

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TATIANA PIRES FLEURY BEZERRA

Variedades de Einstein e Ricci solitons

Goiânia, GO
2019

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR
VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES
NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: ☐ Dissertação ☒ Tese

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

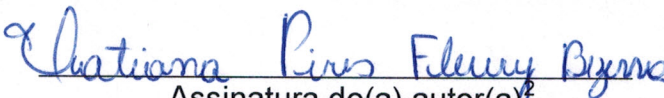
Nome completo do autor: Tatiana Pires Fleury Bezerra

Título do trabalho: Variedades de Einstein e Ricci solitons.

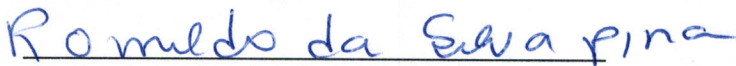
3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento ☒ SIM ☐ NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.


Assinatura do(a) autor(a)²

Ciente e de acordo:


Assinatura do(a) orientador(a)²

Data: 26 / 03 / 2019

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

² A assinatura deve ser escaneada.

TATIANA PIRES FLEURY BEZERRA

Variedades de Einstein e Ricci solitons

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Área de concentração: Geometria e Topologia.

Orientador: Dr. Romildo da Silva Pina

Goiânia, GO
2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Pires Fleury Bezerra, Tatiana
Variedades de Einstein e Ricci solitons [manuscrito] / Tatiana
Pires Fleury Bezerra. - 2019.
LXXXII, 82 f.

Orientador: Prof. Dr. Romildo da Silva Pina.
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de
Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em
Matemática, Goiânia, 2019.
Bibliografia.

1. gradiente Ricci soliton. 2. variedade de Einstein. 3. produto
torcido. 4. gradiente quasi Ricci soliton. I. da Silva Pina, Romildo,
orient. II. Título.

CDU 514.77



UFG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Campus Samambaia – Caixa Postal 131 – CEP: 74.001-970 – Goiânia-GO.

Fones: (62) 3521-1208 e 3521-1137 www.ime.ufg.br

ATA DA REUNIÃO DA BANCA EXAMINADORA DA DEFESA DE TESE DE TATIANA PIRES FLEURY BEZERRA – Ao vigésimo sétimo dia do mês de março do ano de dois mil e dezenove (27/03/2019), às 14:30 horas, reuniram-se os componentes da Banca Examinadora: Prof. Romildo da Silva Pina - Orientador, Prof. Benedito Leandro Neto, Prof. Levi Rosa Adriano, Prof. Pedro Roitman e Prof. Diego Calalano Ferraioli, sob a presidência do primeiro, e em sessão pública realizada no Auditório do Instituto de Matemática e Estatística, procederem a avaliação da defesa de tese intitulada: **“Variedades de Einstein e Ricci Solitons”** em nível de Doutorado, área de concentração em Geometria, de autoria de Tatiana Pires Fleury Bezerra, discente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Goiás. A sessão foi aberta pelo Presidente da Banca, Prof. Romildo da Silva Pina que fez a apresentação formal dos membros da Banca. A seguir, a palavra foi concedida a autora da tese que, em 45 minutos procedeu a apresentação de seu trabalho. Terminada a apresentação, cada membro da Banca arguiu o examinando, tendo-se adotado o sistema de diálogo sequencial. Terminada a fase de arguição, procedeu-se a avaliação da defesa. Tendo-se em vista o que consta na Resolução nº. 1513 do Conselho de Ensino, Pesquisa, Extensão e Cultura (CEPEC), que regulamenta o Programa de Pós-Graduação em Matemática e procedidas às correções recomendadas, a tese foi **APROVADA** por unanimidade, considerando-se integralmente cumprido este requisito para fins de obtenção do título de **DOCTOR(A) EM MATEMÁTICA**, na área de concentração em Geometria pela Universidade Federal de Goiás. A conclusão do curso dar-se-á quando da entrega na secretaria do PPGM da versão definitiva da tese, com as devidas correções supervisionadas e aprovadas pelo orientador. Cumpridas as formalidades de pauta, às 16:30 horas a presidência da mesa encerrou esta sessão de defesa de tese e para constar eu, Flávia Magalhães Freire, secretária do PPGM, lavrei a presente Ata que, depois de lida e aprovada, será assinada pelos membros da Banca Examinadora em quatro vias de igual teor.

Romildo da Silva Pina

Prof. Dr. Romildo da Silva Pina
Presidente - IME/UFG

Benedito Leandro

Prof. Dr. Benedito Leandro Neto
Membro – IME/UFG

Levi Rosa Adriano

Prof. Dr. Levi Rosa Adriano
Membro – IME/UFG

Pedro Roitman

Prof. Dr. Pedro Roitman
Membro – DM/UnB

Diego Calalano Ferraioli

Prof. Dr. Diego Calalano Ferraioli
Membro – DM/UFBA

TATIANA PIRES FLEURY BEZERRA

VARIEDADES DE EINSTEIN E RICCI SOLITONS

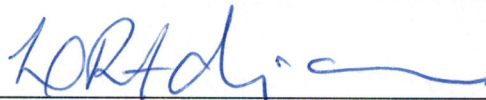
Tese defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Doutor(a) em Matemática, aprovada em 27 de março de 2019, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



Prof. Dr. Romildo da Silva Pina
Instituto de Matemática e Estatística - UFG
Presidente da Banca



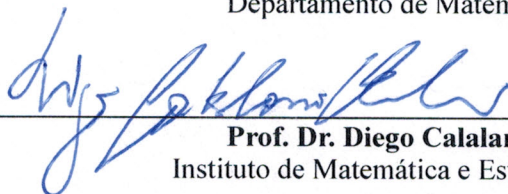
Prof. Dr. Benedito Leandro Neto
Instituto de Matemática e Estatística - UFG



Prof. Levi Rosa Adriano
Instituto de Matemática e Estatística - UFG



Prof. Dr. Pedro Roitman
Departamento de Matemática - UnB



Prof. Dr. Diego Calalano Ferraioli
Instituto de Matemática e Estatística – UFBA

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Tatiana Pires Fleury Bezerra

*Ainda que a minha mente e o meu corpo enfraqueçam, Deus é a minha força,
Ele é tudo o que eu preciso. (Salmo 73:26)*

Agradecimentos

À Deus, por ter me dado a oportunidade e a capacidade de poder vivenciar esse momento, pois sem Deus nada disso seria possível. À ele toda honra e toda glória.

Ao Prof. Dr. Romildo da Silva Pina, pela orientação, compreensão, paciência, e por todos os seus ensinamentos tão importantes durante todo o longo caminho percorrido para escrever essa tese.

A toda minha família, pela compreensão nos momentos ausentes, e em especial minha mãe Divina, ao meu esposo Edivan e meus filhos Luíza e Rafael que me apoiaram, me incentivaram e tiveram ao meu lado nesta dura e longa jornada do doutorado.

As minhas amigas da vida, Elaine, Márcia e Tatiane.

A todos os meus amigos e demais familiares, que me deram força para suportar todos os momentos difíceis que passei durante o curso. Em especial, aos colegas de Doutorado, que viveram tudo isso comigo, vocês fazem parte de tudo isso, obrigado a todos.

A FAPPEG, pelo apoio financeiro, sem o qual seria muito mais difícil a concretização desse sonho.

Muito obrigado!

Resumo

Fleury, Tatiana Pires. **Variedades de Einstein e Ricci solitons**. Goiânia, GO, 2019. 81p. Tese de Doutorado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Neste trabalho, provamos que todas as métricas conformes ao espaço pseudo-Euclidiano $(\mathbb{R}^n, g)$, invariantes pela ação de um grupo de translação $(n-1)$ -dimensional e rotação são gradiente quasi Ricci soliton. Provamos também que todas as métricas conformes a $M = (R^n, \bar{g}) \times F^m$, invariante por translação e F Ricci flat, são gradiente quasi Ricci solitons. Classificamos todas as variedades de Einstein do tipo $M = (R^n, \bar{g}) \times_f F^m$, onde $\bar{g} = \frac{1}{\phi^2} g$, invariantes pela ação do grupo de translação $(n-1)$ -dimensional e F Ricci flat com $m > 1$. Se M é um gradiente Ricci soliton do tipo $M = (\mathbb{R}^n, \bar{g}) \times F^m$ e a fibra é Ricci flat então M é steady e exibimos todas as soluções. Finalmente provamos que se o produto torcido $M = (\mathbb{R}^n, \bar{g}) \times_f F^m$ for um gradiente Ricci soliton com F Ricci flat, e além disso, $\frac{\phi'}{\phi} = c \frac{f'}{f}$ então M é steady.

Palavras-chave

Gradiente Ricci soliton, gradiente quasi Ricci soliton, variedade de Einstein, produto torcido.

Abstract

Fleury, Tatiana Pires. **Classes of Generalized Weingarten Hypersurfaces in the Euclidean Space**. Goiânia, GO, 2019. 81p. PhD. Thesis . Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

In this work, we prove that all metrics conformal to the pseudo-Euclidean space $(\mathbb{R}^n, g)$, invariant under the action $(n - 1)$ -dimensional translation group and also invariants by a pseudo orthogonal group action are gradient Ricci almost solitons. We also prove that all metrics conformal to $M = (R^n, \bar{g}) \times F^m$, invariant under the action $(n - 1)$ -dimensional translation group and F Ricci flat are gradient Ricci almost soliton. We classify all Einstein manifolds of the type $M = (R^n, \bar{g}) \times_f F^m$, where $\bar{g} = \frac{1}{\phi^2} g$, invariant under the action $(n - 1)$ -dimensional translation group and F Ricci flat with $m > 1$. If M is gradient Ricci soliton of type $M = (\mathbb{R}^n, \bar{g}) \times F^m$ and the fiber is Ricci flat then M is steady and we provide all such solutions. Finally we prove that if the warped product $M = (\mathbb{R}^n, \bar{g}) \times_f F^m$ is a gradient Ricci soliton with F Ricci flat, and further, $\frac{\Phi}{\phi} = c \frac{f'}{f}$ then M is steady.

Keywords

Gradient Ricci soliton, gradient Ricci almost soliton, Einstein manifolds, warped product.

Sumário

1	Preliminares	12
1.1	Variedades semi-Riemannianas	12
1.2	Gradiente Ricci soliton e variedades de Einstein	19
1.3	Produto torcido	21
2	Gradiente quasi Ricci soliton	29
2.1	Gradiente quasi Ricci soliton no espaço pseudo-Euclidiano	29
2.1.1	Invariantes por rotação	29
2.1.2	Invariantes por translação	32
2.2	Gradiente quasi Ricci soliton com estrutura de produto torcido invariante por translação	34
2.3	Exemplos	39
3	Variedades de Einstein com estrutura de produto torcido	41
3.1	Variedades de Einstein do tipo $M = (\mathbb{R}^n, \bar{g}) \times_f \mathbb{R}$	41
3.2	Variedades de Einstein do tipo $M = (\mathbb{R}^n, \bar{g}) \times F^m$	55
4	Gradiente Ricci soliton	72
4.1	Gradiente Ricci soliton - um resultado de não existência	72
4.2	Gradiente Ricci soliton com estrutura de produto torcido invariante por translação	74
	Referências Bibliográficas	80

Introdução

Na XVIII Escola de Geometria Diferencial de 2014, Cao e Zhou em ([23]), apresentaram um minicurso, incluindo noções de geometria Riemanniana até o conceito de fluxo de Ricci e Ricci solitons. O conceito de Ricci Solitons foi introduzido por Hamilton em ([24]) e correspondem a soluções auto similares do fluxo de Ricci,

$$\frac{\partial}{\partial t}g(t) = -2Ric_{g(t)}.$$

Seja (M^n, g) uma variedade semi-Riemanniana de dimensão $n \geq 3$. Dizemos que (M, g) é um **gradiente Ricci soliton** se existe uma função diferenciável $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ (dita função potencial) tal que

$$Ric_g + Hess_g(f) = \rho g, \quad \rho \in \mathbb{R}, \quad (0-1)$$

onde Ric_g é o tensor de Ricci, $Hess_g(f)$ é a Hessiana de f com respeito a métrica g , e ρ é um número real. Um gradiente Ricci soliton é dito ser *shrinking*, *steady*, ou *expanding* se $\rho > 0$, $\rho = 0$, or $\rho < 0$, respectivamente. Quando M é uma variedade Riemanniana, geralmente requer que a variedade seja completa. No caso de uma variedade semi-Riemanniana, não requer que (M, g) seja completa ([3], [4], [5] e [11]).

Observamos que a equação (0-1) pode ser considerada como uma extensão das Variedades de Einstein, pois se f é constante, temos que

$$Ric_g = \rho g, \quad \rho \in \mathbb{R}.$$

Dizemos que uma variedade de Einstein é um Ricci soliton trivial.

Em [12], os autores introduziram uma extensão natural do conceito de gradiente Ricci soliton, o quasi Ricci soliton. Assim, (M, g) é dito um **gradiente quasi Ricci soliton** se a equação (0-1) é satisfeita para alguma função $\rho \in C^\infty(M)$. Eles provaram resultados de existência e rigidez, deduziram estimativas da curvatura e investigaram algumas propriedades topológicas. Visto que os gradiente quasi Ricci solitons contem gradiente Ricci solitons como caso particular, podemos dizer que gradiente quasi Ricci soliton é **próprio** se a função ρ é não constante, veja ([6]).

Em [7], os autores apresentaram uma condição necessária e suficiente para a construção de gradiente quasi Ricci solitons que tem estrutura de produtos torcido. Eles provaram vários resultados e deram um exemplo de uma solução particular.

Em [1], os autores provaram que um gradiente quasi Ricci soliton com curvatura escalar não negativa e admitindo um campo gradiente conforme é o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ ou a esfera padrão $\mathbb{S}^n$. Eles mostraram que um quasi Ricci soliton compacto e localmente conformemente flat é isométrico a esfera Euclidiana $\mathbb{S}^n$, desde que uma condição integral seja válida. Além disso, eles construíram exemplos de gradiente quasi Ricci solitons. Eles consideraram a variedade produto torcido $M^{n+1} = R \times_{\cosh t} \mathbb{S}^n$ com a métrica $g = dt^2 + \cosh^2 t g_0$, onde g_0 é a métrica padrão do $\mathbb{S}^n$ e provaram que $(M^{n+1}, g, \nabla f, \rho)$, onde $f(x, t) = \sinh t$ e $\lambda(x, t) = \sinh t + n$, é um gradiente quasi Ricci soliton.

Em [2], os autores provaram que um gradiente quasi Ricci soliton $(M^n, g, \nabla f, \lambda)$, cujo tensor de Ricci é Codazzi, tem curvatura seccional constante. Em particular, no caso compacto, eles provaram que (M^n, g) é isométrico a esfera Euclidiana e f é a função altura. Além disso, eles classificaram os gradiente quasi Ricci solitons com curvatura escalar constante, admitindo que uma função adequada atinja seu máximo em M^n .

Exemplos de gradiente Ricci solitons foram obtidos considerando-se $\mathbb{R}^n$ com a métrica canônica g . Então $(\mathbb{R}^n, g)$ é um gradiente Ricci soliton, onde $f(x) = A \frac{|x|^2}{2} + g(x, B) + C$, $A, C \in \mathbb{R}$ e $B \in \mathbb{R}^n$ são todas as funções potenciais. Nesse caso, $(\mathbb{R}^n, g)$ é um gradiente Ricci soliton shrinking, steady ou expanding de acordo com o sinal da constante A . R. Bryant [19] provou que existe um gradiente Ricci soliton completo, steady, esfericamente simétrico para qualquer $n \geq 3$, que é conhecido como soliton de Bryant. Recentemente, Cao and Chen [20] mostraram que qualquer gradiente Ricci soliton completo, steady, localmente conformemente flat ou é isométrico soliton de Bryant ou é flat. Gradiente Ricci soliton completo shrinking conformemente flat foram caracterizados como sendo quocientes de $\mathbb{R}^n, \mathbb{S}^n$ ou $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}$, veja [21].

Apesar dos Ricci solitons terem sido introduzidos e estudados inicialmente no contexto Riemanniano, os Ricci solitons Lorentzianos foram investigados recentemente em [3], [4] e [11], onde os autores mostram que existem diferenças importantes no caso Riemanniano. A existência de gradiente Ricci solitons Lorentzianos, steady, localmente conformemente flat e distinto do soliton de Bryant foi provado por Batat em [3]. Em [5], os autores deram uma caracterização local dos gradiente Ricci solitons Lorentziano que são localmente conformemente flat.

Em [17], os autores consideraram gradiente Ricci solitons, conformes a espaço pseudo-Euclidiano, que são invariantes sobre a ação do grupo de translação $(n-1)$ -dimensional e encontraram todas as soluções no caso steady.

Falando agora sobre variedades de Einstein, sabemos que encontrar métricas não triviais com curvatura de Ricci constante é bem posto para $n > 3$, pois sabemos que uma

variedade Riemanniana de dimensão 3 tem curvatura de Ricci constante se, e somente se, tem curvatura seccional constante ([13] e [8]). Já para $n > 3$ a situação é muito diferente, pois, por exemplo, $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ tem curvatura de Ricci constante igual a 1, mas não tem curvatura seccional constante ([13] e [8]).

Em [14], os autores estudaram variedades semi-Riemannianas de Einstein com estrutura de produto torcido. Eles consideraram o caso em que a base é conforme ao espaço pseudo-Euclidiano e invariante pela ação do grupo de translação $(n-1)$ -dimensional, a fibra Ricci flat e encontraram todas as soluções no caso Ricci flat. Também obtiveram soluções explícitas, no caso vacuum, para equações de campos de Einstein.

Recentemente, em 2018, em [16], os autores consideraram variedades semi-Riemannianas de Einstein com estrutura de produto torcido $M = B^n \times_f F^m$, com $n \geq 3$ e $m \geq 2$. Quando a base é compacta e a fibra Ricci flat, eles provaram que M é simplesmente um espaço produto Riemanniano. Além disso, quando a base é conforme ao espaço pseudo-Euclidiano com curvatura escalar constante e a fibra é uma variedade semi-Riemanniana Ricci flat, eles encontraram todas as soluções quando o fator conforme é invariante por translação.

No nosso trabalho, estudamos gradiente quasi Ricci solitons, variedades de Einstein e gradiente Ricci soliton com estrutura de produto torcido. Os resultados obtidos podem ser descritos da seguinte maneira: provamos que todas as métricas conformes a métrica pseudo-Euclidiana e invariantes por rotação e translação são gradiente quasi Ricci soliton (Corolário 2.2 e 2.4). Além disso, construímos uma família de variedades produto torcido que são gradiente quasi Ricci soliton (Corolário 2.7).

Exibimos no caso pseudo-Euclidiano, exemplos de métricas conformes a métrica pseudo-Euclidiana, completas invariantes por translação e rotação que são gradiente quasi Ricci solitons.

Classificamos todas as variedades de Einstein do tipo $M = (\mathbb{R}^n, \bar{g}) \times_f F^m$, $m \geq 1$, F variedade Ricci flat, onde a base é invariante sobre a ação do grupo de translação $(n-1)$ -dimensional. (Teoremas 3.5 e 3.9).

Se M é gradiente Ricci soliton do tipo $M = (\mathbb{R}^n, \bar{g}) \times F^m$ e a fibra é Ricci flat então M é steady e exibimos todas as soluções. Finalmente provamos que se o produto torcido $M = (\mathbb{R}^n, \bar{g}) \times_f F^m$ for um gradiente Ricci soliton com F Ricci flat, e além disso, $\frac{\phi'}{\phi} = c \frac{f'}{f}$ então M é steady.

Preliminares

Neste capítulo elencaremos resultados e definições importantes para o desenvolvimento dos próximos capítulos, além de fixarmos as notações. As demonstrações dos resultados estarão devidamente indicadas para eventuais consultas do leitor ([8], [9] e [10]). A seguir, apresentamos nossos principais resultados. Denotaremos por φ, f, h derivadas de primeira ordem e φ, f, h derivadas de segunda ordem das funções φ, f e h , com respeito a x_i e $x_i x_j$, respectivamente. Além disso, para qualquer função diferenciável W , denotaremos

$$W' = \frac{dW}{d\xi} \quad \text{ou} \quad W' = \frac{dW}{dr}.$$

Denotaremos também por δ_{ij} o delta Kronecker, dado por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

1.1 Variedades semi-Riemannianas

Consideraremos M uma variedade semi-Riemanniana, $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M e $\mathcal{D}(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M . Pode-se verificar estes próximos conceitos e suas demonstrações em [8].

Definição 1.1 *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ de abertos U_α de $\mathbb{R}^n$ em M tais que:*

- i) $\bigcup_{\alpha} x_\alpha(U_\alpha) = M$;
- ii) Para todo par α, β , com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ são diferenciáveis;
- iii) A família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ é máxima relativamente às condições i) e ii).

O par $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ com $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ é dito uma *parametrização* (ou sistema de coordenadas) de M em p ; $x_\alpha(U_\alpha)$ é dita *vizinhança coordenada* em p . Uma família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ que satisfaz i) e ii) é dita uma *estrutura diferenciável* em M .

Seja V^* o conjunto de todas as funções K -linear de V em K e V um espaço vetorial. Denotaremos que $V^s = V_1 \times \dots \times V_s$.

Definição 1.2 Para inteiros $r \geq 0$, $s \geq 0$, onde r e s não se anulam ao mesmo tempo, uma função K -multilinear $A : (V^*)^r \times V^s \rightarrow K$ é dita um **tensor** do tipo (r, s) sobre V .

Um tensor do tipo $(0, 0)$ sobre V é simplesmente um elemento de K .

Falaremos agora de uma geometria semi-Riemanniana que envolve um tensor particular $(0, 2)$ em espaços tangentes. Para isso considere V um espaço vetorial real de dimensão finita.

Definição 1.3 Uma **forma bilinear** em V é uma função R -bilinear $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. Se $b(v, w) = b(w, v)$ para todo v, w , então dizemos que b é uma *forma bilinear simétrica*.

Definição 1.4 Uma *forma bilinear simétrica* b em V é

- i) **positiva (negativa) definida** se $b(v, v) > 0 (< 0)$, $\forall v \neq 0$;
- ii) **positiva (negativa) semidefinida** se $b(v, v) \geq 0 (\leq 0)$, $\forall v \in V$;
- iii) **não degenerada** se $b(v, w) = 0, \forall w \in V$ implica que $v = 0$.

Definição 1.5 O **índice** ν de uma forma bilinear simétrica b sobre V é o maior inteiro que é a dimensão de um subespaço $W \subset V$ em que b restrita a W é negativa definida.

Logo, $0 \leq \nu \leq \dim V$. E $\nu = 0$ se, e somente se, b é positiva semidefinida. A função $q : V \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $q(v) = B(v, v)$ é a forma quadrática associada a b .

Se $e_1, \dots, e_n$ é uma base de V então a matriz $n \times n$, $(b_{ij}) = b(e_i, e_j)$ é dita a *matriz de b relativa a $e_1, \dots, e_n$* . Como b é simétrica então a matriz também é simétrica. Prova-se que a forma bilinear simétrica é não degenerada se e somente se a matriz (b_{ij}) é invertível.

Definição 1.6 Um **tensor métrico** g em uma variedade diferenciável M é um $(0, 2)$ tensor simétrico não degenerado em M de índice constante. Em outras palavras, um tensor métrico g sobre M é uma aplicação que associa a cada ponto $p \in M$ uma forma bilinear simétrica não degenerada em $T_p M$ com índice constante $\nu, \forall p \in M$.

Definição 1.7 Uma **variedade semi-Riemanniana** é uma variedade diferenciável M munida de um tensor métrico g .

Consideraremos uma variedade semi-Riemanniana o par ordenado (M, g) . O valor comum ν do índice g_p em uma variedade semi-Riemanniana M é dita *índice* de M , $0 \leq \nu \leq n = \dim M$. Se $\nu = 0$, M é uma variedade Riemanniana. Então cada g_p é um produto interno positivo definido em $T_p M$. As variedades semi-Riemannianas são frequentemente chamadas de variedades pseudo Riemannianas. Usaremos a notação $g(v, w) = \langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$ para vetores tangentes e $g(V, W) = \langle V, W \rangle$ para campos de vetores.

Em um sistema de coordenadas locais (U, x) em torno de p as componentes do tensor métrico g são dadas por

$$g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Já que g é não degenerado, temos que para cada ponto p a matriz $(g_{ij}(p))$ é invertível, e denotaremos por $(g^{ij}(p))$ a matriz inversa. Como g é simétrica, $g_{ij} = g_{ji}$ então $g^{ij} = g^{ji}$. e finalmente o tensor métrico pode ser escrito por

$$g = \sum g_{ij} dx_i \otimes dx_j.$$

Definição 1.8 Um vetor tangente ν de M é dito

- (a) **spacelike** se $\langle \nu, \nu \rangle > 0$ ou $\nu = 0$;
- (b) **null** se $\langle \nu, \nu \rangle = 0$ e $\nu \neq 0$;
- (c) **timelike** se $\langle \nu, \nu \rangle < 0$.

O conjunto de todos os vetores null em $T_p M$ é dito *cone nulo* para $p \in M$.

Definição 1.9 Uma **conexão** ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

que se indica por $(X, Y) \longrightarrow \nabla_X Y$ e que satisfaz as seguintes propriedades

- i) $\nabla_X Y$ é $\mathcal{D}(M)$ -linear em X ;
- ii) $\nabla_X Y$ é $\mathbb{R}$ -linear em Y ;
- iii) $\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + X(f)Y, \forall f \in \mathcal{D}(M)$.

Teorema 1.10 O campo vetorial $[X, Y]$ é chamado **colchete** e definido por

$$[X, Y] = XY - YX,$$

que satisfaz as seguintes propriedades,

- (a) $[X, Y] = -[Y, X]$;
- (b) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$;
- (c) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$, *identidade de Jacobi*;
- (d) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

Teorema 1.11 *Em uma variedade semi-Riemanniana M existe uma única conexão ∇ tal que,*

- i) $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$;
- ii) $X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$.

$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

A ∇ que satisfaz o teorema acima é dita *conexão de Levi-Civita* de M .

Seja $u_1, \dots, u_n$ as coordenadas naturais em $\mathbb{R}_v^n$. Se V e $W = \sum W^i \partial_i$ são campos de vetores em $\mathbb{R}_v^n$, o campo vetorial

$$D_V W = \sum V(W^i) \partial_i$$

é dita a derivada covariante natural de W com respeito a V . Essa conexão natural D , dada acima é a conexão de Levi-Civita do espaço semi-Euclidiano $\mathbb{R}_v^n, \forall v = 0, 1, \dots, n$. Em relação ao sistema de coordenadas de $\mathbb{R}_v^n$, temos que

- (1) $g_{ij} = \delta_{ij} \epsilon_j$, onde δ_{ij} é o delta de Kronecker e

$$\epsilon_j = \begin{cases} -1, & 1 \leq j \leq v \\ +1, & v+1 \leq j \leq n. \end{cases} \quad (1-1)$$

- (2) $\Gamma_{ij}^k = 0, \forall 1 \leq i, j, k \leq n$.

Então o tensor métrico de $\mathbb{R}_v^n$ pode ser escrito por

$$g = \sum \epsilon_i dx_i \otimes dx_i.$$

Agora caracterizaremos a conexão ∇ de Levi-Civita em um sistema de coordenadas. Temos que

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

onde Γ_{ij}^k são os símbolos de Christoffel da conexão dados por

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_k g^{mk} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} (g_{jm}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (g_{im}) - \frac{\partial}{\partial x_m} (g_{ij}) \right\}. \quad (1-2)$$

Os conceitos de derivada covariante, transporte paralelo e geodésicas são definidas de maneira análoga ao caso Riemanniano.

Definição 1.12 *Seja M uma variedade semi-Riemanniana com ∇ a conexão de Levi-Civita. A aplicação $R : \mathfrak{X}^3(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por*

$$R_{XY}Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z, \quad Z \in \mathfrak{X}(M)$$

*é dita **operador curvatura** da variedade semi-Riemanniana M . R é multilinear.*

Associado a esse operador curvatura, denotaremos por R o *tensor curvatura* de M , $R : \mathfrak{X}^4(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ dado por,

$$R(X, Y, Z, T) = g(\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z, T), \quad Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Se $R = 0$, a métrica é dita *flat*.

Observe que se $M = \mathbb{R}^n$ então $R_{XY}Z = 0$, $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Considerando um sistema de coordenadas locais (U, x) ,

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l}\right) \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_i R^i_{jkl} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

onde as componentes de R são dadas por

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial}{\partial x_l} \Gamma^i_{kj} - \frac{\partial}{\partial x_k} \Gamma^i_{lj} + \sum_m \Gamma^i_{lm} \Gamma^m_{kj} - \sum_m \Gamma^i_{km} \Gamma^m_{lj}. \quad (1-3)$$

Agora, consideraremos uma função real mais simples que determina completamente R .

Definição 1.13 *Um subespaço bidimensional Π do espaço tangente $T_p M$ é dito **plano tangente** para M em p . Defina-se*

$$Q(x, y) = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2,$$

para vetores tangentes x, y .

O plano tangente Π é não degenerado se e somente se $Q(x, y) \neq 0$, para alguma base x, y de Π . Definiremos a seguir uma curvatura que está diretamente ligada ao operador curvatura.

Definição 1.14 *Seja Π um subespaço bidimensional não degenerado do espaço tangente $T_p M$. O número*

$$K(x, y) = \frac{\langle R_{xy}x, y \rangle}{Q(x, y)},$$

independe da escolha da base x, y de Π , e é dita **curvatura seccional** $K(\Pi)$ de Π .

Outros conceitos importantes que dependem da curvatura seccional e, portanto do operador curvatura, são o tensor de Ricci e a curvatura escalar.

Definição 1.15 Considere (M, g) uma variedade semi-Riemanniana, o **tensor curvatura de Ricci** é definido por

$$\text{Ric}_g(X, Z) = \text{traço} \{Y \longrightarrow R_{XY}Z\}, \quad X, Z \in \mathfrak{X}(M). \quad (1-4)$$

Definição 1.16 A **curvatura escalar**, K de M é uma função $K : M \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$K = \text{traço } A$$

onde A é uma aplicação linear auto-adjunta, $A : T_p M \longrightarrow T_p M$ associado ao tensor de Ricci, $\text{Ric}_g : T_p M \times T_p M \longrightarrow \mathbb{R}$ que é uma forma bilinear simétrica.

Em um sistema de coordenadas locais (U, x) ,

$$K(p) = \sum_{i,j} g^{ij} R_{ij}, \quad (1-5)$$

onde $R_{ij} = \sum_m R_{imj}^m$ e R_{jkl}^i expressa por (1-3).

Considere $f \in \mathcal{D}(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\varphi \in \mathcal{D}(M)$, definiremos os conceitos de gradiente, hessiana e laplaciano de uma função definida em M .

Definição 1.17

(1) O **gradiente** de φ em um ponto $p \in M$, denotado por $\text{grad}_g \varphi$, é o vetor de $T_p M$ tal que

$$g(\text{grad}_g \varphi, v) = d\varphi_p(v), \quad \forall v \in T_p M.$$

(2) A **Hessiana** de φ , denotada por $\text{Hess}_g \varphi$, é a forma bilinear simétrica dada por

$$\text{Hess}_g \varphi(X, Y) = g(\nabla_X(\text{grad}_g \varphi), Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

(3) O **laplaciano** de φ , denotada por $\Delta_g \varphi$, é dado por

$$\Delta_g \varphi = \text{div}(\text{grad}_g \varphi),$$

onde $\text{div} : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ é o divergente do campo X definido por

$$\text{div} X_p = \text{traço} \{Y_p \longrightarrow \nabla_Y X(p)\}, \quad p \in M.$$

Em um sistema de coordenadas locais (U, x) , temos que

$$\left\{ \begin{array}{l} \| \text{grad}_g \varphi \|^2 = \sum_{i,j}^n g^{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \\ (\text{Hess}_g \varphi)_{ij} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \\ \Delta_g \varphi = \sum_{i,j}^n g^{ij} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right). \end{array} \right. \quad (1-6)$$

Se $M = \mathbb{R}^n$ e $g_{ij} = \delta_{ij} \varepsilon_i$, $\varepsilon_i = \pm 1$ então as expressões da definição (1-6), tornam-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \| \text{grad}_g \varphi \|^2 = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 \\ (\text{Hess}_g \varphi)_{ij} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \\ \Delta_g \varphi = \sum_i^n \varepsilon_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}. \end{array} \right. \quad (1-7)$$

Definição 1.18 Duas métricas g e $\bar{g}$ em uma variedade M são conformes se existe uma função positiva e diferenciável $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $p \in M$ e todo $u, v \in T_p M$ vale a igualdade

$$\bar{g}(u, v) = \frac{1}{\varphi^2(p)} g(u, v).$$

Se g for uma métrica flat então a métrica $\bar{g}$ é chamada **conformemente flat**.

Falaremos agora de completude.

Definição 1.19 Uma variedade semi-Riemanniana (M, g) é (geodesicamente completa) **completa** se toda geodésica de M está definida $\forall t \in \mathbb{R}$.

Definição 1.20 Uma **curva divergente** em uma variedade Riemanniana (M, g) é uma aplicação diferenciável $\alpha : [0, \infty) \rightarrow M$ se, para qualquer compacto $A \subset M$, existe $t_0 \in (0, \infty)$ tal que $\alpha(t) \notin A$, para $t > t_0$. Define-se o comprimento de α por

$$L_g(\alpha) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t |\alpha'(r)| dr$$

Este próximo resultado relaciona o conceito de variedade completa com o comprimento de curvas divergentes na variedade.

Proposição 1.21 *Uma variedade Riemanniana (M, g) é completa se, e somente se, o comprimento de qualquer curva divergente é ilimitado.*

O próximo resultado será útil para estudarmos a completude de uma variedade Riemanniana que é conforme a uma variedade Riemanniana completa ([26]).

Proposição 1.22 *Sejam M e $\bar{M}$ variedades Riemannianas e $f : M \rightarrow \bar{M}$ um difeomorfismo. Admita que $\bar{M}$ é completa e que existe uma constante $c > 0$ tal que*

$$\|v\| \geq c \|df_p(v)\|,$$

para todo $p \in M$ e todo $v \in T_p M$. Então M também é completa.

1.2 Gradiente Ricci soliton e variedades de Einstein

A definição a seguir é uma extensão natural de variedade de Einstein.

Definição 1.23 *Seja (M^n, g) , com $n \geq 3$ uma variedade semi-Riemanniana. Dizemos que (M, g) é um **gradiente Ricci soliton** se existir uma função diferenciável $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ (chamada função potencial) tal que*

$$Ric_g + Hess_g(f) = \rho g, \quad \rho \in \mathbb{R}, \quad (1-8)$$

onde Ric_g é o tensor de Ricci e a $Hess_g(f)$ é a Hessiana de f com respeito a métrica g .

Os gradiente Ricci solitons são classificados de acordo com o sinal de ρ , então dizemos que um gradiente Ricci soliton é shrinking, steady ou expanding se $\rho > 0$, $\rho = 0$ ou $\rho < 0$, respectivamente.

Quando M é uma variedade Riemanniana, normalmente exige-se, na definição (1.23), que a variedade seja completa. No caso de variedades semi Riemannianas, essa exigência não é feita, ([3], [4], [5] e [11]).

Agora iremos enunciar alguns resultados do artigo do W. Kuhnell ([25]) que serão de fundamental importância para o desenvolvimento deste trabalho. Em seguida, apresentaremos resultados sobre transformações conformes entre espaços de Einstein.

Definição 1.24 *Se considerarmos em (1-8), f uma função constante então*

$$Ric_g = \rho g, \quad \rho \in \mathbb{R}. \quad (1-9)$$

*Neste caso, dizemos que M é uma **variedade de Einstein**.*

A definição (1.24) só sera relevante para $n \geq 3$. De fato, se

- (a) $n = 1 \implies \text{Ric}_g = 0$,
- (b) $n = 2 \implies \text{Ric}_g(X, Y) = \frac{1}{2}K_g(X, Y)$, para cada $p \in M$. Assim uma variedade semi-Riemanniana bidimensional é Einstein se, e somente se, tem curvatura Gaussiana constante.
- (c) $n = 3$, então (M, g) é Einstein se, e somente se, tem curvatura seccional constante.

Lema 1.25 *Seja (M^n, g) uma variedade de Einstein, com $\bar{g} = \frac{1}{\phi^2}$, então as seguintes condições são equivalentes,*

- (1) $(M, \bar{g})$ é uma variedade Einstein;
- (2) Existe uma função $\rho : M \longrightarrow \mathbb{R}$ com $\text{Hess}_g f = \rho g$;
- (3) $\text{Hess}_g f = \frac{\Delta_g f}{n} g$
- (4) Existe uma constante B tal que $\text{Hess}_g f = (-\rho f + B)g$.
E cada uma dessas condições implicam que
- (5) Existem constantes B e C tais que $\| \text{grad}_g \phi \|^2 = -\rho f^2 + 2Bf + C$.

O problema acima é equivalente encontrar uma solução para o sistema de equações diferenciais,

$$\text{Hess}_g f = \frac{\Delta_g f}{n} g.$$

Como as variedades Riemannianas de curvatura seccional constante também são variedades de Einstein, podemos então pensar no problema que Kuhnel propôs em ([25]), dado por:

"Dada uma variedade Riemanniana (M, g) de curvatura seccional constante, em que condições existe uma função $\phi \in \mathcal{D}(M)$ tal que $(M, \bar{g})$, onde $\bar{g} = \frac{1}{\phi^2} g$ também é uma variedade Riemanniana de curvatura seccional constante."

Então segue o próximo Lema.

Lema 1.26 *Seja (M^n, g) , $n \geq 3$, um espaço de curvatura seccional constante K , $f \in \mathcal{D}(M)$ e $\bar{g} = \frac{1}{\phi^2}$, então as seguintes condições são equivalentes,*

- (1) $(M, \bar{g})$ é um espaço de curvatura seccional constante $\bar{K}$;
- (2) $(M, \bar{g})$ é uma variedade de Einstein;
- (3) $\text{Hess}_g f = \frac{\Delta_g f}{n} g$
- (4) Existe uma constante B tal que $\text{Hess}_g f = (-Kf + B)g$;
E cada uma dessas condições implica que K e $\bar{K}$ satisfaz
- (5) $\bar{K} = f^2 K + \frac{2}{n} f \Delta_g f - \| \text{grad}_g \phi \|^2$.

Definição 1.27 *Seja (M^n, g) uma variedade semi Riemanniana de dimensão $n \geq 3$. Dizemos que (M, g) é um **gradiente quasi Ricci soliton** se existe uma função diferenciável $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ (chamada função potencial), tal que vale*

$$Ric_g + Hess_g(f) = \rho g, \quad \rho \in C^\infty(M).$$

Considerando duas métricas conformes g e $\bar{g} = \frac{1}{\phi^2}$ em uma variedade $M^n, n \geq 3$, então a relação entre os tensores de Ricci de g e $\bar{g}$ é dada por

$$Ric_{\bar{g}} - Ric_g = \frac{1}{\phi^2} \left\{ (n-2)\phi Hess_g \phi + [\phi \Delta_g \phi - (n-1) \|\text{grad}_g \phi\|^2] g \right\}. \quad (1-10)$$

1.3 Produto torcido

Os resultados desta seção podem ser encontrados em ([8]). Começaremos definindo campos relacionados entre variedades, daremos a noção de levantamento e enfim definiremos o produto torcido e todas as relações que o envolve.

Definição 1.28 *Sejam M, N variedades diferenciáveis, $\phi : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Diz-se que os campos X e Y são ϕ -relacionados se*

$$d\phi_p(X_p) = (Y \circ \phi)(p) = Y(\phi(p)) = Y_{\phi(p)}, \quad \forall p \in M.$$

Se X e Y são ϕ -relacionados então denotaremos $X \stackrel{\phi}{\sim} Y$.

Lema 1.29 *Sejam M, N variedades diferenciáveis, $\phi : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável, $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(M)$ são ϕ -relacionados se, e somente se,*

$$X(g \circ \phi) = Y(g) \circ \phi, \quad \forall g \in \mathcal{D}(N).$$

Lema 1.30 *Sejam M, N variedades diferenciáveis, $\phi : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável, $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$.*

$$\text{Se } X_1 \stackrel{\phi}{\sim} Y_1 \text{ e } X_2 \stackrel{\phi}{\sim} Y_2 \text{ então } [X_1, X_2] \stackrel{\phi}{\sim} [Y_1, Y_2].$$

Lema 1.31 *Sejam M, N variedades diferenciáveis, $\phi : M \rightarrow N$ um difeomorfismo. Para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$ existe um único $d\phi(X) \in \mathfrak{X}(N)$, que é ϕ -relacionados com X .*

Agora, relembremos algumas definições e propriedades importantes de variedades produto com o intuito de relacioná-las com o produto torcido ([8]).

Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis e considere $M \times N$ a variedade produto.

Então

(a) As projeções

$$\begin{aligned}\pi : M \times N &\longrightarrow M \\ \pi(p, q) &\longmapsto p\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma : M \times N &\longrightarrow N \\ \sigma(p, q) &\longmapsto q\end{aligned}$$

são aplicações diferenciáveis, de fato, submersões.

(b) Uma aplicação $\phi : P \longrightarrow M \times N$, é diferenciável se, e somente se, $\pi \circ \phi$ e $\sigma \circ \phi$ são ambas diferenciáveis.

(c) Para cada $(p, q) \in M \times N$ os subconjuntos

$$M \times q = \{(r, q) \in M \times N; r \in M\}$$

$$p \times N = \{(p, s) \in M \times N; s \in N\}$$

são subvariedades de $M \times N$.

(d) Para cada $(p, q) \in M \times N$

$\pi|_{M \times q}$ é um difeomorfismo de $M \times q$ em M ;

$\sigma|_{p \times N}$ é um difeomorfismo de $p \times N$ em N .

Por (b) os espaços tangentes $T_{(p, q)}M = T_{(p, q)}(M \times q)$ e $T_{(p, q)}N = T_{(p, q)}(p \times N)$ são subespaços do espaço tangente $M \times N$ em (p, q) .

Lema 1.32 *O espaço $T_{(p, q)}(M \times N)$ é a soma direta dos seus subespaços $T_{(p, q)}M$ e $T_{(p, q)}N$, isto é, cada elemento $v \in T_{(p, q)}(M \times N)$ tem uma única expressão dada por*

$$v = v_1 + v_2, \text{ onde } v_1 \in T_{(p, q)}M \text{ e } v_2 \in T_{(p, q)}N.$$

Observemos que, quando tivermos o produto $M \times N$ nesta ordem, iremos chamar as subvariedades $M \times q$ e $p \times N$, de folhas horizontais e fibras verticais, nesta ordem.

Para podermos relacionar propriedades geométricas de $M \times N$ com as correspondentes propriedades das componentes M e N , uma noção fundamental é a de levantamento, que definiremos a seguir.

Definição 1.33 *Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis e considere $M \times N$ a variedade produto.*

(a) *Seja $f \in \mathcal{D}(M)$. O levantamento de f a $M \times N$ é definido por $\tilde{f} = f \circ \pi \in \mathcal{D}(M \times N)$;*

(b) *Se $v \in T_p M$ e $q \in N$, então o levantamento $\tilde{v}$ de v a (p, q) é o único vetor $\tilde{v} \in T_{(p, q)}M$ tal que $d\pi(\tilde{v}) = v$. Como $\tilde{v} \in T_{(p, q)}M$ então $d\sigma(\tilde{v}) = 0$;*

(c) *Se $X \in \mathfrak{X}(M)$, o levantamento de X a $M \times N$ é o campo vetorial $\tilde{X}$ em $M \times N$ cujo valor em $(p, q) \in M \times N$ é o levantamento de X_p a (p, q) . Assim,*

$$d\pi(\tilde{X}_{(p,q)}) = (X \circ \pi)(p, q) = X_p \text{ e } d\sigma(\tilde{X}_{(p,q)}) = 0,$$

O sistema de coordenadas mostra que $\tilde{X}$ é suave. Portanto, o levantamento de $X \in \mathfrak{X}(M)$ a $M \times N$ é o único elemento de $\mathfrak{X}(M \times N)$ que é π -relacionados a X e σ -relacionados ao campo vetor nulo em N . E ainda, como $d\sigma|_{T_{(p,q)}M} = 0$, o levantamento $\tilde{X}$ de $X \in \mathfrak{X}(M)$ a $M \times N$ é constante em cada fibra $p \times N$;

- (d) O conjunto de todos os levantamentos $\tilde{X}$ de $X \in \mathfrak{X}(M)$ será denotado por $\mathcal{L}(M)$ e tais levantamentos são chamados horizontais;
- (e) Funções, vetores tangentes e campos de vetores em N são levantamentos para $M \times N$ da mesma forma usando-se a projeção σ . O conjunto de todos os levantamentos $\tilde{Y}$ de $Y \in \mathfrak{X}(N)$ será denotado por $\mathcal{L}(N)$, tais levantamentos são chamados verticais e, $\tilde{Y} \in \mathfrak{X}(M \times N)$.

Proposição 1.34 *Sejam M e N variedades diferenciáveis e considere $M \times N$ a variedade produto. Se $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathcal{L}(M)$ e $\tilde{V} \in \mathcal{L}(N)$, então*

- (a) $[\tilde{X}, \tilde{Y}] = \widetilde{[X, Y]} \in \mathcal{L}(M)$ e similarmente para $\mathcal{L}(N)$;
- (b) $[\tilde{X}, \tilde{V}] = 0$, onde $0 \in \mathfrak{X}(M \times N)$ é o campo nulo.

Definição 1.35 *Considere M e N variedades semi-Riemannianas, e considere a variedade produto $M \times N$ com sua estrutura usual. Sejam $\pi : M \times N \rightarrow M$ e $\sigma : M \times N \rightarrow N$ as projeções canônicas. A métrica usual em $M \times N$ é definida por*

$$g = \pi^*(g_M) + \sigma^*(g_N),$$

ou seja,

$$\langle u, v \rangle_{(p,q)} = \langle d\pi(u), d\pi(v) \rangle_p + \langle d\sigma(u), d\sigma(v) \rangle_q, \quad \forall (p, q) \in M \times N, u, v \in T_{(p,q)}(M \times N).$$

A variedade $M \times N$ munida com a métrica produto é chamada *Variedade produto semi-Riemanniana*.

Dados $\tilde{X} \in \mathcal{L}(M)$ e $\tilde{Y} \in \mathcal{L}(N)$, $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$ são campos ortogonais em $M \times N$, ou seja, $\langle \tilde{X}, \tilde{Y} \rangle : M \times N \rightarrow \mathbb{R}$ é a função identicamente nula na métrica produto.

Considere uma variedade produto semi-Riemanniana $B \times F$, o tensor métrico é $\pi^*(g_B) + \sigma^*(g_F)$, onde π e σ são as projeções de $B \times F$ sobre B e F respectivamente.

A notação padrão será usada para a geometria de B , mas o tensor métrico de F será denotado por $g_F = (\cdot, \cdot)$ e sua conexão de Levi-Civita por ∇ .

Definição 1.36 *Sejam B e F variedades semi-Riemannianas, $f > 0$ uma função diferenciável em B . O produto torcido $M = B \times_f F$ é a variedade produto $B \times F$ munida da métrica*

$$g = \pi^*(g_B) + (f \circ \pi)^2 \sigma^*(g_F),$$

onde f é dita **função torção**, B variedade base e F variedade fibra de M . Como na figura 1.

Explicitamente, se v é tangente a $M = B \times_f F$ em $(p, q) = x$, com

$$v = v_1 + v_2, v_1 \in T_p B, v_2 \in T_q F,$$

então,

$$g(v, v) = \langle v, v \rangle_x = \langle d\pi_{(p,q)}(v), d\pi_{(p,q)}(v) \rangle_p + f^2(p) \langle d\sigma_{(p,q)}(v), d\sigma_{(p,q)}(v) \rangle_q$$

Assim,

$$g(v, v) = \langle v_1, v_1 \rangle_p^B + (f \circ \pi)^2 \langle v_2, v_2 \rangle_q^F.$$

Se $f \equiv 1$, $M \equiv B \times_f F$ se reduz a variedade produto Riemanniano.

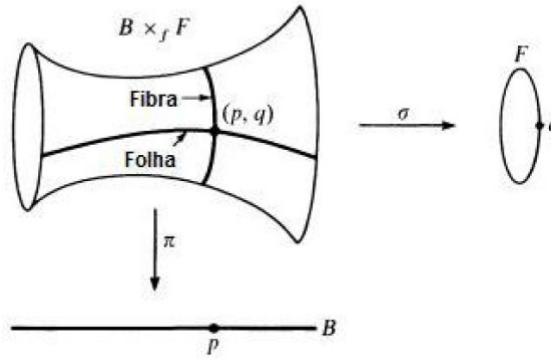


Figura 1.1: figura 1

Exemplo 1.37 (*Superfície de Revolução*) Toda superfície de revolução é um produto torcido, sendo suas folhas as diferentes posições da curva rotacionada e as fibras os círculos de revolução.

Considere S a superfície de revolução. Assim, considerando a parametrização

$$\varphi : (0, 2\pi) \times (a, b) \longrightarrow S,$$

dada por

$$X(u, v) = (f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v)),$$

onde $\alpha : (a, b) \longrightarrow \alpha((a, b))$, $\alpha(v) = (f(v), 0, g(v))$, $f(v) > 0$, é uma parametrização de uma curva regular C no plano XZ . Então a métrica em S é dada por

$$ds^2 = du^2 + [f(v)]^2 dv^2$$

onde du^2 é a métrica em $S^1(1)$. Portanto, $S = C \times_f S^1(1)$.

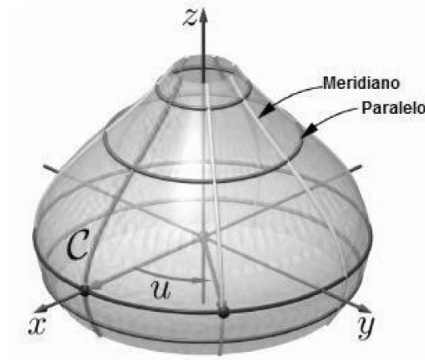


Figura 1.2: revolução

Exemplo 1.38 ($\mathbb{R}^3 - 0$ como produto torcido) O espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$ pode ser visto como um produto torcido.

De fato, considere o $\mathbb{R}^3 - 0$ em coordenadas esféricas, isto é,

$$(x, y, z) = (r \cos u \sin v, r \sin u \sin v, r \cos v),$$

e a métrica é dada por,

$$ds^2 = dr^2 + r^2 (du^2 + \sin^2 u dv^2).$$

Evidentemente que $\mathbb{R}^3 - 0$ é difeomorfo a $\mathbb{R}_+ \times S^2$ pela aplicação $(t, p) \mapsto tp$. Portanto, $\mathbb{R}^3 - 0$ pode ser identificado como o produto torcido $\mathbb{R}_+ \times_r S^2$. Em $\mathbb{R}^3 - 0$ as folhas são os raios que partem da origem e as fibras são as esferas $S^2, r > 0$. Em geral $\mathbb{R}^n - 0$ com a métrica usual, é isométrico a $\mathbb{R}_+ \times_r S^{n-1}$.

Proposição 1.39 Assim como na variedade produto semi-Riemanniano, para cada $(p, q) \in M = B \times_f F$, as fibras $p \times F = \pi^{-1}(p)$ e as folhas $B \times q = \sigma^{-1}(q)$, com a métrica induzida de g , são subvariedades semi-Riemannianas de M , e a métrica produto torcido em M implica nas seguintes condições geométricas:

- (a) Para cada $q \in F$, a aplicação $\pi_q : \pi|_{B \times q}$ é uma isometria sobre B ;
- (b) Para cada $p \in B$, a aplicação $\sigma_q : \sigma|_{p \times F}$ é uma homotetia positiva sobre F , com fator escalar $1/f(p)$;
- (c) Para cada $(p, q) \in M$, a folha $\sigma^{-1}(q)$ e a fibra $\pi^{-1}(p)$ são ortogonais em (p, q) .

Vetores tangentes às folhas são denominadas *horizontais*; vetores tangentes às fibras são denominados *verticais*. Denotaremos por

$\mathcal{H}$ a projeção ortogonal de $T_{(p,q)}M$ sobre seu subespaço horizontal $T_{(p,q)}B \equiv T_{(p,q)}(B \times q)$.
 $\mathcal{V}$ a projeção ortogonal de $T_{(p,q)}M$ sobre seu subespaço vertical $T_{(p,q)}F \equiv T_{(p,q)}(p \times F)$.

Dessa forma, dado $v \in T_{(p,q)}M$, com $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in T_{(p,q)}B$, $v_2 \in T_{(p,q)}F$, então $\mathcal{H}(v) = v_1$ e $\mathcal{V}(v) = v_2$. E ainda, dado $X \in \mathfrak{X}(B)$, $\mathcal{H}$ e $\mathcal{V} \in \mathfrak{X}(B)$.

Portanto, para campos vetoriais verticais V, W em M a formula $h(V, W) = \mathcal{H}(\nabla_V W)$ produz como resultado o tensor da segunda forma fundamental das fibras.

Vamos determinar agora, a conexão Riemanniana, o tensor curvatura e o tensor de Ricci de uma variedade produto torcido, envolvendo neste caso, a função torção.

Proposição 1.40 *Sejam $M = B \times_f F$ um produto torcido com métrica $g, h \in \mathcal{D}(B)$ e $\psi \in \mathcal{D}(F)$, então*

- (a) $\text{grad}_g \tilde{h} = \widetilde{\text{grad}_{g_B} h}$, onde $\tilde{h} = h \circ \pi$ e $\widetilde{\text{grad}_{g_B} h}$ é o levantamento de $\text{grad}_g h \in \mathfrak{X}(B)$, para a variedade M ;
- (b) $\text{grad}_g \tilde{\psi} = \frac{\widetilde{\text{grad}_{g_B} \psi}}{f^2}$ onde $\tilde{\psi} = \psi \circ \sigma$ e $\widetilde{\text{grad}_{g_B} \psi}$ é o levantamento de $\text{grad}_g \psi \in \mathfrak{X}(F)$, para a variedade M .

Proposição 1.41 *Sejam $M = B \times_f F$ um produto torcido com a métrica $g, \tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathcal{L}(B)$ e $\tilde{V}, \tilde{W} \in \mathcal{L}(F)$, então*

- (a) $\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}$ é o levantamento de $\nabla_X^B Y$ em B ;
- (b) $\nabla_{\tilde{X}} \tilde{V} = \nabla_{\tilde{V}} \tilde{X} = \left(\frac{\tilde{X}(\tilde{f})}{\tilde{f}} \right) \tilde{V}$, onde $\tilde{f} = f \circ \pi$;
- (c) $\mathcal{H}(\nabla_{\tilde{V}} \tilde{W}) = h(\tilde{V}, \tilde{W}) = - \left(\frac{\langle \tilde{V}, \tilde{W} \rangle}{\tilde{f}} \right) \text{grad}_g \tilde{f}$;
- (d) $\mathcal{V}(\nabla_{\tilde{V}} \tilde{W}) \in \mathcal{L}(F)$ é o levantamento de $\nabla_V^F W$ em F .

Corolário 1.42 *As folhas $B \times q$ de um produto torcido são totalmente geodésicas e as fibras $p \times F$ são totalmente umbílicas.*

Lema 1.43 *Sejam $M = B \times_f F$ um produto torcido com a métrica g , então (M, g) é uma variedade completa se, e somente se, (B, g_B) e (F, g_F) são completas.*

Proposição 1.44 *Sejam $M = B \times_f F$ um produto torcido com métrica $h \in \mathcal{D}(B)$ e $\psi \in \mathcal{D}(F)$, então*

- (a) $\Delta \tilde{h} = \Delta_B h + d \frac{\langle \text{grad}_{g_B} h, \text{grad}_{g_B} f \rangle^B}{f}$, onde $d = \dim F$, Δ é o Laplaciano em M , Δ_B é o Laplaciano em B e $\tilde{h} = h \circ \pi$;
- (b) $\Delta \tilde{\psi} = \frac{\Delta_F \psi}{f^2}$, onde Δ_F é o Laplaciano em F e $\tilde{\psi} = \psi \circ \sigma$.

Lema 1.45 *Sejam $f \in \mathcal{D}(B)$, o levantamento a M da hessiana de f , e a hessiana do levantamento de f somente em vetores horizontais, isto é, se $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathcal{L}(B)$ então temos*

$$\text{Hess}_g \tilde{f}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \widetilde{\text{Hess}_{g_B} f}(X, Y).$$

Proposição 1.46 *Sejam $M = B \times_f F$ um produto torcido com métrica g , e os tensores curvatura Riemanniana de M , B e F dados por R , R^B e R^F , respectivamente. Se $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z} \in \mathcal{L}(B)$ e $\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{W} \in \mathcal{L}(F)$, então*

- (a) $R(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{Z} \in \mathcal{L}(B)$ é o levantamento de $R^B(X, Y)Z$ em B ;
- (b) Os levantamentos dos tensores R^B , R^F a M dão os tensores de curvatura Riemanniana de cada folha $B \times q$ e de cada fibra $p \times F$;
- (c) $R(\tilde{V}, \tilde{X})\tilde{Y} = \frac{\widetilde{\text{Hess}_{g_B} f(X, Y)}}{\tilde{f}} \tilde{V}$, onde $\widetilde{\text{Hess}_{g_B} f}$ é o levantamento da hessiana de f a M , onde $\tilde{f} = f \circ \pi$
- (d) $R(\tilde{X}, \tilde{Y})\tilde{V} = R(\tilde{V}, \tilde{W})\tilde{X} = 0$;
- (e) $R(\tilde{X}, \tilde{V})\tilde{W} = \frac{\langle \tilde{V}, \tilde{W} \rangle}{\tilde{f}} \nabla_{\tilde{X}} \text{grad}_g \tilde{f}$;
- (f) $R(\tilde{V}, \tilde{W})\tilde{U} = \tilde{R}^F(\tilde{V}, \tilde{W})\tilde{U} - \frac{\langle \text{grad}_g \tilde{f}, \text{grad}_g \tilde{f} \rangle}{\tilde{f}^2} (\langle \tilde{V}, \tilde{U} \rangle \tilde{W} - \langle \tilde{W}, \tilde{U} \rangle \tilde{V})$.

Corolário 1.47 *Sejam $M = B \times_f F$ um produto torcido com métrica g , $\dim F = d > 1$, $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathcal{L}(B)$ e $\tilde{V}, \tilde{W} \in \mathcal{L}(F)$. Então*

- (a) $\text{Ric}(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \text{Ric}^B(X, Y) - \frac{d}{\tilde{f}} \text{Hess}_{g_B} f(\tilde{X}, \tilde{Y})$;
- (b) $\text{Ric}(\tilde{X}, \tilde{V}) = 0$;
- (c) $\text{Ric}(\tilde{V}, \tilde{W}) = \text{Ric}^F(V, W) - \left[\frac{\Delta_B f}{\tilde{f}} + (d-1) \frac{\langle \text{grad}_{g_B} f, \text{grad}_{g_B} f \rangle}{\tilde{f}^2} \right] \langle \tilde{V}, \tilde{W} \rangle$.

Observe que nesse último corolário se a $\dim F = 1$, então as expressões (a) e (b) são exatamente as mesmas e o item (c) reduz-se a

$$R(\tilde{V}, \tilde{W}) = - \left(\frac{\Delta_B f}{\tilde{f}} \right) (\tilde{V}, \tilde{W}),$$

pois para $\dim F = 1$ tem-se $\text{Ric}^F(V, W) = 0$.

Agora, classificaremos os produto torcido que são localmente conformemente flat.

Teorema 1.48 *Sejam $M = B \times_f F$ uma variedade produto torcido semi-Riemanniano. Então*

- (a) *Se $\dim B = 1$, então $M = B \times_f F$ é localmente conformemente flat se, e somente se, (F, g_F) é um espaço de curvatura seccional constante;*
- (b) *Se $\dim B > 1$ e $\dim F > 1$, então $M = B \times_f F$ é localmente conformemente flat se, e somente se,*

- i) (F, g_F) é um espaço de curvatura seccional constante λ_F ;*
- ii) A função $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ define uma deformação conforme em B tal que $(B, \frac{1}{f^2}g_B)$ é um espaço de curvatura seccional constante $\lambda_B = -\lambda_F$.*
- (c) Se $\dim F = 1$, então $M = B \times_f F$ é localmente conformemente flat se, e somente se, a função $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ define uma deformação conforme em B tal que $(B, \frac{1}{f^2}g_B)$ é um espaço de curvatura seccional constante.*

Gradiente quasi Ricci soliton

Neste capítulo caracterizaremos as famílias de gradiente quasi Ricci solitons invariantes por rotação e translação.

2.1 Gradiente quasi Ricci soliton no espaço pseudo-Euclidiano

Nesta seção mostraremos que todo espaço conforme ao espaço pseudo-Euclidiano, invariante por rotação e translação são gradiente quasi Ricci solitons, e exibiremos uma infinidade de exemplos desses gradiente quasi Ricci solitons. Adotaremos, de agora em diante, $\text{grad}_g = \nabla_g$

2.1.1 Invariantes por rotação

Neste primeiro teorema, caracterizaremos os gradientes quasi Ricci solitons invariantes por rotação.

Teorema 2.1 *Seja $(\mathbb{R}^n, g)$ um espaço pseudo-Euclidiano $n \geq 3$ com coordenadas $x = (x_1, \dots, x_n)$, $g_{ij} = \delta_{ij}\epsilon_i$, $\epsilon_i = \pm 1$ com pelo menos um $\epsilon_i = 1$. Considere funções diferenciáveis não constantes $f(r)$ e $\phi(r)$, onde $r = \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i^2$. Existem métricas $\bar{g} = \frac{1}{\phi^2} g$ tais que $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$ são um gradiente quasi Ricci soliton com f uma função potencial se, e somente se, as funções f , ϕ e ρ satisfazem*

$$\begin{cases} (n-2)\phi'' + 2\phi'f' + \phi f'' = 0 \\ 4(n-1)\phi\phi' + 4r\phi\phi'' - 4(n-1)r(\phi')^2 - 4r\phi\phi'f' + 2\phi^2f' = \rho. \end{cases} \quad (2-1)$$

Prova. Seja $(\mathbb{R}^n, g)$ um espaço pseudo-Euclidiano $n \geq 3$ com coordenadas $x = (x_1, \dots, x_n)$, $g_{ij} = \delta_{ij}\epsilon_i$. Do artigo ([17]), temos que $\bar{g} = \frac{1}{\phi^2} g$ é um gradiente Ricci soli-

ton com f uma função potencial se, e somente se, as funções f e φ satisfazem

$$\begin{cases} \varphi_{,x_i x_j} = -\frac{1}{n-2} \left(\varphi_{,x_i} f_{,x_j} + \varphi_{,x_j} f_{,x_i} + \varphi f_{,x_i x_j} \right), i \neq j \\ (n-2)\varphi\varphi_{,x_i x_i} + \varepsilon_i \left[\varphi \Delta_g \varphi - (n-1) \|\nabla_g \varphi\|^2 \right] + 2\varphi\varphi_{,x_i} f_{,x_i} + \varphi^2 f_{,x_i x_i} - \varphi \varepsilon_i \sum_{k=1}^n \varepsilon_k f_{,x_k} \varphi_{,x_k} = \varepsilon_i \rho. \end{cases} \quad (2-2)$$

Verifica-se de maneira análoga, que o artigo ([17]) também se aplica no caso de gradiente quasi Ricci soliton.

Assumimos que $f(r)$ e $\varphi(r)$ são funções de r , onde $r = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i^2$. Portanto, temos

$$\begin{aligned} \varphi_{,x_i} &= 2\varepsilon_i x_i \varphi', & \varphi_{,x_i x_j} &= 4\varepsilon_i \varepsilon_j x_i x_j \varphi'', & \varphi_{,x_i x_i} &= 4x_i^2 \varphi'' + 2\varepsilon_i \varphi', \\ f_{,x_i} &= 2\varepsilon_i x_i f', & f_{,x_i x_j} &= 4\varepsilon_i \varepsilon_j x_i x_j f'', & f_{,x_i x_i} &= 4x_i^2 f'' + 2\varepsilon_i f', \end{aligned}$$

Pelas relações (1-6), tem-se

$$\|\nabla_g \varphi\|^2 = 4r(\varphi')^2, \quad \Delta_g \varphi = 4r\varphi'' + 2n\varphi'.$$

Substituindo estas expressões na primeira equação de (2-2), temos

$$4\varepsilon_i \varepsilon_j x_i x_j \left[(n-2)\varphi'' + 2\varphi' f' + \varphi f'' \right] = 0, \quad \forall i \neq j.$$

Portanto, como existe $i \neq j$ tal que $x_i x_j \neq 0$, então a equação acima reduz-se a

$$(n-2)\varphi'' + 2\varphi' f' + \varphi f'' = 0. \quad (2-3)$$

De maneira análoga, substituindo as expressões na segunda equação de (2-2), temos

$$\begin{aligned} \varepsilon_i \left[4(n-1)\varphi\varphi' + 4r\varphi\varphi'' - 4(n-1)r(\varphi')^2 + 2\varphi^2 f' - 4r\varphi\varphi' f' \right] + \\ + 4x_i^2 \varphi \left[(n-2)\varphi'' + 2\varphi' f' + \varphi f'' \right] = \varepsilon_i \rho. \end{aligned}$$

Agora, usando a expressão (2-3), a equação acima reduz-se a

$$4(n-1)\varphi\varphi' + 4r\varphi\varphi'' - 4(n-1)r(\varphi')^2 + 2\varphi^2 f' - 4r\varphi\varphi' f' = \rho, \quad (2-4)$$

e portanto esta provado o teorema. A recíproca deste teorema pode ser facilmente verificada. $\square$

Observe que temos três funções e duas equações. Portanto, se escolhermos uma função conforme para o Teorema 2.1 podemos construir um gradiente quasi Ricci soliton pseudo-Riemanniano invariante pela ação de um grupo pseudo ortogonal (no caso Riemanniano, rotação), desde que o sistema (2-1) seja integrável. Resumimos esta discussão no seguinte Corolário.

Corolário 2.2 *Seja $(\mathbb{R}^n, g)$ um espaço pseudo-Euclidiano $n \geq 3$ com coordenadas $x = (x_1, \dots, x_n)$, $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i$, $\varepsilon_i = \pm 1$ com pelo menos um $\varepsilon_i = 1$. Considere funções diferenciáveis não constantes $f(r)$ e $\varphi(r)$, onde $r = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i^2$. Dada qualquer função $\varphi(r)$, a métrica $\bar{g} = \frac{1}{\varphi^2}g$ é um gradiente quasi Ricci soliton com f uma função potencial, onde as funções f e ρ são dadas por*

$$\begin{cases} f(r) = \int \left[c - (n-2) \int \varphi \varphi'' dr \right] \frac{1}{\varphi^2} dr + k \\ \rho(r) = 4(n-1)\varphi\varphi' + 4r\varphi\varphi'' - 4(n-1)r(\varphi')^2 - 4cr\frac{\varphi'}{\varphi} + 2c + \\ -2(n-2)\left(1 - 2r\frac{\varphi'}{\varphi}\right) \int \varphi\varphi'' dr. \end{cases} \quad (2-5)$$

onde c e k são constantes.

Prova. Como φ não é uma função constante e reescrevendo a primeira equação de (2-1), temos

$$f'' + 2\frac{\varphi'}{\varphi}f' + (n-2)\frac{\varphi''}{\varphi} = 0.$$

Tomando $y = f'$ nesta última equação, esta é equivalente a equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$y' + 2\frac{\varphi'}{\varphi}y + (n-2)\frac{\varphi''}{\varphi} = 0, \quad (2-6)$$

por ([22]), temos que o fator integrante da equação é dada por

$$u(r) = e^{\int 2\frac{\varphi'}{\varphi} dr} = \varphi^2,$$

multiplicando esse fator integrante pela equação (2-6),

$$\varphi^2 y' + 2\varphi\varphi' y = -(n-2)\varphi\varphi'',$$

equivalente a,

$$(\varphi^2 y)' = -(n-2)\varphi\varphi'',$$

e assim, integrado com respeito a r , teremos

$$\varphi^2 y = c - (n-2) \int \varphi\varphi'' dr,$$

portanto,

$$y = f'(r) = \left[c - (n-2) \int \varphi\varphi'' dr \right] \frac{1}{\varphi^2}.$$

Integrando novamente com respeito a r ,

$$f(r) = \int \left[c - (n-2) \int \varphi \varphi'' dr \right] \frac{1}{\varphi^2} dr + k. \quad (2-7)$$

Portanto, obtemos a primeira equação de (2-5). Além disso, substituindo f' na segunda equação de (2-1), obtemos a segunda equação de (2-5). $\square$

2.1.2 Invariantes por translação

Para nossos próximos resultados, seja $(\mathbb{R}^n, g)$ um espaço pseudo-Euclidiano padrão com a métrica g e coordenadas $x = (x_1, \dots, x_n)$ com $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i$, $1 \leq i, j \leq n$, onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, $\varepsilon_i = \pm 1$ com ao menos um $\varepsilon_i = 1$. Seja $\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, um invariante sobre a ação do grupo de translação $(n-1)$ -dimensional, onde $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \alpha_i^2 = \varepsilon_{i_0}$ iguais ± 1 . Queremos obter funções diferenciáveis $f(\xi)$, $\varphi(\xi)$ e $\rho(\xi)$ tais que a métrica $\bar{g} = \frac{1}{\varphi^2} g$ satisfaça a equação (1-8).

Teorema 2.3 *Seja $(\mathbb{R}^n, g)$ um espaço pseudo-Euclidiano $n \geq 3$ com coordenadas $x = (x_1, \dots, x_n)$, $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i$. Considere funções não constantes diferenciáveis $f(\xi)$ e $\varphi(\xi)$, onde $\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ e $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \alpha_i^2 = \varepsilon_{i_0} \neq 0$. Existe uma métrica $\bar{g} = \frac{1}{\varphi^2} g$ tal que $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$ é um gradiente quasi Ricci soliton com f como função potencial se, e somente se, as funções f , φ e ρ satisfazem*

$$\begin{cases} (n-2)\varphi'' + 2\varphi' f' + \varphi f'' = 0 \\ \varepsilon_{i_0} \left[\varphi \varphi'' - (n-1) (\varphi')^2 - \varphi \varphi' f' \right] = \rho. \end{cases} \quad (2-8)$$

Prova. Seja $\bar{g} = \frac{1}{\varphi^2} g$ uma métrica conforme a g , $g_{ij} = \delta_{ij}$ e $\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \alpha_k^2 = \varepsilon_{i_0}$.

Assumimos que $f(\xi)$ e $\varphi(\xi)$ são funções de ξ , onde $\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$. Portanto, temos

$$\varphi_{,x_i} = \alpha_i \varphi', \quad \varphi_{,x_i x_j} = \alpha_i \alpha_j \varphi'', \quad \varphi_{,x_i x_i} = \alpha_i^2 \varphi'',$$

$$f_{,x_i} = \alpha_i f', \quad f_{,x_i x_j} = \alpha_i \alpha_j f'', \quad f_{,x_i x_i} = \alpha_i^2 f'',$$

$$\| \nabla_g \varphi \|^2 = \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \alpha_i^2 \right) (\varphi')^2 = \varepsilon_{i_0} (\varphi')^2, \quad \Delta_g \varphi = \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \alpha_i^2 \right) \varphi'' = \varepsilon_{i_0} \varphi''.$$

Substituindo estas expressões na primeira equação de (2-2), teremos

$$\alpha_i \alpha_j \left[(n-2)\varphi'' + 2\varphi' f' + \varphi f'' \right] = 0, \quad \forall i \neq j.$$

Se existem $i \neq j$ tais que $\alpha_i \alpha_j \neq 0$, então esta equação reduz a

$$(n-2)\varphi'' + 2\varphi' f' + \varphi f'' = 0. \quad (2-9)$$

Da mesma forma, considerando a segunda equação de (2-2), temos

$$\varphi \alpha_i^2 \left[(n-2)\varphi'' + 2\varphi' f' + \varphi f'' \right] + \varepsilon_{i_0} \varepsilon_i \left[\varphi \varphi'' - (n-1)(\varphi')^2 - \varphi \varphi' f' \right] = \rho \varepsilon_i,$$

pela equação (2-9), a equação acima reduz-se a segunda equação de (2-8).

Se para todo $i \neq j$ tivermos $\alpha_i \alpha_j = 0$ então $\xi = x_{i_0}$, e a primeira equação de (2-2) é trivialmente satisfeita para todo $i \neq j$. Considerando a segunda equação de (2-2) para $i \neq i_0$, temos

$$\varepsilon_{i_0} (\varphi \varphi'' - (n-1)(\varphi')^2 - \varphi \varphi' f') = \rho,$$

e daí a segunda equação de (2-8) é satisfeita. Considerando $i = i_0$ na segunda equação de (2-2), temos que a primeira equação de (2-8) também é satisfeita.

A recíproca deste teorema pode ser facilmente verificado. $\square$

No próximo resultado, vamos encontrar famílias de gradiente quasi Ricci solitons que são invariantes sobre a ação do grupo de translação $(n-1)$ -dimensional.

Corolário 2.4 *Seja $(\mathbb{R}^n, g)$ um espaço pseudo-Euclidiano $n \geq 3$ com coordenadas $x = (x_1, \dots, x_n)$, $g_{ij} = \varepsilon_i \delta_{ij}$. Dada qualquer função $\varphi(\xi)$, a métrica $\bar{g} = \frac{1}{\varphi^2} g$ é um gradiente quasi Ricci soliton com f uma função potencial, onde as funções f e ρ são dadas por*

$$\begin{cases} f(\xi) = \int \left[c - (n-2) \int \varphi \varphi'' d\xi \right] \frac{1}{\varphi^2} d\xi + k \\ \rho(\xi) = \varepsilon_{i_0} \left\{ \left[\varphi \varphi'' - (n-1)(\varphi')^2 \right] - \frac{\varphi'}{\varphi} \left[c - (n-2) \int \varphi \varphi'' d\xi \right] \right\}. \end{cases} \quad (2-10)$$

onde c e k são constantes.

Prova. Começamos observando que primeira equação de (2-10) é equivalente a primeira equação de (2-1), que também é equivalente a equação (2-6) e portanto resolvendo de

maneira análoga a equação (2-6), e assim teremos

$$f(r) = \int \left[c - (n-2) \int \varphi \varphi'' d\xi \right] \frac{1}{\varphi^2} d\xi + k. \quad (2-11)$$

Além disso, substituindo f' na segunda equação de (2-8), obtemos a segunda equação de (2-10).

A recíproca deste teorema pode ser facilmente verificado.

□

2.2 Gradiente quasi Ricci soliton com estrutura de produto torcido invariante por translação

Antes de começarmos, enunciaremos um teorema do artigo ([14]), que caracteriza gradiente Ricci solitons com estrutura de produto torcido.

Teorema 2.5 *Seja $(\mathbb{R}^n, g)$ um espaço pseudo-Euclidiano $n \geq 3$ com coordenadas $x = (x_1, \dots, x_n)$, $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i$. Considere $M = (\mathbb{R}^n, \bar{g}) \times_f F^m$, uma variedade produto, onde $\bar{g} = \frac{1}{\varphi^2}g$, F é uma variedade semi-Riemanniana Einstein com curvatura de Ricci λ_F , $m \geq 1$, φ , f e $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, são funções diferenciáveis e f uma função positiva. Então, a métrica produto torcido $\hat{g} = \bar{g} + f^2 g_F$ é um gradiente Ricci soliton com h uma função potencial se, e somente se, as funções φ , f , ρ e h satisfazem*

$$(n-2)f\varphi_{,x_i x_j} + f\varphi h_{,x_i x_j} - m\varphi f_{,x_i x_j} - m\varphi_{,x_i} f_{,x_j} - m\varphi_{,x_j} f_{,x_i} + f\varphi_{,x_i} h_{,x_j} + f\varphi_{,x_j} h_{,x_i} = 0, \\ 1 \leq i \neq j \leq n \quad (2-12)$$

$$\varphi [(n-2)f\varphi_{,x_i x_i} + f\varphi h_{,x_i x_i} - m\varphi f_{,x_i x_i} - 2m\varphi_{,x_i} f_{,x_i} + 2f\varphi_{,x_i} h_{,x_i}] + \\ \varepsilon_i \sum_{k=1}^n \varepsilon_k [f\varphi\varphi_{,x_k x_k} - (n-1)f\varphi_{,x_k}^2 + m\varphi\varphi_{,x_k} f_{,x_k} - f\varphi\varphi_{,x_k} h_{,x_k}] = \varepsilon_i \rho f, \quad 1 \leq i \leq n \quad (2-13)$$

$$\sum_{k=1}^n \varepsilon_k [-f\varphi^2 f_{,x_k x_k} + (n-2)f\varphi f_{,x_k} \varphi_{,x_k} - (m-1)\varphi^2 f_{,x_k}^2 + f\varphi^2 f_{,x_k} h_{,x_k}] = \rho f^2 - \lambda_F. \quad (2-14)$$

Prova. Veja esta demonstração em ([14]). Verifica-se de maneira análoga, que este teorema, também se aplica no caso de gradiente quasi Ricci soliton. □

Baseado na teoria de produto torcido, provamos que todas métricas conformes a variedade produto $\mathbb{R}^n \times F^m$, where F^m é uma variedade Ricci-flat e φ invariante sobre a ação do grupo de translação $(n-1)$ -dimensional, são gradiente quasi Ricci solitons.

Teorema 2.6 *Seja $(\mathbb{R}^n, g)$ um espaço pseudo-Euclidiano $n \geq 3$ com coordenadas $x = (x_1, \dots, x_n)$, $g_{ij} = \delta_{ij}\epsilon_i$. Considere $M = (\mathbb{R}^n, \bar{g}) \times_f F^m$, um produto torcido, onde $\bar{g} = \frac{1}{\varphi^2}g$, F é uma variedade semi-Riemanniana Einstein com curvatura de Ricci λ_F e funções diferenciáveis não constantes $f(\xi)$, $\rho(\xi)$ e $h(\xi)$ e f é uma função positiva, onde $\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ e $\sum_{i=1}^n \epsilon_i \alpha_i^2 = \epsilon_{i_0} \neq 0$. Então, a métrica produto torcido $\hat{g} = \bar{g} + f^2 g_F$ é um gradiente quasi Ricci soliton com h como função potencial se, e somente se, as funções φ , f , ρ e h satisfazem*

$$\begin{cases} f \left[(n-2)\varphi'' + 2\varphi' h' + \varphi h'' \right] - m\varphi f'' - 2m\varphi' f' = 0 \\ \epsilon_{i_0} \left[f\varphi\varphi'' - (n-1)f(\varphi')^2 + m\varphi\varphi' f' - f\varphi\varphi' h' \right] = \rho f \\ \epsilon_{i_0} \left[-f\varphi^2 f'' + (n-2)f\varphi f' \varphi' - (m-1)\varphi^2 (f')^2 + f\varphi^2 f' h' \right] = \rho f^2 - \lambda_F. \end{cases} \quad (2-15)$$

Prova. Seja $(\mathbb{R}^n, g)$ um espaço pseudo-Euclidiano $n \geq 3$ com coordenadas $x = (x_1, \dots, x_n)$, $(M = (\mathbb{R}^n, \bar{g}) \times_f F^m, \hat{g})$ um produto torcido, onde $\hat{g} = \bar{g} + f^2 g_F$, $\bar{g} = \frac{1}{\varphi^2}g$, $g_{ij} = \delta_{ij}\epsilon_i$, F é uma variedade semi-Riemanniana Einstein com curvatura de Ricci λ_F .

Assumimos que $f(\xi)$ e $\varphi(\xi)$ são funções de ξ , onde $\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$. Consequentemente, temos

$$\begin{aligned} \varphi_{,x_i} &= \alpha_i \varphi', & \varphi_{,x_i x_j} &= \alpha_i \alpha_j \varphi'', & \varphi_{,x_i x_i} &= \alpha_i^2 \varphi'', \\ f_{,x_i} &= \alpha_i f', & f_{,x_i x_j} &= \alpha_i \alpha_j f'', & f_{,x_i x_i} &= \alpha_i^2 f'', \\ \|\nabla_g \varphi\|^2 &= \left(\sum_{i=1}^n \epsilon_i \alpha_i^2 \right) (\varphi')^2 = \epsilon_{i_0} (\varphi')^2, & \Delta_g \varphi &= \left(\sum_{i=1}^n \epsilon_i \alpha_i^2 \right) \varphi'' = \epsilon_{i_0} \varphi''. \end{aligned}$$

Substituiremos estas expressões em (2-12), (2-13) e (2-14).

Começamos substituindo em (2-12), assim

$$\alpha_i \alpha_j \left\{ f \left[(n-2)\varphi'' + 2\varphi' h' + \varphi h'' \right] - m\varphi f'' - 2m\varphi' f' \right\} = 0, \quad \forall i \neq j.$$

Se existirem $i \neq j$ tal que $\alpha_i \alpha_j \neq 0$, então esta equação reduz-se a

$$f \left[(n-2)\varphi'' + 2\varphi' h' + \varphi h'' \right] - m\varphi f'' - 2m\varphi' f' = 0, \quad (2-16)$$

que é exatamente a primeira equação de (2-15). Similarmente, substituindo na equação (2-13), temos

$$\begin{aligned} & \varphi \alpha_i^2 \left\{ f \left[(n-2)\varphi'' + 2\varphi' h' + \varphi h'' \right] - m\varphi f'' - 2m\varphi' f' \right\} + \\ & + \varepsilon_i \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \alpha_k^2 \left[f\varphi\varphi'' - (n-1)f(\varphi')^2 + m\varphi\varphi' f' - f\varphi\varphi' h' \right] = \varepsilon_i \rho f, \end{aligned}$$

substituindo a equação (2-16) nesta equação e tomando $\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \alpha_k^2 = \varepsilon_{i_0}$ e $\varepsilon_i \neq 0$, a equação acima reduz exatamente a segunda equação de (2-15).

E finalmente, substituindo em (2-14), teremos a terceira equação de (2-15).

A recíproca deste teorema pode ser facilmente verificado.

□

No próximo resultado, provamos que se $f\varphi = 1$ e F é Ricci flat, então as métricas $\hat{g}$ são gradiente quasi Ricci solitons.

Corolário 2.7 *Seja $(\mathbb{R}^n, g)$ um espaço pseudo-Euclidiano $n \geq 3$ com coordenadas $x = (x_1, \dots, x_n)$, $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i$. Considere $M = (\mathbb{R}^n, \bar{g}) \times_f F^m$, uma variedade produto, onde $\bar{g} = \frac{1}{\varphi^2}g$, F é uma variedade semi-Riemanniana Einstein Ricci-flat. Considere $f, \rho, h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\xi)$, $\rho(\xi)$ e $h(\xi)$ funções diferenciáveis, sendo $f(\xi)$ e $\rho(\xi)$ não constantes e f uma função positiva, onde $\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ e $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \alpha_i^2 = \varepsilon_{i_0} \neq 0$. Dada qualquer função $\varphi(\xi)$, a métrica produto torcido $\hat{g} = \bar{g} + f^2 g_F$ é um gradiente quasi Ricci soliton com h como função potencial, onde as funções f , h , e ρ são dadas por*

$$\begin{cases} f(\xi) = \frac{1}{\varphi} \\ h(\xi) = c + \int \left\{ k - (m+n-2) \int \varphi\varphi'' d\xi \right\} \frac{1}{\varphi^2} d\xi \\ \rho(\xi) = \varepsilon_{i_0} \left\{ \varphi\varphi'' - (m+n-1)(\varphi')^2 - k\frac{\varphi'}{\varphi} + (m+n-2)\frac{\varphi'}{\varphi} \int \varphi\varphi'' d\xi \right\}. \end{cases} \quad (2-17)$$

onde c e k são constantes.

Prova. Podemos reescrever a primeira equação de (2-15) como

$$f\varphi h'' + 2f\varphi' h' + (n-2)f\varphi'' - m\varphi f'' - 2m\varphi' f' = 0,$$

que é equivalente a

$$h'' + 2\frac{\phi'}{\phi}h' + (n-2)\frac{\phi''}{\phi} - m\phi\frac{f''}{f} - 2m\frac{\phi'}{\phi}\frac{f'}{f} = 0.$$

Fazendo a mudança de variável $y = h'$, a equação acima torna-se a equação diferencial ordinária de primeira ordem linear em y ,

$$y' + 2\frac{\phi'}{\phi}y = -(n-2)\frac{\phi''}{\phi} + m\frac{f''}{f} + 2m\frac{\phi'}{\phi}\frac{f'}{f} = 0,$$

o fator integrante é dado por

$$u(\xi) = e^{\int 2\frac{\phi'}{\phi}d\xi} = \phi^2.$$

Multiplicando o fator integrante pela última equação acima,

$$\phi^2 y' + 2\phi\phi' y = -(n-2)\phi\phi'' + m\phi^2\frac{f''}{f} + 2m\phi\phi'\frac{f'}{f} = 0,$$

que é equivalente a,

$$(\phi^2 y)' = -(n-2)\phi\phi'' + m\phi^2\frac{f''}{f} + 2m\phi\phi'\frac{f'}{f} = 0,$$

integrando com respeito a ξ ,

$$h'(\xi) = y = \frac{k}{\phi^2} + \frac{1}{\phi^2} \int \left[m\phi^2\frac{f''}{f} - (n-2)\phi\phi'' + 2m\phi\phi'\frac{f'}{f} \right] d\xi,$$

portanto,

$$h(\xi) = c + \int \left\{ k + \int \left[m\phi^2\frac{f''}{f} - (n-2)\phi\phi'' + 2m\phi\phi'\frac{f'}{f} \right] d\xi \right\} \frac{1}{\phi^2} d\xi. \quad (2-18)$$

Como $f\phi = 1$, obtemos que

$$\begin{cases} f'\phi = -f\phi' \\ \phi f'' + 2f'\phi' = -f\phi'' \end{cases} \quad (2-19)$$

Note que podemos reescrever a equação (2-18) usando a equação (2-19)

$$h(\xi) = c + \int \left\{ k + \int \left[m\phi^2\frac{f''}{f} - (n-2)\phi\phi'' + 2m\phi\phi'\frac{f'}{f} \right] d\xi \right\} \frac{1}{\phi^2} d\xi$$

$$\begin{aligned}
&= c + \int \left\{ k + \int \frac{\Phi}{f} \left[m \underbrace{(\Phi f'' + 2f' \Phi')}_{-f\Phi''} - (n-2)f\Phi'' \right] d\xi \right\} \frac{1}{\Phi^2} d\xi \\
&= c + \int \left\{ k + \int \frac{\Phi}{f} \left[-(m+n-2)f\Phi'' \right] d\xi \right\} \frac{1}{\Phi^2} d\xi \\
h(\xi) &= c + \int \left\{ k - (m+n-2) \int \Phi \Phi'' d\xi \right\} \frac{1}{\Phi^2} d\xi, \tag{2-20}
\end{aligned}$$

assim,

$$h'(\xi) = \frac{k}{\Phi^2} - \frac{m+n-2}{\Phi^2} \int \Phi \Phi'' d\xi. \tag{2-21}$$

Agora, substituindo as expressões de h e h' , dadas pelas equações (2-20) e (2-21), na segunda equação de (2-15), teremos

$$\rho = \varepsilon_{i_0} \left\{ \Phi \Phi'' - (n-1)(\Phi')^2 + m\Phi \Phi' \frac{f'}{f} - k \frac{\Phi'}{\Phi} + (m+n-2) \frac{\Phi'}{\Phi} \int \Phi \Phi'' d\xi \right\}. \tag{2-22}$$

Substituindo as expressões para $f = \frac{1}{\Phi}$ e $f' = -\frac{\Phi'}{\Phi^2}$ em (2-22), obtemos

$$\rho(\xi) = \varepsilon_{i_0} \left\{ \Phi \Phi'' - (n-1)(\Phi')^2 + m\Phi \Phi' \left(-\frac{\Phi'}{\Phi^2} \right) \Phi - k \frac{\Phi'}{\Phi} + (m+n-2) \frac{\Phi'}{\Phi} \int \Phi \Phi'' d\xi \right\},$$

ou seja,

$$\rho(\xi) = \varepsilon_{i_0} \left\{ \Phi \Phi'' - (m+n-1)(\Phi')^2 - k \frac{\Phi'}{\Phi} + (m+n-2) \frac{\Phi'}{\Phi} \int \Phi \Phi'' d\xi \right\}. \tag{2-23}$$

Vamos provar que a expressão obtida para a função ρ , na terceira equação do sistema (2-15), é exatamente a equação (2-23), provando que a função ρ esta bem definida.

A terceira equação do sistema (2-17) é dada por

$$\varepsilon_{i_0} \left[-f\Phi^2 f'' + (n-2)f\Phi f' \Phi' - (m-1)\Phi^2 (f')^2 + f\Phi^2 f' h' \right] = \rho f^2 - \lambda_F.$$

Considerando F é Ricci flat e substituindo $f = \frac{1}{\Phi}$, $f' = -\frac{\Phi'}{\Phi^2}$, $f'' = 2\frac{(\Phi')^2}{\Phi^3} - \frac{\Phi''}{\Phi^2}$, e a

expressão de h' dada pela equação (2-21), na expressão acima, temos

$$\rho(\xi) = \varepsilon_{i_0} \left\{ -2 \frac{(\varphi')^2}{f\varphi} + \frac{\varphi\varphi''}{f\varphi} - (n-2) \frac{(\varphi')^2}{f\varphi} - (m-1) \frac{(\varphi')^2}{(f\varphi)^2} - \frac{k}{\varphi f\varphi} + (m+n-2) \frac{\varphi'}{\varphi} \int \varphi\varphi'' d\xi \right\},$$

como $f\varphi = 1$,

$$\rho(\xi) = \varepsilon_{i_0} \left\{ \varphi\varphi'' - (m+n-1)(\varphi')^2 - k \frac{\varphi'}{\varphi} + (m+n-2) \frac{\varphi'}{\varphi} \int \varphi\varphi'' d\xi \right\}. \quad (2-24)$$

Logo, a equação (2-24) é exatamente a equação (2-23). $\square$

Observe que, como no Corolário 2.7 $f\varphi = 1$, a métrica $\hat{g}$ pode ser reescrita como

$$\hat{g} = \bar{g} + f^2 g_F = \frac{1}{\varphi^2} g_E + \left(\frac{1}{\varphi} \right)^2 g_F = \frac{1}{\varphi^2} (g_E + g_F).$$

Assim, todas as métricas conformes a variedade produto $(R^n \times F^m)$ invariantes por translação e com F Ricci flat, são gradiente quasi Ricci solitons.

Corolário 2.8 *Se $(\mathbb{R}^n, g)$ é o espaço Euclidiano, F uma variedade Riemanniana Ricci-flat completa e $0 < |\varphi(x)| \leq c$ para alguma constante c , então as métricas dadas pelos Corolários (2.2), (2.4) e (2.7) são completas.*

Prova. Considere o espaço Euclidiano $(\mathbb{R}^n, g)$ $n \geq 3$ e a métrica $\bar{g}$ dadas pelos Corolários (2.4) e (2.8). Se $0 < |\varphi(x)| \leq c$, então a métrica $\bar{g}$ é completa, desde que existe uma constante $k > 0$ tal que para qualquer vetor $v \in \mathbb{R}^n$, $|v|_{\bar{g}} \geq k|v|$. Temos que $M = (\mathbb{R}^n, \bar{g}) \times_f F^m$, é completa se, e somente se, $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$ e F^m são completas (veja [8]). Então, as métricas obtidas nos Corolários (2.4) e (2.7) são completas. $\square$

2.3 Exemplos

Como consequência do Corolário (2.8), obtemos o seguinte exemplo:

Exemplo 2.9 *Considerando $\alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$, $\alpha_n = 1$, $\varphi(x_1, \dots, x_n) = x_n$ e $\mathbb{R}_+^{n*} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$, i.e., $(\mathbb{R}_+^{n*}, g_{can} = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2}) = (\mathbb{H}^n, g_{can})$, onde g_{can} é a métrica canônica do espaço hiperbólico. Portanto, para o Corolário 2.7 temos que a variedade produto $\mathbb{H}^n \times F^m$, no qual (F^m, g_F) é uma variedade Ricci-flat completa, é um gradiente quasi Ricci soliton completo com o tensor métrico*

$$ds^2 = g_{can} + \frac{1}{x_n^2} g_F,$$

onde a função potencial é

$$h(x_1, \dots, x_n) = c - \frac{k}{x_n},$$

e

$$\rho(x_1, \dots, x_n) = - \left[(m+n-1) + \frac{k}{x_n} \right].$$

Exemplo 2.10 Seguindo a tendência do exemplo acima, considere $\alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$, $\alpha_n = 1$ e $\mathbb{R}_+^{n*} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$, i.e., $(\mathbb{R}_+^{n*}, g_{can} = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2}) = (\mathbb{H}^n, g_{can})$, onde g_{can} é a métrica standard do espaço hiperbólico. Agora, tomando $\varphi(x_1, \dots, x_n) = x_n \mathbf{v}(x_n)$, onde $\mathbf{v}$ é alguma função positiva diferenciável, temos que a variedade produto $\mathbb{H}^n \times F^m$, no qual (F^m, g_F) é uma variedade Ricci flat completa, é um gradiente quasi Ricci soliton completo com o tensor métrico

$$ds^2 = \frac{1}{\mathbf{v}^2} \left(g_{can} + \frac{1}{x_n^2} g_F \right),$$

onde a função potencial é ρ e h são dadas por (2-5). Portanto, existem muitos completos quasi Ricci solitons conformes ao Exemplo 2.9.

Exemplo 2.11 Se $\varphi(x_1, \dots, x_n) = e^{-x_1^2 - \dots - x_n^2}$ no Corolário 2.2, então $\mathbb{R}^n$ com a métrica Riemanniana

$$ds^2 = e^{2(x_1^2 + \dots + x_n^2)} (dx_1^2 + \dots + dx_n^2)$$

é um gradiente quasi Ricci soliton completo onde a função potencial é

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{c}{2} e^{2x_1^2 + \dots + 2x_n^2} + \frac{(n-2)}{2} (x_1^2 + \dots + x_n^2) + k,$$

$$\rho(x_1, \dots, x_n) = -[2(n-2)(x_1^2 + \dots + x_n^2) + (3n-2)]e^{-2x_1^2 - \dots - 2x_n^2} + 2c[2(x_1^2 + \dots + x_n^2) + 1].$$

Exemplo 2.12 escolha $n = 2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ e então $\varphi(x_1, x_2) = \frac{1}{1+(x_1+x_2)^2}$, então pelo Corolário 2.4 temos que $\mathbb{R}^2$ com a métrica

$$ds^2 = [1 + 2(x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_2)^4] (dx_1^2 + dx_2^2)$$

é um gradiente quasi Ricci soliton completo onde a função potencial é

$$f(x_1, x_2) = c \left[(x_1 + x_2) + \frac{2}{3}(x_1 + x_2)^3 + \frac{1}{5}(x_1 + x_2)^5 \right] + k$$

e

$$\rho(x_1, x_2) = \frac{4(x_1 + x_2)^2}{[1 + (x_1 + x_2)^2]^4} - \frac{2}{[1 + (x_1 + x_2)^2]^3} + \frac{2c(x_1 + x_2)}{1 + (x_1 + x_2)^2}.$$

Variedades de Einstein com estrutura de produto torcido

Nosso objetivo neste capítulo é construir exemplos de variedades de Einstein com estrutura de produto torcido, cuja base é invariante sob a ação do grupo de translação $(n-1)$ -dimensional. Inicialmente vamos considerar variedades com fibra unidimensional.

3.1 Variedades de Einstein do tipo $M = (\mathbb{R}^n, \bar{g}) \times_f \mathbb{R}$

Nesta seção provaremos que a curvatura escalar da base de M é constante e igual a $(n-1)\rho$.

Teorema 3.1 *Considere $M = B^n \times_f F^m$ uma variedade produto torcido Einstein, onde B é a base de M e F é a fibra. Se $m = 1$ então $\bar{k} = (n-1)\rho$, onde $\bar{k}$ é a curvatura escalar da base e ρ é a curvatura de Ricci de M .*

Prova. Considere $M = B^n \times_f F^m$ uma variedade produto torcido Einstein cuja métrica é dada por $\hat{g} = \bar{g} + f^2 g_F$, onde g_B é a métrica da base e g_F é a métrica da fibra. Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathcal{L}(B)$, e $Y_1, Y_2, \dots, Y_m \in \mathcal{L}(F)$. Observe que a terceira equação do Corolário (1.47) pode ser reescrita por

$$Ric_{\hat{g}}(Y_i, Y_j) = Ric_{g_F}(Y_i, Y_j) - [f\Delta_{g_B}f + (m-1) \|\nabla_{g_B}\Phi\|^2] g_F(Y_i, Y_j), \quad \forall i, j = 1, \dots, m.$$

Assim, o Corolário (1.47) é equivalente a

$$\begin{cases} Ric_{\hat{g}}(X_i, X_j) = Ric_{g_B}(X_i, X_j) - \frac{m}{f} Hess_{g_B}f(X_i, X_j), \quad \forall i, j = 1, \dots, n \\ Ric_{\hat{g}}(X_i, Y_j) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n \text{ e } \forall j = 1, \dots, m \\ Ric_{\hat{g}}(Y_i, Y_j) = Ric_{g_F}(Y_i, Y_j) - [f\Delta_{g_B}f + (m-1) \|\nabla_{g_B}\Phi\|^2] g_F(Y_i, Y_j), \quad \forall i, j = 1, \dots, m. \end{cases} \quad (3-1)$$

Sendo M uma variedade de Einstein, então,

$$Ric_{\hat{g}} = \rho \hat{g}. \quad (3-2)$$

Tome $\bar{k}$ e k_F as curvaturas escalares de B e F respectivamente. Assim, aplicando (3-2) em (X_i, X_j) ,

$$Ric_{\hat{g}}(X_i, X_j) = \rho \hat{g}(X_i, X_j).$$

Substituindo a primeira equação de (3-1), usando o fato de M ser um produto torcido e $g_F(X_i, X_j) = 0$, teremos

$$Ric_{g_B}(X_i, X_j) - \frac{m}{f} Hess_{g_B} f(X_i, X_j) = \rho g_B(X_i, X_j),$$

multiplicando pela métrica inversa e somando, temos

$$\sum_{i,j=1}^n g_B^{-1}(X_i, X_j) \left[Ric_{g_B}(X_i, X_j) - \frac{m}{f} Hess_{g_B} f(X_i, X_j) \right] = \rho \sum_{i,j=1}^n g_B^{-1}(X_i, X_j) g_B(X_i, X_j),$$

assim,

$$\bar{k} - \frac{m}{f} \Delta_{g_B} f = n\rho. \quad (3-3)$$

Agora, aplicando (3-2) em (Y_i, Y_j)

$$Ric_{\hat{g}}(Y_i, Y_j) = \rho \hat{g}(Y_i, Y_j),$$

Substituindo a terceira equação de (3-1) e usando novamente o fato de M ser um produto torcido e $g_B(Y_i, Y_j) = 0$, teremos

$$Ric_{g_F}(Y_i, Y_j) - [f \Delta_{g_B} f + (m-1) \|\nabla_{g_B} \phi\|^2] g_F(Y_i, Y_j) = \rho f^2 g_F(Y_i, Y_j),$$

somando,

$$\sum_{i,j=1}^n g_F^{-1}(Y_i, Y_j) [Ric_{g_F}(Y_i, Y_j) - [f \Delta_{g_B} f + (m-1) \|\nabla_{g_B} \phi\|^2] g_F(Y_i, Y_j)] = \rho f^2 \sum_{i,j=1}^n g_F^{-1}(Y_i, Y_j) g_F(Y_i, Y_j)$$

calculando o traço,

$$k_F - m [f \Delta_{g_B} f + (m-1) \|\nabla_{g_B} \phi\|^2] = m\rho f^2. \quad (3-4)$$

Multiplicando (3-3) por mf^2 e igualando ao produto de n por (3-4), teremos somando,

$$nk_F - mf^2 \bar{k} = m(n-m)f \Delta_{g_B} f + nm(m-1) \|\nabla_{g_B} \phi\|^2. \quad (3-5)$$

Para $m = 1$ temos que $k_F = 0$. Fazendo $m = 1$ em (3-3) e (3-5), teremos

$$\begin{cases} \bar{k} - \frac{1}{f} \Delta_{g_B} f = n\rho \\ -f^2 \bar{k} = (n-1)f \Delta_{g_B} f. \end{cases} \quad (3-6)$$

Da primeira equação de (3-6) segue que

$$\bar{k} = \frac{1}{f} \Delta_{g_B} f + n\rho.$$

Agora, substituindo esta na primeira equação de (3-6) conseguimos provar que

$$\bar{k} = (n-1)\rho.$$

□

Antes de enunciarmos o próximo teorema, observemos que podemos escrever a curvatura escalar da base de duas maneiras diferentes. Pela definição (1.16), temos que em coordenadas locais a curvatura escalar da base pode ser escrita por

$$k(p) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} R_{ij} = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} (Ric_g)_{ij}.$$

Considere $(M = (\mathbb{R}^n, \bar{g}) \times_f F^m, \hat{g})$ um produto torcido onde $\bar{g} = \frac{1}{\phi^2} g$, $g_{ij} = \delta_{ij} \epsilon_i$, $\bar{k}$ a curvatura escalar da base, a métrica $\hat{g}$ é um gradiente Ricci Soliton com função potencial h , g_F a métrica da fibra F . Assim,

$$\begin{aligned} \bar{k} &= \sum_{i,j=1}^n g^{ij} (Ric_{\bar{g}})_{ij} \\ &= \sum_{i,j=1}^n \phi^2 g^{ij} (Ric_{\bar{g}})_{ij} \\ &= \phi^2 \sum_{i=1}^n g^{ii} (Ric_{\bar{g}})_{ii}, \end{aligned}$$

logo,

$$\bar{k} = \phi^2 \sum_{i=1}^n \epsilon_i (Ric_{\bar{g}})_{ii}. \quad (3-7)$$

Pela expressão (1-10), temos que

$$Ric_{\bar{g}} = \frac{1}{\varphi^2} \left\{ (n-2)\varphi Hess_g \varphi + [\varphi \Delta_g \varphi - (n-1) \|\nabla_g \varphi\|^2] g \right\}, \quad (3-8)$$

já que $Ric_g = 0$. Substituindo esta equação (3-8) em (3-7),

$$\begin{aligned} \bar{k} &= \varphi^2 \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i}{\varphi^2} \left\{ (n-2)\varphi (Hess_g \varphi)_{ii} + [\varphi \Delta_g \varphi - (n-1) \|\nabla_g \varphi\|^2] g_{ii} \right\} \\ &= (n-2)\varphi \Delta_g \varphi + [\varphi \Delta_g \varphi - (n-1) \|\nabla_g \varphi\|^2] \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 g_{ii} \\ &= (n-2)\varphi \Delta_g \varphi + [\varphi \Delta_g \varphi - (n-1) \|\nabla_g \varphi\|^2] n. \end{aligned}$$

Portanto, temos a primeira expressão para a curvatura escalar da base

$$\bar{k}(p) = (n-1) [2\varphi \Delta_g \varphi - n \|\nabla_g \varphi\|^2]. \quad (3-9)$$

Por outro lado, considerando $(X_i, X_j) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, temos pelo Corolário 1.47

$$Ric_{\hat{g}}(X_i, X_j) = Ric_{\bar{g}}(X_i, X_j) - \frac{m}{f} Hess_{\bar{g}} f(X_i, X_j),$$

e desta, temos uma expressão para o tensor de Ricci na base,

$$Ric_{\bar{g}}(X_i, X_j) = Ric_{\hat{g}}(X_i, X_j) + \frac{m}{f} Hess_{\bar{g}} f(X_i, X_j). \quad (3-10)$$

Como $\hat{g}$ é um gradiente Ricci Soliton com função potencial h , temos então

$$Ric_{\hat{g}}(X_i, X_j) + Hess_{\hat{g}} h(X_i, X_j) = \rho \hat{g}(X_i, X_j),$$

assim,

$$Ric_{\hat{g}}(X_i, X_j) = \rho \hat{g}(X_i, X_j) - Hess_{\hat{g}} h(X_i, X_j)$$

Sendo $\hat{g} = \bar{g} + f^2 g_F$, temos que

$$Ric_{\hat{g}}(X_i, X_j) = \rho [\bar{g}(X_i, X_j) + f^2 g_F(X_i, X_j)] - Hess_{\hat{g}} h(X_i, X_j).$$

Tendo $g_F(X_i, X_j) = 0$ e $Hess_{\hat{g}} h(X_i, X_j) = Hess_{\bar{g}} h(X_i, X_j)$ (Lema 1.45), logo

$$Ric_{\hat{g}}(X_i, X_j) = \rho \bar{g}(X_i, X_j) - Hess_{\bar{g}} h(X_i, X_j). \quad (3-11)$$

Agora, substituindo a equação (3-11) em (3-10), temos

$$Ric_{\bar{g}}(X_i, X_j) = \rho \bar{g}(X_i, X_j) + \frac{m}{f} Hess_{\bar{g}} f(X_i, X_j) - Hess_{\bar{g}} h(X_i, X_j), \quad (3-12)$$

e substituindo esta relação (3-12) na expressão da curvatura escalar da base dada por (3-7), temos

$$\begin{aligned} \bar{k} &= \sum_{i=1}^n \varphi^2 \varepsilon_i \left[\rho \hat{g}_{ii} + \frac{m}{f} (Hess_{\bar{g}} f)_{ii} - (Hess_{\bar{g}} h)_{ii} \right] \\ &= \varphi^2 \frac{m}{f} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (Hess_{\bar{g}} f)_{ii} - \varphi^2 \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (Hess_{\bar{g}} h)_{ii} + \rho \varphi^2 \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i}{\varphi^2} \varepsilon_i \delta_{ii}, \end{aligned}$$

onde $Hess(X_i, X_j) = Hess_{ij}$. Portanto,

$$\bar{k} = \varphi^2 \frac{m}{f} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (Hess_{\bar{g}} f)_{ii} - \varphi^2 \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (Hess_{\bar{g}} h)_{ii} + n\rho, \quad (3-13)$$

e esta é a segunda expressão para a curvatura escalar da base. Com isso, podemos expressar a curvatura escalar da base de duas maneiras dada pelas expressões (3-9) e (3-13).

Segue por [20] que a expressão da Hessiana para métricas conformes em um sistema de coordenadas é dada por

$$\begin{cases} (Hess_{\bar{g}} f)_{ij} = f_{,x_i x_j} + \frac{\varphi_{,x_j}}{\varphi} f_{,x_i} + \frac{\varphi_{,x_i}}{\varphi} f_{,x_j}, \forall i \neq j = 1, 2, \dots, n \\ (Hess_{\bar{g}} f)_{ii} = f_{,x_i x_i} + 2 \frac{\varphi_{,x_i}}{\varphi} f_{,x_i} - \varepsilon_i \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \frac{\varphi_{,x_k}}{\varphi} f_{,x_k}, \forall i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (3-14)$$

Neste caso, a expressão (3-13) fica em função das derivadas parciais de f e φ .

Em seguida encontraremos condições necessárias para a construção de gradiente Ricci solitons invariantes por translação e curvatura escalar da base sendo constante.

Teorema 3.2 *Seja $(\mathbb{R}^n, g)$ um espaço pseudo-Euclidiano, $n \geq 3$ com coordenadas $x = (x_1, \dots, x_n)$, $g_{ij} = \delta_{ij} \varepsilon_i$. Considere $M = (\mathbb{R}^n, \bar{g}) \times_f \mathbb{R}$, uma variedade produto torcido, $f(\xi)$ e $\varphi(\xi)$ e f é uma função positiva, onde $\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ e $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \alpha_i^2 = \varepsilon_{i_0} = \pm 1$. Se a métrica produto torcido $\hat{g} = \bar{g} + f^2 g_{\mathbb{R}}$ é uma variedade de Einstein então f e φ satisfaz*

$$\begin{cases} f'' = (n-2) f \frac{\varphi''}{\varphi} - 2 \frac{\varphi'}{\varphi} f' \\ \varphi'' = \frac{(\varphi')^2}{\varphi} + \varphi' \frac{f'}{f}. \end{cases} \quad (3-15)$$

Prova. Acrescentemos ao sistema (2-15) s expressões da curvatura escalar da base.

$$\left\{ \begin{array}{l} (n-2)f\varphi'' + f\varphi h'' - m\varphi f'' - 2m\varphi' f' + 2f\varphi' h' = 0 \\ \varepsilon_{i_0} [f\varphi\varphi'' - (n-1)f(\varphi')^2 + m\varphi\varphi' f' - f\varphi\varphi' h'] = \rho f \\ \varepsilon_{i_0} [-f\varphi^2 f'' + (n-2)f\varphi f' \varphi' - (m-1)\varphi^2 (f')^2 + f\varphi^2 f' h'] = \rho f^2 - \lambda_F \\ \bar{k} = (n-1) [2\varphi\Delta_g\varphi - n \|\nabla_g\varphi\|^2] \\ \bar{k} = m\frac{\varphi^2}{f} \left[f'' - (n-2)\frac{\varphi' f'}{\varphi} \right] - \varphi^2 \left[h'' - (n-2)\frac{\varphi' h'}{\varphi} \right] + n\rho. \end{array} \right.$$

A ideia da demonstração é usar as expressões da curvatura escalar da base para eliminar no sistema (2-15) os termos ρf e ρf^2 . Temos que:

$$\begin{aligned} \varphi_{,x_i} &= \alpha_i \varphi', & \varphi_{,x_i x_j} &= \alpha_i \alpha_j \varphi'', & \varphi_{,x_i x_i} &= \alpha_i^2 \varphi'', \\ f_{,x_i} &= \alpha_i f', & f_{,x_i x_j} &= \alpha_i \alpha_j f'', & f_{,x_i x_i} &= \alpha_i^2 f'', \\ h_{,x_i} &= \alpha_i h', & h_{,x_i x_j} &= \alpha_i \alpha_j h'', & h_{,x_i x_i} &= \alpha_i^2 h'', \\ \|\nabla_g\varphi\|^2 &= \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \alpha_i^2 \right) (\varphi')^2 = \varepsilon_{i_0} (\varphi')^2, & \Delta_g\varphi &= \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \alpha_i^2 \right) \varphi'' = \varepsilon_{i_0} \varphi''. \end{aligned}$$

Por (3-9) temos que

$$\bar{k}(p) = (n-1) [2\varphi\Delta_g\varphi - n \|\nabla_g\varphi\|^2].$$

Como $\bar{k} = (n-1)\rho$, segue que

$$\rho f = \varepsilon_{i_0} (2f\varphi\varphi'' - n f(\varphi')^2). \quad (3-16)$$

Por outro lado, substituindo novamente a hipótese $\bar{k} = (n-1)\rho$ na segunda expressão da curvatura escalar da base (3-13) e usando as expressões da Hessiana para métricas conformes teremos uma expressão para ρf^2 , dada por

$$\rho f^2 = \varepsilon_{i_0} [-m f \varphi^2 f'' + m(n-2) f \varphi \varphi' f' + f^2 \varphi^2 h'' - (n-2) f^2 \varphi \varphi' h']. \quad (3-17)$$

Verifiquemos a expressão (3-17). Começaremos determinando uma expressão

para $(Hess_{\bar{g}}f)_{ii}$ e $(Hess_{\bar{g}}h)_{ii}$,

$$\begin{aligned}
 (Hess_{\bar{g}}f)_{ii} &= f_{,x_i x_i} + 2 \frac{\varphi_{,x_i}}{\varphi} f_{,x_i} - \varepsilon_i \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \frac{\varphi_{,x_k}}{\varphi} f_{,x_k} \\
 &= \alpha_i^2 f'' + 2\alpha_i^2 \frac{\varphi' f'}{\varphi} - \varepsilon_i \left(\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \alpha_k^2 \right) \frac{\varphi' f'}{\varphi} \\
 &= \alpha_i^2 f'' + 2\alpha_i^2 \frac{\varphi' f'}{\varphi} - \varepsilon_i \varepsilon_{i_0} \frac{\varphi' f'}{\varphi} \\
 &= \alpha_i^2 f'' - (\varepsilon_i \varepsilon_{i_0} - 2\alpha_i^2) \frac{\varphi' f'}{\varphi}.
 \end{aligned}$$

Somando, temos

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i (Hess_{\bar{g}}f)_{ii} = \varepsilon_{i_0} \left[f'' - (n-2) \frac{\varphi' f'}{\varphi} \right] \quad (3-18)$$

De maneira análoga,

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i (Hess_{\bar{g}}h)_{ii} = \varepsilon_{i_0} \left[h'' - (n-2) \frac{\varphi' h'}{\varphi} \right] \quad (3-19)$$

Com isso, substituindo na expressão (3-13) as expressões (3-18) e (3-19), temos a equação (3-17). Continuando, agora substituiremos a expressão (3-16), na segunda equação de (2-15), assim

$$\varepsilon_{i_0} \left[f \varphi \varphi'' - (n-1) f \left(\varphi' \right)^2 + m \varphi \varphi' f' - f \varphi \varphi' f' \right] = \varepsilon_{i_0} \left[2 f \varphi \varphi'' - n f \left(\varphi' \right)^2 \right].$$

Logo,

$$f \varphi \varphi'' - f \left(\varphi' \right)^2 - m \varphi \varphi' f' + f \varphi \varphi' h' = 0$$

De maneira análoga, substituindo a expressão (3-17) na terceira equação de (2-15)

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{i_0} \left[-f \varphi^2 f'' + (n-2) f \varphi \varphi' f' - (m-1) \varphi^2 \left(f' \right)^2 + f \varphi^2 f' h' \right] = \\
 \varepsilon_{i_0} \left[-m f \varphi^2 f'' + m(n-2) f \varphi \varphi' f' + f^2 \varphi^2 h'' - (n-2) f^2 \varphi \varphi' h' \right],
 \end{aligned}$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned}
 (m-1) f \varphi^2 f'' - (m-1)(n-2) f \varphi \varphi' f' - (m-1) \varphi^2 \left(f' \right)^2 + f \varphi^2 f' h' + \\
 + (n-2) f^2 \varphi \varphi' h' - f^2 \varphi^2 h'' = 0.
 \end{aligned}$$

E portanto o sistema (2-15) torna-se o sistema

$$\begin{cases} (n-2)f\phi'' + f\phi h'' - m\phi f'' - 2m\phi' f' + 2f\phi' h' = 0 \\ f\phi\phi'' - f(\phi')^2 - m\phi\phi' f' + f\phi\phi' h' = 0 \\ (m-1) \left[f\phi^2 f'' + (n-2)f\phi f' \phi' - \phi^2 (f')^2 \right] + f\phi^2 f' h' + \\ + (n-2)f^2\phi\phi' h' - f^2\phi^2 h'' = 0. \end{cases} \quad (3-20)$$

Tomando em (3-20), $m = 1$ e h como constante temos

$$\begin{cases} (n-2)f\phi'' - \phi f'' - 2\phi' f' = 0 \\ f\phi\phi'' - f(\phi')^2 - \phi\phi' f' = 0. \end{cases} \quad (3-21)$$

Agora basta isolar f'' na primeira e ϕ'' na segunda equação de (3-21) que então (3-15). $\square$

Nos dois resultados a seguir, fornecemos todas as soluções de (3-15). Em ordem para provarmos os Teoremas 3.3 e 3.4 a seguir, consideraremos funções diferenciáveis $f(\xi)$ e $\phi(\xi)$, onde $\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ e $\sum_{i=1}^n \epsilon_i \alpha_i^2 = \epsilon_{i_0} = \pm 1$. Segue do Teorema 3.2 que M é uma variedade de Einstein, então (3-15) é equivalente a

$$\begin{cases} \frac{f''}{f} = (n-2) \frac{\phi''}{\phi} - 2 \frac{\phi'}{\phi} \frac{f'}{f} \\ \frac{\phi''}{\phi} = \left(\frac{\phi'}{\phi} \right)^2 + \frac{\phi'}{\phi} \frac{f'}{f}. \end{cases} \quad (3-22)$$

Considere,

$$l(\xi) = \left(\frac{f'}{f} \right) (\xi) \quad e \quad p(\xi) = \left(\frac{\phi'}{\phi} \right) (\xi),$$

e observe que,

$$\frac{f'}{f} = l' + l^2 \quad e \quad \frac{\phi'}{\phi} = p' + p^2.$$

Logo, podemos reescrever (3-22),

$$\begin{cases} l' = -l^2 + (n-4)pl + (n-2)p^2 \\ p' = pl. \end{cases} \quad (3-23)$$

Segue de (3-23) que

$$pldl + [l^2 - (n-4)pl - (n-2)p^2] dp = 0. \quad (3-24)$$

Esta equação é uma equação diferencial ordinária homogênea, e por [22], tem-se que

$$p(\xi) = v(\xi)l(\xi). \quad (3-25)$$

Os Teoremas 3.3 e 3.4 são obtidos considerando v sendo uma constante não nula e uma função não constante, respectivamente.

Teorema 3.3 *Seja $(\mathbb{R}^n, g)$ um espaço pseudo-Euclidiano, $n \geq 3$ com coordenadas $x = (x_1, \dots, x_n)$, $g_{ij} = \delta_{ij}\epsilon_i$. Considere funções diferenciáveis não constantes $f(\xi)$ e $\varphi(\xi)$ onde $\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ e $\sum_{i=1}^n \epsilon_i \alpha_i^2 = \epsilon_{i_0} = \pm 1$, dadas por*

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\xi) = \frac{k_1}{\xi + c_1}, \quad k_1 > 0, \quad k_2 > 0, \quad c_1 \in \mathbb{R} \\ \left\{ \begin{array}{l} \varphi_+(\xi) = \frac{k_2}{(\xi + c_1)^{\frac{2}{n-2}}} \\ \varphi_-(\xi) = k_2(\xi + c_1). \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (3-26)$$

As funções dadas em (3-26) são soluções de (3-22). Além disso, $\hat{g}$ é Einstein.

Prova. Tome em (3-25), $v(\xi) = N$ uma constante não nula. Então $p = Nl$ e $p'l'$. Substituindo estas no sistema (3-23), teremos

$$\left\{ \begin{array}{l} l' = [(n-2)N^2 + (n-4)N - 1] l^2 \\ l' = l^2. \end{array} \right. \quad (3-27)$$

Substituindo a segunda equação de (3-27) na primeira, temos

$$(n-2)N^2 + (n-4)N - 2 = 0 \quad (3-28)$$

e a equação (3-28) é uma equação de segunda ordem em N , cujas raízes são

$$N_+ = \frac{2}{n-2} \quad e \quad N_- = -1.$$

Voltando à primeira equação de (3-27), teremos

$$\frac{l'}{l^2} = (n-2)N^2 + (n-4)N - 1.$$

e como $p = Nl$

$$p_{\pm}(\xi) = -\frac{N_{\pm}}{\xi + c_1},$$

ou seja,

$$p_+(\xi) = -\frac{2}{(n-2)(\xi + c_1)}, \text{ e } p_-(\xi) = \frac{1}{\xi + c_1}.$$

Sabemos que

$$l(\xi) = \left(\frac{f'}{f} \right) (\xi) \text{ e } p(\xi) = \left(\frac{\phi'}{\phi} \right) (\xi),$$

integrando estas, teremos (3-26).

Agora mostraremos que ρ é constante. observe que da equação (3-9), temos que

$$\bar{k}(p) = (n-1) [2\phi\Delta_g\phi - n \|\nabla_g\phi\|^2] = \varepsilon_{i_0}(n-1) \left[2\phi\phi'' - n \left(\phi' \right)^2 \right].$$

Logo, para

$$\phi_+(\xi) = \frac{k_2}{(\xi + c_1)^{\frac{2}{n-2}}}$$

temos

$$\phi'_+(\xi)' = -\frac{2k_2}{(n-2)(\xi + c_1)^{\frac{2}{n-2}+1}}, \text{ e } \phi''_+(\xi) = \frac{2nk_2}{(n-2)^2(\xi + c_1)^{\frac{2}{n-2}+2}}.$$

Assim,

$$\bar{k} = \frac{4(n-1)k_2^2\varepsilon_{i_0}}{(n-2)^2(\xi + c_1)^{\frac{4}{n-2}+2}}(n-n) = 0,$$

e portanto $\rho = 0$.

Para

$$\phi(\xi) = \phi_+(\xi) = \phi_-(\xi) = k_2(\xi + c_1)$$

temos

$$\phi' = k_2 \text{ e } \phi'' = 0.$$

Assim,

$$\bar{k} = -n(n-1)k_2^2\varepsilon_{i_0},$$

e portanto $\bar{k}$ é constante e logo ρ é constante, já que $\bar{k} = (n-1)\rho$.

□

Teorema 3.4 *Seja $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$ um espaço pseudo-Euclidiano, $n \geq 3$ com coordenadas $x = (x_1, \dots, x_n)$, $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i$. Considere funções $v(\xi)$ e $l(\xi)$ onde $\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ e*

$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \alpha_i^2 = \varepsilon_{i_0} = \pm 1$, são dadas por

$$\begin{cases} \frac{v'}{v} = -k_3(n-2)v^{-\frac{1}{2}}(v-2a)^{\frac{n+2}{2n}}(v+1)^{\frac{n-1}{n}}, & k_3 > 0 \\ l = k_3 v^{-\frac{1}{2}}(v-2a)^{-\frac{n-2}{2n}}(v+1)^{-\frac{1}{n}}. \end{cases} \quad (3-29)$$

onde $a = \frac{1}{n-2}$.

Seja $f(\xi)$ e $\varphi(\xi)$ funções obtidas pela integração,

$$\frac{f'}{f} = l(\xi) \quad e \quad \frac{\varphi'}{\varphi} = v(\xi)l(\xi).$$

As funções f e φ obtidas por (3-29) são soluções de (3-22). Além disso, $\hat{g}$ é Einstein.

Prova. Tome em (3-25), $v(\xi)$ uma função não constante. Então $p = vl$ e $p' = vl' + lv'$. Substituindo estas na equação (3-24), teremos

$$vdl + [l - (n-4)l - (n-2)v^2] [vdl + ldv] = 0,$$

e assim,

$$\frac{dl}{l} = -\frac{(n-2)v^2 + (n-4)v - 1}{v[(n-2)v^2 + (n-4)v - 2]} dv, \quad (3-30)$$

fatorando o polinômio $(n-2)v^2 + (n-4)v - 2$, temos

$$\frac{dl}{l} = -\frac{(n-2)v^2 + (n-4)v - 1}{(n-2)v(v-2a)(v+1)} dv, \quad a = \frac{1}{n-2},$$

que é equivalente a

$$\frac{dl}{l} = -\frac{1}{n-2} \left[\frac{n-2}{2} \frac{v'}{v} + \frac{(n-2)^2}{2n} \frac{v'}{v-2a} + \frac{n-2}{n} \frac{v'}{v+1} \right] \quad (3-31)$$

integrando esta com respeito a ξ encontraremos l em termos de v dada pela segunda equação de (3-29).

Agora, temos que

$$p' = vl' + lv', \quad (3-32)$$

por outro lado, temos da segunda equação de (3-23),

$$p' = pl. \quad (3-33)$$

igualando (3-32) a (3-33) e usando que $p = vl$, temos

$$vl' + lv' = vl^2,$$

e dividindo tudo por vl

$$\frac{l'}{l} + \frac{v'}{v} = l, \quad (3-34)$$

usando a expressão (3-30)

$$\frac{v'}{v} - \frac{(n-2)v^2 + (n-4)v - 1}{(n-2)v^2 + (n-4)v - 2} \frac{v'}{v} = l,$$

colocando $\frac{v'}{v}$ em evidencia,

$$-\frac{1}{(n-2)v^2 + (n-4)v - 2} \frac{v'}{v} = l,$$

logo teremos,

$$\frac{v'}{v} = -[(n-2)v^2 + (n-4)v - 2] l, \quad (3-35)$$

que é equivalente a,

$$\frac{v'}{v} = -(n-2)(v-2a)(v+1) l. \quad (3-36)$$

Substituindo l dada pela segunda equação de (3-29) obtemos a primeira equação de (3-29). Daí f e ϕ , poderão ser obtidos pela integração de

$$\frac{f'}{f} = l(\xi) \quad e \quad \frac{\phi'}{\phi} = v(\xi)l(\xi).$$

Agora temos que mostrar que as soluções dadas pelo sistema (3-29), é suficiente, ou seja, provaremos que ρ é constante. Para isso basta mostrar que $\bar{k}$ é constante, já que $\bar{k} = (n-1)\rho$.

Temos de (3-9), que

$$\bar{k}(p) = \varepsilon_{i_0}(n-1) \left[2\phi\phi'' - n(\phi')^2 \right]. \quad (3-37)$$

Calcularemos agora, ϕ' e ϕ'' . Como

$$\frac{\phi'}{\phi} = vl,$$

então,

$$\varphi' = \varphi vl,$$

e consequentemente, temos que

$$\varphi'' = \varphi(vl' + lv' + v^2 l^2).$$

Substituindo essas expressões em (3-37),

$$\bar{k}(p) = (n-1)\varphi^2 \left[2vl' + 2lv' - (n-2)v^2 l^2 \right] \varepsilon_{i_0}. \quad (3-38)$$

Derivando a segunda equação de (3-29), temos que

$$\begin{aligned} l' &= k_3 \left[-\frac{1}{2} v^{-\frac{1}{2}-1} (v-2a)^{-\frac{n-2}{2n}} (v+1)^{-\frac{1}{n}} - \frac{n-2}{2n} v^{-\frac{1}{2}} (v-2a)^{-\frac{n-2}{2n}-1} (v+1)^{-\frac{1}{n}} \right] + \\ &\quad -k_3 v' \left[\frac{1}{n} v^{-\frac{1}{2}} (v-2a)^{-\frac{n-2}{2n}} (v+1)^{-\frac{1}{n}-1} \right] \\ &= -\frac{k_3}{2n} v^{-\frac{1}{2}} (v-2a)^{-\frac{n-2}{2n}} (v+1)^{-\frac{1}{n}} \left[\frac{n}{v} + \frac{n-2}{v-2a} + \frac{2}{v+1} \right] \\ &= -\frac{k_3}{n-2} v^{-\frac{1}{2}} (v-2a)^{-\frac{3n-2}{2n}} (v+1)^{-\frac{n+1}{n}} \left[(n-2)v^2 + (n-4)v - 1 \right] \frac{v'}{v}, \end{aligned}$$

substituindo na expressão acima a primeira equação de (3-29),

$$l' = k_3^2 v^{-1} (v-2a)^{-\frac{n-2}{n}} (v+1)^{-\frac{2}{n}} \left[(n-2)v^2 + (n-4)v - 1 \right]. \quad (3-39)$$

Agora, acharemos uma expressão para φ . Temos que,

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = vl,$$

integrando,

$$\varphi = ce^{\int vl d\xi}, \quad c > 0.$$

Observe que,

$$vl = \frac{vl'}{v'} = \frac{l}{\frac{v'}{v}},$$

substituindo a expressão de $\frac{v'}{v}$ dada por (3-29),

$$vl = -\frac{1}{n-2} \frac{v'}{(v-2a)(v+1)},$$

assim,

$$vl = \frac{1}{n} \left(\frac{v'}{v+1} - \frac{v'}{v+2a} \right). \quad (3-40)$$

Substituindo (3-40) na expressão da φ , temos que

$$\varphi = c(v+1)^{\frac{1}{n}}(v-2a)^{-\frac{1}{n}}. \quad (3-41)$$

Voltando para $\bar{k}$, substituindo as equações (3-39) e (3-41) em (3-37), logo teremos

$$\begin{aligned} \frac{\bar{k}}{\varepsilon_{i_0} k^3 c^2 (n-1)} &= 2(v-2a)^{-1} [(n-2)v^2 + (n-4)v - 1] + \\ &\quad -(v-2a)^{-1} \{2(n-2)(v-2a)(v+1) - (n-2)v\} \\ \bar{k} &= -\varepsilon_{i_0} k^3 c^2 (n-1)(v-2a)^{-1}(n-2)(v-2a) \\ \bar{k} &= -\varepsilon_{i_0} k^3 c^2 (n-1)(n-2), \end{aligned} \quad (3-42)$$

portanto $\bar{k}$ é sempre constante que implica que $\rho = -\varepsilon_{i_0} k^3 c^2 (n-2)$ também é sempre constante. Portanto $\hat{g}$ é Einstein. $\square$

Nos Teoremas 3.3 e 3.4 encontramos todas soluções do sistema (3-15) e com isso encontramos todas as variedades de Einstein do tipo $M = (\mathbb{R}^n, \bar{g}) \times_f \mathbb{R}$. Portanto obtemos o seguinte resultado.

Teorema 3.5 *Seja $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$ um espaço pseudo-Euclidiano, $n \geq 3$ com coordenadas $x = (x_1, \dots, x_n)$, $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i$. Considere $M = (\mathbb{R}^n, \bar{g}) \times_f \mathbb{R}$, uma variedade com a métrica $\hat{g} = \bar{g} + f^2 g_{\mathbb{R}}$, onde $\bar{g} = \frac{1}{\varphi^2} g$ e as funções f e φ são invariantes sob a ação de um grupo de translação $(n-1)$ -dimensional cujo invariante básico é $\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ e $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \alpha_i^2 = \varepsilon_{i_0} = \pm 1$. A métrica produto torcido $\hat{g}$ é Einstein se, e somente se, f e φ satisfazem os Teoremas 3.3 e 3.4.*

Prova. Com a mudança de variável

$$l(\xi) = \left(\frac{f'}{f} \right) (\xi) \quad e \quad p(\xi) = \left(\frac{\varphi'}{\varphi} \right) (\xi),$$

temos que (3-15) é equivalente a (3-23) para l e p . As soluções do sistema podem ser escrito por (3-25), $p(\xi) = v(\xi)l(\xi)$, onde $v(\xi)$ é uma constante não nula ou é uma função não constante.

Se $v(\xi)$ é uma constante não nula, então a prova do Teorema 3.3 demonstra que as soluções de (3-23) são dadas por (3-26). Se $v(\xi)$ é uma função não constante, então a prova do Teorema 3.4 demonstra que v é determinada por (3-29) e l é dada algebricamente em termos de v pela segunda equação de (3-29). Então as funções f e ϕ são determinadas pela integração da equação diferencial

$$\frac{f'}{f} = l(\xi) \quad e \quad \frac{\phi'}{\phi} = v(\xi)l(\xi).$$

□

3.2 Variedades de Einstein do tipo $M = (\mathbb{R}^n, \bar{g}) \times F^m$

Nesta seção classificaremos todas as variedades de Einstein do tipo $M = (\mathbb{R}^n, \bar{g}) \times F^m$, onde $\bar{g} = \frac{1}{\phi^2}g$, f e ϕ são invariantes pela ação do grupo de translação $(n-1)$ -dimensional e F Ricci-flat com $m > 1$.

Primeiramente, encontraremos um sistema de equações que nos forneça condições necessárias para a existência de variedades de Einstein.

Teorema 3.6 *Seja $(\mathbb{R}^n, g)$ um espaço pseudo-Euclidiano, $n \geq 3$ com coordenadas $x = (x_1, \dots, x_n)$, $g_{ij} = \delta_{ij}\epsilon_i$. Considere $M = (\mathbb{R}^n, \bar{g}) \times_f F^m$, produto torcido $\bar{g} = \frac{1}{\phi^2}g$, F uma variedade semi-Riemanniana Einstein Ricci flat e funções diferenciáveis não constantes $f(\xi)$ e $\phi(\xi)$ e f uma função positiva e h função potencial diferenciável, onde $\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ e $\sum_{i=1}^n \epsilon_i \alpha_i^2 = \epsilon_{i_0} = \pm 1$. Se a métrica $\hat{g} = \bar{g} + f^2 g_F$ é uma métrica de Einstein então f e ϕ satisfazem o seguinte sistema*

$$\begin{cases} (n-2) \left(\frac{\phi'}{\phi} \right)' + (n-2) \left(\frac{\phi'}{\phi} \right)^2 - m \left(\frac{f'}{f} \right)' - m \left(\frac{f'}{f} \right)^2 - 2m \frac{\phi'}{\phi} \frac{f'}{f} = 0 \\ (m-n) \left(\frac{f'}{f} \right)' - m(n-1) \left(\frac{f'}{f} \right)^2 - (m-n)(n-2) \frac{\phi'}{\phi} \frac{f'}{f} + \\ - 2(n-1) \left(\frac{\phi'}{\phi} \right)' + (n-1)(n-2) \left(\frac{\phi'}{\phi} \right)^2 = 0. \end{cases} \quad (3-43)$$

Prova. Adicionando ao sistema (2-15) as expressões da curvatura escalar da base, dada

por (3-9) e (3-13), teremos

$$\left\{ \begin{array}{l} (n-2)f\varphi'' + f\varphi h'' - m\varphi f'' - 2m\varphi' f' + 2f\varphi' h' = 0 \\ \varepsilon_{i_0} \left[f\varphi\varphi'' - (n-1)f(\varphi')^2 + m\varphi\varphi' f' - f\varphi\varphi' h' \right] = \rho f \\ \varepsilon_{i_0} \left[-f\varphi^2 f'' + (n-2)f\varphi f' \varphi' - (m-1)\varphi^2 (f')^2 + f\varphi^2 f' h' \right] = \rho f^2 - \lambda_F \\ \bar{k} = \varepsilon_{i_0} (n-1) \left[2\varphi\varphi'' - n(\varphi')^2 \right] \\ \bar{k} = m \frac{\varphi^2}{f} \varepsilon_{i_0} \left[f'' - (n-2) \frac{\varphi' f'}{\varphi} \right] - \varphi^2 \varepsilon_{i_0} \left[h'' - (n-2) \frac{\varphi' h'}{\varphi} \right] + n\rho. \end{array} \right. \quad (3-44)$$

Igualando as duas expressões da curvatura escalar da base então teremos uma expressão para a curvatura de Ricci, dada por

$$\begin{aligned} n\rho &= \varepsilon_{i_0} \left[-m\varphi^2 \frac{f''}{f} + m(n-2)\varphi\varphi' \frac{f'}{f} + \varphi^2 h'' - (n-2)\varphi\varphi' h' \right] + \\ &+ \varepsilon_{i_0} \left[2(n-1)\varphi\varphi'' - n(n-1)(\varphi')^2 \right], \end{aligned} \quad (3-45)$$

Multiplicando a segunda equação de (3-44) por n e substituindo (3-45), teremos

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i_0} \left[n f \varphi \varphi'' - n(n-1) f (\varphi')^2 + m n \varphi \varphi' f' - n f \varphi \varphi' h' \right] &= \varepsilon_{i_0} \left[-m \varphi^2 f'' + m(n-2) \varphi \varphi' f' \right] + \\ + \varepsilon_{i_0} \left[f \varphi^2 h'' - (n-2) f \varphi \varphi' h' + 2(n-1) f \varphi \varphi'' - n(n-1) f (\varphi')^2 \right], \end{aligned}$$

juntando os termos semelhantes, concluímos que

$$(n-2)f\varphi\varphi'' + f\varphi^2 h'' - m\varphi^2 f'' - 2m\varphi\varphi' f' + 2f\varphi\varphi' h' = 0. \quad (3-46)$$

Analogamente, multiplicando a terceira equação de (3-44) por n , substituindo (3-45) e juntando os termos semelhantes, temos

$$\begin{aligned} (m-n)f\varphi^2 f'' - (m-n)(n-2)f\varphi\varphi' f' - n(m-1)\varphi^2 (f')^2 + n f \varphi^2 f' h' + \\ - f^2 \varphi^2 h'' + (n-2)f^2 \varphi\varphi' h' - 2(n-1)f^2 \varphi\varphi'' + n(n-1)f^2 (\varphi')^2 = 0. \end{aligned}$$

Assim, o sistema (3-44) torna-se

$$\begin{cases} (n-2)f\varphi'' + f\varphi h'' - m\varphi f'' - 2m\varphi' f' + 2f\varphi' h' = 0 \\ (n-2)f\varphi\varphi'' - 2m\varphi\varphi' f' + 2f\varphi\varphi' h' - m\varphi^2 f'' + f\varphi^2 h'' = 0 \\ (m-n)f\varphi^2 f'' - (m-n)(n-2)f\varphi\varphi' f' - n(m-1)\varphi^2 \left(\frac{f'}{f}\right)^2 + n f\varphi^2 f' h' + \\ - f^2 \varphi^2 h'' + (n-2)f^2 \varphi\varphi' h' - 2(n-1)f^2 \varphi\varphi'' + n(n-1)f^2 \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 = 0 \end{cases}$$

Veja que, ao dividirmos a primeira equação por $f\varphi$, a segunda equação por $f\varphi^2$ e a terceira equação por $f^2\varphi^2$ obtemos,

$$\begin{cases} (n-2)\frac{\varphi''}{\varphi} + h'' - m\frac{f''}{f} - 2m\frac{\varphi'}{\varphi}\frac{f'}{f} + 2\frac{\varphi'}{\varphi}h' = 0 \\ (n-2)\frac{\varphi''}{\varphi} + h'' - m\frac{f''}{f} - 2m\frac{\varphi'}{\varphi}\frac{f'}{f} + 2\frac{\varphi'}{\varphi}h' = 0 \\ (m-n)\frac{f''}{f} - (m-n)(n-2)\frac{\varphi'}{\varphi}\frac{f'}{f} - n(m-1)\left(\frac{f'}{f}\right)^2 + n\frac{f'}{f}h' + \\ - h'' + (n-2)\frac{\varphi'}{\varphi}h' - 2(n-1)\frac{\varphi''}{\varphi} + n(n-1)\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 = 0 \end{cases}$$

Note que as duas primeiras equações do sistema acima são exatamente a mesma. Agora, usando as identidades

$$\frac{f''}{f} = \left(\frac{f'}{f}\right)' + \left(\frac{f'}{f}\right)^2 \quad e \quad \frac{\varphi''}{\varphi} = \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)' + \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2,$$

temos o sistema

$$\begin{cases} (n-2)\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)' + (n-2)\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 + h'' - m\left(\frac{f'}{f}\right)' - m\left(\frac{f'}{f}\right)^2 - 2m\frac{\varphi'}{\varphi}\frac{f'}{f} + 2\frac{\varphi'}{\varphi}h' = 0 \\ (m-n)\left(\frac{f'}{f}\right)' - m(n-1)\left(\frac{f'}{f}\right)^2 - (m-n)(n-2)\frac{\varphi'}{\varphi}\frac{f'}{f} + n\frac{f'}{f}h' - h'' + \\ + (n-2)\frac{\varphi'}{\varphi}h' - 2(n-1)\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)' + (n-1)(n-2)\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 = 0. \end{cases}$$

(3-47)

Tome em (3-47) h sendo uma função constante, assim teremos (3-43). $\square$

Para estudarmos o sistema (3-43) faremos os seguinte, tome

$$p(\xi) = \left(\frac{f'}{f} \right) (\xi) \quad e \quad q(\xi) = \left(\frac{\phi'}{\phi} \right) (\xi),$$

e substitua em (3-43), assim

$$\begin{cases} (n-2)q' + (n-2)q^2 - 2mpq - mp' - mp^2 = 0 \\ (m-n)p' - m(n-1)p^2 - (m-n)(n-2)pq - 2(n-1)q' + (n-1)(n-2)q^2 = 0, \end{cases}$$

que é equivalente a,

$$\begin{cases} p' = -\frac{m(n-1)}{m+n-2}p^2 + \frac{(n-2)^2-mn}{m+n-2}pq + \frac{(n-1)(n-2)}{m+n-2}q^2 \\ q' = -\frac{m(m-1)}{m+n-2}p^2 - \frac{m(m-n)}{m+n-2}pq + \frac{(n-2)(m-1)}{m+n-2}q^2, \end{cases} \quad (3-48)$$

logo,

$$\alpha(p, q)dp + \beta(p, q)dq = 0, \quad (3-49)$$

onde,

$$\beta(p, q) = -\frac{m(n-1)}{m+n-2}p^2 + \frac{(n-2)^2-mn}{m+n-2}pq + \frac{(n-1)(n-2)}{m+n-2}q^2$$

e

$$\alpha(p, q) = \frac{m(m-1)}{m+n-2}p^2 + \frac{m(m-n)}{m+n-2}pq - \frac{(n-2)(m-1)}{m+n-2}q^2.$$

A equação (3-49) é uma equação diferencial ordinária homogênea de ordem 2, logo por [22] vale que,

$$q(\xi) = v(\xi)p(\xi), \quad (3-50)$$

onde $v(\xi)$ ou é uma constante não nula ou uma função não constante.

Teorema 3.7 *Seja $(\mathbb{R}^n, g)$ um espaço pseudo-Euclidiano, $n \geq 3$ com coordenadas $x = (x_1, \dots, x_n)$, $g_{ij} = \delta_{ij}\epsilon_i$. Considere funções diferenciáveis não contantes $f(\xi)$ e $\phi(\xi)$ onde*

$$\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \alpha_i \in \mathbb{R} \text{ e } \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \alpha_i^2 = \varepsilon_{i_0} = \pm 1, \text{ dadas por}$$

$$f(\xi) = \begin{cases} \frac{k_3}{k_1 + \xi}, & k_3 > 0 \\ k_3 \left[k_1 + \frac{\sqrt{m(n-1)(m+n-2)}}{n-1} \xi \right]^{-\frac{n-1}{\sqrt{m(n-1)(m+n-2)}}} \\ k_3 \left[k_1 - \frac{\sqrt{m(n-1)(m+n-2)}}{n-1} \xi \right]^{\frac{n-1}{\sqrt{m(n-1)(m+n-2)}}} \end{cases} \quad (3-51)$$

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} k_6(k_1 + \xi), & k_6 = k_5 k_3^N > 0 \\ k_6 \left[k_1 + \frac{\sqrt{m(n-1)(m+n-2)}}{n-1} \xi \right]^{-\frac{m(n-1) + \sqrt{m(n-1)(m+n-2)}}{(n-2)\sqrt{m(n-1)(m+n-2)}}} \\ k_6 \left[k_1 - \frac{\sqrt{m(n-1)(m+n-2)}}{n-1} \xi \right]^{\frac{m(n-1) - \sqrt{m(n-1)(m+n-2)}}{(n-2)\sqrt{m(n-1)(m+n-2)}}} \end{cases} \quad (3-52)$$

com $m+n \geq 2$, sendo k_i constantes. As funções f e φ obtidas por (3-51) e (3-52) são soluções de (3-43). Além disso, $\hat{g}$ é Einstein.

Prova. Considere $v(\xi) = N$ uma constante não nula. Então substituindo $q = Np$ e $q' p'$ sistema (3-48), teremos,

$$\begin{cases} p' = (a_1 + a_2 N + a_3 N^2) p^2 \\ N p' = (b_1 + b_2 N + b_3 N^2) p^2, \end{cases} \quad (3-53)$$

onde,

$$\begin{cases} a_1 = -\frac{m(n-1)}{m+n-2}, & a_2 = \frac{(n-2)^2 - mn}{m+n-2}, & a_3 = \frac{(n-1)(n-2)}{m+n-2} \\ b_1 = -\frac{m(m-1)}{m+n-2}, & b_2 = -\frac{m(m-n)}{m+n-2}, & b_3 = \frac{(n-2)(m-1)}{m+n-2}. \end{cases} \quad (3-54)$$

Igualando as duas equações de (3-53) encontraremos a equação polinomial de grau 3 em N ,

$$(n-1)(n-2)N^3 - (n-1)(2m-n+2)N^2 + m(m-2n+1)N + m(m-1) = 0,$$

cujas raízes são dadas por,

$$\begin{cases} N = -1 \\ N_+ = \frac{m(n-1) + \sqrt{m(n-1)(m+n-2)}}{(n-1)(n-2)}, \\ N_- = \frac{m(n-1) - \sqrt{m(n-1)(m+n-2)}}{(n-1)(n-2)}, \quad n \neq 1, n \neq 2 \text{ e } m+n \geq 2. \end{cases} \quad (3-55)$$

Tomando a primeira equação de (3-53), temos

$$\frac{p'}{p^2} = a_1 + a_2 N + a_3 N^2,$$

integrando,

$$p(\xi) = \frac{-1}{k_1 + (a_1 + a_2 N + a_3 N^2) \xi}, \quad k_1 \in \mathbb{R}. \quad (3-56)$$

Denotemos por $a = a_1 + a_2 N + a_3 N^2$ e olhemos para a expressão de a , então temos

$$\begin{cases} a = 1, \text{ para } N = -1 \\ a = a_+ = \frac{\sqrt{m(n-1)(m+n-2)}}{n-1}, \text{ para } N_+ = \frac{m(n-1) + \sqrt{m(n-1)(m+n-2)}}{(n-1)(n-2)}, \\ a = a_- = -\frac{\sqrt{m(n-1)(m+n-2)}}{n-1}, \text{ para } N_- = \frac{m(n-1) - \sqrt{m(n-1)(m+n-2)}}{(n-1)(n-2)}. \end{cases} \quad (3-57)$$

Assim, a expressão de (3-56), será dada por

$$p(\xi) = \begin{cases} -\frac{1}{\xi + k_1} \\ -\frac{n-1}{k_1(n-1) + \sqrt{m(n-1)(m+n-2)} \xi} \\ -\frac{n-1}{k_1(n-1) - \sqrt{m(n-1)(m+n-2)} \xi} \end{cases} \quad (3-58)$$

e como $p(\xi) = \left(\frac{f'}{f} \right) (\xi)$, integrando esta com respeito a ξ , então teremos as expressões

de f dadas por (3-51). Agora, sabendo que $q = Np$ temos,

$$q(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\xi + k_1} \\ -\frac{m(n-1) + \sqrt{m(n-1)(m+n-2)}}{(n-2)[k_1(n-1) + \sqrt{m(n-1)(m+n-2)}\xi]} \\ -\frac{m(n-1) - \sqrt{m(n-1)(m+n-2)}}{(n-2)[k_1(n-1) - \sqrt{m(n-1)(m+n-2)}\xi]}, \end{cases} \quad (3-59)$$

assim, como $q(\xi) = \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)(\xi)$, integrando esta com respeito a ξ , então teremos as expressões de φ dada por (3-52).

Agora, devemos verificar se as soluções encontradas são métricas de Einstein, para isso iremos usar a equação (3-45) que para h constante é reescrita por,

$$n\rho = \varepsilon_{i_0} \left[-m\varphi^2 \frac{f''}{f} + m(n-2)\varphi\varphi' \frac{f'}{f} + 2(n-1)\varphi\varphi'' - n(n-1)(\varphi')^2 \right] \quad (3-60)$$

Podemos reescrever f e φ da seguinte maneira,

$$\begin{cases} f(\xi) = k_3 (k_1 + a\xi)^{-\frac{1}{a}}, k_3 > 0 \\ \varphi(\xi) = k_6 (k_1 + a\xi)^{-\frac{N}{a}}, k_6 > 0 \end{cases} \quad (3-61)$$

Com isso, calculando as derivadas de primeira e segunda ordem de f e φ , temos

$$\begin{cases} f'(\xi) = -k_3 (k_1 + a\xi)^{-\frac{1}{a}-1} \\ f''(\xi) = k_3(1+a)(k_1 + a\xi)^{-\frac{1}{a}-2} \end{cases} e \begin{cases} \varphi(\xi)' = -k_6 N (k_1 + a\xi)^{-\frac{N}{a}-1} \\ \varphi(\xi)'' = k_6 N(N+a)(k_1 + a\xi)^{-\frac{N}{a}-2} \end{cases} \quad (3-62)$$

Substituindo (3-61) e (3-62) na expressão (3-60),

$$\rho = -\frac{k_6 \varepsilon_{i_0}}{n} (k_1 + a\xi)^{-\frac{2N}{a}-2} \{ (n-1)(n-2)N^2 - [m(n-2) + 2a(n-1)]N + m(1+a) \}, \quad (3-63)$$

logo, como $m+n > 2$, para $N = -1$, temos

$$\rho = -\varepsilon_{i_0} k_6^2 (m+n-1)$$

que é uma constante não nula, onde temos o caso de variedades de Einstein expanding e shrinking.

Para

$$N_{\pm} = \frac{m(n-1) \pm \sqrt{m(n-1)(m+n-2)}}{(n-1)(n-2)},$$

temos que $\rho_{\pm} = 0$, e temos as variedades de Einstein steady. De fato, é verdadeiro e demonstraremos para o caso N_+ e para o caso N_- as contas são inteiramente análogas. Começaremos chamando de

$$Z_{\pm} = (n-1)(n-2)N^2 - [m(n-2) + 2a(n-1)]N + m(1+a),$$

assim,

$$\rho = -\frac{k_6 \varepsilon_{i_o}}{n} (k_1 + a\xi)^{-\frac{2N}{a}-2} Z_{\pm}.$$

Calcularemos agora Z_+ . Substituindo as expressões de N_+ e a_+ dadas por (3-55) e (3-57), respectivamente, em Z_+ , teremos

$$\begin{aligned} Z_+ &= \frac{\left[m(n-1) + \sqrt{m(n-1)(m+n-2)} \right]^2}{(n-1)(n-2)} + \\ &- \left[m(n-2) + 2\sqrt{m(n-1)(m+n-2)} \right] \left[\frac{m(n-1) + \sqrt{m(n-1)(m+n-2)}}{(n-1)(n-2)} \right] + \\ &+ m \left[1 + \frac{\sqrt{m(n-1)(m+n-2)}}{n-1} \right] \\ Z_+ &= \frac{m^2(n-1)^2 + m(n-1)(m+n-2) - m^2(n-1)(n-2) - 2m(n-1)(m+n-2)}{(n-1)(n-2)} + \\ &+ \frac{m(n-1)(n-2) + [-m(n-2) - 2m(n-1) + m(n-2) + 2m(n-1)] \sqrt{m(n-1)(m+n-2)}}{(n-1)(n-2)} \end{aligned}$$

Note que os termos que acompanham o radical $\sqrt{m(n-1)(m+n-2)}$ se anulam, então

$$\begin{aligned} Z_+ &= \frac{m(n-1)[m(n-1) + m + n - 2 - m(n-2) - 2(m+n-2) + (n-2)]}{(n-1)(n-2)} \\ &= \frac{m[mn - m + m + (n-2) - mn + 2m - 2m + 2(n-2) + (n-2)]}{n-2}, \end{aligned}$$

e portanto $Z_+ = 0$ o que implica $\rho_+ = 0$. □

Teorema 3.8 *Seja $(\mathbb{R}^n, g)$ um espaço pseudo-Euclidiano, $n \geq 3$ com coordenadas $x = (x_1, \dots, x_n)$, $g_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon_i$. Considere funções $v(\xi)$ e $p(\xi)$ onde $\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ e*

$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \alpha_i^2 = \varepsilon_{i_0} = \pm 1$ são dadas por

$$\begin{cases} v' = -c_2 \frac{(n-1)(n-2)}{m+n-2} (v+1)^{1-\gamma} (v-a)^{1-B} (v-b)^{1-C}, & c_2 > 0 \\ p = c_2 (v+1)^{-\gamma} (v-a)^{-B} (v-b)^{-C} \end{cases} \quad (3-64)$$

onde

$$a = \frac{m(n-1) + \sqrt{m(n-1)(m+n-2)}}{(n-1)(n-2)}, \quad b = \frac{m(n-1) - \sqrt{m(n-1)(m+n-2)}}{(n-1)(n-2)},$$

$$\gamma = \frac{1}{m+n-1}, \quad A = \frac{\gamma}{(n-1)(n-2)}, \quad B = \frac{\gamma \left[(n-1)(m+n-2) - \sqrt{m(n-1)(m+n-2)} \right]}{2(n-1)},$$

$$C = \frac{\gamma \left[(n-1)(m+n-2) + \sqrt{m(n-1)(m+n-2)} \right]}{2(n-1)}.$$

Seja $f(\xi)$ e $\varphi(\xi)$ funções obtidas pela integração,

$$\frac{f'}{f} = p(\xi) \quad e \quad \frac{\varphi'}{\varphi} = v(\xi)p(\xi).$$

As funções f e φ obtidas por (3-64) são soluções de (3-43). Além disso, $\hat{g}$ é Einstein.

Prova. Tome em (3-50), $v(\xi)$ uma função não constante. Então $q = vp$ e $dq = vdp + pdv$, substituindo na equação diferencial (3-49), teremos

$$\alpha(p, vp)dp + \beta(p, vp)(vdp + pdv) = 0, \quad (3-65)$$

onde,

$$\beta(p, vp) = \left[-\frac{m(n-1)}{m+n-2} - \frac{(n-2)^2 - mn}{m+n-2}v + \frac{(n-1)(n-2)}{m+n-2}v^2 \right] p^2$$

e

$$\alpha(p, vp) = \left[\frac{m(m-1)}{m+n-2} + \frac{m(m-n)}{m+n-2}v - \frac{(n-2)(m-1)}{m+n-2}v^2 \right] p^2.$$

assim, substituindo as expressões de $\alpha(p, vp)$ e $\beta(p, vp)$ em (3-65),

$$\frac{dp}{p} = -\frac{(n-1)(n-2)v^2 + [(n-2)^2 - mn]v - m(n-1)}{(n-1)(n-2)v^3 - [mn + (n-2)(m-n+1)]v^2 + m(m-2n+1)v + m(m-1)} dv. \quad (3-66)$$

Observe que podemos fatorar o polinômio

$$t(v) = (n-1)(n-2)v^3 - [mn + (n-2)(m-n+1)]v^2 + m(m-2n+1)v + m(m-1)$$

da seguinte maneira

$$t(v) = (n-1)(n-2)(v+1) \left(v - \frac{m(n-1) + \sqrt{m(n-1)(m+n-2)}}{(n-1)(n-2)} \right) \left(v - \frac{m(n-1) - \sqrt{m(n-1)(m+n-2)}}{(n-1)(n-2)} \right)$$

$$t(v) = (n-1)(n-2)(v+1)(v-a)(v-b).$$

Substituindo $t(v)$ em (3-66),

$$\begin{aligned} \frac{dp}{p} &= -\frac{1}{(n-1)(n-2)} \frac{(n-1)(n-2)v^2 + [(n-2)^2 - mn]v - m(n-1)}{(v+1)(v-a)(v-b)} dv \\ &= -(n-1)(n-2) \left\{ \frac{A}{v+1} + \frac{1}{(n-1)(n-2)} \frac{B}{v-a} + \frac{1}{(n-1)(n-2)} \frac{C}{v-b} \right\} dv \quad (3-67) \end{aligned}$$

onde os valores das constantes A, B e C , são dadas no enunciado deste teorema. Integrando com respeito a ξ , a equação (3-67),

$$\ln p = -\gamma \ln(v+1) + B \ln(v-a) - C \ln(v-b) + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R},$$

γ dada no enunciado deste teorema. Assim, p é dada por (3-64).

Agora, usando o fato de que $q = vp$, temos que $q' = vp' + pv'$ e por outro lado da segunda equação de (3-48) temos que

$$q' = -\frac{m(m-1)}{m+n-2} p^2 - \frac{m(m-n)}{m+n-2} pq + \frac{(n-2)(m-1)}{m+n-2} q^2,$$

assim

$$vp' + pv' = q' = \left\{ -\frac{m(m-1)}{m+n-2} - \frac{m(m-n)}{m+n-2} v + \frac{(n-2)(m-1)}{m+n-2} v^2 \right\} p^2,$$

supondo $p \neq 0$ e $v \neq 0$,

$$\frac{p'}{p} + \frac{v'}{v} = \frac{(n-2)(m-1)v^2 - m(m-n)v - m(n-1)}{m+n-2} \frac{p}{v},$$

usando a expressão de $\frac{dp}{p} = \frac{p'}{p}$ dada por (3-66), temos

$$\frac{v'}{v} \left\{ 1 - \frac{(n-1)(n-2)v^2 + [(n-2)^2 - mn]v - m(n-1)}{(n-1)(n-2)v^3 - [mn + (n-2)(m-n+1)]v^2 + m(m-2n+1)v + m(m-1)} \right\} = \frac{(n-2)(m-1)v^2 - m(m-n)v - m(n-1)}{m+n-2} \frac{p}{v}$$

$$-\frac{(n-2)(m-1)v^2 - m(m-n)v - m(n-1)}{(n-1)(n-2)v^3 - [mn + (n-2)(m-n+1)]v^2 + m(m-2n+1)v + m(m-1)} \frac{v'}{v} = \frac{(n-2)(m-1)v^2 - m(m-n)v - m(n-1)}{m+n-2} \frac{p}{v}$$

$$v' = -\frac{(n-1)(n-2)}{m+n-2}(v+1)(v-a)(v-b)p, \quad (3-68)$$

substituindo a expressão da p , temos a expressão de v' dada por (3-64). Para que a métrica produto torcido $\hat{g} = \bar{g} + f^2 g_F$ seja uma variedade de Einstein, então f e ϕ que satisfazem $\frac{f'}{f} = p$, $\frac{\phi'}{\phi} = q = vp$, onde p e v são dadas pelas expressões (3-64) que devem satisfazer a expressão (3-60).

Observe que, como $\frac{f'}{f} = p$, então

$$f' = fp, \text{ e } f'' = f(p^2 + p'),$$

logo,

$$\frac{f''}{f} = p^2 + p'. \quad (3-69)$$

Analogamente, como $\frac{\phi'}{\phi} = q = vp$, então

$$\phi' = \phi vp, \text{ e } \phi'' = \phi(v^2 p^2 + vp' + pv'),$$

logo,

$$\frac{\phi''}{\phi} = v^2 p^2 + vp' + pv'. \quad (3-70)$$

Substituindo estas expressões em (3-60),

$$\frac{n\rho}{\varepsilon_{i_0}} = -m\phi^2(p^2 + p') + m(n-2)\phi^2 vp^2 + 2(n-1)\phi^2(v^2 p^2 + vp' + pv') - n(n-1)\phi^2 v^2 p^2,$$

portanto,

$$\frac{n\rho}{\varepsilon_{i_0}} = \left\{ [-m + m(n-2)v - (n-1)(n-2)v^2] p^2 + 2(n-1)pv' + [2(n-1)v - m] p' \right\} \phi^2. \quad (3-71)$$

Agora, determinaremos expressões para p' e ϕ . Primeiramente, derivando p , dada pela equação (3-64),

$$\begin{aligned} p' &= c_2[-\gamma(v+1)^{-1-\gamma}(v-a)^{-B}(v-b)^{-C} - B(v+1)^{-\gamma}(v-a)^{-1-B}(v-b)^{-C} + \\ &\quad -C(v+1)^{-\gamma}(v-a)^{-B}(v-b)^{-1-C}]v' \\ &= -c_2(v+1)^{-\gamma}(v-a)^{-B}(v-b)^{-C} \left[\frac{\gamma}{v+1} + \frac{B}{v-a} + \frac{C}{v-b} \right] \\ &= -c_2(v+1)^{-1-\gamma}(v-a)^{-1-B}(v-b)^{-1-C} [\gamma(v-a)(v-b) + B(v+1)(v-b) + C(v+1)(v-a)]. \end{aligned}$$

Considere $\omega = \gamma(v-a)(v-b) + B(v+1)(v-b) + C(v+1)(v-a)$, usando a expressão de v' dada

por (3-64), temos

$$p' = c_2^2 \frac{(n-1)(n-2)}{m+n-2} (v+1)^{-2\gamma} (v-a)^{-2B} (v-b)^{-2C} \omega. \quad (3-72)$$

Determinaremos agora ω . Veja que,

$$\begin{aligned} \omega &= \gamma(v-a)(v-b) + B(v+1)(v-b) + C(v+1)(v-a) \\ &= (\gamma + B + C)v^2 + [(1-b)B + (1-a)C - (a+b)\gamma]v + ab\gamma - bB - aC \\ \omega &= \omega_1 v^2 + \omega_2 \gamma v + \omega_3, \end{aligned} \quad (3-73)$$

onde $\omega_1 = \gamma + B + C$, $\omega_2 = (1-b)B + (1-a)C - (a+b)\gamma$ e $\omega_3 = ab\gamma - bB - aC$. Logo,

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \gamma + \gamma \frac{(n-1)(m+n-2) - \sqrt{m(n-1)(m+n-2)} + (n-1)(m+n-2) + \sqrt{m(n-1)(m+n-2)}}{2(n-1)} \\ &= \frac{\gamma}{2(n-1)} [2(n-1) + 2(n-1)(m+n-2)] \\ &= \frac{\gamma(n-1)(m+n-1)}{2(n-1)}, \end{aligned}$$

simplificando e substituindo o valor de γ , temos

$$\omega_1 = 1 \quad (3-74)$$

Encontraremos agora ω_2 ,

$$\begin{aligned} \omega_2 &= - \frac{\left[(n-1)(m+n-2) - \sqrt{m(n-1)(m+n-2)} \right] \left[(n-1)(m+n-2) - \sqrt{m(n-1)(m+n-2)} \right]}{2(n-1)^2(n-2)} \gamma + \\ &\quad - \frac{\left[(n-1)(m+n-2) + \sqrt{m(n-1)(m+n-2)} \right] \left[(n-1)(m+n-2) + \sqrt{m(n-1)(m+n-2)} \right]}{2(n-1)^2(n-2)} \gamma + \\ &\quad - \frac{2m}{n-2} \gamma, \\ &= -\gamma \left\{ \frac{2m}{n-2} + \frac{2(n-1)(m+n-2)}{2(n-1)^2(n-2)} [(n-1)(m+n-2) + m] \right\}, \end{aligned}$$

portanto,

$$\omega_2 = - \frac{2m(n-1) + (m+n-2)[m + (n-1)(m+n-2)]}{(n-1)(n-2)(m+n-2)} \quad (3-75)$$

e por ultimo determinaremos ω_3 ,

$$\begin{aligned}
 \omega_3 &= -\frac{\left[m(n-1) + \sqrt{m(n-1)(m+n-2)}\right] \left[m(n-1) - \sqrt{m(n-1)(m+n-2)}\right]}{(n-1)^2(n-2)^2} \gamma + \\
 &\quad -\frac{\left[m(n-1) - \sqrt{m(n-1)(m+n-2)}\right] \left[m(n-1) - \sqrt{m(n-1)(m+n-2)}\right]}{2(n-1)^2(n-2)} \gamma + \\
 &\quad -\frac{\left[m(n-1) + \sqrt{m(n-1)(m+n-2)}\right] \left[m(n-1) + \sqrt{m(n-1)(m+n-2)}\right]}{2(n-1)^2(n-2)} \gamma + \\
 &= \frac{\gamma}{(n-1)(n-2)} \left\{ \frac{m(n-1)[m(n-1) - (m+n-2)]}{(n-1)(n-2)} - \frac{2mn(n-1)(m+n-2)}{2(n-1)} \right\} \\
 &= \frac{\gamma}{(n-1)(n-2)} \left\{ \frac{m(m-1)(n-2)}{n-2} - mn(m+n-2) \right\} \\
 &= \frac{m(n-1)(m+n-1)}{(n-1)(n-2)(m+n-1)}
 \end{aligned}$$

assim,

$$\omega_3 = -\frac{m}{n-2}. \quad (3-76)$$

Substituindo as expressões de ω_1, ω_2 e ω_3 , dadas respectivamente por (3-74), (3-75) e (3-76) em (3-73),

$$\omega = v^2 - \frac{2m(n-1) + (m+n-2)[m + (n-1)(m+n-2)]}{(n-1)(n-2)(m+n-2)} v - \frac{m}{n-2}. \quad (3-77)$$

Substituindo (3-77) em (3-72), temos

$$\begin{aligned}
 p' &= \frac{c_2^2}{(m+n-1)(m+n-2)} (v+1)^{-2\gamma} (v-a)^{-2B} (v-b)^{-2C} \{ (n-1)(n-2)(m+n-1)v^2 \} + \\
 &\quad - \frac{c_2^2}{(m+n-1)(m+n-2)} (v+1)^{-2\gamma} (v-a)^{-2B} (v-b)^{-2C} \{ 2m(n-1) + (m+n-2)[m + (n-1)(m+n-2)] \} v + \\
 &\quad - \frac{c_2^2}{(m+n-1)(m+n-2)} (v+1)^{-2\gamma} (v-a)^{-2B} (v-b)^{-2C} \{ m(n-1)(m+n-1) \}.
 \end{aligned} \quad (3-78)$$

Vamos determinar uma expressão para ϕ . Como anteriormente, primeiramente, observe que,

$$vp = \frac{vp}{v'} v',$$

por (3-68), temos

$$vp = \frac{vp}{-\frac{(n-1)(n-2)}{m+n-2} (v+1)(v-a)(v-b)p} v' = -\frac{m+n-2}{(n-1)(n-2)} \frac{v}{(v+1)(v-a)(v-b)},$$

e assim,

$$vp - \frac{m+n-2}{(n-1)(n-2)} \left[\frac{\bar{A}}{v+1} + \frac{\bar{B}}{v-a} + \frac{\bar{C}}{v-b} \right],$$

onde

$$\bar{A} = -\frac{(n-1)(n-2)}{(m+n-1)(m+n-2)}, \quad \bar{B} = \frac{(n-2) \left[(n-1) + \sqrt{m(n-1)(m+n-2)} \right]}{2(m+n-1)(m+n-2)}$$

$$\bar{C} = \frac{(n-2) \left[(n-1) - \sqrt{m(n-1)(m+n-2)} \right]}{2(m+n-1)(m+n-2)}.$$

Portanto,

$$vp = \gamma \frac{v'}{v+1} - \frac{\gamma \left[(n-1) + \sqrt{m(n-1)(m+n-2)} \right]}{2(n-1)} \frac{v'}{v-a} + \frac{\gamma \left[(n-1) - \sqrt{m(n-1)(m+n-2)} \right]}{2(n-1)} \frac{v'}{v-b}. \quad (3-79)$$

Como $\varphi = ce^{\int vld\xi}$, $c > 0$, substituindo (3-79) então

$$\varphi = c_4(v+1)^\gamma(v-a)^{-\frac{\gamma \left[(n-1) + \sqrt{m(n-1)(m+n-2)} \right]}{2(n-1)}}(v-b)^{\frac{\gamma \left[(n-1) - \sqrt{m(n-1)(m+n-2)} \right]}{2(n-1)}}, \quad c_4 > 0. \quad (3-80)$$

Encontrados expressões para p' e φ , devemos testar o crivo, dado por (3-71), para isso substituiremos (3-79) e (3-80) em (3-71). Antes, considere

$$\Upsilon = c_2^2 c_4^2 (v+1)^{-2\gamma+2\gamma} (v-a)^{-2B - \frac{\gamma \left[(n-1) + \sqrt{m(n-1)(m+n-2)} \right]}{2(n-1)}} (v-b)^{-2C - \frac{\gamma \left[(n-1) - \sqrt{m(n-1)(m+n-2)} \right]}{2(n-1)}},$$

então

$$\begin{aligned} \frac{n\rho}{\varepsilon_{i_0}} &= \Upsilon \left\{ -m + m(n-2)v - (n-1)(n-2)v^2 - \frac{2(n-1)^2(n-2)}{m+n-2} (v+1)(v-a)(v-b) \right\} + \\ &+ \Upsilon \frac{2(n-1)v-m}{(m+n-1)(m+n-2)} \left\{ (n-1)(n-2)(m+n-1)v^2 - 2m(n-1)v \right\} + \\ &+ \Upsilon \left\{ \frac{2(n-1)v-m}{(m+n-1)(m+n-2)} \left\{ -(m+n-2)[m + (n-1)(m-n+2)] \right\} v - m(n-1)(m+n-1) \right\}. \end{aligned}$$

associando os termos semelhantes, e observando que

$$2B + \frac{\gamma \left[(n-1) + \sqrt{m(n-1)(m+n-2)} \right]}{(n-1)} = 1 = 2C + \frac{\gamma \left[(n-1) - \sqrt{m(n-1)(m+n-2)} \right]}{(n-1)},$$

temos que,

$$n\rho = \varepsilon_{i_0} c_2^2 c_4^2 (v-a)^{-1} (v-b)^{-1} (\tau_1 v^2 + \tau_2 v + \tau_3), \quad (3-81)$$

sendo,

$$\tau_1 = -(n-1) \left\{ (n-2) + \frac{2(n-1)(n-2-2m) + m(n-2)}{m+n-2} \right\} +$$

$$\begin{aligned}
& -(n-1) \frac{4m(n-1) + 2(m+n-2)[m + (n-1)(m-n+2)]}{(m+n-1)(m+n-2)} \\
&= -\frac{n-1}{(m+n-1)(m+n-2)} (mn^2 - 2mn + n^3 - 3n^2 + 2n) \\
&= -\frac{n-1}{(m+n-1)(m+n-2)} (n^2 - 2n)(m+n-1) \\
&= -\frac{n-1}{(m+n-1)(m+n-2)} (n^2 - 2n)(m+n-1) \\
\tau_1 &= -\frac{n(n-1)(n-2)}{m+n-2}. \tag{3-82}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_2 &= m \left\{ (n-2) + \frac{2(n-1)(m-2n+1) + 2(n-1)^2}{m+n-2} \right\} + \\
& \quad -m \frac{2m(n-1) + (m+n-2)[m + (n-1)(m-n+2)]}{(m+n-1)(m+n-2)} \\
&= \frac{m \{ (m+n-2)[(n-2)(m+n-1) + m + (n-1)(m-n+2)] \}}{(m+n-1)(m+n-2)} + \\
& \quad -2m \frac{(n-1)[(m-n)(m+n-1) - m]}{(m+n-1)(m+n-2)} \\
&= \frac{m \{ 2m(n-1)(m-n+2) - 2m(n-1)(m-2) + 2n(n-1)^2 \}}{(m+n-1)(m+n-2)} \\
&= \frac{m \{ 2mn(n-1) + 2n(n-1)^2 \}}{(m+n-1)(m+n-2)} \\
&= \frac{2mn(n-1)(m+n-1)}{(m+n-1)(m+n-2)} \\
\tau_2 &= \frac{2mn(n-1)}{m+n-2}. \tag{3-83}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_3 &= -m - \frac{2m(m-1)(n-1) - m^2(n-1)}{m+n-2} \\
&= -m - \frac{m(n-1)(m-2)}{m+n-2} \\
& \quad - \frac{m[n(m-2) + n]}{m+n-2}
\end{aligned}$$

$$\tau_3 = -\frac{mn(m-1)}{m+n-2}. \quad (3-84)$$

Substituindo (3-82), (3-83) e (3-84) em (3-81)

$$\begin{aligned} n\rho &= \varepsilon_{i_0} c_2^2 c_4^2 (v-a)^{-1} (v-b)^{-1} \left[-\frac{n(n-1)(n-2)}{m+n-2} v^2 + \frac{2mn(n-1)}{m+n-2} v - \frac{mn(m-1)}{m+n-2} \right] \\ &= -\frac{n}{m+n-2} \varepsilon_{i_0} c_2^2 c_4^2 (v-a)^{-1} (v-b)^{-1} [(n-1)(n-2)v^2 - 2mn(n-1)v + m(m-1)] \\ \rho &= -\frac{(n-1)(n-2)}{m+n-2} \varepsilon_{i_0} c_2^2 c_4^2 (v-a)^{-1} (v-b)^{-1} (v-a)(v-b) \\ \rho &= -\frac{(n-1)(n-2)}{m+n-2} \varepsilon_{i_0} c_2^2 c_4^2. \end{aligned}$$

Portanto como ρ é constante temos que a métrica produto torcido $\hat{g}$ é sempre uma variedade de Einstein. $\square$

Nos Teoremas 3.7 e 3.8 encontramos todas as soluções do sistema (3-43) e classificamos todas as variedades de Einstein quando a fibra é Ricci flat e estes são uma generalização do artigo [15]. Neste artigo os autores encontram as variedades de Einstein para produto torcido, com a fibra Ricci flat e invariante por translação no caso steady ($\rho = 0$). Resumindo, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.9 *Seja $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$ um espaço pseudo-Euclidiano, $n \geq 3$ com coordenadas $x = (x_1, \dots, x_n)$, $g_{ij} = \delta_{ij} \varepsilon_i$. Considere $M = (\mathbb{R}^n, \bar{g}) \times_f \mathbb{R}$, uma variedade com a métrica $\hat{g} = \bar{g} + f^2 g_{\mathbb{R}}$, onde $\bar{g} = \frac{1}{\varphi^2} g$ e as funções f e φ são invariantes sob a ação de um grupo de translação $(n-1)$ -dimensional cujo invariante básico é $\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ e $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \alpha_i^2 = \varepsilon_{i_0} = \pm 1$. A métrica produto torcido $\hat{g}$ é Einstein se, e somente se, f e φ satisfazem os Teoremas 3.7 e 3.8.*

Prova. Com a mudança de variável

$$p(\xi) = \left(\frac{f'}{f} \right) (\xi) \quad e \quad q(\xi) = \left(\frac{\varphi'}{\varphi} \right) (\xi),$$

temos que (3-43) é equivalente a (3-44) para p e q . As soluções do sistema podem ser escrito por (3-50), $q(\xi) = v(\xi)p(\xi)$, onde $v(\xi)$ é uma constante não nula ou é uma função não constante.

Se $v(\xi)$ é uma constante não nula, então a prova do Teorema 3.7 demonstra que as soluções de (3-44) são dadas por (3-51) e (3-52). Se $v(\xi)$ é uma função não constante,

então a prova do Teorema 3.8 demonstra que v é determinada por (3-64) e p é dada algebricamente em termos de v pela segunda equação de (3-64). Então as funções f e φ são determinadas pela integração da equação diferencial

$$\frac{f'}{f} = p(\xi) \quad e \quad \frac{\varphi'}{\varphi} = v(\xi)p(\xi).$$

□

Gradiente Ricci soliton

Neste capítulo, na primeira seção, provamos que não existe gradiente Ricci soliton conforme ao espaço pseudo-Euclidiano onde o fator conforme $\varphi = \varphi(s)$ e a função potencial $f = f(s)$ onde s é o invariante cilíndrico $s = \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i x_i^2$. Para as demais seções, vamos considerar um produto torcido $M = (\mathbb{R}^n, \bar{g}) \times_f F^m, n \geq 3$, com a base invariante pela ação de um grupo de translação $(n-1)$ -dimensional. Inicialmente provaremos que se a fibra for Ricci flat e $f = 1$ então a variedade produto $M = (\mathbb{R}^n, \bar{g}) \times_f F^m$ é steady e exibiremos todas as soluções. Finalmente encontraremos todos os gradiente Ricci solitons que satisfaz $\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{f'}{f}$, ver Teorema 4.3.

4.1 Gradiente Ricci soliton - um resultado de não existência

Mostraremos no próximo teorema que não existe gradiente Ricci soliton cuja invariância é cilíndrica, dada por $s = \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i x_i^2$.

Teorema 4.1 *Seja $(\mathbb{R}^n, g)$ um espaço pseudo-Euclidiano $n \geq 3$ com coordenadas $x = (x_1, \dots, x_n)$, $g_{ij} = \delta_{ij} \varepsilon_i$, $\varepsilon_i = \pm 1$ com pelo menos um $\varepsilon_i = 1$. Considere funções diferenciáveis não constantes $f(s)$ e $\varphi(s)$, onde $s = \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i x_i^2$. Então não existem métricas $\bar{g} = \frac{1}{\varphi^2} g$ que sejam gradiente Ricci solitons, com f como função potencial.*

Prova. Como $f(s)$ e $\varphi(s)$ são funções de s , onde $s = \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i x_i^2$, temos que

Para $1 \leq i, j \leq n-1$,

$$\varphi_{,x_i} = 2\varepsilon_i x_i \varphi', \quad \varphi_{,x_i x_j} = 4\varepsilon_i \varepsilon_j x_i x_j \varphi'', \quad \varphi_{,x_i x_i} = 2\varepsilon_i \varphi' + 4x_i^2 \varphi'',$$

$$f_{,x_i} = 2\varepsilon_i x_i f', \quad f_{,x_i x_j} = 4\varepsilon_i \varepsilon_j x_i x_j f'', \quad f_{,x_i x_i} = 2\varepsilon_i f' + 4x_i^2 f''.$$

Para $i = n$ ou $j = n$

$$\varphi_{,x_n} = \varphi_{,x_n x_j} = \varphi_{,x_i x_n} = 0,$$

$$f_{,x_n} = f_{,x_i x_n} = f_{,x_n x_j} = 0.$$

Além disso, do fato de que $\varphi_{,x_n} = 0 = \varphi_{,x_n x_n}$,

$$\|\nabla_g \varphi\|^2 = 4s(\varphi')^2, \quad \Delta_g \varphi = 2(n-1)\varphi' + 4s\varphi''.$$

Substituindo essas expressões em (2-2), temos

$$(n-2)\varphi_{,x_i x_j} = -\varphi_{,x_i} f_{,x_j} - \varphi_{,x_j} f_{,x_i} - \varphi f_{,x_i x_j}. \quad (4-1)$$

Para $i = n$ ou $j = n$ a equação (4-1) esta verificada.

Para $1 \leq i, j \leq n-1$, a equação (4-1) reduz-se a,

$$(n-2)\varphi'' + 2\varphi' f' + \varphi f'' = 0. \quad (4-2)$$

Similarmente, considerando a segunda equação de (2-2), temos

Para $i = n$, como $\varphi_{,x_n} = 0 = \varphi_{,x_n x_n}$, e $f_{,x_n} = 0 = f_{,x_n x_n}$, então esta reduz-se a

$$\varepsilon_n [\varphi \Delta_g \varphi - (n-1) \|\nabla_g \varphi\|^2] - \varphi \varepsilon_n \sum_{k=1}^n \varepsilon_k f_{,x_k} \varphi_{,x_k} = \varepsilon_n \rho,$$

portanto,

$$2(n-1)\varphi\varphi' + 4s\varphi\varphi'' - 4(n-1)s(\varphi')^2 - 4s\varphi\varphi'f' = \rho. \quad (4-3)$$

Para $i \neq n$, temos que

$$\begin{aligned} & 2(n-2)\varphi\varphi' + 2\varphi^2 f' + 2(n-1)\varphi\varphi' + 4s\varphi\varphi'' - 4(n-1)s(\varphi')^2 - 4s\varphi\varphi'f' + \\ & + 4x_i^2 \varphi [(n-2)\varphi'' + 2\varphi' f' + \varphi f''] = \rho. \end{aligned} \quad (4-4)$$

Substituindo (4-2) e (4-3) em (4-4), temos

$$2\varphi [(n-2)\varphi' + \varphi f'] = 0,$$

Como $\varphi \neq 0$,

$$(n-2)\varphi' + \varphi f' = 0,$$

que é equivalente a

$$f' = -(n-2) \frac{\phi'}{\phi}.$$

Logo,

$$f''(s) = (n-2) \left(\frac{\phi'}{\phi} \right)^2 - (n-2) \frac{\phi''}{\phi}.$$

Substituindo f' e f'' em (4-2),

$$(n-2)\phi'' - 2(n-2) \frac{(\phi')^2}{\phi} + (n-2) \frac{(\phi')^2}{\phi} - (n-2)\phi'' = 0,$$

consequentemente $\phi' = 0$ que resulta em $f' = 0$. Absurdo pois ϕ e f são funções não constantes. $\square$

4.2 Gradiente Ricci soliton com estrutura de produto torcido invariante por translação

Nesta seção, inicialmente mostraremos que se a variedade produto $M = (\mathbb{R}^n, \bar{g}) \times_f F^m, \bar{g} = \frac{1}{\phi^2} g$, invariante por translação, cuja fibra F é Ricci flat for um gradiente Ricci soliton então M é necessariamente steady, veja Teorema 4.2. Em seguida, mostraremos que todo gradiente Ricci soliton do tipo $M = (\mathbb{R}^n, \bar{g}) \times_f F^m$, cuja fibra F é Ricci flat, e além disso, se $\frac{\phi'}{\phi} = c \frac{f'}{f}$, c uma constante, é um gradiente Ricci soliton steady, veja Teorema 4.3.

Teorema 4.2 *Seja $(\mathbb{R}^n, g)$ um espaço pseudo-Euclidiano, $n \geq 3$ com coordenadas $x = (x_1, \dots, x_n)$, $g_{ij} = \delta_{ij} \epsilon_i$. Considere $M = (\mathbb{R}^n, \bar{g}) \times_f F^m$, gradiente Ricci soliton com $\bar{g} = \frac{1}{\phi^2} g$, F uma variedade semi-Riemanniana Einstein, $h(\xi)$ e $\phi(\xi)$ funções diferenciáveis, h função potencial, onde $\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ e $\sum_{i=1}^n \epsilon_i \alpha_i^2 = \epsilon_{i_0}$. Se $f = 1$ e F Ricci flat, então a métrica produto $\hat{g}$ é um gradiente Ricci soliton steady e todas as soluções são dadas por:*

$$\begin{cases} \phi_{\pm}(\xi) = \gamma \left(\pm \frac{1}{\sqrt{n-1}} \xi + b \right)^{\frac{1}{n-2}(-1 \pm \sqrt{n-1})}, \gamma > 0, b \in \mathbb{R} \\ h_{\pm}(\xi) = \mp \sqrt{n-1} \ln \left(\pm \frac{1}{\sqrt{n-1}} \xi + b \right), \end{cases} \quad (4-5)$$

e implicitamente pelas EDO's em $l(\xi)$ e $v(\xi)$,

$$\begin{cases} \frac{v'}{v} = \frac{\gamma}{\sqrt{a}} (av + c)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{n-1}}} (av + d)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{n-1}}}, \gamma > 0 \\ l = \gamma\sqrt{a} (av + c)^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{n-1}}} (av + d)^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{n-1}}}, \end{cases} \quad (4-6)$$

sendo h e ϕ dadas pela integração,

$$h'(\xi) = l(\xi), \quad e \quad \left(\frac{\phi'}{\phi} \right)(\xi) = l(\xi)v(\xi)$$

onde $a = (n-1)(n-2)$, $b = 2(n-1)$, $c = n-1 - \sqrt{n-1}$ e $d = n-1 + \sqrt{n-1}$.

Prova. Para começarmos, considere o sistema (2-15) dado por

$$\begin{cases} f \left[(n-2)\phi'' + 2\phi'h' + \phi h'' \right] - m\phi f'' - 2m\phi' f' = 0 \\ \epsilon_{i_0} \left[f\phi\phi'' - (n-1)f(\phi')^2 + m\phi\phi' f' - f\phi\phi' h' \right] = \rho f \\ \epsilon_{i_0} \left[-f\phi^2 f'' + (n-2)f\phi f' \phi' - (m-1)\phi^2 (f')^2 + f\phi^2 f' h' \right] = \rho f^2 - \lambda_F, \end{cases}$$

que em [14] caracteriza os gradiente Ricci solitons. Considerando a fibra Ricci flat e $f = 1$ no sistema acima, este se torna

$$\begin{cases} (n-2)\phi'' + 2\phi'h' + \phi h'' = 0 \\ \epsilon_{i_0} \left[\phi\phi'' - (n-1)(\phi')^2 - \phi\phi' h' \right] = \rho \\ \rho = 0, \end{cases} \quad (4-7)$$

portanto, M é um gradiente Ricci soliton steady.

Como $\rho = 0$, então o sistema (4-7) é exatamente o sistema

$$\begin{cases} (n-2)\phi'' + 2\phi'h' + \phi h'' = 0 \\ \phi\phi'' - (n-1)(\phi')^2 - \phi\phi' h' = 0. \end{cases} \quad (4-8)$$

Se isolarmos ϕ'' na segunda equação de (4-8) e h'' na primeira equação de (4-8), então

teremos

$$\begin{cases} \varphi'' = \varphi' h' + (n-1) \frac{(\varphi')^2}{\varphi} = 0 \\ h'' = -n \frac{\varphi' h'}{\varphi} - (n-1)(n-2) \left(\frac{\varphi'}{\varphi} \right)^2, \end{cases} \quad (4-9)$$

este sistema (4-9), é exatamente o sistema (3), para o caso steady, do artigo [17]. Neste artigo os autores encontram todas as soluções deste sistema, fazendo a mudança de variável $l(\xi) = h'(\xi)$ e $g(\xi) = \left(\frac{\varphi'}{\varphi} \right)(\xi)$ e pelas EDO's $g(\xi) = v(\xi)l(\xi)$, e obtiveram como solução as apresentadas nos sistemas (4-5) e (4-6). $\square$

Teorema 4.3 *Seja $(\mathbb{R}^n, g)$ um espaço pseudo-Euclidiano, $n \geq 3$ com coordenadas $x = (x_1, \dots, x_n)$, $g_{ij} = \delta_{ij}\epsilon_i$. Considere $M = (\mathbb{R}^n, \bar{g}) \times_f F^m$, gradiente Ricci soliton com $\bar{g} = \frac{1}{\varphi^2}g$, F uma variedade semi-Riemanniana Einstein, $h(\xi)$ e $f(\xi)$ funções diferenciáveis, h função potencial, onde $\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ e $\sum_{i=1}^n \epsilon_i \alpha_i^2 = \epsilon_{i_0}$. Se $\frac{\varphi'}{\varphi} = c \frac{f'}{f}$, c uma constante, e F Ricci flat, então a métrica $\hat{g}$ é um gradiente Ricci soliton steady e todas as soluções são dadas por:*

$$\begin{cases} f_{\pm}(\xi) = \frac{c_1}{(N_{\pm}\xi + b)^{\frac{1}{N_{\pm}}}}, \quad c_1 > 0, \\ h_{\pm}(\xi) = -\frac{m-(n-2)c+N_{\pm}}{N_{\pm}} \ln(N_{\pm}\xi + b), \end{cases} \quad (4-10)$$

E implicitamente pelas EDO's em $x(\xi)$ e $z(\xi)$,

$$\begin{cases} z' = -c_3 \left(z + c - \sqrt{m + c^2(n-1)} \right)^{\frac{a+1}{2}} \left(z + c + \sqrt{m + c^2(n-1)} \right)^{-\frac{a-1}{2}} \\ x = c_3 \left(z + c - \sqrt{m + c^2(n-1)} \right)^{\frac{a-1}{2}} \left(z + c + \sqrt{m + c^2(n-1)} \right)^{-\frac{a+1}{2}}, \end{cases} \quad (4-11)$$

dadas pela integração,

$$h'(\xi) = [z(\xi) + m - c(n-2)]x(\xi), \quad e \quad \left(\frac{f'}{f} \right)(\xi) = x(\xi),$$

sendo $c_3 > 0$ e

$$a = \frac{c}{\sqrt{m + c^2(n-1)}}, \quad N_{\pm} = -c \pm \sqrt{m + c^2(n-1)}.$$

Prova. Adicionando ao sistema (2-15) as expressões da curvatura escalar da base, dada

por (3-9) e (3-13), teremos

$$\left\{ \begin{array}{l} (n-2)f\varphi'' + f\varphi h'' - m\varphi f'' - 2m\varphi' f' + 2f\varphi' h' = 0 \\ \varepsilon_{i_0} [f\varphi\varphi'' - (n-1)f(\varphi')^2 + m\varphi\varphi' f' - f\varphi\varphi' h'] = \rho f \\ \varepsilon_{i_0} [-f\varphi^2 f'' + (n-2)f\varphi f' \varphi' - (m-1)\varphi^2 (f')^2 + f\varphi^2 f' h'] = \rho f^2 - \lambda_F \\ \bar{k} = \varepsilon_{i_0}(n-1) [2\varphi\varphi'' - n(\varphi')^2] \\ \bar{k} = m\frac{\varphi^2}{f}\varepsilon_{i_0} [f'' - (n-2)\frac{\varphi' f'}{\varphi}] - \varphi^2 \varepsilon_{i_0} [h'' - (n-2)\frac{\varphi' h'}{\varphi}] + n\rho. \end{array} \right.$$

Igualando as duas equações da curvatura escalar da base, acharemos uma expressão para ρ , então substituímos na segunda e terceira equação acima, fazamos F Ricci flat então temos o sistema (3-47) que caracteriza todos os gradientes Ricci solitons

$$\left\{ \begin{array}{l} (n-2)\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)' + (n-2)\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 + h'' - m\left(\frac{f'}{f}\right)' - m\left(\frac{f'}{f}\right)^2 + \\ -2m\frac{\varphi'}{\varphi}\frac{f'}{f} + 2\frac{\varphi'}{\varphi}h' = 0 \\ (m-n)\left(\frac{f'}{f}\right)' - m(n-1)\left(\frac{f'}{f}\right)^2 - (m-n)(n-2)\frac{\varphi'}{\varphi}\frac{f'}{f} + n\frac{f'}{f}h' - h'' + \\ + (n-2)\frac{\varphi'}{\varphi}h' - 2(n-1)\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)' + (n-1)(n-2)\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 = 0. \end{array} \right. \quad (4-12)$$

Considerando agora $\frac{\varphi'}{\varphi} = c\frac{f'}{f}$ na primeira equação de (4-12), teremos

$$\begin{aligned} & [m-n-2(n-1)c]\left(\frac{f'}{f}\right)' - [m(n-1) + (m-n)(n-2)c - (n-1)(n-2)c^2]\left(\frac{f'}{f}\right)^2 + \\ & [n + (n-2)c]\frac{f'}{f}h' + [(n-2)c - m]\left(\frac{f'}{f}\right)' + [(n-2)c^2 - m(1+2c)]\left(\frac{f'}{f}\right)^2 + \\ & + 2c\frac{f'}{f}h' + h'' = 0, \end{aligned}$$

e esta é equivalente a,

$$[(n-2)c - m] \left(\frac{f'}{f} \right)' - [m + 2mc - (n-2)c^2] \left(\frac{f'}{f} \right)^2 + 2c \frac{f'}{f} h' + h'' = 0.$$

Desta, temos uma expressão para h'' ,

$$-h'' = [(n-2)c - m] \left(\frac{f'}{f} \right)' + [m + 2mc - (n-2)c^2] \left(\frac{f'}{f} \right)^2 - 2c \frac{f'}{f} h'.$$

Agora, substituindo h'' na segunda equação do sistema (4-12) e fazendo $\frac{\phi'}{\phi} = c \frac{f'}{f}$, teremos

$$\begin{aligned} & [m - n - 2(n-1)c + (n-2)c - m] \left(\frac{f'}{f} \right)' + [n + (n-2)c + 2c] \frac{f'}{f} h' + \\ & + [m(n-1) + (m-n)(n-2)c - (n-1)(n-2)c^2 - (n-2)c^2 + m + 2mc] \left(\frac{f'}{f} \right)^2 = 0, \end{aligned}$$

e esta equivale a,

$$-n(c+1) \left(\frac{f'}{f} \right)' - n[m + (m-n+2)c - (n-2)c^2] \left(\frac{f'}{f} \right)^2 + n(c+1) \frac{f'}{f} h' = 0,$$

para $c \neq -1$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{f'}{f} \right)' &= \frac{m + (m-n+2)c - (n-2)c^2}{c+1} \left(\frac{f'}{f} \right)^2 + \frac{f'}{f} h' \\ &= \frac{(c+1)[(n-2)c - m]}{c+1} \left(\frac{f'}{f} \right)^2 + \frac{f'}{f} h' \\ &= [(n-2)c - m] \left(\frac{f'}{f} \right)^2 + \frac{f'}{f} h'. \end{aligned}$$

Portanto o sistema (4-12), torna-se

$$\begin{cases} [(n-2)c - m] \left(\frac{f'}{f} \right)' - [m + 2mc - (n-2)c^2] \left(\frac{f'}{f} \right)^2 + 2c \frac{f'}{f} h' + h'' = 0. \\ \left(\frac{f'}{f} \right)' = [(n-2)c - m] \left(\frac{f'}{f} \right)^2 + \frac{f'}{f} h'. \end{cases} \quad (4-13)$$

O sistema (4-13) é o sistema (46) do artigo [14]. Neste artigo, os autores encontraram todas as soluções deste sistema, fazendo a mudança de variável $x(\xi) = \left(\frac{f'}{f}\right)(\xi)$ e $y(\xi) = h' + [(n-2)c - m] \left(\frac{f'}{f}\right)(\xi)$ e pelas EDO's $y(\xi) = x(\xi)z(\xi)$. Fazendo a mudança de variável $l(\xi) = h'(\xi)$ e $g(\xi) = \left(\frac{\phi'}{\phi}\right)(\xi)$ e pelas EDO's $g(\xi) = v(\xi)l(\xi)$ e obtiveram como solução apresentadas em (4-10) e (4-11) e assim classificaram todos os gradiente Ricci soliton steady. $\square$

Referências Bibliográficas

- [1] A. Barros, R. Batista, E. Ribeiro Jr. - *Rigidity of gradient Ricci almost solitons*, Illinois J. Math. v. 56 (2012), 1267-1279.
- [2] A. Barros, J. N. Gomes, E. Ribeiro Jr. - *A note on rigidity of the almost Ricci soliton*, Arch. Math. (Basel) 100 (2013), 481-490.
- [3] W. Batat, M. Brozos-Vázquez, E. García-Río, S. Gavino-Fernández - *Ricci solitons on Lorentzian manifolds with large isometry groups*, Bull. London Math. Soc., 43 (2011), nº 6, 1219-1227.
- [4] M. Brozos-Vázquez, G. Calvaruso, E. García-Río, S. Gavino-Fernández - *Three dimension Lorentzian homogeneous Ricci solitons*, Israel. J. Math., 188 (2012), 385-403.
- [5] M. Brozos-Vázquez, E. García-Río, S. Gavino-Fernández - *Locally conformally flat Lorentzian gradient Ricci solitons*, J. Geom. Anal., 23 (2013), no. 3, 1196-1212.
- [6] M. Brozos-Vázquez, E. García-Río, X. Valle-Regueiro - *Half Conformally flat gradient Ricci almost solitons*, Proc. R. Soc. A 472.2189 (2016): 20160043.
- [7] F.E.S. Feitosa, A.A. Freitas Filho, J.N.V. Gomes, R.S. Pina - *Gradient Ricci almost soliton Warped Product*, arXiv:1507.03038v2,(2015).
- [8] B. O'Neill - *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, (Academic Press, New York), 1983.
- [9] A.L. Besse - *Einstein Manifolds*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [10] W. Kuhnel - *Differential Geometry: Curves-Surfaces-Manifolds*, Student Mathematical Library 16, American Math. Soc., Providence, RI, 2002.
- [11] K. Onda - *Lorentzian Ricci solitons on 3-dimensional Lie groups*, Geom. Dedicata, **147** (2010), 313-322.
- [12] S. Pigola, M. Rigoli, M. Rimoldi, A. Setti - *Ricci Almost Solitons*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., (5) Vol. X (2011), 757-799.

- [13] E.D. Batista - *Gradiente Ricci Soliton e variedades de Einstein com métrica produto torcido*, Dissertação, UFG, Goiânia, 2016.
- [14] R. Pina, M. Sousa - *Gradient Ricci solitons with structure of warped product*, Results in Mathematics, v. 71, p.825-840, 2017.
- [15] R. Pina, M. Sousa - *A family of warped product semi-Riemannian Einstein metrics*, Differential Geometry and Its Applications, v. 50, p.105-115, 2017.
- [16] B. Leandro, M. Sousa, R. Pina - *On the structure of Einstein warped product semi-Riemannian manifolds*, Journal of Integrable Systems, v.3, p.1-11, 2018.
- [17] E. Barbosa, R. Pina, K. Tenenblat - *On gradient Ricci solitons conformal to a pseudo-Euclidean space*, Israel Journal of Mathematics, v. 200, p. 213-224, 2014.
- [18] B. Leandro, R. Pina - *Invariant solutions for the static vacuum equation*, Journal of Mathematics Physics, v.58, p. 072502, 2017.
- [19] V. Borges, K. Tenenblat - *Ricci Almost Solitons on semi-Riemannian Warped Products*, JarXiv:1709.04604 (2017).
- [20] H. D. Cao, Q. Chen - *On locally conformally flat steady gradient solitons*, Transactions of the American Mathematical Society, v. 364, p. 2377-2391, 2012.
- [21] M. Fernández-López, E. García-Río - *Rigidity of shrinking Ricci solitons*, Mathematische Zeitschrift, v. 269, p. 461-466, 2011.
- [22] D. Zill, M. Cullen - *Equações Diferenciais*, Mathematische Zeitschrift, v.1, 3^a ed, Editora Pearson, 2010..
- [23] H. D. Cao, D. Zhou - *Lectures on Ricci Solitons*, XVIII Escola de Geometria Diferencial. UNB, 2014.
- [24] R. S. Hamilton - *The Ricci flow on surfaces*, Contemporary mathematics, v. 71, p. 237-61, 1988.
- [25] W. Kuhnel - *Conformal transformation between Einstein spaces*, Aspects of Math., v. E12, 1988, Braunschweig, 105-146.
- [26] M. P. Carmo - *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, SBM, 2010 .