



Universidade Federal de Goiás  
**Instituto de Física**

GRUPO DE ÓPTICA QUÂNTICA

EYBER DOMINGOS ALVES

**Dinâmica Populacional em Sistemas  
Atômicos de Dois e Três Níveis de Energia**

Goiânia  
2017

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS  
DE TESES E  
DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

**1. Identificação do material bibliográfico:**       **Dissertação**       **Tese**

**2. Identificação da Tese ou Dissertação:**

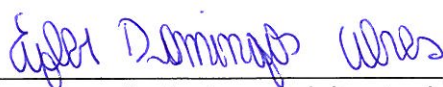
Nome completo do autor: Eyber Domingos Alves

Título do trabalho: Dinâmica Populacional em Sistemas Atômicos de Dois e Três Níveis de Energia

**3. Informações de acesso ao documento:**

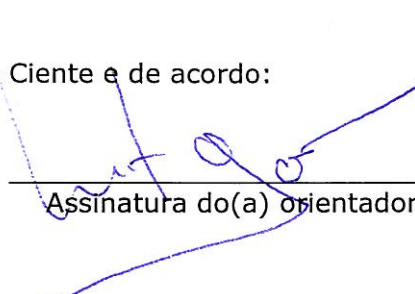
Concorda com a liberação total do documento  SIM       NÃO<sup>1</sup>

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.



Assinatura do(a) autor(a)<sup>2</sup>

Ciente e de acordo:

  
Assinatura do(a) orientador(a)<sup>2</sup>

Data: 01 / 08 / 2017

<sup>1</sup> Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente
- Submissão de artigo em revista científica
- Publicação como capítulo de livro
- Publicação da dissertação/tese em livro

<sup>2</sup>A assinatura deve ser escaneada.

EYBER DOMINGOS ALVES

**Dinâmica Populacional em Sistemas  
Atômicos de Dois e Três Níveis de Energia**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Física da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

**Área de pesquisa:** Óptica Quântica

**Orientador:** Prof. Dr. Norton Gomes de Almeida.

Goiânia  
2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Alves, Eyber Domingos

Dinâmica Populacional em Sistemas Atômicos de Dois e Três Níveis de Energia [manuscrito] / Eyber Domingos Alves. - 2017.  
70 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Norton Gomes de Almeida.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Física (IF), Programa de Pós-Graduação em Física, Goiânia, 2017.

Bibliografia.

Inclui siglas, abreviaturas, gráfico, lista de figuras.

1. Estados escuros. 2. EIT. 3. Equação mestra. 4. Estados de Dicke.  
I. Gomes de Almeida, Norton , orient. II. Título.

CDU 535



**Universidade Federal de Goiás**  
**Instituto de Física**  
**Programa de Pós-Graduação em Física**

Ata Nº 170 de defesa de dissertação de Eyber Domingos Alves para obtenção do título de Mestre em Física.

Aos 10 dias do mês de agosto de 2017, às 09h30min, no Miniauditório do Instituto de Física, reuniu-se a Banca Examinadora designada pela Coordenadoria do Programa de Pós-Graduação do Instituto de Física da Universidade Federal de Goiás, composta pelo Prof. Dr. Norton Gomes de Almeida (orientador – IF/UFG), Prof. Dr. Guilherme Colherinhas de Oliveira (CEPAE/UFG) e Prof. Dr. Agnaldo Rosa de Almeida (UNUCET/UEG), para julgar a dissertação de mestrado de Eyber Domingos Alves, intitulada: "Dinâmica populacional em sistemas atômicos de dois e três níveis de energia". O Presidente abriu os trabalhos agradecendo a presença dos membros da Banca Examinadora e concedeu a palavra a Eyber Domingos Alves, que expôs detalhadamente seu trabalho. Em seguida, os membros da Banca fizeram suas considerações e procederam à arguição do candidato. Concluída essa etapa, a Banca, em sessão fechada, deu prosseguimento ao julgamento do trabalho, atribuindo os seguintes conceitos:

Prof. Dr. Norton Gomes de Almeida (orientador)

APROVADO

Prof. Dr. Guilherme Colherinhas de Oliveira  
(CEPAE/UFG)


APROVADO

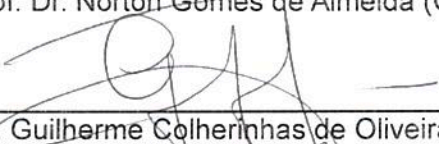
Prof. Dr. Agnaldo Rosa de Almeida  
(UNUCET/UEG)


APROVADO

Novamente em sessão aberta, o presidente da Banca anunciou o resultado final do julgamento, declarando o candidato Eyber Domingos Alves Aprovado pela Banca Examinadora. Nada mais havendo a tratar, a sessão foi encerrada e lavrou-se a presente ata que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora.

Goiânia, 10 de agosto de 2017.

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Norton Gomes de Almeida (Orientador)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Guilherme Colherinhas de Oliveira (CEPAE/UFG)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Agnaldo Rosa de Almeida (UNUCET/UEG)

---

# RESUMO

---

Neste trabalho será feita uma descrição da interação entre a radiação eletromagnética com a matéria. Serão abordados sistemas atômicos de dois e três níveis, esse por sua vez estando na configuração  $\Lambda$  (Lambda). Usaremos os estados de Dicke para calcular as probabilidades de transição entre os níveis energéticos para um *ensemble* de átomos de 2 níveis interagindo com um campo circularmente polarizado. Deduziremos a equação mestra para um átomo de dois níveis interagindo com um reservatório térmico, observando os efeitos de decaimento espontâneo irreversível e perda de coerência entre os estados quânticos. Por fim, estudaremos o fenômeno da Transparência Eletromagneticamente Induzida (EIT) e dos Estados Escuros.

**Palavras - chave:** Estados escuros, EIT, Equação mestra, Estados de Dicke.

---

# ABSTRACT

---

In this work a description of the interaction between electromagnetic radiation and matter will be made. Two and three-level atomic systems will be addressed, which in turn is in the  $\Lambda$  (Lambda) configuration. We will use the Dicke states to calculate the transition probability between the energetic levels for a 2-level *ensemble* of atoms interacting with a circularly polarized field. We will deduce the master equation for a two-level atom interacting with a thermal reservoir, observing the effects of irreversible spontaneous decay and loss of coherence between quantum states. Finally, we will study the phenomenon of Electromagnetically Induced Transparency (EIT) and Dark states.

**Key - words:** Dark states, EIT, Master equation, Dicke states.

---

# SUMÁRIO

---

<b>Capítulo 1: Introdução</b>	<b>9</b>
<b>Capítulo 2: Conceitos fundamentais de Óptica Quântica</b>	<b>11</b>
2.1 Quantização do campo eletromagnético	11
2.2 Estados de Fock	16
2.3 Estados de Dicke	17
2.4 Operador Densidade	20
<b>Capítulo 3: Interação do Campo eletromagnético com a matéria</b>	<b>24</b>
3.1 Hamiltoniano de Interação Átomo-Campo	24
3.2 Átomos com mais do que dois níveis de energia	26
3.3 Dinâmica Atômica	30
3.3.1 Interação de um átomo de dois níveis com um campo clássico	31
3.3.2 Dinâmica da amostra atômica	36
3.3.3 Modelo de Jaynes–Cummings (JCM)	40
3.3.4 Aplicação do modelo Jaynes Cummings	43
<b>Capítulo 4: Sistemas abertos e derivação da equação mestra</b>	<b>48</b>
4.1 Equação mestra geral	49
4.2 Equação mestra para o átomo de dois níveis em contato com um reservatório térmico	50
<b>Capítulo 5: Fenômenos relacionados à Óptica Quântica</b>	<b>57</b>
5.1 Estados Escuros	57
5.1.1 Análise das intensidades do campo	59
5.2 Transparência Eletromagneticamente Induzida	61
5.2.1 Dinâmica do sistema	63
<b>Capítulo 6: Conclusão e Perspectivas</b>	<b>66</b>

---

# LISTA DE FIGURAS

---

2.1 Disposição espacial dos versores de polarização $\hat{e}_{k1}$ , $\hat{e}_{k2}$ e do versor da direção de propagação da onda eletromagnética $\hat{k}$ . . . . .	14
2.2 Diagrama dos níveis atômicos, considerando a energia zero entre os estados $ 1\rangle$ e $ 0\rangle$ . . . . .	18
3.1 Configuração $\Lambda$ . . . . .	28
3.2 Configuração em V . . . . .	28
3.3 configuração $\Xi$ . . . . .	28
3.4 $P_e(t)$ em função de $\frac{\Delta}{2\Omega}$ . . . . .	35
3.5 $P_g(t)$ em função de $\frac{\Delta}{2\Omega}$ . . . . .	35
3.6 $W(t)$ em função de $\frac{\Delta}{2\Omega}$ . . . . .	36
3.7 $P_e(t)$ por $\Omega t$ . . . . .	36
3.8 $W(t)$ por $\Omega t$ . . . . .	36
3.9 Probabilidade em função $\Omega t$ para $k = 0$ . . . . .	40
3.10 Probabilidade em função $\Omega t$ para $k = 1$ . . . . .	40
3.11 Probabilidade em função $\Omega t$ para $k = 2$ . . . . .	40
3.12 Probabilidade em função $\Omega t$ para $k = 3$ . . . . .	40
3.13 Inversão atômica em função $\Omega t$ para $A = 1$ . . . . .	41
3.14 Inversão atômica em função $\Omega t$ para $A = 2$ . . . . .	41
3.15 Inversão atômica em função $\Omega t$ para $A = 3$ . . . . .	41
3.16 $P_{g,n}(t)$ em função $\frac{\Delta}{2g\sqrt{n}}$ . . . . .	44
3.17 $P_{e,n-1}(t)$ em função $\frac{\Delta}{2g\sqrt{n}}$ . . . . .	45
3.18 Inversão atômica entre os estados $ 0, n\rangle \Leftrightarrow  1, n - 1\rangle$ em função de $\frac{\Delta}{2g\sqrt{n}}$ . . . . .	45
3.19 $P_{g,n+1}(t)$ em função de $\frac{\Delta}{2g\sqrt{n+1}}$ . . . . .	47
3.20 $P_{e,n}(t)$ em função de $\frac{\Delta}{2g\sqrt{n+1}}$ . . . . .	47
4.1 Probabilidades de ocupação dos estados $ 1\rangle$ e $ 0\rangle$ em função de $\Gamma t$ . . . . .	56
5.1 Diagrama dos níveis de energias envolvidos na configuração $\Lambda$ . . . . .	58
5.2 Parte imaginária de $\chi_e^{(1)}$ , que está relacionada à absorção do meio, <i>versus</i> a dessintonia $\Delta$ . . . . .	65

---

# INTRODUÇÃO

---

A óptica quântica é uma das áreas da física oriunda da mecânica quântica, e traz consigo um campo bastante fértil para as aplicações tecnológicas, além de proporcionar um ambiente experimental para a discussão dos fundamentos da mecânica quântica. Exemplo desta discussão pode ser encontrado em [1] que diz respeito à violação da desigualdade de Bell.

O principal foco da óptica quântica é o estudo da interação da radiação com a matéria. Neste contexto, entre diversos fenômenos, estudam-se as alterações sofridas pelas propriedades ópticas do material, revelando características que apresentam um comportamento contra intuitivo. Este é o caso do fenômeno conhecido como Transparência Eletromagneticamente Induzida (EIT <sup>1</sup>) cuja amostra atômica fica "transparente" à radiação incidente devido à interferência quântica sofrida pelos campos que incidem sobre a amostra, causando o cancelamento da absorção e modificando o valor do índice de refração da matéria (Seção 5.2).

No que diz respeito ao modelo que rege a interação entre luz e matéria, dependendo do fenômeno a ser estudado, pode-se evocar um modelo semiclássico, onde a luz é uma entidade clássica enquanto o átomo é descrito por um comportamento quântico (Seção 3.3.1). Há situações onde o modelo semiclássico falha na descrição do fenômeno, e um modelo completamente quântico é exigido (Seção 3.3.3).

Novos campos de pesquisa, tendo como fundamentação a óptica quântica, vão surgindo como a computação quântica [2], a criptografia quântica [3], o teletransporte quântico [4], entre outros. As aplicações são inúmeras e as pesquisas ao redor do mundo se intensificam de modo vertiginoso. Neste sentido, a presente dissertação foi estruturada no intuito de apresentar ao leitor os conceitos preliminares envolvidos no âmbito da óptica

---

<sup>1</sup>Acrônimo da expressão inglesa *Electromagnetically Induced Transparency*

---

quântica, abordando alguns efeitos ópticos como EIT e Estados Escuros <sup>2</sup>, efeitos estes que são oriundos da interação da radiação com a matéria. Temos também o objetivo de apresentar o modelo de Jaynes Cummings, o qual rege a dinâmica de interação de um átomo de dois níveis com o campo quantizado. Neste sentido, a dissertação foi dividida em 6 capítulos.

No capítulo 2 será feita uma revisão sobre as ferramentas matemáticas necessárias para o tratamento da interação da radiação com a matéria, abordando a quantização do campo eletromagnético, que é um dos pontos centrais no desenvolvimento da óptica quântica enquanto área de pesquisa. Serão apresentados os estados de número (por vezes chamados de estados de Fock) que são estados quânticos da radiação eletromagnética. Ainda neste capítulo abordaremos os estados de Dicke com o intuito de descrever a interação de um *ensemble* de átomos de dois níveis com um campo elétrico clássico circularmente polarizado. Por fim, apresentaremos o formalismo do operador densidade.

Ao longo do capítulo 3 trataremos da interação da radiação com o átomo de dois níveis, abordando os conceitos introdutórios como aproximação de dipolo, hamiltoniano de interação, oscilação de Rabi, modelo de Jaynes Cummings e sistemas com mais do que dois níveis de energia. Estes sistemas, por sua vez, são de fundamental importância no desenvolvimento da interação de sistemas de três níveis na configuração  $\Lambda$  (Figura 3.1) com campos de origem clássica. Tal interação é base para o surgimento dos fenômenos da EIT, dos Estados Escuros e de efeitos de resposta negativa [5],[6].

Apresentaremos no capítulo 4 as etapas para a derivação da equação mestra de um átomo de dois níveis interagindo com um reservatório térmico nos limites das aproximações de Markov e Born. A equação mestra permite uma descrição probabilística da dinâmica de interação de sistemas abertos, e desempenha um papel fundamental na presente dissertação, em virtude de fornecer as bases matemáticas para a descrição de fenômenos como: perda de coerência dos estados quânticos e decaimento espontâneo irreversível. No decorrer do capítulo 5 apresentaremos as formulações matemáticas relevantes na descrição dos fenômenos da EIT e *Dark States*, e, por fim, serão apresentados no capítulo 6 as conclusões obtidas e as perspectivas vindouras.

---

<sup>2</sup> Em inglês *Dark States*

---

# CONCEITOS FUNDAMENTAIS DE ÓPTICA QUÂNTICA

---

Neste capítulo faremos uma revisão sobre as ferramentas matemáticas necessárias para efetuar o tratamento da interação da radiação com a matéria. Abordaremos a quantização do campo eletromagnético, os estados de Fock e os estados de Dicke. Os estados de Dicke, por sua vez, serão usados com o intuito de descrever a interação de um *ensemble* de átomos de dois níveis com um campo elétrico clássico circularmente polarizado (Seção 3.3.2). Como parte final do capítulo 2 apresentaremos o formalismo geral do operador densidade.

## 2.1 Quantização do campo eletromagnético

As equações de Maxwell no SI <sup>1</sup> são constituídas por quatro equações parciais acopladas de primeira ordem, relacionando as densidades de carga  $\sigma(\mathbf{r}, t)$  e a densidade de corrente  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  com os diversos componentes do campo elétrico  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  e magnético  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  [7]. No SI as equações de Maxwell são:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mathbf{J}, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \sigma(\mathbf{r}, t), \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (2.4)$$

---

<sup>1</sup>Sigla para Sistema Internacional de Unidade

Na ausência de fonte temos que  $\mathbf{J} = 0$  e  $\sigma = 0$ , de maneira que  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$  e  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ , onde  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$  são as permissividade elétrica e permeabilidade magnética do vácuo, respectivamente. Estas equações formam a base matemática apropriada para a descrição fenomenológica do eletromagnetismo clássico, sendo capaz de fornecer uma descrição completa da dinâmica de interação entre uma partícula carregada e o campo eletromagnético clássico.

Em virtude de  $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$  podemos, convenientemente, definir  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  em termos de um potencial vetor  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  da seguinte forma:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t). \quad (2.5)$$

Dessa maneira, a Eq.(2.1) pode ser reescrita como:

$$\nabla \times \left( \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) = 0, \quad (2.6)$$

por conseguinte, podemos representar o campo elétrico em função de potenciais de origem escalar e vetorial. Sendo assim, temos que:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (2.7)$$

Vamos utilizar o Calibre de Coulomb ( $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  e  $\phi(\mathbf{r}, t) = 0$ ), com isso o potencial vetor  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  satisfaz a equação de onda homogênea apresentada a seguir:

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}, \quad (2.8)$$

sendo que  $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-\frac{1}{2}}$  é a velocidade da luz no vácuo. Portanto, as equações de Maxwell estão condensadas em uma única expressão para o potencial vetor  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ .

A energia total armazenada no campo eletromagnético é dada por [8]:

$$H = \frac{1}{2} \int_V d^3\mathbf{r} \left( \epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2 \right), \quad (2.9)$$

sendo que a integração deve ser realizada sobre todo o volume  $V$  no qual a radiação está se propagando. O volume de integração pode ser considerado sobre todo o espaço, como no caso da radiação de campo aberta, ou com um volume finito correspondendo ao caso onde a radiação está confinada em uma cavidade com uma geometria específica [9].

Vamos tratar o caso da radiação de campo aberta. Nesta situação, convém modelar a região volumétrica como um cubo de dimensão  $L$ , e assumir condições periódicas

nas extremidades. Se escrevermos  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  como produto de uma parte espacial e temporal<sup>2</sup>, encontramos que a solução da parte espacial corresponde a  $\exp(\pm i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ , enquanto que a solução da parte temporal será  $\exp(\pm ickt)$  com a definição de que  $k \equiv |\mathbf{k}|$ . Como consequência direta das condições de contorno impostas pela caixa cúbica temos que  $A_i(x, y, z, t) = A_i(x + L, y + L, z + L, t)$  onde  $(i = x, y, z)$  são as componentes do vetor  $\mathbf{A}$ . Com essa atribuição, o vetor de onda  $\mathbf{k}$ , assumirá apenas valores discretos, dados por:

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L} (n_x \hat{\mathbf{x}} + n_y \hat{\mathbf{y}} + n_z \hat{\mathbf{z}}), \quad (2.10)$$

sendo que  $n_x, n_y$  e  $n_z \in \mathbb{Z}$ .

No que diz respeito à natureza vetorial de  $\mathbf{A}$ , devemos considerar a solução da parte espacial como  $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}s} \exp(\pm i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$  onde  $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}s}$  é o vetor unitário que, convencionalmente, aponta na direção de polarização do campo. A escolha do calibre de Coulomb ( $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ) implica que para cada vetor de onda  $\mathbf{k}$  devemos ter outros dois vetores unitários perpendiculares entre si e ao próprio  $\mathbf{k}$ . Esses versores são representados por  $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}s}$  onde  $s$  pode assumir os valores de 1 e 2 assim como apresentado na Figura (2.1). Como consequência da perpendicularidade entre os versores  $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}1}$  e  $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}2}$  e do próprio vetor de onda  $\mathbf{k}$ , inferimos que [8]:

$$\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}s} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}s'} = \delta_{ss'}, \quad \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}s} = 0. \quad (2.11)$$

A solução da parte espacial representada por  $\mathbf{u}_{\mathbf{k}s}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}s} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$  satisfaz a condição de ortogonalidade [8]:

$$\int_V d^3r \mathbf{u}_{\mathbf{k}s}^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{k}'s'}(\mathbf{r}) = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{ss'} V, \quad (2.12)$$

onde  $V = L^3$ . No caso mais geral, o potencial vetor  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  pode ser representado como uma superposição de ondas planas. Desta forma, temos:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}s} [A_{\mathbf{k}s}(t) \mathbf{u}_{\mathbf{k}s}(\mathbf{r}) + A_{\mathbf{k}s}^*(t) \mathbf{u}_{\mathbf{k}s}^*(\mathbf{r})]. \quad (2.13)$$

A partir do calibre de Coulomb os coeficientes  $A_{\mathbf{k}s}(t)$ , apresentados na Eq.(2.13), satisfazem a seguinte equação diferencial:

$$\left( c^2 k^2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) A_{\mathbf{k}s}(t) = 0, \quad (2.14)$$

---

<sup>2</sup>Método de separação de variáveis

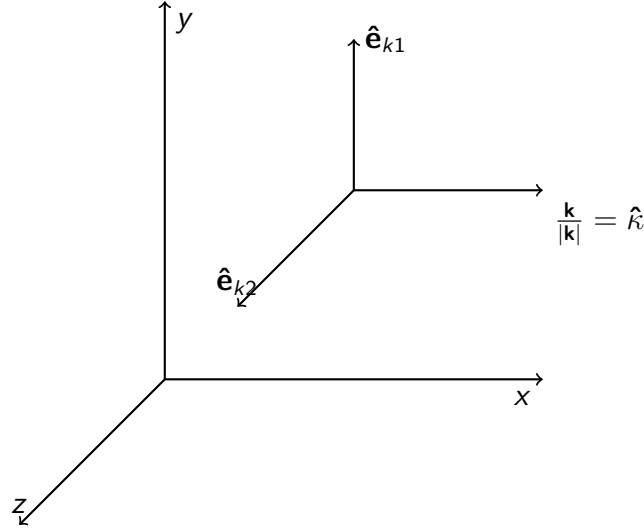


Figura 2.1: Disposição espacial dos vetores de polarização  $\hat{\mathbf{e}}_{k1}$ ,  $\hat{\mathbf{e}}_{k2}$  e do vetor da direção de propagação da onda eletromagnética  $\hat{\mathbf{k}}$ .

cuja solução será:

$$A_{\mathbf{k}s}(t) = A_{\mathbf{k}s}(0)e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}, \quad (2.15)$$

onde a frequência  $\omega_{\mathbf{k}}$  e o vetor de onda  $\mathbf{k}$  estão relacionados via  $\omega_{\mathbf{k}} = ck$ . Podemos definir um vetor unitário  $\hat{\mathbf{k}}$  perpendicular ao plano formado pelos vetores de polarização como:

$$\hat{\mathbf{e}}_{k1} \times \hat{\mathbf{e}}_{k2} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \equiv \hat{\mathbf{k}}, \quad (2.16)$$

e, desta forma, os vetores campo elétrico e magnético serão expressos por:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k}s} w_{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}s} \left[ A_{\mathbf{k}s} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - w_{\mathbf{k}} t)} - A_{\mathbf{k}s}^* e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - w_{\mathbf{k}} t)} \right], \quad (2.17)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{c} \sum_{\mathbf{k}s} w_{\mathbf{k}} (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}s}) \left[ A_{\mathbf{k}s} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - w_{\mathbf{k}} t)} - A_{\mathbf{k}s}^* e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - w_{\mathbf{k}} t)} \right]. \quad (2.18)$$

Substituindo as Eq.(2.17) e Eq.(2.18) na Eq.(2.9) e usando a ortogonalidade da função espacial apresentada na Eq.(2.12), é possível mostrar que a energia do campo livre será expressa por:

$$H = 2\epsilon_0 V \sum_{\mathbf{k}s} w_{\mathbf{k}}^2 A_{\mathbf{k}s} A_{\mathbf{k}s}^* = 2\epsilon_0 V \sum_{\mathbf{k}s} w_{\mathbf{k}}^2 |A_{\mathbf{k}s}|^2. \quad (2.19)$$

A fim de evidenciar o comportamento quântico do campo eletromagnético, os

coeficientes  $A_{\mathbf{k}s}$  e  $A_{\mathbf{k}s}^*$  serão definidos em termos das variáveis canônicas  $p_{\mathbf{k}s}$  e  $q_{\mathbf{k}s}$  como:

$$A_{\mathbf{k}s} \equiv \frac{1}{2w_{\mathbf{k}}(\epsilon_0 V)^{\frac{1}{2}}} [w_{\mathbf{k}}q_{\mathbf{k}s} + ip_{\mathbf{k}s}], \quad (2.20)$$

$$A_{\mathbf{k}s}^* \equiv \frac{1}{2w_{\mathbf{k}}(\epsilon_0 V)^{\frac{1}{2}}} [w_{\mathbf{k}}q_{\mathbf{k}s} - ip_{\mathbf{k}s}]. \quad (2.21)$$

Portanto, a energia associada ao campo eletromagnético será dada por:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}s} (p_{\mathbf{k}s}^2 + w_{\mathbf{k}}^2 q_{\mathbf{k}s}^2), \quad (2.22)$$

que, analogamente, equivalente à energia de um conjunto infinito de osciladores harmônicos com massa unitária.

Na quantização do campo eletromagnético, a variável canônica  $p_{\mathbf{k}s}$  transforma-se no operador  $P_{\mathbf{k}s}$ , e a variável  $q_{\mathbf{k}s}$  transforma-se no operador  $Q_{\mathbf{k}s}$  obedecendo as relações de comutação [9]:

$$[Q_{\mathbf{k}s}, Q_{\mathbf{k}'s'}] = [P_{\mathbf{k}s}, P_{\mathbf{k}'s'}] = 0, \quad [Q_{\mathbf{k}s}, P_{\mathbf{k}'s'}] = i\hbar\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{ss'}. \quad (2.23)$$

Podemos definir os operadores de criação e aniquilação como:

$$a_{\mathbf{k}s} \equiv \frac{1}{(2\hbar w_{\mathbf{k}})^{\frac{1}{2}}} [w_{\mathbf{k}}Q_{\mathbf{k}s} + iP_{\mathbf{k}s}], \quad a_{\mathbf{k}s}^\dagger \equiv \frac{1}{(2\hbar w_{\mathbf{k}})^{\frac{1}{2}}} [w_{\mathbf{k}}Q_{\mathbf{k}s} - iP_{\mathbf{k}s}], \quad (2.24)$$

onde os operadores  $a_{\mathbf{k}s}$  e  $a_{\mathbf{k}s}^\dagger$  satisfazem as relações de comutação:

$$[a_{\mathbf{k}s}, a_{\mathbf{k}'s'}] = [a_{\mathbf{k}s}^\dagger, a_{\mathbf{k}'s'}^\dagger] = 0, \quad [a_{\mathbf{k}s}, a_{\mathbf{k}'s'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{ss'}. \quad (2.25)$$

Convém definir o operador número como sendo  $N_{\mathbf{k}s} \equiv a_{\mathbf{k}s}^\dagger a_{\mathbf{k}s}$ , que obedece as seguintes relações de comutação:

$$[a_{\mathbf{k}s}, N_{\mathbf{k}'s'}] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{ss'} a_{\mathbf{k}s}, \quad [a_{\mathbf{k}s}^\dagger, N_{\mathbf{k}'s'}] = -\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{ss'} a_{\mathbf{k}s}^\dagger. \quad (2.26)$$

A definição desses operadores é extremamente útil apesar de não serem hermitianos e, portanto, não representarem observáveis físico. O hamiltoniano referente ao campo livre quantizado será expresso em termos dos operadores de criação e aniquilação como:

$$H = \sum_{\mathbf{k}s} \hbar w_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}s}^\dagger a_{\mathbf{k}s} + \sum_{\mathbf{k}s} \frac{\hbar w_{\mathbf{k}}}{2}. \quad (2.27)$$

Considerando o segundo somatório da Eq.(2.27), temos que  $\sum_{\mathbf{k}s} \frac{\hbar w_{\mathbf{k}}}{2} \rightarrow \infty$ . Este resultado é proveniente do fato de que a menor energia do oscilador harmônico quântico não é zero. Como o hamiltoniano do campo quantizado é formalmente equivalente a um

conjunto infinito de osciladores harmônicos, a soma realizada no segundo somatório leva em consideração as energias de ponto zero referentes a todos os modos do campo eletromagnético. A energia de ponto zero será omitida nos futuros cálculos, uma vez que ela comuta com quaisquer outros operadores.

Finalmente, podemos representar o potencial vetor e os operadores campo elétrico e campo magnético em função de  $a_{\mathbf{k}s}^\dagger$  e  $a_{\mathbf{k}s}$  como:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}s} \sqrt{\frac{\hbar w_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0 V}} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}s} \left[ a_{\mathbf{k}s} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-w_{\mathbf{k}}t)} + a_{\mathbf{k}s}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-w_{\mathbf{k}}t)} \right], \quad (2.28)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = i \sum_{\mathbf{k}s} \sqrt{\frac{\hbar w_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0 V}} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}s} \left[ a_{\mathbf{k}s} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-w_{\mathbf{k}}t)} - a_{\mathbf{k}s}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-w_{\mathbf{k}}t)} \right], \quad (2.29)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{c} \sum_{\mathbf{k}s} (\boldsymbol{\kappa} \times \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}s}) \sqrt{\frac{\hbar w_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_0 V}} \left[ a_{\mathbf{k}s} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-w_{\mathbf{k}}t)} - a_{\mathbf{k}s}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-w_{\mathbf{k}}t)} \right]. \quad (2.30)$$

Em determinadas situações é conveniente separar o operador campo elétrico  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  em duas partes de maneira que:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^+(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}^-(\mathbf{r}, t) \quad (2.31)$$

onde  $\mathbf{E}^-(\mathbf{r}, t)$  contem apenas operadores de aniquilação  $a_{\mathbf{k}s}$  que oscilam com frequência  $e^{-\omega_{\mathbf{k}}t}$ , enquanto  $\mathbf{E}^+(\mathbf{r}, t)$  corresponde apenas a operadores de criação  $a_{\mathbf{k}s}^\dagger$  com frequência  $e^{\omega_{\mathbf{k}}t}$  de maneira que  $\mathbf{E}^+(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{E}^-(\mathbf{r}, t)^\dagger)$ .

Sendo assim, obtemos o hamiltoniano para o campo livre tal como os operadores referentes ao campo elétrico e magnético do campo quantizado. Ao longo da Seção (3.3.3), recorreremos à natureza quântica da luz a fim de apresentar o modelo de Jaynes Cummings, que, por sua vez, trata da interação entre um sistema atômico de dois níveis com o campo quantizado abordando fenômenos não descritos pela interação da matéria com o campo clássico.

## 2.2 Estados de Fock

Os estados de Fock, ou comumente chamados de estados de número, são auto-estados de energia do oscilador harmônico associados a um modo específico do campo eletromagnético [8]. Os estados de número, representados por  $|n_{\mathbf{k}s}\rangle$ , são muito usados em diversas aplicações no contexto da óptica quântica, e são muitas as propostas para a geração destes estados [10] apesar das dificuldades de produzi-los experimentalmente [11]. O estado de número mais geral é obtido tomando o produto tensorial sobre todos os modos

de oscilação do campo eletromagnético, de maneira que:

$$|\{n\}\rangle = \bigotimes_{\mathbf{k},s} |n_{\mathbf{k}s}\rangle. \quad (2.32)$$

O estado  $|n_{\mathbf{k}s}\rangle$  do campo eletromagnético é caracterizado por representar, de forma bem definida, um certo número de fótons  $n_{\mathbf{k}s}$ . Dizemos também que o estado onde todos os modos estão desocupados e não existem fótons associados a esse campo é definido como estado de vácuo  $|0\rangle$  ou  $|vac\rangle$  [9].

Dentre várias propriedades dos estados de Fock, ressaltamos que o campo eletromagnético representado nos estados de número tem uma amplitude bem definida, enquanto que sua fase é indefinida. As flutuações do campo são diferentes de zero mesmo no caso onde  $n = 0$ , este resultado é conhecido como flutuação de vácuo sendo responsáveis por geração de efeitos observáveis como emissão espontânea, deslocamento Lamb [12] e efeito Casimir [13].

Os operadores de criação e aniquilação atuam sobre os estados de número, criando ou destruindo fótons em um dado modo específico de oscilações. De maneira geral temos:

$$a_{\mathbf{k}s} |n_{\mathbf{k}s}\rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k}s}} |n_{\mathbf{k}s} - 1\rangle, \quad (2.33)$$

$$a_{\mathbf{k}s}^\dagger |n_{\mathbf{k}s}\rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k}s} + 1} |n_{\mathbf{k}s} + 1\rangle, \quad (2.34)$$

$$N_{\mathbf{k}s} |n_{\mathbf{k}s}\rangle = a_{\mathbf{k}s}^\dagger a_{\mathbf{k}s} |n_{\mathbf{k}s}\rangle = n_{\mathbf{k}s} |n_{\mathbf{k}s}\rangle. \quad (2.35)$$

A partir da atuação sucessiva do operador de criação sobre o estado de vácuo pode-se construir um estado contendo precisamente  $n$  fótons pertencentes ao modo  $\mathbf{k}s$ . Desta forma:

$$|\{n\}\rangle = \bigotimes_{\mathbf{k},s} \left[ \frac{(\mathbf{a}^\dagger)^{n_{\mathbf{k}s}}}{\sqrt{n_{\mathbf{k}s}!}} \right] |0\rangle. \quad (2.36)$$

## 2.3 Estados de Dicke

Vamos considerar uma coleção de  $A$  átomos de dois níveis com a mesma frequência de transição  $\omega_0$ . Vamos assumir que os átomos sejam indistinguíveis e que a interação átomo-átomo seja negligenciada<sup>3</sup> [14]. O vetor de estado que descreve o  $n$ -ésimo nível de energia do  $j$ -ésimo átomo é descrito por  $|j, n\rangle$ , onde temos que  $n = 0, 1$  correspondendo

<sup>3</sup>Desprezar a interação átomo-átomo corresponde a considerar um sistema de partículas não interagentes

ao nível de menor e maior energia respectivamente. Seja  $k$  o número de átomos excitados na coleção, então  $A - k$  corresponde ao número de átomos no estado sem excitação.

Um exemplo de um vetor de estado que descreve uma coleção atômica contendo precisamente  $k$  átomos excitados é:

$$|1, 1\rangle |2, 1\rangle \dots |k, 1\rangle |k + 1, 0\rangle \dots |A, 0\rangle. \quad (2.37)$$

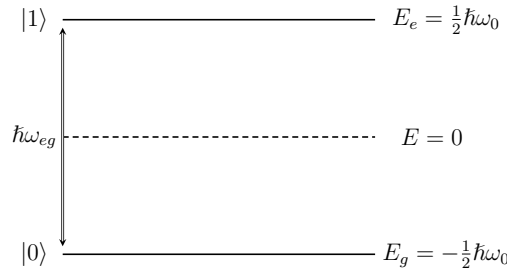


Figura 2.2: Diagrama dos níveis atômicos, considerando a energia zero entre os estados  $|1\rangle$  e  $|0\rangle$ .

Ao considerar a disposição dos níveis energéticos, conforme apresentados na Figura (2.2), as possíveis medidas de energia da coleção de átomos serão:

$$E = \hbar\omega_0 \left( k - \frac{A}{2} \right), \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (2.38)$$

Sendo assim, esses estados atômicos terão degenerescência  $C_k^A = (A!/k!(A-k)!)$ , relativo ao número de permutações permitidas pela Eq.(2.37).

Vamos considerar um fator de simetria sobre a função da coleção de átomos, de maneira que a equação de estado mais geral será:

$$|k, A\rangle = \sqrt{\frac{k!(A-k)!}{A!}} \sum_p |j_1^p, 1\rangle \dots |j_k^p, 0\rangle \dots |j_a^p, 0\rangle, \quad (2.39)$$

onde o índice  $p$  indica que a soma deve ser feita sobre todas as permutações possíveis entre os átomos excitados e não excitados.

Para o sistema composto, constituído de  $A$  átomos, podemos definir os operadores coletivos:

$$S_{x,y,z} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^A \sigma_{x,y,z}^{(j)}, \quad (2.40)$$

onde  $\sigma_{x,y,z}^j$  são os operadores de Pauli referentes a cada átomo da amostra. Os operadores escadas, definidos como  $\sigma_+$  e  $\sigma_-$ , são responsáveis pelas transições entre os níveis energéticos no átomo de dois níveis. Podemos representá-los em termos das matrizes de

Pauli:

$$\sigma_{\pm}^{(j)} = \frac{1}{2}(\sigma_x^{(j)} \pm i\sigma_y^{(j)}). \quad (2.41)$$

Estes operadores satisfazem a relação de comutação:

$$[\sigma_+^{(j)}, \sigma_-^{(j)}] = \sigma_z^{(j)}, \quad [\sigma_z^{(j)}, \sigma_{\pm}^{(j)}] = \pm 2\sigma_{\pm}^{(j)} \quad (2.42)$$

e atuam sobre os estados de cada átomo de dois níveis da seguinte maneira:

$$\sigma_+^{(j)} |j, 0\rangle = |j, 1\rangle, \quad \sigma_+^{(j)} |j, 1\rangle = 0, \quad \sigma_-^{(j)} |j, 1\rangle = |j, 0\rangle, \quad \sigma_-^{(j)} |j, 0\rangle = 0. \quad (2.43)$$

Para a coleção atômica, os operadores escadas serão definidos como[14]:

$$S_{\pm} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^A \sigma_{\pm}^{(j)} = S_x \pm iS_y. \quad (2.44)$$

O operador coletivo  $S_z$  define a inversão no sistema atômico, fornecendo a diferença entre a população atômica que se encontra no estado excitado e a população que se encontra no nível menos energético. Os operadores coletivos atuam sobre os estados simétricos da seguinte maneira:

$$S_+ |k, A\rangle = \sqrt{(k+1)(A-k)} |k+1, A\rangle, \quad (2.45)$$

$$S_- |k, A\rangle = \sqrt{k(A-k+1)} |k-1, A\rangle, \quad (2.46)$$

$$S_z |k, A\rangle = \left(\frac{k-A}{2}\right) |k, A\rangle, \quad (2.47)$$

e obedecem as relações de comutação:

$$[S_x, S_y] = iS_z, \quad [S_y, S_z] = iS_x, \quad [S_z, S_x] = iS_y. \quad (2.48)$$

Em termos dos operadores escadas  $S_{\pm}$  temos:

$$[S_z, S_{\pm}] = \pm S_{\pm}, \quad [S_+, S_-] = 2S_z. \quad (2.49)$$

Os estados  $|k, A\rangle$  são chamados de estados de Dicke e serão usados na descrição de uma coleção atômica interagindo com um campo clássico circularmente polarizado. Em tal situação estaremos interessados na dinâmica de interação, resultando nas probabilidades de transição entre os níveis energéticos juntamente com o cálculo da inversão atômica. Estes resultados serão apresentados ao longo da seção (3.3.2).

## 2.4 Operador Densidade

Em diversas situações no contexto da mecânica quântica, o conhecimento preciso de qual estado quântico o sistema se encontra não é factível em virtude dos muitos graus de liberdade que o sistema pode adquirir. Para lidar com esses casos usamos um formalismo mais geral que a especificação dos estados quânticos do sistema e recorreremos à ideia de operador densidade. Tal formalismo foi introduzido por J. Von Neumann em 1927 e constitui uma ferramenta teórica indispensável no tratamento de sistemas quânticos puros e de misturas estatísticas. Evocaremos o formalismo do operador densidade na dedução da chamada equação mestra, que será de grande valia no estudo sobre a dinâmica de interação entre o átomo e a radiação de campo livre, assunto esse que será retomado ao longo do capítulo 4 da presente dissertação.

Como ponto de partida, o operador densidade para sistemas que possam ser representados unicamente por vetores de estado puro  $|\psi\rangle$  (*ensemble puro*), será definido como:

$$\rho \equiv \frac{|\psi\rangle\langle\psi|}{\langle\psi|\psi\rangle}, \quad (2.50)$$

onde o denominador garante o fator de normalização. Para sistemas puros, o observável  $A$  tem valor esperado dado por:

$$\langle A \rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle = \frac{\sum_n \langle\psi|n\rangle \langle n|A|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{\sum_n \langle n|A|\psi\rangle \langle\psi|n\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = Tr(A\rho) \quad (2.51)$$

e a partir da condição de normalização temos que:

$$Tr(\rho) = \sum_n \langle n|\rho|n\rangle = \frac{\sum_n \langle n|\psi\rangle \langle\psi|n\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{\sum_n \langle\psi|n\rangle \langle n|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{\langle\psi|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = 1. \quad (2.52)$$

Outras propriedades referentes ao operador densidade são: hermiticidade ( $\rho = \rho^\dagger$ ), idempotência ( $\rho^2 = \rho$ ) e que em virtude de  $\rho$  ser um operador de projeção, os seus autovalores serão 0 ou 1.

Para um *ensemble misto* (constituído por estados de mistura), uma descrição estatística deve ser levada em consideração. Nestes casos devemos considerar o peso estatístico  $p_1$  referente à fração de elementos com o estado  $|\psi_1\rangle$ ,  $p_2$  correspondente ao estado  $|\psi_2\rangle$  e assim sobre todo os elementos do conjunto. Uma vez que a probabilidade é normalizada devemos ter  $\sum_i p_i = 1$ .

O valor esperado do observável  $A$  realizado com respeito ao *ensemble misto* será:

$$\langle A \rangle = \sum_i p_i \langle\psi_i|A|\psi_i\rangle = \sum_i \sum_a p_i |a|\psi_i\rangle|^2 a, \quad (2.53)$$

onde  $|a\rangle$  é um autovetor de  $A$  com autovalor  $a$ . Vemos que existem duas probabilidades envolvidas nesta expressão: uma puramente quântica ( $|\langle a|\psi_i\rangle|^2$ ) que é oriunda da natureza probabilística da função de onda, e outra estatística devido à mistura de estados representada pelo índice  $p_i$ .

O operador densidade do *ensemble misto* é definido como [15]:

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|. \quad (2.54)$$

Analogamente ao *ensemble puro*, podemos demonstrar que  $Tr\rho = 1$ , juntamente com  $\rho^\dagger = \rho$ . Contudo  $\rho^2 \neq \rho$  ( $\rho$  não é idempotente na mistura estatística). Outra propriedade importante do operador densidade referente ao *ensemble misto* será:

$$Tr(\rho^2) < 1. \quad (2.55)$$

A Eq.(2.55) fornece uma condição necessária para discriminar estados puros de misturas estatísticas, uma vez que para estados puros resulta em  $Tr(\rho^2) = 1$ , enquanto que para estados mistos temos  $Tr(\rho^2) < 1$ .

Representando o operador densidade em uma base ortonormal completa  $\{|n\rangle\}$  temos:

$$\rho = \sum_{n,m} \rho_{nm} |n\rangle\langle m|, \quad (2.56)$$

onde  $|m\rangle$  e  $|n\rangle$  são elementos desta base, enquanto  $\rho_{nm} = \langle n|\rho|m\rangle$  são os elementos de matriz do operador densidade. O significado dos elementos da matriz densidade tem fundamental importância no contexto da óptica quântica. Cada termo da diagonal principal,  $\rho_{nn}$ , fornece a probabilidade de encontrar o sistema em um estado específico  $|n\rangle$  [16]. Por vezes estes elementos de matriz são chamados população atômica do estado  $|n\rangle$  e a soma sobre todas essas probabilidades é 1 em virtude de  $Tr(\rho) = 1$ . Os elementos fora da diagonal principal estão relacionados com a interferência quântica entre os estados  $|n\rangle$  e  $|m\rangle$ , para o caso específico onde  $\rho_{nm} = 0$  os efeitos da interferência se cancelam.

A partir da equação de Schrödinger para o estado  $|\psi_i\rangle$  podemos derivar a equação de movimento para o operador densidade em um sistema isolado <sup>4</sup>. Diferenciando a

---

<sup>4</sup>A suposição inicial de que o sistema seja isolado implica que as probabilidades  $p_i$  não dependam do tempo.

Eq.(2.54) temos:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \right) = i\hbar \sum_i p_i \left( |\dot{\psi}_i\rangle\langle\psi_i| + |\psi_i\rangle\langle\dot{\psi}_i| \right) \quad (2.57)$$

onde cada um dos estados da mistura obedece a equação de Schrödinger de maneira que:

$$i\hbar |\dot{\psi}_i\rangle = H |\psi_i\rangle, \quad -i\hbar \langle\dot{\psi}_i| = H \langle\psi_i|. \quad (2.58)$$

Desse modo, substituindo a Eq.(2.58) na Eq.(2.57) temos:

$$\begin{aligned} i\hbar \dot{\rho} &= \sum_i p_i (H |\psi_i\rangle\langle\psi_i| - |\psi_i\rangle\langle\psi_i| H) \\ &= H \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| - \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| H = H\rho - \rho H \\ &= [H, \rho]. \end{aligned} \quad (2.59)$$

A Eq.(2.59) recebe o nome de equação de Von Neumann, e é o análogo quântico da equação de Liouville (o colchete de Poisson foi substituído pelo comutador  $[A,B]/i\hbar$ ). A equação de Von Neumann descreve a evolução temporal do operador densidade, sendo válida também para hamiltonianos dependentes do tempo.

Apresentaremos ao longo do capítulo 4 a derivação da chamada equação mestra para o átomo de dois níveis interagindo com um reservatório térmico. Para este fim necessitamos empregar dois espaços vetoriais e calcular médias com respeito a um deles, sendo um espaço referente ao reservatório e outro ao sistema atômico. Neste intuito convém apresentar o formalismo do traço parcial, que fornece os valores médios de observáveis no sistema composto. Por hora vamos nos limitar a um formalismo mais geral onde  $\epsilon_a$  e  $\epsilon_b$  sejam dois espaços vetoriais quaisquer de dimensões  $m$  e  $n$ , respectivamente. Logo  $\epsilon = \epsilon_a \otimes \epsilon_b$  é um espaço vetorial de dimensão  $m \times n$  que corresponde ao espaço vetorial proveniente do acoplamento entre estes dois subsistemas. Para o caso em que  $[|m^{(a)}\rangle \in \epsilon_a]$  e  $[|n^{(b)}\rangle \in \epsilon_b]$  forem bases ortonormais em seus respectivos subespaços, então  $[|m^{(a)}\rangle \otimes |n^{(b)}\rangle]$  é uma base no espaço  $\epsilon$ .

O operador densidade do sistema acoplado será  $\rho$ , o qual, por sua vez, pertence ao espaço vetorial  $\epsilon$ . Tal operador é construído a partir do produto tensorial entre os operadores densidades definidos em cada subespaço de forma que  $\rho = \rho_a \otimes \rho_b$ . Podemos calcular o valor esperado de uma variável dinâmica qualquer definida no subespaço  $\epsilon_a$  em termos da nova base  $[|m^{(a)}\rangle \otimes |n^{(b)}\rangle]$ . Para tal resultado consideraremos o operador

$P = P_a \otimes I_b$ . Desta maneira:

$$\begin{aligned}
Tr(P\rho) &= \sum_{m,n} \langle m^{(a)}n^{(b)} | P\rho | m^{(a)}n^{(b)} \rangle \\
&= \sum_{m,n} \sum_{m',n'} \langle m^{(a)}n^{(b)} | P | m'^{(a)}n'^{(b)} \rangle \langle m'^{(a)}n'^{(b)} | \rho | m^{(a)}n^{(b)} \rangle \\
&= \sum_{m,n} \sum_{m',n'} \langle m^{(a)} | P_a | m'^{(a)} \rangle \delta_{nn'} \langle m'^{(a)}n'^{(b)} | \rho | m^{(a)}n^{(b)} \rangle \\
&= \sum_{m,m'} \langle m^{(a)} | P_a | m'^{(a)} \rangle \sum_n \langle m'^{(a)}n^{(b)} | \rho | m^{(a)}n^{(b)} \rangle \\
&= \sum_{m,m'} \langle m^{(a)} | P_a | m'^{(a)} \rangle \langle m'^{(a)} | \rho_a | m^{(a)} \rangle \\
&= Tr_A(P_a \rho_a),
\end{aligned} \tag{2.60}$$

onde  $\rho_a \equiv \sum_n \langle n^{(b)} | \rho | n^{(b)} \rangle$  é chamado de operador densidade reduzido, que foi obtido tomando o traço parcial sobre o operador densidade  $\rho$  com respeito aos estados pertencentes a  $\epsilon_b$ . A matriz densidade reduzida é um operador hermitiano e de traço 1. Entretanto, de maneira geral, ela não é idempotente, mas apresenta autovalores não negativos. Esta propriedade pode ser demonstrada observando que:

$$\langle \phi_a | \rho_a | \phi_a \rangle = \sum_n \langle \phi_a n^{(b)} | \rho | \phi_a n^{(b)} \rangle = \sum_n \sum_i p_i^{ab} |\langle \psi_i | \phi_a n^{(b)} \rangle|^2 \geq 0 \tag{2.61}$$

para qualquer vetor  $|\phi_a\rangle \in \epsilon_a$  e com  $\rho = \sum_i p_i^{ab} |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$  onde  $|\psi_i\rangle$  pertence a  $\epsilon = \epsilon_a \otimes \epsilon_b$ . A partir do formalismo geral apresentado para o operador densidade, estaremos em condição de derivar a equação mestra para o átomo de dois níveis interagindo com o reservatório térmico.

Abordamos neste capítulo os conceitos relacionados à óptica quântica que serão de grande valia no desenvolvimento da presente dissertação. No capítulo subsequente trataremos propriamente da dinâmica de interação entre os átomos e a radiação do campo eletromagnético.

---

# INTERAÇÃO DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO COM A MATÉRIA

---

Neste capítulo desenvolveremos a dinâmica de interação entre um campo elétrico com diversos sistemas ópticos, tais como: átomo de dois, átomos de três níveis na chamada configuração  $\Lambda$  e trataremos da interação entre uma coleção de átomos de dois níveis com um campo circularmente polarizado. Para este fim, iniciaremos a descrição com a dedução do chamado hamiltoniano de interação na aproximação de dipolo. Em seguida, apresentaremos o modelo semiclássico de interação, onde a radiação é tratada classicamente. Subsequentemente, abordaremos uma descrição completamente quântica onde trataremos a natureza quântica tanto do átomo quanto da radiação resultando no chamado modelo de Jaynes Cummings (JCM <sup>1</sup>) [8].

## 3.1 Hamiltoniano de Interação Átomo-Campo

Na presença de um campo eletromagnético externo o hamiltoniano que descreve a interação entre um elétron de massa  $m$  e a radiação será [8]:

$$H(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2m} [\mathbf{P} + e\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)]^2 - e\phi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}), \quad (3.1)$$

onde  $V(\mathbf{r})$  é potencial central eletrostático. Os campos elétrico e magnético são determinados em função dos potenciais de origem escalar  $\phi(\mathbf{r}, t)$  e vetorial  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  conforme apresentado nas Eq.(2.5) e Eq.(2.7). Uma das propriedades dos campos eletromagnético é

---

<sup>1</sup>Acrônimo da expressão inglesa *Jaynes Cummings Model*

que eles são invariantes sob as transformações nos potenciais:

$$\phi'(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \chi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla \chi(\mathbf{r}, t). \quad (3.3)$$

O potencial vetor  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  depende de  $\mathbf{r}$  como apresentado nas funções espaciais  $\mathbf{u}_{\mathbf{k}s}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}s} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$  [Eq.(2.12)]. Em determinadas situações onde o comprimento de onda incidente for suficientemente longo quando comparado às dimensões atômicas (no espectro visível  $\lambda$  na faixa de 400-700nm e  $|\mathbf{r}|$  relativo a dimensão do átomo da ordem de ångström), a dependência espacial do campo pode ser negligenciada. Sendo assim, podemos expandir  $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$  em série de potências de modo que:

$$\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = 1 + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})^2 + \dots \quad (3.4)$$

onde  $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$  é o modulo do vetor de onda da radiação, neste contexto temos que  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \ll 1$ . Desta maneira preservando apenas a primeira contribuição referente à Eq.(3.4) temos que o potencial vetor será expresso por:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \simeq \mathbf{A}(t) = \sum_{\mathbf{k}s} \mathbf{e}_{\mathbf{k}s} [A_{\mathbf{k}s}(t) + A_{\mathbf{k}s}^*(t)] \quad (3.5)$$

este resultado é conhecido como aproximação de dipolo [8]. Devido à invariância dos campo eletromagnéticos, podemos, convenientemente, fazer uma escolha qualquer para a forma do potencial escalar. Neste contexto vamos definir a função  $\chi(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{r}$  implicando em:

$$\nabla \chi(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{A}(t), \quad \frac{\partial \chi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\mathbf{r} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}(t)}{\partial t} = -\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t), \quad (3.6)$$

substituindo a Eq.(3.6) na Eq.(3.1) temos:

$$H(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2m} [\mathbf{p} + e(\mathbf{A}(t) + \nabla \chi)]^2 + e \frac{\partial \chi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + V(\mathbf{r}), \quad (3.7)$$

e, por fim, concluímos que:

$$H(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r}) + e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t)., \quad (3.8)$$

Esta equação contém apenas um termo de interação dentro do contexto da aproximação de dipolo. A quantidade  $-e\mathbf{r}$  é definida como momento de dipolo  $\mathbf{d} = -e\mathbf{r}$ . Sendo assim, o hamiltoniano total do sistema será:

$$H(\mathbf{r}, t) = H_0 + H^I(t), \quad (3.9)$$

onde  $H_0 = \frac{1}{2m}\mathbf{P}^2 + V(\mathbf{r})$  é o hamiltoniano do átomo livre na ausência de campo aplicado, enquanto  $H^I(t) = \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(t)$  é o hamiltoniano de interação.

## 3.2 Átomos com mais do que dois níveis de energia

No estudo de sistemas ópticos mais complexos, um átomo pode estar sujeito a um campo de radiação contendo muitas frequências de oscilação. Desta forma, se faz necessária uma descrição mais geral sobre a interação entre o átomo e o campo, onde a presença de outros níveis eletrônicos seja levada em consideração na construção do modelo. Nesta descrição, as diferentes frequências do campo incidente devem estar próximas das frequências de transição entre os níveis eletrônicos.

Nesta seção estamos interessados na descrição de átomos com mais de dois níveis eletrônicos. Descreveremos, assim, um formalismo mais geral para sistemas ópticos com  $n$  níveis de energia. Nesta descrição apresentaremos o hamiltoniano do átomo livre em função dos operadores de inversão atômica levando em consideração as regras de seleção de paridade, que estabelece as transições permitidas entre os níveis eletrônicos. Como um exemplo da extensão do sistemas de dois níveis, consideraremos o átomo com três níveis eletrônicos nas configurações escada ( $\Xi$ ) (Figura 3.3), lambda ( $\Lambda$ ) (Figura 3.1) e configuração em ( $V$ ) (Figura 3.2). A descrição aqui apresentada para o átomo de três níveis na configuração ( $\Lambda$ ) será de grande valia no estudo dos fenômenos intitulados de transparência eletromagnética induzida (EIT) e dos estados escuros, que será estudada em mais detalhes ao longo do capítulo 5.

Inicialmente vamos considerar um átomo com  $n$  níveis eletrônicos. Os vetores de estado serão definidos como  $|j\rangle$  onde  $j = 1, 2, \dots, n$ , descrevendo estados eletrônicos com seus respectivos níveis de energias  $E_j$ . Estes estados formam uma base ortonormal  $\langle k|j\rangle = \delta_{jk}$ , e, para tal sistema físico, vale a relação de completeza:  $\sum_j^n |j\rangle\langle j| = I$ .

O hamiltoniano do átomo livre é expresso como [14]:

$$H^A = \sum_{j=1}^n E_j |j\rangle\langle j|. \quad (3.10)$$

A configuração dos níveis de energia pode ser arbitrária, porém, é conveniente escolhermos estes níveis de forma que  $E_j \leq E_{j+1}$ . Os operadores que geram transições entre os níveis atômicos são chamados de operadores de transição e são representado por  $s^{ij} = |j\rangle\langle i|$ , onde ( $i \neq j$ ) e  $i, j = 1 \dots n$ . Estes operadores satisfazem a relação de comutação:

$$[s^{ij}, s^{lk}] = \delta_{ik}s^{lj} - \delta_{jl}s^{ik}. \quad (3.11)$$

Podemos definir o operador inversão atômica como  $s_z^{jj+1}$ , responsável pelas

transições entre os níveis  $|j + 1\rangle$  e  $|j\rangle$ . Com isso:

$$s_z^{jj+1} = \frac{1}{2}(|j + 1\rangle\langle j + 1| - |j\rangle\langle j|), \quad (3.12)$$

cuja interpretação é conveniente em virtude do ordenamento dos níveis energéticos do átomo, de forma que existam  $n - 1$  operadores inversão independentes responsáveis pelas transições entre os níveis da amostra atômica. Podemos representar o projetor  $|j\rangle\langle j|$  em termos de  $s_z^{jj+1}$ , tal que:

$$s^{jj} = |j\rangle\langle j| = \frac{I}{n} + 2 \sum_{k=1}^{j-1} s_z^{kk+1} - \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (n - k) s_z^{kk+1}. \quad (3.13)$$

Sendo assim, o hamiltoniano do átomo livre em função do operador de inversão atômica  $s_z^{jj+1}$  pode ser expresso como [14]:

$$H^A = 2 \sum_{k=1}^{n-1} s_z^{kk+1} \left[ Ek - \sum_{j=1}^k E_j \right] + E, \quad (3.14)$$

onde  $E$  é entendido como "energia do centro do espectro" que é definido por  $E = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n E_j$ .

Expandindo  $H^A$  e  $H^I$  na base de estados do átomo, estes hamiltonianos serão:

$$H^A = \begin{bmatrix} E_0 & 0 & \dots \\ 0 & E_1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}, \quad H^I = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots \\ H_{21} & H_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix},$$

onde

$$H_{kn} = \langle k | H^I | n \rangle = - \left( \mathbf{E} \cdot \int d\mathbf{r} \psi_k^*(\mathbf{r}) \mathbf{e} r \psi_n(\mathbf{r}) \right). \quad (3.15)$$

Segundo a Eq.(3.15), as integrais referentes aos elementos da diagonal principal do hamiltoniano de interação serão zero uma vez que estão relacionados entre as transições de elementos com mesma paridade. Os elementos fora da diagonal principal são os responsáveis pelas transições entre os estados  $|k\rangle$  e  $|n\rangle$  com frequência de transições  $\omega_{kn} = (E_k - E_n)/\hbar$ . Vale ressaltar que para estimular as transições atômicas, as frequências do campo incidente devem estar próximas das frequências de transição entre os níveis energéticos.

Por fim, consideraremos o átomo de três níveis e as suas três configurações possíveis entre os níveis energéticas. Na configuração escada ( $\Xi$ ), as transições permitidas serão  $|1\rangle \Leftrightarrow |2\rangle \Leftrightarrow |3\rangle$ , enquanto as transições  $|1\rangle \Leftrightarrow |3\rangle$  são proibidas. Isso significa que as funções de onda dos estados  $|1\rangle$  e  $|3\rangle$  têm a mesma paridade. Na configuração ( $V$ ), o átomo tem um estado estável  $|1\rangle$ , e dois estados excitados  $|2\rangle$  e  $|3\rangle$ . Nesta configuração as

transições permitidas são  $|3\rangle \Leftrightarrow |1\rangle \Leftrightarrow |2\rangle$  enquanto as transições  $|3\rangle \Leftrightarrow |2\rangle$  são proibidas.

Conforme mencionamos no início desta seção, a configuração em  $(\Lambda)$ , devido a sua importância na presente dissertação, será analisada com mais detalhes. Nesta configuração o átomo possui dois níveis de menor energia  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$  e um estado excitado  $|3\rangle$ , na configuração em  $\Lambda$  as transições permitida são  $|1\rangle \Leftrightarrow |3\rangle \Leftrightarrow |2\rangle$ , enquanto as transições  $|1\rangle \Leftrightarrow |2\rangle$  são proibidas. Esta é comumente chamada de configuração de Raman, desde que a presença dos campos clássicos  $\mathbf{E}_p$  e  $\mathbf{E}_c$ <sup>2</sup> sejam responsáveis pelas transições  $|1\rangle \Leftrightarrow |3\rangle$  e  $|3\rangle \Leftrightarrow |2\rangle$  respectivamente. As três configurações possíveis entre os três níveis atômicos são representadas nas Figuras (3.1), (3.2) e (3.3) onde  $\Gamma_{31}$  e  $\omega_{31}$  juntamente com  $\Gamma_{32}$  e  $\omega_{32}$  correspondem às taxas de decaimento espontâneo e às frequências de transição entre os níveis  $|3\rangle \Leftrightarrow |1\rangle$  e  $|3\rangle \Leftrightarrow |2\rangle$ , respectivamente.

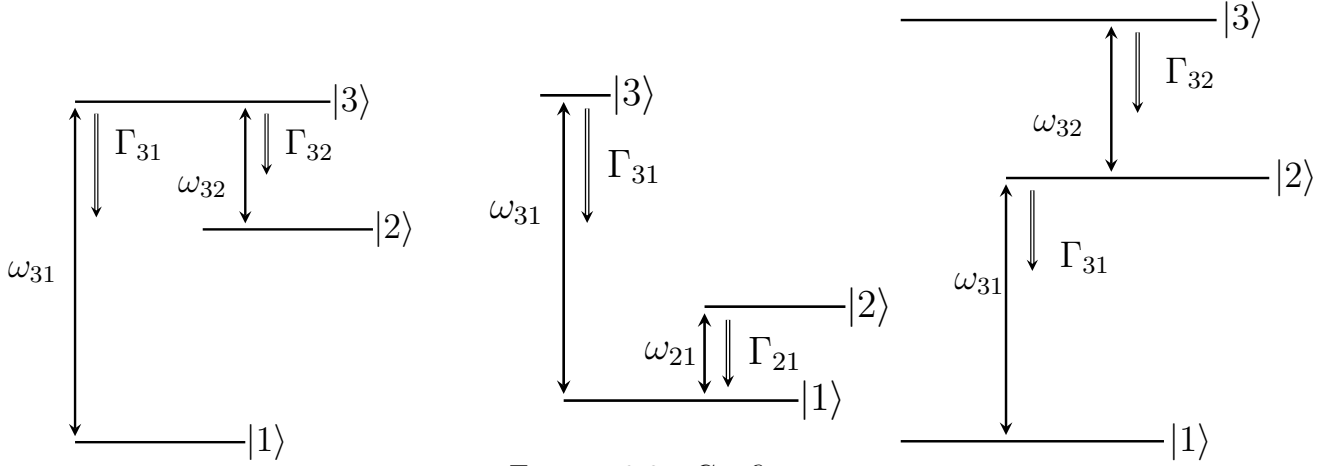


Figura 3.1: Configuração  $\Lambda$

Figura 3.2: Configuração em  $V$

Figura 3.3: configuração  $\Xi$

Conforme apresentado na Eq.(3.9), o hamiltoniano total do sistema de três níveis será expresso por:

$$H(\mathbf{r}, t) = H_0 + H^I(t). \quad (3.16)$$

Devido a presença de dois campos clássicos o hamiltoniano de interação entre o átomo e o campo elétrico será:

$$H^I(t) = -\mathbf{d} \cdot [\mathbf{E}_p + \mathbf{E}_c], \quad (3.17)$$

onde,  $\mathbf{E}_j(t) = \hat{\mathbf{e}}_j E_j(t)$ , com  $(j = p, c)$  e o modulo do campo é expresso por  $E_j = \epsilon_j e^{-i\omega_j t} + c.c.$  Novamente considerando que o campo  $\mathbf{E}_p$  é responsável pelas transições

<sup>2</sup> Os sub índices  $p$  e  $c$  dizem respeito aos campo de prova e controle respectivamente.

$|3\rangle \Leftrightarrow |1\rangle$ , o que implica que a frequência  $\omega_p$  esteja próxima da frequência  $\omega_{31}$ ; e que o campo  $\mathbf{E}_c$  seja responsável por  $|3\rangle \Leftrightarrow |2\rangle$ , o hamiltoniano de interação na configuração  $\Lambda$  é expresso por:

$$H^I(t) = -[d_{31}E_p(\sigma_{31} + \sigma_{13}) + d_{32}E_c(\sigma_{32} + \sigma_{23})], \quad (3.18)$$

onde  $d_{31} = \langle 3|\mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{e}}_p|1\rangle$  e  $d_{32} = \langle 3|\mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{e}}_p|2\rangle$  são os elementos de matriz do operador momento de dipolo, sem perda de generalidade, tomados como sendo real.

Na representação de interação, o hamiltoniano apresentado na Eq.(3.18) será expresso por:

$$H_I^I(t) = -[\Omega_p\sigma_{31}e^{i\Delta_1 t} + \Omega_c\sigma_{32}e^{i\Delta_2 t}] + h.c., \quad (3.19)$$

onde  $\Omega_p = d_{31}\epsilon_p/\hbar$  e  $\Omega_c = d_{32}\epsilon_c/\hbar$  são definidas como as frequências de Rabi,  $\Delta_1 = \omega_{31} - \omega_p$  e  $\Delta_2 = \omega_{32} - \omega_p$  são intitulados de dessintonia<sup>3</sup>, e para efeito de simplificação de cálculos consideraremos ( $\hbar = 1$ ). Vale ressaltar que o termo  $h.c$  corresponde ao hermitiano conjugado.

Podemos eliminar a dependência temporal sobre o hamiltoniano apresentando na Eq.(3.19) ao realizar uma transformação unitária representada por:  $U_1 = \exp[i(\Delta_1\sigma_{33} + (\Delta_1 - \Delta_2)\sigma_{22})t]$ . Finalmente, o hamiltoniano na configuração  $\Lambda$ , sem dependência temporal, é expresso por:

$$H_\Lambda^I = -[\Delta_1\sigma_{33} + (\Delta_1 - \Delta_2)\sigma_{22}] - [\Omega_1\sigma_{31} + \Omega_2\sigma_{32} + h.c.]. \quad (3.20)$$

O mesmo procedimento pode ser aplicado na determinação dos hamiltonianos nas configurações  $(V)$  e  $(\Xi)$ . De maneira sintética podemos reunir os hamiltoniano do átomo livre em função dos operadores de inversão, juntamente com os hamiltoniano de interação para as três configurações. Desse modo, temos que:

1. Para a configuração  $\Xi$  os operadores inversão serão definidos como:

$$s_z^{12} = \frac{1}{2}(|2\rangle\langle 2| - |1\rangle\langle 1|), \quad s_z^{23} = \frac{1}{2}(|3\rangle\langle 3| - |2\rangle\langle 2|), \quad (3.21)$$

o hamiltoniano livre será expresso por:

$$H_\Xi = \frac{2}{3}(E_2 + E_3 - 2E_1)s_z^{12} + \frac{2}{3}(2E_3 - E_1 - E_2)s_z^{23} + E, \quad (3.22)$$

---

<sup>3</sup>Dessintonia é a diferença entre a frequência do campo eletromagnético incidente e a frequência dos níveis de transição atômica do átomo que recebe a radiação.

enquanto o hamiltoniano de interação será:

$$H_{\Xi}^I = -[\Delta_1\sigma_{33} + (\Delta_1 + \Delta_2)\sigma_{22}] - [\Omega_1\sigma_{21} + \Omega_2\sigma_{23} + h.c.]. \quad (3.23)$$

2. Para a configuração  $\Lambda$  os operadores de inversão serão definidos como:

$$s_z^{13} = \frac{1}{2}(|3\rangle\langle 3| - |1\rangle\langle 1|), \quad s_z^{23} = \frac{1}{2}(|3\rangle\langle 3| - |2\rangle\langle 2|), \quad (3.24)$$

o hamiltoniano livre será:

$$H_{\Lambda} = \frac{2}{3}(E_2 + E_3 - 2E_1)s_z^{13} + \frac{2}{3}(E_1 + E_3 - 2E_2)s_z^{23} + E, \quad (3.25)$$

enquanto o hamiltoniano de interação será:

$$H_{\Lambda}^I = -[\Delta_1\sigma_{33} + (\Delta_1 - \Delta_2)\sigma_{22}] - [\Omega_1\sigma_{31} + \Omega_2\sigma_{32} + h.c.]. \quad (3.26)$$

3. Por fim, no caso da configuração  $V$  os operadores de inversão serão:

$$s_z^{12} = \frac{1}{2}(|2\rangle\langle 2| - |1\rangle\langle 1|), \quad s_z^{13} = \frac{1}{2}(|3\rangle\langle 3| - |1\rangle\langle 1|), \quad (3.27)$$

sendo assim o hamiltoniano do átomo livre será:

$$H_V = \frac{2}{3}(2E_2 - E_1 - E_3)s_z^{12} + \frac{2}{3}(2E_3 - E_1 - E_2)s_z^{13} + E, \quad (3.28)$$

enquanto o hamiltoniano de interação será:

$$H_V^I = -[\Delta_1\sigma_{33} + \Delta_2\sigma_{22}] - [\Omega_1\sigma_{31} + \Omega_2\sigma_{21} + h.c.]. \quad (3.29)$$

Ao longo do capítulo 5, voltaremos na descrição referente ao átomo de três níveis na configuração  $\Lambda$  com o intuito de estudar os fenômenos da EIT e dos estados escuros.

### 3.3 Dinâmica Atômica

Os sistemas atômicos de dois níveis constituem uma ferramenta indispensável no contexto da óptica quântica. Conforme apresentado na Figura (2.2), um sistema de dois níveis é constituído de um nível fundamental  $|0\rangle$ , e um estado excitado  $|1\rangle$ . De maneira geral, um elétron pode transitar entre muitos níveis de energia [17], porém podemos limitar as transições apenas entre dois níveis eletrônicos. Na prática, esta limitação é feita escolhendo a frequência da radiação incidente, de tal maneira, que force o elétron a oscilar apenas entre dois estados específicos [18].

Nas próximas subseções, evidenciaremos a dinâmica do acoplamento entre o átomo e o campo eletromagnético. Como parte inicial faremos uma descrição semiclássica e por fim trataremos do modelo de JCM. Em ambas as descrições, usaremos os resultados obtidos via aproximação de dipolo apresentando conceitos como inversão atômica e probabilidade de transição entre estados atômicos.

### 3.3.1 Interação de um átomo de dois níveis com um campo clássico

Cada estado, no sistema atômico de dois níveis, tem sua respectiva energia<sup>4</sup> de maneira que o estado  $|0\rangle$  tem uma energia  $E_0 = \hbar\omega_g/2$ , enquanto que o estado  $|1\rangle$  possui  $E_1 = \hbar\omega_e/2$ . A frequência de transição entre os níveis atômicos  $|0\rangle \Leftrightarrow |1\rangle$  será  $\omega_{eg} = \omega_e - \omega_g$ .

A dinâmica da interação entre o campo eletromagnético clássico e o átomo é convenientemente descrita, em termos dos operadores de transição atômica definidos, como:

$$\sigma_+ = |1\rangle\langle 0|, \quad \sigma_- = |0\rangle\langle 1|, \quad (3.30)$$

juntamente com o operador inversão:

$$\sigma_z = |1\rangle\langle 1| - |0\rangle\langle 0| \quad (3.31)$$

obedecem à álgebra de Pauli:

$$[\sigma_+, \sigma_-] = \sigma_z, \quad [\sigma_z, \sigma_\pm] = 2\sigma_\pm \quad (3.32)$$

$$\sigma_\pm = \frac{1}{2}[\sigma_x \pm i\sigma_y]. \quad (3.33)$$

Estes operadores podem ser descritos na representação matricial como:

$$\sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

onde  $\{ |1\rangle, |0\rangle \}$  são as bases do sistema de dois níveis.

---

<sup>4</sup>Figura (2.2)

De acordo com a Figura (2.2), o hamiltoniano do átomo livre será descrito como:

$$H^A = \frac{1}{2}(E_e - E_g)\sigma_z = \frac{1}{2}\hbar\omega_{eg}\sigma_z. \quad (3.34)$$

A partir da aplicação da relação de completeza  $I = |1\rangle\langle 1| + |0\rangle\langle 0|$  em ambos os lados do operador momento de dipolo  $\mathbf{d}$  e assumindo que as transições  $\langle 0|\mathbf{d}|0\rangle = \langle 1|\mathbf{d}|1\rangle = 0$  em virtude da paridade dos níveis atômicos, o operador momento de dipolo admite a seguinte decomposição:

$$\mathbf{d} = \langle 0|\mathbf{d}|1\rangle |0\rangle\langle 1| + \langle 1|\mathbf{d}|0\rangle |1\rangle\langle 0|. \quad (3.35)$$

Sem perda de generalidade, podemos escolher o elemento de matriz  $\langle 0|\mathbf{d}|1\rangle$  sendo real. Com esta escolha, o operador momento de dipolo poderá ser escrito em termos dos operadores de Pauli resultando em:

$$\mathbf{d} = \langle 0|\mathbf{d}|1\rangle (\sigma_+ + \sigma_-). \quad (3.36)$$

Vamos admitir que o campo elétrico seja monocromático, com frequência angular bem definida. Desta forma o campo elétrico será descrito por:

$$\mathbf{E}(t) = (\epsilon e^{-i\omega t} + \epsilon^* e^{i\omega t})\hat{\mathbf{e}} \equiv E(t)\hat{\mathbf{e}}, \quad (3.37)$$

onde  $\hat{\mathbf{e}}$  é a direção de polarização da radiação incidente e  $E(t)$  é a amplitude do campo complexo. A partir destas considerações podemos escrever o hamiltoniano total da interação entre o átomo e o campo como:

$$H = \frac{1}{2}\hbar\omega_{eg}\sigma_z - \langle 0|\mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{e}}|1\rangle (\epsilon e^{-i\omega t} + \epsilon^* e^{i\omega t})(\sigma_+ + \sigma_-). \quad (3.38)$$

Para sistemas fechados que não envolvam a influência do meio externo sobre a amostra atômica, a dinâmica de interação entre o átomo e o campo é convenientemente tratada pela equação de Schrödinger independente do tempo. Sendo assim, devemos especificar a equação de estado para o átomo de dois níveis em um tempo  $t > 0$ , o que nos leva à seguinte expressão:

$$|\psi(t)\rangle = c_g(t) |0\rangle + c_e(t) |1\rangle. \quad (3.39)$$

Os valores  $c_g(t)$  e  $c_e(t)$  são amplitudes complexas relacionadas às probabilidades de ocupação dos estados  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ , respectivamente. Admitindo a equação de Schrödinger na representação de interação temos:

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle_I = -\frac{i}{\hbar} H_I^I(t) |\psi(t)\rangle_I, \quad (3.40)$$

onde o sub índice ( $I$ ) faz referência à representação de interação. Expressando o hamiltoniano de interação  $H^I(t)$  na representação de interação obtemos:

$$\begin{aligned} H_I^I(t) &= -U_A^\dagger H^I(t) U_A \\ &= -E(t) d_{eg} [\sigma_- e^{-i\omega_{eg}t} + \sigma_+ e^{i\omega_{eg}t}], \\ &= -d_{eg} [\sigma_- (\epsilon^* e^{-i(\omega+\omega_{eg})t} + \epsilon e^{i(\omega-\omega_{eg})t}) + \sigma_+ (\epsilon^* e^{-i(\omega-\omega_{eg})t} + \epsilon e^{i(\omega+\omega_{eg})t})], \end{aligned} \quad (3.41)$$

onde  $U_A = e^{-\frac{i}{\hbar} H^A t}$  é o operador de evolução temporal do átomo,  $d_{eg} = \langle 0 | \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{e}} | 1 \rangle$  é o elemento de matriz do operador momento de dipolo e  $|\psi(t)\rangle_I = \bar{c}_g(t) |0\rangle + \bar{c}_e(t) |1\rangle$  é o vetor de estado na representação de interação.

Vamos assumir que inicialmente o sistema composto seja preparado no estado  $|0\rangle$  de forma que  $\bar{c}_g(0) = 1$  e  $\bar{c}_e(0) = 0$ . Sob estas condições iniciais, resolvendo a equação de Schrödinger obtemos o sistema de equações diferenciais:

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{c}_g = i \bar{c}_e \frac{d_{eg}}{\hbar} (E_0 e^{-i(\omega+\omega_{eg})t} + E_0^* e^{i(\omega-\omega_{eg})t}), \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{c}_e = i \bar{c}_g \frac{d_{eg}}{\hbar} (E_0 e^{-i(\omega-\omega_{eg})t} + E_0^* e^{i(\omega+\omega_{eg})t}). \quad (3.43)$$

Considerando que no modelo do átomo de dois níveis interagindo com a radiação, a frequência do campo incidente seja da ordem da frequência de transição entre os níveis eletrônicos, temos que  $\omega_{eg} \approx \omega$ , que acarreta em  $|\omega - \omega_{eg}| \ll \omega + \omega_{eg}$ . Neste contexto, podemos usar a aproximação de onda girante [8], RWA<sup>5</sup>, e negligenciar os termos altamente oscilantes  $e^{\pm i(\omega+\omega_{eg})t}$  que, na média, não contribuem significamente. Dessa maneira, as Eq.(3.42) e Eq.(3.43) serão expressas por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{c}_g \approx i \bar{c}_e \frac{d_{eg}}{\hbar} E_0^* e^{i\Delta t}, \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{c}_e \approx i \bar{c}_g \frac{d_{eg}}{\hbar} E_0 e^{-i\Delta t}, \quad (3.45)$$

onde  $\Delta = \omega - \omega_{eg}$ . Resolvendo o sistema de equações diferenciais acopladas de primeira ordem apresentado nas Eq.(3.44) e Eq.(3.45) obtêm-se:

$$\bar{c}_g(t) = e^{i\frac{\Delta}{2}t} \left[ \cos(\bar{\Omega}t) - i \frac{\Delta}{2\bar{\Omega}} \text{sen}(\bar{\Omega}t) \right], \quad (3.46)$$

$$\bar{c}_e(t) = i e^{-i\frac{\Delta}{2}t} \frac{\Omega}{\bar{\Omega}} \text{sen}(\bar{\Omega}t), \quad (3.47)$$

<sup>5</sup> Acrônimo em inglês da expressão *Rotating Wave Approximation*

onde  $\bar{\Omega} = \sqrt{\Omega^2 + (\Delta/2)^2}$  é intitulada de frequência de Rabi generalizada, enquanto  $\Omega = \frac{d_{eg}|\epsilon|}{\hbar}$  é frequência de Rabi efetiva. Neste contexto, as oscilações de Rabi são responsáveis pela troca populacional periódica entre os níveis atômicos [19]. No caso limite de  $\Delta = 0$ , as duas frequências de Rabi coincidem.

A partir das expressões apresentadas nas Eq.(3.46) e Eq.(3.47), podemos calcular as probabilidades do átomo ser encontrado no estado fundamental ou excitado. Neste caso,  $P_g(t) = |\bar{c}_g(t)|^2$  é a probabilidade do átomo permanecer no estado fundamental, enquanto  $P_e(t) = |\bar{c}_e(t)|^2$  corresponde à probabilidade de encontrar o átomo no estado excitado. As probabilidades apresentadas obedecem a condição geral de conservação de maneira que  $P_e(t) + P_g(t) = 1$  para todo tempo  $t \geq 0$ .

A probabilidade de encontrar o átomo no estado excitado será:

$$P_e(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Delta}{2\Omega}\right)^2} \text{sen}^2 \left( t\Omega \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta}{2\Omega}\right)^2} \right), \quad (3.48)$$

enquanto a probabilidade de encontrar o átomo no estado fundamental será:

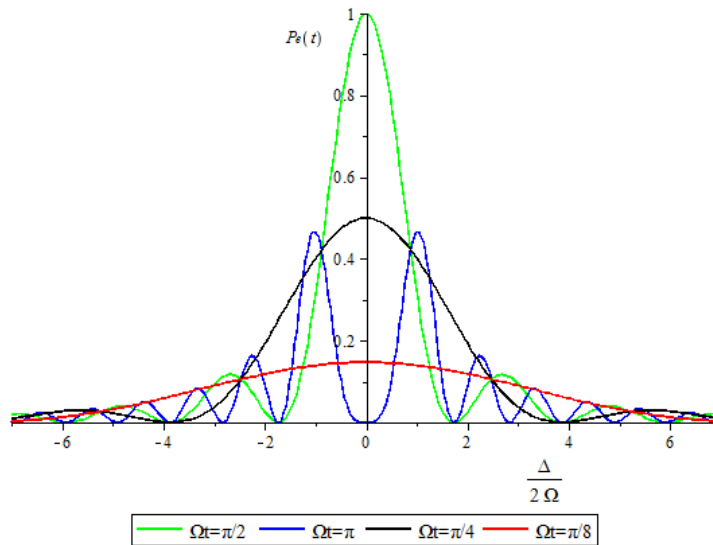
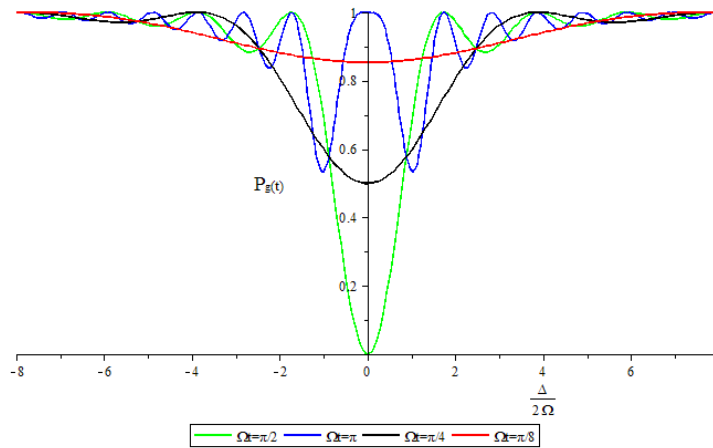
$$P_g(t) = \text{cos}^2 \left( t\Omega \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta}{2\Omega}\right)^2} \right) + \frac{\left(\frac{\Delta}{2\Omega}\right)^2}{1 + \left(\frac{\Delta}{2\Omega}\right)^2} \text{sen}^2 \left( t\Omega \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta}{2\Omega}\right)^2} \right). \quad (3.49)$$

Deste modo, podemos observar dois fatos: o primeiro deles é que as oscilações de Rabi, de maneira geral, acontecem com a frequência de Rabi generalizada ( $\bar{\Omega} \geq \Omega$ ) e o aumento na taxa de oscilação está diretamente relacionado com o aumento da dessintonia conforme se verifica na Figura (3.7) onde plotamos  $P_e(t)$  em função de  $\Omega t$ . A segunda consideração a ser feita aparece na Figura (3.4) onde plotamos o gráfico de  $P_e(t)$  em função de  $\frac{\Delta}{2\Omega}$  vemos, assim, que as amplitude das oscilações se reduzem ao se distanciar da dessintonia nula, sendo que a maior amplitude de probabilidade está relacionada à situação onde a dessintonia é nula.

Na Figura (3.5) apresentamos o comportamento da probabilidade do átomo permanecer no estado fundamental. Devido à conservação da probabilidade, temos que as Figuras (3.4) e (3.5) são simétricas e novamente constatamos que as amplitudes de oscilação são reduzidas ao se distanciar da dessintonia nula. Outra grandeza muito útil no contexto da óptica quântica é a chamada inversão atômica, definida como:

$$w(t) = P_e(t) - P_g(t). \quad (3.50)$$

Esta quantidade indica o período em que a população atômica é completamente transferida entre os estado  $|1\rangle$  e  $|0\rangle$ . A transferência da população atômica entre os estados  $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$  corresponde à absorção da luz, enquanto o processo de transferência entre  $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$  diz respeito ao processo de emissão estimulada. O período de oscilação entre as


 Figura 3.4:  $P_e(t)$  em função de  $\frac{\Delta}{2\Omega}$ 

 Figura 3.5:  $P_g(t)$  em função de  $\frac{\Delta}{2\Omega}$ 

transições dos níveis atômicos é  $T = 2\pi/\Omega$ . Isso significa que na situação onde o átomo se encontra inicialmente no estado  $|0\rangle$  e o campo elétrico seja ligado por um período de duração  $T/2$ , o átomo será promovido para o estado excitado com probabilidade unitária. De maneira geral, para um campo clássico interagindo com um átomo de dois níveis a inversão atômica será expressa por:

$$\begin{aligned}
 W(t) = & \frac{1}{1 + \left(\frac{\Delta}{2\Omega}\right)^2} \text{sen}^2 \left( t\Omega \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta}{2\Omega}\right)^2} \right) - \\
 & - \cos^2 \left( t\Omega \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta}{2\Omega}\right)^2} \right) - \\
 & - \frac{\left(\frac{\Delta}{2\Omega}\right)^2}{1 + \left(\frac{\Delta}{2\Omega}\right)^2} \text{sen}^2 \left( t\Omega \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta}{2\Omega}\right)^2} \right). \quad (3.51)
 \end{aligned}$$

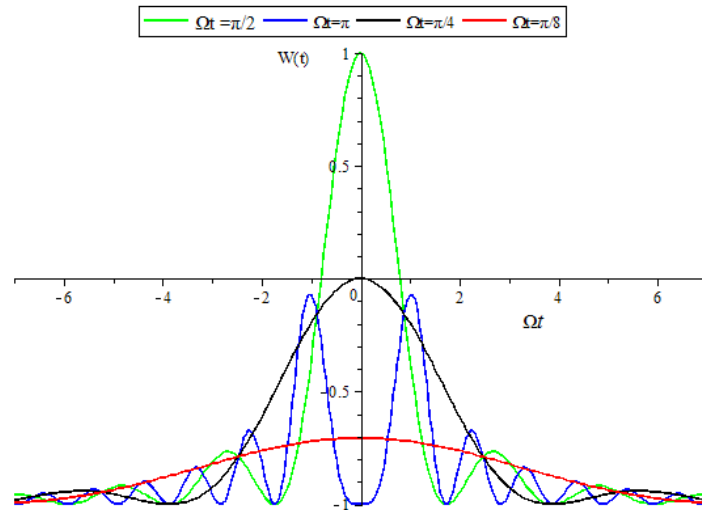


Figura 3.6:  $W(t)$  em função de  $\frac{\Delta}{2\Omega}$

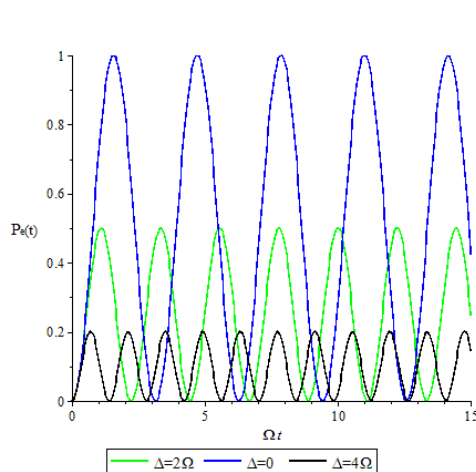


Figura 3.7:  $P_e(t)$  por  $\Omega t$

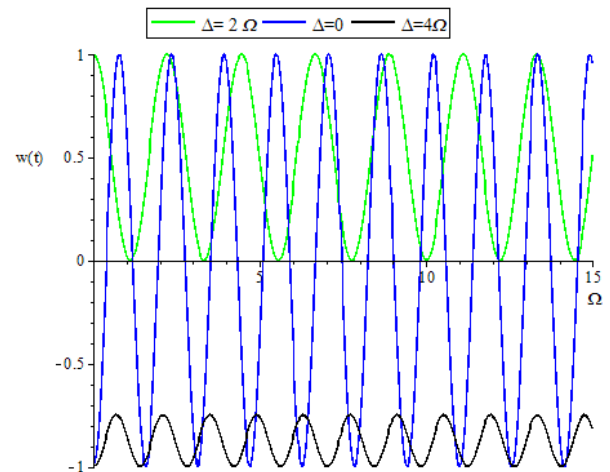


Figura 3.8:  $W(t)$  por  $\Omega t$

Conforme verifica-se na Figura (3.8) a inversão é máxima para a dessintonia nula, e à medida que a dessintonia aumenta o número de oscilações aumentam, em completa analogia com o comportamento de  $P_e(t)$ . Outro ponto que chamamos a atenção é a diminuição da amplitude da inversão à medida que se afasta da dessintonia nula, como pode ser verificado na Figura (3.6), onde apresentamos o comportamento da inversão atômica em função da  $\frac{\Delta}{2\Omega}$ .

### 3.3.2 Dinâmica da amostra atômica

A partir dos estados de Dicke e do hamiltoniano de interação na aproximação de dipolo, calcularemos as probabilidades de transição entre os níveis atômicos em uma amostra contendo  $A$  átomos de dois níveis interagindo com um campo clássico circularmente polarizado. Serão apresentados gráficos que ilustram o comportamento da probabilidade e inversão atômica para a amostra.

Devido à natureza do campo elétrico circularmente polarizado no plano  $xy$ , podemos representá-lo como sendo  $\mathbf{E}(t) = E_x(t)\hat{\mathbf{x}} + E_y(t)\hat{\mathbf{y}}$ , onde  $E_x(t)$  e  $E_y(t)$  são as componentes do campo ao longo dos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente. Na aproximação de dipolo e usando o formalismo dos operadores coletivos, o hamiltoniano do sistema composto será expresso por [14]:

$$H = \omega_0 S_z + \varepsilon_1(t)S_x + \varepsilon_2(t)S_y, \quad (3.52)$$

sendo que  $\varepsilon_1(t) = 2dE_x(t)$  e  $\varepsilon_2(t) = 2dE_y(t)$ . Em termo dos operadores escadas Eq.(2.44), podemos reescrever a equação anterior como sendo:

$$H = \omega_0 S_z + \varepsilon_+ S_+ + \varepsilon_-(t)S_-, \quad (3.53)$$

onde  $\varepsilon_+ = \frac{\varepsilon_1 - i\varepsilon_2}{2} = \varepsilon_-^*$ .

O operador evolução temporal será solução da equação diferencial:

$$i\frac{\partial U}{\partial t} = HU, \quad U(0) = I, \quad (3.54)$$

posteriormente usaremos  $\hbar = 1$  para simplificar os cálculos. Usando a decomposição de Gauss [14], podemos representar o operador evolução temporal como sendo:

$$U(t) = e^{\alpha(t)S_+} e^{\beta(t)S_z} e^{\gamma(t)S_-}, \quad (3.55)$$

onde os coeficientes  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  e  $\gamma(t)$  são a solução da equação diferencial de primeira ordem que se obtém ao combinar as Eq.(3.55), Eq.(3.54) e Eq.(3.53).

Inicialmente, a derivada temporal da Eq.(3.55) será:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} [e^{\alpha(t)S_+} e^{\beta(t)S_z} e^{\gamma(t)S_-}], \\ &= \dot{\alpha} S_+ e^{\alpha(t)S_+} e^{\beta(t)S_z} e^{\gamma(t)S_-} + \dot{\beta} e^{\alpha(t)S_+} S_z e^{\beta(t)S_z} e^{\gamma(t)S_-} + \dot{\gamma} e^{\alpha(t)S_+} e^{\beta(t)S_z} S_- e^{\gamma(t)S_-}, \\ &= \dot{\alpha} S_+ U + \dot{\beta} e^{\alpha(t)S_+} S_z e^{-\alpha(t)S_+} U + \dot{\gamma} e^{\alpha(t)S_+} e^{\beta(t)S_z} S_- e^{-\beta(t)S_z} e^{-\alpha(t)S_+} U. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Usando o lema de Baker-Hausdorff [15], é possível demonstrar que:

$$e^{\alpha(t)S_+} S_z e^{-\alpha(t)S_+} = S_z - \alpha S_+, \quad (3.57)$$

$$e^{\beta(t)S_z} S_- e^{-\beta(t)S_z} = e^{-\beta(t)} S_-, \quad (3.58)$$

$$e^{\alpha(t)S_+} S_- e^{-\alpha(t)S_+} = S_- + 2\alpha S_- - \alpha^2 S_+. \quad (3.59)$$

Substituindo as Eq.(3.57), Eq.(3.58) e Eq.(3.59) na Eq.(3.54), e usando o fato dos

operadores  $S_{\pm,z}$  serem linearmente independentes temos a seguinte equação diferencial:

$$i(\dot{\alpha} - \dot{\beta}\alpha - \dot{\gamma}e^{-\beta}\alpha^2) = \varepsilon_+, \quad (3.60)$$

$$i(\dot{\beta} + 2\dot{\gamma}e^{-\beta}\alpha) = \omega_0, \quad (3.61)$$

$$i\dot{\gamma}e^{-\beta} = \varepsilon_-, \quad (3.62)$$

com as condições iniciais  $\alpha(0) = \beta(0) = \gamma(0) = 0$  em virtude de  $U(0) = I$ . Combinando a Eq.(3.62) com a Eq.(3.61) temos:

$$\dot{\beta} = -i(\omega_0 - 2\alpha\varepsilon_-), \quad (3.63)$$

substituindo a Eq.(3.63) e a Eq.(3.62) na Eq.(3.60), encontramos a seguinte equação do tipo Riccati <sup>6</sup> para o coeficiente  $\alpha$ :

$$i\dot{\alpha} = \omega_0\alpha + \varepsilon_+ - \alpha^2\varepsilon_-, \quad (3.64)$$

usando o seguinte ansatz  $\alpha = ae^{-i\omega_0 t}$  a equação anterior se reduz para a seguinte equação diferencial em termo da variável  $a$ :

$$i\dot{a} = v^* - va^2, \quad a(0) = 0, \quad (3.65)$$

onde  $v = \varepsilon e^{-i\omega_0 t}$ . Realizando a substituição  $a = i\dot{\Psi}/\Psi v$  na Eq.(3.65), encontramos a seguinte equação diferencial de segunda ordem para  $\Psi$ :

$$-\ddot{\Psi} + \dot{\Psi}\frac{\dot{v}}{v} = |v|^2\Psi, \quad (3.66)$$

por fim, a substituição da expressão  $\Psi = \sqrt{v(t)}\xi$  na Eq.(3.66) resulta em:

$$\ddot{\xi} + \Omega^2(t)\xi = 0, \quad (3.67)$$

onde  $\Omega^2(t)$  é dado por:

$$\Omega^2(t) = |v|^2 + \frac{\ddot{v}}{2v} - \frac{3}{4}\left(\frac{\dot{v}}{v}\right)^2, \quad (3.68)$$

de forma geral  $\Omega^2(t)$  é um número complexo. Para o caso onde o campo elétrico é descrito pelas componentes  $\varepsilon_1 = E\cos\omega t$  e  $\varepsilon_2 = E\sin\omega t$  e considerando o caso ressonante,  $\omega = \omega_0$ ,

<sup>6</sup>A Equação de Riccati é uma equação diferencial ordinária não linear, de primeira ordem representada por  $\frac{dy}{dx} = a(x) + b(x)y + c(x)y^2$  onde  $a(x)$ ,  $b(x)$  e  $c(x)$  são três funções que dependem de  $x$ .

os coeficientes da decomposição de Gauss serão expressos por:

$$\alpha = -ie^{-i\omega t} \tan \Omega t, \quad (3.69)$$

$$\beta = -i\omega t - 2 \ln |\cos \Omega t|, \quad (3.70)$$

$$\gamma = -i \tan \Omega t. \quad (3.71)$$

onde  $\Omega = E/2$  na ressonância.

A partir dos valores dos coeficientes da decomposição de Gauss, podemos construir o operador evolução temporal e determinar as probabilidades de transições atômicas. Vamos considerar que inicialmente tenhamos todos os átomos da amostra no estado de menor energia, na representação dos estados de Dicke temos  $|0, A\rangle$ . Sendo assim a probabilidade  $P_{00}(t)$  da amostra permanecer no estado fundamental após um tempo  $t$  é dado por:

$$P_{00}(t) = |\langle 0|U(t)|0\rangle|^2 = |\langle 0|e^{\alpha(t)S_+} e^{\beta(t)S_z} e^{\gamma(t)S_-}|0\rangle|^2 = \cos^{2A}\Omega t, \quad (3.72)$$

para o caso onde o número de átomos da amostra seja  $A = 1$ , temos o mesmo resultado que o apresentado na seção (3.3.1) e portanto ocorre uma transição periódica entre os níveis energéticos.

A generalização da Eq.(3.72) consiste em preparar a amostra com uma quantidade  $k$  de átomos excitados. Desta forma, a probabilidade  $P_{0k}(t)$  do sistema permanecer no estado fundamental será expresso por:

$$P_{0k}(t) = |\langle k|U(t)|0\rangle|^2 = |\langle k|e^{\alpha(t)S_+} e^{\beta(t)S_z} e^{\gamma(t)S_-}|0\rangle|^2, \\ P_{0k}(t) = \frac{A!}{k!(A-k)!} \cos^{2A-2k}\Omega t \sin^{2k}\Omega t. \quad (3.73)$$

Nas Figuras (3.9)-(3.12) apresentamos as probabilidades para uma coleção atômica contendo 3 átomos em quatro situações diversas. A probabilidade  $P_{00}(t)$  (verde) referente a existência de nenhum átomo excitado,  $P_{01}(t)$  (azul) para o caso em que  $k = 1$ ,  $P_{02}(t)$  (preto) para a situação onde  $k = 2$  e por fim  $P_{03}(t)$  (vermelho) para  $k = 3$ .

A inversão atômica da coleção de átomos, inicialmente preparada no estado fundamental, será expressa por:

$$\langle S_z(t) \rangle = \langle \psi(t) | S_z | \psi(t) \rangle = \langle 0 | U^\dagger(t) S_z U(t) | 0 \rangle \quad (3.74)$$

desta maneira, a inversão atômica será expressa por:

$$\langle S_z(t) \rangle = -\frac{A}{2} \cos 2\Omega t \quad (3.75)$$

segundo a Eq.(3.75), a inversão atômica é um valor que não depende do número de

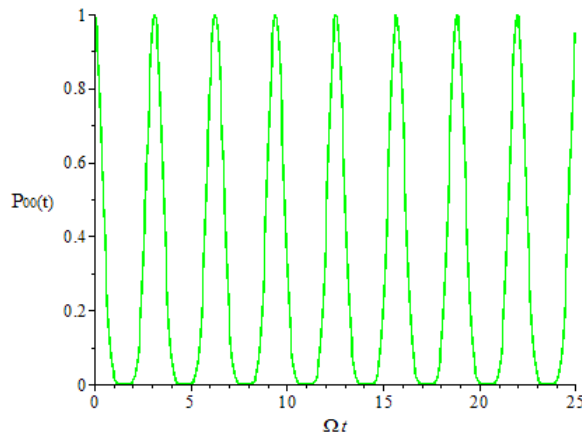


Figura 3.9: Probabilidade em função  $\Omega t$  para  $k = 0$

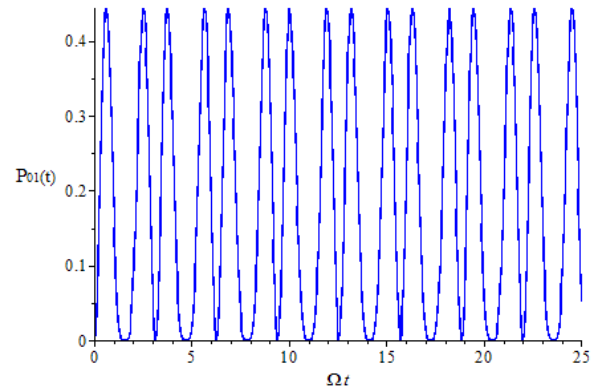


Figura 3.10: Probabilidade em função  $\Omega t$  para  $k = 1$

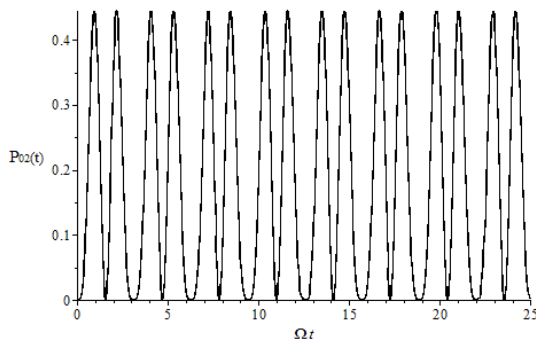


Figura 3.11: Probabilidade em função  $\Omega t$  para  $k = 2$

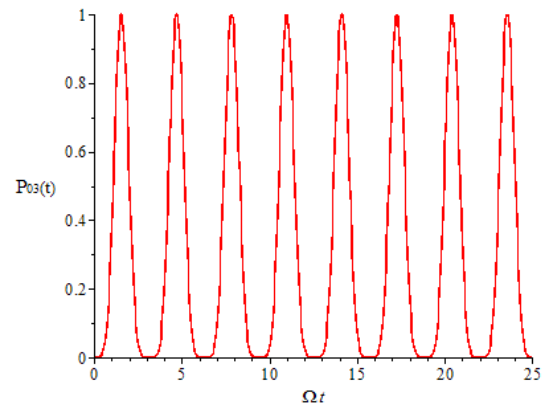


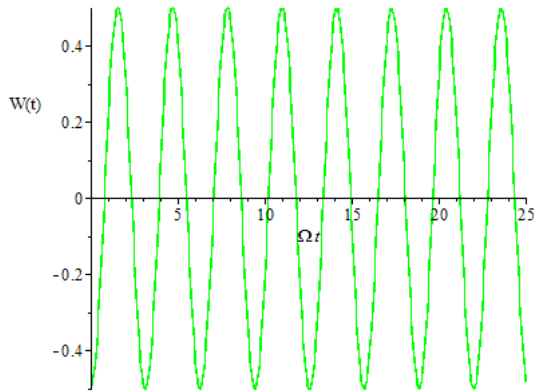
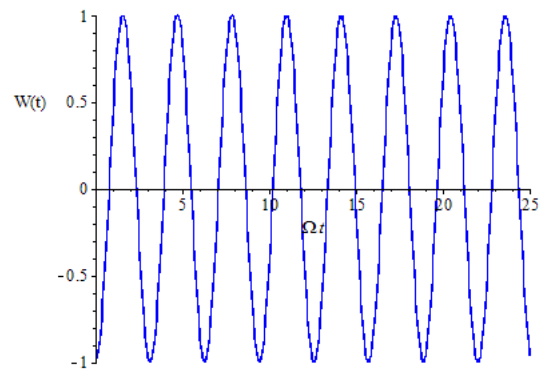
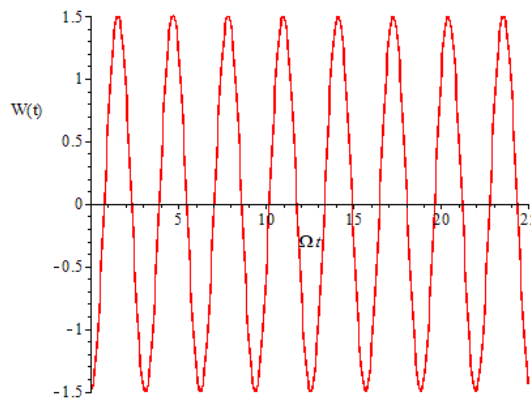
Figura 3.12: Probabilidade em função  $\Omega t$  para  $k = 3$

átomos excitados na coleção. Nas Figuras (3.13)-(3.15) plotamos os gráficos referentes ao comportamento da inversão atômica para  $A = 1$  (verde),  $A = 2$  (azul) e para o caso onde a amostra tenha  $A = 3$  (vermelho) átomos.

### 3.3.3 Modelo de Jaynes–Cummings (JCM)

Consideremos agora a interação entre um átomo de dois níveis com um único modo de oscilação do campo quantizado dentro de uma cavidade. Vamos assumir, novamente, que a frequência  $\omega$  do campo esteja próxima à frequência de transição  $\omega_{eg}$  entre os níveis  $|1\rangle \Leftrightarrow |0\rangle$ , de maneira que o átomo interaja apenas com um único modo do campo enquanto, todos os outros modos não se acoplam ao átomo devido ao distanciamento com a frequência de transição. Tal modelo foi originalmente proposto por Jaynes e Cummings em 1963 [20] e constitui uma ferramenta matemática indispensável no entendimento de como a quantização da radiação afeta a evolução dos estados atômicos em um sistema de dois níveis.

Nas décadas que se seguem à apresentação do JCM são várias as publicações


 Figura 3.13: Inversão atômica em função  $\Omega t$  para  $A = 1$ 

 Figura 3.14: Inversão atômica em função  $\Omega t$  para  $A = 2$ 

 Figura 3.15: Inversão atômica em função  $\Omega t$  para  $A = 3$ 

dedicadas à exploração e extensão desse modelo, incluindo o de Dicke [21], que estende o tratamento apresentado por JC para um sistema constituído de muitos átomos de dois níveis. Outro fenômeno que surge da aplicação do JCM são os colapsos e ressurgimentos das oscilações de Rabi [22] do estado coerente  $|\alpha\rangle$ , evidenciando assim um fenômeno sem contrapartida clássica. Do ponto de vista experimental o advento do maser possibilitou o estudo da interação de um único átomo (geralmente átomo de Rydberg) com um único modo da cavidade ressonante assim como apresentado em [23]. Por fim podemos citar o modelo de JC deformado [24] que permite calcular a dinâmica do fenômeno do colapso e ressurgimento de maneira exata.

De maneira geral o hamiltoniano total do sistema composto é expresso por:

$$H = H^A + H^F + H^I(t), \quad (3.76)$$

onde  $H^A$  corresponde ao hamiltoniano do átomo livre,  $H^F$  diz respeito ao hamiltoniano de origem quântica referente a um único modo do campo, conforme apresentado na secção 2.1, enquanto o termo  $H^I(t)$  novamente corresponde ao hamiltoniano de interação entre o campo e o átomo usando a aproximação de dipolo. Desta maneira o hamiltoniano total

será representado por:

$$H = \frac{1}{2}\hbar\omega_{eg}\sigma_z + \hbar a^\dagger a + \hbar g(\sigma_+ + \sigma_-)(a + a^\dagger), \quad (3.77)$$

onde  $g \equiv -(d_{eg}\epsilon/\hbar)$  é definida como constante de acoplamento entre o átomo e o campo, e sem perda de generalidade, assumida ser real.

Vamos representar por  $H_0 \equiv H^A + H^F$  a soma entre o hamiltoniano do átomo e do campo livre cuja expressão não tem dependência temporal. O operador evolução de temporal do sistema composto será expresso por:

$$U_0 = e^{-\frac{i}{\hbar}H_0 t} = e^{-\frac{i}{\hbar}(H^A + H^F)t}. \quad (3.78)$$

Procedendo de maneira análoga ao modelo semiclássico, é conveniente apresentar os operadores na representação de interação. Com isso, temos:

$$\bar{\sigma}_\pm = U_A(t)^\dagger \sigma_\pm U_A(t) = \sigma_\pm e^{\pm i\omega_{eg}t}, \quad (3.79)$$

onde  $\bar{\sigma}_\pm$  corresponde aos operadores de Pauli na representação de interação, além de que usamos o operador evolução temporal do átomo como sendo  $U_A(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}H^A t}$ . Os operadores criação e aniquilação na representação de interação serão expresso por

$$\bar{a} = U_F(t)^\dagger a U_F(t) = a e^{-i\omega t}, \quad \bar{a}^\dagger = U_F(t)^\dagger a^\dagger U_F(t) = a^\dagger e^{i\omega t}, \quad (3.80)$$

de maneira que os termos  $\bar{a}$  e  $\bar{a}^\dagger$  correspondem aos operadores de criação e aniquilação do campo na representação de interação, onde o operador evolução temporal do campo é representado por  $U_F(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}H^F t}$ . Por fim, representando o hamiltoniano de interação na representação de interação temos:

$$\begin{aligned} \bar{H}^I &= e^{\frac{i}{\hbar}H_0} H^I e^{-\frac{i}{\hbar}H_0} \\ &= \hbar g(a^\dagger \bar{\sigma}_- e^{i(\omega - \omega_{eg})t} + \bar{\sigma}_+ a e^{-i(\omega - \omega_{eg})t} + \\ &\quad + a^\dagger \bar{\sigma}_+ e^{i(\omega + \omega_{eg})t} + \bar{\sigma}_- a e^{-i(\omega + \omega_{eg})t}), \end{aligned} \quad (3.81)$$

novamente usando a aproximação de onda girante (RWA), podemos negligenciar os termos altamente oscilantes  $e^{\pm i(\omega + \omega_{eg})t}$ . Sendo assim, a Eq.(3.81) será expressa por:

$$H^I(t) = \hbar g(\bar{\sigma}_+ a + a^\dagger \bar{\sigma}_-) \quad (3.82)$$

com isso, o hamiltoniano total será dado por [20]:

$$H = \frac{1}{2}\hbar\omega_{eg}\sigma_z + \hbar a^\dagger a + \hbar g(\bar{\sigma}_+ a + a^\dagger \bar{\sigma}_-). \quad (3.83)$$

O hamiltoniano na Eq.(3.83) corresponde ao hamiltoniano de Jaynes Cummings que descreve a interação entre o átomo e campo quantizado. Na próxima seção usaremos o hamiltoniano de JC, para uma situação específica onde o campo é preparado com um número bem definido de fótons (estados de Fock) e o átomo encontra-se inicialmente no estado estado excitado  $|1\rangle$ , será apresentada assim a dinâmica de interação entre a população atômica e o campo elétrico.

### 3.3.4 Aplicação do modelo Jaynes Cummings

As aplicações ao modelo de Jaynes Cummings, apresentadas nesta subseção, encontram-se tratadas em pormenores em [8]. No modelo de JC estamos interessados em uma descrição completamente quântica da interação entre o átomo e o campo. Para este fim, necessitamos construir o estado quântico do sistema composto. Desta modo, temos que o estado do sistema total será especificado via produto tensorial entre o estado do campo e do átomo. Como primeira situação vamos assumir que em  $t = 0$  o átomo esteja no estado fundamental  $|0\rangle$  e que a cavidade seja preparada contendo precisamente  $n$  fótons. Desta maneira, o estado inicial do sistema composto é representado por  $|0, n\rangle$ , devido ao hamiltoniano de interação o estado inicial será conectado apenas ao estado final  $|1, n - 1\rangle$ . Com isso o vetor de estado do sistema composto será, para um tempo  $t > 0$ , expresso por:

$$|\psi(t)\rangle = c_{g,n}(t) |0, n\rangle + c_{e,n-1}(t) |1, n - 1\rangle. \quad (3.84)$$

Recorrendo à equação de Schrödinger na representação de interação para a descrição da evolução das probabilidades dos estados atômicos, encontramos o seguinte sistema de equações diferenciais acopladas para os coeficientes  $c_{g,n}(t)$  e  $c_{e,n-1}(t)$ :

$$\dot{c}_{g,n} = -ig\sqrt{n}e^{i\Delta}C_{e,n-1}, \quad (3.85)$$

$$\dot{c}_{e,n-1} = -ig\sqrt{n}e^{-i\Delta}C_{g,n}, \quad (3.86)$$

o sistema de equações diferenciais está sujeito a condição inicial de que o sistema acoplado seja preparado em  $|0, n\rangle$ , o que acarreta  $c_{g,n}(0) = 1$  e  $c_{e,n-1}(0) = 0$ . Resolvendo o sistema de equações anterior concluímos que a probabilidade de se encontrar o sistema composto no estado  $|0, n\rangle$  é dada por:

$$P_{g,n}(t) = \cos^2 \left( tg\sqrt{n} \sqrt{1 + \left( \frac{\Delta}{2g\sqrt{n}} \right)^2} \right) + \frac{\left( \frac{\Delta}{2g\sqrt{n}} \right)^2}{1 + \left( \frac{\Delta}{2g\sqrt{n}} \right)^2} \text{sen}^2 \left( tg\sqrt{n} \sqrt{1 + \left( \frac{\Delta}{2g\sqrt{n}} \right)^2} \right), \quad (3.87)$$

enquanto a probabilidade de ocorrer a transição para o estado  $|1, n-1\rangle$  será representada por:

$$P_{e,n-1}(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Delta}{2g\sqrt{n}}\right)^2} \text{sen}^2 \left( tg\sqrt{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta}{2g\sqrt{n}}\right)^2} \right). \quad (3.88)$$

Apresentamos nas Figuras (3.16) e (3.17) o comportamento das probabilidades  $P_{g,n}(t)$

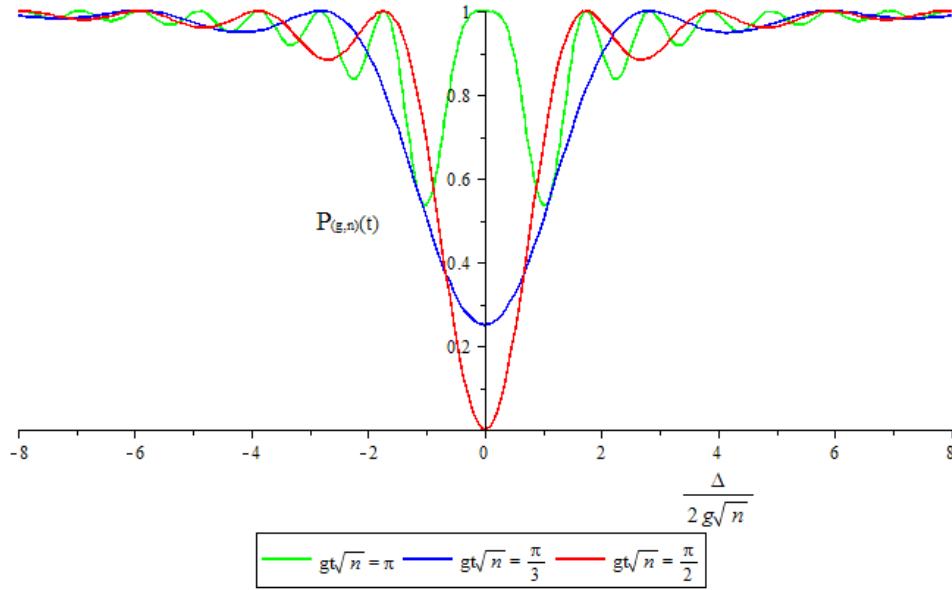
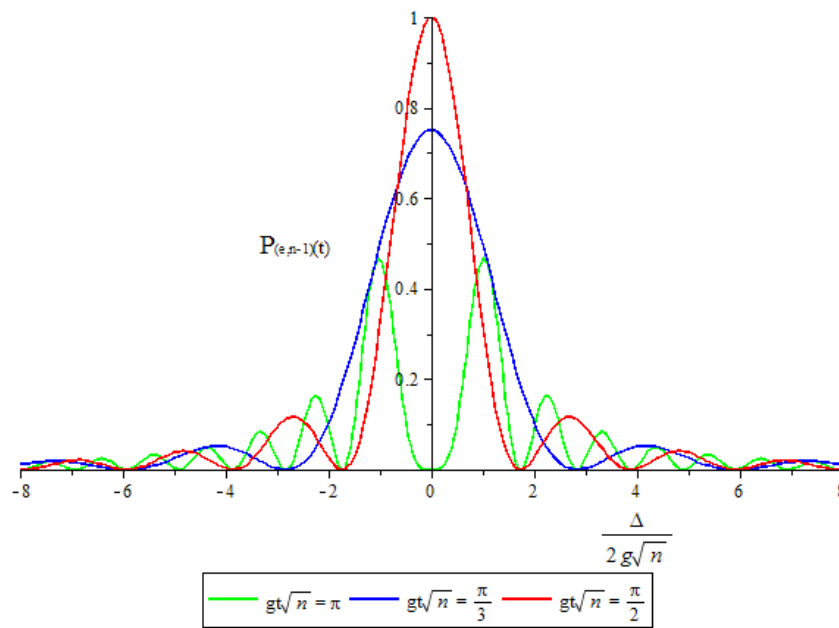
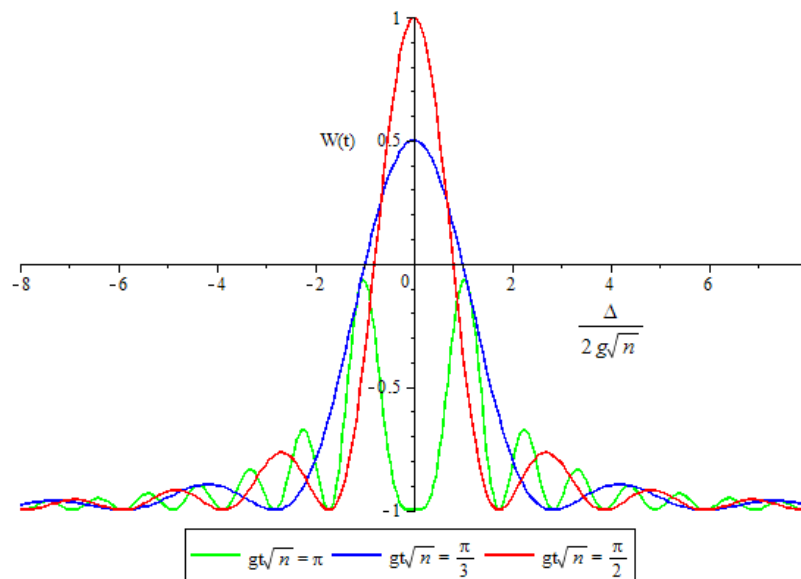


Figura 3.16:  $P_{g,n}(t)$  em função  $\frac{\Delta}{2g\sqrt{n}}$

e  $P_{e,n-1}(t)$  em função de  $\Delta/2g\sqrt{n}$  respectivamente. Temos que as equações das probabilidades são análogas às obtidas na descrição semiclassical de interação entre o átomo e o campo. As amplitudes de probabilidade novamente se reduzirão à medida que se afastam da dessintonia nula, seguindo em completa analogia a descrição semiclassical, além de que em uma situação onde a cavidade seja inicialmente preparada sem nenhum fóton ( $n=0$ ) o átomo ficará indefinidamente no estado fundamental.

A inversão atômica, definida na Eq.(3.50), entre os estados  $|0, n\rangle \Leftrightarrow |1, n-1\rangle$  será:

$$\begin{aligned} W(t) = & \frac{1}{1 + \left(\frac{\Delta}{2g\sqrt{n}}\right)^2} \text{sen}^2 \left( tg\sqrt{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta}{2g\sqrt{n}}\right)^2} \right) - \\ & - \cos^2 \left( tg\sqrt{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta}{2g\sqrt{n}}\right)^2} \right) - \\ & - \frac{\left(\frac{\Delta}{2g\sqrt{n}}\right)^2}{1 + \left(\frac{\Delta}{2g\sqrt{n}}\right)^2} \text{sen}^2 \left( tg\sqrt{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta}{2g\sqrt{n}}\right)^2} \right). \end{aligned} \quad (3.89)$$


 Figura 3.17:  $P_{e,n-1}(t)$  em função  $\frac{\Delta}{2g\sqrt{n}}$ 

 Figura 3.18: Inversão atômica entre os estados  $|0, n\rangle \leftrightarrow |1, n-1\rangle$  em função de  $\frac{\Delta}{2g\sqrt{n}}$ 

Na Figura (3.18), novamente constatamos a diminuição da amplitude de inversão atômica à medida que se afasta da dessintonia nula, em completa analogia ao modelo semiclássico.

Como segunda situação de interesse, vamos considerar o caso em que no instante inicial  $t = 0$  o átomo seja preparado no estado excitado  $|1\rangle$ , enquanto a cavidade esteja no estado  $|n\rangle$ . Sendo assim, o estado inicial do sistema composto será  $|1, n\rangle$ . Temos, portanto, que o estado inicial estará acoplado unicamente ao estado  $|0, n+1\rangle$  de forma que o vetor

de estado para um tempo  $t > 0$  será expresso por:

$$|\psi(t)\rangle = c_{e,n}(t) |1, n\rangle + c_{g,n+1}(t) |0, n+1\rangle, \quad (3.90)$$

procedendo de forma análoga ao apresentado anteriormente, temos que a equação para a probabilidade  $P_{e,n}(t)$  será expressa por:

$$P_{e,n}(t) = \cos^2 \left( tg\sqrt{n+1} \sqrt{1 + \left( \frac{\Delta}{2g\sqrt{n+1}} \right)^2} \right) + \frac{\left( \frac{\Delta}{2g\sqrt{n+1}} \right)^2}{1 + \left( \frac{\Delta}{2g\sqrt{n+1}} \right)^2} \text{sen}^2 \left( tg\sqrt{n+1} \sqrt{1 + \left( \frac{\Delta}{2g\sqrt{n+1}} \right)^2} \right), \quad (3.91)$$

enquanto a probabilidade do átomo ser encontrado no estado  $|0, n+1\rangle$  é representada por:

$$P_{g,n+1}(t) = \frac{1}{1 + \left( \frac{\Delta}{2g\sqrt{n+1}} \right)^2} \text{sen}^2 \left( tg\sqrt{n+1} \sqrt{1 + \left( \frac{\Delta}{2g\sqrt{n+1}} \right)^2} \right), \quad (3.92)$$

a inversão atômica entre os estados  $|1, n\rangle \Leftrightarrow |0, n+1\rangle$  será:

$$W(t) = \cos^2 \left( tg\sqrt{n+1} \sqrt{1 + \left( \frac{\Delta}{2g\sqrt{n+1}} \right)^2} \right) + \frac{\left( \frac{\Delta}{2g\sqrt{n+1}} \right)^2}{1 + \left( \frac{\Delta}{2g\sqrt{n+1}} \right)^2} \text{sen}^2 \left( tg\sqrt{n+1} \sqrt{1 + \left( \frac{\Delta}{2g\sqrt{n+1}} \right)^2} \right) - \frac{1}{1 + \left( \frac{\Delta}{2g\sqrt{n+1}} \right)^2} \text{sen}^2 \left( tg\sqrt{n+1} \sqrt{1 + \left( \frac{\Delta}{2g\sqrt{n+1}} \right)^2} \right). \quad (3.93)$$

Na Figura (3.19) plotamos o gráfico de  $P_{g,n+1}(t)$  em função de  $\frac{\Delta}{2g\sqrt{n+1}}$ , enquanto que na Figura (3.20) plotamos  $P_{e,n}(t)$  em função de  $\frac{\Delta}{2g\sqrt{n+1}}$ . O comportamento destes gráficos são análogo ao descrito na situação onde o estado inicial do sistema composto é representado por  $|0, n\rangle$ . Entretanto uma diferença fundamental é encontrada no caso onde o sistema composto é expresso por  $|1, n\rangle$ , mesmo na ausência de fótons dentro da cavidade ( $n=0$ ), existe uma probabilidade não nula de ocorrer a transição entre os níveis energéticos, estas transições são chamadas de oscilações de Rabi do campo de vácuo [25] e não existe contrapartida clássica.

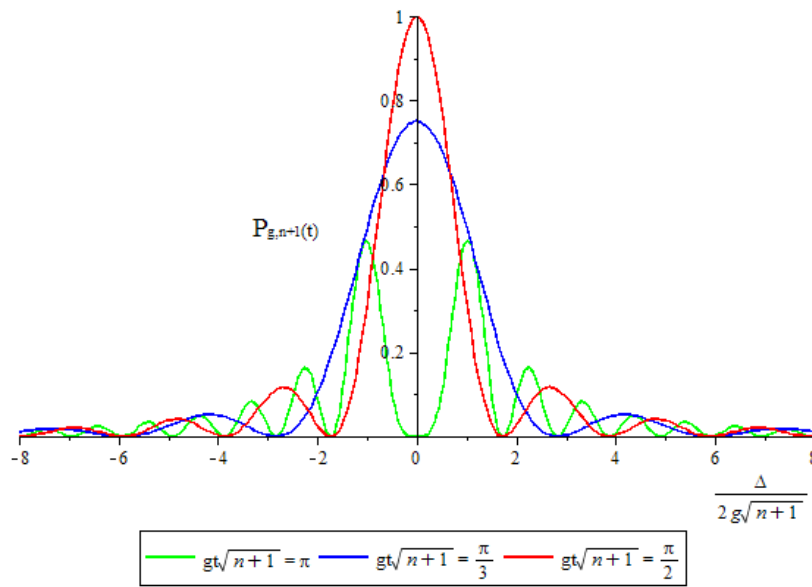


Figura 3.19:  $P_{g,n+1}(t)$  em função de  $\frac{\Delta}{2g\sqrt{n+1}}$

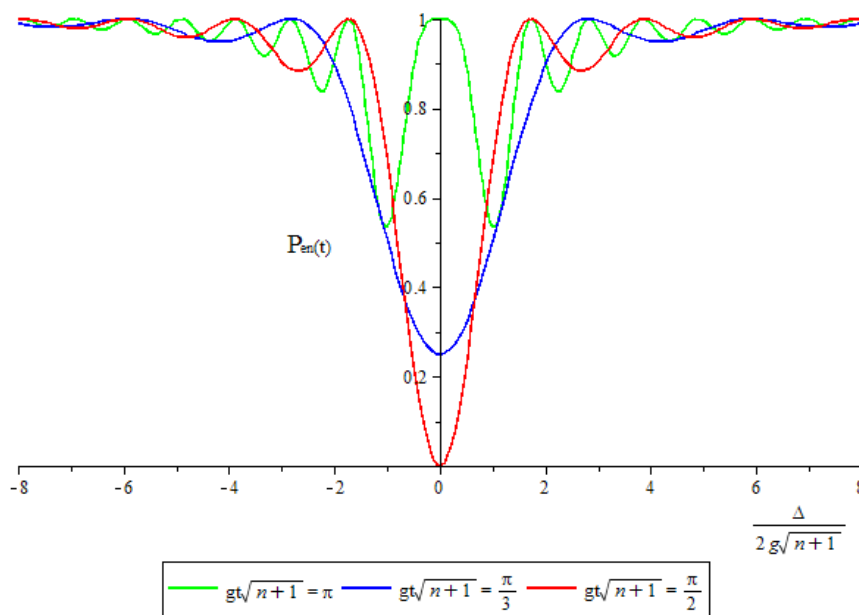


Figura 3.20:  $P_{e,n}(t)$  em função de  $\frac{\Delta}{2g\sqrt{n+1}}$

---

# SISTEMAS ABERTOS E DERIVAÇÃO DA EQUAÇÃO MESTRA

---

No âmbito da física e química as equações mestras são usadas para descrever a evolução de um sistema de interesse assumindo que, por força do modelo proposto, possa estar em um certo número de estados discretos possíveis, e onde evoca-se uma análise probabilística para descrever a dinâmica do referido sistema. As equações mestras são um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem, e como tal, sua resolução depende dos parâmetros iniciais. No âmbito das probabilidades precisamos assegurar qual é, dentre os possíveis estados do sistema, aquele em que o sistema foi inicialmente preparado, assumindo assim probabilidade máxima.

Entre as diversas aplicabilidades no âmbito da física, as equações mestras podem ser usadas na descrição de sistemas ópticos constituídos por  $N$  átomos de dois níveis. Este sistema foi inicialmente estudado por R. H. Dicke em 1954 [21], o qual previu que, sob certas circunstâncias, a taxa de radiação emitida é proporcional ao quadrado do número de átomos, tal fenômeno é intitulado de superradiância e foi observado experimentalmente por N. Skribanowitz *et al* [26]. A superradiância corresponde à emissão espontânea coletiva de um pulso eletromagnético gerado a partir de um *ensemble* de átomos de dois níveis inicialmente preparada no estado excitado, e que em virtude do acoplamento com o reservatório, decaem espontaneamente para o estado fundamental.

Neste capítulo deduziremos a equação mestra para um átomo de dois níveis interagindo com um reservatório térmico, nos limites da aproximação de Born e Markov. Estudaremos as evoluções das probabilidades de transições para os diferentes níveis do sistema, além de apresentar alguns dos efeitos provenientes da interação de um sistema atômico com o ambiente externo como decaimento atômico [27] e perda de coerência [28].

## 4.1 Equação mestra geral

As derivações apresentas nesta seção encontram-se em [29] e [9]. Como ponto de partida para a derivação da equação mestra, consideremos um sistema quântico simplesmente indicado por (S) interagindo com um reservatório (também chamado de ambiente ou banho de calor) representado pela letra (R), este por sua vez é modelado como um conjunto de osciladores harmônicos tendo infinitos graus de liberdade. Vamos denotar de  $H_S$  e  $H_R$  os hamiltonianos isolado do sistema (S) e do reservatório (R), respectivamente, e consideremos ainda que o hamiltoniano de interação entre o sistema e o reservatório seja representado por  $H_{SR}$ . Desta maneira o hamiltoniano do sistema composto será:

$$H = H_S + H_R + H_{SR} \equiv H_0 + H_{SR}, \quad (4.1)$$

onde  $H_0 = H_S + H_R$ .

O sistema composto é dito estar isolado quando suas partes constituintes estarão acopladas apenas umas às outras, de modo que a transferência de energia será apenas entre esses dois subsistemas. Vamos assumir que em  $t = 0$  conheçamos o estado do sistema (S) que é descrito por um operador densidade  $\rho_0^S$  e que o reservatório também seja descrito por um operador densidade nomeado de  $\rho_0^R$ , de tal maneira que o operador densidade do sistema composto em  $t = 0$  será  $\rho_{SR}(0) = \rho_0^S \otimes \rho_0^R$ .

O operador evolução temporal do sistema acoplado será  $U_0(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$ , sendo assim o operador densidade total e o hamiltoniano de interação serão descrito na representação de interação, respectivamente, como sendo:

$$\rho_{SR}^I(t) = U_0^\dagger \rho_{SR}(0) U_0(t) = \rho_I(t), \quad (4.2)$$

$$H_{SR}^I(t) = U_0^\dagger H_{SR} U_0(t) = H_I(t), \quad (4.3)$$

a equação de Liouville-Von Neumann na representação de interação [15] será expressa por:

$$\frac{\partial \rho_I(t)}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [H_I(t), \rho_I(t)]. \quad (4.4)$$

Integrando a Eq.(4.4) temos que:

$$\rho_I(t) = \rho_I(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' [H_I(t'), \rho_I(t')], \quad (4.5)$$

inserindo a Eq.(4.5) na Eq.(4.4) temos que:

$$\frac{\partial \rho_I(t)}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [H_I(t), \rho_I(0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' [H_I(t), [H_I(t'), \rho_I(t')]]. \quad (4.6)$$

Vamos considerar que o sistema composto, (S+R), possa ser sempre fatorizado, de maneira

que a qualquer tempo temos que:

$$\rho_I(t) = \rho_0^R \otimes \rho_S(t), \quad (4.7)$$

onde  $\rho_0^R$  é o estado estacionário do reservatório. A Eq.(4.7) corresponde à chamada aproximação de Born [17]. Esta aproximação equivale a dizer que o reservatório é infinitamente maior que o sistema e que o acoplamento entre (S) e (R) é muito fraco de modo que a perturbação sofrida no reservatório pelo sistema é irrelevante.

Uma vez calculada a evolução temporal do operador densidade do sistema composto,  $\rho_I(t)$ , a informação sobre o subsistema de interesse (S) ficará a cargo do operador densidade reduzido  $\rho_S(t)$ , que é obtido via o traço parcial sobre o operador composto  $\rho_I(t)$  com respeito aos estados pertencentes ao reservatório, ou seja:

$$\rho_S(t) = Tr_R[\rho_{SR}(t)]. \quad (4.8)$$

Desta maneira, tomando-se o traço parcial sobre os estados do reservatório, a Eq.(4.6) será expressa por:

$$\frac{\partial \rho_S(t)}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} Tr_R[H_I(t), \rho_I(0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' Tr_R[H_I(t), [H_I(t'), \rho_I(t')]], \quad (4.9)$$

onde  $\rho_S$  é o operador densidade reduzido na representação de interação. Inserindo a Eq.(4.7) na Eq.(4.9) temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_S(t)}{\partial t} = & -\frac{i}{\hbar} Tr_R[H_I(t), \rho_R(0) \otimes \rho_S(0)] - \\ & - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' Tr_R[H_I(t), [H_I(t'), \rho_R(0) \otimes \rho_S(t')]]. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Na próxima seção usaremos a Eq.(4.10) para a determinação da dinâmica de interação de um átomo de dois níveis com o campo de radiação aberta, apresentando os fenômenos: decaimento atômico espontâneo e perda de coerência entre os estados quânticos, fruto da interferência do ambiente sobre o sistema atômico.

## 4.2 Equação mestra para o átomo de dois níveis em contato com um reservatório térmico

Para avançar além da expressão geral apresentada na Eq.(4.10) e fornecer a equação das probabilidades de transição para sistemas abertos, precisamos especificar qual a natureza dos subsistemas envolvidos no acoplamento. Vamos considerar que o sistema (S) seja um átomo de dois níveis, onde novamente os estados  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  correspondam aos estado de mais baixa e mais alta energia respectivamente. Este sistema está interagindo

com um reservatório térmico (campo de radiação aberta), sendo assim o hamiltoniano que representa o átomo de dois níveis será:

$$H_S = \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z, \quad (4.11)$$

enquanto que o hamiltoniano para o reservatório térmico será expresso por:

$$H_R = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^{\dagger} b_{\mathbf{k}}. \quad (4.12)$$

Por fim, o hamiltoniano devido ao acoplamento entre o átomo e o campo na aproximação de dipolo e de onda girante será:

$$H_{SR} = \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}(b_{\mathbf{k}}\sigma_+ + b_{\mathbf{k}}^{\dagger}\sigma_-), \quad (4.13)$$

novamente evocaremos a álgebra bem conhecida dos operadores de Pauli de maneira que:

$$\begin{aligned} [\sigma_+, \sigma_-] &= \sigma_z, & [\sigma_z, \sigma_-] &= -2\sigma_-, \\ [\sigma_z, \sigma_+] &= 2\sigma_+. \end{aligned}$$

Os operadores  $b_{\mathbf{k}}^{\dagger}$  e  $b_{\mathbf{k}}$  (bosônicos), são os operadores de criação e aniquilação referentes ao reservatório criando e destruindo fótons com energia  $\hbar\omega_{\mathbf{k}}$ . Esses operadores obedecem às seguinte relações de comutação:

$$[b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}'}^{\dagger}] = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}, \quad [b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}'}] = 0, \quad [b_{\mathbf{k}}^{\dagger}, b_{\mathbf{k}'}^{\dagger}] = 0. \quad (4.14)$$

O hamiltoniano total do sistema composto é descrito por:

$$\begin{aligned} H &= H_S + H_R + H_{SR}, \\ H &= \frac{\hbar\omega_0}{2}\sigma_z + \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^{\dagger} b_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}(b_{\mathbf{k}}\sigma_+ + b_{\mathbf{k}}^{\dagger}\sigma_-), \end{aligned} \quad (4.15)$$

sendo assim, na representação de interação o hamiltoniano referente ao acoplamento será:

$$\begin{aligned} H_I(t) &= \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}(e^{\frac{i}{\hbar}H_R t} b_{\mathbf{k}} e^{-\frac{i}{\hbar}H_R t} e^{\frac{i}{\hbar}H_S t} \sigma_+ e^{-\frac{i}{\hbar}H_S t} + \\ &\quad + e^{\frac{i}{\hbar}H_R t} b_{\mathbf{k}}^{\dagger} e^{-\frac{i}{\hbar}H_R t} e^{\frac{i}{\hbar}H_S t} \sigma_- e^{-\frac{i}{\hbar}H_S t}) \\ &= \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}}(b_{\mathbf{k}}\sigma_+ e^{i(\omega_0 - \omega_{\mathbf{k}})t} + b_{\mathbf{k}}^{\dagger}\sigma_- e^{-i(\omega_0 - \omega_{\mathbf{k}})t}). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Substituindo a Eq.(4.16) na Eq.(4.10) encontramos a equação mestra para o átomo de dois níveis interagindo com o ambiente na representação de interação. Desta

maneira a equação mestra será expressa segue:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_S(t)}{\partial t} = & -i \sum_k g_k (e^{i(\omega_0 - \omega_k)t} \langle b_k \rangle_R [\sigma_+, \rho_S(0)] + e^{-i(\omega_0 - \omega_k)t} \langle b_k^\dagger \rangle_R [\sigma_-, \rho_S(0)]) + \\
& + \sum_{kk'} g_k g_{k'} \left\{ \int_0^t dt' e^{i(\omega_0 - \omega_k)t} e^{i(\omega_0 - \omega_{k'})t'} \langle b_k b_{k'} \rangle_R [\sigma_+, \sigma_+ \rho_S(t')] \right\} + \\
& + \sum_{kk'} g_k g_{k'} \left\{ \int_0^t dt' e^{i(\omega_0 - \omega_k)t} e^{i(\omega_0 - \omega_{k'})t'} \langle b_{k'} b_k \rangle_R [\rho_S(t') \sigma_+, \sigma_+] \right\} + \\
& + \sum_{kk'} g_k g_{k'} \left\{ \int_0^t dt' e^{-i(\omega_0 - \omega_k)t} e^{-i(\omega_0 - \omega_{k'})t'} \langle b_k^\dagger b_{k'}^\dagger \rangle_R [\rho_S(t') \sigma_-, \sigma_-] \right\} + \\
& + \sum_{kk'} g_k g_{k'} \left\{ \int_0^t dt' e^{-i(\omega_0 - \omega_k)t} e^{-i(\omega_0 - \omega_{k'})t'} \langle b_k^\dagger b_{k'}^\dagger \rangle_R [\sigma_-, \sigma_- \rho_S(t')] \right\} + \\
& + \sum_{kk'} g_k g_{k'} \left\{ \int_0^t dt' e^{i(\omega_0 - \omega_k)t} e^{-i(\omega_0 - \omega_{k'})t'} \langle b_k b_{k'}^\dagger \rangle_R [\sigma_+, \sigma_- \rho_S(t')] \right\} + \\
& + \sum_{kk'} g_k g_{k'} \left\{ \int_0^t dt' e^{-i(\omega_0 - \omega_k)t} e^{i(\omega_0 - \omega_{k'})t'} \langle b_{k'} b_k^\dagger \rangle_R [\rho_S(t') \sigma_+, \sigma_-] \right\} + \\
& + \sum_{kk'} g_k g_{k'} \left\{ \int_0^t dt' e^{-i(\omega_0 - \omega_k)t} e^{i(\omega_0 - \omega_{k'})t'} \langle b_k^\dagger b_{k'} \rangle_R [\sigma_-, \sigma_+ \rho_S(t')] \right\} + \\
& + \sum_{kk'} g_k g_{k'} \left\{ \int_0^t dt' e^{i(\omega_0 - \omega_k)t} e^{-i(\omega_0 - \omega_{k'})t'} \langle b_k^\dagger b_{k'} \rangle_R [\rho_S(t') \sigma_-, \sigma_+] \right\}. \quad (4.17)
\end{aligned}$$

Para um reservatório térmico o operador densidade será representado por:

$$\rho_R = \prod_{\mathbf{k}}^{\otimes} \left( 1 - e^{-\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{k_B T}} \right) e^{-\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}}}{k_B T}}, \quad (4.18)$$

onde  $k_B$  é a constante de Boltzmann e  $T$  é a temperatura absoluta da radiação. Sendo assim os valores médios dos operadores bosônicos para um reservatório em equilíbrio térmico serão:

$$\langle b_{\mathbf{k}}^\dagger \rangle_R = \langle b_{\mathbf{k}} \rangle_R = 0, \quad (4.19)$$

$$\langle b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}'}^\dagger \rangle_R = \langle b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}'} \rangle_R = 0, \quad (4.20)$$

$$\langle b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}'} \rangle_R = \langle n_{\mathbf{k}} \rangle_R \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} = \bar{n}_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}, \quad (4.21)$$

$$\langle b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}'}^\dagger \rangle_R = \langle n_{\mathbf{k}} + 1 \rangle_R \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} = (1 + \bar{n}_{\mathbf{k}}) \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}, \quad (4.22)$$

onde  $\bar{n}_{\mathbf{k}} = (e^{-\frac{\hbar \omega_{\mathbf{k}}}{k_B T}} - 1)^{-1}$  corresponde ao número médio de fótons com frequência  $\omega_{\mathbf{k}}$ . A partir dos valores médios apresentados nas Eq.(4.19), Eq.(4.20), Eq.(4.21) e Eq.(4.22), e

considerando a mudança de variável,  $\tau = t - t'$ , a equação mestra será:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_S(t)}{\partial t} = & - \sum_k g_k^2 \left\{ (\bar{n}_k + 1) \int_0^t d\tau [\sigma_+, \sigma_- \rho_S(t - \tau)] e^{i(\omega_0 - \omega_k)\tau} \right\} - \\
& - \sum_k g_k^2 \left\{ (\bar{n}_k + 1) \int_0^t d\tau [\rho_S(t - \tau) \sigma_+, \sigma_-] e^{-i(\omega_0 - \omega_k)\tau} \right\} - \\
& - \sum_k g_k^2 \left\{ \bar{n}_k \int_0^t d\tau [\sigma_-, \sigma_+ \rho_S(t - \tau)] e^{-i(\omega_0 - \omega_k)\tau} \right\} - \\
& - \sum_k g_k^2 \left\{ \bar{n}_k \int_0^t d\tau [\rho_S(t - \tau) \sigma_-, \sigma_+] e^{i(\omega_0 - \omega_k)\tau} \right\}. \tag{4.23}
\end{aligned}$$

Segundo a Eq.(4.23) o operador densidade  $\rho_S(t)$  depende do que aconteceu em um tempo anterior  $\rho_S(t - \tau)$ . Vamos eliminar a dependência sobre o tempo passado, realizando um processo conhecido como aproximação de Markov [17]. Nesta aproximação, assumimos que durante o tempo de evolução do sistema,  $\tau$ , o operador densidade do sistema muda muito mais lento do que o termo exponencial apresentado na Eq.(4.23) de modo que  $\rho_S(t - \tau) \approx \rho_S(t)$ . De maneira geral, os processos markovianos são processos nos quais as probabilidades futuras são valores aleatórios e sem memória, ou seja, a probabilidade de ocorrência de um evento futuro depende apenas do estado atual, sem apresentar qualquer dependência com os valores do passado. Levando em consideração a aproximação de Markov, a Eq.(4.23) se reduzirá para a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_S(t)}{\partial t} = & - \sum_k g_k^2 \left\{ (\bar{n}_k + 1) [\sigma_+, \sigma_- \rho_S(t)] \int_0^t d\tau e^{i(\omega_0 - \omega_k)\tau} \right\} - \\
& - \sum_k g_k^2 \left\{ (\bar{n}_k + 1) [\rho_S(t) \sigma_+, \sigma_-] \int_0^t d\tau e^{-i(\omega_0 - \omega_k)\tau} \right\} - \\
& - \sum_k g_k^2 \left\{ \bar{n}_k [\sigma_-, \sigma_+ \rho_S(t)] \int_0^t d\tau e^{-i(\omega_0 - \omega_k)\tau} \right\} - \\
& - \sum_k g_k^2 \left\{ \bar{n}_k [\rho_S(t) \sigma_-, \sigma_+] \int_0^t d\tau e^{i(\omega_0 - \omega_k)\tau} \right\}. \tag{4.24}
\end{aligned}$$

Vamos considerar que os modos podem ser considerados como um contínuo e fazer a seguinte substituição[9]:

$$\sum_{\mathbf{k}s} \rightarrow \left( \frac{L}{2\pi} \right)^3 \int d^3k, \tag{4.25}$$

onde  $d^3k = dk_x dk_y dk_z$  é o volume infinitesimal no espaço  $\mathbf{k}$ . Em coordenadas esféricas temos que  $d^3k = (\omega_k^2/c^3) d\omega_k \sin\theta d\theta d\phi$ . Podemos agora calcular o número de modos infinitesimais  $dN$  contidos em um volume  $V = L^3$  com uma frequência entre  $\omega_k$  e  $\omega_k + d\omega_k$ ,

desta maneira temos:

$$dN = 2 \left( \frac{L}{2\pi c} \right)^3 \omega_k^2 d\omega_k d\Omega = D(\omega_k) d\omega \quad (4.26)$$

onde  $D(\omega_k) \equiv \left( \frac{L^3 \omega_k^2}{\pi^2 c^3} \right)$  é chamada de função de densidade de modos, e o fator 2 na Eq.(4.26) é proveniente da existência de duas direções de polarização para cada vetor de onda  $\mathbf{k}$ .

Vamos considerar a seguinte relação [30]:

$$\int_0^\infty e^{\pm i(\omega_0 - \omega')\tau} d\tau = \pi \delta(\omega_0 - \omega') \pm iP \frac{1}{(\omega_0 - \omega')}, \quad (4.27)$$

onde  $P$  é o valor principal de Cauchy, e especificar o caso onde o reservatório térmico está em uma temperatura  $t \rightarrow 0$  o que equivale a  $\bar{n}_k \rightarrow 0$ .

Considerando a transição entre os modos discretos em uma distribuição contínua, assim com apresentada na Eq.(4.25), podemos definir dois novos parâmetros  $\Gamma$  e  $\Delta$  como:

$$\sum_k g_k^2 \pi \delta(\omega_0 - \omega_k) = \int g^2(\omega) D(\omega) \pi \delta(\omega_0 - \omega) \equiv \frac{\Gamma}{2}, \quad (4.28)$$

$$\sum_k g_k^2 \frac{P}{\omega_0 - \omega_k} = \Delta. \quad (4.29)$$

Com isso a equação mestra será expressa como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_S(t)}{\partial t} = & -\frac{\Gamma}{2} ([\sigma_+, \sigma_- \rho_S(t)] + [\rho_S(t) \sigma_+, \sigma_-]) - \\ & - i\Delta ([\sigma_+, \sigma_- \rho_S(t)] - [\rho_S(t) \sigma_+, \sigma_-]). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Podemos representar a Eq.(4.30) na representação de Schrödinger de maneira que:

$$\frac{\partial \rho_S^s(t)}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [H_0, \rho_S^s] + U_0 \frac{\partial \rho_S(t)}{\partial t} U_0^\dagger, \quad (4.31)$$

onde  $\rho_S^s$  corresponde ao operador densidade na representação de Schrödinger. Sendo assim:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_S^s(t)}{\partial t} = & -i \left( \frac{\omega_0}{2} + \Delta \right) [\sigma_+ \sigma_-, \rho_S^s] + \frac{i\omega_0}{2} [\sigma_- \sigma_+, \rho_S^s] - \\ & - \frac{\Gamma}{2} (\sigma_+ \sigma_- \rho_S^s + \rho_S^s \sigma_+ \sigma_- - 2\sigma_- \rho_S^s \sigma_+). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Segundo a Eq.(4.32), o parâmetro  $\Delta$  combina com a frequência de transição atômica  $\omega_0$  e representa uma mudança nos níveis de energia do átomo, esta mudança corresponde ao chamado "*Lamb shift*" ([31] e [17]).

A partir da Eq.(4.32), a equação do movimento para a coerência  $\rho_{ge}$  será:

$$\frac{\partial \rho_{ge}(t)}{\partial t} = i(\omega_0 + \Delta)\rho_{ge} - \frac{\Gamma}{2}\rho_{ge} \quad (4.33)$$

cuja solução será:

$$\rho_{ge}(t) = \rho_{ge}(0)e^{-\frac{\Gamma}{2}t}e^{i(\omega_0+\Delta)t} \quad (4.34)$$

onde  $\rho_{ge}(0)$  é a coerência inicial entre os estados atômicos. Vemos que a coerência é fortemente influenciada pelos fatores  $\Gamma$  e  $\Delta$ . Neste sentido, caso o estado inicial do átomo seja uma superposição dos estados  $|1\rangle$  e  $|0\rangle$  vemos que o acoplamento do sistema atômico com o reservatório térmico é responsável pela perda de coerência entre os estados. Logo, o reservatório é entendido com uma fonte de decoerência. Uma revisão detalhada sobre decoerência pode ser encontrado em [32].

Vamos considerar um caso mais específico onde o átomo esteja inicialmente preparado no estado excitado  $|1\rangle$  de maneira que  $\rho_{ee}(0) = 1$  e, conseqüentemente,  $\rho_{gg} = 0$ . Com isso as equações do movimento para as probabilidade dos estados  $|1\rangle$  e  $|0\rangle$  serão respectivamente:

$$\rho_{ee}(t) = e^{-\Gamma t}, \quad (4.35)$$

$$\rho_{gg}(t) = 1 - e^{-\Gamma t}. \quad (4.36)$$

Apresentamos na Figura (4.1) as probabilidade de encontrar o átomo nos estados  $|1\rangle$  e  $|0\rangle$ . Vemos que a probabilidade de se determinar o átomo no estado excitado decai exponencialmente, enquanto a probabilidade associada ao estado  $|0\rangle$  tende à assumir o valor máximo. Por fim, segundo as Eq.(4.35) e Eq.(4.36) podemos fornecer uma interpretação física para o coeficiente  $\Gamma$  que, neste caso, corresponde à taxa de decaimento espontâneo irreversível entre os níveis  $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$ .

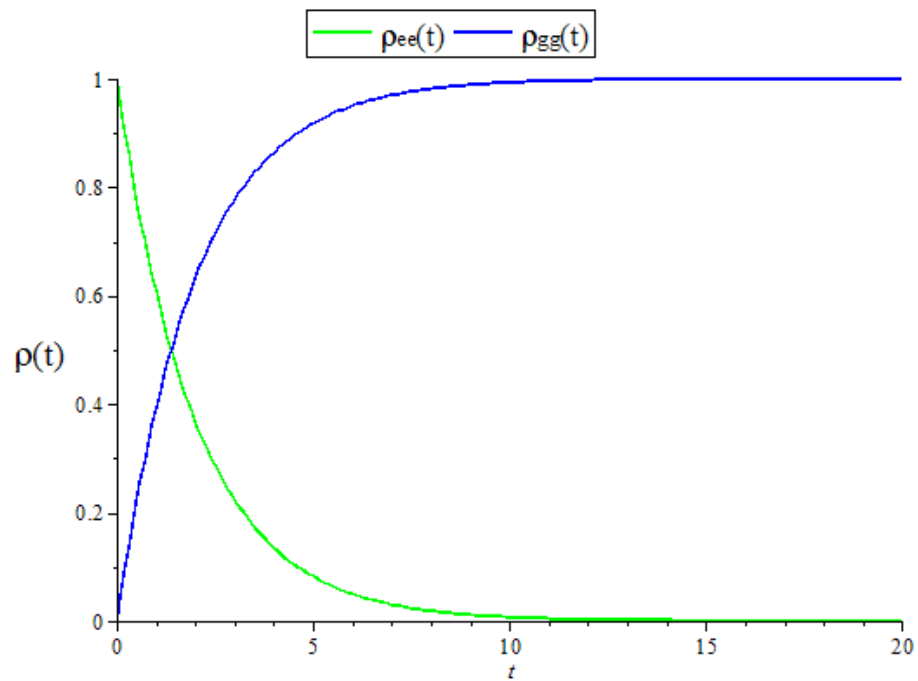


Figura 4.1: Probabilidades de ocupação dos estados  $|1\rangle$  e  $|0\rangle$  em função de  $\Gamma t$ .

---

# FENÔMENOS RELACIONADOS À ÓPTICA QUÂNTICA

---

Neste capítulo retomaremos a discussão acerca do átomo de três níveis na configuração  $\Lambda$ , abordando os fenômenos da EIT e dos estados escuros conforme havia sido adiantado na seção (3.2). Sendo assim, apresentaremos um formalismo mais geral sobre a interação entre o campo eletromagnético e o átomo de três níveis recorrendo ao emprego dos operadores densidades juntamente com a utilização da equação mestra, evidenciando a influência que o meio ambiente exerce sobre o sistema atômico. Mais detalhes sobre a descrição dos fenômenos da EIT e dos estados escuros são apresentados em ([33] e [34]).

## 5.1 Estados Escuros

Iniciaremos este capítulo com a apresentação do fenômeno intitulado Estados Escuros, cuja primeira observação experimental foi apresentada por Alzetta em 1976 (vide referencia [35]). Neste fenômeno o sistema atômico na configuração  $\Lambda$  é levado para um estado em que a probabilidade de absorção dos campos elétricos (ou excitação dos átomos) é nula. Segundo Alzetta a explicação para tal fenômeno é a interferência destrutiva entre os campos clássicos que incidem sobre o átomo.

A Figura (5.1) representa o sistema atômico contendo três níveis de energia na configuração  $\Lambda$  sujeito a dois campos clássicos  $\mathbf{E}_p$  e  $\mathbf{E}_c$ , conforme havíamos mencionado na seção (3.2). Os estados  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$  (estados fundamentais), estão acoplados ao estado de mais alta energia (estado excitado),  $|3\rangle$ . Nesta configuração  $\Omega_p$  é definido como a frequência de Rabi do campo de prova (referente as transições  $|3\rangle \Leftrightarrow |1\rangle$ ), cuja frequência do campo incidente é  $\omega_p$ . De maneira análoga,  $\Omega_c$  é a frequência de Rabi do campo de controle (transições  $|3\rangle \Leftrightarrow |2\rangle$ ), cuja frequência é  $\omega_c$ . Os valores de  $\Gamma_{31}$  e  $\Gamma_{32}$  correspondem às taxas de decaimento espontâneo entre os níveis  $|3\rangle \Leftrightarrow |1\rangle$  e  $|3\rangle \Leftrightarrow |2\rangle$  respectivamente,  $\Delta_1$  e  $\Delta_2$  correspondem as dessintonias referente as transições  $|3\rangle \Leftrightarrow |1\rangle$

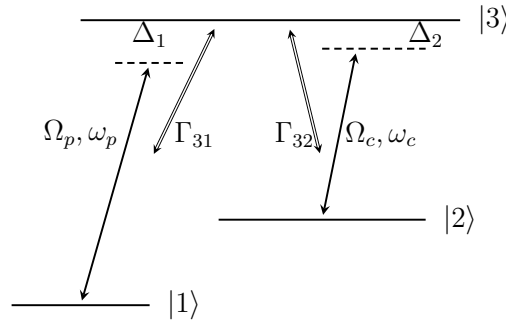


Figura 5.1: Diagrama dos níveis de energias envolvidos na configuração  $\Lambda$ .

e  $|3\rangle \Leftrightarrow |2\rangle$ , respectivamente. A resolução da equação de Schrödinger para o hamiltoniano dependente do tempo apresentado na Eq.(3.19), leva a sistemas de equações diferenciais mais complexos e difíceis de serem resolvidos analiticamente. Nesses casos as soluções numéricas são um método mais apropriado, e muitas vezes, mais praticado na análise dos sistemas complexos. Em vista deste fato, sobre certas aproximações, podemos simplificar o sistema de equações e determinar soluções analíticas.

A diagonalização do hamiltoniano apresentado na Eq.(3.20), levará à determinação dos autoestados e dos respectivos autovalores. Para este fim, convém representar o hamiltoniano na notação matricial. Utilizando como base os auto estados do átomo  $|1\rangle$ ,  $|2\rangle$  e  $|3\rangle$ :

$$H^I = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Omega_p \\ 0 & -(\Delta_1 - \Delta_2) & \Omega_c \\ \Omega_p & \Omega_c & -\Delta_1 \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

Adotando a aproximação onde  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$  temos que o hamiltoniano será:

$$H^I = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Omega_p \\ 0 & 0 & \Omega_c \\ \Omega_p & \Omega_c & -\Delta_1 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

os autovalores serão:

$$E_0 = 0, \quad (5.3)$$

$$E_+ = [\Delta + \sqrt{\Delta^2 + \Omega_p^2 + \Omega_c^2}], \quad (5.4)$$

$$E_- = [\Delta - \sqrt{\Delta^2 + \Omega_p^2 + \Omega_c^2}], \quad (5.5)$$

enquanto os respectivos autoestados serão:

$$|a_0\rangle = \cos(\theta) |1\rangle - \sin(\theta) |2\rangle, \quad (5.6)$$

$$|a_+\rangle = \sin(\theta)\sin(\phi) |1\rangle + \cos(\theta)\sin(\phi) |2\rangle + \cos(\phi) |3\rangle, \quad (5.7)$$

$$|a_-\rangle = \sin(\theta)\cos(\phi) |1\rangle + \cos(\theta)\cos(\phi) |2\rangle - \sin(\phi) |3\rangle, \quad (5.8)$$

sendo  $\tan(\theta) = \frac{\Omega_p}{\Omega_c}$  e  $\tan(2\phi) = \frac{\sqrt{\Omega_p^2 + \Omega_c^2}}{\Delta}$ . Temos que o autoestado que possui energia zero não contém o estado excitado  $|3\rangle$  (este estado é responsável por emissão espontânea para os estados  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$  com suas respectivas taxas de decaimento). Sendo assim o estado  $|a_0\rangle$  é chamado de estado escuro enquanto os estados  $|a_{\pm}\rangle$  são chamados de estados claros. Portanto, o estado  $|a_0\rangle$  aparece devido a interação do átomo com o campo clássico, e não se altera em virtude de não possuir evolução temporal. As probabilidades referentes aos estados  $|1\rangle$ ,  $|2\rangle$  e  $|3\rangle$  para um sistema preparado no estado  $|a_0\rangle$  será:

$$|c_1|^2 = \cos^2(\theta) = \frac{\Omega_c^2}{\Omega_p^2 + \Omega_c^2}, \quad (5.9)$$

$$|c_2|^2 = \sin^2(\theta) = \frac{\Omega_p^2}{\Omega_p^2 + \Omega_c^2}, \quad (5.10)$$

$$|c_3|^2 = 0. \quad (5.11)$$

Desta maneira, temos que a população atômica fica aprisionada nos estados fundamentais do átomo na configuração  $\Lambda$ . Tal fenômeno é intitulado de aprisionamento coerente da população: "*Coherent Population Trapping (CPT)*". O CPT é um fenômeno óptico conhecido em meados 1976 [35] e revisado mais recentemente por E. Arimondo [36]. Experimentalmente, em átomo de metais alcalinos, este efeito é alcançado quando ocorrer uma coerência entre os dois níveis fundamentais. Tal alcance é proveniente do acoplamento de dois laser com um estado excitado comum (Figura 5.1). Quando a exata ressonância é alcançada, o estado do átomo é levado à uma superposição coerente entre os dois níveis fundamentais, não absorvendo mais a radiação incidente [36]. A transição entre os dois níveis  $|1\rangle \Leftrightarrow |2\rangle$  na configuração  $\Lambda$  é proibida, por regra de seleção de paridade, por esse motivo a coerência entre os estados atômicos fundamentais tem um longo tempo de vida.

### 5.1.1 Análise das intensidades do campo

No que diz respeito aos valores das intensidades das frequências de Rabi devemos considerar algumas situações particulares. Listamos abaixo quatro circunstâncias específicas que refletem a dinâmica de interação entre o campo e o átomo, e são elas:

1.  $\Omega_p = 0$  e  $\Omega_c \neq 0$  ou  $\Omega_c = 0$  e  $\Omega_p \neq 0$ : Um caso particular ocorre quando uma das duas frequências de Rabi ( $\Omega_{c,p}$ ) são zero. Para o caso onde  $\Omega_p = 0$  e  $\Omega_c \neq 0$  o estado

escuro será  $|1\rangle$ , enquanto que para o caso onde  $\Omega_c = 0$  e  $\Omega_p \neq 0$  o estado escuro será  $|2\rangle$ .

2.  $|\Omega_p| \ll |\Omega_c|$ : Neste caso  $\tan(\theta) \cong 0$ . Com esta aproximação os autoestados se transformam em:

$$|a_0\rangle \cong |1\rangle, \quad (5.12)$$

$$|a_+\rangle \cong \sin(\phi) |2\rangle + \cos(\phi) |3\rangle, \quad (5.13)$$

$$|a_-\rangle = -\cos(\phi) |2\rangle - \sin(\phi) |3\rangle, \quad (5.14)$$

nesta situação o estado escuro é o autoestado  $|a_0\rangle \cong |1\rangle$ . Dessa maneira, quando o átomo for preparado neste estado ele permanecerá em  $|1\rangle$  em virtude da absorção ser nula. Na próxima seção verificaremos que a condição ( $|\Omega_p| \ll |\Omega_c|$ ) é necessária para que o sistema atômico manifeste EIT.

No limite onde  $\Delta \rightarrow 0$ ,  $\tan(2\phi) = \frac{\sqrt{\Omega_p^2 + \Omega_c^2}}{\Delta} \rightarrow \infty$  e  $\phi \rightarrow \frac{\pi}{4}$ . Os autoestados ficam sendo:

$$|a_0\rangle \cong |1\rangle, \quad (5.15)$$

$$|a_+\rangle \cong \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle + |3\rangle), \quad (5.16)$$

$$|a_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle - |3\rangle), \quad (5.17)$$

3.  $|\Omega_p| \gg |\Omega_c|$ : Temos que  $\tan(\theta) = \frac{\Omega_p}{\Omega_c} \rightarrow \infty$  e  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ . Considerando ainda a situação onde  $\Delta \rightarrow 0$ ,  $\tan(2\phi) = \frac{\sqrt{\Omega_p^2 + \Omega_c^2}}{\Delta}$  e  $\phi \rightarrow \frac{\pi}{4}$ . Com isso os autoestados se transformam em:

$$|a_0\rangle \cong |2\rangle, \quad (5.18)$$

$$|a_+\rangle \cong \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |3\rangle), \quad (5.19)$$

$$|a_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |3\rangle), \quad (5.20)$$

neste caso o estado escuro será  $|2\rangle$ .

4.  $|\Omega_p| \approx |\Omega_c|$ : Ambos os campos tem a mesma intensidade, de maneira que  $\tan(\theta) = 1$

com isso  $\cos(\theta) = \sin(\theta)$ . Com isso os autoestado serão:

$$|a_0\rangle \cong \frac{1}{\sqrt{2}}[|1\rangle - |2\rangle], \quad (5.21)$$

$$|a_+\rangle \cong \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin(\phi)|1\rangle + \sin(\phi)|2\rangle + \cos(\phi)|3\rangle), \quad (5.22)$$

$$|a_-\rangle \cong \frac{1}{\sqrt{2}}[\cos(\phi)|1\rangle + \cos(\phi)|2\rangle - |3\rangle], \quad (5.23)$$

no contexto de dessintonia nula ( $\Delta = 0$ ),  $\tan(2\phi) \rightarrow \infty$  e  $\phi = \frac{\pi}{4}$  temos:

$$|a_0\rangle \cong \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle), \quad (5.24)$$

$$|a_+\rangle \cong \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle) \right], \quad (5.25)$$

$$|a_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle - |3\rangle) \right], \quad (5.26)$$

a aproximação de que  $|\Omega_p| \approx |\Omega_c|$  é suficiente para o fenômeno do CPT, já que neste caso a população atômica fica aprisionada nos estados  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$ .

## 5.2 Transparência Eletromagneticamente Induzida

A primeira observação experimental da EIT em um sistema de três níveis na configuração  $\Lambda$  foi feita por Harris [37], [38], por quem o próprio termo EIT foi inicialmente cunhado. Neste experimento foi verificado que devido à interferência quântica gerada ao incidir um laser de controle juntamente com um laser de bombeio em uma amostra atômica, a resposta óptica do material é modificada ocasionando mudanças no índice de refração do material e no valor da absorção da radiação.

No que diz respeito à aplicabilidade do fenômeno da EIT, podemos citar a construção de magnetômetros usados para a detecção de campos magnéticos de baixa intensidade com alta precisão [39], [40] e a construção de um transistor óptico quântico [41], no qual a passagem dos fótons é controlada unicamente por um outro feixe de fótons. Nestes dispositivos as situações "luz liberada" e "luz interrompida" funcionam como códigos binários análogos ao comportamento dos transistores eletrônicos.

As alterações das propriedades ópticas do material são dadas pela suscetibilidade elétrica de primeira ordem  $\chi_e^{(1)}$  obtida a partir da equação da polarização [7]. A parte real de  $\chi_e^{(1)}$  esta relacionada ao índice de refração do meio e a parte imaginária está associada à absorção. Assim, temos:

$$\text{Re}(\chi_e^{(1)}) = n, \quad \text{Im}(\chi_e^{(1)}) = \text{absorção}. \quad (5.27)$$

A polarização elétrica é expressa como:

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E} = - \sum_i \frac{\langle \mathbf{e} \mathbf{r}_i \rangle}{V} = \frac{N}{V} \text{Tr}(\rho \mathbf{d}), \quad (5.28)$$

onde  $\mathbf{E}$  é o campo elétrico clássico que incide sobre amostra,  $N$  corresponde ao número de átomos delimitado por um volume  $V$  e  $\mathbf{d}$  é o operador momento de dipolo.

Segundo o formalismo apresentado na seção (2.4), o operador densidade é descrito como  $\rho = \sum_i |\psi_i(t)\rangle\langle\psi_i(t)|$ . Desta maneira, o operador densidade na representação de Schrödinger será:

$$\begin{aligned} \rho = & \rho_{11} |1\rangle\langle 1| + \rho_{22} |2\rangle\langle 2| + \rho_{33} |3\rangle\langle 3| + \\ & + (\rho_{21} e^{-i\omega_{21}t} |2\rangle\langle 1| + \rho_{31} e^{-i\omega_{31}t} |3\rangle\langle 1| + \rho_{32} e^{-i\omega_{32}t} |3\rangle\langle 2| + h.c.), \end{aligned} \quad (5.29)$$

cujos valores  $\omega_{21}$ ,  $\omega_{31}$  e  $\omega_{32}$  correspondem as frequências de transições entre os níveis  $|2\rangle \Leftrightarrow |1\rangle$ ,  $|3\rangle \Leftrightarrow |1\rangle$  e  $|3\rangle \Leftrightarrow |2\rangle$ , respectivamente, e os termos  $\rho_{ij}$  são os elementos de matriz do operador densidade.

Ao introduzir a relação de completeza no operador momento de dipolo, e considerando que as transições permitidas na configuração  $\Lambda$  sejam  $|1\rangle \Leftrightarrow |3\rangle$  e  $|2\rangle \Leftrightarrow |3\rangle$ , o operador momento de dipolo será representado por:

$$\mathbf{d} = d_{13} |1\rangle\langle 3| + d_{23} |2\rangle\langle 3| + h.c., \quad (5.30)$$

onde  $d_{13} = \langle 1|\mathbf{d}|3\rangle$  e  $d_{23} = \langle 2|\mathbf{d}|3\rangle$  são os elementos de matriz do operador densidade e *c.c.* faz referência ao complexo conjugado. Sendo assim, a polarização da amostra atômica será expressa por:

$$P = \frac{N}{V} (d_{13} \rho_{31} e^{-i\omega_{31}t} + d_{23} \rho_{32} e^{-i\omega_{32}t} + c.c.), \quad (5.31)$$

onde *c.c.* é o complexo conjugado. Os elementos  $\rho_{23}$  e  $\rho_{13}$  podem ser obtidos via equação de Liouville-Von Neumann [34]:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} = & -i[H^I, \rho] + \Gamma_{31}(2\sigma_{13}\rho\sigma_{31} - \sigma_{33}\rho - \rho\sigma_{33}) + \\ & + \Gamma_{32}(2\sigma_{23}\rho\sigma_{32} - \sigma_{33}\rho - \rho\sigma_{33}), \end{aligned} \quad (5.32)$$

onde usamos  $\hbar = 1$  para efeito de simplificação de cálculos. Usando o hamiltoniano independente do tempo na configuração  $\Lambda$ , conforme havíamos apresentado na Eq.(3.20),

a equação mestra será:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} = & -i \left\{ [\Delta_1 \sigma_{33} + (\Delta_1 - \Delta_2) \sigma_2] \rho - \left( \frac{\Omega_p}{2} \sigma_{31} + \frac{\Omega_p}{2} \sigma_{31} + h.c. \right) \rho \right\} \\ & + i \left\{ \rho [\Delta_1 \sigma_{33} + (\Delta_1 - \Delta_2) \sigma_2] - \rho \left( \frac{\Omega_p}{2} \sigma_{31} + \frac{\Omega_p}{2} \sigma_{31} + h.c. \right) \right\} \\ & + \frac{\Gamma_{31}}{2} (2\sigma_{13} \rho \sigma_{31} - \sigma_{33} \rho - \rho \sigma_{33}) + \frac{\Gamma_{32}}{2} (2\sigma_{23} \rho \sigma_{32} - \sigma_{33} \rho - \rho \sigma_{33}). \end{aligned} \quad (5.33)$$

Interessados em identificar os termos relevantes para o cálculo da polarização, devemos calcular os termos  $\rho_{31}$ ,  $\rho_{23}$  e  $\rho_{21}$  e considerar o regime assintótico <sup>1</sup> ( $\rho_{ij} = 0$ ). Dessa maneira os elementos de matriz do operador densidade serão:

$$\rho_{31} = \frac{i}{(i\Delta_1 + \Gamma_{31} + \Gamma_{32})} [-\Omega_p \rho_{33} + \Omega_p \rho_{11} + \Omega_c \rho_{21}], \quad (5.34)$$

$$\rho_{32} = \frac{i}{(i\Delta_2 + \Gamma_{31} + \Gamma_{32})} [-\Omega_p \rho_{33} + \Omega_p \rho_{12} + \Omega_c \rho_{22}], \quad (5.35)$$

$$\rho_{12} = -\frac{i}{[i(\Delta_1 - \Delta_2)]} (\Omega_p \rho_{32} - \Omega_c \rho_{13}). \quad (5.36)$$

Usaremos as Eq.(5.34), Eq.(5.35) e Eq.(5.36) no limite de  $|\Omega_p| \ll |\Omega_c|$ , a fim de identificar os elementos de matriz do operador densidade que serão usados na determinação da polarização.

### 5.2.1 Dinâmica do sistema

Conforme havíamos adiantado na seção anterior, o caso onde  $|\Omega_p| \ll |\Omega_c|$  é necessária para que o sistema atômico manifeste EIT, além de que, no regime assintótico, o estado escuro será  $|1\rangle$ . Com isso, teremos que  $\rho_{11} \cong 1$  e  $\rho_{22} \cong \rho_{33} \cong 0$ . Usando essas condições nas Eq.(5.34), Eq.(5.35) e Eq.(5.36) temos:

$$\rho_{12} \cong -\frac{i\Omega_c}{i(\Delta_2 - \Delta_1)} \rho_{13}, \quad (5.37)$$

$$\rho_{31} \cong \frac{i}{\gamma_{31} + i\Delta_1} (\Omega_p + \Omega_c \rho_{21}), \quad (5.38)$$

$$\rho_{32} \cong \frac{i\Omega_p}{\gamma_{32} + i\Delta_2} \rho_{12}, \quad (5.39)$$

<sup>1</sup>Estado estacionário atingido após findar as transições entre os níveis energéticos.

onde  $\gamma_{31} = \Gamma_{31} + \Gamma_{32}$  e  $\gamma_{32} = \Gamma_{31} + \Gamma_{32}$ . Substituindo  $\rho_{12} = \rho_{21}^*$  em  $\rho_{31}$  e  $\rho_{32}$  temos:

$$\rho_{31} = -\frac{i\Omega_p[i(\Delta_2 - \Delta_1)]}{(i\Delta_1 + \gamma_{31})[-i(\Delta_2 - \Delta_1)] + \Omega_c^2}, \quad (5.40)$$

$$\rho_{32} = -\frac{1}{i\Delta_2 + \gamma_{32}} \left[ \frac{i\Omega_p^2\Omega_c}{(-i\Delta_1 + \gamma_{31})[i(\Delta_2 - \Delta_1)] + \Omega_c^2} \right]. \quad (5.41)$$

Substituindo a Eq.(5.40) e a Eq.(5.41) na Eq.(5.31) a expressão para a polarização será:

$$P = \frac{N}{V} \left[ d_{13} \frac{-i\Omega_p[i(\Delta_2 - \Delta_1)]}{(i\Delta_1 + \gamma_{31})[-i(\Delta_2 - \Delta_1)] + \Omega_c^2} e^{i\Delta_1 t} e^{-i\omega_1 t} + c.c. \right] - \frac{N}{V} \left[ \frac{d_{23}}{[i\Delta_2 + \gamma_{32}]} \left( \frac{i\Omega_p^2\Omega_c}{(-i\Delta_1 + \gamma_{31})[i(\Delta_2 - \Delta_1)] + \Omega_c^2} \right) e^{i\Delta_2 t} e^{-i\omega_3 t} + c.c. \right], \quad (5.42)$$

considerando  $\Delta_1 = \omega_{31} - \omega_p$  e  $\Delta_2 = \omega_{32} - \omega_c$  e definindo que  $\Delta = \Delta_1$  e  $\delta = \Delta_1 - \Delta_2$  temos que a expressão para a polarização será:

$$P = \frac{N}{V} \left[ d_{13} \frac{i\Omega_p[i\delta]}{(i\Delta + \gamma_{31})[i\delta] + \Omega_c^2} e^{-i\omega_p t} + c.c. \right] - \frac{N}{V} \left[ \frac{d_{23}}{[i(\Delta - \delta) + \gamma_{32}]} \left( \frac{i\Omega_p^2\Omega_c}{(-i\Delta + \gamma_{31})[-i\delta] + \Omega_c^2} \right) e^{-i\omega_c t} + c.c. \right]. \quad (5.43)$$

Sabemos que  $E = E_p e^{-i\omega_p t} + E_c e^{-i\omega_c t} + c.c.$ , a resposta do meio ao campo de prova,  $[\mathbf{E}_p(t)]$ , é proporcional ao termo  $e^{-i\omega_p t}$ . Como  $\Omega_p = \frac{d_{13}E_p}{\epsilon_0}$  vemos que a expressão para a suscetibilidade será

$$\chi_e^{(1)} = \frac{|d_{13}|^2 N/V}{\epsilon_0} \frac{i(i\delta)}{(i\Delta + \gamma_{31})(i\delta) + \Omega_c^2}. \quad (5.44)$$

Apresentamos na Figura (5.2) o gráfico da parte imaginária de  $\chi_e^{(1)}$ . Note que para o caso onde o campo de controle,  $\Omega_c$ , é nulo temos que a absorção é máxima para a dessintonia nula e que para o caso onde o campo de controle estiver ligado temos que a absorção é nula na dessintonia nula, fato esse que caracteriza o fenômeno da EIT.

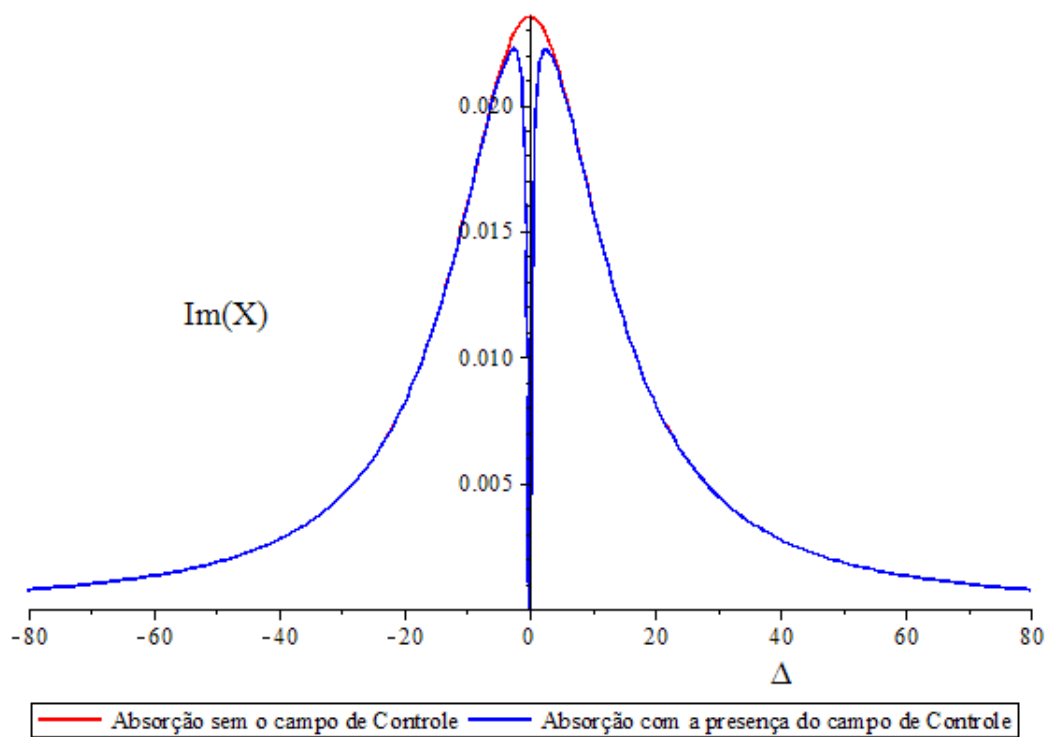


Figura 5.2: Parte imaginária de  $\chi_e^{(1)}$ , que está relacionada à absorção do meio, *versus* a dessintonia  $\Delta$ .

---

## CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS

---

Nesta dissertação apresentamos ao longo do capítulo 2 alguns conceitos fundamentais referentes à óptica quântica, abordando assuntos como a quantização do campo eletromagnético e os estados de Fock. Vimos as propriedades dos estados de Dicke e sua importância para a descrição dos estados quânticos de um *ensemble* de átomos.

No capítulo 3 foi estudada a derivação do hamiltoniano responsável pelo acoplamento entre o átomo e o campo obtido a partir da chamada aproximação de dipolo. Estudamos a interação do átomo de dois níveis com um campo clássico e apresentamos as evoluções das probabilidades de ocupação dos níveis de energia.

Recorrendo à natureza quântica da luz, derivamos o modelo de Jaynes-Cummings (JCM) e analogamente à descrição semiclássica calculamos as evoluções das probabilidades de transições entre os níveis energéticos. Por fim, apresentamos um formalismo para a descrição de sistemas atômicos com mais do que dois níveis de energia. Esse formalismo foi usado para a derivação do hamiltoniano do sistema de três níveis na configuração  $\Lambda$ .

Apresentamos no capítulo 4 as etapas necessárias para a derivação da equação mestra de um átomo de dois níveis interagindo com um reservatório térmico nos limites das aproximações de Born e Markov, estudando as evoluções das probabilidades de transição entre os dois níveis de energia. Apresentamos os efeitos de decaimento atômico e a perda de coerência. Por fim, ao longo do capítulo 5 apresentamos quais são as condições necessárias para que um sistema óptico com três níveis de energia na configuração  $\Lambda$  manifeste os fenômenos da EIT, CPT e Estados Escuros.

As perspectivas vindouras serão no sentido de estender a análise feita aos sistema de três níveis na configuração  $\Lambda$ , para *ensemble* de átomos de três níveis e estudar a possibilidade de que essas amostras atômicas manifestem os fenômenos da EIT, CPT, Estados Escuros e resposta negativa.

---

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

- [1] Aspect, A. et al., *Physical Review Letters* **49** (1982) 91.
- [2] Cirac, J. I. and Zoller, P., *Physical Review Letters* **74** (1995) 4091.
- [3] Ekert, A. K., *Physical Review Letters* **67** (1991) 661.
- [4] Bennett, C. H. et al., *Physical Review Letters* **70** (1993) 1895.
- [5] Villas-Boas, C. J. et al., *Quantum Information Processing* **15** (2016) 2021.
- [6] Assis, R. J. et al., *Phys. Rev. A* **96** (2017) 013821.
- [7] Jackson, J. D., *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, INC., 1999.
- [8] Gerry, C. and Knight, P., *Introductory quantum optics*, Cambridge university press, 2005.
- [9] Lambropoulos, P. and Petrosyan, D., *Fundamentals of Quantum Optics and Quantum Information*, Springer, 2007.
- [10] Walther, H. et al., *Nature* **403** (2000) 743.
- [11] Hofheinz, M. et al., *Nature* **454** (2008) 310.
- [12] Lamb, J. et al., *Physical Review* **72** (1947) 241.
- [13] Casimir, H. B. G., *Proceedings of the KNAW* **51** (1948) 793.
- [14] Klimov, A. B. and Chumakov, S. M., *A Group-Theoretical Approach to Quantum Optics*, WILEY-VCH, 2009.
- [15] Sakurai, J. and Napolitano, J., *Mecânica Quântica Moderna*, Bookman, 2013.
- [16] Scully, M. O. and Zubairy, M. S., *Quantum Optics*, Cambridge University Press, 1997.
- [17] Ficek, Z. and Wahiddin, M. R., *Quantum Optics for Beginners*, Number Pg.15, Taylor & Francis Group, 2014.

- [18] Allen, L. and Eberly., J. H., *Optical Resonance and Two-Level Atoms*, Wiley, New York, 1975, 1975.
- [19] S.Hussein, M. and R.A.Salinas, S., *100 anos de física quântica*, Livraria da Física, 2002.
- [20] Jaynes, E. and Cummings, F., *Proceedings of the IEEE* **51** (1963) 89.
- [21] Dicke, R. H., *Phys. Rev.* **93** (1954) 99.
- [22] Eberly, J. H. et al., *Physical Review Letters* **44** (1980) 1323.
- [23] Haroche, S. and Raimond, J., (1985) 347.
- [24] Buck, B. and Sukumar, C., *Physics Letters A* **81** (1981) 132.
- [25] Mondragon, J. S. et al., *Physical Review Letters* **51** (1983) 550.
- [26] Skribanowitz, N. et al., *Physical Review Letters* **30** (1973) 309.
- [27] Weisskopf, V. and Wigner, E., *Physik* **63** (1930) 54.
- [28] Zurek, W. H., *Physics Today* **44** (1991) 36.
- [29] Yoshida, A. C., *Equação mestra não-linear aplicada ao estudo de biestabilidade Óptica*, Master's thesis, Universidade Federal de São Carlos, 2004.
- [30] kudlaszyk, A. K. and Tanaś, R., *Journal of Modern Optics* **48** (2001) 347.
- [31] Louisell, W. H., *Quantum Statistical Properties of Radiation*, Wiley, 1973.
- [32] Schlosshauer, M., *Reviews of Modern Physics* **76** (2005) 1267.
- [33] Cabral, L. A., *Transparência eletromagneticamente induzida em diferentes sistemas físicos e seu análogo em osciladores acoplados*, Master's thesis, Universidade Federal de São Carlos, (2013).
- [34] Fleischhauer, M. et al., *Reviews of Modern Physics* **77** (2005) 633.
- [35] Alzetta, G. et al., *Lett. Nuovo Cimento* **17** (1976) 333.
- [36] Arimondo, E., *PROGRESS IN OPTICS XXXV* (1996) 257.
- [37] Harris, S. E. et al., *Physical Review Letters* **64** (1990) 1107.
- [38] Harris, S. E., *Physics Today* **50** (1997) 36.
- [39] Fleischhauer et al., *Phys. Rev. A* **49** (1994) 1973.

- [40] Yudin, V. I. et al., Phys. Rev. A **82** (2010) 033807.
- [41] Muecke, M. et al., Nature **465(7299)** (2010) 755–758.