{r} |\mathbf{r}\rangle \langle \mathbf{r}| = 1, \quad (2.24b)$$

e também na representação de momento,

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{p}' \rangle = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad (2.25a)$$

$$\int d\mathbf{p} |\mathbf{p}\rangle \langle \mathbf{p}| = 1. \quad (2.25b)$$

Em consequência da completeza, qualquer estado $|\psi\rangle$ da partícula pode ser expandido nas bases $\{|\mathbf{r}\rangle\}$ e $\{|\mathbf{p}\rangle\}$, como dito anteriormente. As expansões são:

$$|\psi\rangle = \int d\mathbf{r} |\mathbf{r}\rangle \langle \mathbf{r} | \psi \rangle, \quad (2.26a)$$

$$|\psi\rangle = \int d\mathbf{p} |\mathbf{p}\rangle \langle \mathbf{p} | \psi \rangle, \quad (2.26b)$$

em que $\psi(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | \psi \rangle$ é a *função de onda* (no espaço de posição) da partícula e $\bar{\psi}(\mathbf{p}) = \langle \mathbf{p} | \psi \rangle$ é a *função de onda* no espaço de momento da partícula. Essas funções de onda estão relacionadas entre si por uma *transformada de*

Fourier:

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d\mathbf{p} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \bar{\psi}(\mathbf{p}), \quad (2.27a)$$

$$\bar{\psi}(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \psi(\mathbf{r}). \quad (2.27b)$$

O estado $|\mathbf{r}\rangle = |x, y, z\rangle$ é autovetor dos operadores de posição \hat{X} , \hat{Y} e \hat{Z} :

$$\hat{X}|\mathbf{r}\rangle = x|\mathbf{r}\rangle, \quad (2.28a)$$

$$\hat{Y}|\mathbf{r}\rangle = y|\mathbf{r}\rangle, \quad (2.28b)$$

$$\hat{Z}|\mathbf{r}\rangle = z|\mathbf{r}\rangle. \quad (2.28c)$$

E, de forma análoga, $|\mathbf{p}\rangle = |p_x, p_y, p_z\rangle$ é autovetor dos operadores de momento \hat{P}_x , \hat{P}_y e \hat{P}_z :

$$\hat{P}_x|\mathbf{p}\rangle = p_x|\mathbf{p}\rangle, \quad (2.29a)$$

$$\hat{P}_y|\mathbf{p}\rangle = p_y|\mathbf{p}\rangle, \quad (2.29b)$$

$$\hat{P}_z|\mathbf{p}\rangle = p_z|\mathbf{p}\rangle. \quad (2.29c)$$

O comutador desses operadores é dado por:

$$[\hat{X}, \hat{P}_x] = [\hat{Y}, \hat{P}_y] = [\hat{Z}, \hat{P}_z] = i\hbar, \quad (2.30a)$$

$$[\hat{P}_x, \hat{X}] = [\hat{P}_y, \hat{Y}] = [\hat{P}_z, \hat{Z}] = -i\hbar, \quad (2.30b)$$

e todos os outros comutadores possíveis são nulos.

Na óptica quântica os operadores análogos à posição e momentos são $\hat{q}_{\mathbf{k},\sigma}$ e $\hat{p}_{\mathbf{k},\sigma}$ dados implicitamente nas equações (2.16) [8, 22]. Resolvendo essas equações obtemos

$$\hat{q}_{\mathbf{k},\sigma} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} (\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma} + \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger) \quad (2.31)$$

e

$$\hat{p}_{\mathbf{k},\sigma} = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2}} (\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma} - \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger). \quad (2.32)$$

Note que para cada vetor de onda \mathbf{k} e polarização σ existe um operador de

posição e um de momento.

É conveniente definir versões adimensionais dos operadores $\hat{q}_{\mathbf{k},\sigma}$ e $\hat{p}_{\mathbf{k},\sigma}$, conhecidos como *operadores de quadratura*, como [8, 22]:

$$\hat{X}_{\mathbf{k},\sigma} = \sqrt{\frac{\omega_{\mathbf{k}}}{2\hbar}} \hat{q}_{\mathbf{k},\sigma} = \frac{1}{2}(\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma} + \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger) = \text{Re } \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}, \quad (2.33a)$$

$$\hat{P}_{\mathbf{k},\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_{\mathbf{k}}}} \hat{p}_{\mathbf{k},\sigma} = \frac{1}{2i}(\hat{a}_{\mathbf{k},\sigma} - \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger) = \text{Im } \hat{a}_{\mathbf{k},\sigma}. \quad (2.33b)$$

Das relações de comutação entre $\hat{q}_{\mathbf{k},\sigma}$ e $\hat{p}_{\mathbf{k},\sigma}$ seguem as relações de comutação entre as quadraturas:

$$[\hat{X}_{\mathbf{k},\sigma}, \hat{X}_{\mathbf{k}',\sigma'}] = [\hat{P}_{\mathbf{k},\sigma}, \hat{P}_{\mathbf{k}',\sigma'}] = 0, \quad (2.34a)$$

$$[\hat{X}_{\mathbf{k},\sigma}, \hat{P}_{\mathbf{k}',\sigma'}] = \frac{i}{2} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\sigma\sigma'}. \quad (2.34b)$$

Os operadores $\hat{X}_{\mathbf{k},\sigma}$ e $\hat{P}_{\mathbf{k},\sigma}$ são hermitianos e satisfazem as equações de autovalores

$$\hat{X}_{\mathbf{k},\sigma} |X_{\mathbf{k},\sigma}\rangle = X_{\mathbf{k},\sigma} |X_{\mathbf{k},\sigma}\rangle \quad (2.35)$$

e

$$\hat{P}_{\mathbf{k},\sigma} |P_{\mathbf{k},\sigma}\rangle = P_{\mathbf{k},\sigma} |P_{\mathbf{k},\sigma}\rangle, \quad (2.36)$$

em que os parâmetros $X_{\mathbf{k},\sigma}$ e $P_{\mathbf{k},\sigma}$ são contínuos. Os autovetores $|X_{\mathbf{k},\sigma}\rangle$ são ortogonais e formam um conjunto completo,

$$\langle X_{\mathbf{k},\sigma} | X'_{\mathbf{k},\sigma} \rangle = \delta(X_{\mathbf{k},\sigma} - X'_{\mathbf{k},\sigma}), \quad (2.37a)$$

$$\int dX_{\mathbf{k},\sigma} |X_{\mathbf{k},\sigma}\rangle \langle X_{\mathbf{k},\sigma}| = 1. \quad (2.37b)$$

O mesmo vale para $|P_{\mathbf{k},\sigma}\rangle$,

$$\langle P_{\mathbf{k},\sigma} | P'_{\mathbf{k},\sigma} \rangle = \delta(P_{\mathbf{k},\sigma} - P'_{\mathbf{k},\sigma}), \quad (2.38a)$$

$$\int dP_{\mathbf{k},\sigma} |P_{\mathbf{k},\sigma}\rangle \langle P_{\mathbf{k},\sigma}| = 1. \quad (2.38b)$$

E assim como no caso das partículas sem *spin*, os autovetores $|X_{\mathbf{k},\sigma}\rangle$ e $|P_{\mathbf{k},\sigma}\rangle$

estão relacionados entre si por uma transformada de Fourier:

$$|X_{\mathbf{k},\sigma}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dP_{\mathbf{k},\sigma} e^{-2iP_{\mathbf{k},\sigma}X_{\mathbf{k},\sigma}} |P_{\mathbf{k},\sigma}\rangle, \quad (2.39a)$$

$$|P_{\mathbf{k},\sigma}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dX_{\mathbf{k},\sigma} e^{2iP_{\mathbf{k},\sigma}X_{\mathbf{k},\sigma}} |X_{\mathbf{k},\sigma}\rangle. \quad (2.39b)$$

2.4 SPDC

Conversão paramétrica descendente espontânea, numa tradução livre do nome em inglês *spontaneous parametric down-conversion* (SPDC), é um fenómeno de óptica não linear em que um fóton é convertido em outros dois fótons de menor energia. O principal ingrediente desse processo é um termo proporcional ao cubo do campo elétrico no hamiltoniano de interação. Esse tipo de hamiltoniano ocorre, por exemplo, quando um feixe intenso de luz, em geral um laser, atravessa um cristal de *beta borato de bário*, $\beta\text{-BaB}_2\text{O}_4$, (BBO). De maneira qualitativa, devido à alta intensidade da luz, a polarização elétrica no interior do cristal depende do quadrado do campo elétrico e, portanto, o hamiltoniano de interação, que é proporcional ao produto do campo elétrico com a polarização elétrica, é proporcional ao cubo do campo elétrico. As primeiras observações do SPDC aconteceram no final da década de 1960 [32, 33] e logo em seguida já surgiram trabalhos teóricos sobre o tema [17, 34, 35]. O intervalo de criação dos dois fótons foi outro aspecto explorado, levando a crer que ambos são criados instantaneamente [36–38] e inspirando o nome *fótons gêmeos*, dado aos fótons gerados no SPDC.

Esta seção desenvolve a teoria quântica do SPDC. Não nos aprofundaremos nesse assunto, apenas chegaremos às expressões que serão necessárias no Capítulo 4. Faremos também um rápido comentário sobre variáveis contínuas no contexto de SPDC e discutiremos algumas correlações conhecidas entre os fótons gêmeos.

2.4.1 Breve Descrição Teórica

Para deduzir o hamiltoniano de interação que dá origem ao SPDC seguiremos uma estratégia simples. Primeiro, como esse é um fenômeno óptico que ocorre em cristais não lineares, vamos calcular a energia eletromagnética nesse tipo de sistema. Segundo, como no SPDC ocorre a aniquilação de um fóton e a criação de outros dois, o nosso foco será em termos proporcionais ao produto de um operador de aniquilação com outros dois de criação ($\hat{a}_p \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_i^\dagger$) no hamiltoniano de interação. Isto significa que buscaremos por termos proporcionais ao cubo do campo elétrico na expressão final da energia eletromagnética, dado que ao quantizar o sistema, o campo elétrico é *transformado* num operador e esse operador é, fundamentalmente, a soma de um operador criação com um operador aniquilação.

O vetor polarização elétrica de um meio material é dado, até segunda ordem, por [16]:

$$P_i(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \sum_j \int_0^\infty dt' \chi_{ij}^{(1)}(t') E_j(\mathbf{r}, t - t') + \sum_{j,k} \int_0^\infty dt' \int_0^\infty dt'' \chi_{ijk}^{(2)}(t', t'') E_j(\mathbf{r}, t - t') E_k(\mathbf{r}, t - t''), \quad (2.40)$$

em que $\chi_{ij}^{(1)}$ e $\chi_{ijk}^{(2)}$ são, respectivamente, os *tensores de susceptibilidade elétrica* de primeira e segunda ordem. As somas nos índices j e k varrem as três dimensões espaciais e, daqui em diante, omitiremos o símbolo do somatório deixando implícita a soma quando houver índices repetidos. Levando em conta a presença de um meio material, a energia eletromagnética é escrita como

$$H = \frac{1}{2} \int_v (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dv,$$

com $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ e v o volume do meio. Inserindo a polarização elétrica dado na Eq. (2.40) na expressão anterior, obtemos termos que dependem ou não da susceptibilidade elétrica. O termo que depende da susceptibilidade

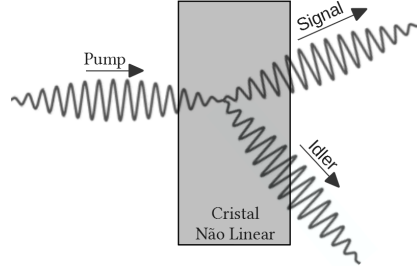


Figura 2.1: Representação esquemática do SPDC.

de segunda ordem, que é o que nos interessa, é dado por:

$$H_I = \frac{1}{2} \int_v d\mathbf{r} \int_0^\infty dt' \int_0^\infty dt'' \chi_{ijk}^{(2)} E_i(\mathbf{r}, t) E_j(\mathbf{r}, t - t') E_k(\mathbf{r}, t - t''). \quad (2.41)$$

O hamiltoniano de interação desejado é obtido da equação anterior trocando os campos elétricos por operadores campo elétrico.

O campo elétrico que aparece na Eq. (2.41) é o campo elétrico total, isto é, a soma do campo elétrico do fóton aniquilado e dos dois fótons criados. O fóton aniquilado é comumente chamado de *pump* [16] e usaremos o índice p quando nos referirmos a ele. Os fótons criados são conhecidos por *signal* e *idler* [16] e serão indicados pelos índices s e i , respectivamente. A Figura 2.1 mostra uma representação desses três fótons. Seguindo a notação acima, o campo elétrico total é escrito como:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_p + \mathbf{E}_s + \mathbf{E}_i.$$

Passaremos agora a trabalhar com o operador campo elétrico para chegar, no final das contas, ao hamiltoniano de interação. Das equações (2.21), (2.22) e (2.23) segue que

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = & \hat{\mathbf{E}}_p^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{E}}_s^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{E}}_i^{(+)}(\mathbf{r}, t) \\ & + \hat{\mathbf{E}}_p^{(-)}(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{E}}_s^{(-)}(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{E}}_i^{(-)}(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (2.42)$$

com

$$\hat{\mathbf{E}}_\alpha^{(+)}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k}_\alpha, \sigma_\alpha} \left(\frac{\omega_\alpha \hbar}{2\varepsilon_0 n_\alpha^2 V} \right)^{1/2} \mathbf{e}_{\mathbf{k}_\alpha, \sigma_\alpha} \hat{a}_{\mathbf{k}_\alpha, \sigma_\alpha} e^{i(\mathbf{k}_\alpha \cdot \mathbf{r} - \omega_\alpha t)} \quad (2.43)$$

e

$$\hat{\mathbf{E}}_\alpha^{(-)}(\mathbf{r}, t) = [\hat{\mathbf{E}}_\alpha^{(+)}(\mathbf{r}, t)]^\dagger. \quad (2.44)$$

Nas duas últimas equações, α toma os valores p , s ou i . Como estamos tratando de meio materiais, apareceu o termo n_α^2 na Eq. (2.43), que é o índice de refração do meio. Além disso, como em geral um material não linear é também *birrefringente*, ω_α e n_α são funções não somente do vetor de onda, mas também da polarização. Se substituirmos a Eq. (2.42), que possui a soma de 6 operadores campo elétrico, na Eq. (2.41), que possui o cubo dessa soma, vamos obter $6 \times 6 \times 6 = 216$ termos, cada um com uma combinação específica de operadores de criação e aniquilação⁶. Essa expansão pode ser simplificada ao notarmos que, para o caso que estamos interessados, alguns desses termos podem ser descartados. Por exemplo, termos proporcionais à $\hat{a}_{\mathbf{k}_p, \sigma_p} \hat{a}_{\mathbf{k}_s, \sigma_s} \hat{a}_{\mathbf{k}_i, \sigma_i}$, que representa a aniquilação dos 3 tipos de fótons (pump, signal e idler), serão desconsiderados⁷. O mesmo vale para a maior parte das combinações possíveis de operadores de criação e aniquilação, exceto pelos termos proporcionais à $\hat{a}_{\mathbf{k}_p, \sigma_p} \hat{a}_{\mathbf{k}_s, \sigma_s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_i, \sigma_i}^\dagger$. Isso reduz para 6 o número final de termos. Fazendo a substituição indicada acima, obtemos o hamiltoniano de interação, que é dado por:

$$\begin{aligned} \hat{H}_I(t) = & \sum_{\mathbf{k}_p, \sigma_p} \sum_{\mathbf{k}_s, \sigma_s} \sum_{\mathbf{k}_i, \sigma_i} \hat{a}_{\mathbf{k}_p, \sigma_p} \hat{a}_{\mathbf{k}_s, \sigma_s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_i, \sigma_i}^\dagger \chi \\ & \times e^{i(\omega_s + \omega_i - \omega_p)t} \int_v d\mathbf{r} e^{-i(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_p) \cdot \mathbf{r}}, \end{aligned} \quad (2.45)$$

⁶A quantidade de termos considerada aqui não leva em conta os somatórios nos índices i , j e k ou nos índices \mathbf{k} e σ .

⁷A remoção desses termos pode parecer artificial à primeira vista. Se olharmos para esse sistema do ponto de vista energético, porém, vemos que apenas algumas combinações de criação e aniquilação de fato podem ocorrer. Além disso, como o nosso foco é o SPDC, apenas termos compatíveis com a aniquilação de um fóton pump e a criação de um fóton signal e um fóton idler serão relevantes.

em que χ contém os 6 termos distintos que estão multiplicando os operadores de criação e aniquilação, incluindo as constantes vindas da quantização do campo elétrico e as integrais nas variáveis dt' e dt'' . Explicitamente,

$$\begin{aligned} \chi = & -\frac{i}{2} \left(\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V} \right)^{3/2} \left(\frac{\omega_p \omega_s \omega_i}{n_p^2 n_s^2 n_i^2} \right)^{1/2} \int_0^\infty dt' \int_0^\infty dt'' \chi_{ijk}^{(2)}(t', t'') \\ & \times \left[(\mathbf{e}_{\mathbf{k}_p, \sigma_p})_i (\mathbf{e}_{\mathbf{k}_s, \sigma_s})_j^* (\mathbf{e}_{\mathbf{k}_i, \sigma_i})_k^* e^{-i(\omega_s t' + \omega_i t'')} \right. \\ & + (\mathbf{e}_{\mathbf{k}_p, \sigma_p})_i (\mathbf{e}_{\mathbf{k}_s, \sigma_s})_k^* (\mathbf{e}_{\mathbf{k}_i, \sigma_i})_j^* e^{-i(\omega_i t' + \omega_s t'')} \\ & + (\mathbf{e}_{\mathbf{k}_p, \sigma_p})_j (\mathbf{e}_{\mathbf{k}_s, \sigma_s})_k^* (\mathbf{e}_{\mathbf{k}_i, \sigma_i})_i^* e^{-i(-\omega_p t' + \omega_s t'')} \\ & + (\mathbf{e}_{\mathbf{k}_p, \sigma_p})_j (\mathbf{e}_{\mathbf{k}_s, \sigma_s})_i^* (\mathbf{e}_{\mathbf{k}_i, \sigma_i})_k^* e^{-i(-\omega_p t' + \omega_i t'')} \\ & + (\mathbf{e}_{\mathbf{k}_p, \sigma_p})_k (\mathbf{e}_{\mathbf{k}_s, \sigma_s})_i^* (\mathbf{e}_{\mathbf{k}_i, \sigma_i})_j^* e^{-i(\omega_i t' - \omega_p t'')} \\ & \left. + (\mathbf{e}_{\mathbf{k}_p, \sigma_p})_k (\mathbf{e}_{\mathbf{k}_s, \sigma_s})_j^* (\mathbf{e}_{\mathbf{k}_i, \sigma_i})_i^* e^{-i(\omega_s t' - \omega_p t'')} \right]. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Seja $|\psi(0)\rangle$ o estado inicial do sistema, que podemos assumir como sendo o vácuo. O estado do sistema num tempo t posterior pode ser calculado com o operador evolução temporal,

$$\hat{U}(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t \hat{H}_i(\tau) d\tau\right),$$

dado aproximadamente por [16]:

$$\begin{aligned} \hat{U}(t) &= 1 - \frac{i}{\hbar} \int_0^t \hat{H}_i(\tau) d\tau \\ &= 1 - \frac{it}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}_p, \sigma_p} \sum_{\mathbf{k}_s, \sigma_s} \sum_{\mathbf{k}_i, \sigma_i} \hat{a}_{\mathbf{k}_p, \sigma_p} \hat{a}_{\mathbf{k}_s, \sigma_s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_i, \sigma_i}^\dagger \chi \\ &\quad \times e^{i(\omega_s + \omega_i - \omega_p)t/2} \text{sinc}[(\omega_s + \omega_i - \omega_p)t/2] \int_v d\mathbf{r} e^{-i(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_p) \cdot \mathbf{r}}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

em que $\text{sinc}(x) = \text{sen}(x)/x$. Para fazer a integração no volume $v = l_x \times l_y \times L$, consideramos que o cristal está disposto em relação aos eixo coordenados como indicado na Figura 2.2. O resultado encontrado é:

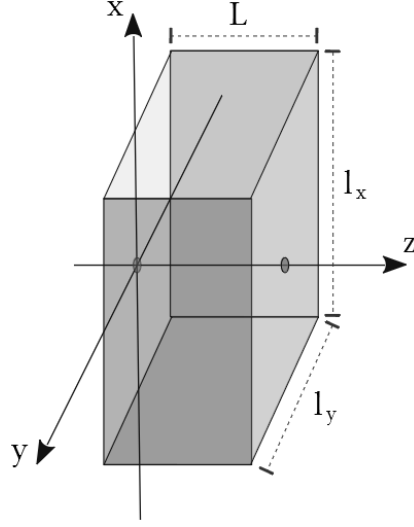


Figura 2.2: Volume de integração.

$$\begin{aligned}
\int_v d\mathbf{r} e^{-i(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_p) \cdot \mathbf{r}} &= v e^{-i(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_p)_z L/2} \text{sinc}[(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_p)_z L/2] \\
&\times \text{sinc}[(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_p)_x l_x/2] \\
&\times \text{sinc}[(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_p)_y l_y/2].
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Aplicando o operador $\hat{U}(t)$ dado na Eq. (2.47) no estado $|\psi(0)\rangle = |\text{v\u00e1cuo}\rangle$ obtemos o estado evolu\u00eddo:

$$\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle &= \hat{U}(t) |\text{v\u00e1cuo}\rangle \\
&= |\text{v\u00e1cuo}\rangle - \frac{ivt}{\hbar} \sum_{\mathbf{k}_p, \sigma_p} \sum_{\mathbf{k}_s, \sigma_s} \sum_{\mathbf{k}_i, \sigma_i} v_p(\mathbf{k}_p, \sigma_p) |\mathbf{k}_s, \sigma_s\rangle |\mathbf{k}_i, \sigma_i\rangle \chi \\
&\times e^{i(\omega_s + \omega_i - \omega_p)t/2} \text{sinc}[(\omega_s + \omega_i - \omega_p)t/2] \\
&\times e^{-i(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_p)_z L/2} \text{sinc}[(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_p)_z L/2] \\
&\times \text{sinc}[(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_p)_x l_x/2] \\
&\times \text{sinc}[(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_p)_y l_y/2].
\end{aligned} \tag{2.49}$$

O estado dado pela equa\u00e7\u00e3o anterior exhibe os f\u00f3tons signal e idler, denotados respectivamente por $|\mathbf{k}_s, \sigma_s\rangle$ e $|\mathbf{k}_i, \sigma_i\rangle$, criados durante o SPDC. Considerando que os f\u00f3tons pump v\u00eam de uma fonte constante e que o SPDC reduz muito

pouco a intensidade desses fótons, podemos resumir dinâmica de fótons pump numa amplitude clássica (*espectro angular*) $v_p(\mathbf{k}_p, \sigma_p)$ [16]. Ao considerar ainda outras aproximações [16] e convencionando que o feixe de fótons pump se propaga ao longo do eixo z (ver Figura 2.2), é possível reescrever o estado dado na Eq. (2.49) como:

$$|\psi(t)\rangle = |\text{v\u00e1cuo}\rangle + \sum_{\sigma_s, \sigma_i} \int d\mathbf{q}_s \int d\mathbf{q}_i C_{\sigma_s, \sigma_i}(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) |\mathbf{q}_s, \sigma_s\rangle |\mathbf{q}_i, \sigma_i\rangle \times v_p(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i) \text{sinc}[(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_p)_z L/2], \quad (2.50)$$

em que \mathbf{q}_α \u00e9 a componente xy do vetor de onda \mathbf{k}_α ($\alpha = s, i$) e $|\mathbf{q}_\alpha, \sigma_\alpha\rangle$ \u00e9 o estado de um f\u00f3ton α definido pela componente transversal \mathbf{q}_α e pela polariza\u00e7\u00e3o σ_α . As integra\u00e7\u00f5es nas vari\u00e1veis $d\mathbf{q}_s$ e $d\mathbf{q}_i$ cobrem, seguindo as aproxima\u00e7\u00f5es adotadas, todo o plano xy .

Al\u00e9m das aproxima\u00e7\u00f5es j\u00e1 adotadas, estamos considerando que o meio onde ocorre o SPDC \u00e9 um *crystal birrefringente uniaxial*. Esse tipo de cristal possui propriedades \u00f3pticas sim\u00e9tricas em rela\u00e7\u00e3o \u00e0 um eixo fixo (*eixo \u00f3ptico*). Luz com polariza\u00e7\u00e3o perpendicular \u00e0 esse eixo \u00e9 dita *ordin\u00e1ria* e tem o \u00edndice de refra\u00e7\u00e3o *ordin\u00e1rio* n_o . E luz com polariza\u00e7\u00e3o perpendicular ao vetor de polariza\u00e7\u00e3o ordin\u00e1rio \u00e9 dita *extraordin\u00e1ria*, possuindo o \u00edndice de refra\u00e7\u00e3o *extraordin\u00e1rio* n_e [39]. Considere, por exemplo, a Figura 2.2. Se o eixo \u00f3tico est\u00e1 disposto ao longo do plano xz e um feixe de luz atravessa o meio seguindo a dire\u00e7\u00e3o z , ent\u00e3o o vetor de polariza\u00e7\u00e3o ordin\u00e1rio \u00e9 o versor \hat{y} e o vetor de polariza\u00e7\u00e3o extraordin\u00e1rio \u00e9 o versor \hat{x} . O cristal BBO, por exemplo, tem a estrutura cristalina *trigonal* e portanto \u00e9 um cristal birrefringente uniaxial [40]. O seu \u00edndice de refra\u00e7\u00e3o ordin\u00e1rio e extraordin\u00e1rio dependem do comprimento de onda da luz incidente, como indicado na Tabela 2.4.1 [40]. Esse cristal \u00e9 amplamente usado em esquemas que usam o SPDC. Outro exemplo de cristal usado para obter o SPDC \u00e9 o *fosfato de titanil pot\u00e1ssio*, $KTiOPO_4$, (KTP), que \u00e9 um cristal biaxial com estrutura cristalina ortorr\u00f4mbica [41].

No Cap\u00edtulo 4 estaremos interessados em SPDC com *correspond\u00eancia de fase do tipo I*, em que os f\u00f3tons pump t\u00eam *polariza\u00e7\u00e3o extraordin\u00e1ria*

| $\lambda(nm)$ | n_o | n_e |
|---------------|---------|---------|
| 1079.0 | 1.656 | 1.542 |
| 1064.2 | 1.65510 | 1.54254 |
| 632.8 | 1.6673 | 1.5500 |
| 589.3 | 1.6698 | 1.5518 |
| 546.1 | 1.6730 | 1.5539 |
| 532.1 | 1.67493 | 1.55552 |
| 486.1 | 1.6792 | 1.5583 |
| 435.8 | 1.6856 | 1.5631 |
| 354.1 | 1.70556 | 1.57757 |
| 266.0 | 1.75707 | 1.61461 |
| 212.8 | 1.84707 | 1.67467 |

Tabela 2.1: Índice de refração do cristal BBO.

e os fótons gêmeos têm, ambos, *polarização ordinária*. Isso garante que os fótons signal e idler estejam num estado de polarização separável e é fazível experimentalmente com o uso de *filtros espectrais* e uma configuração adequada do cristal não linear [18]. Usando uma fonte monocromática de fótons pump e considerando correspondência de fase do tipo I, é possível reescrever (2.50) como [16]:

$$\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle &= C_1 |\text{v\u00e1cuo}\rangle \\
&+ C_2 \int d\mathbf{q}_s \int d\mathbf{q}_i v_p(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i) \gamma(\mathbf{q}_s - \mathbf{q}_i) |\mathbf{q}_s\rangle |\mathbf{q}_i\rangle,
\end{aligned} \tag{2.51}$$

em que C_1 e C_2 s\u00e3o constantes e $\gamma(\mathbf{q}) = \sqrt{2L/\pi^2 K} \text{sinc}(Lq^2/4K)$, $K = |\mathbf{k}_p|$ no interior do cristal. As somas sobre as polariza\u00e7\u00f5es σ_s e σ_i s\u00e3o n\u00e3o nulas somente se $\sigma_s = \sigma_i = o$, o indicando a polariza\u00e7\u00e3o ordin\u00e1ria, de modo que a notaa\u00e7\u00e3o dos *kets* foi simplificada.

Para chegar na Eq. (2.51), consideramos que vale a *aproxima\u00e7\u00e3o paraxial* [16], isto \u00e9, que a componente transversal \mathbf{q} \u00e9 muito menor que o pr\u00f3prio vetor de onda \mathbf{k} ,

$$|\mathbf{k}| \gg |\mathbf{q}|.$$

Essa aproxima\u00e7\u00e3o \u00e9 automaticamente satisfeita para os f\u00f3tons pump, j\u00e1 que eles viajam na dire\u00e7\u00e3o z . Para os f\u00f3tons signal e idler essa aproxima\u00e7\u00e3o

implica a *aproximação de Fresnel*,

$$k_z = \sqrt{\mathbf{k}^2 - \mathbf{q}^2} \approx k \left(1 - \frac{q^2}{2k^2} \right). \quad (2.52)$$

A aproximação paraxial pode ser usada também para tratar da evolução do espectro angular v_p ao longo do eixo z . A amplitude de onda monocromática que se propaga próxima ao eixo z ,

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r})e^{i(kz - \omega t)},$$

satisfaz a *Equação Paraxial de Helmholtz* [16],

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right) u(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.53)$$

Essa equação é análoga à *Equação de Schrödinger*, com a propagação ao longo de z fazendo o papel de evolução temporal [16]. As soluções da Equação Paraxial de Helmholtz são da forma [42]

$$u(\boldsymbol{\rho}, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{q} v_p(\mathbf{q}, z) e^{i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho}}, \quad (2.54)$$

e o espectro angular v_p é dado por:

$$v_p(\mathbf{q}, z) = \int d\boldsymbol{\rho} u(\boldsymbol{\rho}, z) e^{-i\mathbf{q}\boldsymbol{\rho}}. \quad (2.55)$$

Por fim,

$$v_p(\mathbf{q}, z) = v_p(\mathbf{q}, 0) e^{ik_z z},$$

ou, usando a Eq. (2.52),

$$v_p(\mathbf{q}, z) \approx v_p(\mathbf{q}, 0) e^{ikz(1 - q^2/2k^2)}. \quad (2.56)$$

O estado dado pela Eq. (2.51) será o ponto de partida do Capítulo 4, cujo tema é o emaranhamento de um sistema tripartido de fótons e de um sistema quadripartido de fótons.

2.4.2 Variáveis Contínuas e SPDC

Considere (2.51) com $C_1 = 0$. A função de onda desse estado no espaço dos vetores transversais \mathbf{q} é

$$\begin{aligned}\Psi(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i) &= \langle \mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i | \psi(t) \rangle \\ &= C_2 \int d\mathbf{q}'_s \int d\mathbf{q}'_i v_p(\mathbf{q}'_s + \mathbf{q}'_i) \gamma(\mathbf{q}'_s - \mathbf{q}'_i) \langle \mathbf{q}_s | \mathbf{q}'_s \rangle \langle \mathbf{q}_i | \mathbf{q}'_i \rangle \\ &= C_2 v_p(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i) \gamma(\mathbf{q}_s - \mathbf{q}_i).\end{aligned}\quad (2.57)$$

A constante C_2 é tal que a função de onda $\Psi(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i)$ está normalizada. A variável transversal \mathbf{q} está relacionada ao momento (transversal) \mathbf{p} do fóton via $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{q}$ [16]. A variável \mathbf{p} é análoga ao momento de uma partícula sem spin, aborda na Seção 2.3. Segue que a função de onda no espaço de posição é dada por uma transformada de Fourier de $\Psi(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i)$:

$$\Phi(\boldsymbol{\rho}_s, \boldsymbol{\rho}_i) = C_3 \int d\mathbf{q}_s \int d\mathbf{q}_i e^{i(\mathbf{q}_s \cdot \boldsymbol{\rho}_s + \mathbf{q}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i)} \Psi(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i).$$

Assim como ocorreu com $\Psi(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_i)$, C_3 é uma constante tal que a função de onda $\Phi(\boldsymbol{\rho}_s, \boldsymbol{\rho}_i)$ está normalizada. A variável $\boldsymbol{\rho}$ é análoga à posição de uma partícula sem spin, também aborda na Seção 2.3. Daqui em diante, usaremos o nome *variáveis espaciais* quando estivermos falando das variáveis \mathbf{q} e $\boldsymbol{\rho}$.

2.4.3 Correlações Entre Fótons Gêmeos

Intuitivamente, é de se esperar que os fótons gêmeos sejam criados numa mesma posição e que, pela conservação de momento linear, seus momentos transversais sejam opostos, $\mathbf{q}_s = -\mathbf{q}_i$, já que $\mathbf{q}_p = (\mathbf{k}_p)_{xy} = 0$. Isso de fato ocorre e pode ser verificado usando *medições de coincidência do campo próximo* e do *campo distante* desses fótons gêmeos [16]. Esse tipo de correlação ocorre também no *mundo clássico*, devido à *localidade* e à *conservação de momento*.

Dois experimentos reportados em 2004 mostraram que a correlação entre as variáveis espaciais de fótons gêmeos é ainda mais profunda [43, 44]. Viando critérios de separabilidade clássica, esses dois trabalhos verificaram

que os fótons gêmeos têm as variáveis espaciais emaranhadas.

Um segundo tipo de correlação entre fótons gêmeos ocorre em SPDC com *correspondência de fase do tipo II*, em que um fóton pump com polarização extraordinária dá origem a um fóton com polarização ordinária e outro com polarização extraordinária. Sob determinadas condições, o estado produzido nesse SPDC é dado por [16]:

$$|\psi(t)\rangle = C_1 |\text{v\u00e1cuo}\rangle + C_2 \int d\mathbf{q}_s \int d\mathbf{q}_i v_p(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i) (|\mathbf{q}_s, o\rangle |\mathbf{q}_i, e\rangle + |\mathbf{q}_s, e\rangle |\mathbf{q}_i, o\rangle), \quad (2.58)$$

em que os rótulos o e e indicam polarização ordin\u00e1ria e extraordin\u00e1ria, respectivamente. O estado (2.58) \u00e9 emaranhado quanto \u00e0 vari\u00e1vel discreta polariza\u00e7\u00e3o e \u00e9, de certa forma, um estado de Bell como aqueles apresentados na Se\u00e7\u00e3o 2.1. Usando esse tipo de SPDC, *divisores de feixes*, *lentes* e outros dispositivos \u00f3pticos em cascata, um grupo chin\u00eas obteve em 2016 um estado com 10 f\u00f3tons emaranhados e espacialmente separados [20]:

$$|GHZ\rangle = \frac{|o\rangle^{\otimes 10} + |e\rangle^{\otimes 10}}{\sqrt{2}}. \quad (2.59)$$

A estrat\u00e9gia usada por esse grupo foi combinar, usando um divisor de feixes, dois estados emaranhados, um com m partes e outro com n partes, e obter da\u00ed um terceiro estado emaranhado com $k > m + n$ partes.

Capítulo 3

Caracterização de Emaranhamento

Dados um sistema quântico qualquer, como podemos verificar se esse sistema está ou não emaranhado? Essa pergunta não tem uma resposta simples, dado a variedade de sistemas quânticos possíveis. Mesmo em sistemas bipartido ou tripartido não existe uma única resposta ou, as vezes, sequer existe uma resposta [14]. Um ponto interessante é que muitos critérios usados para responder a pergunta acima, dão apenas metade da resposta. Um exemplo disso são os critérios descritos nas Seções **3.2** e **3.3**, que podem confirmar que um estado é emaranhado, mas não podem confirmar que um estado é totalmente separável.

A primeira seção deste capítulo dá dois exemplos de critérios de emaranhamento, sem se preocupar em desenvolvê-los detalhadamente. A ideia é simplesmente introduzir o tema. A segunda seção traz outro exemplo, voltado para variáveis contínuas, que agora é mais bem trabalhado e que servirá de base para o critério descrito na Seção **3.3**. Na última seção descrevemos um critério de emaranhamento em variável contínua para sistemas tripartido. Esse critério será usado no Capítulo 4 para verificar o emaranhamento nas variáveis espaciais dos estados de fótons obtidos naquele capítulo.

3.1 Exemplos Iniciais

Talvez a forma mais direta de verificar se um estado quântico é emaranhado é através da sua *Decomposição de Schmidt* [6,14]. Entretanto, existem dois problemas. O primeiro é que, para sistemas com três ou mais partes, de forma geral, achar tal decomposição não é simples. Inclusive existem sistemas com três ou mais partes que não possuem decomposição de Schmidt [14]. O segundo problema é que, mesmo para sistemas bipartidos, em geral é uma tarefa difícil encontrar a Decomposição de Schmidt. Para sistemas bipartido com espectro discreto e finito, a Decomposição de Schmidt decorre da *decomposição em valores singulares* [14]. Mais precisamente, seja $|\Psi_{12}\rangle$ um estado bipartido e sejam $|\psi_{i,1}\rangle$ e $|\psi_{j,2}\rangle$ vetores de estado do subsistema 1 e 2, respectivamente. Os índices i e j percorrem um conjunto discreto e finito de valores. Se esses vetores de estado formam, cada um em seu respectivo subsistema, uma base, então podemos escrever $|\Psi_{12}\rangle$ como:

$$|\Psi_{12}\rangle = \sum_i \sum_j c_{ij} |\psi_{i,1}\rangle |\psi_{j,2}\rangle, \quad (3.1)$$

em que c_{ij} são constantes complexas. Encarando essa constante como entradas de uma matriz e aplicando a decomposição de valores singulares nessa matriz obtemos a Decomposição de Schmidt:

$$|\Psi_{12}\rangle = \sum_k c_k |\phi_{k,1}\rangle |\phi_{k,2}\rangle. \quad (3.2)$$

Mais que isso, c_k são constantes reais satisfazendo $\sum_k c_k^2 = 1$ e os vetores $|\phi_{i,1}\rangle$ e $|\phi_{j,2}\rangle$ são, cada um em seu subsistema, ortonormais.

A quantidade de coeficiente c_k não nulos em (3.2) é chamada de *número de Schmidt* do estado $|\Psi_{12}\rangle$. O número de Schmidt indica se o estado $|\Psi_{12}\rangle$ é emaranhado ou não. Se o número de Schmidt é 1, então $|\Psi_{12}\rangle = |\phi_{1,1}\rangle |\phi_{1,2}\rangle$ é um estado separável. Por outro lado, se o número de Schmidt for maior que 1, então

$$|\Psi_{12}\rangle = c_1 |\phi_{1,1}\rangle |\phi_{1,2}\rangle + \cdots + c_n |\phi_{n,1}\rangle |\phi_{n,2}\rangle,$$

para algum $n > 1$, e o estado $|\Psi_{12}\rangle$ é emaranhado. Assim, se tivermos a decomposição de Schmidt de um estado, verificar se ele é ou não emaranhado é uma simples questão de inspeção.

Outro método de caracterização de emaranhamento é baseado na positividade do operador densidade, mais especificamente na sua transposta parcial [11]. Seja ρ o operador densidade de um sistema bipartido com espectro discreto e finito. Fixado uma base em cada subsistema, podemos escrever ρ como

$$\rho = \sum_{i,j} \sum_{k,l} \rho_{ij,kl} |i\rangle \langle j| \otimes |k\rangle \langle l|. \quad (3.3)$$

Definimos a transposta parcial de ρ com respeito ao primeiro subsistema como sendo

$$\rho^{T_1} = \sum_{i,j} \sum_{k,l} \rho_{ji,kl} |i\rangle \langle j| \otimes |k\rangle \langle l|, \quad (3.4)$$

e de maneira análoga podemos definir ρ^{T_2} . O *critério PPT* (transposta parcial positiva) afirma que se ρ é um estado separável, então sua transposta parcial (ρ^{T_1} ou ρ^{T_2}) é positiva. Esse critério vale também para sistemas bipartido com espectro contínuo [12]. De modo geral, esse critério é apenas uma condição necessária para que um estado bipartido seja separável. Assim, nem todo estado com transposta parcial positiva é separável, mas todo estado com transposta parcial não positiva é emaranhado.

3.2 Emaranhamento Bipartido

Nesta seção vamos apresentar um critério de emaranhamento em variáveis contínuas para sistemas bipartido. A ideia geral é chegar numa desigualdade satisfeita por qualquer sistema bipartido separável. Segue então que qualquer sistema que não satisfizer tal desigualdade está emaranhado [10].

Seja ρ o operador densidade de um sistema bipartido, como aquele dado pela Eq. (2.7). Vamos supor que esse sistema é separável, de modo que ρ é da forma

$$\rho = \sum_i p_i \rho_{i,1} \otimes \rho_{i,2}. \quad (3.5)$$

Sejam \hat{x}_k e \hat{p}_k operadores do subsistema k que satisfazem as seguintes relações de comutação:

$$[\hat{x}_k, \hat{x}_{k'}] = [\hat{p}_k, \hat{p}_{k'}] = 0, \quad (3.6a)$$

$$[\hat{x}_k, \hat{p}_{k'}] = i\delta_{kk'}. \quad (3.6b)$$

Note que k e k' indicam agora as diferentes partes do sistema bipartido. Em particular, esses índices tomam os valores 1 e 2. Considere os operadores

$$\hat{u} = h_1\hat{x}_1 + h_2\hat{x}_2, \quad (3.7a)$$

$$\hat{v} = g_1\hat{p}_1 + g_2\hat{p}_2. \quad (3.7b)$$

A soma das variâncias de \hat{u} e \hat{v} no estado ρ pode ser usada para derivar uma condição necessária para que ρ seja de fato um estado separável.

Considere então a soma das variâncias de \hat{u} e \hat{v} ,

$$\begin{aligned} \langle(\Delta\hat{u})^2\rangle_\rho + \langle(\Delta\hat{v})^2\rangle_\rho &= \sum_i p_i (\langle\hat{u}^2\rangle_i + \langle\hat{v}^2\rangle_i) - \langle\hat{u}\rangle_\rho^2 - \langle\hat{v}\rangle_\rho^2 \\ &= \sum_i p_i [h_1^2 \langle(\Delta\hat{x}_1)^2\rangle_i + h_2^2 \langle(\Delta\hat{x}_2)^2\rangle_i \\ &\quad + g_1^2 \langle(\Delta\hat{p}_1)^2\rangle_i + g_2^2 \langle(\Delta\hat{p}_2)^2\rangle_i] \\ &\quad + 2h_1h_2 \sum_i p_i (\langle\hat{x}_1\hat{x}_2\rangle_i - \langle\hat{x}_1\rangle_i \langle\hat{x}_2\rangle_i) \\ &\quad + 2g_1g_2 \sum_i p_i (\langle\hat{p}_1\hat{p}_2\rangle_i - \langle\hat{p}_1\rangle_i \langle\hat{p}_2\rangle_i) \\ &\quad + \sum_i p_i (\langle\hat{u}\rangle_i^2 + \langle\hat{v}\rangle_i^2) - \left(\sum_i p_i \langle\hat{u}\rangle_i\right)^2 - \left(\sum_i p_i \langle\hat{v}\rangle_i\right)^2, \end{aligned}$$

em que $\langle\cdot\rangle_i$ e $\langle(\Delta\cdot)^2\rangle_i$ significa, respectivamente, valor esperado e variância no estado $\rho_{i,1} \otimes \rho_{i,2}$ (ou no próprio estado ρ quando aparece $\langle\cdot\rangle_\rho$ ou $\langle(\Delta\cdot)^2\rangle_\rho$). Como ρ é separável, segue que $\langle\hat{x}_1\hat{x}_2\rangle_i = \langle\hat{x}_1\rangle_i \langle\hat{x}_2\rangle_i$ e $\langle\hat{p}_1\hat{p}_2\rangle_i = \langle\hat{p}_1\rangle_i \langle\hat{p}_2\rangle_i$, de modo que as duas linhas intermediárias do último termo da equação anterior se anulam. A última linha é não negativa, devido à *Desigualdade de Cauchy-Schwarz*, $\sum_i p_i \langle\hat{u}\rangle_i^2 \geq (\sum_i p_i \langle\hat{u}\rangle_i)^2$ e de modo análogo para \hat{v} . Por fim, dado

a relação de incerteza [45]

$$\langle(\Delta\hat{A})^2\rangle + \langle(\Delta\hat{B})^2\rangle \geq \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|, \quad (3.8)$$

e a regra de comutação (3.6), segue que

$$\langle(\Delta\hat{u})^2\rangle_\rho + \langle(\Delta\hat{v})^2\rangle_\rho \geq |h_1g_1| + |h_2g_2|. \quad (3.9)$$

Ao deduzir a Desigualdade (3.9) supomos que ρ fosse separável. A sua violação implica que o estado onde se calculou a variância de \hat{u} e \hat{v} é emaranhado. Note que a conclusão inversa não é válida, isto é, se a desigualdade for satisfeita, ρ não é necessariamente um estado separável.

3.3 Emaranhamento Tripartido

O emaranhamento tripartido apresenta algumas sutilidades a mais e o tratamento que daremos aqui, que é devido à *van Loock* e *Furusawa* [9], incorpora naturalmente tais sutilidades.

Seja ρ o operador densidade de um sistema tripartido bisseparável,

$$\rho = \sum_i p_i \rho_{i,km} \otimes \rho_{i,n}, \quad (3.10)$$

em que (k, m, n) é alguma permutação fixa de $(1, 2, 3)$. Estamos usando novamente a notação adotada na Seção 2.1. Relembrando, as partes k e m podem estar emaranhadas ou não, mas a parte n não está emaranhada com a parte k ou com a parte m . Seguindo o desenvolvimento anterior, definimos ainda os operadores \hat{u} e \hat{v} como:

$$\hat{u} = h_k \hat{x}_k + h_m \hat{x}_m + h_n \hat{x}_n, \quad (3.11a)$$

$$\hat{v} = g_k \hat{p}_k + g_m \hat{p}_m + g_n \hat{p}_n. \quad (3.11b)$$

Os operadores \hat{x} e \hat{p} satisfazem relações de comutação semelhantes àsquelas da Eq. (3.6). Novamente vamos deduzir uma desigualdade para a soma das

variâncias de \hat{u} e \hat{v} .

Temos que

$$\begin{aligned}
 \langle (\Delta \hat{u})^2 \rangle_\rho + \langle (\Delta \hat{v})^2 \rangle_\rho &= \sum_i p_i (\langle \hat{u}^2 \rangle_i + \langle \hat{v}^2 \rangle_i) - \langle \hat{u} \rangle_\rho^2 - \langle \hat{v} \rangle_\rho^2 \\
 &= \sum_i p_i [h_k^2 \langle (\Delta \hat{x}_k)^2 \rangle_i + h_m^2 \langle (\Delta \hat{x}_m)^2 \rangle_i + h_n^2 \langle (\Delta \hat{x}_n)^2 \rangle_i \\
 &\quad + g_k^2 \langle (\Delta \hat{p}_k)^2 \rangle_i + g_m^2 \langle (\Delta \hat{p}_m)^2 \rangle_i + g_n^2 \langle (\Delta \hat{p}_n)^2 \rangle_i] \\
 &\quad + 2h_k h_m \Delta_{km}^{(\hat{x})} + 2h_k h_n \Delta_{kn}^{(\hat{x})} + 2h_m h_n \Delta_{mn}^{(\hat{x})} \\
 &\quad + 2g_k g_m \Delta_{km}^{(\hat{p})} + 2g_k g_n \Delta_{kn}^{(\hat{p})} + 2g_m g_n \Delta_{mn}^{(\hat{p})} \\
 &\quad + \sum_i p_i (\langle \hat{u} \rangle_i^2 + \langle \hat{v} \rangle_i^2) - \left(\sum_i p_i \langle \hat{u} \rangle_i \right)^2 - \left(\sum_i p_i \langle \hat{v} \rangle_i \right)^2.
 \end{aligned}$$

Na dedução acima, $\Delta_{ab}^{(\hat{x})} = \sum_i p_i (\langle \hat{x}_a \hat{x}_b \rangle_i - \langle \hat{x}_a \rangle_i \langle \hat{x}_b \rangle_i)$, a, b tomando os valores k, m ou n . Uma expressão equivalente vale para $\Delta_{ab}^{(\hat{p})}$. Como a parte n não está emaranhada com a parte k ou com a parte m , segue que as quantidades $\Delta_{kn}^{(\hat{x})}$, $\Delta_{mn}^{(\hat{x})}$, $\Delta_{kn}^{(\hat{p})}$ e $\Delta_{mn}^{(\hat{p})}$ são todas nulas. Aplicando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz concluímos que:

$$\begin{aligned}
 \langle (\Delta \hat{u})^2 \rangle_\rho + \langle (\Delta \hat{v})^2 \rangle_\rho &\geq \sum_i p_i [h_k^2 \langle (\Delta \hat{x}_k)^2 \rangle_i + h_m^2 \langle (\Delta \hat{x}_m)^2 \rangle_i + h_n^2 \langle (\Delta \hat{x}_n)^2 \rangle_i \\
 &\quad + g_k^2 \langle (\Delta \hat{p}_k)^2 \rangle_i + g_m^2 \langle (\Delta \hat{p}_m)^2 \rangle_i + g_n^2 \langle (\Delta \hat{p}_n)^2 \rangle_i] \\
 &\quad + 2h_k h_m \Delta_{km}^{(\hat{x})} + 2g_k g_m \Delta_{km}^{(\hat{p})} \\
 &= \sum_i p_i \left\{ \langle [\Delta(h_k \hat{x}_k + h_m \hat{x}_m)]^2 \rangle_i + \langle [\Delta(g_k \hat{p}_k + g_m \hat{p}_m)]^2 \rangle_i \right. \\
 &\quad \left. + \langle [\Delta(h_n \hat{x}_n)]^2 \rangle_i + \langle [\Delta(g_n \hat{p}_n)]^2 \rangle_i \right\}.
 \end{aligned}$$

Finalmente, aplicando a relação de incerteza (3.8), concluímos que

$$\langle (\Delta \hat{u})^2 \rangle_\rho + \langle (\Delta \hat{v})^2 \rangle_\rho \geq |h_k g_k + h_m g_m| + |h_n g_n|. \quad (3.12)$$

Um estado ρ que não satisfaz (3.12) não tem, portanto, a parte n separada da parte k ou m . Explorando as permutações de (k, m, n) podemos concluir critérios de separabilidade distintos para ρ . Novamente o inverso não vale,

ou seja, um estado ρ que satisfaz a condição acima não necessariamente tem a parte n separada da parte k e m .

Para exemplificar esse critério de emaranhamento, considere \hat{u}_0 e \hat{v}_0 definidos por:

$$\hat{u}_0 = \hat{x}_1 - \hat{x}_3, \quad (3.13a)$$

$$\hat{v}_0 = \hat{p}_1 + \hat{p}_2 + \hat{p}_3, \quad (3.13b)$$

de modo que $(h_1, h_2, h_3) = (1, 0, -1)$ e $(g_1, g_2, g_3) = (1, 1, 1)$. Então,

$$|h_1 g_1 + h_3 g_3| + |h_2 g_2| = 0, \quad (i)$$

$$|h_2 g_2 + h_3 g_3| + |h_1 g_1| = 2, \quad (ii)$$

$$|h_1 g_1 + h_2 g_2| + |h_3 g_3| = 2. \quad (iii)$$

Como a variância é estritamente positiva, $\langle(\Delta\hat{u}_0)^2\rangle_\rho + \langle(\Delta\hat{v}_0)^2\rangle_\rho \geq 0$ e a condição que decorre de (i) é automaticamente satisfeita. Porém, se a soma das variâncias de \hat{u}_0 e \hat{v}_0 for estritamente menor que 2, então as desigualdades que decorrem de (ii) e (iii) não são satisfeitas. Nesse caso concluímos que a parte 1 não está separada ou da parte 2, ou da parte 3, ou de ambas partes, de forma que não podemos escrever

$$\rho = \sum_i p_i \rho_{i,23} \otimes \rho_{i,1}.$$

Concluímos também que a parte 3 não está separada da ou parte 1, ou da parte 2, ou de ambas partes, de forma que também não podemos escrever

$$\rho = \sum_i p_i \rho_{i,12} \otimes \rho_{i,3}.$$

Esse exemplo é particularmente interessante pois quando a soma de variâncias é menor que 2, eliminamos duas formas possíveis de escrever ρ . Note que se ρ for totalmente separável, então poderíamos escrevê-lo nas duas formas anteriores, de modo que também eliminamos essa possibilidade quando o critério de van Loock-Furusawa não for satisfeito.

Capítulo 4

Sistemas Tripartido e Quadripartido de Fótons

Na Seção **2.4.3** vimos que as variáveis espaciais de fótons gêmeos são emaranhadas. Esse emaranhamento bipartido já é o suficiente para a realização de algumas rotinas de computação e informação quântica, como o teletransporte quântico (em variáveis contínuas) [19]. Para alcançar protocolos mais gerais e robustos, como a *fatoração de Shor*, a *correção quântica de erros* e a *computação quântica universal*, o número de partes emaranhadas tem que ser maior [6].

Uma forma de obter emaranhamento em variáveis contínuas num sistema com $n > 2$ partes é procurar por eles na natureza. Outra forma é produzi-los com o uso de *ingredientes mais básicos* e que já sabemos manipular, como fótons gêmeos e divisores de feixes, seguindo uma estratégia similar àquela comentada na Seção **2.4.3** quando falamos dos 10 fótons com a polarização emaranhada. Vamos, ao longo deste capítulo, aplicar esse segundo método para obter um sistema tripartido e um sistema quadripartido de fótons, ambos com as variáveis espaciais possivelmente emaranhadas.

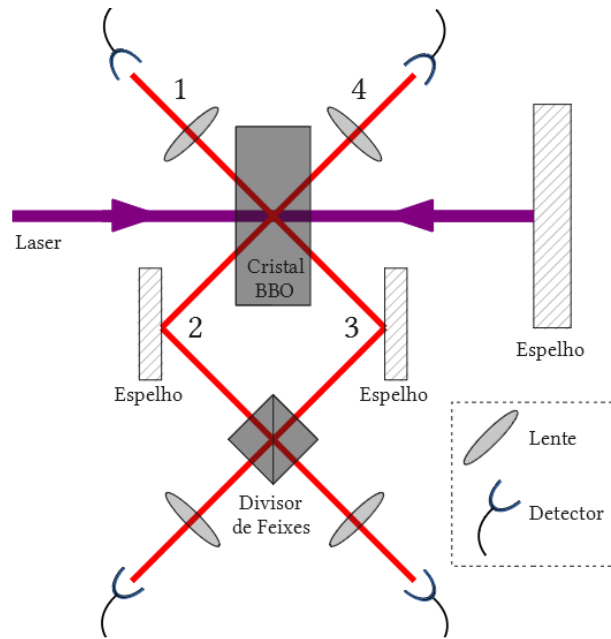


Figura 4.1: Aparato experimental usado para produzir o estado tripartido de fótons discutido neste capítulo.

4.1 Sistema Tripartido de Fótons

Esta seção é dedicada à descrição da produção de um estado tripartido de fótons e à aplicação do critério de van Loock-Furusawa nesse sistema.

4.1.1 Produção do Sistema Tripartido de Fótons

Diferente da solução adotada em [20], não usaremos SPDC em cascata, isto é, com vários cristais BBO iluminados sequencialmente por um laser. A ideia é aqui iluminar duas faces opostas de um único cristal BBO com o auxílio de um espelho, como mostra a Figura 4.1 [18]. Isso permite a realização de um duplo SPDC com um único cristal BBO, simplificando o aparato experimental.

Deixaremos de usar a nomenclatura *signal* e *idler* para falar dos fótons gêmeos, passando a usar os números 12 e 34 para indicar os dois pares de fótons gêmeos produzido no SPDC duplo (ver Figura 4.1). Quando for conveniente, usaremos também os índices ij para denotar o par 12 ou o par 34

de fótons gêmeos¹. Assim, o estado de cada par de fótons gêmeos produzido no cristal BBO é, de acordo com a Eq. (2.51), dado por:

$$|\psi_{ij}\rangle = C_2 \int d\mathbf{q}_i \int d\mathbf{q}_j v_{ij}(\mathbf{q}_i + \mathbf{q}_j) \gamma_{ij}(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j) |\mathbf{q}_i\rangle |\mathbf{q}_j\rangle. \quad (4.1)$$

Consideramos que $C_1 = 0$ ou, posto de outra forma, que o estado de vácuo *nunca* é produzido no SPDC. Na prática, isso significa ignorar os casos onde o número total de fótons detectados é menor que quatro.

Vamos considerar que o espectro angular tem um perfil gaussiano [18],

$$v_{ij}(\mathbf{q}_i + \mathbf{q}_j) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma_{ij}} \exp\left(-\frac{\sigma_{ij}^2}{4} |\mathbf{q}_i + \mathbf{q}_j|^2\right), \quad (4.2)$$

e que L é suficientemente pequeno de forma que $\gamma_{ij}(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j)$ possa ser escrita como uma gaussiana [18],

$$\gamma_{ij}(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\delta_{ij}} \exp\left(-\frac{\delta_{ij}^2}{4} |\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|^2\right). \quad (4.3)$$

As constantes σ_{12} e σ_{34} podem ser ajustadas precisamente com o auxílio de lentes, enquanto que δ_{12} e δ_{34} dependem do comprimento do cristal e do vetor de onda dos fótons do laser.

Como estamos lidando com a produção de 4 fótons, dois para cada SPDC, existem três possibilidades aqui. A primeira é quando somente um fóton percorre cada um dos quatro caminhos possíveis (1 até 4)². A segunda possibilidade ocorre quando dois fótons percorrem o caminho 1 e 2 e nenhum o caminho 3 e 4. A terceira possibilidade é como a segunda, mas com o papel dos caminhos trocados: $1 \leftrightarrow 4$ e $2 \leftrightarrow 3$. Nessas duas últimas possibilidades, dois fótons necessariamente serão detectados pelo detector 1 ou pelo detector 4 e estarão, portanto, espacialmente próximos. Para remover essas duas últimas possibilidades basta usar o detector 4 como um gatilho, desconsiderando os experimentos que detectarem dois ou nenhum fóton nesse

¹Não confundir o i usado agora com o i usado anteriormente para denotar fótons idler.

²Usaremos a palavra *caminho* quando estivermos falando do percurso seguido por um fóton e usaremos a numeração usada na Figura 4.1 para indicá-los. Usaremos também essa numeração para indicar detectores, espelhos e lentes.

detector [18]. De modo geral, será considerado apenas experimentos que detectarem exatamente 1 fóton em cada um dos detectores. Por fim, somente serão contabilizadas *medições de coincidência*, isto é, somente detecções *simultâneas*³ de fótons nos quatro detectores são aceitas.

As lentes usadas nos aparato experimental fazem o mapeamento das variáveis espaciais \mathbf{q} e $\boldsymbol{\rho}$ de cada fóton no plano de detecção. Mais especificamente, as lentes 1-3 mapeiam as variáveis contínuas num plano de detecção para uma futura medição de variância, enquanto que a lente 4 é usada, junto com um *detector pontual* posicionado em $\boldsymbol{\rho} = 0$, para projetar o fóton 4 no estado de momento $\mathbf{q} = 0$. Após essa detecção, o estado $|\psi_{34}\rangle$ é projetado no estado

$$|\psi'_{34}\rangle = C_2 \int d\mathbf{q}_3 v_{34}(\mathbf{q}_3) \gamma_{34}(\mathbf{q}_3) |\mathbf{q}_3\rangle. \quad (4.4)$$

A partir daqui deixaremos de denotar o estado do fóton 4, já projetado no estado $\mathbf{q} = 0$. Além disso, vamos considerar que $\sigma_{34} \gg \delta_{34}$ de forma que $\gamma_{34}(\mathbf{q}_3)$ é razoavelmente constante no intervalo em que $v_{34}(\mathbf{q}_3)$ é apreciável [18]. Disso resulta que $|\psi'_{34}\rangle$ pode ser escrito como:

$$|\psi_3\rangle = C'_2 \int d\mathbf{q}_3 v_{34}(\mathbf{q}_3) |\mathbf{q}_3\rangle. \quad (4.5)$$

Outro elemento importante no aparato desenhado na Figura 4.1 é o divisor de feixes 50:50 não polarizador, que é responsável por *misturar* as variáveis espaciais dos fótons 2 e 3. Os comprimentos dos caminhos 2 e 3 que levam do cristal BBO aos espelhos e então até o divisor de feixes é ajustada de forma que ocorra uma *interferência de Hong-Ou-Mandel* (HOM) [38]. Após a projeção do fóton 4 e a *atuação* do divisor de feixes, o estado dos fótons 1, 2 e 3 é dado por:

$$\begin{aligned} |\psi_T\rangle = & \frac{1}{N_q} \int d\mathbf{q}_1 \int d\mathbf{q}_2 \int d\mathbf{q}_3 v_{12}(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \gamma_{12}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \phi_{34}(\mathbf{q}_3) \\ & \times [|\mathbf{q}_1\rangle |\mathbf{q}_2\rangle |\mathbf{q}_3\rangle - |\mathbf{q}_1\rangle |\mathbf{q}'_3\rangle |\mathbf{q}'_2\rangle], \end{aligned} \quad (4.6)$$

³Por medições simultâneas, entenda medições dentro de um intervalo curto de tempo, a ser escolhido pelo experimento.

em que um apóstrofo significa que a coordenada y têm sinal invertido e N_q é uma constante de normalização. Novamente fica aparente a necessidade de usar o fóton 4 como um gatilho: é necessário verificar que um fóton percorreu o caminho 2 e que outro percorreu o caminho 3, resultando numa interferência HOM. Seguindo o que foi feito na Eq. (2.57), obtemos a função de onda desse estado no espaço dos vetores de onda transversais:

$$\Psi(\mathbf{q}) = \frac{1}{N_q} \left[\exp \left(-\frac{\sigma^2}{4} |\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2|^2 - \frac{\delta^2}{4} |\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2|^2 - \epsilon^2 |\mathbf{q}_3|^2 \right) - \exp \left(-\frac{\sigma^2}{4} |\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}'_3|^2 - \frac{\delta^2}{4} |\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}'_3|^2 - \epsilon^2 |\mathbf{q}'_2|^2 \right) \right], \quad (4.7)$$

em que $\sigma = \sigma_{12}$, $\delta = \delta_{12}$, $\epsilon = \sigma_{34}$ e, daqui até o final deste capítulo, $\mathbf{q} \equiv (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$. Tomando a transformada de Fourier dessa função obtemos a função de onda no espaço de posição:

$$\Phi(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{N_\rho} \left[\exp \left(-\frac{|\boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{\rho}_2|^2}{4\sigma^2} - \frac{|\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2|^2}{4\delta^2} - \frac{|\boldsymbol{\rho}_3|^2}{4\epsilon^2} \right) - \exp \left(-\frac{|\boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{\rho}'_3|^2}{4\sigma^2} - \frac{|\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}'_3|^2}{4\delta^2} - \frac{|\boldsymbol{\rho}'_2|^2}{4\epsilon^2} \right) \right], \quad (4.8)$$

em que N_ρ é outra constante de normalização e $\boldsymbol{\rho} \equiv (\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}_3)$. O valor de N_q e N_ρ , assim como outras expressões relevantes mas secundárias, aparecem no Apêndice A.

4.1.2 Aplicação do Teste de Emaranhamento

O sistema de três fótons que obtemos na seção anterior tem dois graus de liberdade (eixo x e y) para cada fóton. Estaremos interessados apenas na dinâmica do eixo x desses fótons e para filtrar essa dinâmica usaremos probabilidade marginal. Isso significa que, no processo de medição, não nos importaremos com a componente y .

Vamos usar o critério de emaranhamento de van Loock-Furusawa. Para

isso, definimos os operadores \hat{u} e \hat{v} como

$$\hat{u} = h_1 \rho_{1x} + h_2 \rho_{2x} + h_3 \rho_{3x}, \quad (4.9a)$$

$$\hat{v} = g_1 q_{1x} + g_2 q_{2x} + g_3 q_{3x}. \quad (4.9b)$$

Note que como $\mathbf{q} = \mathbf{p}/\hbar$ (ver Seção 2.4.2), então as relações de comutação entre \mathbf{q} e $\boldsymbol{\rho}$ são adequadas para aplicar o critério de van Loock-Furusawa. Usaremos a notação \vec{x} para falar de $(\rho_{1x}, \rho_{2x}, \rho_{3x})$ e a notação \vec{p} para falar de (q_{1x}, q_{2x}, q_{3x}) . Quando for conveniente usaremos \vec{x} e \vec{p} como matrizes coluna.

Calculado a probabilidade marginal $P(\vec{p})$,

$$P(\vec{p}) = P(q_{1x}, q_{2x}, q_{3x}) = \int dq_{1y} dq_{2y} dq_{3y} |\Psi(\mathbf{q})|^2, \quad (4.10)$$

somos capazes de calcular variância de \hat{v} ,

$$\langle (\Delta \hat{v})^2 \rangle_{\Psi} = \int d\vec{p} (\vec{p}^T D_v \vec{p}) P(\vec{p}) - \left(\int d\vec{p} (\vec{g}^T \vec{p}) P(\vec{p}) \right)^2.$$

E calculando a probabilidade marginal $P(\vec{x})$,

$$P(\vec{x}) = P(\rho_{1x}, \rho_{2x}, \rho_{3x}) = \int d\rho_{1y} d\rho_{2y} d\rho_{3y} |\Phi(\boldsymbol{\rho})|^2,$$

somos capazes de calcular variância de \hat{u} ,

$$\langle (\Delta \hat{u})^2 \rangle_{\Phi} = \int d\vec{x} (\vec{x}^T D_u \vec{x}) P(\vec{x}) - \left(\int d\vec{x} (\vec{h}^T \vec{x}) P(\vec{x}) \right)^2.$$

As definições de D_u , D_v , \vec{h} e \vec{g} estão no Apêndice A.

Considere agora três combinações possíveis dos h 's e g 's de onde se obtêm as seguintes somas de variâncias:

$$\Delta_1 = \langle [\Delta(\rho_{1x} - \rho_{3x})]^2 \rangle_{\Phi} + \langle [\Delta(q_{1x} + q_{2x} + q_{3x})]^2 \rangle_{\Psi}, \quad (4.11a)$$

$$\Delta_2 = \langle [\Delta(\rho_{1x} - \rho_{2x})]^2 \rangle_{\Phi} + \langle [\Delta(q_{1x} + q_{2x} + q_{3x})]^2 \rangle_{\Psi}, \quad (4.11b)$$

$$\Delta_3 = \langle [\Delta(\rho_{2x} - \rho_{3x})]^2 \rangle_{\Phi} + \langle [\Delta(q_{1x} + q_{2x} + q_{3x})]^2 \rangle_{\Psi}. \quad (4.11c)$$

Uma análise como àquela feita no final da Seção 3.3 mostra que

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_i p_i \rho_{i,12} \otimes \rho_{i,3} \xrightarrow{\text{incompatível com}} \Delta_1 < 2 \text{ ou } \Delta_3 < 2, \\ \rho &= \sum_i p_i \rho_{i,13} \otimes \rho_{i,2} \xrightarrow{\text{incompatível com}} \Delta_2 < 2 \text{ ou } \Delta_3 < 2, \\ \rho &= \sum_i p_i \rho_{i,23} \otimes \rho_{i,1} \xrightarrow{\text{incompatível com}} \Delta_1 < 2 \text{ ou } \Delta_2 < 2. \end{aligned}$$

Portanto, se um dos Δ_i , $i = 1, 2, 3$, for menor que 2, duas formas bisseparáveis de ρ são *eliminadas*, assim como a forma totalmente separável. E se dois Δ 's forem menores que 2, todas as formas bisseparáveis são *eliminadas*, implicando que ρ é genuinamente emaranhado. Disso segue também que se dois Δ 's forem menores que 2, então o outro Δ também será.

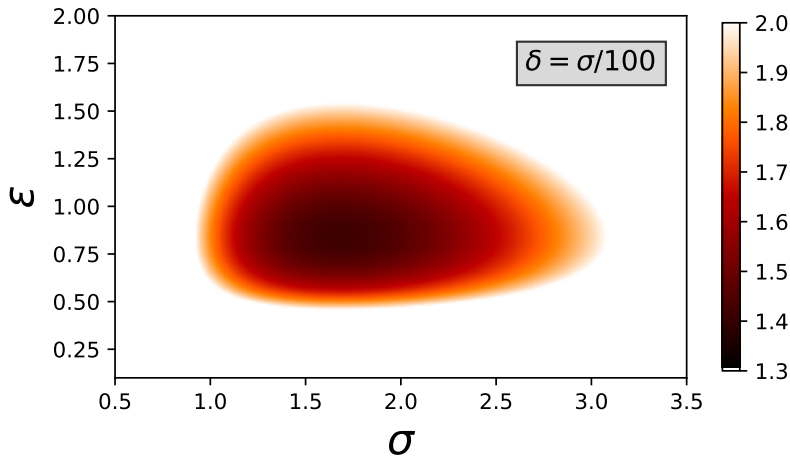


Figura 4.2: Mapa dos valores de Δ_1 e Δ_2 para valores que violam o critério de van Loock-Furusawa, Eq. (3.12). A região em tons de vermelho e amarelo indica onde ocorre a violação.

A Figura 4.1.2 mostra um gráfico de Δ_1 e Δ_2 para diferentes valores das cinturas σ e ϵ . O valor de δ foi escolhido de tal modo que a condição $\sigma \gg \delta$ seja satisfeita. Na região colorida do gráfico, Δ_1 e Δ_2 são menores que 2, implicando que nessa região $\Delta_3 < 2$ e que, para os parâmetros usados ali, o estado dos três fótons tem as variáveis espaciais x genuinamente emaranha-

das.

4.2 Sistema Quadripartido de Fótons

Inspirado na seção anterior, propomos nesta seção um esquema experimental para obter um estado quadripartido de fótons com as variáveis espaciais possivelmente emaranhadas. Existe uma infinidade de tais esquemas e, de modo geral, o processo de aplicação do critério de van Loock-Furusawa não é simples. Nas próximas páginas justificamos a escolha do esquema experimental e exibimos todo o processo de obtenção do estado quadripartido de fótons e a aplicação do critério de emaranhamento nesse estado, além de fazer um rápido resumo do critério de van Loock-Furusawa no caso quadripartido.

4.2.1 Produção do Estado Quadripartido de Fótons

A produção do estado tripartido da Seção 4.1 está apoiada em dois elementos: o SPDC e a interferência HOM. Em particular, a interferência HOM assume que os dois *canais de entrada* do seu divisor de feixes sejam alimentados por feixes de fótons. Daí a necessidade de usar o detector 4 como um gatilho⁴. Além disso, é considerado apenas medições de coincidência nos quatro detectores. Se tudo que foi dito até aqui nesse parágrafo for adotado, então os fótons produzidos estarão espacialmente separados e saberemos com certeza o estado quântico desses fótons.

Para produzir um estado quadripartido de fótons espacialmente separados e cujo estado seja conhecido com certeza, seguiremos o que foi feito no caso tripartido. Usaremos um esquema com um triplo SPDC e que contém duas interferências HOM, como indicado na Figura 4.3. Os detectores 5 e 6 são usados como gatilho para verificar a interferência HOM entre os fótons 3 e 4 e os fótons 1 e 2, respectivamente. Novamente estamos interessados apenas em medições de coincidência nos seis detectores.

Façamos uma rápida discussão prática da interferência HOM [46]. Para

⁴O uso do detector 4 como um gatilho também ajuda a garantir que os fótons produzidos estão espacialmente separados.

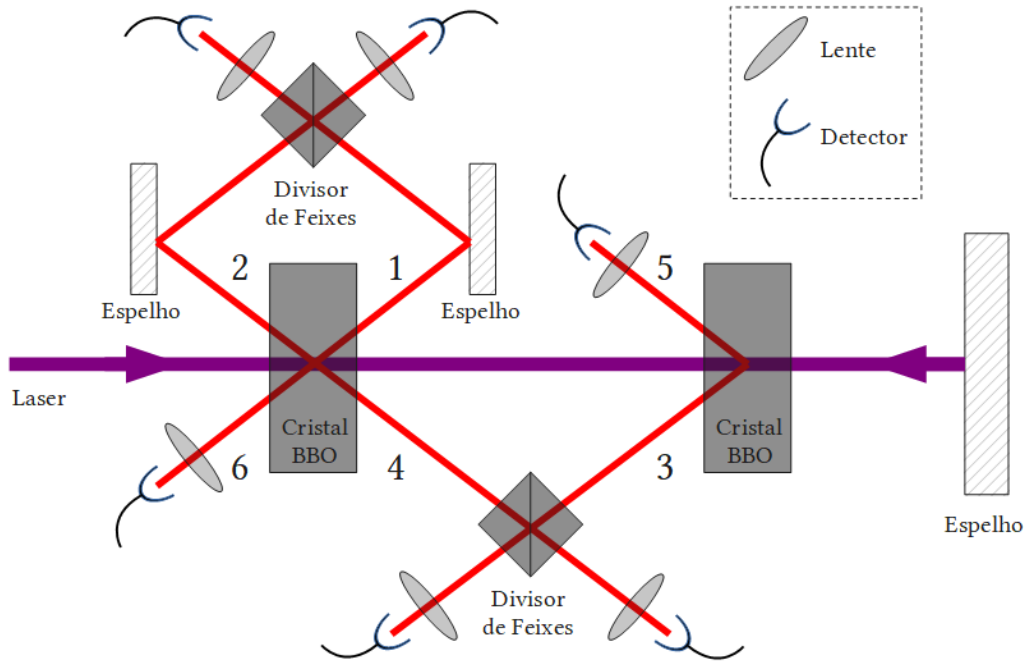


Figura 4.3: Aparato experimental usado para produzir um estado quadripartido de fótons com as variáveis espaciais possivelmente emaranhadas.

isso, considere inicialmente a interferência que ocorre entre os fótons 1 e 2. Como estamos considerando apenas medições de coincidência e usando o detector 6 como gatilho, existem duas possibilidades aqui: dupla transmissão ou dupla reflexão no divisor de feixes. O estado de saída é escrito como $|\cdot\rangle|\cdot\rangle$ e vamos convencionar que o estado do fóton absorvido pelo detector mais à esquerda é inserido no rótulo esquerdo e que o estado do fóton absorvido pelo detector mais à direita é inserido no rótulo direito. Portanto, o termo de saída relativo à dupla transmissão é dado por $|1\rangle|2\rangle$ e o termo de saída relativo à dupla reflexão é dado por $(-1)\cdot|2'\rangle|1'\rangle$, em que um apóstrofo indica que a coordenada y tem sinal trocado. Note que na dupla reflexão existe um termo de fase $e^{-i\pi}$. De modo geral, a interferência HOM dos fótons 1 e 2 mapeia o estado $|\mathbf{q}_1\rangle|\mathbf{q}_2\rangle$ no estado

$$|\mathbf{q}_1\rangle|\mathbf{q}_2\rangle - |\mathbf{q}'_2\rangle|\mathbf{q}'_1\rangle.$$

Note que não estamos nos preocupando com termos de normalização. Isso

é adiado até um momento adequado para o cálculo de uma constante de normalização global. De maneira análoga, o estado $|\mathbf{q}_3\rangle |\mathbf{q}_4\rangle$ é mapeado no estado

$$|\mathbf{q}_3\rangle |\mathbf{q}_4\rangle - |\mathbf{q}'_4\rangle |\mathbf{q}'_3\rangle.$$

Finalmente, o resultado prático das duas interferências HOM é mapear o estado $|\mathbf{q}_1\rangle |\mathbf{q}_2\rangle |\mathbf{q}_3\rangle |\mathbf{q}_4\rangle$ no estado

$$[|\mathbf{q}_1\rangle |\mathbf{q}_2\rangle - |\mathbf{q}'_2\rangle |\mathbf{q}'_1\rangle] \times [|\mathbf{q}_3\rangle |\mathbf{q}_4\rangle - |\mathbf{q}'_4\rangle |\mathbf{q}'_3\rangle] \quad (4.12)$$

O estado dos fótons gêmeos produzidos em cada SPDC é dado pela Eq. (2.51),

$$|\psi_{ij}\rangle = C_2 \int d\mathbf{q}_i \int d\mathbf{q}_j v_{ij}(\mathbf{q}_i + \mathbf{q}_j) \gamma_{ij}(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j) |\mathbf{q}_i\rangle |\mathbf{q}_j\rangle, \quad (4.13)$$

em que C_2 é uma constante de normalização e os índices ij tomam os valores 26, 14 e 53 (ver Figura 4.3). Estamos considerando novamente que v_{ij} e γ_{ij} são gaussianas

De forma semelhante ao que foi feito no caso tripartido, 5 e 6 são detectores pontuais posicionados em $\boldsymbol{\rho} = 0$, implicando que $|\mathbf{q}_5\rangle$ e $|\mathbf{q}_6\rangle$ são projetados em $\mathbf{q} = 0$. Disso segue que $|\psi_{26}\rangle$ é da forma

$$|\psi_{26}\rangle = \int d\mathbf{q}_2 \phi_2(\mathbf{q}_2) |\mathbf{q}_2\rangle, \quad (4.14)$$

e que $|\psi_{53}\rangle$ é da forma

$$|\psi_{53}\rangle = \int d\mathbf{q}_3 \phi_3(\mathbf{q}_3) |\mathbf{q}_3\rangle. \quad (4.15)$$

Ambos, ϕ_2 e ϕ_3 , são gaussianas. Assim, o estado quântico dos três pares de fótons gêmeos antes da interferência HOM é proporcional à

$$\int d\mathbf{q} \exp(-\sigma^2 |\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_4|^2 - \delta^2 |\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_4|^2 - \epsilon^2 |\mathbf{q}_2|^2 - \tau^2 |\mathbf{q}_3|^2) \times |\mathbf{q}_1\rangle |\mathbf{q}_2\rangle |\mathbf{q}_3\rangle |\mathbf{q}_4\rangle, \quad (4.16)$$

em que $d\mathbf{q} \equiv d\mathbf{q}_1 d\mathbf{q}_2 d\mathbf{q}_3 d\mathbf{q}_4$.

O estado quadripartido de fótons resultante do aparato da Figura 4.3 é dado pela Eq. (4.16) após a aplicação do mapeamento indicado na Eq. (4.12):

$$|\psi_T\rangle = \frac{1}{N_q} \int d\mathbf{q} \exp(-\sigma^2|\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_4|^2 - \delta^2|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_4|^2 - \epsilon^2|\mathbf{q}_2|^2 - \tau^2|\mathbf{q}_3|^2) \\ \times [|\mathbf{q}_1\rangle |\mathbf{q}_2\rangle - |\mathbf{q}'_2\rangle |\mathbf{q}'_1\rangle] \times [|\mathbf{q}_3\rangle |\mathbf{q}_4\rangle - |\mathbf{q}'_4\rangle |\mathbf{q}'_3\rangle]. \quad (4.17)$$

A constante de normalização N_q inclui a normalização das gaussianas e a correção devido ao mapeamento da Eq. (4.12).

4.2.2 Variância dos Vetores de Onda

A função de onda no espaço de vetores de onda transversais do estado quadripartido de fótons é dada por:

$$\Psi(\mathbf{q}) = \langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4 | \psi_T \rangle = \frac{1}{N_q} (e^a - e^b - e^c + e^d), \quad (4.18)$$

em que $\mathbf{q} \equiv (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4)$ e com

$$a = -\sigma^2|\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_4|^2 - \delta^2|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_4|^2 - \epsilon^2|\mathbf{q}_2|^2 - \tau^2|\mathbf{q}_3|^2, \quad (4.19a)$$

$$b = -\sigma^2|\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}'_3|^2 - \delta^2|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}'_3|^2 - \epsilon^2|\mathbf{q}_2|^2 - \tau^2|\mathbf{q}'_4|^2, \quad (4.19b)$$

$$c = -\sigma^2|\mathbf{q}'_2 + \mathbf{q}_4|^2 - \delta^2|\mathbf{q}'_2 - \mathbf{q}_4|^2 - \epsilon^2|\mathbf{q}'_1|^2 - \tau^2|\mathbf{q}_3|^2, \quad (4.19c)$$

$$d = -\sigma^2|\mathbf{q}'_2 + \mathbf{q}'_3|^2 - \delta^2|\mathbf{q}'_2 - \mathbf{q}'_3|^2 - \epsilon^2|\mathbf{q}'_1|^2 - \tau^2|\mathbf{q}'_4|^2. \quad (4.19d)$$

A constante de normalização N_q é calculada impondo que $\int d\mathbf{q} |\Psi(\mathbf{q})|^2 = 1$. Usando (4.18) segue que

$$N_q^2 = \int d\mathbf{q} (e^a - e^b - e^c + e^d)^2 = \sum_{i=1}^{10} c_i I_i, \quad (4.20)$$

com $I_1 = \int d\mathbf{q} e^{2a}$, $I_2 = \int d\mathbf{q} e^{2b}$, $I_3 = \int d\mathbf{q} e^{2c}$, $I_4 = \int d\mathbf{q} e^{2d}$, $I_5 = \int d\mathbf{q} e^{a+b}$, $I_6 = \int d\mathbf{q} e^{a+c}$, $I_7 = \int d\mathbf{q} e^{a+d}$, $I_8 = \int d\mathbf{q} e^{b+c}$, $I_9 = \int d\mathbf{q} e^{b+d}$ e $I_{10} = \int d\mathbf{q} e^{c+d}$.

e com $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 1$, $c_5 = c_6 = c_9 = c_{10} = -2$ e $c_7 = c_8 = 2$.

Com o objetivo de achar N_q , vamos calcular a integral I_1 . Para isso, note que

$$-\vec{q}_x^T B_{1x} \vec{q}_x - \vec{q}_y^T B_{1y} \vec{q}_y = 2a,$$

com $\vec{q}_x^T = (q_{1x} \ q_{2x} \ q_{3x} \ q_{4x})$, $\vec{q}_y^T = (q_{1y} \ q_{2y} \ q_{3y} \ q_{4y})$,

$$B_{1x} = \begin{pmatrix} 2(\sigma^2 + \delta^2) & 0 & 0 & 2(\sigma^2 - \delta^2) \\ 0 & 2\epsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\tau^2 & 0 \\ 2(\sigma^2 - \delta^2) & 0 & 0 & 2(\sigma^2 + \delta^2) \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

e

$$B_{1y} = \begin{pmatrix} 2(\sigma^2 + \delta^2) & 0 & 0 & 2(\sigma^2 - \delta^2) \\ 0 & 2\epsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\tau^2 & 0 \\ 2(\sigma^2 - \delta^2) & 0 & 0 & 2(\sigma^2 + \delta^2) \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

Segue então que

$$I_1 = \int d\mathbf{q} e^{2a} = \int d\mathbf{q}_x e^{-\vec{x}^T B_{1x} \vec{x}} \cdot \int d\mathbf{q}_y e^{-\vec{y}^T B_{1y} \vec{y}} = \frac{\pi^2}{\sqrt{\det B_{1x}}} \cdot \frac{\pi^2}{\sqrt{\det B_{1y}}}.$$

As integrais I_2 - I_{10} podem ser calculadas usando a mesma técnica. Assim, para calcular I_i precisamos achar as matrizes B_{ix} e B_{iy} e então usar a fórmula acima. Na verdade, é necessário apenas o determinante dessas matrizes e, para todas elas, a *matriz x* e *matriz y* têm o mesmo determinante. Portanto,

$$I_i = \frac{\pi^2}{\sqrt{\det B_{ix}}} \cdot \frac{\pi^2}{\sqrt{\det B_{iy}}} = \frac{\pi^4}{\det B_{ix}}. \quad (4.23)$$

Para completar o cálculo de N_q é necessário encontrar as matrizes B_{2x} - B_{10x} .

As três primeiras, B_{2x} , B_{3x} e B_{4x} , são:

$$B_{2x} = \begin{pmatrix} 2(\sigma^2 + \delta^2) & 0 & 2(\sigma^2 - \delta^2) & 0 \\ 0 & 2\epsilon^2 & 0 & 0 \\ 2(\sigma^2 - \delta^2) & 0 & 2(\sigma^2 + \delta^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\tau^2 \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

$$B_{3x} = \begin{pmatrix} 2\epsilon^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2(\sigma^2 + \delta^2) & 0 & 2(\sigma^2 - \delta^2) \\ 0 & 0 & 2\tau^2 & 0 \\ 0 & 2(\sigma^2 - \delta^2) & 0 & 2(\sigma^2 + \delta^2) \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

e

$$B_{4x} = \begin{pmatrix} 2\epsilon^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2(\sigma^2 + \delta^2) & 2(\sigma^2 - \delta^2) & 0 \\ 0 & 2(\sigma^2 - \delta^2) & 2(\sigma^2 + \delta^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\tau^2 \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

Por fim,

$$\begin{aligned} B_{5x} &= (B_{1x} + B_{2x})/2, & B_{6x} &= (B_{1x} + B_{3x})/2, \\ B_{7x} &= (B_{1x} + B_{4x})/2, & B_{8x} &= (B_{2x} + B_{3x})/2, \\ B_{9x} &= (B_{2x} + B_{4x})/2, & B_{10x} &= (B_{3x} + B_{4x})/2. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Para completar o cálculo de N_q usando a Eq. (4.23), precisamos achar o determinante de cada matriz B_{ix} . Os valores encontrados são listados a seguir:

$$\det B_{1x} = \det B_{2x} = \det B_{3x} = \det B_{4x} = 64\sigma^2\delta^2\epsilon^2\tau^2, \quad (4.28a)$$

$$\det B_{5x} = \det B_{10x} = 4\epsilon^2(\sigma^2 + \delta^2 + \tau^2)(4\sigma^2\delta^2 + \sigma^2\tau^2 + \delta^2\tau^2), \quad (4.28b)$$

$$\det B_{6x} = \det B_{9x} = 4\tau^2(\sigma^2 + \delta^2 + \epsilon^2)(4\sigma^2\delta^2 + \sigma^2\epsilon^2 + \delta^2\epsilon^2), \quad (4.28c)$$

$$\det B_{7x} = \det B_{8x} = (4\sigma^2\delta^2 + \sigma^2\tau^2 + \delta^2\tau^2 + \sigma^2\epsilon^2 + \delta^2\epsilon^2 + \epsilon^2\tau^2)^2. \quad (4.28d)$$

Finalmente, N_q é dado por:

$$\begin{aligned}
 N_q^2 &= \frac{1}{16} \frac{\pi^4}{\sigma^2 \delta^2 \epsilon^2 \tau^2} + \frac{4\pi^4}{(4\sigma^2 \delta^2 + \sigma^2 \tau^2 + \delta^2 \tau^2 + \sigma^2 \epsilon^2 + \delta^2 \epsilon^2 + \epsilon^2 \tau^2)^2} \\
 &\quad - \frac{\pi^4}{\epsilon^2 (\sigma^2 + \delta^2 + \tau^2) (4\sigma^2 \delta^2 + \sigma^2 \tau^2 + \delta^2 \tau^2)} \\
 &\quad - \frac{\pi^4}{\tau^2 (\sigma^2 + \delta^2 + \epsilon^2) (4\sigma^2 \delta^2 + \sigma^2 \epsilon^2 + \delta^2 \epsilon^2)}.
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Seguindo o que foi feito na Seção 4.1, estaremos interessados apenas na dinâmica ao longo do eixo x . Portanto, vamos recorrer novamente à probabilidade marginal. Denotaremos por \vec{p} as variáveis $(q_{1x}, q_{2x}, q_{3x}, q_{4x})$ e, quando for conveniente, usaremos essa mesma notação para indicar uma matriz coluna⁵. Assim, a probabilidade marginal $P(\vec{p})$ é dada por:

$$\begin{aligned}
 P(\vec{p}) &= \int d\mathbf{q}_y |\Psi(\mathbf{q})|^2 = \frac{1}{N_q^2} \left(c_1 \int d\mathbf{q}_y e^{2a} + \dots + c_{10} \int d\mathbf{q}_y e^{c+d} \right) \\
 &= \frac{1}{N_q^2} \left(c_1 \sqrt{I_1} e^{-\vec{p}^T B_{1x} \vec{p}} + \dots + c_{10} \sqrt{I_{10}} e^{-\vec{p}^T B_{10x} \vec{p}} \right) \\
 &= \frac{1}{N_q^2} \sum_{i=1}^{10} c_i \sqrt{I_i} e^{-\vec{p}^T B_{ix} \vec{p}} = \frac{\pi^2}{N_q^2} \sum_{i=1}^{10} \frac{c_i e^{-\vec{p}^T B_{ix} \vec{p}}}{\sqrt{\det B_{ix}}}.
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

Considere agora o operador \hat{v} definido como um combinação linear dos q_{ix} :

$$\hat{v} = g_1 q_{1x} + g_2 q_{2x} + g_3 q_{3x} + g_4 q_{4x}. \tag{4.31}$$

A variância de \hat{v} no estado $\Psi(\mathbf{q})$ é dada por:

$$\langle (\Delta \hat{v})^2 \rangle_\Psi = \int d\vec{p} (\vec{p}^T D_v \vec{p}) P(\vec{p}) - \left(\int d\vec{p} (\vec{g}^T \vec{p}) P(\vec{p}) \right)^2, \tag{4.32}$$

⁵Quando usado como matriz coluna, \vec{p} é a mesma matriz \vec{q}_x usada para o cálculo de I_1 .

com $\vec{g}^T = (g_1 \ g_2 \ g_3 \ g_4)$ e

$$D_v = \begin{pmatrix} g_1^2 & g_1 g_2 & g_1 g_3 & g_1 g_4 \\ g_2 g_1 & g_2^2 & g_2 g_3 & g_2 g_4 \\ g_3 g_1 & g_3 g_2 & g_3^2 & g_3 g_4 \\ g_4 g_1 & g_4 g_2 & g_4 g_3 & g_4^2 \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

O último termo da Eq. (4.32) é nulo. Além disso vale que

$$\int d\vec{p} (\vec{p}^T D_v \vec{p}) e^{-\vec{p}^T B_{ix} \vec{p}} = \frac{\pi^2 \operatorname{tr}(D_v B_{ix}^{-1})}{2 \sqrt{\det B_{ix}}}.$$

Portanto a variância de \hat{v} é calculado como

$$\langle (\Delta \hat{v})^2 \rangle_\Psi = \frac{\pi^4}{2N_q^2} \sum_{i=1}^{10} c_i \frac{\operatorname{tr}(D_v B_{ix}^{-1})}{\det B_{ix}}. \quad (4.34)$$

4.2.3 Variância da Posição

A função de onda no espaço de posição do estado quadripartido de fótons é dado pela transformada de Fourier de $\Psi(\mathbf{q})$:

$$\Phi(\boldsymbol{\rho}) = C_3 \int d\mathbf{q} e^{i\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho}} \Psi(\mathbf{q}), \quad (4.35)$$

em que C_3 é uma constante de normalização e $\boldsymbol{\rho} \equiv (\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}_3, \boldsymbol{\rho}_4)$. Para calcular $\Phi(\boldsymbol{\rho})$ note que $\Psi(\mathbf{q})$ é a soma de termos da forma

$$\exp(-\vec{q}_x^T A_x \vec{q}_x - \vec{q}_y^T A_y \vec{q}_y),$$

em que A_x e A_y são matrizes simétricas 4×4 . Nessas condições podemos aplicar a fórmula

$$\int d\mathbf{q} e^{i\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho} - \vec{q}_x^T A_x \vec{q}_x - \vec{q}_y^T A_y \vec{q}_y} = \frac{\pi^4}{\sqrt{\det A_x \det A_y}} e^{-\frac{1}{4} \vec{\rho}_x^T A_x^{-1} \vec{\rho}_x - \frac{1}{4} \vec{\rho}_y^T A_y^{-1} \vec{\rho}_y}. \quad (4.36)$$

Após aplicar (4.36), obtemos a função de onda $\Phi(\boldsymbol{\rho})$:

$$\Phi(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{N_\rho} (e^{a'} - e^{b'} - e^{c'} + e^{d'}), \quad (4.37)$$

com

$$a' = -\frac{|\boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{\rho}_4|^2}{(4\sigma)^2} - \frac{|\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_4|^2}{(4\delta)^2} - \frac{|\boldsymbol{\rho}_2|^2}{(2\epsilon)^2} - \frac{|\boldsymbol{\rho}_3|^2}{(2\tau)^2}, \quad (4.38a)$$

$$b' = -\frac{|\boldsymbol{\rho}_1 + \boldsymbol{\rho}_3|^2}{(4\sigma)^2} - \frac{|\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_3|^2}{(4\delta)^2} - \frac{|\boldsymbol{\rho}_2|^2}{(2\epsilon)^2} - \frac{|\boldsymbol{\rho}_4|^2}{(2\tau)^2}, \quad (4.38b)$$

$$c' = -\frac{|\boldsymbol{\rho}'_2 + \boldsymbol{\rho}_4|^2}{(4\sigma)^2} - \frac{|\boldsymbol{\rho}'_2 - \boldsymbol{\rho}_4|^2}{(4\delta)^2} - \frac{|\boldsymbol{\rho}'_1|^2}{(2\epsilon)^2} - \frac{|\boldsymbol{\rho}_3|^2}{(2\tau)^2}, \quad (4.38c)$$

$$d' = -\frac{|\boldsymbol{\rho}'_2 + \boldsymbol{\rho}'_3|^2}{(4\sigma)^2} - \frac{|\boldsymbol{\rho}'_2 - \boldsymbol{\rho}'_3|^2}{(4\delta)^2} - \frac{|\boldsymbol{\rho}'_1|^2}{(2\epsilon)^2} - \frac{|\boldsymbol{\rho}'_4|^2}{(2\tau)^2}. \quad (4.38d)$$

Comparando (4.19) com (4.38) vemos que todos cálculos feitos com $\Psi(\mathbf{q})$ podem ser repetidos para $\Phi(\boldsymbol{\rho})$ fazendo as trocas

$$\begin{aligned} \sigma &\rightarrow 1/4\sigma, & \delta &\rightarrow 1/4\delta, \\ \epsilon &\rightarrow 1/2\epsilon, & \tau &\rightarrow 1/2\tau. \end{aligned}$$

Esses cálculos incluem o valor de N_ρ , a probabilidade marginal $P(\vec{x})$, em que \vec{x} é agora entendido como $(\rho_{1x}, \rho_{2x}, \rho_{3x}, \rho_{4x})$ ou como uma matriz coluna, e a variância do operador

$$\hat{u} = h_1\rho_{1x} + h_2\rho_{2x} + h_3\rho_{3x} + h_4\rho_{4x}. \quad (4.39)$$

4.2.4 Aplicação do Teste de Emaranhamento

O critério de van Loock-Furusawa para um estado quadripartido é resumido a seguir [9]. Seja (k, l, m, n) uma permutação fixa dos números $(1, 2, 3, 4)$. Esses números indicam cada uma das partes de um estado quadripartido. Podemos dividir o critério de emaranhamento em dois casos úteis. O

primeiro é quando o operador densidade do estado quadripartido é da forma

$$\rho = \sum_i p_i \rho_{i,klm} \otimes \rho_{i,n}. \quad (4.40)$$

Nesse caso vale a desigualdade

$$\langle (\Delta \hat{u})^2 \rangle_\rho + \langle (\Delta \hat{v})^2 \rangle_\rho \geq |h_k g_k + h_l g_l + h_m g_m| + |h_n g_n|, \quad (4.41)$$

com $\hat{u} = h_k \hat{x}_k + h_l \hat{x}_l + h_m \hat{x}_m + h_n \hat{x}_n$ e $\hat{v} = g_k \hat{p}_k + g_l \hat{p}_l + g_m \hat{p}_m + g_n \hat{p}_n$. Se essa desigualdade não for satisfeita, então ρ não pode ser escrito como na Eq. (4.40). O segundo caso ocorre quando o operador densidade é da forma

$$\rho = \sum_i p_i \rho_{i,kl} \otimes \rho_{i,mn}. \quad (4.42)$$

Nesse caso,

$$\langle (\Delta \hat{u})^2 \rangle_\rho + \langle (\Delta \hat{v})^2 \rangle_\rho \geq |h_k g_k + h_l g_l| + |h_m g_m + h_n g_n|. \quad (4.43)$$

Novamente, se essa desigualdade não for satisfeita, então ρ não é da forma (4.42). Se ρ for completamente separável, $\rho = \sum_i p_i \rho_{i,k} \otimes \rho_{i,l} \otimes \rho_{i,m} \otimes \rho_{i,n}$, então ρ pode ser escrito tanto como (4.40) quanto como (4.42). Assim, se qualquer uma dessas formas for eliminada pelo critério de van Loock-Furusawa, então o estado completamente separável também é eliminado.

Explicitamente, existem quatro maneiras escrever (4.40):

$$\rho = \sum_i p_i \rho_{i,123} \otimes \rho_{i,4}, \quad (4.44a)$$

$$\rho = \sum_i p_i \rho_{i,124} \otimes \rho_{i,3}, \quad (4.44b)$$

$$\rho = \sum_i p_i \rho_{i,134} \otimes \rho_{i,2}, \quad (4.44c)$$

$$\rho = \sum_i p_i \rho_{i,234} \otimes \rho_{i,1}. \quad (4.44d)$$

E existem três maneiras de fixar a permutação quando o operador densidade

é escrito como (4.42):

$$\rho = \sum_i p_i \rho_{i,12} \otimes \rho_{i,34}, \quad (4.45a)$$

$$\rho = \sum_i p_i \rho_{i,13} \otimes \rho_{i,24}, \quad (4.45b)$$

$$\rho = \sum_i p_i \rho_{i,14} \otimes \rho_{i,23}. \quad (4.45c)$$

Vamos agora explorar o valor das constantes h_s e g_s com o objetivo de eliminar cada um das formas separáveis (4.44) e (4.45). Isso inclui automaticamente a forma completamente separável.

Existem inúmeras maneiras de escolher as constantes h_s e g_s . Seguiremos aqui o que é feito em [9] e escolher

$$h_k = -h_l = g_k = g_l = 1, \quad h_m = h_n = 0, \quad g_m \text{ e } g_n \text{ livres}. \quad (4.46)$$

Como primeiro exemplo, considere as seguintes combinações lineares para \hat{u} e \hat{v} :

$$\hat{u}^{(1)} = \rho_{1x} - \rho_{2x}, \quad (4.47a)$$

$$\hat{v}^{(1)} = q_{1x} + q_{2x} + g_3 q_{3x} + g_4 q_{4x}. \quad (4.47b)$$

Perceba que g_3 e g_4 são parâmetros livres e não influenciam nas desigualdades (4.41) e (4.43). Isso permite que esses parâmetros sejam escolhidos de forma a otimizar essas desigualdades. Aplicando o critério de van Loock-Furusawa segue que se

$$\Delta_1 = \langle (\Delta \hat{u}^{(1)})^2 \rangle_{\Phi} + \langle (\Delta \hat{v}^{(1)})^2 \rangle_{\Psi} < 2, \quad (4.48)$$

então o operador densidade não pode ser escrito como (4.44c), (4.44d), (4.45b) ou como (4.45c). Assim, quando $\Delta_1 < 2$, eliminamos várias formas separáveis de escrever o operador densidade, mas não todas. Para eliminar as outras formas separáveis, temos que escolher outras constantes h_s e g_s .

Considere agora os operadores

$$\hat{u}^{(2)} = \rho_{3x} - \rho_{4x}, \quad (4.49a)$$

$$\hat{v}^{(2)} = g_1 q_{1x} + g_2 q_{2x} + q_{3x} + q_{4x}. \quad (4.49b)$$

Novamente g_1 e g_2 são parâmetros livres. Segue daí que

$$\Delta_2 = \langle (\Delta \hat{u}^{(2)})^2 \rangle_{\Phi} + \langle (\Delta \hat{v}^{(2)})^2 \rangle_{\Psi} < 2 \quad (4.50)$$

é incompatível com as formas (4.44a), (4.44b), (4.45b) e (4.45c) de escrever o operador densidade.

Resumindo, se Δ_1 e Δ_2 forem ambos menores que 2, então eliminamos todas as formas separáveis (4.44) e (4.45), exceto (4.45a). Para eliminar também essa forma separável, considere os operadores

$$\hat{u}^{(3)} = \rho_{1x} - \rho_{3x}, \quad (4.51a)$$

$$\hat{v}^{(3)} = q_{1x} + g_2 q_{2x} + q_{3x} + g_4 q_{4x}. \quad (4.51b)$$

Os parâmetros g_2 e g_4 são livres e não possuem conexão com os parâmetros usados anteriormente quando definimos $\hat{v}^{(1)}$ e $\hat{v}^{(2)}$. Segue que

$$\Delta_3 = \langle (\Delta \hat{u}^{(3)})^2 \rangle_{\Phi} + \langle (\Delta \hat{v}^{(3)})^2 \rangle_{\Psi} < 2 \quad (4.52)$$

é incompatível com a forma separável (4.45a), além das formas (4.44b), (4.44d) e (4.45c).

Passamos agora a discutir a estratégia de otimização dos parâmetros livres. Para isso, considere que estamos querendo minimizar $\Delta_1 = \Delta_1(g_3, g_4)$. O processo de otimização é direto,

$$\frac{\partial \Delta_1}{\partial g_3} = \frac{\partial \Delta_1}{\partial g_4} = 0,$$

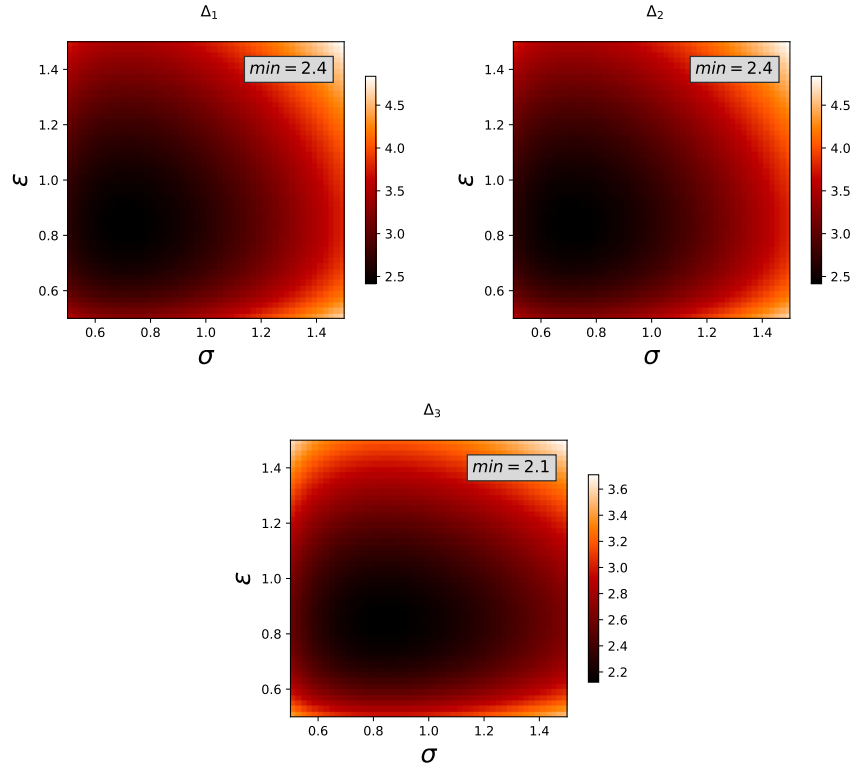


Figura 4.4: Soma da variância dos operadores \hat{u} e \hat{v} . Nos três gráficos $\tau = \epsilon$ e $\delta = \sigma/100$.

e os valores ótimos de g_3 e de g_4 são dados por:

$$\begin{pmatrix} g_3^{opt} \\ g_4^{opt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle q_{3x}^2 \rangle & \langle q_{3x}q_{4x} \rangle \\ \langle q_{3x}q_{4x} \rangle & \langle q_{4x}^2 \rangle \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\langle q_{1x}q_{3x} \rangle - \langle q_{2x}q_{3x} \rangle \\ -\langle q_{1x}q_{4x} \rangle - \langle q_{2x}q_{4x} \rangle \end{pmatrix}. \quad (4.53)$$

Nessa fórmula, as médias são tomadas usando a probabilidade marginal $P(\vec{p})$. Como $P(\vec{p})$ é função de $(\sigma, \delta, \epsilon, \tau)$, segue que os parâmetros otimizados g_3^{opt} e g_4^{opt} também são funções de $(\sigma, \delta, \epsilon, \tau)$. Diante disso, seguimos a seguinte estratégia de otimização. Escolhemos parâmetros $(\sigma_0, \delta_0, \epsilon_0, \tau_0)$ tais que $\langle (\Delta \hat{u}^{(1)})^2 \rangle_{\Phi} < 2$ e então usamos tais parâmetros para calcular g_3^{opt} e g_4^{opt} usando a Eq. (4.53). Essa estratégia é baseada no fato da variância de $\hat{u}^{(1)}$ e de $\hat{v}^{(1)}$ ser positiva, de forma que $\Delta_1 < 2$ é possível somente quando ambos, $\hat{u}^{(1)}$ e $\hat{v}^{(1)}$, têm variância estritamente menor que 2.

Mesmo após a aplicação do processo de otimização descrito no parágrafo anterior, nenhuma soma de variâncias (Δ_1 , Δ_2 ou Δ_3) toma valor menor que 2, como indicado na Figura 4.4. Sendo assim, o critério de van Loock-Furusawa é satisfeito para todas as escolhas feitas para os h s e g s e portanto não podemos excluir nenhuma forma separável de escrever o operador densidade.

As escolhas possíveis para os h s e g s não se esgotaram. Ainda assim, todas as outras escolhas que seguem (4.46) resultam numa soma de variâncias maior que 2, mais precisamente, todas terminam com uma soma de variâncias de \hat{u} e \hat{v} iguais à Δ_3 .

Lembre que o critério de van Loock-Furusawa é somente um critério necessário para a separabilidade. Sendo assim, o resultado que obtemos não implica que o nosso estado quadripartido de fótons é completamente separável. Na verdade, isso provavelmente é falso, já que o SPDC produz fótons gêmeos emaranhados espacialmente. O resultado obtido é simplesmente inconclusivo.

*CAPÍTULO 4. SISTEMAS TRIPARTIDO E QUADRIPARTIDO DE FÓTONS*⁶⁰

Capítulo 5

Considerações Finais

O emaranhamento é um aspecto notável da mecânica quântica. Além de ser um tipo de correlação diferente de todos os que existem no mundo clássico, o emaranhamento é um recurso indispensável para a computação e informação quântica. De fato, é ao considerar a aplicação de emaranhamento em processamento de informação que podemos ver a sua relevância completa. O tema computação e informação não foi nosso foco durante esse trabalho, pelo menos não diretamente. Esse assunto, porém, é bastante acessível e é somente com ele que podemos visualizar o quadro geral do tema abordado nesta dissertação. Por exemplo, o teleporte quântico, a codificação superdensa e a criptografia quântica são, além de impressionantes cientificamente, bastante promissores tecnologicamente.

Surge naturalmente duas questões. A primeira diz respeito à caracterização de emaranhamento, isto é, à verificação se um dado estado está ou não emaranhado. No Capítulo 3 vimos alguns métodos que respondem essa pergunta. Dentre eles, destacamos aqui o critério de van Loock-Furusawa, que lida com o emaranhamento em variáveis contínuas de um sistema com três ou mais partes.

A outra questão trata da produção de estados emaranhados. Vimos como isso pode ser feito num sistema de fótons usando SPDC. O SPDC em si já produz dois fótons emaranhados nas variáveis espaciais. No Capítulo 4 discutimos como sistemas com mais de dois fótons emaranhados podem ser

produzidos. A estratégia usada conta com pelo menos um par de fótons gêmeos, espelhos, lentes e divisores de feixes. Um dos estados obtidos nesse capítulo é o estado tripartido de fótons que possui, sob determinadas condições, emaranhamento genuíno nas variáveis espaciais. O outro estado de fótons obtido é um estado quadripartido que, embora não tenhamos conseguido excluir nenhuma forma separável, provavelmente tem algum nível de emaranhamento.

Uma das primeiras ideias para esse trabalho era analisar se o aparato usado para criar os três fótons com variáveis espaciais emaranhadas também era capaz de criar emaranhamento quadripartido. A primeira vista isso parece ser possível, já que quatro fótons são produzidos no esquema utilizado. O problema é que esse quarto fóton é usado como um gatilho para verificar se ocorreu uma interferência HOM. Assim, numa versão sem um fóton usado como gatilho, não saberíamos com certeza o estado gerado, já que haveria 3 possibilidades, e em somente uma dessas possibilidades os fótons estariam, todos, espacialmente separados.

Mudando um pouco o aparato experimental, certamente é possível obter um estado com quatro ou mais fótons espacialmente separados e com as variáveis espaciais emaranhadas. Fizemos isso e chegamos no estado quadripartido de fótons citado acima. A nossa aplicação do critério de emaranhamento de van Loock-Furusawa nesse sistema não foi efetiva para verificar a existência de emaranhamento. Disso surge uma continuação possível desta dissertação: refinar a aplicação do critério de van Loock-Furusawa ou até usar algum outro método de caracterização de emaranhamento.

Outra continuação natural deste trabalho é procurar por outros esquemas experimentais capazes de criar sistemas multipartidos de fótons com emaranhamento nas variáveis espaciais. Um ponto de partida já foi dado aqui: unir fótons gêmeos com divisores de feixes. Possivelmente existem outras possibilidades. Comparar as diversas formas de produção de fótons emaranhados e montar com isso um quadro geral é outra perspectiva promissora desta dissertação.

Apêndice A

Expressões da Seção 4.1

As constantes de normalização N_ρ e N_q são:

$$N_\rho^2 = 4\pi^3 \sigma^2 \delta^2 \epsilon^2 \cdot N \quad \text{e} \quad N_q^2 = \frac{\pi^3}{\sigma^2 \delta^2 \epsilon^2} \cdot N,$$

com

$$N = 1 - \frac{\sigma^2 \delta^2 \epsilon^2}{(\sigma^2 + \delta^2 + 4\epsilon^2)(\sigma^2 \delta^2 + \sigma^2 \epsilon^2 + \delta^2 \epsilon^2)}.$$

As probabilidades marginais $P(\vec{x})$ e $P(\vec{p})$ são:

$$P(\vec{x}) = \frac{1}{N_\rho} \left[\tilde{A}_1 \exp(-\vec{p}^T \tilde{B}_1 \vec{p}) - 2\tilde{A}_2 \exp(-\vec{p}^T \tilde{B}_2 \vec{p}) + \tilde{A}_1 \exp(-\vec{p}^T \tilde{B}_3 \vec{p}) \right],$$
$$P(\vec{p}) = \frac{1}{N_q} \left[A_1 \exp(-\vec{p}^T B_1 \vec{p}) - 2A_2 \exp(-\vec{p}^T B_2 \vec{p}) + A_1 \exp(-\vec{p}^T B_3 \vec{p}) \right].$$

As constantes \tilde{A}_1 , \tilde{A}_2 , A_1 e A_2 são:

$$\tilde{A}_1 = \sqrt{2\pi^3} \sigma \delta \epsilon, \quad \tilde{A}_2 = \frac{\sqrt{32\pi^3} \sigma^2 \delta^2 \epsilon^2}{\sqrt{(\sigma^2 + \delta^2 + 4\epsilon^2)(\sigma^2 \delta^2 + \sigma^2 \epsilon^2 + \delta^2 \epsilon^2)}},$$
$$A_1 = \sqrt{\pi^3} / \sqrt{2\sigma \delta \epsilon}, \quad A_2 = \frac{\sqrt{8\pi^3}}{\sqrt{(\sigma^2 + \delta^2 + 4\epsilon^2)(\sigma^2 \delta^2 + \sigma^2 \epsilon^2 + \delta^2 \epsilon^2)}}.$$

As matrizes \tilde{B}_1 , \tilde{B}_2 e \tilde{B}_3 são:

$$\begin{aligned}\tilde{B}_1 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\delta^2}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{\delta^2}\right) & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{\delta^2}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\delta^2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\epsilon^2} \end{pmatrix}, \\ \tilde{B}_2 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\delta^2}\right) & \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{\delta^2}\right) & \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{\delta^2}\right) \\ \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{\delta^2}\right) & \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{\epsilon^2}\right) & 0 \\ \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{\delta^2}\right) & 0 & \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\delta^2} + \frac{1}{\epsilon^2}\right) \end{pmatrix}, \\ \tilde{B}_3 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\delta^2}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{\delta^2}\right) \\ 0 & \frac{1}{2\epsilon^2} & 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{\delta^2}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\delta^2}\right) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

E as matrizes B_1 , B_2 e B_3 são:

$$\begin{aligned}B_1 &= \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2+\delta^2}{2} & \frac{\sigma^2-\delta^2}{2} & 0 \\ \frac{\sigma^2-\delta^2}{2} & \frac{\sigma^2+\delta^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2\epsilon^2 \end{pmatrix}, \\ B_2 &= \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2+\delta^2}{2} & \frac{\sigma^2-\delta^2}{4} & \frac{\sigma^2-\delta^2}{4} \\ \frac{\sigma^2-\delta^2}{4} & \frac{\sigma^2+\delta^2}{4} + \epsilon^2 & 0 \\ \frac{\sigma^2-\delta^2}{4} & 0 & \frac{\sigma^2+\delta^2}{4} + \epsilon^2 \end{pmatrix}, \\ B_3 &= \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2+\delta^2}{2} & 0 & \frac{\sigma^2-\delta^2}{2} \\ 0 & 2\epsilon^2 & 0 \\ \frac{\sigma^2-\delta^2}{2} & 0 & \frac{\sigma^2+\delta^2}{2} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

As matrizes D_u e D_v são:

$$D_u = \begin{pmatrix} h_1^2 & h_1 h_2 & h_1 h_3 \\ h_2 h_1 & h_2^2 & h_2 h_3 \\ h_3 h_1 & h_3 h_2 & h_3^2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D_v = \begin{pmatrix} g_1^2 & g_1 g_2 & g_1 g_3 \\ g_2 g_1 & g_2^2 & g_2 g_3 \\ g_3 g_1 & g_3 g_2 & g_3^2 \end{pmatrix}.$$

E as matrizes \vec{h}^T e \vec{g}^T são, respectivamente, $(h_1 \ h_2 \ h_3)$ e $(g_1 \ g_2 \ g_3)$.

Referências Bibliográficas

- [1] M. K. E. L. Planck, *Zur theorie des gesetzes der energieverteilung im normalspectrum*, Verhandl. Dtsch. Phys. Ges. **2**, 237 (1900).
- [2] W. Heisenberg, *Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen.*, Zeitschrift für Physik **33**, 879 (1925).
- [3] E. Schrödinger, *Quantisierung als Eigenwertproblem*, Annalen der Physik **384**, 361 (1926).
- [4] A. Einstein, B. Podolsky, e N. Rosen, *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*, Phys. Rev. **47**, 777 (1935).
- [5] J. S. Bell, *On the Einstein Podolsky Rosen paradox*, Physics Physique **1**, 195 (1964).
- [6] M. A. Nielsen e I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, 2009).
- [7] C. H. Bennett *et al.*, *Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels*, Phys. Rev. Lett. **70**, 1895 (1993).
- [8] S. L. Braunstein e P. van Loock, *Quantum information with continuous variables*, Rev. Mod. Phys. **77**, 513 (2005).
- [9] P. van Loock e A. Furusawa, *Detecting genuine multipartite continuous-variable entanglement*, Phys. Rev. A **67**, 052315 (2003).

- [10] L.-M. Duan, G. Giedke, J. I. Cirac, e P. Zoller, *Inseparability Criterion for Continuous Variable Systems*, Phys. Rev. Lett. **84**, 2722 (2000).
- [11] A. Peres, *Separability Criterion for Density Matrices*, Phys. Rev. Lett. **77**, 1413 (1996).
- [12] R. Simon, *Peres-Horodecki Separability Criterion for Continuous Variable Systems*, Phys. Rev. Lett. **84**, 2726 (2000).
- [13] F. Toscano, A. Saboia, A. T. Avelar, e S. P. Walborn, *Systematic construction of genuine-multipartite-entanglement criteria in continuous-variable systems using uncertainty relations*, Phys. Rev. A **92**, 052316 (2015).
- [14] O. Gühne e G. Tóth, *Entanglement detection*, Phys. Rep. **474**, 1 (2009).
- [15] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, e K. Horodecki, *Quantum entanglement*, Rev. Mod. Phys. **81**, 865 (2009).
- [16] S. Walborn, C. Monken, S. Pádua, e P. S. Ribeiro, *Spatial correlations in parametric down-conversion*, Phys. Rep. **495**, 87 (2010).
- [17] C. K. Hong e L. Mandel, *Theory of parametric frequency down conversion of light*, Phys. Rev. A **31**, 2409 (1985).
- [18] A. T. Avelar e S. P. Walborn, *Genuine tripartite continuous-variable entanglement with spatial degrees of freedom of photons*, Phys. Rev. A **88**, 032308 (2013).
- [19] S. P. Walborn, D. S. Ether, R. L. de Matos Filho, e N. Zagury, *Quantum teleportation of the angular spectrum of a single-photon field*, Phys. Rev. A **76**, 033801 (2007).
- [20] X.-L. Wang *et al.*, *Experimental Ten-Photon Entanglement*, Phys. Rev. Lett. **117**, 210502 (2016).
- [21] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, e F. Laloe, *Quantum Mechanics, Vol. 1* (Wiley, 1991).

- [22] C. Gerry e P. Knight, *Introductory Quantum Optics* (Cambridge University Press, 2004).
- [23] S. J. Freedman e J. F. Clauser, *Experimental Test of Local Hidden-Variable Theories*, Phys. Rev. Lett. **28**, 938 (1972).
- [24] A. Aspect, P. Grangier, e G. Roger, *Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell's Theorem*, Phys. Rev. Lett. **47**, 460 (1981).
- [25] A. Aspect, J. Dalibard, e G. Roger, *Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers*, Phys. Rev. Lett. **49**, 1804 (1982).
- [26] W. Tittel, J. Brendel, H. Zbinden, e N. Gisin, *Violation of Bell Inequalities by Photons More Than 10 km Apart*, Phys. Rev. Lett. **81**, 3563 (1998).
- [27] B. Hensen *et al.*, *Loophole-free Bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometres*, Nature **526**, 682 (2015).
- [28] M. Giustina *et al.*, *Significant-Loophole-Free Test of Bell's Theorem with Entangled Photons*, Phys. Rev. Lett. **115**, 250401 (2015).
- [29] L. K. Shalm *et al.*, *Strong Loophole-Free Test of Local Realism*, Phys. Rev. Lett. **115**, 250402 (2015).
- [30] D. Rauch *et al.*, *Cosmic Bell Test Using Random Measurement Settings from High-Redshift Quasars*, Phys. Rev. Lett. **121**, 080403 (2018).
- [31] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics Third Edition* (Wiley, 1998).
- [32] D. Magde e H. Mahr, *Study in Ammonium Dihydrogen Phosphate of Spontaneous Parametric Interaction Tunable from 4400 to 16 000 Å*, Phys. Rev. Lett. **18**, 905 (1967).
- [33] R. L. Byer e S. E. Harris, *Power and Bandwidth of Spontaneous Parametric Emission*, Phys. Rev. **168**, 1064 (1968).
- [34] T. G. Giallorenzi e C. L. Tang, *Quantum Theory of Spontaneous Parametric Scattering of Intense Light*, Phys. Rev. **166**, 225 (1968).

- [35] B. R. Mollow, *Photon Correlations in the Parametric Frequency Splitting of Light*, Phys. Rev. A **8**, 2684 (1973).
- [36] D. C. Burnham e D. L. Weinberg, *Observation of Simultaneity in Parametric Production of Optical Photon Pairs*, Phys. Rev. Lett. **25**, 84 (1970).
- [37] I. Abram, R. K. Raj, J. L. Oudar, e G. Dolique, *Direct Observation of the Second-Order Coherence of Parametrically Generated Light*, Phys. Rev. Lett. **57**, 2516 (1986).
- [38] C. K. Hong, Z. Y. Ou, e L. Mandel, *Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference*, Phys. Rev. Lett. **59**, 2044 (1987).
- [39] G. R. Fowles, *Introduction to Modern Optics (Dover Books on Physics)* (Dover Publications, 2012).
- [40] D. Nikogosyan, *Beta barium borate (BBO)*, Appl. Phys. A **52**, 359 (1991).
- [41] J. D. Bierlein e H. Vanherzeele, *Potassium titanyl phosphate: properties and new applications*, J. Opt. Soc. Am. B **6**, 622 (1989).
- [42] J. Goodman, *Introduction to Fourier Optics* (Roberts and Company Publishers, 2004).
- [43] J. C. Howell, R. S. Bennink, S. J. Bentley, e R. W. Boyd, *Realization of the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox Using Momentum- and Position-Entangled Photons from Spontaneous Parametric Down Conversion*, Phys. Rev. Lett. **92**, 210403 (2004).
- [44] M. D'Angelo, Y.-H. Kim, S. P. Kulik, e Y. Shih, *Identifying Entanglement Using Quantum Ghost Interference and Imaging*, Phys. Rev. Lett. **92**, 233601 (2004).
- [45] L. Maccone e A. K. Pati, *Stronger Uncertainty Relations for All Incompatible Observables*, Phys. Rev. Lett. **113**, 260401 (2014).

- [46] S. P. Walborn, W. A. T. Nogueira, A. N. de Oliveira, S. Pádua, e C. H. Monken, *Multimode Hong–Ou–Mandel Interferometry*, Mod. Phys. Lett. B **19**, 1 (2005).