



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS (UFG)
ESCOLA DE ENGENHARIA ELÉTRICA, MECÂNICA E DE COMPUTAÇÃO (EMC)
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA E DE
COMPUTAÇÃO (PPGEEC)

KHRISTIAN MARQUES DE ANDRADE JÚNIOR

**Controle MTPA de Máquinas de Relutância Chaveada
com Modelagem no Referencial $dq0$ e Proposta do
Referencial dqe Baseado em Autovetores**

GOIÂNIA – GO

2026



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
ESCOLA DE ENGENHARIA ELÉTRICA, MECÂNICA E DE COMPUTAÇÃO

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

Dissertação Tese Outro*: _____

*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

Exemplos: Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

2. Nome completo do autor

KHRISTIAN MARQUES DE ANDRADE JÚNIOR

3. Título do trabalho

“Controle MTPA de Máquinas de Relutância Chaveada com Modelagem no Referencial dq0 e Proposta do Referencial dqe Baseado em Autovetores”

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

- a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
- b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.

O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.



Documento assinado eletronicamente por **Geyverson Teixeira De Paula, Professor do Magistério Superior**, em 09/04/2026, às 16:36, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Khristian Marques De Andrade Júnior, Discente**, em 09/04/2026, às 17:53, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **6119485** e o código CRC **8282CF82**.

KHRISTIAN MARQUES DE ANDRADE JÚNIOR

**Controle MTPA de Máquinas de Relutância Chaveada
com Modelagem no Referencial $dq0$ e Proposta do
Referencial dqe Baseado em Autovetores**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e de Computação, da Escola de Engenharia Elétrica, Mecânica e de Computação, da Universidade Federal de Goiás (UFG), como requisito para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica e de Computação.

Área de Concentração: Engenharia Elétrica
Linha de Pesquisa: Máquinas Elétricas

Orientador: Prof. Dr. Geyverson Teixeira de Paula

Goiânia – GO
2026

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Andrade Júnior, Khristian Marques de
Controle MTPA de Máquinas de Relutância Chaveada com Modelagem
no Referencial dq0 e Proposta do Referencial dqe Baseado em Autovetores
[manuscrito] / Khristian Marques de Andrade Júnior. - 2026.
159 f.: il. 2026

Orientador: Prof. Dr. Geyverson Teixeira de Paula
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Goiás, Escola de
Engenharia Elétrica, Mecânica e de Computação (EMC), Programa de Pós-
Graduação em Engenharia Elétrica e de Computação, Goiânia, 2026.

Ilustrações.

Apêndice.

Bibliografia.

Inclui: siglas, símbolos, tabelas, algoritmos, lista de figuras, lista de
tabelas.

1. Máquina de Relutância Variável (SRM). 2. Controle MTPA. 3.
Referencial Dq0. 4. Transformação Dqe.

I. Paula, Geyverson Teixeira de, orient. II. Título.

CDU 621.3



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

ESCOLA DE ENGENHARIA ELÉTRICA, MECÂNICA E DE COMPUTAÇÃO

ATA DE DEFESA DE TESE

Ata Nº 1 da sessão de Defesa de Tese de **KHRISTIAN MARQUES DE ANDRADE JÚNIOR** que confere o título de Doutor EM ENGENHARIA ELÉTRICA E DE COMPUTAÇÃO, na área de concentração em ENGENHARIA ELÉTRICA.

Aos **trinta e um dias do mês de março de dois mil e vinte e seis**, a partir das **14:30hrs**, realizou-se a sessão pública de Defesa de Tese intitulada “**Controle MTPA de Máquinas de Relutância Chaveada com Modelagem no Referencial dq0 e Proposta do Referencial dqe Baseado em Autovetores**”. Os trabalhos foram instalados pelo Orientador, Professor Doutor **Geyverson Teixeira de Paula - (EMC/UFG)** com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor **Tárcio André dos Santos Barros - (UNICAMP)** Membro Titular Externo, Professor Doutor **José Roberto Boffino de Almeida Monteiro (USP)** Membro Titular Externo, Professor Doutor **Rodrigo Padilha Vieira - (UFSM)** Membro Titular Externo, e Professor Doutor **Bernardo Pinheiro de Alvarenga - (EMC/UFG)** Membro Titular Interno **cuja participação ocorreu através de videoconferência** pelo link: <https://meet.google.com/kuj-ggii-beg> Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do **trabalho**. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Tese tendo sido o candidato **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor Geyverson Teixeira de Paula, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora Aos trinta e um dias do mês de março de dois mil e vinte e seis.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA



Documento assinado eletronicamente por **Geyverson Teixeira De Paula, Professor do Magistério Superior**, em 31/03/2026, às 17:23, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Bernardo Pinheiro De Alvarenga, Professor do Magistério Superior**, em 31/03/2026, às 17:26, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **RODRIGO PADILHA VIEIRA, Usuário Externo**, em 31/03/2026, às 17:28, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **TARCIO ANDRE DOS SANTOS BARROS, Usuário Externo**, em 31/03/2026, às 17:28, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **José Roberto Boffino de Almeida Monteiro, Usuário Externo**, em 31/03/2026, às 17:28, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Khristian Marques De Andrade Júnior, Discente**, em 01/04/2026, às 09:57, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **6093154** e o código CRC **9AE159E4**.

A todos que, de alguma forma, contribuíram para que eu pudesse seguir em frente.

*“For if joyful is the fountain that rises in the sun, its springs are in the wells of sorrow
unfathomable at the foundations of the Earth.”
(J.R.R Tolkien)*

Resumo

As máquinas de relutância variável apresentam características atrativas para aplicações de tração elétrica quando comparadas às máquinas baseadas em ímãs permanentes, destacando-se pela simplicidade construtiva, menor dependência de materiais de terras raras e elevada robustez a faltas. Entretanto, a forte dependência angular das indutâncias resulta em elevadas ondulações de torque, o que impõe desafios à aplicação de estratégias de controle vetorial. No contexto do controle por máximo torque por ampère (MTPA), a utilização do referencial $dq0$ conduz a soluções aproximadas, uma vez que a dependência angular explícita das indutâncias mantém o acoplamento magnético nesse referencial, tornando a formulação exata computacionalmente onerosa para implementação em tempo real. Dessa forma, as técnicas do estado da arte baseadas nesse referencial recorrem a simplificações estruturais do modelo. Esta tese propõe dois métodos de controle MTPA baseados no referencial $dq0$ e um novo espaço de coordenadas, denominado referencial dqe , obtido a partir dos autovalores da matriz de derivadas das indutâncias. Nesse novo referencial, a estrutura do problema de otimização é reformulada de modo a simplificar a determinação das correntes ótimas, permitindo a obtenção de uma solução analítica e a redução do custo computacional associado à sua implementação. Também foi proposto um método de compensação associado ao decaimento não instantâneo da corrente da fase em desligamento, com o objetivo de mitigar a produção de torque negativo por essa fase. A validação experimental foi realizada em bancada sob diferentes condições de operação, comparando-se os métodos propostos com técnicas clássicas de acionamento, como controle por otimização de ângulo de disparo, funções de compartilhamento de torque e controle vetorial baseado na transformação dq não senoidal (dqx). Os resultados evidenciam uma redução de até 35% no fator de ondulação de torque e um aumento de até 46,3% no torque por ampère em comparação com os métodos de referência, indicando viabilidade para implementação em sistemas embarcados.

Palavras-chave: Máquina de relutância variável. Ondulações de torque. Máximo torque por ampère. Transformação de eixos. Derivada das indutâncias.

Abstract

Switched reluctance machines present attractive features for electric traction applications when compared to permanent magnet-based machines, particularly due to their simple construction, reduced dependence on rare-earth materials, and high fault tolerance. However, the strong angular dependence of phase inductances leads to significant torque ripple, posing challenges to the application of vector control strategies. Within the maximum torque per ampere (MTPA) control framework, the use of the $dq0$ reference frame results in approximate solutions, since the explicit angular dependence of inductances preserves magnetic coupling in this coordinate system, making the exact formulation computationally demanding for real-time implementation. Consequently, state-of-the-art techniques based on this reference frame rely on structural simplifications of the electromagnetic model. This thesis proposes two MTPA control methods based on the $dq0$ reference frame and a novel coordinate system, denoted as the dqe reference frame, obtained from the eigenvalues of the inductance derivative matrix. In this new reference frame, the structure of the optimization problem is reformulated in order to simplify the determination of optimal current references, enabling an analytical solution and reducing the computational burden associated with its implementation. A compensation strategy associated with the non-instantaneous current decay of phases during turn-off is also proposed, aiming to mitigate the production of negative torque by these phases. Experimental validation was carried out on a laboratory test bench under different operating conditions, comparing the proposed methods with classical drive strategies, including firing angle optimization, torque sharing functions, and vector control based on the non-sinusoidal dq transformation (dqx). The results show a reduction of up to 35% in the torque ripple factor and an increase of up to 46.3% in torque per ampere compared to reference methods, indicating viability for embedded implementation.

Keywords: Switched reluctance machine. Torque ripple. Maximum torque per ampere. Coordinate transformation. Inductance derivatives.

Lista de Figuras

Figura 1.1 – Máquina de relutância variável.	33
Figura 1.2 – Ilustração da operação de uma SRM 6/4 com rotação no sentido horário.	34
Figura 1.3 – Geometria de uma SRM monofásica.	35
Figura 1.4 – Perfil ideal da indutância de fase na SRM e sua derivada.	36
Figura 1.5 – Perfil da indutância própria de uma SRM 6/4 e de sua derivada, considerando o espalhamento do fluxo magnético e a saturação, obtidos via FEA.	37
Figura 1.6 – Circuito elétrico equivalente da SRM.	38
Figura 1.7 – Ilustração da definição de coenergia e variação da energia magnética com corrente constante	40
Figura 1.8 – Ilustração da topologia de um conversor AHB com quatro braços (fases).	42
Figura 1.9 – Modos de operação possíveis do conversor AHB.	43
Figura 1.10 – Estratégias de chaveamento possíveis no conversor AHB.	43
Figura 2.1 – Ilustração dos diferentes tipos de funções de compartilhamento.	51
Figura 3.1 – Representação gráfica do referencial dqe	70
Figura 3.2 – Diagrama de blocos da transformação dqe	70
Figura 3.3 – Diagrama de blocos da transformação inversa dqe	71
Figura 4.1 – Relação entre a corrente de referência ótima e a corrente real da fase em processo de desligamento.	78
Figura 4.2 – Aproximações adotadas para a estimação do tempo de extinção da corrente da fase em desligamento. As curvas tracejadas foram obtidas por meio de FEA. O retângulo vermelho corresponde ao intervalo de comutação.	78
Figura 4.3 – Exemplo da aplicação do método de compensação proposto em uma SRM 6/4	80
Figura 4.4 – Diagrama de blocos do controle vetorial proposto no referencial $dq0$	83
Figura 4.5 – Perfil das derivadas das indutâncias da máquina 6/4 no sistema de fases	83
Figura 4.6 – Perfil das derivadas das indutâncias da máquina 12/10 no sistema de fases	84
Figura 4.7 – Formas de onda típicas obtidas com a aplicação do controle proposto em $dq0$ para a SRM 6/4	85
Figura 4.8 – Formas de onda típicas obtidas com a aplicação do controle proposto em $dq0$ para a SRM 12/10	86
Figura 4.9 – Diagrama de blocos do controle vetorial proposto no referencial dqe	87
Figura 4.10 – Formas de onda típicas obtidas com a aplicação do controle proposto em dqe para a SRM 6/4	87

Figura 4.11–Formas de onda típicas obtidas com a aplicação do controle proposto em dqe para a SRM 12/10	88
Figura 5.1 – Superfícies das derivadas de indutância própria e mútua empregadas na implementação dos controles $dq0$, dqe e dqx	91
Figura 5.2 – Métricas de desempenho em regime permanente para diferentes velocidades de referência	94
Figura 5.3 – Variação percentual de ΔT_e em regime permanente para os métodos $dq0$ e dqe	94
Figura 5.4 – Variação percentual de T_R em regime permanente para os métodos $dq0$ e dqe	95
Figura 5.5 – Variação percentual de TPA em regime permanente para os métodos $dq0$ e dqe	95
Figura 5.6 – Desempenho em regime permanente do método convencional para $n_r^* = 300$ rpm	96
Figura 5.7 – Desempenho em regime permanente do método TSF para $n_r^* = 300$ rpm	96
Figura 5.8 – Desempenho em regime permanente do método dqx $n_r^* = 300$ rpm . . .	97
Figura 5.9 – Desempenho em regime permanente do método $dq0$ $n_r^* = 300$ rpm . . .	98
Figura 5.10–Desempenho em regime permanente do método dqe $n_r^* = 300$ rpm . . .	99
Figura 5.11–Desempenho em regime permanente do método convencional para $n_r^* = 600$ rpm	100
Figura 5.12–Desempenho em regime permanente do método TSF para $n_r^* = 600$ rpm	100
Figura 5.13–Desempenho em regime permanente do método dqx para $n_r^* = 600$ rpm	101
Figura 5.14–Desempenho em regime permanente do método $dq0$ para $n_r^* = 600$ rpm	102
Figura 5.15–Desempenho em regime permanente do método dqe para $n_r^* = 600$ rpm	103
Figura 5.16–Desempenho em regime permanente do método convencional para $n_r^* = 900$ rpm	104
Figura 5.17–Desempenho em regime permanente do método TSF para $n_r^* = 900$ rpm	104
Figura 5.18–Desempenho em regime permanente do método dqx para $n_r^* = 900$ rpm	105
Figura 5.19–Desempenho em regime permanente do método $dq0$ para $n_r^* = 900$ rpm	106
Figura 5.20–Desempenho em regime permanente do método dqe para $n_r^* = 900$ rpm	107
Figura 5.21–Desempenho em regime permanente do método convencional para $n_r^* = 1200$ rpm	108
Figura 5.22–Desempenho em regime permanente do método TSF para $n_r^* = 1200$ rpm	108
Figura 5.23–Desempenho em regime permanente do método dqx para $n_r^* = 1200$ rpm	109
Figura 5.24–Desempenho em regime permanente do método $dq0$ para $n_r^* = 1200$ rpm	110
Figura 5.25–Desempenho em regime permanente do método dqe para $n_r^* = 1200$ rpm	111
Figura 5.26–Primeiro degrau de carga com $n_r^* = 600$ rpm	113
Figura 5.27–Segundo degrau de carga com $n_r^* = 600$ rpm	113
Figura 5.28–Terceiro degrau de carga com $n_r^* = 600$ rpm	114

Figura 5.29–Degrau de velocidade de referência de 300 para 600 rpm	115
Figura 5.30–Degrau de velocidade de referência de 600 para 900 rpm	116
Figura 5.31–Degrau de velocidade de referência de 900 para 1200 rpm	116
Figura 5.32–Análise de sensibilidade do método $dq0$	118
Figura 5.33–Análise de sensibilidade do método dqe	118
Figura A.1–Ilustração dos diferentes sistemas de referência.	134
Figura C.1–Ilustração das etapas necessárias para obtenção do referencial dqe	147
Figura D.1–Bancada experimental.	155
Figura D.2–Estator e rotor da SRM.	156
Figura D.3–Conversor AHB.	156
Figura D.4–Interface digital.	158

Lista de Tabelas

Tabela 5.1 – Métricas de desempenho em regime transitório para o primeiro degrau de carga	112
Tabela 5.2 – Métricas de desempenho em regime transitório para o segundo degrau de carga	112
Tabela 5.3 – Métricas de desempenho em regime transitório para o terceiro degrau de carga	112
Tabela 5.4 – Métricas de desempenho em regime transitório para degrau de velocidade de referência de 300 para 600 rpm	114
Tabela 5.5 – Métricas de desempenho em regime transitório para degrau de velocidade de referência de 600 para 900 rpm	115
Tabela 5.6 – Métricas de desempenho em regime transitório para degrau de velocidade de referência de 900 para 1200 rpm	115
Tabela 5.7 – Tempo de execução das rotinas de controle	117
Tabela D.1 – Parâmetros da SRM	154
Tabela D.2 – Parâmetros da IPMSM	155

Lista de abreviaturas e siglas

ADC	Conversor analógico-digital (<i>Analog-to-Digital Converter</i>)
AHB	Conversor meia-ponte assimétrico (<i>Asymmetric Half-Bridge</i>)
CA	Corrente alternada
CC	Corrente contínua
CCS-MPC	Controle Preditivo Baseado em Modelo com Conjunto de Controle Contínuo (<i>Continuous Control Set Model Predictive Control</i>)
CMSIS	<i>Cortex Microcontroller Software Interface Standard</i>
DAC	Conversor digital-analógico (<i>Digital-to-Analog Converter</i>)
DITC	Controle Direto de Torque Instantâneo (<i>Direct Instantaneous Torque Control</i>)
DSP	Processamento digital de sinais (<i>Digital Signal Processing</i>)
FEA	Análise por elementos finitos (<i>Finite Element Analysis</i>)
FCS-MPC	Controle preditivo por conjunto finito (<i>Finite Control Set Model Predictive Control</i>)
FEMM	<i>Finite Element Method Magnetics</i> (programa computacional)
GPIO	Entrada e saída de propósito geral (<i>General-Purpose Input/Output</i>)
IPMSM	Máquina síncrona de ímãs permanentes interiores (<i>Interior Permanent Magnet Synchronous Machine</i>)
LUT	Tabela de busca (<i>Look-Up Table</i>)
MPC	Controle preditivo baseado em modelo (<i>Model Predictive Control</i>)
MTPA	Máximo torque por ampère (<i>Maximum Torque per Ampere</i>)
MTPV	Máximo torque por volt (<i>Maximum Torque per Volt</i>)
PI	Controlador proporcional-integral
PMSM	Máquina síncrona de ímãs permanentes (<i>Permanent Magnet Synchronous Machine</i>)

PPR	Pulsos por revolução (<i>Pulses Per Revolution</i>)
PWM	Modulação por largura de pulso (<i>Pulse Width Modulation</i>)
RMS	Valor eficaz (<i>Root Mean Square</i>)
SRM	Máquina de relutância variável (<i>Switched Reluctance Machine</i>)
SVPWM	Modulação vetorial por largura de pulso (<i>Space Vector Pulse Width Modulation</i>)
TSF	Função de compartilhamento de torque (<i>Torque Sharing Function</i>)
USB_OTG_FS	Barramento serial universal no modo <i>On-The-Go Full Speed</i>
$dq0$	Referencial de eixos direto, em quadratura e zero
dqe	Referencial proposto com eixo alinhado ao autovetor de interesse

Lista de símbolos

$A(\theta_r)$	Área efetiva da seção transversal do circuito magnético
e, e_k	Tensão induzida (genérica e por fase)
E_t	Energia elétrica transitória
f	Função de restrição da formulação com multiplicadores de Lagrange
f_k, f_m	Funções de compartilhamento de torque das fases em condução
$f_{\text{sub}}, f_{\text{des}}$	Segmentos de subida e descida da função de compartilhamento de torque
f_r	Coefficiente do modelo analítico de torque da revisão
g	Comprimento do entreferro
h	Expoente do modelo analítico torque–corrente da revisão
\mathcal{L}	Função Lagrangiana do problema de otimização
i	Corrente elétrica (magnitude)
i_1, i_2, i_3, i_N	Correntes no modelo genérico de N fases
i_a, i_b, i_c	Correntes das fases a, b e c
i_α, i_β, i_0	Correntes nos eixos α, β e 0
i_d, i_q, i_e	Correntes nos eixos d, q e e
i_k	Corrente da fase k
i_k^*	Corrente de referência da fase k
i_{com}	Corrente da fase no instante de comutação
i_o	Corrente da fase em processo de desligamento
L_0	Indutância própria no eixo zero
L_{0p}	Derivada da indutância não saturada (modelo analítico da revisão)
L_a, L_b, L_c	Indutâncias próprias das fases a, b e c
$L_a^{\text{inc}}, L_b^{\text{inc}}, L_c^{\text{inc}}$	Indutâncias incrementais próprias das fases a, b e c

L'_d, L'_q, L'_0, L'_e	Derivadas equivalentes das indutâncias nos eixos $d, q, 0$ e e
L_k	Indutância própria da fase k
L_M	Indutância própria no instante inicial da comutação
$l_m(\theta_r)$	Comprimento efetivo do caminho magnético
L_{\min}, L_{\max}	Valores mínimo e máximo da indutância própria
L_o	Indutância própria da fase em processo de desligamento
L_T	Termo auxiliar da expressão fechada das correntes em $dq0$
L_{stk}	Comprimento axial do pacote magnético
L'_{\max}	Valor máximo da derivada da indutância própria da fase em desligamento
M_{ab}, M_{bc}, M_{ca}	Indutâncias mútuas entre fases
$M_{ab}^{\text{inc}}, M_{bc}^{\text{inc}}, M_{ca}^{\text{inc}}$	Indutâncias incrementais mútuas entre fases
M_{km}	Indutância mútua entre as fases k e m
M_{ko}	Indutância mútua entre a fase em desligamento o e a fase k
$M_{dq}, M_{0d}, M_{q0}, M_{qe}$	Termos de acoplamento mútuo entre eixos
$M'_{dq}, M'_{0d}, M'_{q0}, M'_{qe}$	Derivadas equivalentes dos termos de acoplamento mútuo
\mathcal{J}	Função objetivo de otimização
$\mathcal{R}, \mathcal{R}_{\min}$	Relutância magnética (genérica e mínima)
IAE_{ω_r}	Integral do erro absoluto de velocidade
TPA	Torque por ampère
N	Número de fases da máquina
N_C	Número de espiras por bobina
n_r, n_r^*	Velocidade de rotação mecânica (medida e de referência) em rpm
p	Número de pares de polos da máquina
P_e	Potência elétrica instantânea
q_{dq0}, q_{dqe}	Fatores de escala das correntes de referência
r_0	Resistência no eixo zero

r_a, r_b, r_c	Resistências das fases a , b e c
r_k	Resistência da fase k
r_o	Resistência da fase em processo de desligamento
R'_o	Resistência equivalente durante a comutação
R_s, R_r	Raios do estator e do rotor
t	Tempo
t_1, t_2	Instantes inicial e final de avaliação das métricas
t_d, t_d^e, t_d^{\max}	Tempo de extinção estimado, tempo efetivo e tempo máximo admissível de comutação
$\overline{T_e}$	Torque eletromagnético médio
t_p	Instante de aplicação da perturbação no ensaio transitório
t_s	Tempo de acomodação (ou recuperação)
T_{carga}	Torque de carga
T_e	Torque eletromagnético
T_e^*	Torque eletromagnético de referência
T_k, T_m	Contribuições de torque das fases em condução
T_k^*	Torque de referência da fase k
T_o	Torque remanescente da fase em processo de desligamento
T_R	Fator de ondulação do torque
T_{comp}^*	Torque de referência compensado
\tilde{I}_{RMS}	Corrente eficaz normalizada
\tilde{T}_R	Fator de ondulação de torque normalizado
v_a, v_b, v_c	Tensões das fases a , b e c
v_α, v_β, v_0	Tensões nos eixos α , β e 0
v_d, v_q, v_e	Tensões nos eixos d , q e e
V_D	Queda de tensão direta no diodo

v_k	Tensão aplicada à fase k
v_o	Tensão aplicada à fase em processo de desligamento
V_{dc}	Tensão do barramento CC
w_α, w_β, w_0	Componentes do autovetor usado na transformação dqe
W_e	Energia elétrica
W_f	Energia armazenada no campo magnético
W'_f	Coenergia magnética
W_m	Energia mecânica
$\alpha, \beta, 0$	Eixos do referencial de Clarke
Δt	Janela temporal de análise no ensaio transitório
ΔT_e	Ondulação de torque normalizada pico a pico
$\Delta\omega_{\max}$	Desvio máximo de velocidade no ensaio transitório
ϵ	Banda percentual adotada no critério de acomodação
γ	Fator geométrico associado ao arco efetivo de sobreposição no circuito magnético
γ_s, γ_r	Arcos polares efetivos do estator e do rotor
λ	Multiplicador de Lagrange
μ	Permeabilidade magnética do meio
μ_0	Permeabilidade magnética do vácuo
ω	Velocidade angular genérica do referencial rotativo
ω_r	Velocidade angular do rotor
ω_r^*	Velocidade angular de referência
ψ, ψ_k	Fluxo concatenado (genérico e por fase)
ρ_1, ρ_2	Pesos da função objetivo multiobjetivo
σ	Autovalor da matriz de derivadas de indutâncias
$\sigma_{\max}, \sigma_{\min}$	Autovalores máximo e mínimo

σ_{ext}	Autovalor extremo (máximo ou mínimo)
θ	Posição angular elétrica genérica
θ_1, θ_2	Posições do rotor em análise incremental de energia
θ_r	Posição angular mecânica do rotor
θ_{off}	Ângulo de desligamento da fase
θ_{on}	Ângulo de início de condução
θ_{ov}	Ângulo de sobreposição de condução
$\mathbf{0}$	Vetor nulo
\mathbf{A}	Matriz real genérica
\mathbf{C}	Matriz associada às restrições ativas de corrente
\mathbf{c}_k^\top	Vetor linha de \mathbf{C} associado à fase k
\mathbf{e}_3	Vetor base canônico utilizado no método da potência
\mathbf{i}	Vetor de correntes genérico
\mathbf{i}_{abc}	Vetor de correntes no sistema de fases
$\tilde{\mathbf{i}}_{abc}$	Vetor de correntes de fase normalizadas
$\mathbf{i}_{\alpha\beta 0}$	Vetor de correntes no referencial $\alpha\beta 0$
\mathbf{i}_{dq0}	Vetor de correntes no referencial $dq0$
\mathbf{i}_{dqe}	Vetor de correntes no referencial dqe
$\mathbf{i}_{dqe}^{(p)}$	Vetor de correntes ótimo em dqe sob restrições ativas
\mathbf{I}	Matriz identidade
\mathbf{J}	Matriz associada à rotação do referencial $dq0$
\mathbf{J}_{dqe}	Matriz dinâmica associada à variação temporal de \mathbf{T}_{dqe}
\mathbf{L}	Matriz de indutâncias
\mathbf{L}_{abc}	Matriz de indutâncias no sistema de fases
$\mathbf{L}_{\alpha\beta 0}$	Matriz de indutâncias no referencial $\alpha\beta 0$
\mathbf{L}_{dq0}	Matriz de indutâncias no referencial $dq0$

L_{dqe}	Matriz de indutâncias no referencial dqe
L_{abc}^{inc}	Matriz de indutâncias incrementais no sistema de fases
$L_{\alpha\beta 0}^{\text{inc}}$	Matriz de indutâncias incrementais no referencial $\alpha\beta 0$
L_{dq0}^{inc}	Matriz de indutâncias incrementais no referencial $dq0$
L_{dqe}^{inc}	Matriz de indutâncias incrementais no referencial dqe
\mathbf{n}	Vetor normal à reta de interseção de restrições ativas em dqe
$\boldsymbol{\psi}$	Vetor de fluxos concatenados
$\boldsymbol{\psi}_{abc}$	Vetor de fluxos concatenados no sistema de fases
$\boldsymbol{\psi}_{\alpha\beta 0}$	Vetor de fluxos concatenados no referencial $\alpha\beta 0$
$\boldsymbol{\psi}_{dq0}$	Vetor de fluxos concatenados no referencial $dq0$
$\boldsymbol{\psi}_{dqe}$	Vetor de fluxos concatenados no referencial dqe
\mathbf{r}_{abc}	Matriz de resistências no sistema de fases
$\mathbf{r}_{\alpha\beta 0}$	Matriz de resistências no referencial $\alpha\beta 0$
\mathbf{r}_{dq0}	Matriz de resistências no referencial $dq0$
\mathbf{r}_{dqe}	Matriz de resistências no referencial dqe
$\mathbf{T}_{abc \rightarrow dq0}$	Transformação direta de abc para $dq0$
$\mathbf{T}_{abc \rightarrow dqe}$	Transformação direta de abc para dqe
$\mathbf{T}_{\alpha\beta 0}$	Matriz de transformação de Clarke
\mathbf{T}_{dq0}	Matriz de transformação de Park
\mathbf{T}_{dqe}	Matriz de transformação para o referencial dqe
\mathbf{v}_{abc}	Vetor de tensões no sistema de fases
$\mathbf{v}_{\alpha\beta 0}$	Vetor de tensões no referencial $\alpha\beta 0$
\mathbf{v}_{dq0}	Vetor de tensões no referencial $dq0$
\mathbf{v}_{dqe}	Vetor de tensões no referencial dqe
\mathbf{w}_d	Autovetor dominante usado na solução aproximada em $dq0$
\mathbf{w}_m	Autovetor associado ao autovalor de menor magnitude em $\alpha\beta 0$

\mathbf{w}_p	Direção ótima de corrente em dqe com restrições ativas
$\mathbf{w}_{\sigma_{\text{ext}}}$	Autovetor associado ao autovalor extremo
\mathbf{x}	Vetor de grandezas elétricas genéricas
\mathbf{x}_{abc}	Vetor de grandezas no sistema de fases
$\mathbf{x}_{\alpha\beta 0}$	Vetor de grandezas no referencial $\alpha\beta 0$
\mathbf{x}_{dq0}	Vetor de grandezas no referencial $dq0$
\mathbf{x}_{dqe}	Vetor de grandezas no referencial dqe
$\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r}$	Matriz de derivadas das indutâncias em relação à posição do rotor
$\left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{\alpha\beta 0}$	Matriz de derivadas das indutâncias referida a $\alpha\beta 0$
$\left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{dq0}$	Matriz de derivadas das indutâncias referida a $dq0$
$\left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{dqe}$	Matriz de derivadas das indutâncias referida a dqe

Sumário

Introdução	24
1 Fundamentação Teórica	32
1.1 Máquinas de Relutância Variável: Conceitos e Estrutura	32
1.1.1 Princípios de Funcionamento e Operação	33
1.1.2 Modelagem Matemática da SRM e Análise da Ondulação de Torque	35
1.1.2.1 Modelagem elétrica básica da SRM	35
1.1.2.2 Produção de torque via energia e coenergia	38
1.2 O Conversor Meia-Ponte Assimétrico	41
2 Ondulações de Torque, Técnicas para sua Mitigação e Controle MTPA	44
2.1 Origem das Ondulações de Torque	44
2.2 Técnicas Clássicas de Mitigação das Ondulações de Torque via Controle	46
2.2.1 Otimização dos ângulos de comutação	47
2.2.2 Estratégias Baseadas na Geração de Referências	48
2.2.2.1 Perfilamento de Corrente	48
2.2.2.2 Funções de Compartilhamento de Torque	50
2.2.3 Estratégias Baseadas em Controle	54
2.2.3.1 Controle Preditivo	54
2.2.3.2 Controle Vetorial	57
2.3 Conceitos gerais de MTPA	60
3 Modelagem, Formulação, Análise Crítica e Proposta de Novo Espaço de Coordenadas	62
3.1 Modelagem da SRM nos sistemas $\alpha\beta 0$ e $dq0$	62
3.2 Formulação do problema MTPA no sistema $dq0$	64
3.3 Análise crítica da formulação em $dq0$	68
3.4 Definição da Transformação dqe	69
3.5 Modelagem da SRM no sistema dqe	71
3.6 Formulação do controle MTPA no sistema dqe	72
4 Controle Vetorial Proposto para as SRMs	77
4.1 Estratégia de compensação angular	77
4.2 Considerações sobre a compensação angular	79
4.3 Controle Vetorial Proposto no Referencial $dq0$	81
4.4 Controle Vetorial Proposto no Referencial dqe	84
5 Resultados e Discussões	89
5.1 Métodos de Controle Considerados	89
5.1.1 Controle por ângulo de disparo	89

5.1.2	Controle por TSF	90
5.1.3	Controle dqx	90
5.2	Métricas de Desempenho	91
5.2.1	Regime permanente	91
5.2.2	Transitório	92
5.3	Procedimentos Experimentais	92
5.3.1	Ensaio em regime permanente	93
5.3.2	Degraus de carga	93
5.3.3	Degraus de velocidade de referência	113
5.4	Análise de Custo Computacional	115
5.5	Análise de Sensibilidade dos Métodos quanto a Variações nos Parâmetros	117
5.6	Discussão Crítica	118
Conclusão		120
Referências Bibliográficas		123
APÊNDICE A Transformações de Eixo e seu Papel no Controle de Motores		132
A.1	Transformação de Clarke	132
A.2	Transformação de Park	133
A.3	Aplicação das Transformações em Variáveis Estacionárias	135
APÊNDICE B Autovalores e Autovetores		141
B.1	Definição	141
B.2	Propriedades	142
B.3	Matrizes de ordem 3	144
APÊNDICE C Construção algébrica detalhada da transformação dqe		146
C.1	Matriz de Transformação dqe	146
C.2	Equações da Máquina no Sistema dqe	149
C.3	Desacoplamento dos Eixos na Produção do Torque Eletromagnético	151
C.4	Autovalores e Autovetores no Sistema dqe	152
APÊNDICE D Bancada Experimental		154
D.1	Máquinas elétricas	154
D.2	Conversor de potência	155
D.3	Instrumentação e sensores	157
D.4	Sistema de controle digital	157

Introdução

Contextualização do Problema

A crescente preocupação com o aquecimento global, sustentada por diversas evidências científicas acerca das mudanças climáticas, decorrentes, principalmente, da queima de combustíveis fósseis e do conseqüente aumento da concentração de gases de efeito estufa na atmosfera, impulsionou a transição energética atualmente em curso, configurando uma das mais profundas transformações tecnológicas do século [1,2]. Essa preocupação também motivou a criação de acordos internacionais e a implementação de regulamentações ambientais cada vez mais severas, levando diversos setores da sociedade a reavaliar seus sistemas de geração e utilização de energia, buscando alternativas mais limpas e sustentáveis em substituição aos combustíveis fósseis [2,3].

No contexto descrito, o setor de transporte, historicamente um dos mais dependentes de combustíveis fósseis, vem sofrendo forte transformação, tornando-se um dos pilares da eletrificação. Observa-se a migração progressiva dos motores à combustão (em veículos leves, pesados e sistemas ferroviários) para sistemas de tração elétrica, mais eficientes e com menor número de componentes mecânicos, o que implica redução de manutenção e maior confiabilidade operacional [4,5]. Outros setores, como a indústria e os sistemas de climatização, seguem tendência semelhante. A crescente demanda por veículos totalmente elétricos ou híbridos, aliada à necessidade de maior eficiência energética em diferentes segmentos da economia, faz com que as máquinas elétricas assumam papel cada vez mais central na infraestrutura energética global.

As máquinas elétricas, tradicionalmente utilizadas na geração de energia e em processos industriais envolvendo conversão eletromecânica, passam agora a ocupar posição estratégica em sistemas de geração renovável, como usinas eólicas, em acionamentos industriais de alta eficiência e, principalmente, em sistemas de tração elétrica. Nesse cenário, as máquinas síncronas de ímãs permanentes (do inglês, *Permanent Magnet Synchronous Machines* – PMSMs) consolidaram-se como solução dominante em diversas aplicações, graças à sua elevada densidade de potência, alto rendimento e controle bem estabelecido no referencial síncrono [6].

Todavia, a utilização de ímãs permanentes introduz vulnerabilidades tanto físicas quanto geopolíticas. Grande parte dessas máquinas emprega ímãs contendo elementos de terras raras, como o neodímio, cuja cadeia produtiva apresenta forte concentração geográfica, com significativa participação da China nas reservas e no processamento desses materiais [7,8]. Essa concentração impacta diretamente a previsibilidade da produção, sujeitando

o setor a questões geopolíticas, restrições comerciais e instabilidades de fornecimento. Além disso, a extração e o processamento de terras raras estão associados a impactos ambientais relevantes, o que cria um paradoxo na busca por tecnologias ambientalmente sustentáveis [9, 10].

Sob a perspectiva física, a presença de ímãs permanentes também impõe limitações intrínsecas. Condições severas de operação, envolvendo temperaturas elevadas ou correntes excessivas, podem provocar desmagnetização irreversível, comprometendo permanentemente o desempenho da máquina [11]. A presença de fluxo permanente impõe restrições operacionais, particularmente nas regiões de enfraquecimento de campo, exigindo estratégias adicionais de controle e podendo impactar a eficiência em determinadas faixas de operação [11]. Ademais, a reciclagem completa de ímãs de terras raras ainda representa desafio tecnológico e econômico significativo [10].

Diante dessas limitações, máquinas que não dependem de ímãs permanentes passam a receber atenção crescente da comunidade científica. Dentre elas, destacam-se as máquinas de relutância variável (*Switched Reluctance Machines* – SRMs), objeto de estudo desta tese, principalmente por sua construção simplificada e robusta. O rotor dessas máquinas não possui enrolamentos ou ímãs, conferindo elevada robustez mecânica, tolerância a altas temperaturas e potencial de redução de custos [11–13]. A ausência de terras raras elimina vulnerabilidades geopolíticas associadas à cadeia de suprimentos e reduz impactos ambientais ligados à exploração desses materiais [11–13].

A configuração construtiva das SRMs também favorece aplicações em sistemas de alta velocidade e ambientes severos. Suas principais vantagens incluem robustez mecânica e elétrica, simplicidade estrutural, facilidade de fabricação e possibilidade de utilização de materiais amplamente disponíveis, o que representa vantagem estratégica relevante em um cenário global de restrição de recursos críticos [11–13].

Entretanto, as SRMs apresentam desafios técnicos significativos. Como o próprio nome indica, o torque eletromagnético é produzido pela variação da relutância do circuito magnético, podendo ser interpretado como decorrente da variação espacial da indutância. Esse princípio de operação resulta em ondulações de torque pronunciadas, que se manifestam sob a forma de vibrações mecânicas e ruído acústico elevado [11–13]. Adicionalmente, o circuito magnético dessas máquinas é fortemente não linear e explicitamente dependente da posição angular do rotor, o que torna sua modelagem e controle substancialmente mais complexos quando comparados às PMSMs [11–13].

As estratégias desenvolvidas para mitigar essas limitações podem ser divididas em duas vertentes complementares: aquelas focadas no projeto eletromagnético da máquina e aquelas baseadas em seu controle.

Sob a ótica do projeto eletromagnético, grande parte das pesquisas concentra-se na

modificação da geometria com o intuito de reduzir o conteúdo harmônico da indutância e suavizar sua derivada angular. Dentre as técnicas recorrentes, destacam-se a utilização de diferentes tipos de perfis dos dentes do estator e do rotor [14–16], a introdução de polos com formatos não circulares ou assimétricos [17], a segmentação dos polos do rotor [18–20], a aplicação de inclinação axial, também conhecida como *skewing* [21, 22], a modulação da distribuição de fluxo no entreferro com a utilização de barreiras de fluxo [23–25].

Embora tais intervenções atuem diretamente sobre a distribuição angular da indutância, técnicas como *skewing* e segmentação podem reduzir o torque médio específico da máquina ou aumentar sua complexidade construtiva, elevando os custos de fabricação e comprometendo a rigidez mecânica do rotor [26]. Métodos baseados em otimização multiobjetivo, frequentemente associados à análise por elementos finitos (*Finite Element Analysis* – FEA), buscam minimizar simultaneamente parâmetros como ondulação de torque, perdas e ruído acústico, mantendo a densidade de torque e os níveis de saturação dentro de limites aceitáveis [27–30]. Todavia, tais soluções são, em geral, específicas a uma determinada topologia ou a um ponto de operação, o que limita sua generalização para diferentes condições de velocidade e carga.

Mesmo representando abordagem estrutural mais profunda do que técnicas exclusivamente baseadas em controle, as modificações geométricas não eliminam a dependência angular explícita do mecanismo de produção de torque. O fenômeno fundamental permanece associado à variação espacial da relutância, que continua dominando a conversão eletromecânica da SRM.

No domínio das técnicas baseadas em controle, destacam-se métodos de ajuste otimizado dos ângulos de comutação [31–34], perfilamento de corrente dependente da posição [35–39], funções de compartilhamento de torque (*torque sharing function* – TSF) [40–47], controle preditivo [48–52] e controle vetorial adaptado [53–66]. Essencialmente, essas estratégias atuam sobre a excitação elétrica da máquina, buscando moldar o termo dominante quadrático da corrente na expressão do torque de forma a compensar a variação angular da indutância.

Entretanto, no contexto de técnicas que utilizam controle vetorial, verifica-se que podem impor limitações de desempenho em SRMs. Esse espaço de controle baseia-se em referenciais originalmente desenvolvidos para máquinas de fluxo aproximadamente senoidal, o que pode não refletir adequadamente a estrutura magnética das SRMs [11, 12]. As aproximações necessárias para mitigar a dependência angular nesses referenciais indicam a necessidade de uma abordagem alternativa.

Esta tese aborda o controle vetorial de SRMs por meio da análise espectral das matrizes associadas à conversão eletromecânica, analisando explicitamente a matriz associada à derivada angular das indutâncias como elemento relevante para a produção instantânea de torque. Parte-se da hipótese de que uma formulação alinhada às direções

principais dessa matriz pode simplificar a formulação do problema de controle, reduzindo o compromisso entre eficiência e ondulação.

Dessa forma, o presente trabalho busca contribuir não apenas com melhorias incrementais em técnicas de mitigação, mas com uma reformulação da estrutura de otimização do controle vetorial em SRMs.

Considerando o atual cenário global de transição energética, a crescente demanda por sistemas de tração elétrica robustos e sustentáveis e as questões geopolíticas e ambientais associadas à exploração de terras raras, o aprofundamento teórico e estrutural das SRMs revela-se academicamente relevante diante do aumento da demanda por soluções de acionamento elétrico sem o uso de materiais de terras raras.

Objetivos da Pesquisa

O objetivo geral da presente tese consiste no desenvolvimento e na análise de uma nova estratégia de controle para SRMs baseada na modelagem no referencial $dq0$, consolidado para as PMSMs, e na proposição de um novo espaço de coordenadas, denominado dqe , com foco na obtenção de correntes de referência ótimas para a técnica MTPA.

Para tanto, são necessários os seguintes objetivos específicos:

- Modelar a SRM no sistema $dq0$ de forma a destacar as limitações no desacoplamento dos eixos e na dependência da posição angular do rotor nas matrizes de indutância e suas derivadas;
- Formular o problema de otimização MTPA como um problema de minimização do módulo do vetor de corrente sujeito à restrição de torque eletromagnético de referência;
- Obter expressões para as correntes de referência ótimas no referencial $dq0$ e discutir aproximações computacionalmente viáveis para implementação embarcada;
- Propor a transformação dqe baseada na decomposição espectral da matriz de derivadas de indutâncias, visando reduzir acoplamentos e simplificar a solução do problema MTPA;
- Obter as equações do modelo e do controle no referencial dqe , bem como formular o problema de otimização MTPA neste referencial e comparar, do ponto de vista analítico, a obtenção das referências de corrente nos referenciais $dq0$ e dqe ;
- Introduzir uma estratégia de compensação angular para mitigar efeitos de comutação e reduzir a possibilidade de produção de torque negativo durante a extinção de corrente;

- Validar a abordagem proposta por meio de resultados experimentais, avaliando métricas com base nas correntes e no torque medidos.

Contribuições Principais

As principais contribuições desta pesquisa são:

- Proposição de um novo espaço de coordenadas, denominado dqe , construído a partir da decomposição espectral da matriz de derivadas de indutâncias no referencial $\alpha\beta 0$, visando alinhar os eixos de corrente às direções instantâneas com maior capacidade de produção de torque;
- Formulação do problema MTPA para a SRM como um problema de minimização do módulo do vetor de corrente sujeito a uma restrição de torque na forma quadrática, evidenciando sua interpretação via quociente de Rayleigh e autovetores;
- Derivação das equações do modelo vetorial da SRM no referencial dqe e obtenção de expressões analíticas para as correntes de referência associadas ao controle MTPA nesse sistema;
- Proposição de uma estratégia de compensação angular para mitigar efeitos de comutação e reduzir a ocorrência de torque negativo durante a extinção de corrente na fase em processo de desligamento;
- Validação por meio de ensaios experimentais, com análise comparativa entre os referenciais $dq0$ e dqe , bem como entre estes e técnicas clássicas de acionamento de SRMs, considerando métricas associadas às correntes e ao torque medidos, além da viabilidade computacional.

Produção Científica e Registros de Propriedade Intelectual

A produção científica desenvolvida ao longo do período de pesquisa reflete a consolidação de linhas de investigação nas áreas de máquinas elétricas, controle avançado e mitigação de ondulações de torque.

Os artigos a seguir correspondem a publicações em periódicos científicos e trabalhos completos apresentados em congressos, nos quais foram exploradas metodologias originais de controle, otimização e modelagem de máquinas elétricas.

1. **Periódico:** ANDRADE JUNIOR, K. M.; ALVARENGA, B. P.; PAULA, G. T. Pole segmentation shaped by sinusoidal, trapezoidal, and harmonic injection PWM for tor-

- que ripple reduction in permanent magnet synchronous machines. *Revista Eletrônica de Potência*, v. 30, p. e202551, 2025. DOI: <https://doi.org/10.18618/REP.e202551>.
2. **Periódico:** SIFUENTES FILHO, D. P.; GINU, Y. F.; ANDRADE JUNIOR, K. M.; ALVARENGA, B. P.; PAULA, G. T. Induction motor fault diagnosis based on the machine temperature, vibration analysis and sensors fusion. *Revista Eletrônica de Potência*, v. 30, p. e202554, 2025. DOI: <https://doi.org/10.18618/REP.e202554>.
 3. **Periódico:** VILELA, W. M.; ANDRADE JUNIOR, K. M.; SANTOS, H. E.; ALVARENGA, B. P.; OLIVEIRA, E. S. L.; PAULA, G. T. Novel vector control approach for switched reluctance machines based on non-sinusoidal dq transform. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, v. 32, p. 1–14, 2021. DOI: <https://doi.org/10.1007/s40313-021-00810-0>.
 4. **Congresso:** LEMES FILHO, C. C.; SOARES, I. R.; ANDRADE JUNIOR, K. M.; ALVARENGA, B.; PAULA, G. T. Strategy for torque ripple reduction in IPMSM. In: *CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA*, 24., 2022, Fortaleza. Fortaleza: CBA, 2022. DOI: <https://doi.org/10.20906/CBA2022/3447>.
 5. **Congresso:** SOARES, I. R.; ANDRADE JUNIOR, K. M.; CASTRO, A. G.; ALVARENGA, B.; PAULA, G. T. A current hysteresis control strategy for switched reluctance machine based on genetic algorithms and finite elements analysis. In: *CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA*, 24., 2022, Fortaleza. DOI: <https://doi.org/10.20906/CBA2022/3271>.

Os resumos apresentados a seguir correspondem a comunicações científicas relacionadas principalmente à otimização eletromagnética e à mitigação de ondulações de torque em máquinas síncronas de ímãs permanentes.

1. **Congresso:** ANDRADE JUNIOR, K. M.; ALVARENGA, B.; PAULA, G. T. Optimization of pole segmentation technique applied to permanent magnet synchronous machines to reduce the cogging torque peak. In: *CONGRESSO BRASILEIRO DE ELETROMAGNETISMO*, 15., 2022, São Paulo. São Paulo: CBMag, 2022. Disponível em: <https://www.even3.com.br/anais/cbmag2022/470970>.
2. **Congresso:** SANTOS, H. E.; ANDRADE JUNIOR, K. M.; VILELA, W. M.; ALVARENGA, B.; PAULA, G. T. Sinusoidal, trapezoidal and harmonic injection PWM techniques applied to the pole segmentation of permanent magnet synchronous machine to reduce the torque ripple. In: *CONGRESSO BRASILEIRO DE ELETROMAGNETISMO*, 15., 2022, São Paulo. São Paulo: CBMag, 2022. Disponível em: <https://www.even3.com.br/anais/cbmag2022/470971>.

Além da produção científica, foram desenvolvidas ferramentas computacionais destinadas à modelagem, compensação e análise modal de máquinas de relutância variável, resultando em registros formais junto ao Instituto Nacional da Propriedade Industrial (INPI).

1. **Número de registro BR512025003309-5:** PAULA, G. T.; ANDRADE JUNIOR, K. M. SRM DQ0 Compensation Lib. 2025. Patente: Programa de Computador. Data de registro: 25/01/2025, título: "SRM DQ0 Compensation Lib", Instituição de registro: INPI.
2. **Número de registro BR512025003373-7:** PAULA, G. T.; ANDRADE JUNIOR, K. M. SRM DQE Eigenvalue Lib. 2025. Patente: Programa de Computador. Data de registro: 13/03/2025, título: "SRM DQE Eigenvalue Lib", Instituição de registro: INPI.

Organização do Trabalho

Este trabalho está organizado da seguinte forma.

O Capítulo 1 apresenta os fundamentos teóricos necessários ao desenvolvimento da tese. Inicialmente são descritos os princípios de funcionamento das máquinas de relutância variável, suas características construtivas e a modelagem matemática no sistema de fases. Em seguida são apresentados o conversor utilizado em seu acionamento.

O Capítulo 2 apresenta as principais causas das ondulações de torque e uma revisão das técnicas clássicas de controle empregadas para sua mitigação, bem como conceitos relacionados ao controle MTPA.

O Capítulo 3 apresenta a modelagem da máquina nos sistemas de coordenadas $\alpha\beta 0$ e $dq0$ e estabelece a formulação do problema de MTPA nesse referencial. A partir dessa formulação, são discutidas as limitações da abordagem em $dq0$ quando aplicada às SRMs. Com base nessa análise, é proposta uma nova transformação de coordenadas, denominada dqe , construída a partir da decomposição espectral da matriz das derivadas de indutâncias. O capítulo apresenta ainda a modelagem da máquina nesse novo referencial e a formulação do problema MTPA no sistema dqe .

O Capítulo 4 apresenta a estratégia de controle vetorial proposta para as SRMs, incluindo a formulação do controle nos referenciais $dq0$ e dqe e a introdução de uma estratégia de compensação angular destinada a reduzir efeitos associados ao processo de comutação das correntes entre fases.

O Capítulo 5 apresenta os resultados experimentais obtidos com a implementação da metodologia proposta. São descritas a bancada experimental e a metodologia de ensaio,

bem como analisados os resultados obtidos para os dois referenciais considerados e três técnicas de controle clássicas, a otimização dos ângulos de excitação e desligamento, TSF e transformação dq não senoidal, incluindo comparações relativas às correntes, ondulações de torque e aspectos computacionais.

Por fim, são apresentadas as conclusões do trabalho, nas quais são sintetizadas as principais contribuições da tese e indicadas possíveis direções para trabalhos futuros.

Os apêndices reúnem desenvolvimentos matemáticos complementares que dão suporte às formulações apresentadas no texto principal. O Apêndice [A](#) revisa as transformações de Clarke e Park e sua aplicação às equações elétricas fundamentais. O Apêndice [B](#) apresenta os conceitos de autovalores e autovetores e reúne propriedades que embasam a análise espectral empregada no trabalho. O Apêndice [C](#) detalha a construção da transformação dqe e a obtenção das equações da máquina nesse novo sistema de coordenadas. Por fim, o Apêndice [D](#) descreve detalhadamente a bancada experimental

Capítulo 1

Fundamentação Teórica

O primeiro capítulo tem por objetivo apresentar os conceitos teóricos fundamentais que sustentam a presente tese. Inicialmente, são descritos os princípios de funcionamento das máquinas de relutância variável, suas características físicas, sua modelagem e o conversor utilizado em seu acionamento.

1.1 Máquinas de Relutância Variável: Conceitos e Estrutura

Define-se relutância como a quantificação da oposição que um material ou meio oferece ao fluxo magnético. Tal grandeza pode ser comparada à resistência elétrica em um circuito. Materiais de alta permeabilidade magnética, como o ferro, oferecem baixa relutância, enquanto os de baixa permeabilidade, como o ar, apresentam alta relutância.

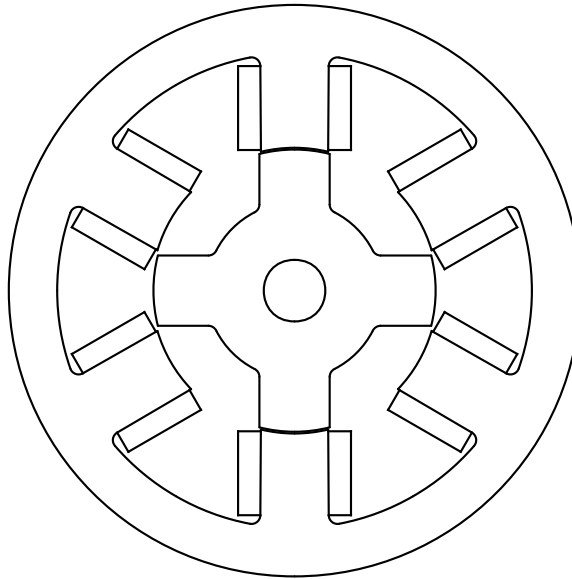
As máquinas de relutância variável são um tipo especial de máquina síncrona, possuindo uma estrutura simples, mas robusta. Como outras máquinas, possuem um estator e um rotor, mas ambos com polos salientes, construídos de forma a amplificar as diferenças de relutância dos diferentes caminhos para o fluxo magnético determinados pela posição do rotor. Como mostra a Figura 1.1.

Esse tipo de máquina chama a atenção, principalmente, devido à ausência de ímãs ou enrolamentos no rotor e à presença de enrolamentos concentrados no estator. Tais atrativos, somados à evolução dos dispositivos de chaveamento, com redução de custos de produção e ampliação da capacidade de condução de corrente, tornam a SRM uma candidata viável para aplicações de tração elétrica.

Devido às características supracitadas, como será demonstrado mais adiante, as SRMs produzem torque independentemente do sentido da corrente que flui em seus enrolamentos, assim como os motores universais, o que possibilita, de forma elementar, a utilização de apenas uma chave para o controle de corrente. Além disso, seu funcionamento também como gerador pode se dar por meio de correntes unipolares.

Outra característica interessante desse tipo de máquina é sua baixa indutância

Figura 1.1 – Máquina de relutância variável.



Fonte: o autor.

mútua¹, logo, faltas em uma das fases afetam pouco as demais. As fases sadias podem operar normalmente. Tal fato, aliado ao mencionado no parágrafo anterior, torna este tipo de máquina robusto a falhas.

1.1.1 Princípios de Funcionamento e Operação

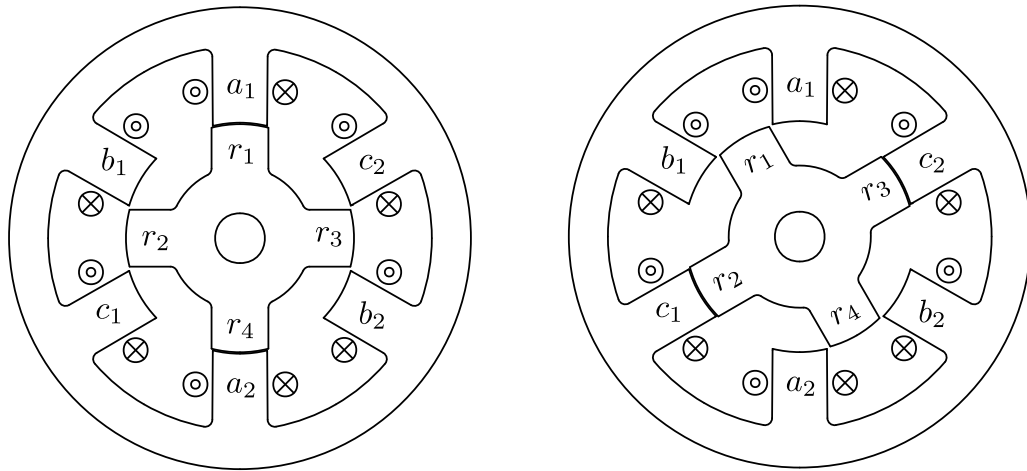
O princípio de funcionamento das SRMs é simples e consiste na geração de torque magnético devido à interação do campo magnético produzido pelos enrolamentos do estator com as diferenças de relutância criadas pelo rotor. Quando um enrolamento é excitado, o rotor tende a se alinhar com os polos do estator correspondentes, buscando o caminho de menor relutância. Sempre há um par de polos do rotor desalinhado com alguma fase do estator, de forma que o acionamento sequencial das fases produz a rotação desejada.

Com o intuito de melhor descrever a operação deste tipo de máquina, considere a Figura 1.2. As bobinas a_1 e a_2 compõem o enrolamento da fase a , enquanto as bobinas b_1 , b_2 , c_1 e c_2 compõem os enrolamentos das fases b e c , respectivamente. O rotor possui quatro polos, r_1 , r_2 , r_3 e r_4 .

Inicialmente, a fase a é energizada e o fluxo magnético estabelecido faz com que r_1 e r_4 sejam atraídos e se alinhem com o eixo magnético desta fase (caminho de menor relutância), como mostra a Figura 1.2a. Sequencialmente, é possível energizar a fase c para que r_2 e r_3 se alinhem com seu eixo magnético e a máquina rotacione no sentido horário,

¹ A indutância mútua pode aumentar dependendo do projeto da máquina, principalmente quanto à escolha da combinação de polos do rotor e do estator. Além disso, existem tipos de máquinas a relutância em que o enrolamento é construído de forma a aumentar a indutância mútua do circuito; são as chamadas máquinas mutuamente acopladas.

Figura 1.2 – Ilustração da operação de uma SRM 6/4 com rotação no sentido horário.

(a) Rotor alinhado com a fase a (b) Rotor alinhado com a fase c

Fonte: o autor.

como apresentado na Figura 1.2b. Em seguida, energiza-se a fase b e a sequência se repete. Para rotação no sentido anti-horário, deve-se energizar primeiramente a fase b , seguida da fase c .

Para o caso descrito acima, nota-se que três energizações consecutivas fazem com que o rotor se mova 90° . Logo, uma volta completa requer 12 energizações sequenciais. Em termos gerais, uma revolução completa exige que cada fase seja energizada um número de vezes igual ao número de polos do rotor.

De forma elementar, esse tipo de máquina pode ser controlado apenas pelo acionamento sequencial de suas fases, o que permite controlar sua velocidade por meio do conversor. Vale ressaltar que, para aplicações que requerem velocidade constante, máquinas síncronas ou de indução são mais indicadas, pois podem ser conectadas diretamente à rede, o que não é possível com as SRMs. Além disso, como demonstrado, o sentido de giro do rotor pode ser alterado invertendo a sequência de chaveamento das fases.

Diante do exposto, este tipo de máquina é adequado para o controle em quatro quadrantes. Como a corrente pode ser unidirecional para a operação em todos os quadrantes, é possível dispor os dispositivos de chaveamento em série com as fases da máquina em diferentes topologias de conversores. Graças a isso, em caso de falta parcial de algum enrolamento, curto-circuito ou falha em alguma chave, a corrente requer um tempo maior para crescer, permitindo o isolamento do defeito pelos dispositivos de proteção. Além disso, neste tipo de conversor não ocorre a falha *shoot-through*, mesmo que os dispositivos de chaveamento apresentem defeito.

1.1.2 Modelagem Matemática da SRM e Análise da Ondulação de Torque

1.1.2.1 Modelagem elétrica básica da SRM

A relutância equivalente do circuito magnético da máquina, \mathcal{R} , apresentada na Figura 1.2 pode ser obtida por meio de (1.1).

$$\mathcal{R}(\theta_r) = \frac{l_m(\theta_r)}{\mu A(\theta_r)} \quad (1.1)$$

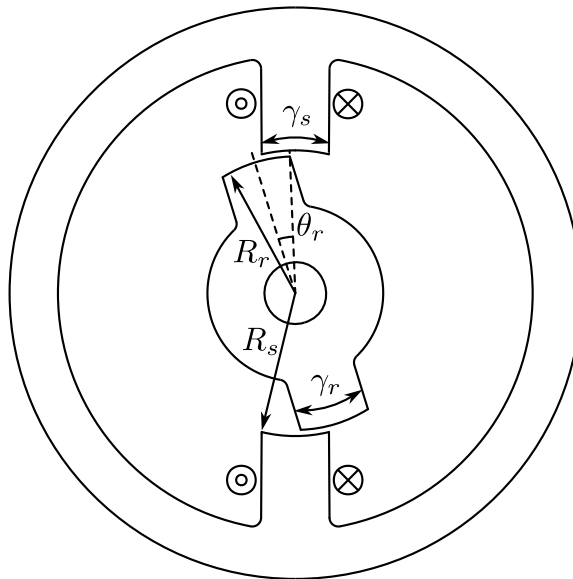
em que $l_m(\theta_r)$ é o comprimento do circuito magnético, μ é a permeabilidade magnética dos materiais, $A(\theta_r)$ é a área da seção transversal e θ_r é o ângulo mecânico do rotor.

Como modelo didático preliminar, o material do núcleo do estator e do rotor podem ser assumidos com permeabilidade magnética infinita, tornando o circuito linear. Nesse caso, a relutância equivalente corresponde à soma da relutância dos dois entreferros. Utilizando-se das variáveis geométricas do motor mostradas na Figura 1.3, é possível calcular o valor da relutância mínima do motor \mathcal{R}_{\min} , por meio de (1.2).

$$\mathcal{R}_{\min} = \frac{2g}{\mu_0 R_s L_{\text{stk}} \gamma} \quad (1.2)$$

em que $g = R_s - R_r$ é o comprimento do entreferro, R_s é o raio do estator, R_r o raio do rotor, L_{stk} é o comprimento do pacote magnético e $\gamma = \min(\gamma_s, \gamma_r)$ é o ângulo de sobreposição entre os polos do rotor e do estator (ponto de relutância mínima).

Figura 1.3 – Geometria de uma SRM monofásica.



Fonte: o autor.

De posse da relutância equivalente mínima, obtém-se a indutância própria máxima da fase por meio de (1.3). Essa expressão é válida sempre que há sobreposição entre os

polos do rotor e do estator. Quando não há sobreposição, a indutância assume um valor mínimo L_{\min} e praticamente constante, resultado do fluxo magnético que atravessa o ar.

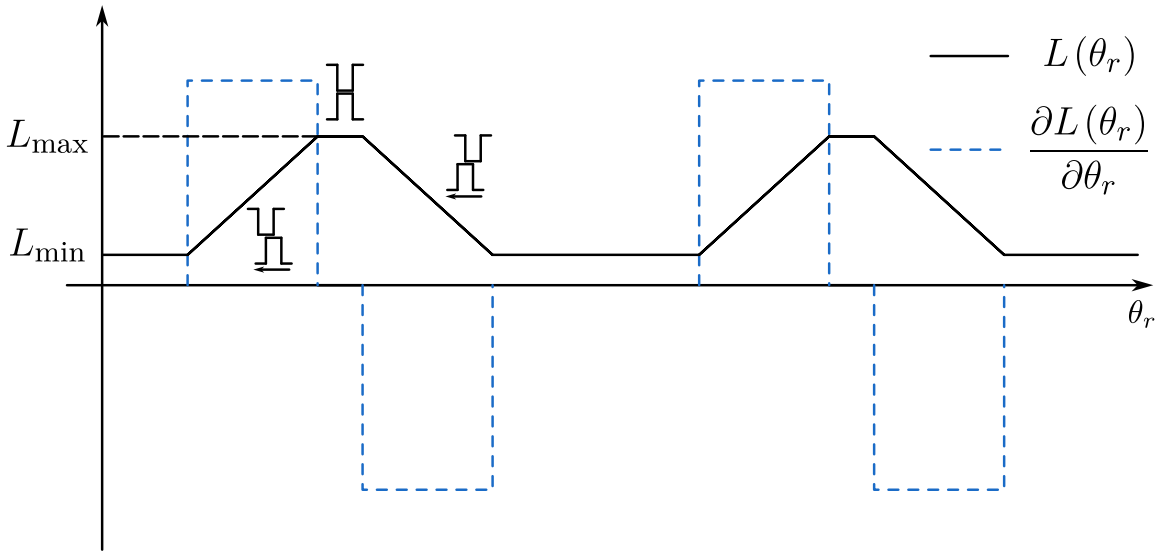
$$L_{\max} = \frac{(2N_C)^2}{\mathcal{R}_{\min}} = \frac{4N_C^2}{\frac{2g}{\mu_0 R_s L_{\text{stk}} \gamma}}$$

$$L_{\max} = 2N_C^2 \frac{\mu_0 R_s L_{\text{stk}} \gamma}{g} \quad (1.3)$$

em que N_C é o número de espiras por bobina.

O perfil ideal da indutância em função da posição do rotor pode ser visualizado na Figura 1.4. Nesta figura, o espalhamento do fluxo foi desconsiderado, resultando em um perfil de indutância com bordas retas.

Figura 1.4 – Perfil ideal da indutância de fase na SRM e sua derivada.



Fonte: o autor.

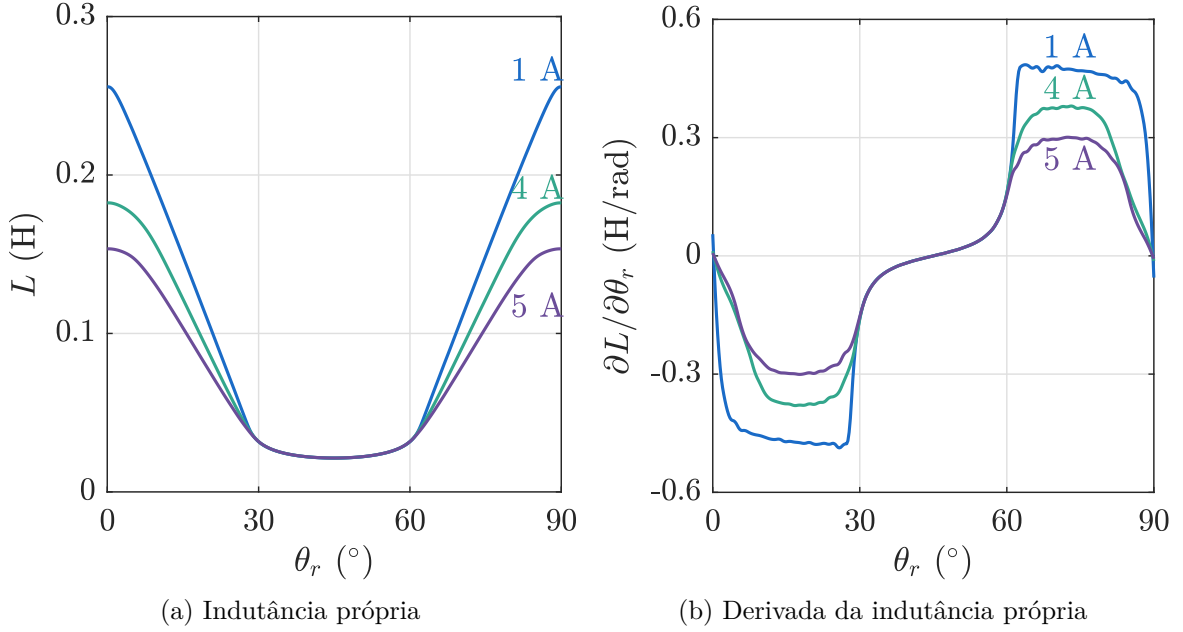
Ainda sob a hipótese de circuito magnético linear, o fluxo concatenado pelo enrolamento da fase k , ψ_k , pode ser expresso em função da indutância própria desse enrolamento, L_k , e da corrente em seus terminais, i_k , conforme (1.4).

$$\psi_k = L_k i_k \quad (1.4)$$

O perfil da indutância própria da fase e de sua derivada, considerando os efeitos de saturação e de espalhamento de fluxo, obtido por meio de análise por elementos finitos (FEA) para a máquina 6/4 utilizada nos experimentos, com parâmetros listados no Apêndice D, é mostrado na Figura 1.5.

Agora, para o desenvolvimento do circuito elétrico equivalente, toma-se a expressão para a tensão v_k aplicada ao enrolamento k , considerando que as demais fases encontram-se desenergizadas, como mostrado em (1.5).

Figura 1.5 – Perfil da indutância própria de uma SRM 6/4 e de sua derivada, considerando o espalhamento do fluxo magnético e a saturação, obtidos via FEA.



Fonte: o autor.

$$\begin{aligned}
 v_k &= r_k i_k + \frac{d\psi_k}{dt} \\
 &= r_k i_k + \frac{d[L_k(i_k, \theta_r) i_k]}{dt} \\
 &= r_k i_k + L_k(i_k, \theta_r) \frac{di_k}{dt} + i_k \frac{\partial L_k(i_k, \theta_r)}{\partial \theta_r} \frac{d\theta_r}{dt} \\
 v_k &= r_k i_k + L_k(i_k, \theta_r) \frac{di_k}{dt} + \omega_r \frac{\partial L_k(i_k, \theta_r)}{\partial \theta_r} i_k
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

em que r_k é a resistência da fase.

O primeiro termo de (1.5) equivale à queda de tensão na resistência do enrolamento, o segundo à queda de tensão na indutância da fase e o terceiro à tensão induzida dada por (1.6). Nota-se que a tensão induzida é não linear e varia com a corrente e a inclinação da indutância em função do ângulo do rotor.

$$e_k = \omega_r \frac{\partial L_k(i_k, \theta_r)}{\partial \theta_r} i_k \tag{1.6}$$

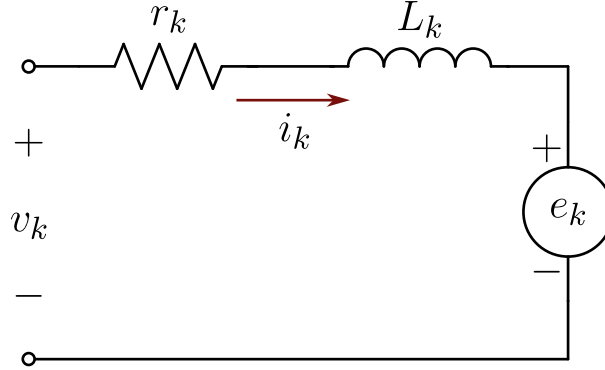
O circuito equivalente obtido pode ser visualizado na Figura 1.6.

Para a obtenção da potência instantânea da máquina, considere primeiramente (1.7).

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} L_k(i_k, \theta_r) i_k^2 \right] = L_k(i_k, \theta_r) i_k \frac{di_k}{dt} + \frac{1}{2} \omega_r \frac{\partial L_k(i_k, \theta_r)}{\partial \theta_r} i_k^2 \tag{1.7}$$

A potência instantânea pode ser obtida multiplicando-se a tensão v_k pela corrente i_k . Utilizando (1.5) e (1.7), obtém-se a expressão para seu cálculo, conforme (1.8).

Figura 1.6 – Circuito elétrico equivalente da SRM.



Fonte: o autor.

$$\begin{aligned}
 P_e &= v_k i_k = \left[r_k i_k + L_k(i_k, \theta_r) \frac{di_k}{dt} + \omega_r \frac{\partial L_k(i_k, \theta_r)}{\partial \theta_r} i_k \right] i_k \\
 &= r_k i_k^2 + L_k(i_k, \theta_r) i_k \frac{di_k}{dt} + \omega_r \frac{\partial L_k(i_k, \theta_r)}{\partial \theta_r} i_k^2 \\
 P_e &= r_k i_k^2 + \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} L_k(i_k, \theta_r) i_k^2 \right] + \frac{1}{2} \omega_r \frac{\partial L_k(i_k, \theta_r)}{\partial \theta_r} i_k^2 \quad (1.8)
 \end{aligned}$$

Na Eq. (1.8), o primeiro termo corresponde às perdas ôhmicas no enrolamento, o segundo à taxa de variação da energia armazenada no campo magnético e o último à potência de entreferro. Percebe-se que a potência de entreferro é equivalente ao produto do torque eletromagnético, calculado por meio de (1.9), pela velocidade do rotor.

$$T_k = \frac{1}{2} \frac{\partial L_k(i_k, \theta_r)}{\partial \theta_r} i_k^2 \quad (1.9)$$

Nota-se que a constante de torque é proporcional à inclinação da indutância em função do ângulo do rotor, o que a torna não linear e, por esta razão, o desenvolvimento de um modelo em regime permanente simples para esta máquina não é possível. Além disso, percebe-se, como mencionado, que o torque não depende do sentido da corrente, haja vista ser função do quadrado da corrente.

1.1.2.2 Produção de torque via energia e coenergia

Em um sistema eletromecânico conservativo, a energia elétrica W_e absorvida pelo sistema converte-se em energia mecânica W_m e em energia armazenada no campo magnético W_f [11, 12, 67]. Em termos diferenciais, essas quantidades relacionam-se conforme (1.10), expressão que guarda analogia formal com a primeira lei da termodinâmica.

$$dW_e = dW_m + dW_f \quad (1.10)$$

A potência elétrica instantânea absorvida pelo circuito é dada por (1.11).

$$P = ei = \frac{dW_e}{dt} \quad (1.11)$$

em que, considerando-se um sistema com apenas um enrolamento, e é a tensão induzida no enrolamento e i a corrente em seus terminais.

A energia armazenada no campo magnético pode ser determinada considerando-se a parte mecânica do sistema mantida em equilíbrio, de modo que $dW_m = 0$. Nessa condição, partindo-se de um estado inicial com fluxo concatenado nulo e evoluindo até o estabelecimento de uma corrente i e de um fluxo concatenado ψ , obtém-se (1.12).

$$W_f = \int_0^\top ei dt' = \int_0^\top \frac{d\psi}{dt'} i dt' = \int_0^\psi i d\psi' \quad (1.12)$$

em que ψ é o fluxo concatenado pelo enrolamento.

Define-se a coenergia magnética W'_f como (1.13), grandeza que, embora não possua significado físico direto, constitui uma ferramenta conveniente para a determinação do torque eletromagnético [11,12,67]. A relação geométrica entre energia e coenergia é ilustrada na Figura 1.7a.

$$W'_f = \psi i - W_f = \int_0^i \psi di' \quad (1.13)$$

A produção de torque em máquinas de relutância variável pode ser determinada a partir dessa abordagem energética sem a necessidade de hipóteses de linearidade magnética. Em um sistema rotativo, a variação da energia mecânica dW_m é dada por (1.14).

$$dW_m = T_e d\theta_r \quad (1.14)$$

em que T_e é o torque eletromagnético e θ_r é a posição do rotor.

Considerando pequenas variações na posição do rotor, admite-se que a corrente permaneça essencialmente constante. Seja o deslocamento do rotor de $\theta_r = \theta_1$, em que o fluxo concatenado é ψ_1 , para $\theta_r = \theta_2$, em que o fluxo passa a ser ψ_2 , mantendo-se a corrente constante e igual a i_0 , conforme ilustrado na Figura 1.7b. Nessa condição, é possível calcular dW_e por meio de (1.15) e dW_f por meio de (1.16).

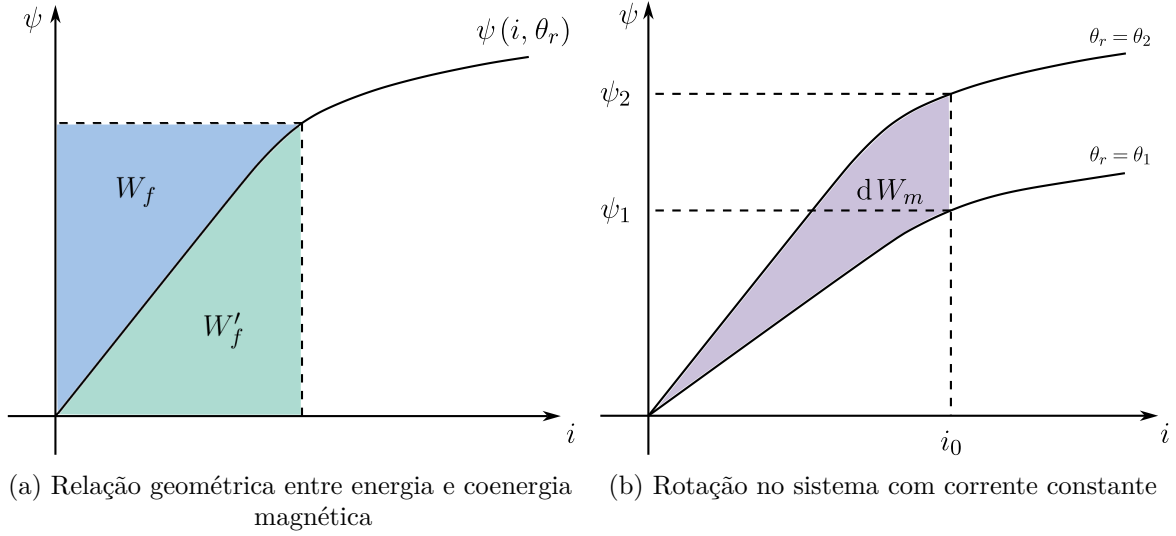
$$dW_e = \int_{\psi_1}^{\psi_2} i d\psi = i_0 (\psi_2 - \psi_1) \quad (1.15)$$

$$dW_f = \int_0^{\psi_2} i(\psi, \theta_2) d\psi - \int_0^{\psi_1} i(\psi, \theta_1) d\psi \quad (1.16)$$

Segue-se, portanto, que, sob corrente constante, vale (1.17).

$$\begin{aligned} dW_e - dW_f &= i_0 (\psi_2 - \psi_1) - \left[\int_0^{\psi_2} i(\psi, \theta_2) d\psi - \int_0^{\psi_1} i(\psi, \theta_1) d\psi \right] \\ &= \psi_2 i_0 - \int_0^{\psi_2} i(\psi, \theta_2) d\psi - \left[\psi_1 i_0 - \int_0^{\psi_1} i(\psi, \theta_1) d\psi \right] \end{aligned}$$

Figura 1.7 – Ilustração da definição de coenergia e variação da energia magnética com corrente constante



$$dW'_f = dW_e - dW_f = dW_m \quad (1.17)$$

Combinando (1.17) com (1.14), obtém-se a expressão geral para o torque, apresentada em (1.18) [11, 12, 67].

$$T_e = \left. \frac{\partial W'_f(i, \theta_r)}{\partial \theta_r} \right|_{i=\text{cte}} \quad (1.18)$$

A formulação anterior, como exposto anteriormente, refere-se a um sistema rotativo com um único enrolamento. Para uma máquina com N fases excitadas, a coenergia é expressa em (1.19).

$$W'_f(\mathbf{i}, \theta_r) = \int_0^{\mathbf{i}} \boldsymbol{\psi}(\mathbf{i}', \theta_r)^\top d\mathbf{i}' \quad (1.19)$$

em que $\boldsymbol{\psi}^\top = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_N)$ e $\mathbf{i}^\top = (i_1, i_2, i_3, \dots, i_N)$.

Sob a hipótese de circuito magnético linear, o vetor de fluxos concatenados $\boldsymbol{\psi}$ pode ser expresso em função do vetor de correntes \mathbf{i} por meio da matriz de indutâncias \mathbf{L} , conforme (1.20).

$$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{L}(\theta_r)\mathbf{i} \quad (1.20)$$

sendo

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} L_1 & M_{12} & M_{13} & \cdots & M_{1N} \\ M_{21} & L_2 & M_{23} & \cdots & M_{2N} \\ M_{31} & M_{32} & L_3 & \cdots & M_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{N1} & M_{N2} & M_{N3} & \cdots & L_N \end{pmatrix}$$

em que L_k é a indutância própria da fase k e M_{km} é a indutância mútua entre as fases k e m . Na SRM, todos esses parâmetros são funções da posição do rotor, θ_r .

Substituindo (1.20) em (1.19), obtém-se (1.21).

$$W'_f = \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{i}} \mathbf{i}'^\top \mathbf{L}(\theta_r) d\mathbf{i}' = \frac{1}{2} \mathbf{i}^\top \mathbf{L}(\theta_r) \mathbf{i} \quad (1.21)$$

Por fim, substituindo-se (1.21) em (1.18), obtém-se a forma matricial do torque eletromagnético dada por (1.22) [11, 12, 67], análoga à expressão (1.9) obtida na seção anterior.

$$T_e = \frac{1}{2} \mathbf{i}^\top \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \theta_r} \mathbf{i} \quad (1.22)$$

em que

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \theta_r} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L_1}{\partial \theta_r} & \frac{\partial M_{12}}{\partial \theta_r} & \frac{\partial M_{13}}{\partial \theta_r} & \dots & \frac{\partial M_{1N}}{\partial \theta_r} \\ \frac{\partial M_{21}}{\partial \theta_r} & \frac{\partial L_2}{\partial \theta_r} & \frac{\partial M_{23}}{\partial \theta_r} & \dots & \frac{\partial M_{2N}}{\partial \theta_r} \\ \frac{\partial M_{31}}{\partial \theta_r} & \frac{\partial M_{32}}{\partial \theta_r} & \frac{\partial L_3}{\partial \theta_r} & \dots & \frac{\partial M_{3N}}{\partial \theta_r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial M_{N1}}{\partial \theta_r} & \frac{\partial M_{N2}}{\partial \theta_r} & \frac{\partial M_{N3}}{\partial \theta_r} & \dots & \frac{\partial L_N}{\partial \theta_r} \end{pmatrix}$$

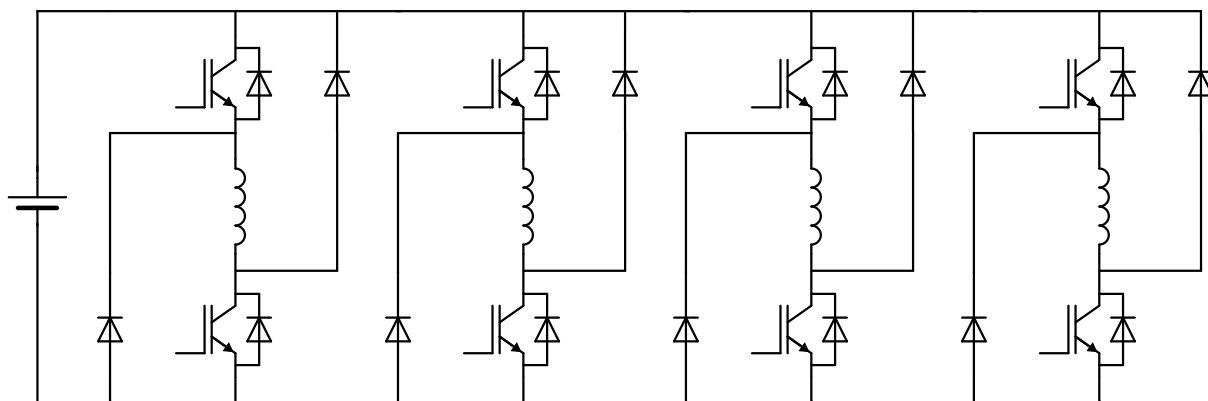
A equação (1.22) evidencia que a produção de torque na SRM é governada pela variação angular da matriz de indutâncias, sendo essa matriz o elemento central da conversão eletromecânica e a base das análises subsequentes.

1.2 O Conversor Meia-Ponte Assimétrico

Como mencionado, nas SRMs o torque eletromagnético produzido depende do quadrado das correntes de fase, portanto, é possível utilizar correntes unipolares em seu controle, permitindo o desenvolvimento de conversores que possuem menos componentes ativos quando comparados aos conversores de ponte completa [11, 12]. Nesse cenário, o Conversor Meia-Ponte Assimétrico (AHB) consolidou-se como a topologia mais adotada no controle de SRMs [68]. Esse conversor recebe esse nome, pois cada braço consiste de duas chaves ativas e dois diodos, arranjados da forma mostrada na Figura 1.8. O conversor AHB permite o controle de cada enrolamento da máquina de forma separada, sendo necessário um braço por fase.

Nesse conversor, é possível controlar as chaves das partes superior e inferior de forma independente, de modo que há três modos de operação: magnetização, roda-livre e desmagnetização, descritos a seguir e ilustrados na Figura 1.9.

Figura 1.8 – Ilustração da topologia de um conversor AHB com quatro braços (fases).



Fonte: o autor.

1. Magnetização: as duas chaves são ligadas simultaneamente, aplicando toda a tensão disponível no barramento diretamente aos enrolamentos do motor, o que permite o crescimento acentuado da corrente e o início da produção de torque;
2. Roda-livre: nesse estado, somente uma chave é mantida excitada, sendo o circuito fechado pelo diodo correspondente. Nessa condição, a fase correspondente é desligada do barramento, o que corresponde a uma tensão nula aplicada em seu enrolamento, fazendo com que a corrente caia de forma lenta, graças às resistências associadas à fase, às conexões e aos dispositivos de estado sólido. Esse estado é útil para o rastreamento da corrente de referência durante o período de condução da fase;
3. Desmagnetização: as duas chaves são desligadas simultaneamente, fazendo com que os diodos conduzam graças à energia magnética armazenada na máquina, resultando na aplicação da tensão negativa do barramento ao enrolamento da fase e, conseqüentemente, na queda mais rápida da corrente do que no modo de roda-livre. Esse estado permite que a energia armazenada no campo magnético seja parcialmente devolvida à fonte de alimentação.

Dessa forma, o conversor AHB permite a definição de duas estratégias de chaveamento. A primeira, conhecida como *soft-switching*, apresenta os três modos de operação descritos anteriormente, conforme a Figura 1.10a, tendo como vantagens a redução das perdas de comutação e das ondulações de corrente, ao custo de um controle mais complexo. Já a segunda, chamada de *hard-switching*, apresenta somente os modos de magnetização e desmagnetização, conforme a Figura 1.10b, tendo como principal vantagem a desmagnetização mais rápida, ao custo de maiores perdas de chaveamento [69].

Com os fundamentos físicos e matemáticos apresentados neste capítulo, estabelecem-se as bases necessárias para o desenvolvimento das estratégias propostas nos capítulos seguintes.

Figura 1.9 – Modos de operação possíveis do conversor AHB.

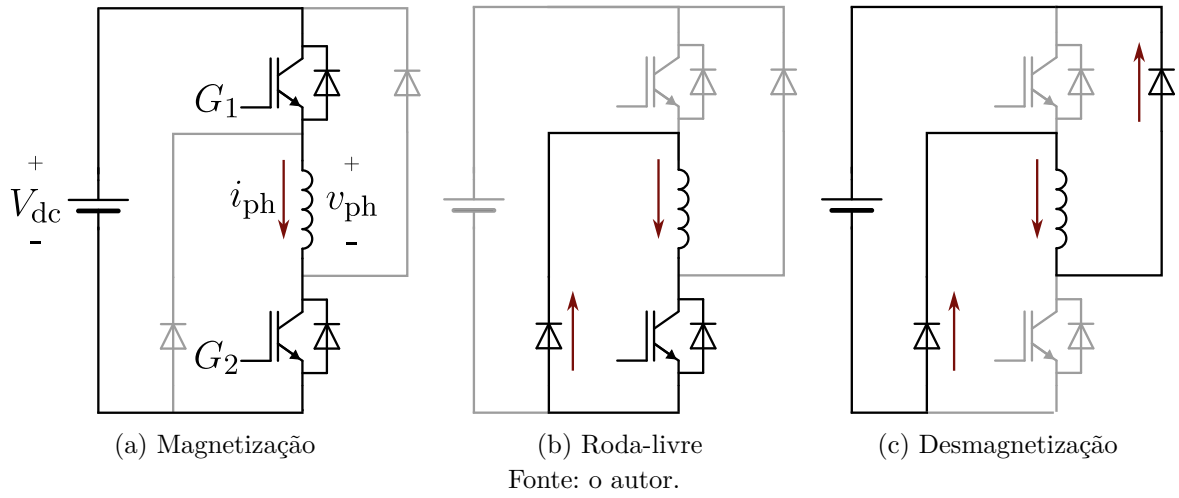
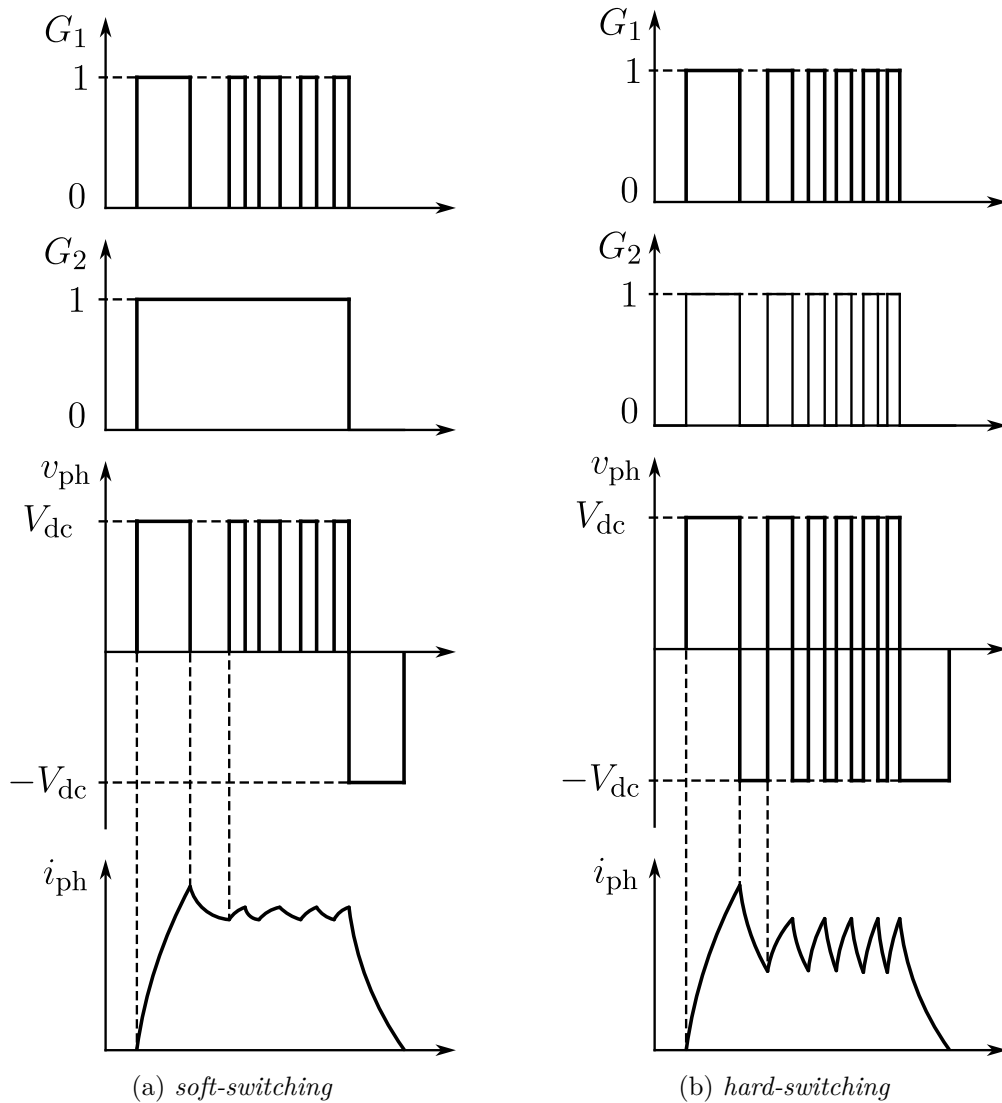


Figura 1.10 – Estratégias de chaveamento possíveis no conversor AHB.



Capítulo 2

Ondulações de Torque, Técnicas para sua Mitigação e Controle MTPA

Este capítulo apresenta uma revisão das origens das ondulações de torque nas SRMs e das técnicas de controle disponíveis na literatura para sua mitigação. Além disso, ao final do capítulo, estabelecem-se as bases conceituais e os requisitos para o controle MTPA de SRMs alimentadas por conversores AHB.

2.1 Origem das Ondulações de Torque

Como já mencionado, uma das maiores desvantagens das SRMs são suas ondulações de torque mais acentuadas do que as de outras topologias, como as PMSMs. Essa característica é inerente à estrutura eletromagnética das SRMs, advinda de sua arquitetura construtiva em dupla saliência e da construção dos enrolamentos, refletindo-se em uma indutância dependente da posição do rotor e na excitação discreta das fases [11–13]. Portanto, não se trata de um fenômeno causado exclusivamente por seu controle ou projeto.

Para a produção de torque, aciona-se uma fase somente quando a derivada da indutância em relação à posição do rotor apresenta sinal compatível com o modo de operação, estabelecendo regiões ativas e inativas ao longo do ciclo elétrico dependendo de a máquina operar como motor ou gerador. Como cada fase atravessa essas regiões em instantes distintos, a soma de suas contribuições dificilmente resulta em um torque uniforme. Além disso, o processo de comutação intensifica esse problema, pois, durante a transferência de corrente de uma fase para a seguinte, pode haver produção de torque contrário pela fase que está saindo, ou a fase que está entrando ainda não produz contribuição significativa de torque, resultando em uma sobreposição imperfeita [11–13].

A saturação magnética reforça o caráter não uniforme descrito anteriormente ao tornar as derivadas das indutâncias dependentes da corrente, distorcendo seu perfil espacial e introduzindo assimetrias. Além da saturação em uma fase causada por si própria, todas as fases compartilham caminhos magnéticos comuns e, mesmo modeladas frequentemente como fracamente acopladas, variações na corrente em uma delas podem alterar o estado magnético local e modificar a indutância efetiva das demais, contribuindo para a complexidade espectral do torque resultante [11–13, 70].

Além das causas estruturais mencionadas anteriormente, existem mecanismos, tanto mecânicos quanto elétricos, alguns comuns a diferentes topologias de máquinas rotativas, que amplificam as ondulações de torque, dentre os quais se destacam:

1. Construção mecânica:

Excentricidade do rotor, variações no entreferro e tolerâncias geométricas introduzem variações locais na distribuição do campo magnético, refletidas em assimetrias no perfil da indutância e, conseqüentemente, em suas derivadas, o que pode acentuar ondulações de torque [71–74].

2. Componentes harmônicas da indutância:

Aspectos construtivos da máquina real divergentes dos idealizados na fase de projeto podem afetar a geometria dos polos e/ou a distribuição espacial do fluxo magnético, resultando no surgimento de componentes harmônicas adicionais na indutância da máquina, as quais tornam-se ainda mais pronunciadas quando consideradas nas derivadas da indutância [71]. Essas componentes podem interagir com as harmônicas da corrente [11–13] e, conseqüentemente, aumentar as ondulações de torque.

3. Componentes harmônicas da corrente: A corrente necessária para produzir torque suave em SRMs apresenta, em geral, um perfil não trivial ao longo da variação da posição do rotor. Na prática, a capacidade de rastrear essa corrente ideal é limitada pelas características do conversor de potência e pela estratégia de chaveamento empregada, como o chaveamento por histerese ou modulação PWM, além das limitações dinâmicas da malha de controle de corrente. Esses fatores introduzem componentes harmônicas adicionais na corrente de fase. Como o torque eletromagnético da máquina depende explicitamente do quadrado da corrente e da derivada da indutância em relação à posição do rotor, tais componentes refletem-se diretamente em ondulações de torque [12].

4. Forma de onda não ideal da corrente:

Considerações adotadas para simplificação do modelo da máquina ou erros na obtenção de seus parâmetros eletromagnéticos podem levar à determinação incorreta da corrente de referência necessária para a produção de torque suave. Isso ocorre porque o cálculo dessa corrente depende diretamente das características magnéticas da máquina, como as curvas de fluxo concatenado e de indutância em função da posição do rotor. Assim, discrepâncias entre o modelo utilizado e o comportamento real da máquina podem resultar em perfis de corrente que não produzem o torque previsto, aumentando as ondulações de torque [11, 12].

5. Erros na medição de corrente:

Erros nas leituras de corrente, causados por *offsets*, atrasos digitais e ruído, podem impedir o rastreamento correto das correntes de referência pela malha de controle, introduzindo variações indesejadas no torque [75, 76].

6. Ondulações no barramento CC:

Flutuações na tensão de alimentação advindas de um barramento CC, seja um banco de baterias ou um retificador, modulam diretamente a tensão aplicada às fases e, portanto, a capacidade de rastreamento da corrente de referência, gerando ondulações adicionais na corrente, i.e., introduzindo novas harmônicas na corrente, o que, conseqüentemente, amplifica os efeitos de ondulação no torque [77].

Esses fatores não criam a ondulação estrutural, já presente devido à dependência explícita da posição do rotor, mas podem aumentar sua magnitude e alterar seu conteúdo espectral.

As conseqüências das ondulações de torque manifestam-se mecanicamente na forma de ondulação de velocidade, vibração estrutural, ruído acústico, excitação de modos de ressonância e aumento de esforços dinâmicos em mancais e acoplamentos, podendo comprometer desempenho, confiabilidade e vida útil do sistema [74].

Dessa forma, a ondulação de torque em máquinas de relutância variável deve ser compreendida como um fenômeno estrutural associado à variação espacial da energia magnética, cujo nível é influenciado por fatores mecânicos e elétricos, sendo inevitável enquanto a conversão eletromecânica permanecer baseada na variação da relutância com a posição angular do rotor [11–13]; ainda assim, passível de mitigação por meio de técnicas de controle, como as descritas a seguir.

2.2 Técnicas Clássicas de Mitigação das Ondulações de Torque via Controle

De forma similar a outras topologias de máquinas elétricas, as ondulações de torque na SRM podem ser reduzidas por meio do projeto da máquina e/ou de técnicas de controle. Essas últimas usualmente apresentam melhor relação custo-benefício do que as primeiras, uma vez que diversas soluções de projeto resultam em geometrias não convencionais que afetam a economia de escala e/ou são complexas de construir. Ademais, as técnicas de controle são mais flexíveis, podendo ser aplicadas a diferentes máquinas e abranger uma faixa mais ampla de pontos de operação do acionamento, enquanto técnicas de projeto usualmente utilizam otimizações voltadas a pontos de operação específicos.

No âmbito das técnicas de controle, é possível distinguir diferentes níveis de atuação, que vão desde a definição da temporização de excitação das fases até a construção explícita

de referências de corrente ou torque e, por fim, o projeto da dinâmica de seguimento em malha fechada. Essa distinção é importante, pois cada classe de técnica atua sobre mecanismos distintos de formação das ondulações de torque.

2.2.1 Otimização dos ângulos de comutação

A técnica de controle mais elementar das SRMs consiste no ajuste dos ângulos de disparo, tanto de excitação quanto de desligamento de cada fase, em função da posição do rotor. Esta estratégia pode ser aprimorada por meio de técnicas de otimização, inclusive multiobjetivo, com o intuito de obter os ângulos de comutação ótimos e, dessa forma, deslocar a região ativa de produção de torque para intervalos angulares nos quais as ondulações de torque são menores, evitando ainda regiões em que há produção de torque contrário ao movimento. Trata-se, essencialmente, de um ajuste de temporização da excitação das fases.

A limitação dessa abordagem é estrutural, uma vez que o ângulo ótimo depende da velocidade, da carga e do nível de saturação. Assim, embora seja capaz de atenuar picos específicos de ondulação de torque, essas abordagens apresentam limitações e, mesmo quando integradas a estratégias de controle instantâneo, continuam restritas ao ajuste dos instantes de comutação. A forma de corrente ao longo do intervalo de condução permanece subordinada à dinâmica elétrica natural das fases, não sendo explicitamente moldada para compensar as não linearidades associadas à variação da indutância com a posição e o nível de saturação da máquina.

Em [31], os ângulos de comutação foram otimizados *offline* por meio de simulações, considerando dois cenários distintos de otimização. O primeiro visa maximizar o torque por ampère (TPA), definido como a razão entre o torque médio produzido e a corrente de referência. O segundo busca minimizar as ondulações de torque, modeladas como a razão entre o valor eficaz do torque e seu valor médio. Os ângulos ótimos obtidos foram armazenados em tabelas de consulta bidimensionais (LUTs) em função da velocidade e da corrente e posteriormente validados experimentalmente. Observou-se que o critério de maximização do TPA apresentou melhor desempenho em altas velocidades, enquanto o critério de minimização da ondulação de torque mostrou-se mais eficaz em baixas rotações.

Em [32], adotam-se aproximações com perfil idealizado da indutância em função da posição do rotor. A partir dessas hipóteses simplificadoras, são deduzidas expressões analíticas para os ângulos ótimos de condução em função da velocidade e dos parâmetros elétricos da fase. Tais expressões permitem a atualização *online* dos ângulos de disparo com base na velocidade medida, possibilitando compensar parcialmente os efeitos dinâmicos associados ao encurtamento do intervalo efetivo de magnetização em altas rotações.

O trabalho em [33] propõe um algoritmo adaptativo para o ajuste do ângulo de

início de condução. Com base em simplificações do modelo eletromagnético, obtém-se uma condição analítica para o ângulo ótimo de desligamento, dependente do ângulo de início. O objetivo principal é a redução das ondulações de torque associada à melhoria da eficiência global. A determinação dos ângulos é realizada de forma *online*, dispensando o conhecimento explícito das curvas completas de magnetização, o que reduz a complexidade computacional.

Por fim, em [34], considera-se um esquema de *Direct Instantaneous Torque Control* (DITC), no qual, após simplificações da equação de tensão da fase, incluindo a exclusão dos efeitos das resistências de fase, são obtidas expressões analíticas para o cálculo dos ângulos de excitação e desligamento. Esses ângulos são funções do fluxo concatenado correspondente a um determinado valor de torque de referência, obtido a partir de uma LUT que relaciona torque à corrente e à posição do rotor. Assim, os ângulos que maximizam o torque por ampère ou, equivalentemente, reduzem a corrente necessária para produzir um torque especificado, são calculados *online* com base nessas expressões e nas tabelas previamente determinadas.

Assim, conclui-se que o ajuste dos ângulos de comutação é uma das estratégias mais simples e tradicionais para o controle de SRMs, devido à baixa complexidade computacional e à facilidade de implementação. A otimização desses ângulos permite reduzir parcialmente as ondulações de torque ao melhorar o aproveitamento do intervalo de produção de torque. Entretanto, a técnica atua apenas sobre os instantes de excitação e desligamento das fases, não controlando diretamente o perfil de corrente durante a condução.

2.2.2 Estratégias Baseadas na Geração de Referências

Diferentemente das estratégias baseadas exclusivamente na temporização de comutação, as técnicas apresentadas nesta seção atuam diretamente na definição das formas de onda desejadas de corrente ou torque ao longo da posição do rotor. O objetivo é moldar explicitamente a excitação das fases de modo a reduzir intrinsecamente as ondulações de torque, promovendo transições mais suaves entre regiões de condução e uma distribuição mais uniforme da produção de torque entre as fases.

2.2.2.1 Perfilamento de Corrente

Essa técnica consiste na obtenção de perfis ótimos de corrente de modo a compensar localmente variações da derivada da indutância, usualmente utilizando parâmetros estáticos da SRM. Esses perfis são obtidos para diferentes condições de operação, i.e., valores discretos de torque de referência. Uma vez obtidos, os perfis são então armazenados em tabelas de consulta (*look-up tables* – LUTs) e, durante a operação da máquina, para uma determinada condição, o perfil de corrente ótimo é obtido por meio de interpolação dos pontos discretos contidos na LUT e rastreado por meio de controladores de corrente.

Este tipo de técnica requer memória para armazenamento dos dados, pois, para aumentar sua precisão, mais pontos discretos devem ser calculados e armazenados. Além disso, exige um controlador de corrente robusto e um barramento CC estável para aprimorar o rastreamento do perfil de corrente ótimo. Todavia, a eficácia do método depende criticamente da fidelidade do modelo magnético utilizado, sendo saturações não modeladas, variações térmicas ou dispersões geométricas fatores que comprometem o perfil ótimo de corrente.

Em [35], uma formulação de otimização multiobjetivo é empregada para determinar perfis de corrente que minimizem simultaneamente as ondulações de torque, as forças radiais e as ondulações da corrente no barramento CC. O processo é conduzido de forma *offline*, sendo os perfis resultantes associados a diferentes ponderações na função de custo, o que conduz a diferentes compromissos entre desempenho eletromagnético e qualidade de energia. Embora abrangente em termos de objetivos, a solução permanece baseada em LUTs e depende da acurácia dos modelos analíticos utilizados para estimativa de torque e forças radiais.

Em [36], o perfil de corrente é desenvolvido a partir da análise espectral da indutância da máquina. Considera-se que, para a produção de torque médio, a interação dominante ocorre entre a componente fundamental da indutância e as componentes harmônicas da corrente. A partir dessa análise, o perfil ótimo é obtido maximizando o torque médio para um valor fixo de corrente eficaz, sendo inicialmente deduzido como uma forma de onda rica em harmônicos. Considerando os efeitos de saturação, a otimização prática restringe-se a ordens harmônicas baixas. A forma de onda obtida é originalmente bipolar e, para aplicação em inversores do tipo AHB, é convertida em forma unipolar, desprezando-se as porções negativas da corrente. O método mostra-se particularmente adequado para aplicações em baixa velocidade, onde as limitações impostas pela força contraeletromotriz são reduzidas e o rastreamento do perfil de corrente ótimo pode ser realizado de forma adequada.

Em [37], propõe-se um perfil de corrente baseado em funções análogas às funções de compartilhamento de torque, denominadas funções de contorno. O foco reside na redução das ondulações de torque durante o intervalo de comutação entre fases. As características estáticas entre torque, corrente e posição são obtidas *offline* e armazenadas em LUTs. Durante a operação, o torque de referência é utilizado para determinar, via consulta à tabela, o perfil de corrente desejado, o qual é então rastreado por um controlador PWM que aciona o inversor.

Em [38], o perfil de corrente é parametrizado por meio da injeção de harmônicos na corrente de fase, sendo os coeficientes determinados por um processo de otimização multiobjetivo. O objetivo é reduzir simultaneamente as ondulações de torque e as forças radiais, sujeito a restrições de torque médio, corrente máxima e variação admissível do

fluxo concatenado. A otimização é realizada *offline*, e os perfis são armazenados em LUTs em função do torque de referência e da posição do rotor. A corrente de referência é então reconstruída e rastreada pelo controlador da máquina.

Por fim, em [39], propõe-se um perfil de corrente que considera até a terceira harmônica, incorporando explicitamente a influência da força contraeletromotriz em regime de velocidade média. O objetivo principal é a redução da força radial, visando à mitigação do ruído acústico. Para tanto, adota-se um modelo não linear da indutância, expresso por meio de séries de Fourier cujos coeficientes são funções polinomiais da corrente. Dessa forma, modela-se a dependência da indutância em relação à posição e à corrente, permitindo o cálculo de perfis que reduzam a variação resultante das forças radiais mesmo sob limitação de tensão do inversor.

Diante do exposto, nota-se que a obtenção de perfis ótimos de corrente constitui uma abordagem amplamente explorada para mitigação das ondulações de torque em SRMs, principalmente devido à sua capacidade de incorporar diretamente as características eletromagnéticas da máquina na forma da corrente de referência. Entretanto, essa abordagem apresenta limitações inerentes, uma vez que os perfis são geralmente obtidos *offline* a partir de modelos estáticos da máquina e armazenados em LUTs, podendo perder eficácia quando há variações de parâmetros ou condições de operação não previstas durante o processo de otimização. Além disso, grande parte dos trabalhos considera apenas modelos simplificados da indutância e negligencia o efeito das indutâncias mútuas entre fases.

2.2.2.2 Funções de Compartilhamento de Torque

As funções de compartilhamento de torque têm o objetivo de redistribuir o torque de referência entre as fases. Como a produção de torque nesse tipo de máquina possui natureza discreta, o torque total produzido é igual à soma dos torques gerados por cada fase individualmente. Nessa técnica, busca-se suavizar a soma das contribuições individuais durante a comutação, i.e., minimizar descontinuidades na transição entre fases, momento em que há maior geração de ondulações de torque.

Seja T_e^* o torque de referência a ser distribuído entre as fases k e m na forma apresentada em (2.1).

$$T_e^* = T_k + T_m \quad (2.1)$$

nessa expressão, T_e^* é o torque de referência a ser distribuído, T_k é a contribuição de torque fornecida pela fase k e T_m é a contribuição de torque fornecida pela fase m .

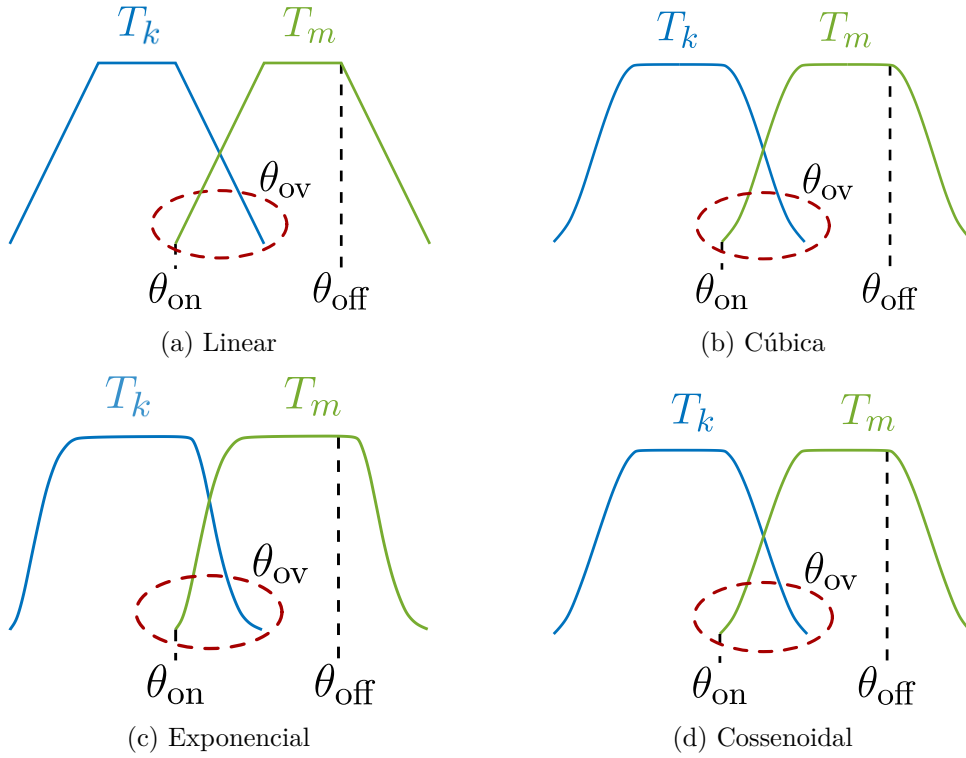
Por sua vez, os torques de fase são calculados por meio de (2.2) e (2.3).

$$T_k = f_k(\theta_r) T_e^* \quad (2.2)$$

$$T_m = f_m(\theta_r) T_e^* \quad (2.3)$$

As funções f_k e f_m são as chamadas funções de compartilhamento de torque e podem ser subdivididas em lineares, conforme a Figura 2.1a, e não lineares, sendo as mais comuns a cúbica, mostrada na Figura 2.1b, a exponencial, apresentada na Figura 2.1c, e a cossenoidal, representada na Figura 2.1d. As funções não lineares emulam o comportamento não linear da própria SRM, sendo, usualmente, mais eficazes na mitigação das ondulações de torque.

Figura 2.1 – Ilustração dos diferentes tipos de funções de compartilhamento.



Fonte: o autor.

Conforme a Figura 2.1, uma função de compartilhamento de torque f pode ser representada por meio de (2.4). Nesta equação, as funções f_{sub} e f_{des} assumem as formas apresentadas em (2.5), (2.6), (2.7) e (2.8), conforme a TSF adotada (linear, cúbica, exponencial ou cossenoidal).

$$f(\theta_r) = \begin{cases} f_{\text{sub}}(\theta_r), & \text{se } \theta_{\text{on}} \leq \theta_r < \theta_{\text{on}} + \theta_{\text{ov}} \\ 1, & \text{se } \theta_{\text{on}} + \theta_{\text{ov}} \leq \theta_r < \theta_{\text{off}} \\ f_{\text{des}}(\theta_r), & \text{se } \theta_{\text{off}} \leq \theta_r < \theta_{\text{off}} + \theta_{\text{ov}} \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\text{Linear: } \begin{cases} f_{\text{sub}}(\theta_r) = \frac{\theta_r - \theta_{\text{on}}}{\theta_{\text{ov}}} \\ f_{\text{des}}(\theta_r) = 1 - \frac{\theta_r - \theta_{\text{off}}}{\theta_{\text{ov}}} \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\text{Cúbica: } \begin{cases} f_{\text{sub}}(\theta_r) = 3 \left(\frac{\theta_r - \theta_{\text{on}}}{\theta_{\text{ov}}} \right)^2 - 2 \left(\frac{\theta_r - \theta_{\text{on}}}{\theta_{\text{ov}}} \right)^3 \\ f_{\text{des}}(\theta_r) = 1 - 3 \left(\frac{\theta_r - \theta_{\text{off}}}{\theta_{\text{ov}}} \right)^2 + 2 \left(\frac{\theta_r - \theta_{\text{off}}}{\theta_{\text{ov}}} \right)^3 \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\text{Exponencial: } \begin{cases} f_{\text{sub}}(\theta_r) = 1 - \exp \left[-\frac{(\theta_r - \theta_{\text{on}})^2}{\theta_{\text{ov}}} \right] \\ f_{\text{des}}(\theta_r) = \exp \left[-\frac{(\theta_r - \theta_{\text{off}})^2}{\theta_{\text{ov}}} \right] \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\text{Cossenoidal: } \begin{cases} f_{\text{sub}}(\theta_r) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \left[\pi \frac{(\theta_r - \theta_{\text{on}})}{\theta_{\text{ov}}} \right] \\ f_{\text{des}}(\theta_r) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \left[\pi \frac{(\theta_r - \theta_{\text{off}})}{\theta_{\text{ov}}} \right] \end{cases} \quad (2.8)$$

Uma vez definida a contribuição de cada fase na produção do torque de referência, deve-se obter o perfil de corrente de fase que produza o torque calculado para aquela fase. Comumente, essa corrente é obtida por meio de LUTs.

Em [44], partindo da observação de que o torque da SRM apresenta comportamento aproximadamente quadrático em relação à corrente na região não saturada e tende a uma dependência linear sob saturação magnética, propõe-se o modelo descrito em (2.9), no qual L_{0p} representa a derivada da indutância não saturada da fase considerada. Tanto L_{0p} quanto f_r podem ser obtidos experimentalmente a partir das características estáticas da máquina. O expoente h determina a taxa de transição entre os regimes quadrático e linear do torque em função da corrente. A principal vantagem dessa modelagem reside na possibilidade de obtenção analítica da corrente em função do torque, conforme (2.10), eliminando a necessidade de LUTs tridimensionais e permitindo sua aplicação direta em estratégias de controle em tempo real.

$$T_e(\theta_r, i) = \frac{1}{2} \frac{L_{0p}(\theta_r)}{[1 + f_r(\theta_r) i^h]^{1/h}} i^2 \quad (2.9)$$

$$i(\theta_r, T_e) = \frac{2T_e}{L_{0p}} \left[\frac{f_r}{2} + \sqrt{\frac{f_r^2}{4} + \left(\frac{L_{0p}}{2T_e} \right)^h} \right]^{1/h} \quad (2.10)$$

Em [41], propõe-se uma TSF cuja definição é estendida para além da região estritamente positiva de produção de torque, permitindo que a corrente disponha de tempo suficiente para crescer ou decair antes da região de maior contribuição eletromagnética. Essa extensão melhora o desempenho em altas velocidades, onde a limitação imposta pela

força contraeletromotriz compromete a capacidade de rastreamento da corrente. Além disso, são introduzidas funções de custo voltadas à minimização das perdas ôhmicas e dos requisitos de tensão do conversor, estabelecendo explicitamente o compromisso entre eficiência e capacidade de torque–velocidade.

Em [46], algoritmos genéticos são empregados para otimizar os ângulos de acionamento da TSF com o objetivo de minimizar simultaneamente a corrente eficaz das fases e a variação do fluxo concatenado. Os ângulos ótimos são obtidos *offline* e posteriormente aproximados por polinômios de mínimos quadrados, cujos coeficientes permitem a determinação *online* dos ângulos de condução. Embora reduza o custo computacional em tempo real, a abordagem permanece dependente de caracterização prévia da máquina.

Em [42], uma TSF não linear é proposta, incorporando explicitamente a equação de torque da SRM e, portanto, os efeitos da não linearidade magnética. A estratégia define o torque de cada fase durante a comutação por meio de uma lógica não linear que regula dinamicamente as correntes das fases adjacentes, reduzindo o número de comutações e as perdas por chaveamento. Uma vez determinados os torques de fase, as correntes de referência são obtidas por meio de LUTs que relacionam torque, posição e corrente.

Em [40], é introduzida uma nova família de TSFs, com formato semelhante a uma função sigmoideal e conceitualmente próxima à abordagem de [42]. A otimização de um coeficiente estrutural da função permite reduzir o pico da corrente de fase, influenciando diretamente as perdas no cobre e os requisitos do conversor. A conversão torque–corrente é realizada assumindo $h = 3$ em (2.10), resultando em duas TSFs otimizadas a partir da família proposta: uma voltada à redução das ondulações de torque e outra à maximização da capacidade de torque–velocidade da SRM.

Em [47], considera-se uma formulação multiobjetivo em que a função de custo inclui os termos quadráticos das correntes das fases que entram e saem da condução, bem como os quadrados de suas derivadas em relação à posição. Tal inclusão penaliza explicitamente variações abruptas de corrente, associadas a maiores exigências de tensão. Permite-se ainda que o ângulo de desligamento se estenda à região de produção negativa de torque, ampliando a flexibilidade da TSF. Assim como em [40], adota-se $h = 3$ em (2.10) para obtenção analítica das correntes de referência a partir dos torques de fase.

Em [43], propõe-se uma TSF otimizada com foco simultâneo na minimização da ondulação de torque e das perdas no cobre. O problema de otimização considera explicitamente as correntes da fase que entra e da fase que sai da condução, incluindo na função de custo um termo que penaliza a corrente remanescente da fase em desligamento. Para assegurar adequado rastreamento das correntes, são incorporadas restrições relacionadas à variação do fluxo concatenado, aproximando a formulação das limitações dinâmicas impostas pelo sistema elétrico.

Por fim, em [45], apresenta-se uma TSF *online* que busca minimizar tanto as perdas ôhmicas quanto as ondulações de torque. O processo de otimização é estruturado em dois níveis: um laço externo ajusta o ângulo de desligamento visando à redução das perdas, enquanto um laço interno atua na minimização das ondulações de torque e na manutenção do torque médio dentro de limites aceitáveis. A corrente de referência é calculada considerando três estágios operacionais do laço interno, utilizando-se LUTs para a conversão de torque em corrente. Diferentemente das abordagens estritamente *offline*, essa estratégia incorpora explicitamente a dinâmica da corrente e os efeitos da força contraeletromotriz, ampliando a faixa efetiva de operação.

Portanto, verifica-se que as funções de compartilhamento de torque constituem uma das estratégias mais difundidas para mitigação das ondulações de torque em SRMs, sendo amplamente empregadas devido à sua relativa simplicidade de implementação e à flexibilidade para adaptação a diferentes condições de operação. Entretanto, na maioria das abordagens relatadas na literatura, a obtenção das correntes de referência ainda depende de LUTs ou de modelos simplificados da máquina, e os efeitos das indutâncias mútuas entre fases raramente são considerados.

2.2.3 Estratégias Baseadas em Controle

Enquanto as técnicas anteriores concentram-se na construção da referência ou na definição da região de atuação das fases, as estratégias baseadas em controle atuam sobre a dinâmica de seguimento dessas referências em malha fechada. Nesse contexto, métodos como controle vetorial e controle preditivo são empregados para melhorar o desacoplamento entre variáveis (por meio de simplificações), aumentar a largura de banda do sistema e reduzir erros de rastreamento, contribuindo indiretamente para a mitigação das ondulações de torque.

2.2.3.1 Controle Preditivo

O controle preditivo baseia-se na utilização explícita de modelos dinâmicos da máquina e do conversor com o intuito de prever o comportamento futuro das correntes e, portanto, do torque ao longo de um horizonte finito de predição. Para cada ciclo de controle, os possíveis estados de chaveamento do conversor são avaliados por meio de funções de custo, usualmente associadas à minimização das ondulações de torque e de corrente. O estado de chaveamento ótimo, selecionado para acionar o conversor, é aquele que minimiza a função de custo definida.

Essa abordagem apresenta elevada flexibilidade, pois permite considerar a dinâmica elétrica da máquina, as restrições do conversor e os efeitos não lineares do circuito magnético. Esse método é capaz de operar em diferentes pontos de operação, sem a necessidade de perfis de corrente previamente computados *offline* e armazenados em LUTs, pois, nessa

abordagem, a forma de onda da corrente resulta de um processo de otimização *online*, o que o torna atrativo para mitigação das ondulações de torque em uma ampla faixa de operação, seja de velocidade ou de carga.

Todavia, o desempenho do controle preditivo está ligado diretamente à eficácia do modelo eletromagnético utilizado, à capacidade computacional disponível e à qualidade da tensão do barramento CC. Incertezas paramétricas podem afetar a obtenção do estado de chaveamento ótimo, enquanto variações na tensão do barramento impedem a aplicação da tensão necessária. Quanto à capacidade computacional, a avaliação de múltiplos estados de chaveamento a cada período de amostragem impõe elevado custo de processamento, o qual cresce com o número de fases consideradas, pois a quantidade de vetores de tensão possíveis aumenta significativamente.

Em [50], propõe-se um método de controle preditivo de corrente com frequência de chaveamento fixa. O objetivo é melhorar o rastreamento da corrente de referência, especialmente em aplicações sensíveis às ondulações de torque e ao ruído acústico. O controlador baseia-se na previsão da tensão necessária para que a corrente alcance o valor de referência no próximo período de amostragem, considerando explicitamente os efeitos da resistência da fase, da indutância incremental e da força contraeletromotriz. A determinação da tensão requerida permite calcular diretamente o ciclo de trabalho do PWM para cada fase. Dessa forma, obtém-se melhor desempenho dinâmico em comparação aos controladores PI e aos controladores por histerese, ao mesmo tempo em que se mantém a frequência de chaveamento constante.

Em [51], considera-se um controle preditivo de torque do tipo *Finite Control Set Model Predictive Control* (FCS-MPC). O trabalho propõe um método *online* para ajuste do ângulo de desligamento das fases, com o objetivo de reduzir a produção de torque negativo durante a desmagnetização. Parte-se da hipótese de que o intervalo de tempo em que a fase permanece na região de geração deve ser aproximadamente igual ao intervalo entre o instante de desligamento e a posição de alinhamento. Para prever a corrente durante o processo de desmagnetização, assume-se um comportamento linear da indutância, o que permite obter uma expressão analítica para a corrente a partir da solução de uma equação diferencial linear. A função de custo considera simultaneamente as ondulações de torque e as perdas ôhmicas, buscando reduzir a corrente eficaz das fases e melhorar a eficiência do acionamento.

Em [52], apresenta-se um estudo abrangente sobre técnicas de controle preditivo aplicadas a acionamentos de SRMs. O trabalho classifica os métodos existentes em diferentes categorias, como controle preditivo generalizado, controle *deadbeat* e controle preditivo baseado em modelos. A análise mostra que grande parte das técnicas de modelagem utilizadas na literatura baseia-se em aproximações por séries de Fourier ou em mapas estáticos obtidos experimentalmente. Embora tais abordagens permitam representar as

características não lineares da máquina, elas geralmente exigem esforço computacional *offline* significativo ou grande capacidade de armazenamento de dados. O estudo também destaca que o controle preditivo de corrente do tipo *deadbeat* é uma das abordagens mais frequentemente empregadas. Por fim, aponta-se que aplicações de SRMs em sistemas de maior potência, particularmente em sistemas de tração, ainda representam um campo promissor para o desenvolvimento de novas estratégias de controle.

Em [49], propõe-se um método de controle preditivo de torque baseado em *Continuous Control Set Model Predictive Control* (CCS-MPC). Para contornar a forte não linearidade das características eletromagnéticas da SRM, os autores introduzem um modelo equivalente linear da máquina. Esse modelo baseia-se na determinação de uma corrente linear equivalente capaz de produzir o mesmo torque ou fluxo concatenado que a corrente real da máquina. Com essa aproximação, torna-se possível formular o problema de otimização de forma analítica. A função de custo inclui termos associados à minimização das ondulações de torque e das perdas ôhmicas, além de um termo de penalização para correntes que excedam o limite máximo admissível. Restrições adicionais são impostas ao problema para garantir que os torques das fases que entram e saem da condução permaneçam dentro de limites fisicamente realizáveis durante os intervalos de magnetização e desmagnetização. O problema de otimização é então resolvido por meio do método dos multiplicadores de Lagrange em conjunto com as condições de Karush–Kuhn–Tucker.

Em [48], para modelar o comportamento do torque e da corrente, utiliza-se um modelo baseado em séries de Fourier, cujos coeficientes são identificados *offline*. Essa representação reduz significativamente a quantidade de memória necessária para implementação do controle quando comparada a abordagens baseadas em LUTs tridimensionais. A função de custo considera simultaneamente as ondulações de torque e as perdas ôhmicas. Para a distribuição do torque de referência entre as fases, adota-se uma função de compartilhamento de torque (TSF) cossenoidal. Devido ao tempo computacional requerido pelo algoritmo de controle, os cálculos são realizados considerando estados previstos dois passos de amostragem à frente, mitigando atrasos de processamento. O processo de otimização consiste na seleção dos estados de tensão do inversor (correspondentes aos três estados possíveis do conversor descritos na Seção 1.2) que minimizam a função de custo definida.

Observa-se que o controle preditivo apresenta elevada flexibilidade para o acionamento das SRMs, pois permite incorporar explicitamente a dinâmica da máquina, as restrições do conversor e critérios de desempenho diretamente na função de custo. Dessa forma, a forma de onda da corrente resulta de um processo de otimização *online*, dispensando perfis previamente definidos. Entretanto, o desempenho do método depende fortemente da fidelidade do modelo eletromagnético utilizado e da capacidade computacional disponível para resolver o problema de otimização em tempo real considerando os diferentes estados de chaveamento do conversor. Assim, simplificações no modelo da

máquina são frequentemente adotadas para reduzir o custo computacional, o que pode comprometer a precisão da solução obtida.

2.2.3.2 Controle Vetorial

Nas SRMs, a utilização do controle vetorial clássico, utilizado, por exemplo, nas PMSMs, é dificultada pela forte não linearidade da máquina, pela ausência de fluxo aproximadamente senoidal e pela forte dependência angular da indutância. Como consequência, as transformações clássicas utilizadas não resultam em parâmetros constantes no referencial $dq0$, nem permitem o desacoplamento dos eixos. Assim, as técnicas que visam ao controle vetorial da SRM usualmente empregam diversas simplificações que podem não resultar em controle ótimo em diferentes regiões de operação.

Em [53], propõe-se uma nova transformação de eixos baseada na teoria de Floquet, assumindo que a máquina não possui indutâncias mútuas. A aplicação dessa transformação não elimina completamente a dependência angular das equações da máquina, mas permite expressá-las em uma forma estruturalmente semelhante à encontrada em outras máquinas elétricas.

Em [54], propõe-se uma transformação genérica para máquinas elétricas baseada em uma extensão das transformações de Blondel e Park, com o objetivo de eliminar a dependência angular dos parâmetros. Entretanto, são estabelecidas condições necessárias para a validade da transformação. Quando aplicada a uma máquina de relutância variável, assume-se que a indutância possui apenas uma componente contínua e a primeira harmônica.

Em [55], propõe-se a utilização de vetores complexos para modelar a expressão do torque em SRMs não saturadas. Diferentemente das máquinas AC convencionais, o modelo reflete explicitamente o fato de que o torque depende do quadrado da corrente. Inicialmente considera-se um modelo em que todas as fases conduzem simultaneamente; contudo, como sempre existe uma fase que produziria torque negativo, o modelo é posteriormente refinado para considerar diferentes combinações de fases ativas dependendo do número de fases da máquina. Para máquinas trifásicas, há regiões em que apenas uma ou duas fases conduzem; para máquinas de quatro fases, sempre há duas fases conduzindo; e para máquinas com cinco ou mais fases existem regiões em que três fases participam da produção de torque. Por fim, propõe-se um método iterativo para obtenção de torque suave em máquinas saturadas utilizando valores da derivada da indutância em pontos específicos de operação.

Em [56], compara-se o acionamento de SRMs utilizando correntes unipolares quadradas e correntes bipolares, tanto senoidais quanto quadradas. A análise é realizada utilizando o tensor de estresse de Maxwell. A máquina é acionada utilizando a transformação $dq0$ e modulação PWM por vetor espacial (*space vector* PWM – SVPWM), de forma semelhante ao acionamento de uma máquina de relutância síncrona. Os resultados mostram

que correntes unipolares apresentam maior capacidade de produção de torque, enquanto correntes bipolares senoidais resultam em menores ondulações de torque e perdas no ferro, sem impacto significativo na eficiência.

Em [57], propõe-se um controle baseado na transformação $dq0$ em que, inicialmente, considera-se uma máquina senoidal ideal para a geração das correntes de referência nos eixos d e q . Essas correntes são transformadas para o referencial de fases e , como o conversor empregado admite apenas correntes unipolares, as componentes negativas são redistribuídas de modo que todas as correntes de fase permaneçam positivas. Posteriormente, aplica-se uma função não linear às correntes obtidas, função derivada de tabelas de consulta (LUTs) que representam a relação torque–corrente de uma SRM real, interpretada pelos autores como uma forma de onda senoidal distorcida. As correntes de referência resultantes são então rastreadas por um controlador de corrente responsável por gerar os sinais de comando para o inversor.

Em [58], considera-se que a corrente de fase pode ser decomposta em uma componente contínua e uma componente alternada. A componente contínua produz um efeito equivalente a um fluxo rotórico virtual, apesar de ser gerada pelas correntes do estator. Mais uma vez, as indutâncias são modeladas como sendo compostas por uma componente contínua e uma primeira harmônica, sendo as mútuas desprezadas. A partir do modelo no referencial $dq0$, considera-se a operação em regime MTPA com correntes unipolares. Controladores de desacoplamento são utilizados para compensar os termos de acoplamento entre os eixos, enquanto termos de *feed-forward* são empregados para compensar os efeitos dinâmicos transitórios.

Em [59], o método proposto em [57] é estendido para operação em enfraquecimento de campo. Nesse caso, propõe-se um algoritmo adaptativo para determinar a corrente no eixo d , com o objetivo de evitar produção excessiva de torque negativo durante a comutação das fases. O algoritmo utiliza limites para o ângulo em que ocorre a máxima produção de torque negativo, bem como limites para o valor da corrente nesse ponto, resultando em uma restrição para o ângulo de disparo da corrente.

Em [60], considera-se novamente que as indutâncias podem ser representadas por uma componente contínua e pela primeira harmônica. Nesse trabalho, desenvolve-se um estimador de velocidade baseado em um sistema adaptativo com modelo de referência fundamentado na potência líquida absorvida pela máquina. Utilizando o modelo médio, no qual os termos variantes com a posição do rotor são desprezados, obtêm-se expressões analíticas para torque, fluxo concatenado e potência absorvida. Assume-se ainda que a corrente no eixo d é nula, sendo as correntes de referência rastreadas por controladores PI que geram os sinais de comando para o inversor.

Em [61], novamente assume-se que as indutâncias são compostas apenas por uma componente contínua e pela primeira harmônica. Utilizando a transformação $dq0$, obtêm-se

uma expressão analítica para as ondulações de torque. Mostra-se que a injeção de terceira harmônica no eixo zero pode reduzir essas ondulações. Em seguida, otimiza-se a relação entre a corrente no eixo zero e a componente alternada da corrente com o objetivo de reduzir as perdas no cobre.

Em [62], propõe-se a utilização de correntes de fase senoidais com uma componente contínua. A partir da modelagem da força magnetomotriz no entreferro e da permeância do entreferro em função da posição do rotor, demonstra-se que essa corrente produz um campo magnético girante. Para eliminar harmônicas de baixa ordem associadas à força contraeletromotriz da SRM, utiliza-se um controlador VPI para o controle de corrente.

Em [63], novamente considera-se que as indutâncias possuem apenas uma componente contínua e uma primeira harmônica. O torque é modelado em função da corrente de eixo q por meio de uma série de Fourier contendo os múltiplos da terceira harmônica. Em seguida, assume-se uma relação aproximadamente linear entre a corrente de eixo q e o torque em duas regiões distintas de operação.

Em [64], propõe-se a utilização da transformação dq não senoidal aplicada a um referencial no qual as correntes são definidas como a raiz quadrada das correntes de fase. Ao desprezar as indutâncias mútuas, a expressão do torque torna-se formalmente semelhante à encontrada em máquinas síncronas. Nesse caso, a força contraeletromotriz é considerada proporcional à derivada da indutância, cujos valores são previamente obtidos por meio de análise por elementos finitos e armazenados em LUTs. Essa transformação resulta em uma corrente de eixo direto nula, sendo as correntes de eixo q e x obtidas proporcionalmente ao torque de referência.

Em [65], considera-se novamente que as indutâncias são compostas por uma componente contínua e pela primeira harmônica, desprezando-se as mútuas. O modelo é tratado como modelo médio, obtendo-se uma expressão simplificada para o torque em função das correntes nos eixos q e 0 . A partir desse modelo projeta-se um controlador de modelo interno com dois graus de liberdade associado a um observador adaptativo de distúrbios, adotado para lidar com casos em que o controlador de corrente falha, e seus parâmetros são definidos para garantir estabilidade e convergência do sistema.

Em [66], apresentam-se duas estratégias de controle baseadas na transformação $dq0$, diferenciadas pela velocidade do referencial adotado. O estudo considera diferentes topologias de máquinas de relutância de dupla saliência. Para obtenção do modelo no referencial $dq0$, assume-se novamente que as indutâncias são compostas apenas pela componente contínua e pela primeira harmônica espacial.

Fica evidente que, apesar das diferentes abordagens encontradas na literatura para o controle vetorial das SRMs, a maioria dos métodos baseia-se em um conjunto recorrente de simplificações. Entre as mais comuns destacam-se a aproximação das indutâncias por

uma forma composta por uma componente contínua e a primeira harmônica, a utilização de modelos harmônicos truncados, a linearização das equações no referencial $dq0$ por meio da utilização de modelos médios e a imposição de formas de onda de corrente senoidal com componente contínua. Além disso, na maioria dos trabalhos, as indutâncias mútuas entre fases são desprezadas.

As simplificações acima descritas permitem adaptar as técnicas de controle inspiradas em máquinas com distribuição de fluxo quase senoidal às SRMs; todavia, restringem a validade dos modelos obtidos e podem limitar o desempenho do controle em regiões onde os efeitos não lineares desse tipo de máquina são mais pronunciados.

Dessa forma, torna-se relevante o desenvolvimento de uma técnica que considere explicitamente as não linearidades da SRM, incluindo a influência das indutâncias mútuas e a forma real das derivadas de indutância em função da posição do rotor e das correntes nos enrolamentos. Nesse contexto, a presente tese propõe um modelo baseado nas derivadas das indutâncias próprias e mútuas da SRM, permitindo incorporar ao controle, de forma mais fiel, as características eletromagnéticas da máquina. A partir desse modelo, propõe-se uma estratégia de controle MTPA específica para as SRMs, com o objetivo de ampliar o conjunto de máquinas que podem ser controladas por essa abordagem e aprimorar o desempenho do acionamento em diferentes condições de operação.

2.3 Conceitos gerais de MTPA

O conceito de controle com máximo torque por ampère pode ser entendido como um problema de otimização relacionado à estrutura energética das máquinas elétricas. Fisicamente, essa condição corresponde à operação da máquina em que o torque eletromagnético desejado é produzido com o menor esforço elétrico possível, i.e., com a menor dissipação resistiva para um torque demandado, uma vez que as perdas no cobre representam parcela relevante do total de perdas nas SRMs [78]. Uma vez que esse tipo de perda está ligado ao quadrado da corrente, o problema de otimização citado consiste em determinar a distribuição de corrente que minimize essa quantidade sob a restrição do torque imposto [43, 79–84].

Nas SRMs, o torque eletromagnético assume a forma apresentada em (1.22), considerando operação linear, como resultado de sua modelagem em termos da coenergia. Além disso, a utilização do conversor AHB requer que as correntes de fase sejam unipolares. Considerando essa formulação e a restrição do conversor, o problema de otimização do controle MTPA pode ser escrito rigorosamente como (2.11).

$$\begin{aligned}
& \min_{\mathbf{i}} \quad \|\mathbf{i}\|^2 \\
\text{sujeito a} \quad & T_e(\theta_r, \mathbf{i}) = \frac{1}{2} \mathbf{i}^\top \frac{\partial \mathbf{L}(\theta_r, \mathbf{i})}{\partial \theta_r} \mathbf{i} \\
& \mathbf{i} \geq 0
\end{aligned} \tag{2.11}$$

A formulação em (2.11) deixa explícito que o controle MTPA não é uma regra empírica de controle, mas sim um problema de otimização quadrática com restrição quadrática. Há diversas formas para solucionar o problema, sendo uma delas, e a adotada na presente tese, a utilização dos multiplicadores de Lagrange [43, 82–84]. A dedução detalhada desta solução será apresentada posteriormente, sendo importante destacar aqui apenas a estrutura do problema.

No caso de máquinas que apresentam distribuição de fluxo quase senoidal, quando expressas no referencial dq , parâmetros elétricos como, por exemplo, as indutâncias próprias, tornam-se constantes, enquanto indutâncias mútuas são eliminadas. Como consequência, nesse tipo de máquina, a solução do problema de otimização relacionado ao controle MTPA conduz a relações algébricas estacionárias entre as correntes dos eixos d e q .

Em máquinas de relutância variável, a situação é substancialmente diferente. A matriz $\partial \mathbf{L} / \partial \theta_r$ depende explicitamente da posição do rotor [11, 12] e não existe transformação de eixos simples que torne essas variáveis constantes. Nesse contexto, para esse tipo de máquina, a utilização do referencial dq já consolidado na literatura para outros tipos de máquina resulta em uma solução para o problema MTPA como função explícita da posição angular do rotor. Em outras palavras, não existe uma única direção globalmente ótima ao longo do ciclo elétrico, de modo que a condição de máxima eficiência é geométrica e acompanha a evolução das características magnéticas instantâneas da máquina.

Como será demonstrado no próximo capítulo, o MTPA na SRM deixa de ser uma simples relação entre componentes de corrente e passa a refletir diretamente a geometria eletromagnética da máquina, com soluções estruturalmente variantes no tempo. A formulação e a solução do problema, dessa maneira, evidenciam que o MTPA é uma condição geométrica associada à estrutura energética da máquina [85], não uma propriedade específica de um referencial particular.

Capítulo 3

Modelagem, Formulação, Análise Crítica e Proposta de Novo Espaço de Coordenadas

O presente capítulo desenvolve a modelagem vetorial da SRM trifásica no referencial $dq0$ e, a partir dela, estabelece a formulação do controle MTPA como um problema de minimização da norma do vetor de correntes sob restrição de torque. Mostra-se que, devido à natureza de dupla saliência da SRM, a transformação para $dq0$ não promove o desacoplamento entre os eixos, uma vez que as matrizes de indutâncias e de suas derivadas permanecem dependentes da posição do rotor, tornando a solução ótima explicitamente variante no tempo e difícil de se obter analiticamente.

Com base nessa limitação, é introduzida a transformação dqe , construída a partir dos autovetores da matriz da derivada das indutâncias referida ao sistema $\alpha\beta0$, a qual alinha os eixos de corrente com as direções instantâneas de produção de torque e permite uma formulação analítica das correntes ótimas. Por fim, são apresentadas as equações da máquina nesse novo referencial e uma estratégia de compensação angular para considerar os efeitos do tempo finito de comutação das correntes.

3.1 Modelagem da SRM nos sistemas $\alpha\beta0$ e $dq0$

A apresentação das equações da SRM em $dq0$ inicia-se com as equações de tensão e torque em abc , obtidas no Capítulo 1 para uma fase e aqui reescritas em forma matricial para considerar simultaneamente todas as fases, conforme (3.1) e (3.2), respectivamente.

$$\mathbf{v}_{abc} = \mathbf{r}_{abc} \mathbf{i}_{abc} + \omega_r \frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \mathbf{i}_{abc} + \mathbf{L}_{abc}^{\text{inc}} \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{abc} \quad (3.1)$$

$$T_e = \frac{1}{2} \mathbf{i}_{abc}^{\top} \frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \mathbf{i}_{abc} \quad (3.2)$$

em que ω_r é a velocidade do rotor, $\mathbf{v}_{abc}^{\top} = (v_a, v_b, v_c)$ são as tensões de fase e $\mathbf{i}_{abc}^{\top} = (i_a, i_b, i_c)$ as correntes. As matrizes de resistência e indutância incremental são dadas por

$$\mathbf{r}_{abc} = \begin{pmatrix} r_a & 0 & 0 \\ 0 & r_b & 0 \\ 0 & 0 & r_c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L}_{abc}^{\text{inc}} = \begin{pmatrix} L_a^{\text{inc}} & M_{ab}^{\text{inc}} & M_{ca}^{\text{inc}} \\ M_{ab}^{\text{inc}} & L_b^{\text{inc}} & M_{bc}^{\text{inc}} \\ M_{ca}^{\text{inc}} & M_{bc}^{\text{inc}} & L_c^{\text{inc}} \end{pmatrix}$$

sendo r_a , r_b e r_c as resistências das fases, L_a^{inc} , L_b^{inc} e L_c^{inc} suas indutâncias incrementais próprias e M_{ab}^{inc} , M_{bc}^{inc} e M_{ca}^{inc} as indutâncias incrementais mútuas entre as fases correspondentes.

As eqs. (3.1) e (3.2) podem ser referidas ao sistema $\alpha\beta 0$ por meio da Transformação de Clarke invariante na potência, descrita no Apêndice A. Nesse referencial, as eqs. (3.1) e (3.2) assumem as formas dadas por (3.3) e (3.4).

$$\mathbf{v}_{\alpha\beta 0} = \mathbf{r}_{\alpha\beta 0} \mathbf{i}_{\alpha\beta 0} + \omega_r \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{\alpha\beta 0} \mathbf{i}_{\alpha\beta 0} + \mathbf{L}_{\alpha\beta 0}^{\text{inc}} \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{\alpha\beta 0} \quad (3.3)$$

$$T_e = \frac{1}{2} \mathbf{i}_{\alpha\beta 0}^\top \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{\alpha\beta 0} \mathbf{i}_{\alpha\beta 0} \quad (3.4)$$

sendo $\mathbf{v}_{\alpha\beta 0}^\top = (v_\alpha, v_\beta, v_0)$ o vetor de tensões, $\mathbf{i}_{\alpha\beta 0}^\top = (i_\alpha, i_\beta, i_0)$ o vetor de correntes no referencial $\alpha\beta 0$. As matrizes $\mathbf{r}_{\alpha\beta 0}$ e $\mathbf{L}_{\alpha\beta 0}$ representam, respectivamente, as matrizes de resistências e indutâncias incrementais da máquina referidas a esse sistema de coordenadas, enquanto $(\partial \mathbf{L}_{abc} / \partial \theta_r)_{\alpha\beta 0}$ corresponde à matriz das derivadas das indutâncias em relação à posição do rotor expressa no mesmo referencial, dada por

$$\mathbf{r}_{\alpha\beta 0} = \mathbf{T}_{\alpha\beta 0} \mathbf{r}_{abc} \mathbf{T}_{\alpha\beta 0}^{-1}, \quad \mathbf{L}_{\alpha\beta 0}^{\text{inc}} = \mathbf{T}_{\alpha\beta 0} \mathbf{L}_{abc}^{\text{inc}} \mathbf{T}_{\alpha\beta 0}^{-1}, \quad \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{\alpha\beta 0} = \mathbf{T}_{\alpha\beta 0} \frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \mathbf{T}_{\alpha\beta 0}^{-1}$$

em que $\mathbf{T}_{\alpha\beta 0}$ é a matriz de transformação de Clarke definida em (A.1).

De posse das equações em $\alpha\beta 0$, aplica-se a Transformação de Park, também apresentada no Apêndice A, obtendo-se as expressões em $dq 0$, mostradas em (3.5) e (3.6). No presente trabalho, considerou-se que $\theta = p\theta_r$ corresponde ao ângulo elétrico associado ao ângulo mecânico do rotor θ_r , sendo p o número de pares de polos da máquina. Ressalta-se, entretanto, que a escolha da velocidade angular do referencial rotativo é arbitrária do ponto de vista matemático e não conduz ao desacoplamento estrutural dos eixos na SRM.

$$\mathbf{v}_{dq 0} = \mathbf{r}_{dq 0} \mathbf{i}_{dq 0} + \left[\omega_r \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{dq 0} - \mathbf{L}_{dq 0} \mathbf{J} \right] \mathbf{i}_{dq 0} + \mathbf{L}_{dq 0}^{\text{inc}} \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{dq 0} \quad (3.5)$$

$$T_e = \frac{1}{2} \mathbf{i}_{dq 0}^\top \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{dq 0} \mathbf{i}_{dq 0} \quad (3.6)$$

sendo $\mathbf{v}_{dq 0}^\top = (v_d, v_q, v_0)$ o vetor de tensões e $\mathbf{i}_{dq 0}^\top = (i_d, i_q, i_0)$ o vetor de correntes no referencial $dq 0$. As matrizes $\mathbf{r}_{dq 0}$, $\mathbf{L}_{dq 0}^{\text{inc}}$ e $(\partial \mathbf{L}_{abc} / \partial \theta_r)_{dq 0}$ representam, respectivamente, as matrizes de resistências, indutâncias incrementais e suas derivadas da máquina referidas a esse sistema de coordenadas. A matriz \mathbf{J} está associada à rotação do referencial. Assim,

$$\mathbf{J} = p\omega_r \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{dq 0} = \mathbf{T}_{dq 0} \mathbf{r}_{\alpha\beta 0} \mathbf{T}_{dq 0}^{-1}, \quad \mathbf{L}_{dq 0}^{\text{inc}} = \mathbf{T}_{dq 0} \mathbf{L}_{\alpha\beta 0}^{\text{inc}} \mathbf{T}_{dq 0}^{-1}$$

e

$$\left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{dq0} = \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{\alpha\beta 0}}{\partial \theta_r} \right)_{dq0} = \mathbf{T}_{dq0} \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{\alpha\beta 0} \mathbf{T}_{dq0}^{-1} = \begin{pmatrix} L'_d & M'_{dq} & M'_{0d} \\ M'_{dq} & L'_q & M'_{q0} \\ M'_{0d} & M'_{q0} & L'_0 \end{pmatrix}$$

em que \mathbf{T}_{dq0} é a matriz de transformação de Park definida em (A.3). Os termos L'_d , L'_q e L'_0 correspondem aos elementos diagonais da matriz $(\partial \mathbf{L}_{abc}/\partial \theta_r)_{dq0}$, enquanto M'_{dq} , M'_{q0} e M'_{0d} representam os termos fora da diagonal, associados aos acoplamentos entre os eixos d , q e 0 nesse referencial.

Destaca-se que $(\partial \mathbf{L}_{abc}/\partial \theta_r)_{dq0}$ é obtida pela transformação por similaridade aplicada à matriz das derivadas das indutâncias originalmente definida no sistema abc .

Com as eqs. (3.5) e (3.6), a modelagem da SRM no referencial $dq0$ encontra-se estabelecida. Diferentemente do que ocorre em máquinas com fluxo aproximadamente senoidal e, conforme discutido anteriormente, não existe, ao conhecimento do autor, uma escolha da velocidade do referencial rotativo que elimine a dependência angular das indutâncias ou anule os termos de acoplamento, de modo que o sistema permanece intrinsecamente acoplado.

3.2 Formulação do problema MTPA no sistema $dq0$

A formulação do problema MTPA inicia-se com a definição do problema de minimização apresentado em (3.7). Em essência, busca-se minimizar as correntes do estator, impondo-se como restrição a produção do torque desejado.

$$\begin{aligned} \min_{i_d, i_q, i_0} \quad & i^2 = i_d^2 + i_q^2 + i_0^2 \\ \text{sujeito a} \quad & T_e = \frac{1}{2} L'_d i_d^2 + \frac{1}{2} L'_q i_q^2 + \frac{1}{2} L'_0 i_0^2 + M'_{dq} i_d i_q + M'_{q0} i_q i_0 + M'_{0d} i_d i_0 \\ & i_a, i_b, i_c \geq 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

O problema de minimização definido em (3.7) pode ser representado matricialmente, o que facilita sua interpretação, conforme mostrado em (3.8).

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{i}_{dq0}} \quad & i^2 = \mathbf{i}_{dq0}^\top \mathbf{i}_{dq0} \\ \text{sujeito a} \quad & T_e = \frac{1}{2} \mathbf{i}_{dq0}^\top \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{dq0} \mathbf{i}_{dq0} \\ & \mathbf{T}_{abc \rightarrow dq0}^{-1} \mathbf{i}_{dq0} \geq 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

O problema de minimização pode ser solucionado utilizando o conceito de conjuntos ativos para programação quadrática [86]. Nesse método, resolve-se inicialmente o problema desconsiderando as restrições de desigualdade. Em seguida, verifica-se se a solução obtida

satisfaz todas essas restrições. Caso alguma delas seja violada, identifica-se o conjunto de restrições ativas, que passam a ser tratadas como igualdades. Por fim, a solução ótima é obtida projetando-se a solução inicial no subespaço definido por esse conjunto.

A técnica dos multiplicadores de Lagrange pode ser utilizada para resolver o problema de otimização sem a restrição de desigualdade. O primeiro passo consiste na definição da lagrangiana, i.e., da função que incorpora simultaneamente a função objetivo e a restrição. Para o caso em questão, a lagrangiana assume a forma apresentada em (3.9).

$$\mathcal{L}(i_d, i_q, i_0, \lambda) = i^2(i_d, i_q, i_0) - \lambda f(i_d, i_q, i_0) \quad (3.9)$$

em que f é a função de restrição reescrita de forma que $f(i_d, i_q, i_0) = 0$ e λ é o multiplicador de Lagrange. Essa função de restrição garante que o torque produzido pelas correntes minimizadas seja igual ao torque de referência.

Substituindo-se as expressões de i^2 e f em (3.9), obtém-se (3.10).

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(i_d, i_q, i_0, \lambda) = i_d^2 + i_q^2 + i_0^2 - \lambda \left(\frac{1}{2} L'_d i_d^2 + \frac{1}{2} L'_q i_q^2 + \frac{1}{2} L'_0 i_0^2 + \right. \\ \left. + M'_{dq} i_d i_q + M'_{q0} i_q i_0 + M'_{0d} i_d i_0 - T_e \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Utilizando-se a notação matricial, a lagrangiana pode ser reescrita como em (3.11).

$$\mathcal{L}(\mathbf{i}_{dq0}, \lambda) = \mathbf{i}_{dq0}^\top \mathbf{i}_{dq0} - \lambda \left[\frac{1}{2} \mathbf{i}_{dq0}^\top \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{dq0} \mathbf{i}_{dq0} - T_e \right] \quad (3.11)$$

No passo seguinte, impõe-se que o gradiente da lagrangiana seja nulo, conforme (3.12). Para o presente caso, essa condição conduz a um sistema com quatro equações e quatro incógnitas, apresentado em (3.13).

$$\nabla \mathcal{L}(i_d, i_q, i_0, \lambda) = 0 \quad (3.12)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial i_d} = 2i_d - \lambda (L'_d i_d + M'_{dq} i_q + M'_{0d} i_0) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial i_q} = 2i_q - \lambda (L'_q i_q + M'_{dq} i_d + M'_{q0} i_0) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial i_0} = 2i_0 - \lambda (L'_0 i_0 + M'_{0d} i_d + M'_{q0} i_q) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = T_e - \left(\frac{1}{2} L'_d i_d^2 + \frac{1}{2} L'_q i_q^2 + \frac{1}{2} L'_0 i_0^2 + M'_{dq} i_d i_q + M'_{q0} i_q i_0 + M'_{0d} i_d i_0 \right) = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

Reescrevendo-se (3.13), obtém-se (3.14).

$$\begin{cases} 2i_d = \lambda (L'_d i_d + M'_{dq} i_q + M'_{0d} i_0) \\ 2i_q = \lambda (L'_q i_q + M'_{dq} i_d + M'_{q0} i_0) \\ 2i_0 = \lambda (L'_0 i_0 + M'_{0d} i_d + M'_{q0} i_q) \\ T_e = \frac{1}{2} L'_d i_d^2 + \frac{1}{2} L'_q i_q^2 + \frac{1}{2} L'_0 i_0^2 + M'_{dq} i_d i_q + M'_{q0} i_q i_0 + M'_{0d} i_d i_0 \end{cases} \quad (3.14)$$

Matricialmente, o sistema (3.14) pode ser reescrito na forma apresentada em (3.15).

$$\begin{cases} 2\mathbf{i}_{dq0} = \lambda \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{dq0} \mathbf{i}_{dq0} \\ T_e = \frac{1}{2} \mathbf{i}_{dq0}^\top \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{dq0} \mathbf{i}_{dq0} \end{cases} \quad (3.15)$$

Realizando-se a substituição $\sigma = 2/\lambda$ em (3.15), obtém-se o sistema (3.16). Observa-se, então, que o vetor solução \mathbf{i}_{dq0} corresponde a um autovetor da matriz $(\partial \mathbf{L}_{abc}/\partial \theta_r)_{dq0}$. Resta, portanto, determinar a qual autovalor esse autovetor está associado, bem como estabelecer uma expressão para seu cálculo.

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{dq0} \mathbf{i}_{dq0} = \sigma \mathbf{i}_{dq0} \\ T_e = \frac{1}{2} \mathbf{i}_{dq0}^\top \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{dq0} \mathbf{i}_{dq0} \end{cases} \quad (3.16)$$

A partir de (3.16), o torque eletromagnético desenvolvido pela máquina pode ser reescrito em função de σ e da norma do vetor de correntes, conforme (3.17). Dessa forma, para minimizar a norma do vetor de correntes, deve-se selecionar o autovetor associado ao autovalor extremo (máximo para torque positivo e mínimo para torque negativo), e, como a matriz $(\partial \mathbf{L}_{abc}/\partial \theta_r)_{dq0}$ é real e simétrica, o problema de otimização possui extremos globais caracterizados pela Propriedade B.5.

$$T_e = \frac{1}{2} \sigma \mathbf{i}_{dq0}^\top \mathbf{i}_{dq0} = \frac{1}{2} \sigma i^2 \quad (3.17)$$

Uma aproximação para o autovetor associado ao autovalor dominante de uma matriz pode ser obtida por meio do método da potência [87]. Neste método, escolhe-se um vetor inicial que então é sucessivamente multiplicado pela matriz em questão. Para o problema em análise, como se trata de uma matriz real simétrica de ordem três, verifica-se na prática a predominância de um autovalor ao longo do intervalo de operação, o que permite utilizar uma única iteração como aproximação inicial sem prejuízo à determinação da direção dominante. Aqui, adota-se como vetor inicial $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)^\top$, de modo que o autovetor dominante de $(\partial \mathbf{L}_{abc}/\partial \theta_r)_{dq0}$, denotado por \mathbf{w}_d , pode ser aproximado por (3.18).

$$\mathbf{w}_d = \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{dq0} \mathbf{e}_3 \quad (3.18)$$

De posse de (3.18), o vetor solução \mathbf{i}_{dq0} pode ser reescrito na forma de (3.19).

$$\mathbf{i}_{dq0} = q_{dq0} \mathbf{w}_d = q_{dq0} \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{dq0} \mathbf{e}_3 \quad (3.19)$$

Substituindo (3.19) em (3.6), obtém-se (3.20), o que implica que o vetor solução \mathbf{i}_{dq0} assume a forma apresentada em (3.21).

$$q_{dq0} = \sqrt{\frac{2|T_e|}{\left| \mathbf{w}_d^\top \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{dq0} \mathbf{w}_d \right|}} \quad (3.20)$$

$$\mathbf{i}_{dq0} = \sqrt{2|T_e|} \frac{\mathbf{w}_d}{\sqrt{\left| \mathbf{w}_d^\top \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{dq0} \mathbf{w}_d \right|}} \quad (3.21)$$

Pela Propriedade B.5, como \mathbf{w}_d é uma aproximação do autovetor dominante, o vetor \mathbf{i}_{dq0} constitui uma aproximação da solução ótima do problema proposto em (3.7) ou (3.8).

No referencial $dq0$, a informação acerca da forma dos autovalores da matriz $(\partial \mathbf{L}_{abc} / \partial \theta_r)_{dq0}$ não é conhecida *a priori*, de modo que o autovalor dominante em magnitude pode corresponder ao máximo ou ao mínimo. Para melhorar o condicionamento do problema de autovalores, a matriz $\partial \mathbf{L}_{abc} / \partial \theta_r$ deve ser construída de forma que, para torque positivo, sejam consideradas apenas as partes positivas das derivadas das indutâncias, e, para torque negativo, apenas as partes negativas.

Essa aproximação é adequada para SRMs convencionais, pois essas máquinas apresentam regiões bem definidas de operação motora e geradora ao longo da posição do rotor. Nessas regiões, o sinal das derivadas das indutâncias próprias permanece consistente com o regime de operação considerado, permitindo que a construção da matriz preserve apenas as parcelas compatíveis com a produção do torque desejado. Entretanto, tal propriedade não é necessariamente garantida para outros tipos de máquinas de relutância.

Transformando as correntes obtidas no referencial $dq0$ de volta para o sistema das fases, obtém-se a expressão (3.22). A partir dela, observa-se que a aproximação adotada conduz naturalmente a correntes de fase não negativas, desde que $\partial \mathbf{L}_{abc} / \partial \theta_r$ seja construída conforme o critério descrito anteriormente e que as derivadas das indutâncias próprias predominem sobre as derivadas das indutâncias mútuas, condição tipicamente satisfeita em SRMs convencionais.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_{abc \rightarrow dq0}^{-1} \mathbf{i}_{dq0} &= \mathbf{T}_{abc \rightarrow dq0}^{-1} q_{dq0} \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{dq0} \mathbf{e}_3 \\
 &= q_{dq0} \mathbf{T}_{abc \rightarrow dq0}^{-1} \left[\mathbf{T}_{abc \rightarrow dq0} \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{abc} \mathbf{T}_{abc \rightarrow dq0}^{-1} \right] \mathbf{e}_3 \\
 &= q_{dq0} \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{abc} \left(\mathbf{T}_{abc \rightarrow dq0}^{-1} \mathbf{e}_3 \right) = q_{dq0} \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{abc} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{i}_{abc} &= q_{dq0} \begin{pmatrix} \frac{\partial L_a}{\partial \theta_r} + \frac{\partial M_{ab}}{\partial \theta_r} + \frac{\partial M_{ca}}{\partial \theta_r} \\ \frac{\partial L_b}{\partial \theta_r} + \frac{\partial M_{ab}}{\partial \theta_r} + \frac{\partial M_{bc}}{\partial \theta_r} \\ \frac{\partial L_c}{\partial \theta_r} + \frac{\partial M_{bc}}{\partial \theta_r} + \frac{\partial M_{ca}}{\partial \theta_r} \end{pmatrix} \tag{3.22}
 \end{aligned}$$

O Algoritmo 1 a seguir descreve o procedimento para a obtenção do vetor de corrente ótimo (aproximado) no referencial $dq0$.

Algoritmo 1: MTPA em $dq0$ para SRM trifásica

- 1 Montar a matriz $\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r}$;
 - 2 Transformar $\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r}$ para o sistema $\alpha\beta 0$;
 - 3 Transformar $\left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{\alpha\beta 0}$ para o sistema $dq0$;
 - 4 Calcular uma aproximação para o autovetor dominante de $\left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{dq0}$;
 - 5 $\mathbf{w}_d = \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{dq0} \mathbf{e}_3$
 - 6 Escalar a corrente para produzir o torque desejado:
 - 7 $\mathbf{i}_{dq0} = \sqrt{2|T_e|} \frac{\mathbf{w}_d}{\sqrt{\left| \mathbf{w}_d^\top \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{dq0} \mathbf{w}_d \right|}}$
 - 8 Transformar a corrente ótima de $dq0$ para abc ;
-

Dessa forma, o problema MTPA pode ser interpretado, em sentido local, como um problema espectral associado à matriz $\partial \mathbf{L}_{abc} / \partial \theta_r$, cuja direção dominante está relacionada à sensibilidade instantânea da produção do torque $dq0$. Essa interpretação sugere que a estrutura espectral dessa matriz contém informação relevante para o cálculo das correntes ótimas, motivando a definição de um novo referencial de coordenadas alinhado com essa direção dominante.

3.3 Análise crítica da formulação em $dq0$

Como discutido anteriormente, devido à natureza de dupla saliência da SRM e da construção de seus enrolamentos, a utilização do referencial $dq0$ não promove o desacopla-

mento dos eixos, como ocorre em máquinas com distribuição de fluxo aproximadamente senoidal. Em particular, mesmo após a transformação, a matriz \mathbf{L}_{dq0} e, principalmente, a matriz $(\partial\mathbf{L}_{abc}/\partial\theta_r)_{dq0}$ permanecem dependentes de θ_r e apresentam termos de acoplamento fora da diagonal. Dessa forma, não é possível obter, em geral, um modelo com canais independentes em d , q e 0 , o que impacta diretamente a formulação do controle e a síntese de referências de corrente.

Além disso, a dependência angular explícita de $(\partial\mathbf{L}_{abc}/\partial\theta_r)_{dq0}$ faz com que a solução ótima do problema MTPA seja intrinsecamente variante no tempo. Logo, uma referência ótima calculada para determinado θ_r deixa de sê-lo à medida que o rotor se desloca. Ademais, considerando as etapas de transformação das variáveis de abc para $dq0$ e o fato de que as soluções exatas do problema MTPA requerem a obtenção dos autovalores de $(\partial\mathbf{L}_{abc}/\partial\theta_r)_{dq0}$ e do autovetor associado ao autovalor dominante, torna-se necessária a utilização de uma aproximação, a fim de evitar um custo computacional elevado para implementação em sistemas embarcados.

As limitações descritas motivam a criação de uma nova transformação. Pela observação direta de (3.6), verifica-se que o torque é uma forma quadrática nas correntes, ponderada pela matriz da derivada das indutâncias referida a esse sistema. Decorre, então, da Propriedade B.5 que a minimização da norma do vetor de correntes ocorre quando este está alinhado ao autovetor associado ao autovalor dominante da matriz de ponderação, resultado já demonstrado matematicamente na Seção anterior. A nova transformação é construída com base nesse fato, de modo a alinhar os eixos de corrente com as direções “naturais” de produção instantânea de torque. Essas direções, novamente à luz da Propriedade B.5, correspondem aos autovetores da matriz, estabelecendo uma interpretação geométrica direta do problema MTPA.

Em outras palavras, a matriz $(\partial\mathbf{L}_{abc}/\partial\theta_r)_{dq0}$ define um espaço vetorial no qual os autovetores fornecem uma base ortogonal de direções de corrente, enquanto os autovalores quantificam a “capacidade” de geração de torque associada a cada uma dessas direções. A transformação dqe , definida a seguir, explora essa decomposição espectral para reduzir acoplamentos e simplificar a obtenção das correntes ótimas, mantendo a invariância de potência demonstrada no Apêndice C.

3.4 Definição da Transformação dqe

A expressão completa da Transformação dqe é apresentada em (3.23), enquanto sua construção matemática é detalhada no Apêndice C. Essa transformação é baseada nos componentes do autovetor $\mathbf{w}_m^\top = (w_\alpha, w_\beta, w_0)$, previamente normalizado, associado ao autovalor de menor magnitude de $(\partial\mathbf{L}_{abc}/\partial\theta_r)_{\alpha\beta 0}$. O referencial dqe é ilustrado na Figura 3.1. Destaca-se que, diferentemente da transformação $dq0$ convencional, a expressão

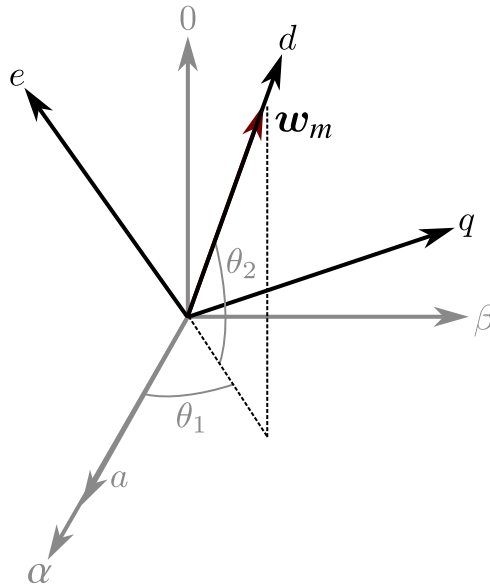
em (3.23) não depende explicitamente de funções trigonométricas. Essa característica reduz a necessidade de avaliação de funções não lineares em tempo real, contribuindo para a diminuição do esforço computacional da implementação.

Para referir uma grandeza elétrica denotada por \mathbf{x}_{abc} ao referencial dqe , inicialmente deve-se expressá-la no sistema $\alpha\beta 0$, por meio da transformação de Clarke, denotada por $\mathbf{T}_{\alpha\beta 0}$, e, em seguida, aplicar a transformação dqe , conforme ilustrado na Figura 3.2 e expresso em (3.24) e (3.25).

$$\mathbf{T}_{dqe} = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

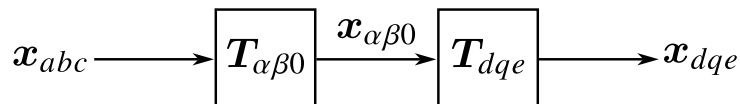
$$\mathbf{T}_{dqe} = \begin{pmatrix} w_\alpha & w_\beta & w_0 \\ -\frac{w_\beta}{\sqrt{w_\alpha^2 + w_\beta^2}} & \frac{w_\alpha}{\sqrt{w_\alpha^2 + w_\beta^2}} & 0 \\ -\frac{w_\alpha w_0}{\sqrt{w_\alpha^2 + w_\beta^2}} & -\frac{w_\beta w_0}{\sqrt{w_\alpha^2 + w_\beta^2}} & \sqrt{w_\alpha^2 + w_\beta^2} \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Figura 3.1 – Representação gráfica do referencial dqe



Fonte: o autor.

Figura 3.2 – Diagrama de blocos da transformação dqe



Fonte: o autor.

$$\mathbf{x}_{dqe} = \mathbf{T}_{dqe} \mathbf{x}_{\alpha\beta 0} \quad (3.24)$$

$$\mathbf{x}_{dqe} = \mathbf{T}_{dqe} \mathbf{T}_{\alpha\beta 0} \mathbf{x}_{abc} = \mathbf{T}_{abc \rightarrow dqe} \mathbf{x}_{abc} \quad (3.25)$$

com $\mathbf{T}_{abc \rightarrow dqe} = \mathbf{T}_{dqe} \mathbf{T}_{\alpha\beta 0}$.

O objetivo da transformação dqe é alinhar o eixo d com o autovetor \mathbf{w}_m . Com esse alinhamento, os eixos q e e tornam-se desacoplados do eixo d no que se refere à produção de torque, o que simplifica a resolução do problema de otimização associado ao controle MTPA.

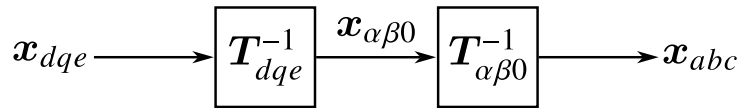
Adicionalmente, conforme será demonstrado, por meio das Propriedades B.3 e B.5, ao alinhar o eixo d com o autovetor associado ao autovalor de menor/maior magnitude da matriz $(\partial \mathbf{L}_{abc} / \partial \theta_r)_{\alpha\beta 0}$, respectivamente caso o torque de referência seja positivo ou negativo, esse eixo passa a corresponder à direção de menor capacidade de produção de torque. Como consequência, a corrente de referência associada a esse eixo torna-se nula quando não há restrições.

Vale ressaltar que a transformação dqe é invertível e que sua inversa coincide com sua transposta, conforme (3.26) e como demonstrado no Apêndice C.

$$\mathbf{T}_{dqe}^{-1} = \mathbf{T}_{dqe}^T = \begin{pmatrix} w_\alpha & -\frac{w_\beta}{\sqrt{w_\alpha^2 + w_\beta^2}} & -\frac{w_\alpha w_0}{\sqrt{w_\alpha^2 + w_\beta^2}} \\ w_\beta & \frac{w_\alpha}{\sqrt{w_\alpha^2 + w_\beta^2}} & -\frac{w_\beta w_0}{\sqrt{w_\alpha^2 + w_\beta^2}} \\ w_0 & 0 & \sqrt{w_\alpha^2 + w_\beta^2} \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Para referir uma grandeza do sistema dqe de volta ao referencial abc , inicialmente aplica-se a transformação dqe inversa e, em seguida, a transformação de Clarke inversa, conforme ilustrado na Figura 3.3 e expresso em (3.27).

Figura 3.3 – Diagrama de blocos da transformação inversa dqe



Fonte: o autor.

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta 0} = \mathbf{T}_{dqe}^{-1} \mathbf{x}_{dqe} \quad (3.27)$$

3.5 Modelagem da SRM no sistema dqe

Para a obtenção das equações do modelo vetorial no referencial dqe proposto nesta tese, aplica-se essa transformação às equações (3.3) e (3.4), resultando, respectivamente, em (3.28) e (3.29).

$$\mathbf{v}_{dqe} = \mathbf{r}_{dqe} \dot{\mathbf{i}}_{dqe} + \left[\omega_r \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{dqe} - \mathbf{L}_{dqe} \mathbf{J}_{dqe} \right] \dot{\mathbf{i}}_{dqe} + \mathbf{L}_{dqe}^{\text{inc}} \frac{d}{dt} \dot{\mathbf{i}}_{dqe} \quad (3.28)$$

$$T_e = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{i}}_{dqe}^\top \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{dqe} \dot{\mathbf{i}}_{dqe} \quad (3.29)$$

sendo $\mathbf{v}_{dqe}^\top = (v_d, v_q, v_e)$ o vetor de tensões e $\dot{\mathbf{i}}_{dqe}^\top = (i_d, i_q, i_e)$ o vetor de correntes no referencial dqe . Além disso,

$$\mathbf{J}_{dqe} = \left(\frac{d}{dt} \mathbf{T}_{dqe} \right) \mathbf{T}_{dqe}^{-1}, \quad \mathbf{r}_{dqe} = \mathbf{T}_{dqe} \mathbf{r}_{\alpha\beta 0} \mathbf{T}_{dqe}^{-1}, \quad \mathbf{L}_{dqe}^{\text{inc}} = \mathbf{T}_{dqe} \mathbf{L}_{\alpha\beta 0}^{\text{inc}} \mathbf{T}_{dqe}^{-1}$$

e

$$\left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{dqe} = \begin{pmatrix} L'_d & 0 & 0 \\ 0 & L'_q & M'_{qe} \\ 0 & M'_{qe} & L'_e \end{pmatrix}$$

A principal propriedade do sistema referido aos eixos dqe é o desacoplamento entre o eixo d e os eixos q e e no que se refere à produção de torque, o que, conforme será demonstrado na próxima Seção, simplifica a formulação do problema MTPA e possibilita a obtenção de uma solução analítica do problema MTPA considerado.

3.6 Formulação do controle MTPA no sistema dqe

O problema de minimização das correntes no sistema dqe é análogo ao formulado no sistema $dq0$ e assume a forma dada por (3.30).

$$\begin{aligned} \min_{i_d, i_q, i_e} \quad & i^2 = i_d^2 + i_q^2 + i_e^2 \\ \text{sujeito a} \quad & T_e = \frac{1}{2} L'_d i_d^2 + \frac{1}{2} L'_q i_q^2 + \frac{1}{2} L'_e i_e^2 + M'_{qe} i_q i_e \\ & i_a, i_b, i_c \geq 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

O problema de otimização no sistema dqe também pode ser representado matricialmente, conforme (3.31).

$$\begin{aligned} \min_{\dot{\mathbf{i}}_{dqe}} \quad & i^2 = \dot{\mathbf{i}}_{dqe}^\top \dot{\mathbf{i}}_{dqe} \\ \text{sujeito a} \quad & T_e = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{i}}_{dqe}^\top \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{dqe} \dot{\mathbf{i}}_{dqe} \\ & \mathbf{T}_{abc \rightarrow dqe}^{-1} \dot{\mathbf{i}}_{dqe} \geq 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

Novamente, o conceito de conjuntos ativos para programação quadrática pode ser utilizado para solucionar o problema de minimização descrito, juntamente com a

técnica dos multiplicadores de Lagrange. Portanto, por ora, desconsidera-se a restrição de desigualdade.

A Lagrangiana associada a esse problema é dada por (3.32).

$$\mathcal{L}(i_d, i_q, i_e, \lambda) = i_d^2 + i_q^2 + i_e^2 - \lambda \left(\frac{1}{2} L'_d i_d^2 + \frac{1}{2} L'_q i_q^2 + \frac{1}{2} L'_e i_e^2 + M'_{qe} i_q i_e - T_e \right) \quad (3.32)$$

Na forma matricial, tem-se (3.33).

$$\mathcal{L}(\mathbf{i}_{dqe}, \lambda) = \mathbf{i}_{dqe}^\top \mathbf{i}_{dqe} - \lambda \left[\frac{1}{2} \mathbf{i}_{dqe}^\top \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{dqe} \mathbf{i}_{dqe} - T_e \right] \quad (3.33)$$

O passo seguinte consiste em anular o gradiente da lagrangiana, o que resulta em um sistema de quatro equações e quatro incógnitas, apresentado em (3.34).

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial i_d} = 2i_d - \lambda L'_d i_d = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial i_q} = 2i_q - \lambda (L'_q i_q + M'_{qe} i_e) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial i_e} = 2i_e - \lambda (L'_e i_e + M'_{qe} i_q) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \frac{1}{2} L'_d i_d^2 + \frac{1}{2} L'_q i_q^2 + \frac{1}{2} L'_e i_e^2 + M'_{qe} i_q i_e - T_e = 0 \end{cases} \quad (3.34)$$

De forma análoga ao que foi realizado na formulação do controle MTPA em $dq0$, o sistema (3.34) pode ser reescrito na forma matricial apresentada em (3.35).

$$\begin{cases} 2\mathbf{i}_{dqe} = \lambda \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{dqe} \mathbf{i}_{dqe} \\ T_e = \frac{1}{2} \mathbf{i}_{dqe}^\top \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{dqe} \mathbf{i}_{dqe} \end{cases} \quad (3.35)$$

Substituindo-se $\sigma = 2/\lambda$ em (3.35), obtém-se o sistema (3.36), que evidencia que o vetor solução \mathbf{i}_{dqe} é um autovetor de $(\partial \mathbf{L}/\partial \theta_r)_{dqe}$.

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{dqe} \mathbf{i}_{dqe} = \sigma \mathbf{i}_{dqe} \\ T_e = \frac{1}{2} \mathbf{i}_{dqe}^\top \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{dqe} \mathbf{i}_{dqe} \end{cases} \quad (3.36)$$

Combinando-se as duas equações de (3.36), obtém-se (3.37), que mostra que a norma do vetor solução \mathbf{i}_{dqe} é inversamente proporcional ao autovalor selecionado. Assim,

a solução de norma mínima ocorre quando \mathbf{i}_{dqe} é múltiplo do autovetor associado ao autovalor extremo de $(\partial \mathbf{L}_{abc} / \partial \theta_r)_{dqe}$, denotado por σ_{ext} .

$$T_e = \frac{1}{2} \sigma \mathbf{i}_{dqe}^\top \mathbf{i}_{dqe} = \frac{1}{2} \sigma i^2 \quad (3.37)$$

Seja $\mathbf{w}_{\sigma_{\text{ext}}}$ o autovetor associado a esse autovalor. Então, o vetor $\mathbf{i}_{dqe} = q_{dqe} \mathbf{w}_{\sigma_{\text{ext}}}$ minimiza (3.31), sendo obtido por substituição em (3.37).

$$q_{dqe} = \sqrt{\frac{2|T_e|}{|\sigma_{\text{ext}}| \mathbf{w}_{\sigma_{\text{ext}}}^\top \mathbf{w}_{\sigma_{\text{ext}}}}} \quad (3.38)$$

com

$$\mathbf{w}_{\sigma_{\text{ext}}}^\top = (0, M'_{qe}, \sigma_{\text{ext}} - L'_q)$$

Logo, o vetor de correntes ótimas assume a forma apresentada em (3.39), verificando-se que a componente no eixo d é nula para o caso irrestrito.

$$\mathbf{i}_{dqe} = \sqrt{2|T_e|} \frac{\mathbf{w}_{\sigma_{\text{ext}}}}{\sqrt{|\sigma_{\text{ext}}| [M'_{qe}]^2 + (\sigma_{\text{ext}} - L'_q)^2}} \quad (3.39)$$

Utiliza-se o autovalor extremo, pois o torque pode assumir valores positivos ou negativos. Assim, para torque positivo emprega-se o autovalor máximo, enquanto para torque negativo emprega-se o autovalor mínimo. Observe que o autovetor empregado aqui é diferente daquele utilizado na obtenção da matriz de transformação. No fator de normalização, utiliza-se o valor absoluto desse autovalor para garantir a não negatividade do radicando.

Uma vez de posse das correntes ótimas em dqe , deve-se verificar se a restrição de desigualdade foi satisfeita. As fases com corrente negativa correspondem às restrições ativas. Para esses casos, a restrição de desigualdade torna-se uma de igualdade, de forma que a solução ótima deve zerar as correntes nessas fases. Seja $\mathbf{C} = \mathbf{T}_{abc \rightarrow dqe}^{-1}$. Se a fase k possui restrição ativa, então ela deve obedecer (3.40).

$$\mathbf{c}_k^\top \mathbf{i}_{dqe} = 0 \quad (3.40)$$

sendo \mathbf{c}_k^\top a linha da matriz \mathbf{C} correspondente à fase k .

Seja \mathbf{w}_p o vetor apontando na direção ótima, considerando as restrições ativas. Devido à natureza das SRMs trifásicas convencionais, três casos podem ocorrer:

- **Caso I:** as correntes ótimas em dqe resultam em todas as correntes de fase positivas. Nesse caso, $\mathbf{w}_p = \mathbf{w}_{\sigma_{\text{ext}}}$.

- **Caso II:** o vetor \mathbf{i}_{dqe} resulta em uma corrente de fase negativa. A restrição nessa fase torna-se ativa, logo, a solução ótima deve zerar seu valor. Essa restrição define um plano em dqe , sendo \mathbf{w}_p a projeção de $\mathbf{w}_{\sigma_{\text{ext}}}$ nesse plano, dada por (3.41).

$$\mathbf{w}_p = \mathbf{w}_{\sigma_{\text{ext}}} - \frac{\mathbf{c}_1^\top \mathbf{w}_{\sigma_{\text{ext}}}}{\mathbf{c}_1^\top \mathbf{c}_1} \mathbf{c}_1 \quad (3.41)$$

em que \mathbf{c}_1^\top é a linha da matriz \mathbf{C} referente àquela única fase com corrente negativa na solução original. Vale ressaltar que $\mathbf{c}_1^\top \mathbf{c}_1 = 1$ devido à construção de \mathbf{C} ;

- **Caso III:** as correntes ótimas em dqe resultam em duas correntes de fase negativas. Nesse caso, duas restrições estão ativas. Cada restrição define um plano, assim, a solução ótima deve estar na direção da interseção desses dois planos, que constitui uma reta, sendo \mathbf{w}_p a projeção de $\mathbf{w}_{\sigma_{\text{ext}}}$ nessa reta, conforme (3.42).

$$\mathbf{w}_p = \frac{\mathbf{w}_{\sigma_{\text{ext}}}^\top \mathbf{n}}{\mathbf{n}^\top \mathbf{n}} \mathbf{n} \quad (3.42)$$

com $\mathbf{n} = \mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2$, e \mathbf{c}_1^\top e \mathbf{c}_2^\top sendo as linhas da matriz \mathbf{C} referentes às fases com correntes negativas na solução original. Devido à construção de \mathbf{C} , $\mathbf{n}^\top \mathbf{n} = 1$.

A solução final com restrições ativas é dada por (3.43).

$$\mathbf{i}_{dqe}^{(p)} = \sqrt{2|T_e|} \frac{\mathbf{w}_p}{\sqrt{\left| \mathbf{w}_p^\top \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{dqe} \mathbf{w}_p \right|}} \quad (3.43)$$

O Algoritmo 2 apresentado a seguir sintetiza o procedimento proposto para a obtenção do vetor de corrente ótimo no referencial dqe , solução de (3.31).

Com a determinação do vetor de corrente ótimo e do procedimento para sua obtenção, nos referenciais $dq0$ e dqe , torna-se necessário estabelecer uma estratégia de controle capaz de implementar essas soluções no acionamento da SRM. Assim, o próximo capítulo apresenta o método de controle adotado neste trabalho.

Algoritmo 2: MTPA em dqe com restrições de condução para SRM trifásica

- 1 Montar a matriz $\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r}$;
 - 2 Transformar $\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r}$ para o sistema $\alpha\beta 0$;
 - 3 Calcular os autovalores de $\left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r}\right)_{\alpha\beta 0}$;
 - 4 Calcular o autovetor \mathbf{w}_m associado ao autovalor de menor/maior magnitude;
 - 5 Transformar $\left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r}\right)_{\alpha\beta 0}$ para o sistema dqe ;
 - 6 Calcular o autovetor $\mathbf{w}_{\sigma_{\text{ext}}}$ associado ao autovalor extremo (máximo para $T_e > 0$ e mínimo para $T_e < 0$) de $\left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r}\right)_{dqe}$;
 - 7 Calcular correntes de fase normalizadas $\tilde{\mathbf{i}}_{abc} = \mathbf{C} \mathbf{w}_{\sigma_{\text{ext}}}$ e verificar restrições $\tilde{\mathbf{i}}_{abc} \geq 0$;
 - 8 **if** nenhuma restrição ativa **then**
 - 9 | $\mathbf{w}_p = \mathbf{w}_{\sigma_{\text{ext}}}$;
 - 10 **else**
 - 11 | **if** uma restrição ativa **then**
 - 12 | $\mathbf{w}_p = \mathbf{w}_{\sigma_{\text{ext}}} - (\mathbf{c}_1^\top \mathbf{w}_{\sigma_{\text{ext}}}) \mathbf{c}_1$;
 - 13 | **else**
 - 14 | $\mathbf{w}_p = \left[\mathbf{w}_{\sigma_{\text{ext}}}^\top (\mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2) \right] (\mathbf{c}_1 \times \mathbf{c}_2)$;
 - 15 Escalar a corrente para produzir o torque desejado:
 - 16 $\mathbf{i}_{dqe}^{(p)} = \sqrt{2|T_e|} \frac{\mathbf{w}_p}{\sqrt{\left| \mathbf{w}_p^\top \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r}\right)_{dqe} \mathbf{w}_p \right|}}$;
 - 17 Transformar a corrente ótima de dqe para abc ;
-

Capítulo 4

Controle Vetorial Proposto para as SRMs

Este capítulo apresenta a implementação do controle vetorial proposto para a SRM nos referenciais $dq0$ e dqe , com foco em sua aplicação experimental. Inicialmente, são discutidas as considerações relativas à estratégia de compensação angular aplicável a ambos os referenciais, de modo a assegurar a extinção da corrente antes da região de produção de torque negativo ou, quando isso não for possível, minimizar seus efeitos. Em seguida, são desenvolvidas as estruturas de controle em $dq0$ e em dqe , com explicitação das equações empregadas na obtenção das correntes de referência a partir da formulação MTPA. Por fim, apresentam-se resultados representativos para duas SRMs distintas, permitindo observar as diferenças entre esses dois sistemas de coordenadas.

4.1 Estratégia de compensação angular

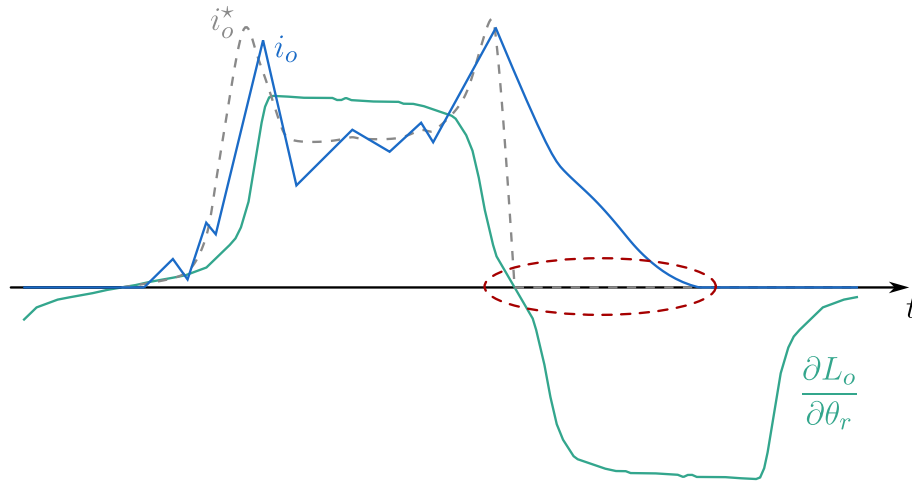
A derivação das correntes de referência ótimas, tanto em $dq0$ quanto em dqe , assume, idealmente, que o conversor rastreia perfeitamente a corrente de referência, inclusive quando a referência é nula (fase deve ser desligada). Em sistemas reais, entretanto, a dinâmica eletromagnética impõe um intervalo finito de extinção da corrente na fase em processo de desligamento. Esse efeito faz com que a corrente ultrapasse a janela ótima de condução, podendo levar à produção de torque negativo e, conseqüentemente, ao aumento das ondulações de torque. Ressalta-se que esse comportamento não decorre das estratégias de controle propostas, mas constitui uma característica intrínseca da dinâmica de sistemas indutivos com comutação eletrônica, devendo, portanto, ser explicitamente compensado no projeto do controlador.

Para ilustrar o efeito descrito, observe a Figura 4.1. Nela, o subscrito “ o ” indica a fase em processo de desligamento e o sobrescrito “ \star ” denota a corrente de referência. A elipse em vermelho evidencia que, devido ao tempo necessário para a corrente atingir zero, a fase em processo de desligamento ainda produz torque negativo.

Com o intuito de mitigar esse fenômeno, esta seção apresenta um método para estimar o tempo necessário para que a corrente da fase em processo de desligamento atinja valor nulo, com base na equação de tensão da máquina e em hipóteses simplificadoras.

Considere a Eq. (1.5), reescrita em (4.1).

Figura 4.1 – Relação entre a corrente de referência ótima e a corrente real da fase em processo de desligamento.



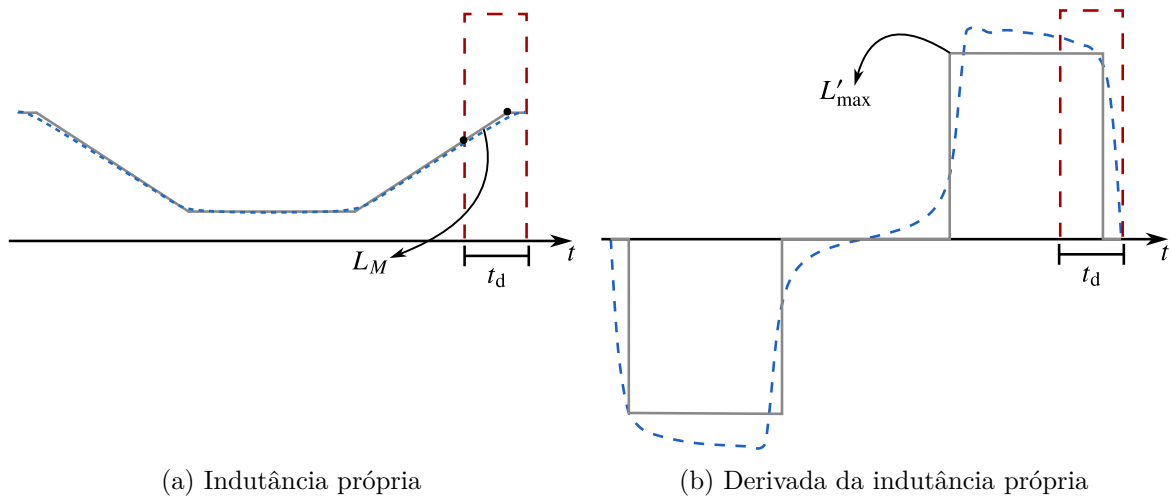
Fonte: o autor.

$$-v_o = r_o i_o + L_o \frac{di_o}{dt} + \omega_r \frac{\partial L_o}{\partial \theta_r} i_o \quad (4.1)$$

em que r_o representa a resistência e L_o representa a indutância própria da fase que deixa a condução.

Conforme ilustrado na Figura 4.2, durante o intervalo de comutação a variação da indutância própria da fase em desligamento pode ser aproximada por uma função linear. Além disso, nessa região, a derivada da indutância permanece próxima de seu valor máximo. Com essas hipóteses, a Eq. (4.1) é reescrita na forma aproximada de (4.2).

Figura 4.2 – Aproximações adotadas para a estimação do tempo de extinção da corrente da fase em desligamento. As curvas tracejadas foram obtidas por meio de FEA. O retângulo vermelho corresponde ao intervalo de comutação.



(a) Indutância própria

(b) Derivada da indutância própria

Fonte: o autor.

$$-v_o \approx R'_o i_o + (L_M + \omega_r L'_{\max} t) \frac{di_o}{dt} \quad (4.2)$$

em que L_M é o valor da indutância no início do processo de desligamento, L'_{\max} é o valor máximo da derivada da indutância própria da fase em processo de desligamento, calculado por meio da aproximação adotada, e $R'_o = r_o + \omega_r L'_{\max}$, parâmetro equivalente que agrega o termo resistivo e o efeito da variação angular da indutância.

Resolvendo a equação diferencial em (4.2), obtém-se uma estimativa do tempo t_d necessário para que a corrente decaia de um valor i_{com} até zero, como apresentado em (4.3).

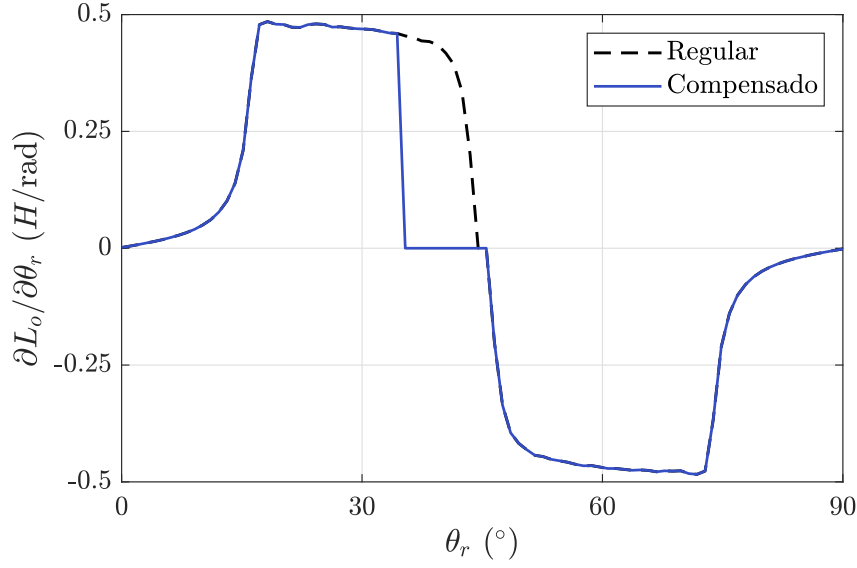
$$\begin{aligned}
 (L_M + \omega_r L'_{\max} t) \frac{di_o}{dt} &= -v_o - R'_o i_o \\
 \int_{i_{\text{com}}}^0 \frac{di_o}{v_o + R'_o i_o} &= - \int_0^{t_d} \frac{dt}{(L_M + \omega_r L'_{\max} t)} \\
 \frac{1}{R'_o} \ln(v_o + R'_o i_o) \Big|_{i_{\text{com}}}^0 &= - \frac{1}{\omega_r L'_{\max}} \ln(L_M + \omega_r L'_{\max} t) \Big|_0^{t_d} \\
 \frac{1}{R'_o} \ln\left(\frac{v_o + R'_o i_{\text{com}}}{v_o}\right) &= \frac{1}{\omega_r L'_{\max}} \ln\left(\frac{L_M + \omega_r L'_{\max} t_d}{L_M}\right) \\
 \ln\left(\frac{L_M + \omega_r L'_{\max} t_d}{L_M}\right) &= \ln\left(1 + \frac{R'_o i_{\text{com}}}{v_o}\right) \frac{\omega_r L'_{\max}}{R'_o} \\
 t_d &= \frac{L_M}{\omega_r^* L'_{\max}} \left[\left(1 + \frac{R'_o i_{\text{com}}}{V_{\text{dc}}}\right) \frac{\omega_r^* L'_{\max}}{R'_o} - 1 \right] \tag{4.3}
 \end{aligned}$$

Com base na estimativa de t_d , impõe-se, no cálculo das correntes de referência, que a derivada da indutância da fase em desligamento seja nula durante o intervalo correspondente. Com isso, a corrente de referência dessa fase torna-se automaticamente nula, tanto no problema formulado em $dq0$ quanto naquele formulado em dqe , favorecendo a extinção da corrente antes da região de produção de torque negativo. Ressalta-se que essa modificação é aplicada apenas na síntese das referências, sem alterar as grandezas físicas da máquina. O procedimento é ilustrado na Figura 4.3.

4.2 Considerações sobre a compensação angular

Para aplicar a compensação angular descrita na seção anterior, algumas considerações adicionais devem ser estabelecidas. A primeira refere-se à corrente i_{com} , correspondente ao instante de início do desligamento da fase. Assume-se que esse valor pode ser estimado por meio de (4.4).

Figura 4.3 – Exemplo da aplicação do método de compensação proposto em uma SRM 6/4



Fonte: o autor.

$$i_{\text{com}} = \sqrt{\frac{2T_{\text{carga}}}{L'_{\text{max}}}} \quad (4.4)$$

sendo $|T_{\text{carga}}|$.

Outra consideração diz respeito à tensão aplicada aos terminais da fase em processo de desligamento. Admite-se que, durante esse intervalo, o módulo da tensão v_o é igual à tensão do barramento CC, V_{dc} , descontadas as quedas de tensão nos dois diodos do conversor AHB, $2V_D$, conforme a Eq. (4.5). Essa hipótese é válida sob condução exclusiva dos diodos e com desprezo dos efeitos das resistências em série e da dinâmica de recuperação reversa.

$$|v_o| = V_{\text{dc}} - 2V_D \quad (4.5)$$

Em determinadas condições de operação, o tempo necessário para a extinção da corrente da fase em processo de desligamento pode ser superior ao intervalo no qual as demais fases passam a ser candidatas à condução. Nessa situação, torna-se inviável utilizar integralmente o tempo estimado de decaimento, pois isso implicaria a imposição de uma corrente de referência nula para a fase em desligamento em um intervalo no qual não há outras fases aptas à produção de torque. Consequentemente, embora a produção de torque negativo por essa fase possa ser mitigada, não é possível eliminá-la completamente. Sendo t_d^{max} o maior tempo admissível sem que a fase em desligamento se torne a única candidata à condução, define-se o tempo efetivamente utilizado como $t_d^e = \min(t_d, t_d^{\text{max}})$.

Por fim, para complementar a compensação angular do ponto de vista do controle, subtrai-se do torque de referência o torque remanescente produzido pela fase em desligamento. Esse procedimento é necessário porque, durante a síntese das correntes de

referência, a derivada da indutância dessa fase é anulada por uma hipótese exclusivamente matemática, adotada para impor corrente de referência nula e ampliar o intervalo disponível para extinção da corrente. Do ponto de vista físico, entretanto, a derivada da indutância permanece diferente de zero nesse intervalo e, portanto, ainda há produção de torque. Desconsiderar esse efeito tende a introduzir distorções no torque eletromagnético, mitigadas pela compensação no torque de referência. Seja T_e^* o torque de referência e T_{comp}^* o torque de referência compensado, calculado por meio de (4.6).

$$T_{\text{comp}}^* = T_e^* - T_o \quad (4.6)$$

em que T_o é o torque instantâneo remanescente associado à fase em processo de desligamento, dado por (4.7).

$$T_o = \frac{1}{2} \frac{\partial L_o}{\partial \theta_r} i_o^2 + i_o \sum_{k \neq o} \frac{\partial M_{ko}}{\partial \theta_r} i_k \quad (4.7)$$

A aplicação da compensação angular é apresentada no Algoritmo 3.

Algoritmo 3: Compensação angular

- 1 Estimar a corrente inicial i_{com} ;
- 2 Estimar o tempo de decaimento por meio de (4.3):

$$t_d = \frac{L_M}{\omega_r^* L'_{\text{max}}} \left[\left(1 + \frac{R'_o i_{\text{com}}}{V_{\text{dc}}} \right)^{\frac{\omega_r^* L'_{\text{max}}}{R'_o}} - 1 \right]$$

- 3 **if** $t_d > t_d^{\text{max}}$ **then**
- 4 $t_d^e \leftarrow t_d^{\text{max}}$;
- 5 **else**
- 6 $t_d^e \leftarrow t_d$;
- 7 Forçar, na síntese das correntes de referência, a derivada da indutância da fase em processo de desligamento a zero durante t_d^e ;
- 8 Calcular o torque remanescente da fase em processo de desligamento por meio de (4.7), preservando as derivadas físicas não anuladas;
- 9 **while** $i_o > 0$ **do**

10

$$T_o = \frac{1}{2} \frac{\partial L_o}{\partial \theta_r} i_o^2 + i_o \sum_{k \neq o} \frac{\partial M_{ko}}{\partial \theta_r} i_k$$

4.3 Controle Vetorial Proposto no Referencial $dq0$

A estrutura do controle vetorial proposto no referencial $dq0$ é apresentada na Figura 4.4. O sistema é composto por uma malha externa de velocidade, responsável

por gerar o torque de referência, e por malhas internas de corrente implementadas por controladores de histerese.

As correntes de referência ótimas adotadas nesta seção são obtidas a partir da solução do problema MTPA empregando a matriz das derivadas das indutâncias referida ao referencial $dq0$, conforme (3.21), deduzida no Capítulo 3. Para implementação no controle, essa solução é reescrita na forma expandida apresentada em (4.8).

$$\begin{cases} i_d^* = M'_{0d} \sqrt{\frac{2 |T_{\text{comp}}^*|}{|L_T|}} \\ i_q^* = M'_{q0} \sqrt{\frac{2 |T_{\text{comp}}^*|}{|L_T|}} \\ i_0^* = L'_0 \sqrt{\frac{2 |T_{\text{comp}}^*|}{|L_T|}} \end{cases} \quad (4.8)$$

em que $L_T = L'_d M'^2_{0d} + L'_q M'^2_{q0} + 2 M'_{dq} M'_{q0} M'_{0d} + L'_0 (L'^2_0 + 2M'^2_{q0} + 2M'^2_{0d})$.

As etapas do controle proposto no referencial $dq0$ são descritas no Algoritmo 4.

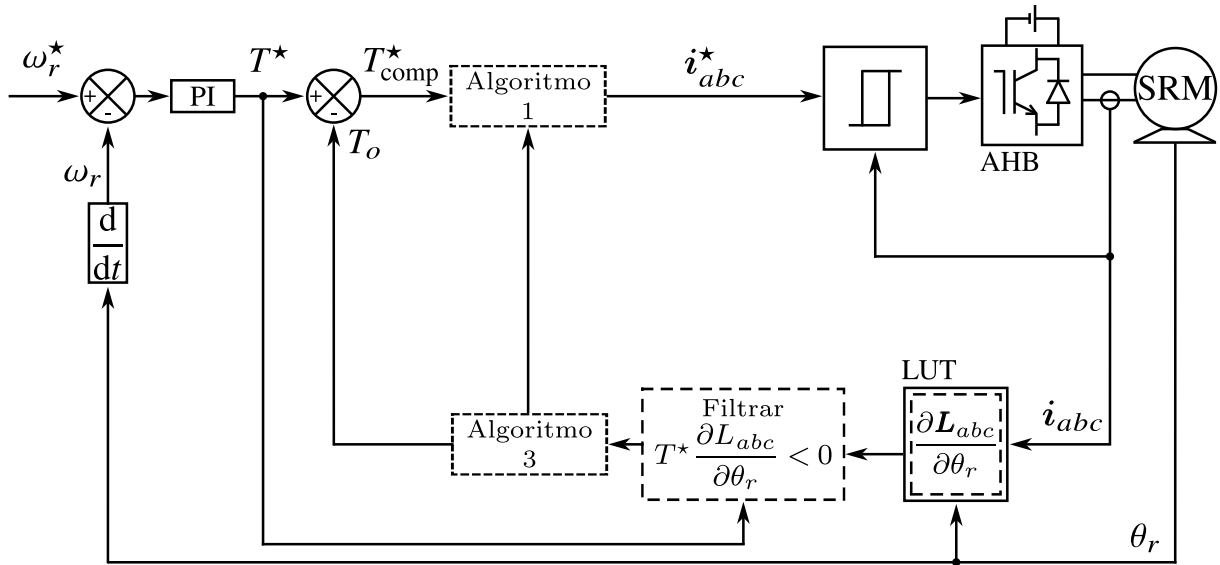
Algoritmo 4: Estratégia de controle proposta no referencial $dq0$

- 1 Obter a posição do rotor e as correntes de fase por meio do *encoder* e dos sensores de corrente;
 - 2 Determinar as derivadas das indutâncias próprias e mútuas a partir de tabelas de consulta (LUTs) bidimensionais, definidas em função da posição do rotor e das correntes medidas;
 - 3 Selecionar as regiões ativas das derivadas das indutâncias de acordo com o sinal do torque de referência, mantendo apenas os valores com o mesmo sinal e anulando os demais;
 - 4 Aplicar a estratégia de compensação angular descrita no Algoritmo 3;
 - 5 Utilizar o Algoritmo 1, considerando a forma expandida mostrada em (4.8), para obter as correntes de referência;
 - 6 Realizar o rastreamento das correntes de referência por meio de controladores de histerese e gerar os sinais de acionamento do conversor AHB.
-

Para apresentar formas de onda típicas obtidas com a aplicação do método de controle proposto, consideram-se as derivadas das indutâncias próprias e mútuas mostradas nas Figs. 4.5 e 4.6 obtidas por FEA, respectivamente, para a máquina 6/4, utilizada na validação experimental desta tese, e para a máquina 12/10, cujos parâmetros são apresentados em [88] e que é aqui tratada como trifásica.

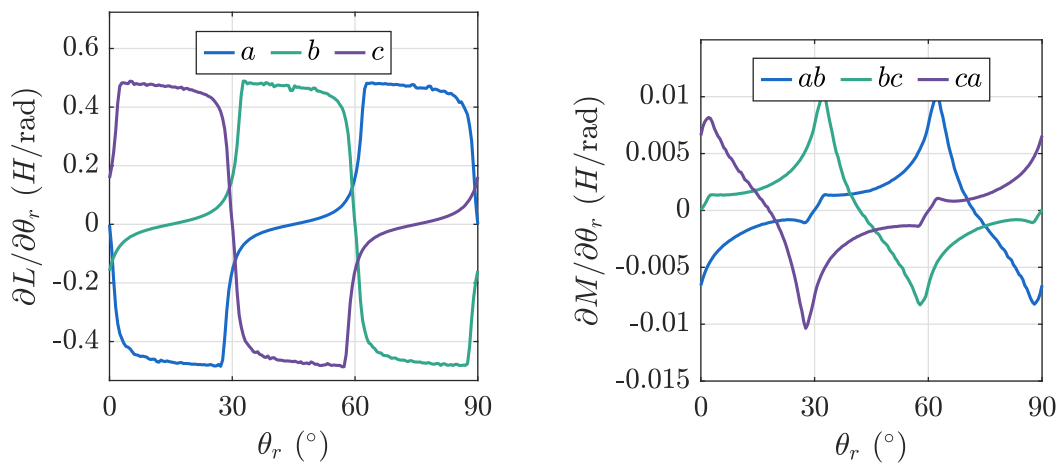
As formas de onda obtidas com a aplicação do controle no referencial $dq0$ são apresentadas nas Figs. 4.7 e 4.8, respectivamente para as máquinas 6/4 e 12/10, para um torque de 1 Nm. Nessas figuras, apresentam-se as derivadas das indutâncias referidas

Figura 4.4 – Diagrama de blocos do controle vetorial proposto no referencial $dq0$



Fonte: o autor.

Figura 4.5 – Perfil das derivadas das indutâncias da máquina 6/4 no sistema de fases



(a) Derivada da indutância própria

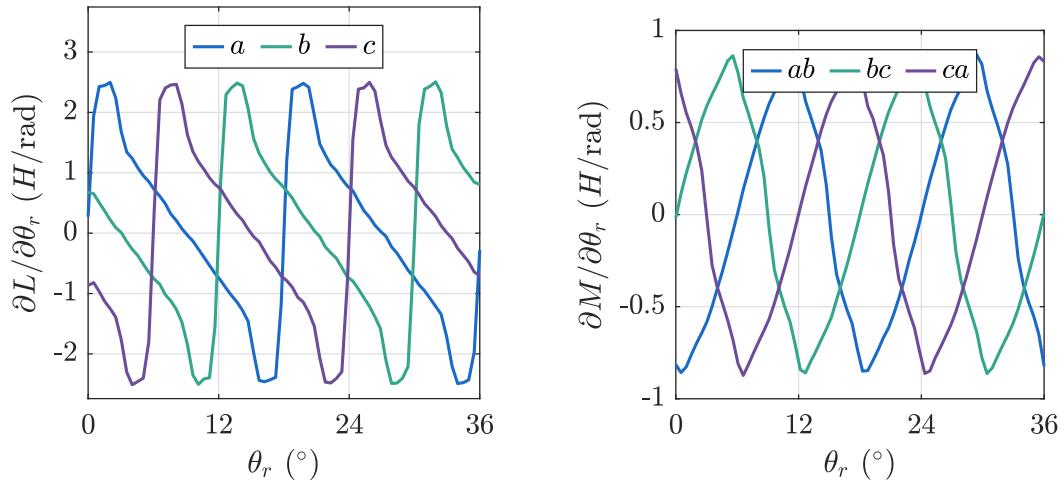
(b) Derivada da indutância mútua

Fonte: o autor.

aos sistemas $\alpha\beta0$ e $dq0$ e as correntes de referência correspondentes, expressas tanto no referencial $dq0$ quanto no sistema de fases.

Ressalta-se, portanto, que essa estrutura preserva a dependência angular explícita das correntes de referência e o acoplamento entre eixos, características inerentes à modelagem da SRM no referencial $dq0$. Além disso, comprova-se que a utilização da formulação proposta no sistema $dq0$ resulta em correntes positivas no sistema de fases, condição necessária para utilização do conversor AHB.

Figura 4.6 – Perfil das derivadas das indutâncias da máquina 12/10 no sistema de fases



(a) Derivada da indutância própria

(b) Derivada da indutância mútua

Fonte: o autor.

4.4 Controle Vetorial Proposto no Referencial dqe

A estrutura do controle vetorial proposto no referencial dqe é apresentada na Figura 4.9. Como discutido anteriormente, nesse sistema de coordenadas, o eixo d encontra-se alinhado à direção de menor capacidade instantânea de produção de torque. Como consequência, a corrente de referência ótima irrestrita nesse eixo é nula, e o eixo d fica desacoplado dos demais quanto à produção de torque.

Essa propriedade permite obter expressões analíticas para as correntes ótimas, eliminando a necessidade de aproximações para determinar a direção ótima de produção de torque e, conseqüentemente, para resolver o problema de otimização associado ao controle MTPA. Essas expressões decorrem de (3.39), deduzida no Capítulo 3.

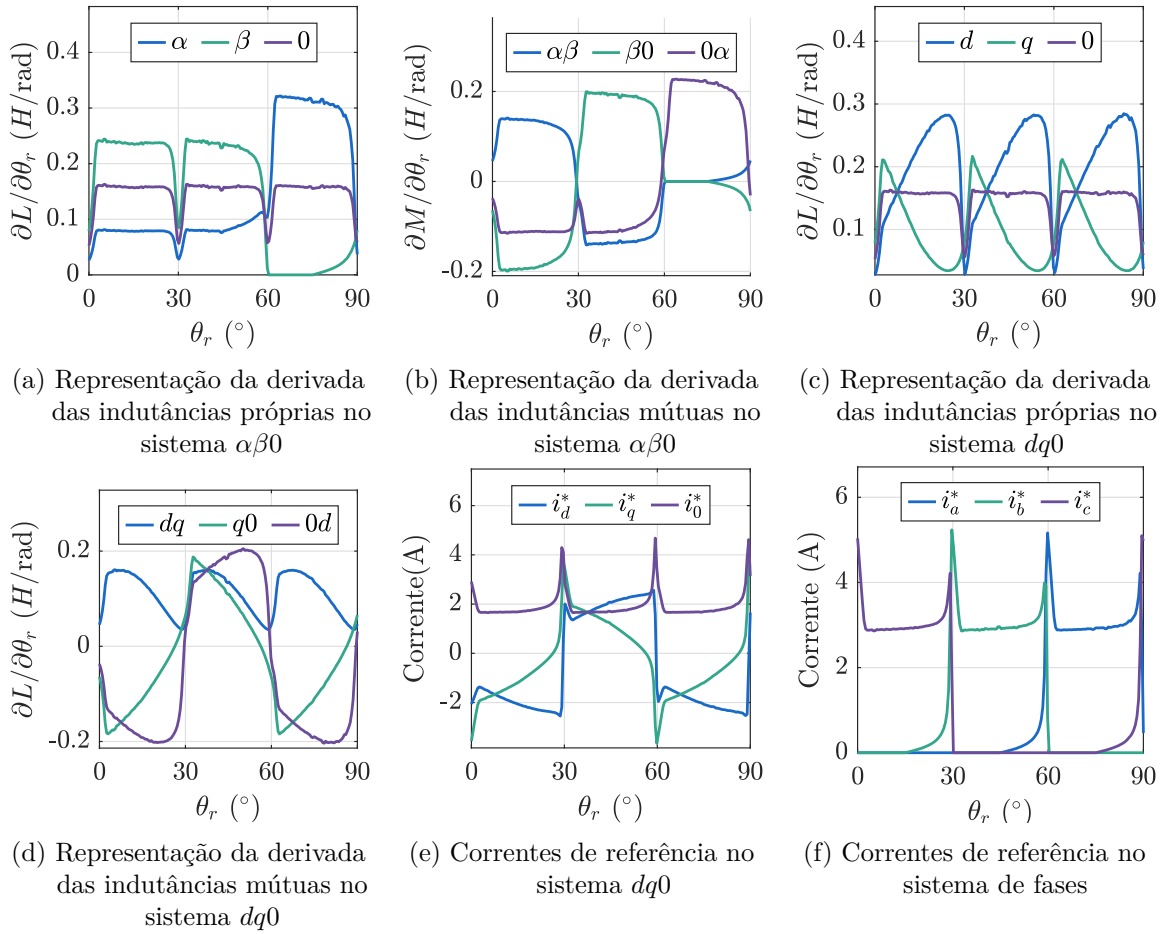
A arquitetura global do controle permanece semelhante àquela apresentada para o referencial $dq0$. As etapas específicas do controle vetorial no referencial dqe são descritas no Algoritmo 5.

Algoritmo 5: Estratégia de controle proposta no referencial dqe

- 1 Obter, a partir do *encoder*, a posição do rotor e, por meio dos sensores de corrente, os valores instantâneos das correntes de fase;
 - 2 Utilizar as LUTs, juntamente com as leituras obtidas na etapa anterior, para determinar as derivadas das indutâncias próprias e mútuas;
 - 3 Aplicar a estratégia de compensação angular, conforme o Algoritmo 3;
 - 4 Calcular as correntes de referência ótimas por meio do Algoritmo 2;
 - 5 Rastrear as correntes de referência por meio de controladores de histerese, de forma a gerar os sinais de acionamento do conversor AHB.
-

Novamente, consideram-se as formas de onda das derivadas das indutâncias próprias e mútuas apresentadas nas Figs. 4.5 e 4.6, respectivamente para as máquinas 6/4 e 12/10.

Figura 4.7 – Formas de onda típicas obtidas com a aplicação do controle proposto em $dq0$ para a SRM 6/4

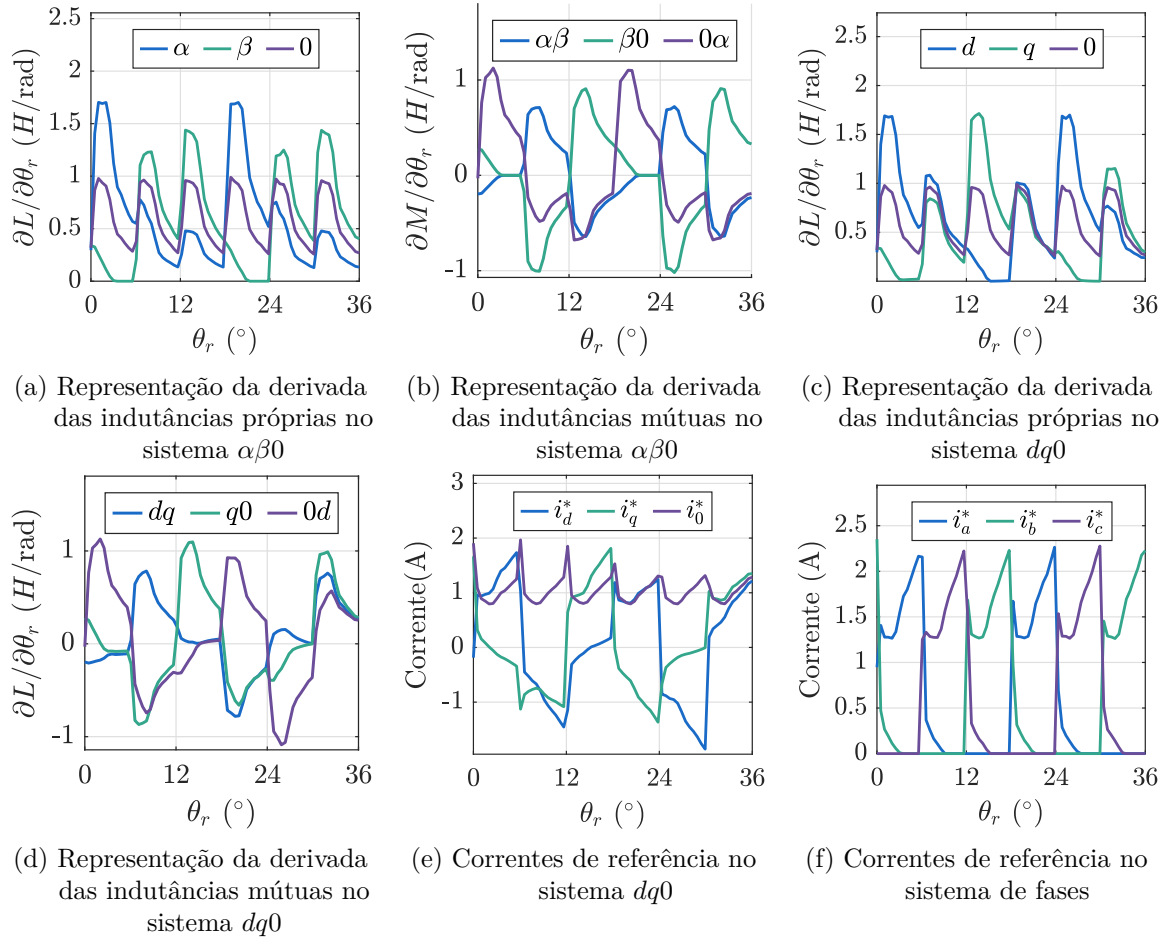


Fonte: o autor.

As formas de onda típicas obtidas com a aplicação do controle no referencial dqe são apresentadas nas Figs. 4.10 e 4.11. Nota-se diferença entre as formas de onda no referencial $\alpha\beta0$ obtidas aqui e aquelas obtidas quando se utiliza o método $dq0$, sendo a razão para tal diferença a filtragem da parte negativa da derivada de indutância própria no método $dq0$ para permitir utilizar a aproximação adotada para solução do problema MTPA neste sistema.

Pela Figura 4.10, observa-se que, para a máquina 6/4, a corrente no eixo direto é praticamente nula ao longo de todo o intervalo de variação da posição do rotor, assumindo valores diferentes de zero apenas nos instantes próximos à comutação das fases. Para a máquina 12/10, conforme mostrado na Figura 4.11, a corrente no eixo direto anula-se apenas em posições específicas do rotor. Ainda assim, verifica-se que a formulação apresentada, assim como a obtida no referencial $dq0$, resulta em correntes positivas quando expressas no sistema de fases. A partir dessa observação, confirma-se que, devido à restrição imposta pelo conversor, a corrente ótima calculada para o problema MTPA deixa de sê-lo, passando a ser uma projeção desta corrente na direção em que as correntes negativas são

Figura 4.8 – Formas de onda típicas obtidas com a aplicação do controle proposto em $dq0$ para a SRM 12/10

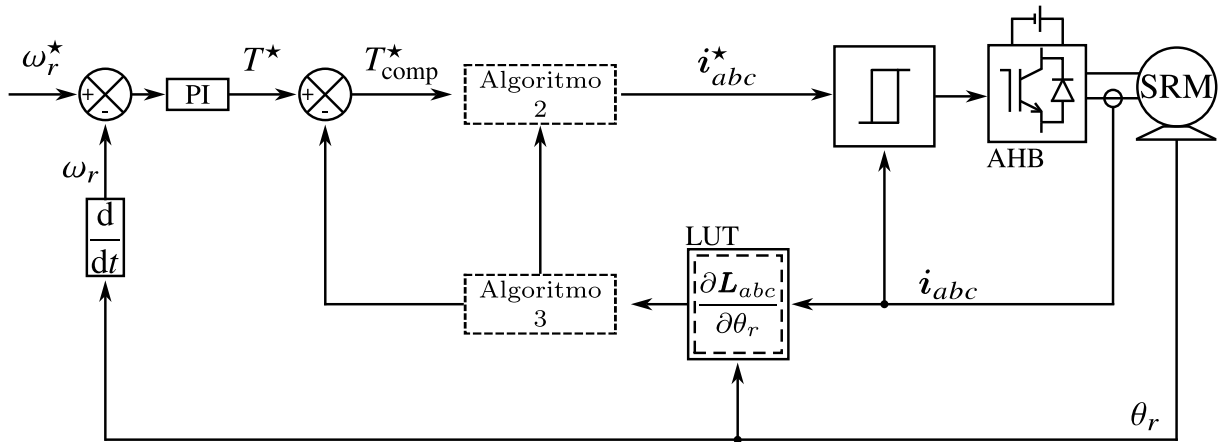


Fonte: o autor.

anuladas, fazendo com que a corrente de eixo d deixe de ser nula.

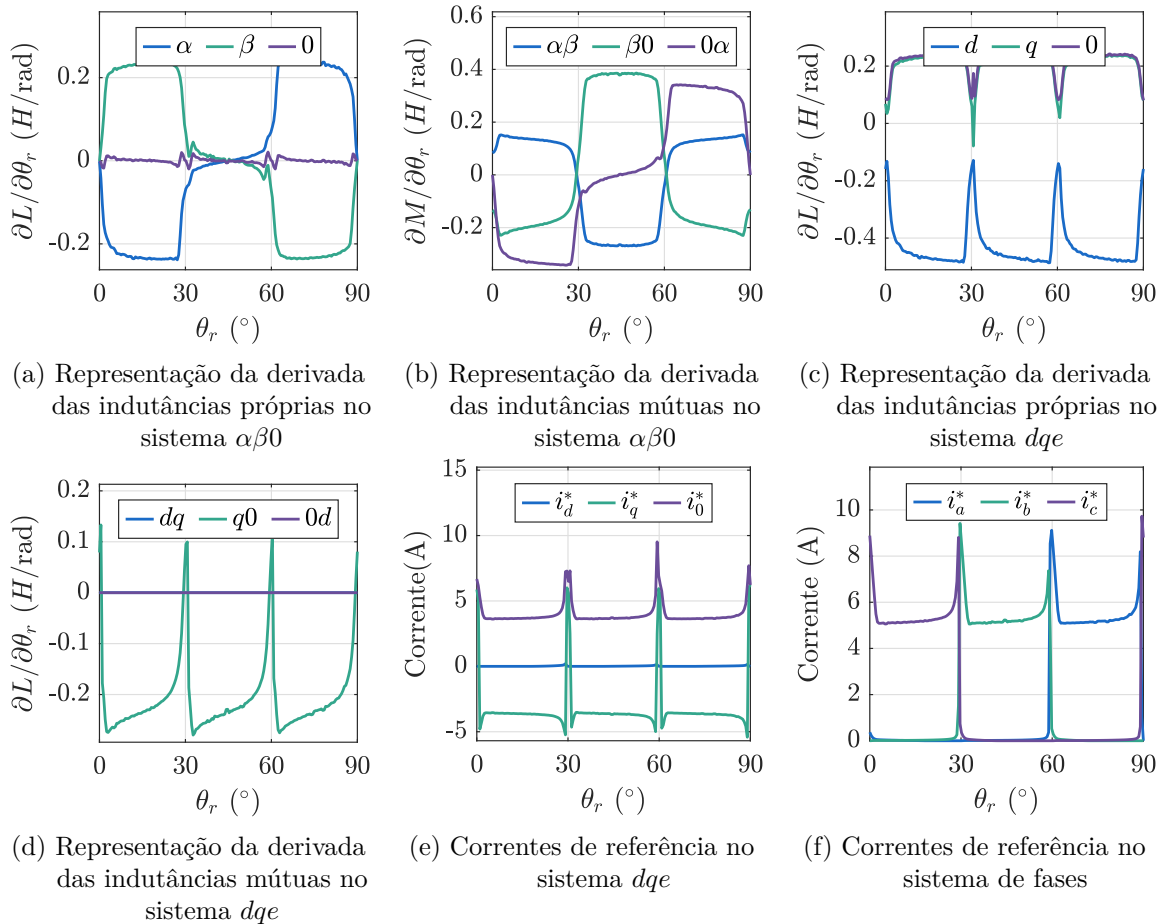
Em síntese, os resultados típicos apresentados para os referenciais $dq0$ e dqe evidenciam que ambas as estratégias resultam em correntes positivas, requisito necessário para utilização do conversor AHB, porém com características distintas de acoplamento e de dependência angular das correntes de referência, aspecto que fundamenta a comparação experimental desenvolvida no capítulo seguinte.

Figura 4.9 – Diagrama de blocos do controle vetorial proposto no referencial dqe



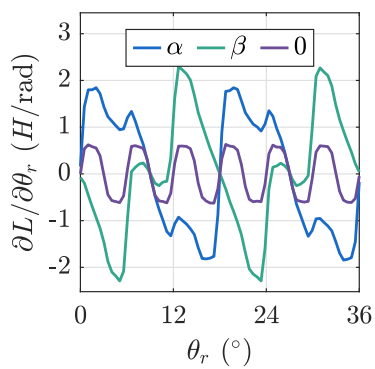
Fonte: o autor.

Figura 4.10 – Formas de onda típicas obtidas com a aplicação do controle proposto em dqe para a SRM 6/4

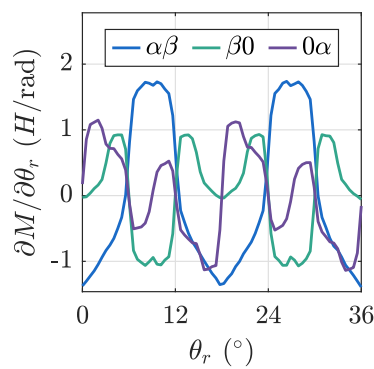


Fonte: o autor.

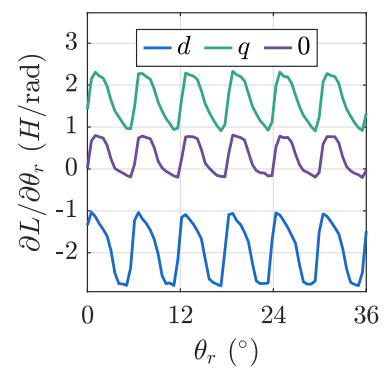
Figura 4.11 – Formas de onda típicas obtidas com a aplicação do controle proposto em dqe para a SRM 12/10



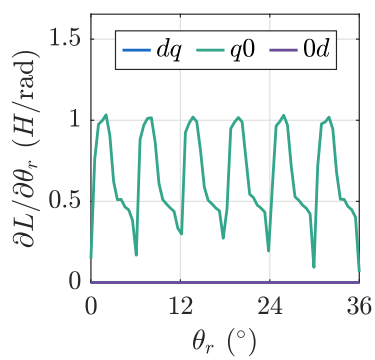
(a) Representação da derivada das indutâncias próprias no sistema $\alpha\beta 0$



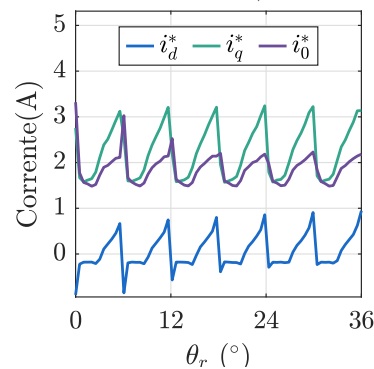
(b) Representação da derivada das indutâncias mútuas no sistema $\alpha\beta 0$



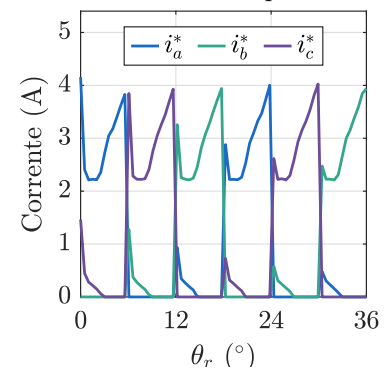
(c) Representação da derivada das indutâncias próprias no sistema dqe



(d) Representação da derivada das indutâncias mútuas no sistema dqe



(e) Correntes de referência no sistema dqe



(f) Correntes de referência no sistema de fases

Fonte: o autor.

Capítulo 5

Resultados e Discussões

O presente capítulo descreve os procedimentos experimentais adotados e os resultados obtidos. Inicialmente, são descritos os métodos de controle considerados para fins de comparação e os procedimentos adotados para a obtenção das correntes de referência ótimas. Em seguida, definem-se as métricas utilizadas para a avaliação de desempenho, bem como os ensaios realizados para a análise do comportamento em regime permanente e em condições transitórias. Por fim, os resultados são apresentados e as discussões realizadas.

5.1 Métodos de Controle Considerados

Para comprovação da eficácia dos métodos de controle propostos, compararam-se os resultados obtidos com a sua aplicação aos resultados obtidos com técnicas presentes na literatura, como o controle por ângulo de disparo (e sua otimização), funções de compartilhamento de torque (TSF) e o controle baseado na transformação dq não senoidal no referencial dqx . A presente seção traz a descrição da implementação dos métodos de referência citados.

5.1.1 Controle por ângulo de disparo

No presente capítulo, a técnica de controle por ângulo de disparo corresponde a uma otimização dos ângulos de excitação e desligamento das fases e é chamada de “convencional”. Para tanto, a função objetivo a ser minimizada é dada por (5.1).

$$\mathcal{J} = \rho_1 \tilde{I}_{\text{RMS}} + \rho_2 \tilde{T}_R \quad (5.1)$$

com $\rho_1 = \rho_2 = 0,5$, onde \tilde{I}_{RMS} e \tilde{T}_R correspondem, respectivamente, à corrente eficaz e ao fator de ondulação de torque normalizados pelos seus valores máximos.

Os ângulos de disparo foram obtidos utilizando algoritmos genéticos, com um tamanho de população igual a 40, número máximo de gerações igual a 50 e 0,5 de fração de *crossover*. Essa otimização foi realizada *offline* para cada velocidade de referência considerada e, em cada geração, os candidatos eram avaliados por meio de simulações computacionais no ambiente *Simulink* do Matlab.

Para implementação dos valores ótimos dos ângulos de excitação e desligamento no sistema digital, consideraram-se regressões lineares em função da velocidade de referência ω_r^* , sendo $\theta_{\text{on}}^{\text{conv}}$ calculado por meio de (5.2) e $\theta_{\text{off}}^{\text{conv}}$ por meio de (5.3), para a fase a .

$$\theta_{\text{on}}^{\text{conv}} = -0,0380\omega_r^* + 56,94 \quad (5.2)$$

$$\theta_{\text{off}}^{\text{conv}} = -0,0323\omega_r^* + 88,88 \quad (5.3)$$

Neste método, a corrente de referência é obtida diretamente a partir do torque de referência.

5.1.2 Controle por TSF

No presente trabalho, para o controle por TSF, considerou-se a função com perfil cossenoidal, conforme (2.4) e (2.8). No controle utilizando TSF também foi realizado um processo de otimização *offline* seguindo as diretrizes já expostas no item anterior, todavia, foram otimizados os ângulos de excitação $\theta_{\text{on}}^{\text{tsf}}$ e o ângulo de sobreposição $\theta_{\text{ov}}^{\text{tsf}}$.

Assim como na técnica de controle anterior, considerou-se uma regressão linear em função da velocidade de referência ω_r^* para obtenção de $\theta_{\text{on}}^{\text{tsf}}$, expresso em (5.4), e de $\theta_{\text{ov}}^{\text{tsf}}$, por meio de (5.5), ambos para a fase a .

$$\theta_{\text{on}}^{\text{tsf}} = -0,03914\omega_r^* + 56,49 \quad (5.4)$$

$$\theta_{\text{ov}}^{\text{tsf}} = 0,009328\omega_r^* + 4,890 \quad (5.5)$$

Uma vez determinada a distribuição do torque de referência para a fase k , T_k^* , o cálculo da corrente de referência da fase i_k^* segue (5.6). O valor da derivada de indutância $\partial L_k / \partial \theta_r$ é obtido por meio de LUTs, as mesmas utilizadas nos métodos propostos.

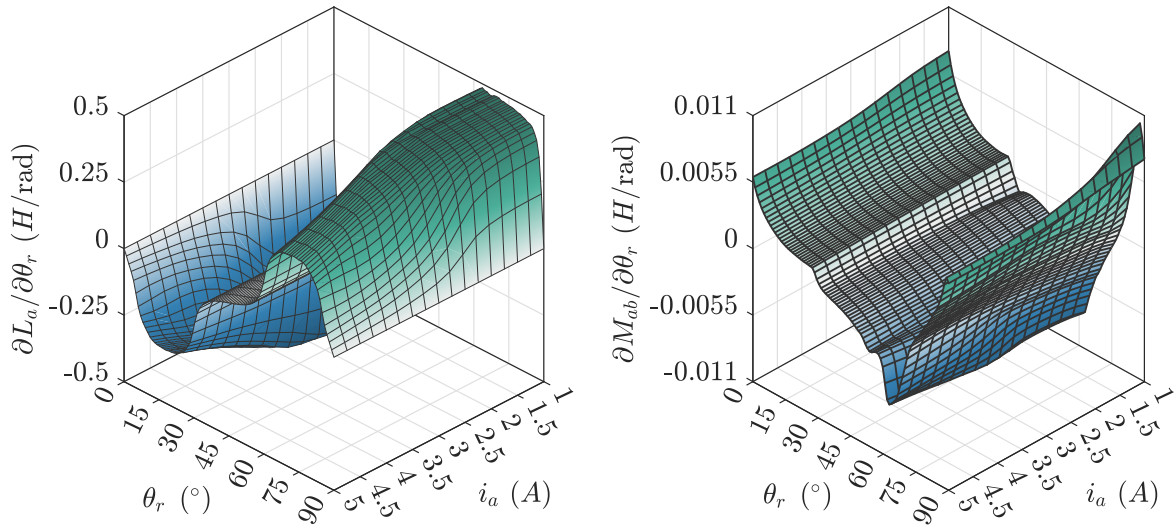
$$i_k^* = \sqrt{\frac{2T_k^*}{\partial L_k / \partial \theta_r}} \quad (5.6)$$

5.1.3 Controle dqx

O controle dqx realizado aqui segue fielmente o descrito em [64]. Para realização desta técnica de controle, assim como nos métodos propostos, faz-se necessário o uso de LUTs com os valores das derivadas de indutância em função da posição e da corrente. As superfícies dessas derivadas foram obtidas por FEA, com o software FEMM, e armazenadas nas LUTs, conforme ilustrado na Figura 5.1.

Os valores presentes nessas superfícies são os mesmos armazenados nas LUTs utilizadas na interface digital. As derivadas associadas às indutâncias mútuas são empregadas apenas nos controles propostos, enquanto no controle por TSF e no dqx , também utilizam-se as derivadas de indutâncias próprias.

Figura 5.1 – Superfícies das derivadas de indutância própria e mútua empregadas na implementação dos controles $dq0$, dqe e dqx .



(a) Derivada de indutância própria

(b) Derivada de indutância mútua

Fonte: o autor.

5.2 Métricas de Desempenho

Para avaliação do desempenho dos métodos propostos, bem como dos métodos escolhidos para comparação, consideraram-se métricas distintas para os regimes permanente e transitório.

5.2.1 Regime permanente

Para avaliação do desempenho dos métodos propostos em regime permanente, bem como dos métodos escolhidos para comparação, consideraram-se as seguintes métricas: ondulação pico a pico do torque normalizada por seu valor médio, conforme (5.7); fator de ondulação do torque, definido por (5.8); e torque por ampère, conforme (5.9).

$$\Delta T_e = \frac{\max(T_e) - \min(T_e)}{\overline{T_e}} \quad (5.7)$$

sendo ΔT_e o valor da ondulação pico a pico do torque T_e normalizada por seu valor médio $\overline{T_e}$.

$$T_R = \frac{1}{\overline{T_e}} \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} T_e^2 dt - \overline{T_e}^2} \quad (5.8)$$

em que T_R é o fator de ondulação do torque e t_1 e t_2 são os instantes de tempo em que se deseja calcular o valor do fator.

$$\text{TPA} = \frac{\overline{T_e}}{\sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} i^2 dt}} \quad (5.9)$$

em que TPA é o valor do torque por ampère.

5.2.2 Transitório

Durante o regime transitório, decorrente da aplicação de degraus de carga ou de velocidade de referência, utilizaram-se como métricas de desempenho o tempo de acomodação ou recuperação (t_s), a integral do erro absoluto de velocidade (IAE_{ω_r}), energia elétrica transitória (E_t) e desvio máximo de velocidade ($\Delta\omega_{\max}$).

Seja t_p o tempo inicial em que ocorre a perturbação e Δt um intervalo de tempo de análise. Assim, t_s pode ser calculado por meio de (5.10), considerando $\epsilon = 5\%$.

$$t_s = \min \left\{ t \geq t_p : |\omega_r(t) - \omega_r^*| \leq \epsilon \omega_r^*, \forall t' \geq t \right\} \quad (5.10)$$

Por sua vez, a IAE_{ω_r} pode ser calculada por meio de (5.11).

$$\text{IAE}_{\omega_r} = \int_{t_p}^{t_p + \Delta t} |\omega_r^*(t) - \omega_r(t)| dt \quad (5.11)$$

Na sequência, E_t é obtido por meio de (5.12).

$$E_t = \int_{t_p}^{t_p + \Delta t} \sum_{k=a,b,c} i_k^2(t) dt \quad (5.12)$$

Por fim, calcula-se $\Delta\omega_{\max}$ por meio de (5.13).

$$\Delta\omega_{\max} = \max_{t \in [t_p, t_p + \Delta t]} |\omega_r(t) - \omega_r^*| \quad (5.13)$$

5.3 Procedimentos Experimentais

A SRM utilizada para validação dos métodos é do tipo 6/4, trifásica, com parâmetros listados no Apêndice D, acionada por meio de um conversor AHB.

Todos os métodos de controle ensaiados possuem uma malha externa de controle de velocidade com um controlador PI que gera o torque de referência e uma malha interna de controle de corrente por meio de controladores de histerese. A diferença entre os métodos de controle, de forma simplificada, é tão somente a forma como as correntes de referência são calculadas.

O PI de velocidade possui ganho proporcional igual a $0,07 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{rad}/\text{s}$ e integral igual a $0,0735 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{rad}$, obtidos pelo método de Ziegler-Nichols. A banda de histerese

adotada foi de $\pm 0,2$ A, considerando os erros dos sensores de corrente e a corrente nominal da máquina. A carga consiste em uma PMSM, cujos parâmetros também se encontram no Apêndice D, operando como gerador e alimentando um conjunto de cargas resistivas em paralelo. O torque de carga, quando apenas um resistor encontra-se ativo, é dado por $1,27 \times 10^{-3} \cdot n_r$ Nm, em que n_r é a velocidade do rotor em rpm.

O torque de referência obtido a partir da malha de controle externa é saturado em $\pm 6,25$ Nm, enquanto as correntes de referência são saturadas em 10 A.

5.3.1 Ensaio em regime permanente

Nesse ensaio, somente um resistor foi conectado ao gerador PMSM, enquanto a velocidade de referência n_r^* foi variada de 300 a 1200 rpm, com degraus de 300 rpm. Após o alcance do regime permanente em cada ponto, as variáveis da SRM foram medidas para cálculo dos índices de desempenho previstos.

Os valores das métricas de desempenho obtidas com esse ensaio são apresentados na Figura 5.2. As formas de onda das correntes de referência nos eixos d , q e zero (0), ou no eixo e (referencial dqe), ou no eixo x (sistema dqx), bem como as correntes de referência no referencial das fases e o torque estimado, podem ser visualizadas nas Figuras de 5.6 a 5.21, para velocidades de referência de 300 a 1200 rpm. Assim, a análise em regime permanente cobre quatro pontos operacionais (300, 600, 900 e 1200), reforçando a consistência da comparação ao longo da faixa de velocidade ensaiada.

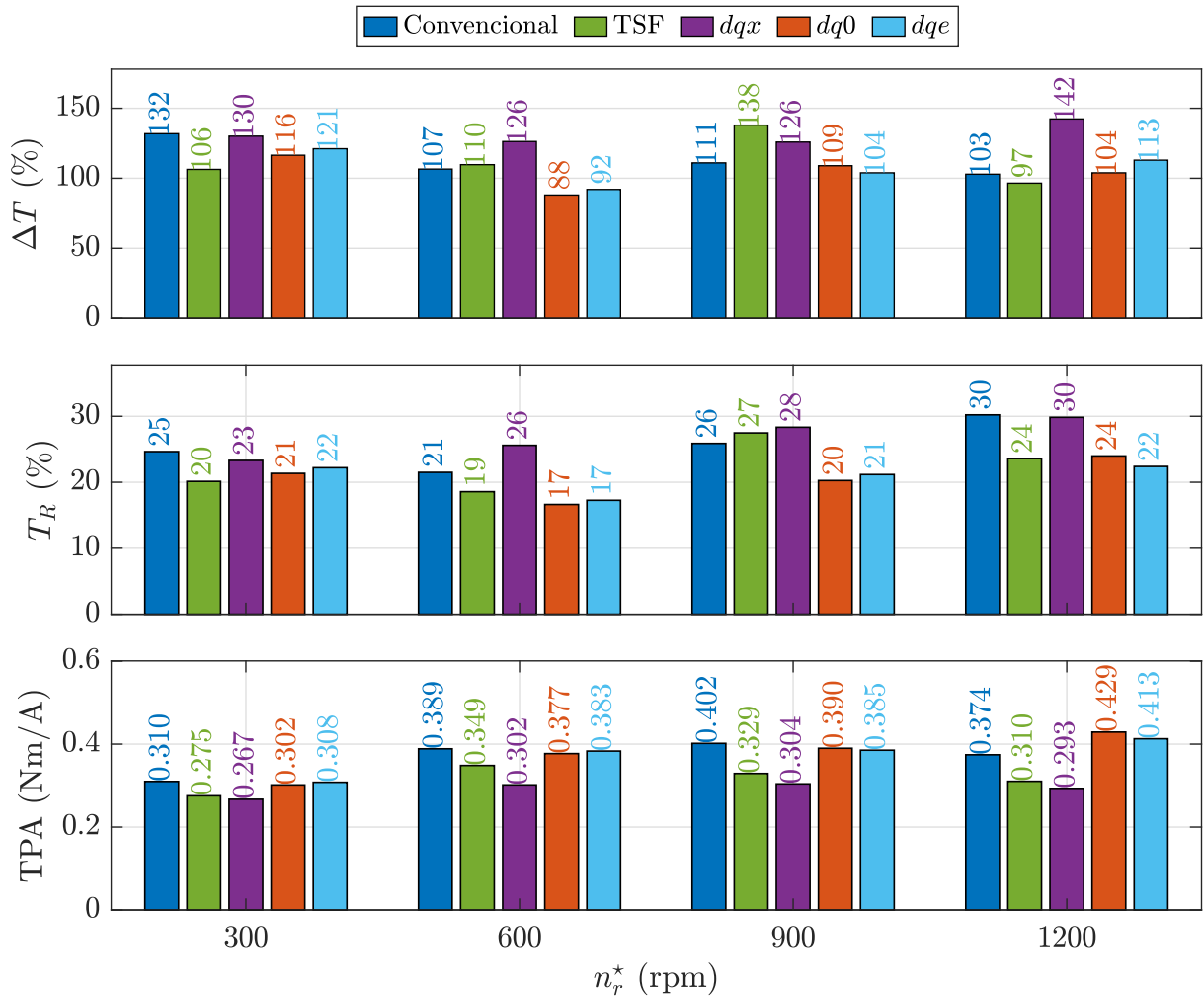
Para verificação do desempenho em regime dos métodos propostos em face dos métodos de referência (convencional, TSF e dqx), os valores nominais da Figura 5.2 foram convertidos para variações percentuais e, para melhor visualização, ilustrados em *heatmaps*. Esses resultados são apresentados nas Figuras 5.3, 5.4 e 5.5 para ΔT_e , T_R e TPA, respectivamente.

Por meio dos *heatmaps* apresentados, verifica-se que, nos quatro pontos operacionais avaliados, os métodos propostos reduziram, na maior parte dos pontos, o ΔT_e e o T_R em relação às estratégias de referência. Quanto ao TPA, observa-se elevação do índice na maior parte das condições analisadas, o que indica melhor aproveitamento eletromagnético para uma mesma demanda de torque.

5.3.2 Degraus de carga

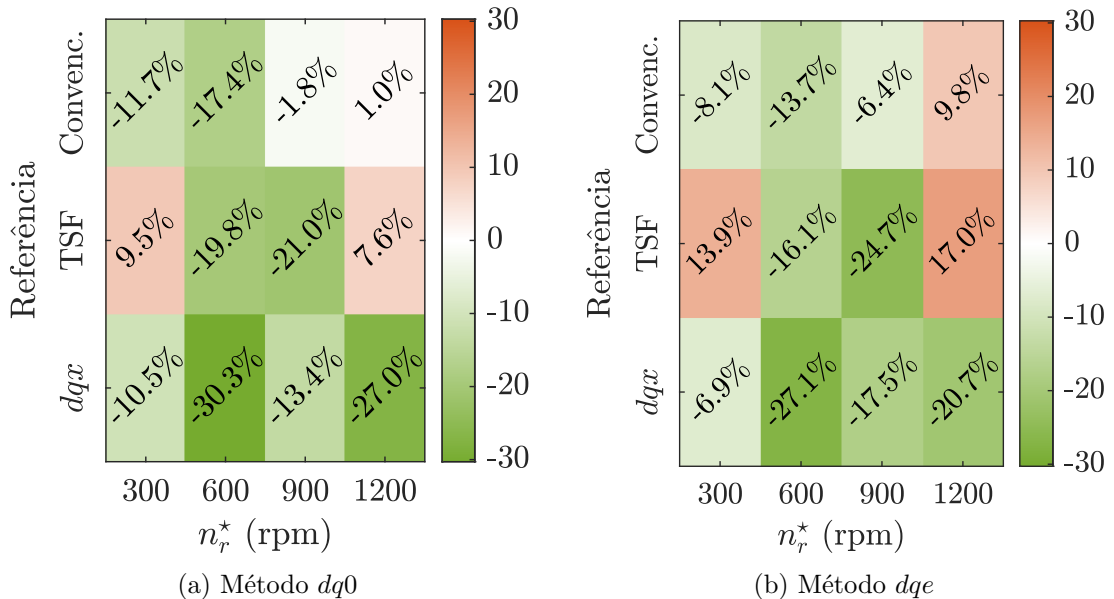
Nesse ensaio, a velocidade de referência foi mantida constante em 600 rpm e três degraus de carga foram aplicados. Os degraus foram emulados por meio da inserção de resistores em paralelo, reduzindo a resistência efetiva e, conseqüentemente, elevando a corrente drenada da PMSM e o torque de carga percebido pela SRM. Ressalta-se que

Figura 5.2 – Métricas de desempenho em regime permanente para diferentes velocidades de referência



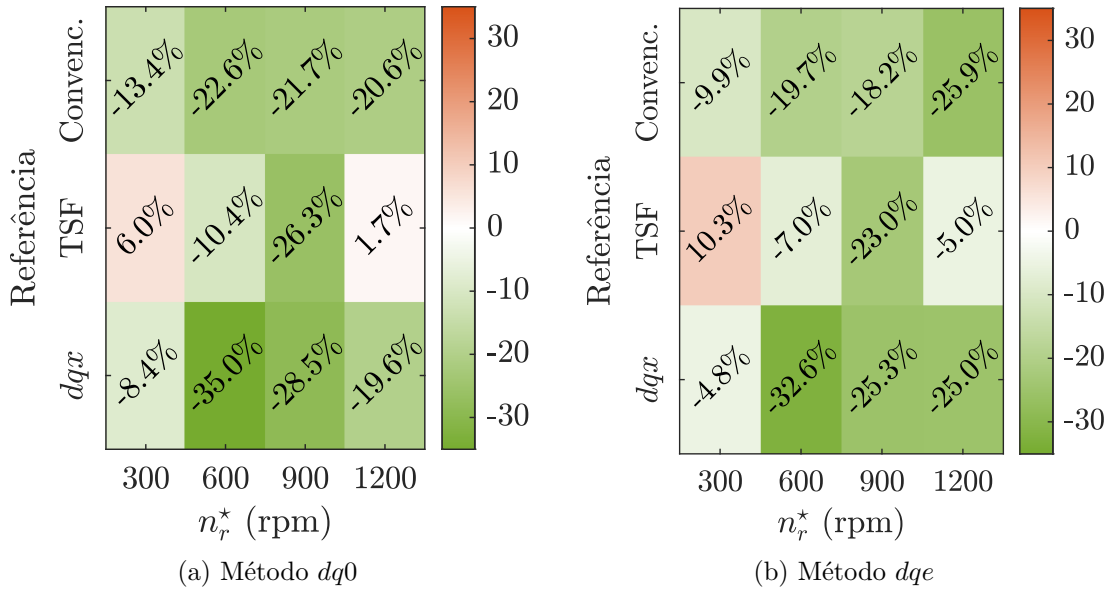
Fonte: o autor.

Figura 5.3 – Variação percentual de ΔT_e em regime permanente para os métodos dq0 e dqe



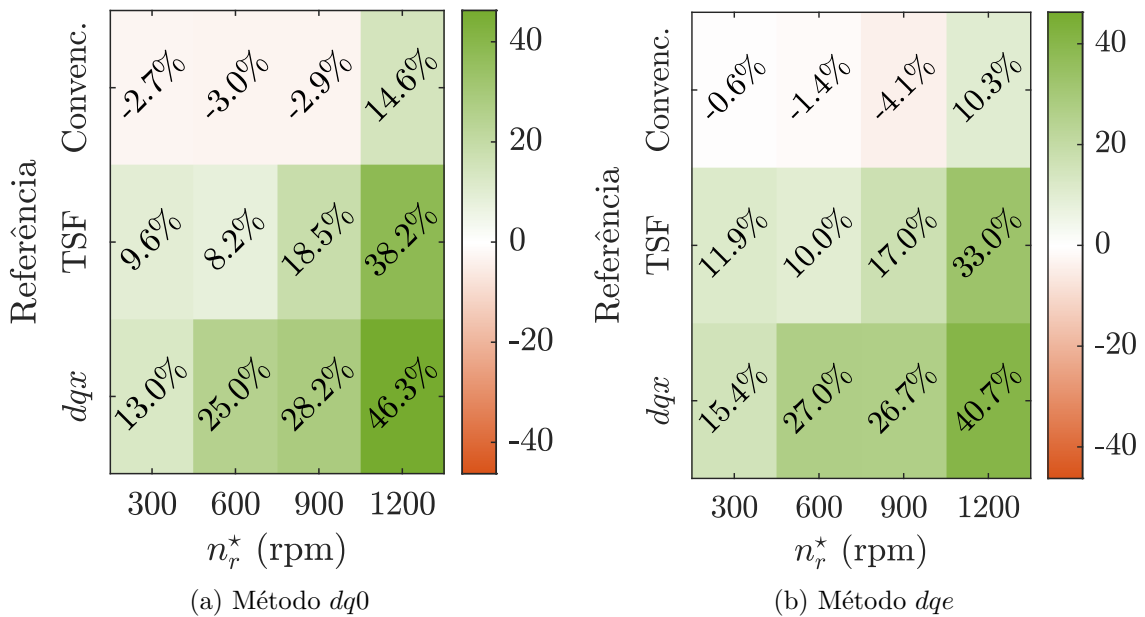
Fonte: o autor.

Figura 5.4 – Variação percentual de T_R em regime permanente para os métodos $dq0$ e dqe



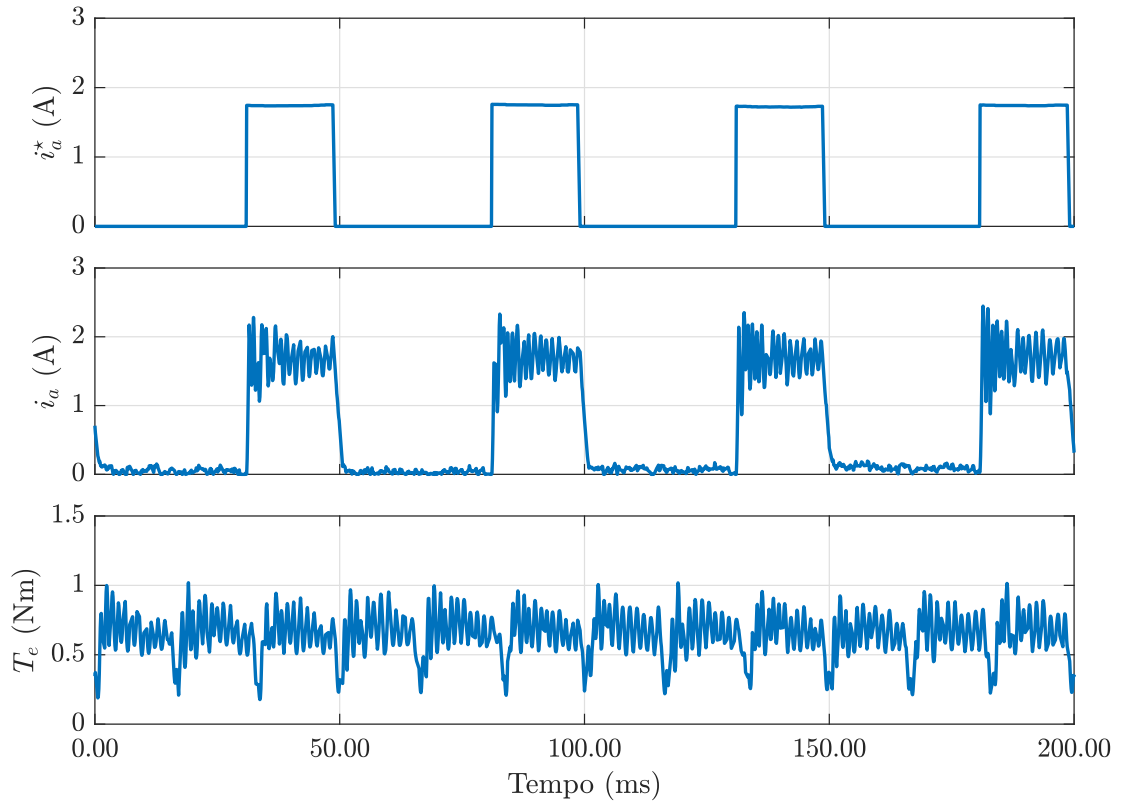
Fonte: o autor.

Figura 5.5 – Variação percentual de TPA em regime permanente para os métodos $dq0$ e dqe



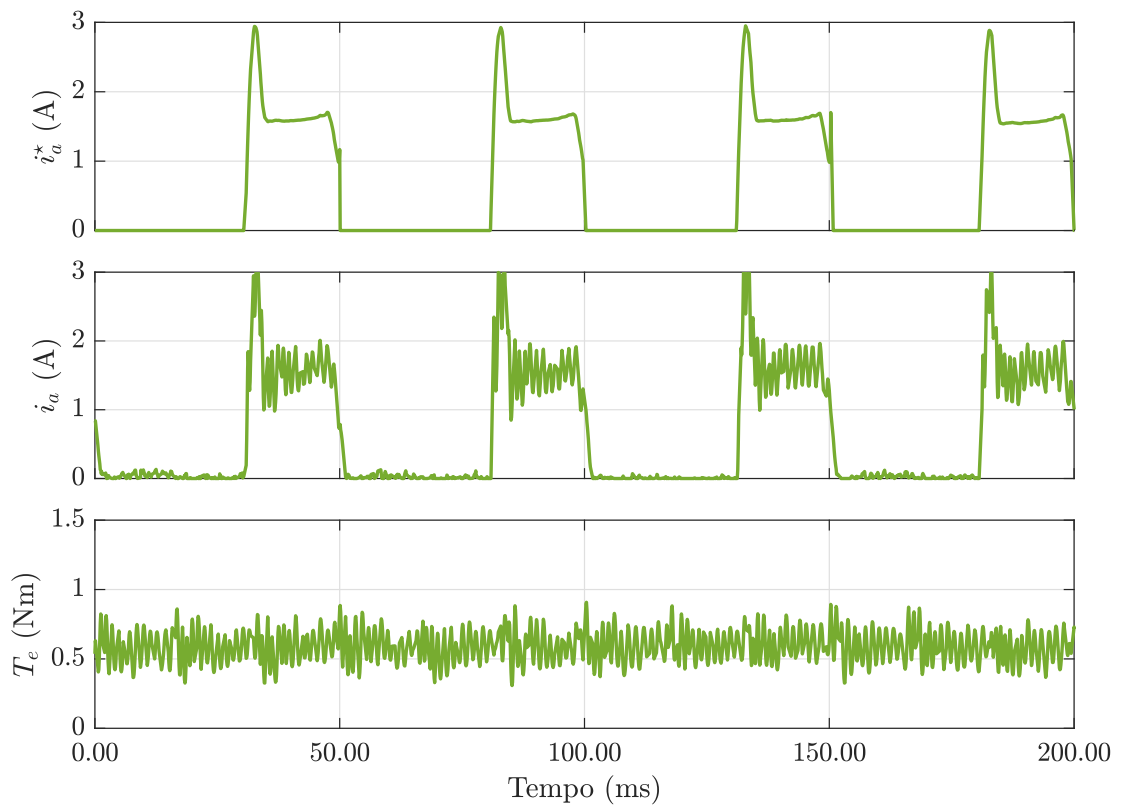
Fonte: o autor.

Figura 5.6 – Desempenho em regime permanente do método convencional para $n_r^* = 300$ rpm



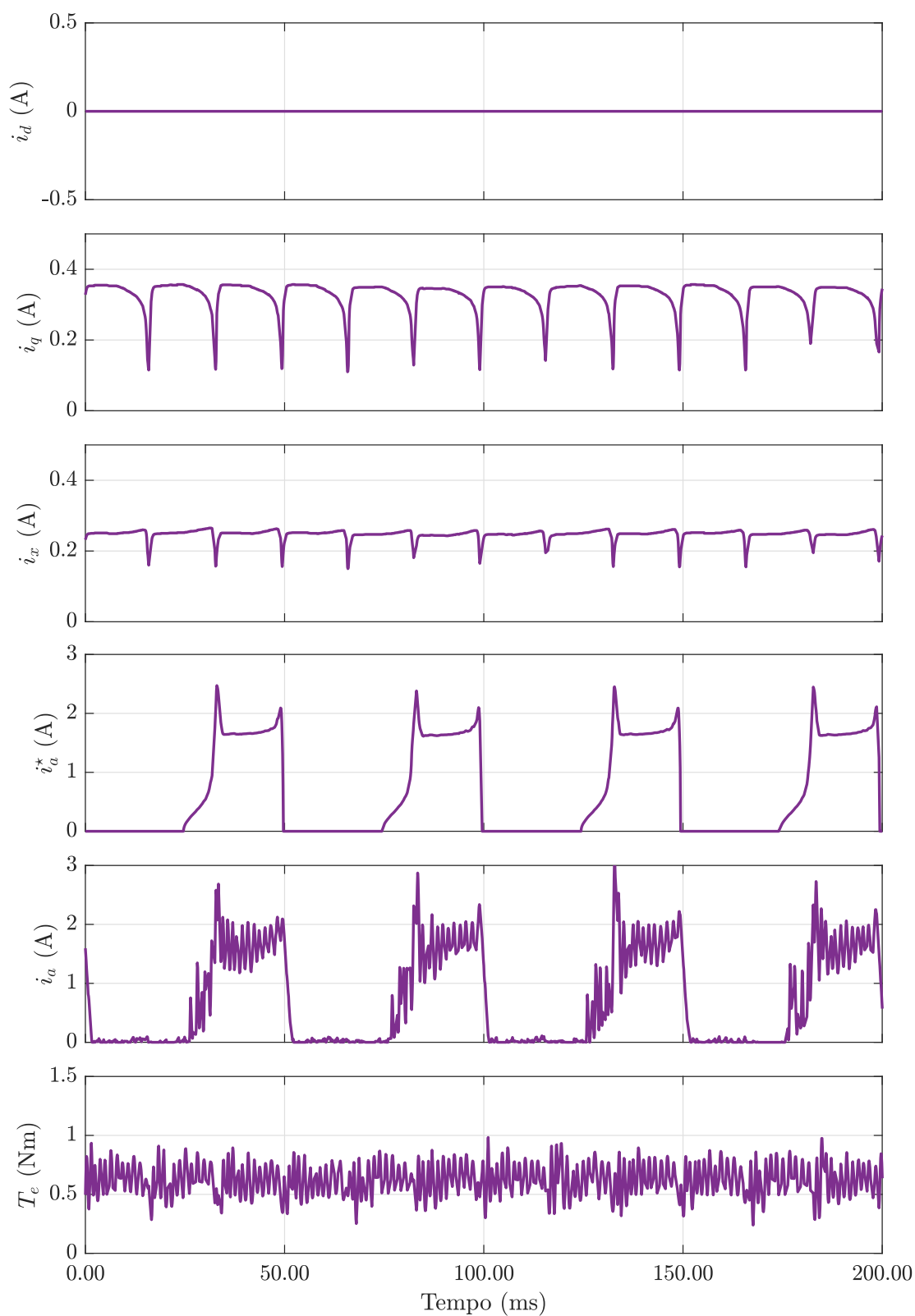
Fonte: o autor.

Figura 5.7 – Desempenho em regime permanente do método TSF para $n_r^* = 300$ rpm



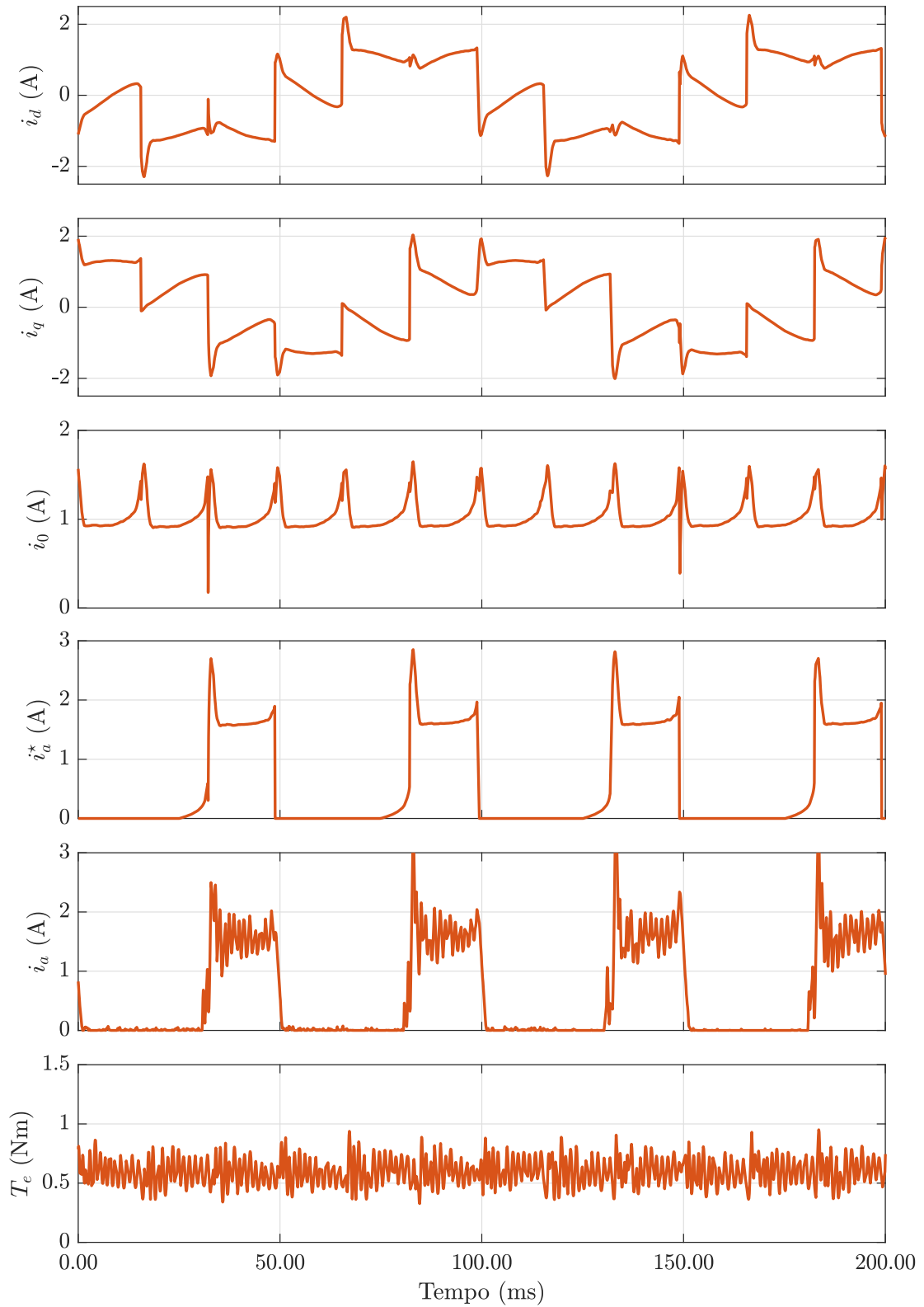
Fonte: o autor.

Figura 5.8 – Desempenho em regime permanente do método dqx $n_r^* = 300$ rpm



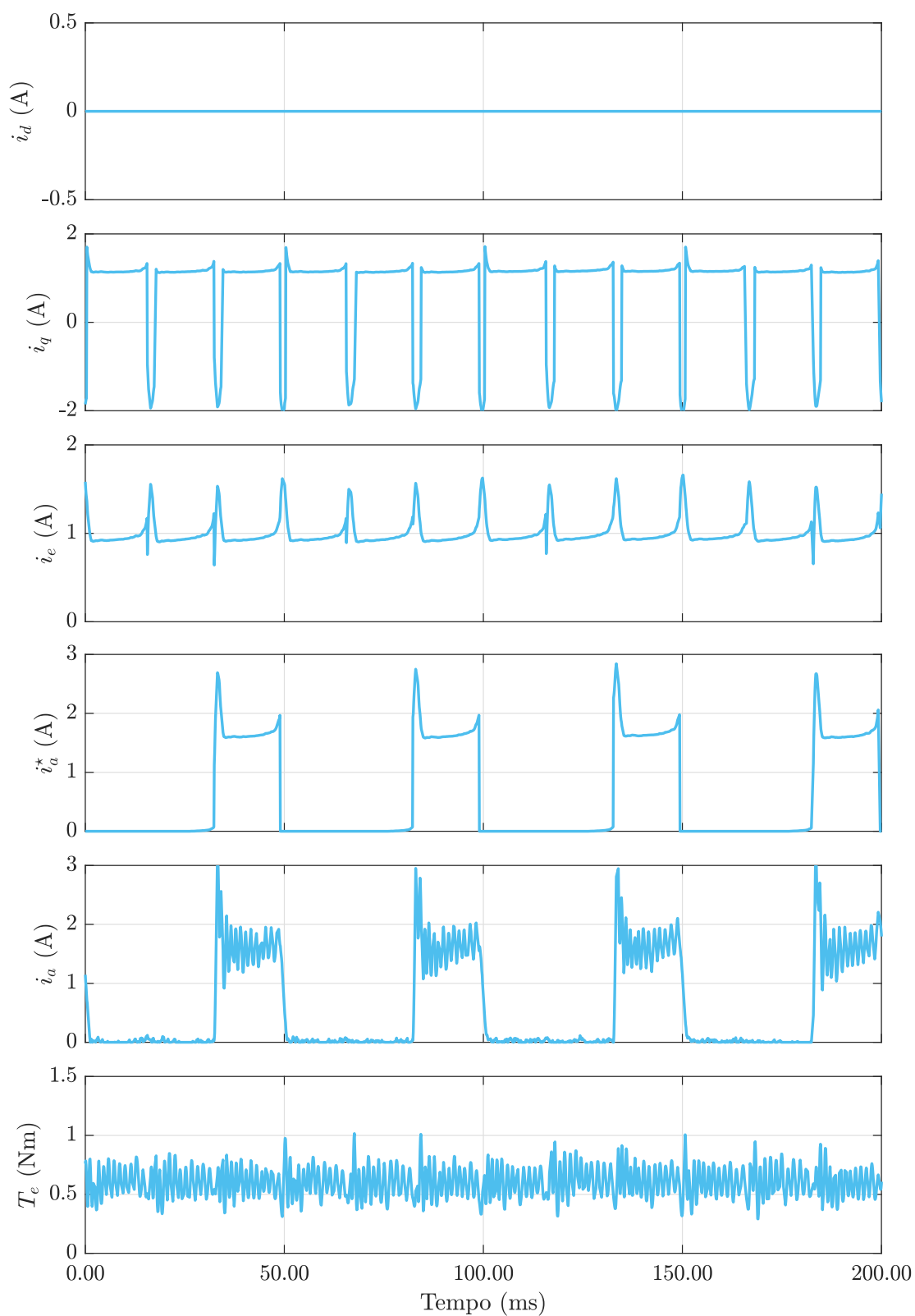
Fonte: o autor.

Figura 5.9 – Desempenho em regime permanente do método $dq0$ $n_r^* = 300$ rpm



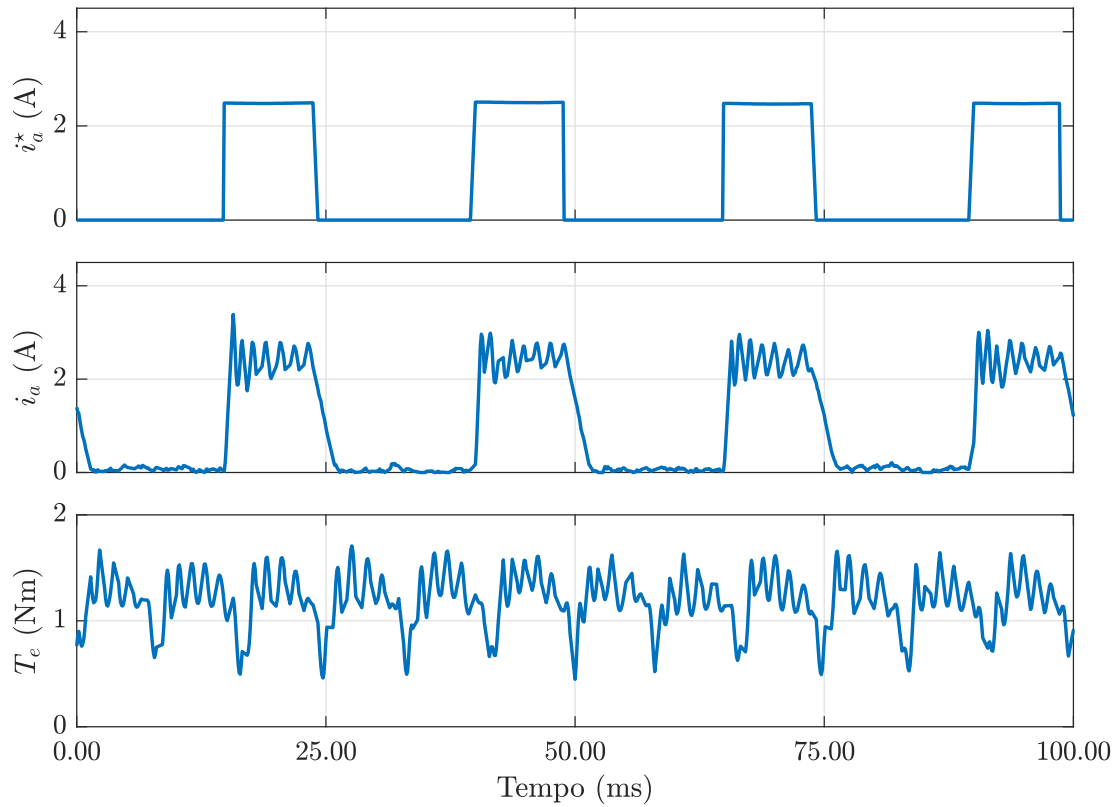
Fonte: o autor.

Figura 5.10 – Desempenho em regime permanente do método *dqe* $n_r^* = 300$ rpm



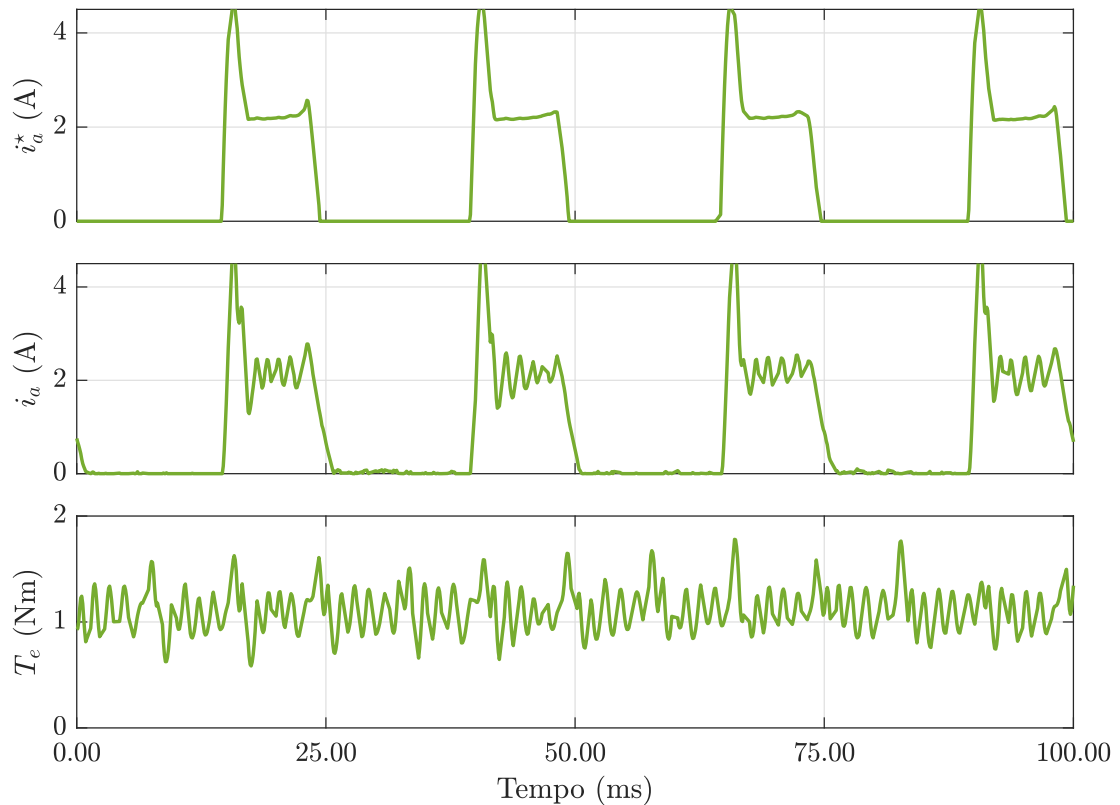
Fonte: o autor.

Figura 5.11 – Desempenho em regime permanente do método convencional para $n_r^* = 600$ rpm



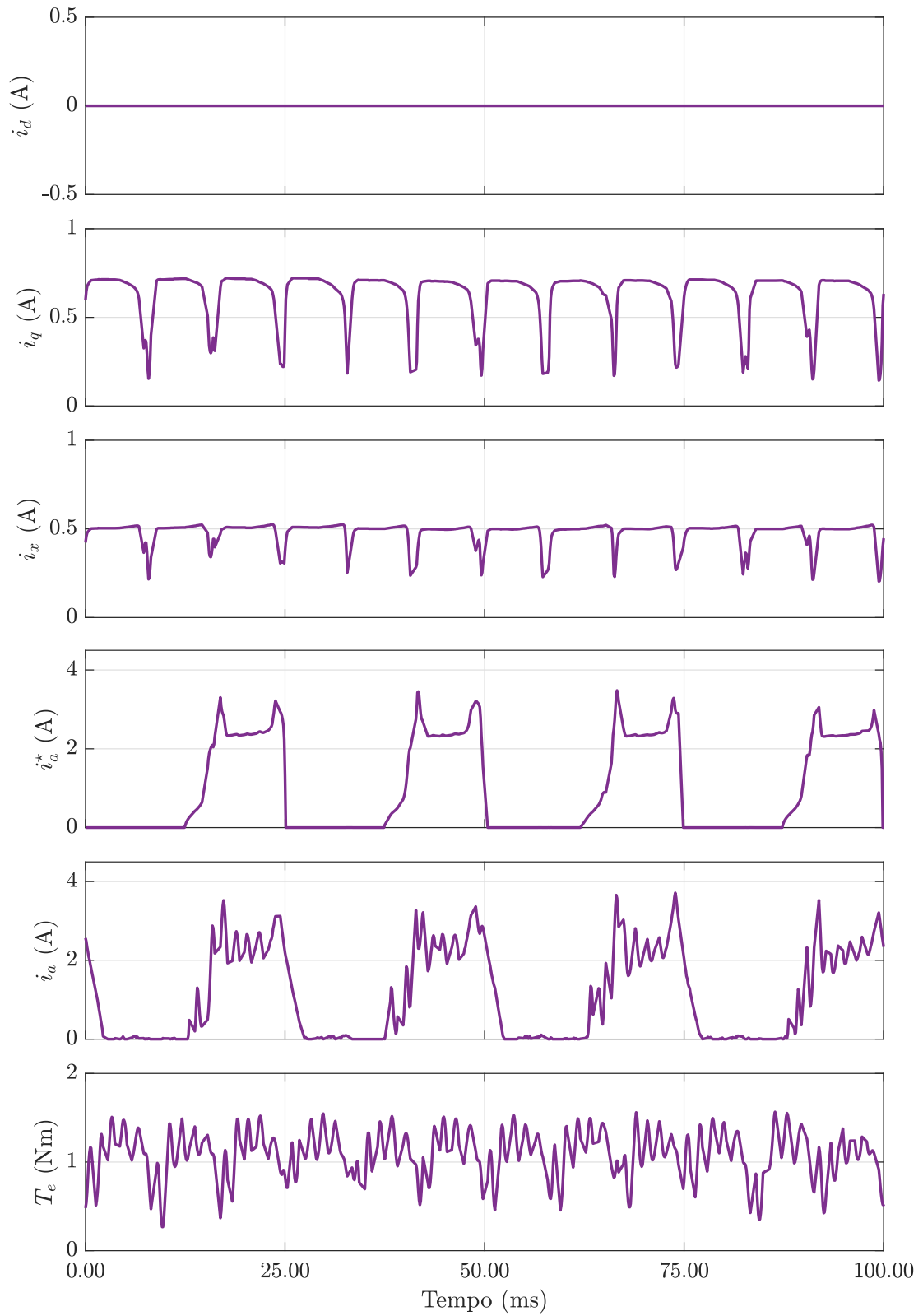
Fonte: o autor.

Figura 5.12 – Desempenho em regime permanente do método TSF para $n_r^* = 600$ rpm



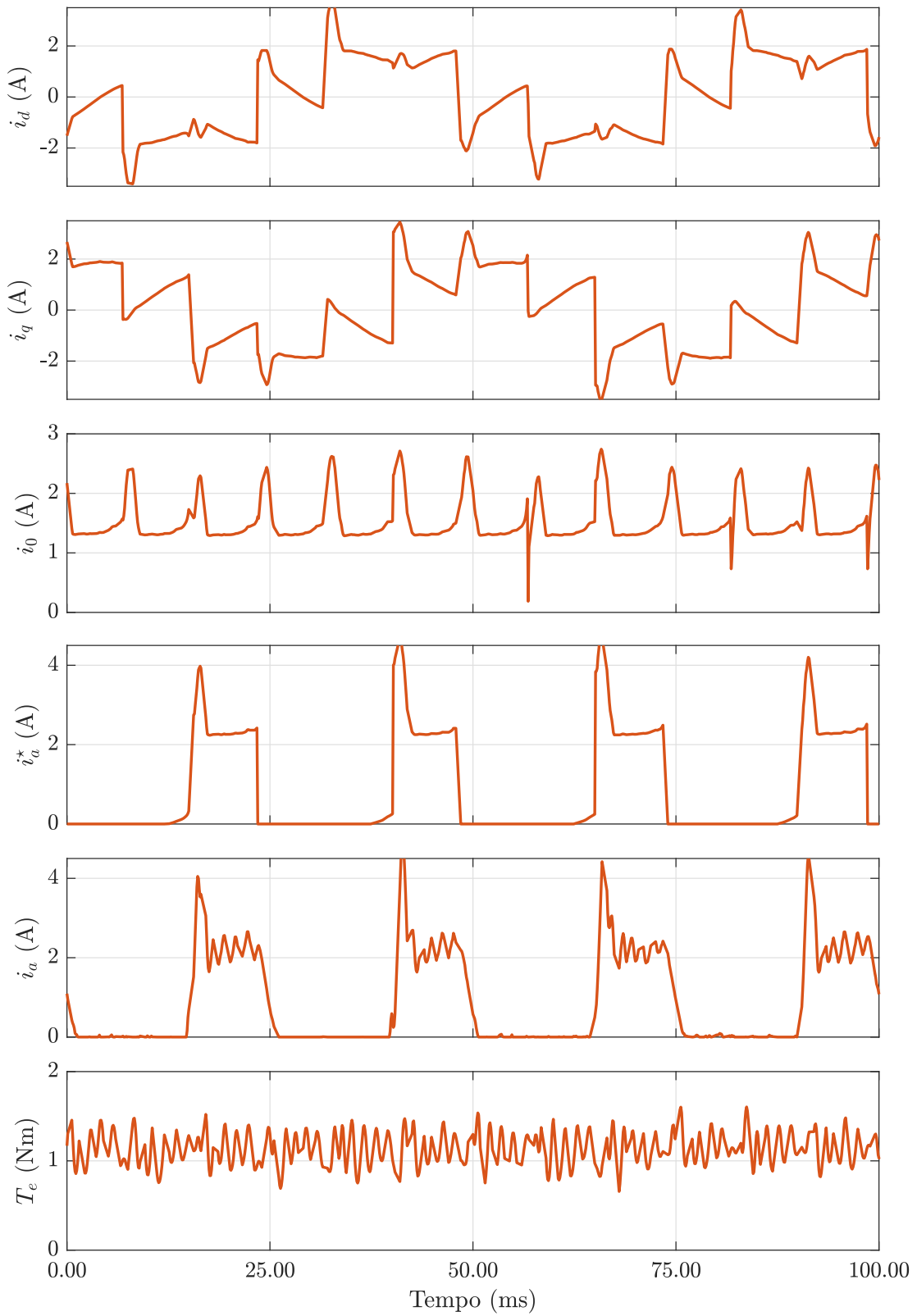
Fonte: o autor.

Figura 5.13 – Desempenho em regime permanente do método dqx para $n_r^* = 600$ rpm



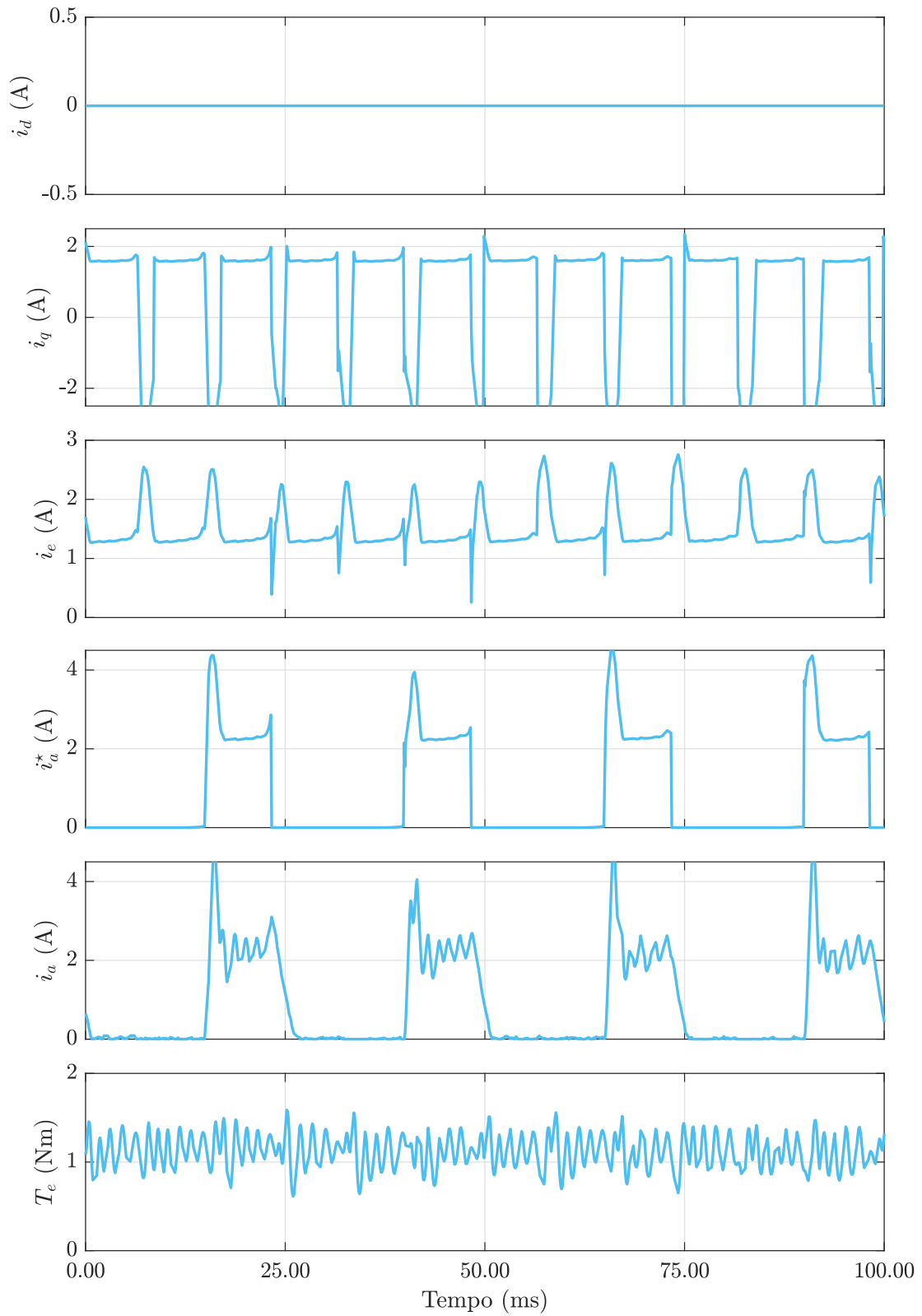
Fonte: o autor.

Figura 5.14 – Desempenho em regime permanente do método $dq0$ para $n_r^* = 600$ rpm



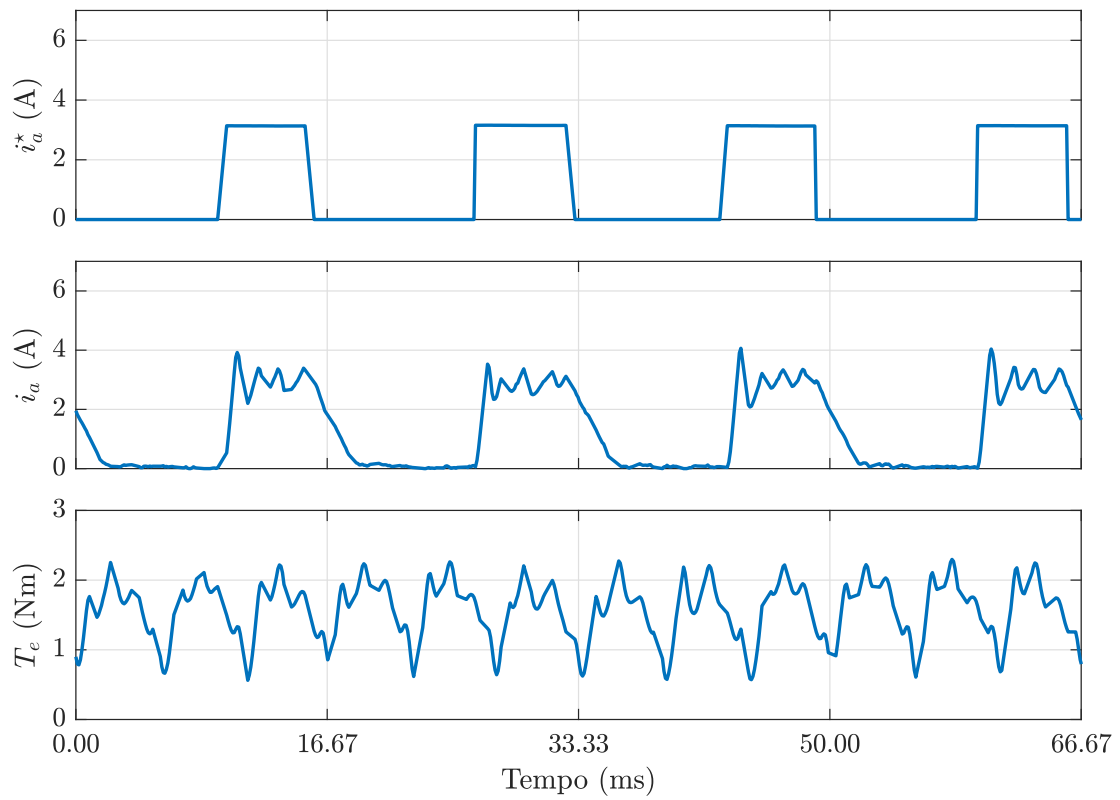
Fonte: o autor.

Figura 5.15 – Desempenho em regime permanente do método *dqe* para $n_r^* = 600$ rpm



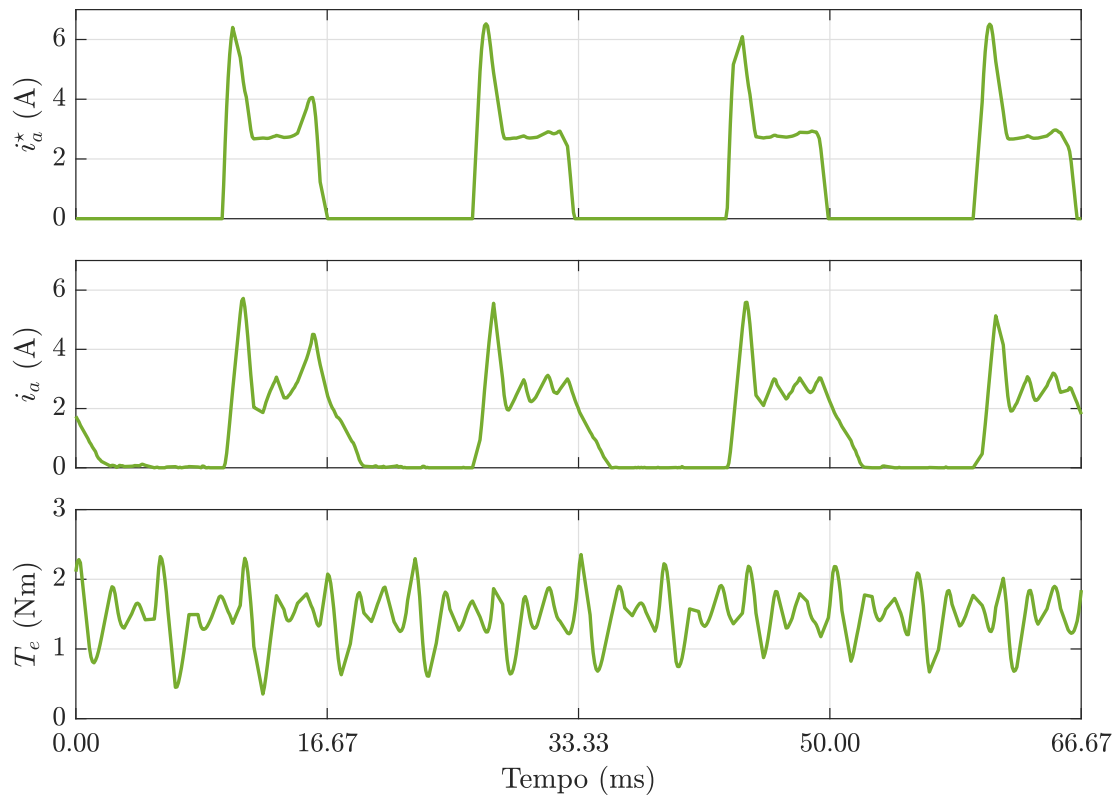
Fonte: o autor.

Figura 5.16 – Desempenho em regime permanente do método convencional para $n_r^* = 900$ rpm



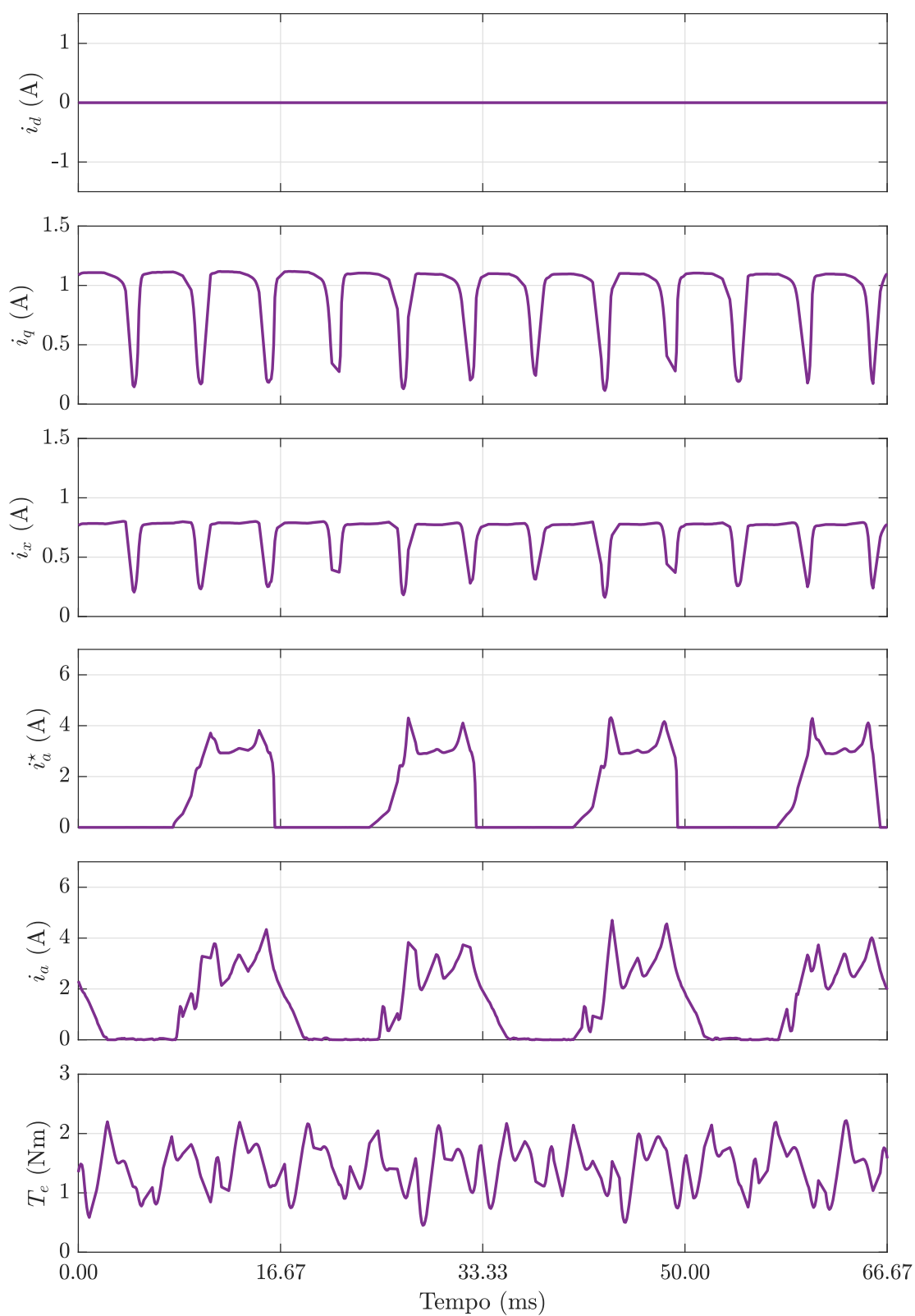
Fonte: o autor.

Figura 5.17 – Desempenho em regime permanente do método TSF para $n_r^* = 900$ rpm



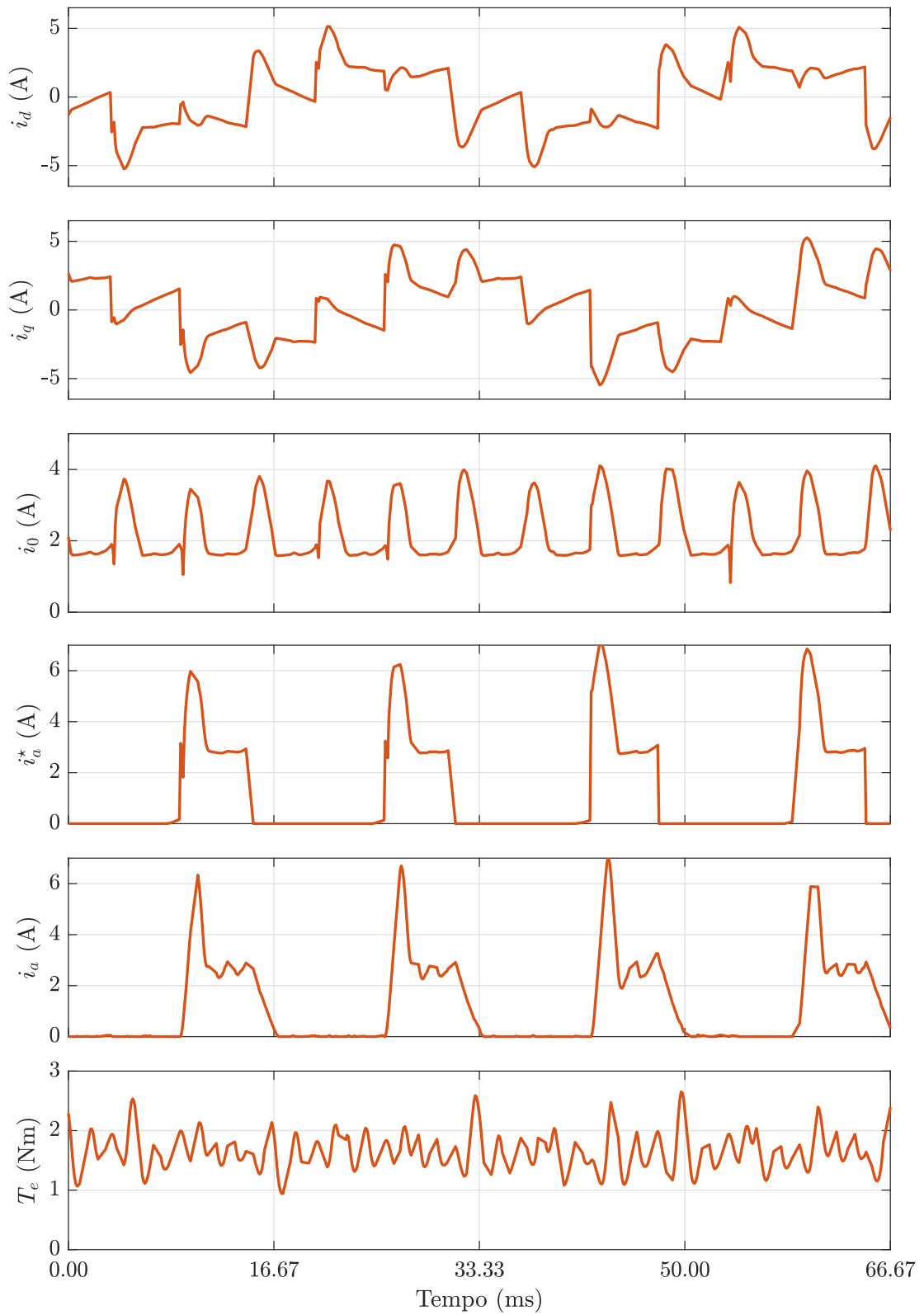
Fonte: o autor.

Figura 5.18 – Desempenho em regime permanente do método dqx para $n_r^* = 900$ rpm



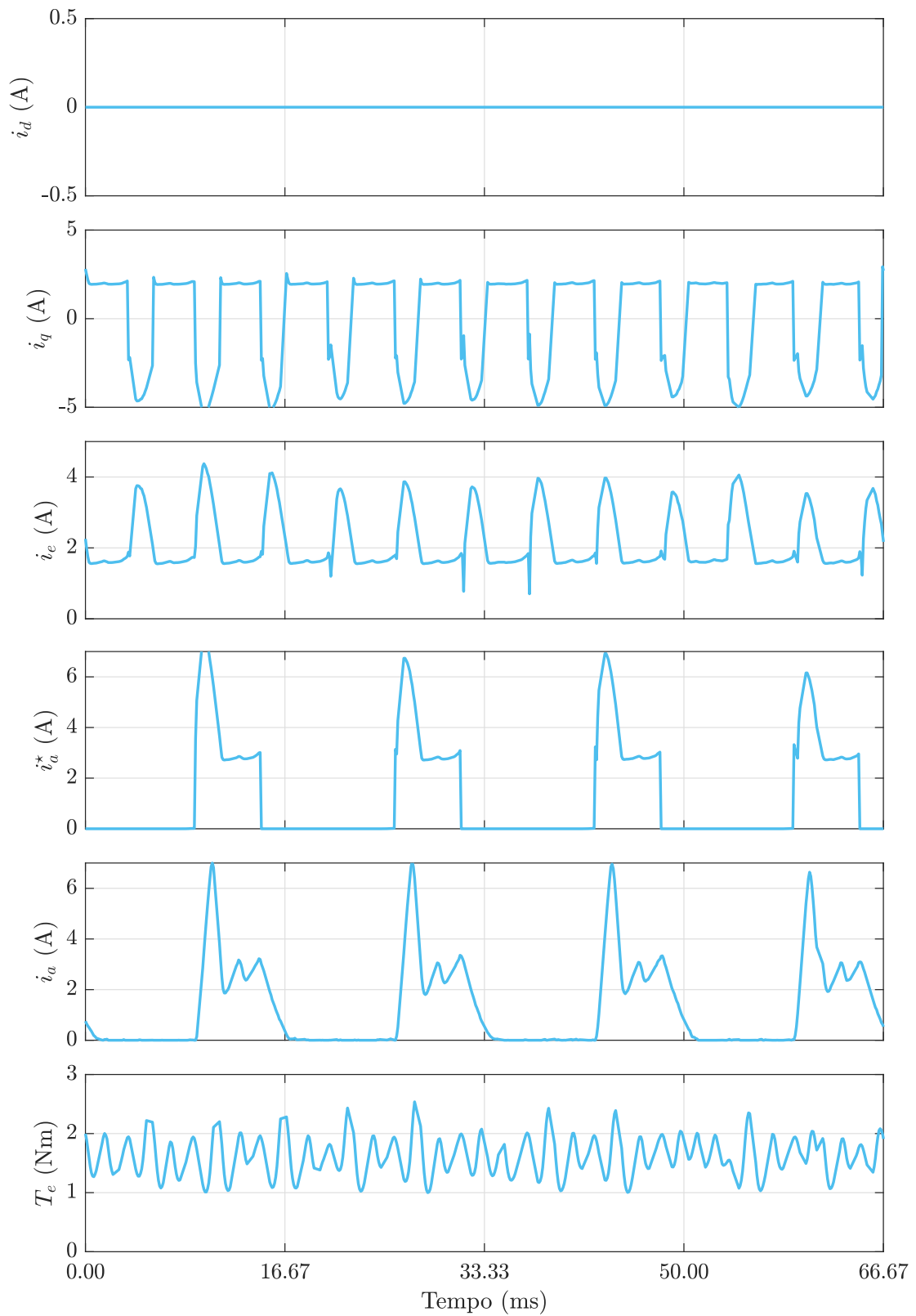
Fonte: o autor.

Figura 5.19 – Desempenho em regime permanente do método $dq0$ para $n_r^* = 900$ rpm



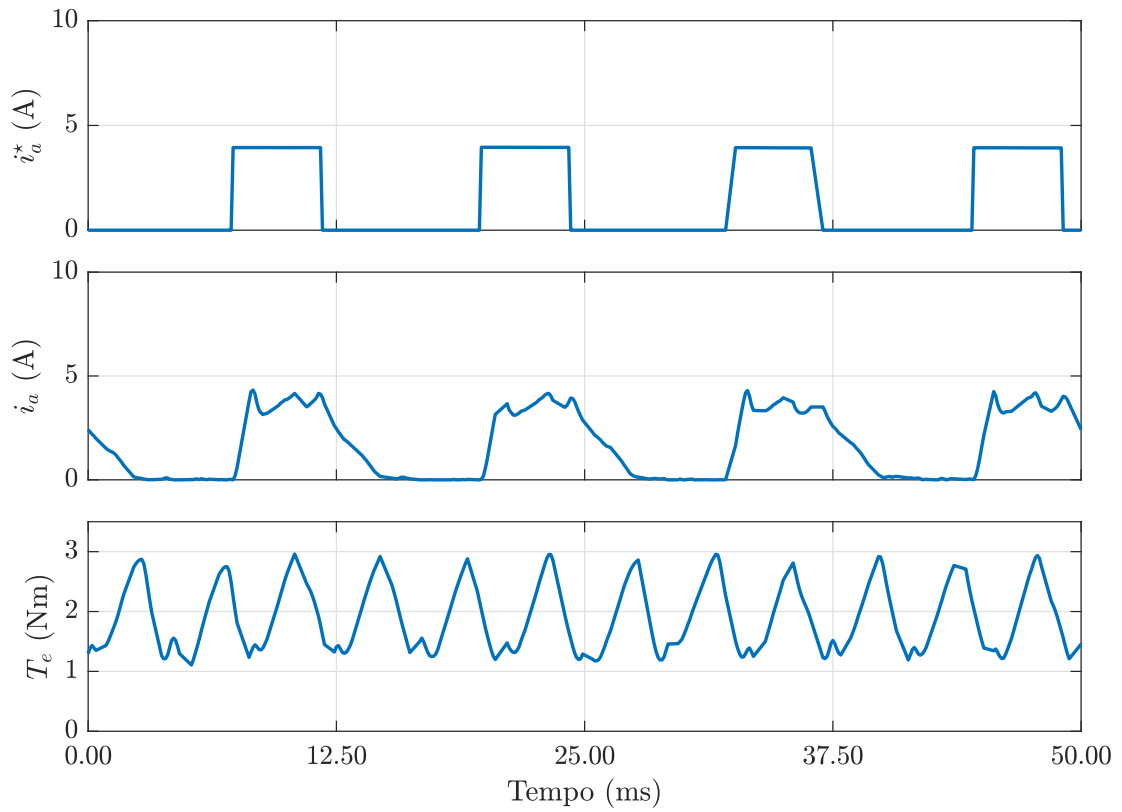
Fonte: o autor.

Figura 5.20 – Desempenho em regime permanente do método *dqe* para $n_r^* = 900$ rpm



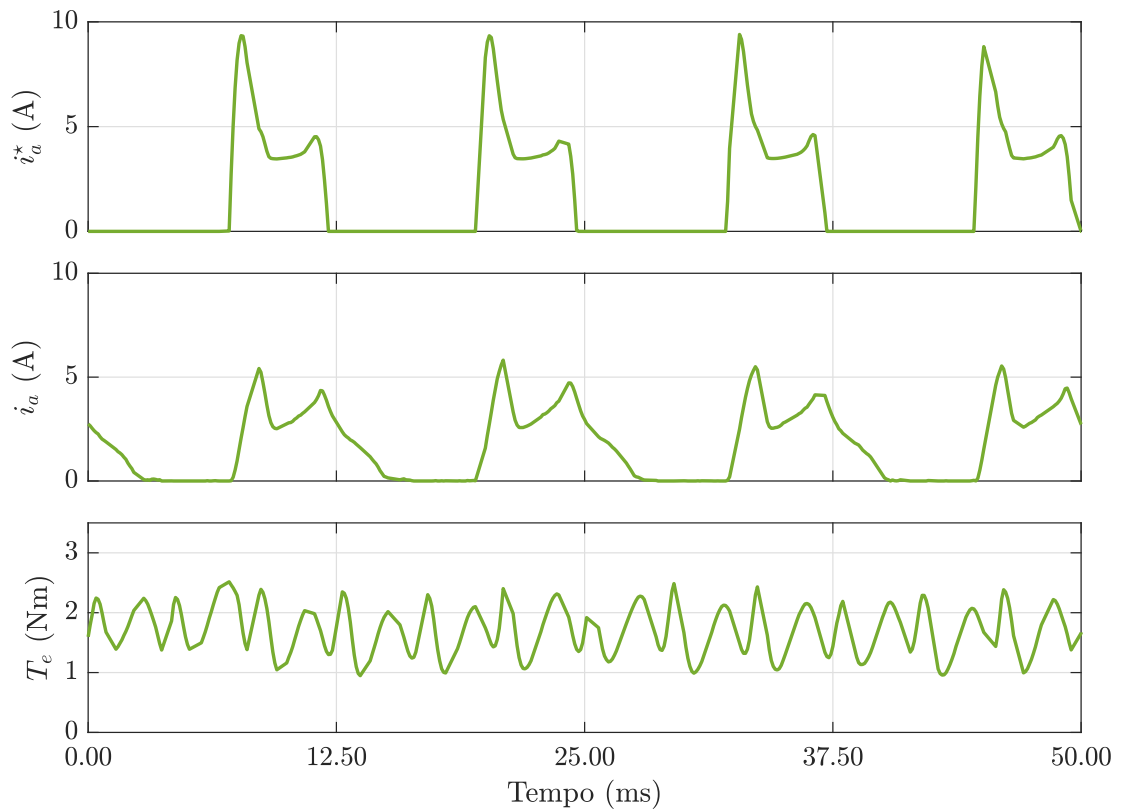
Fonte: o autor.

Figura 5.21 – Desempenho em regime permanente do método convencional para $n_r^* = 1200$ rpm



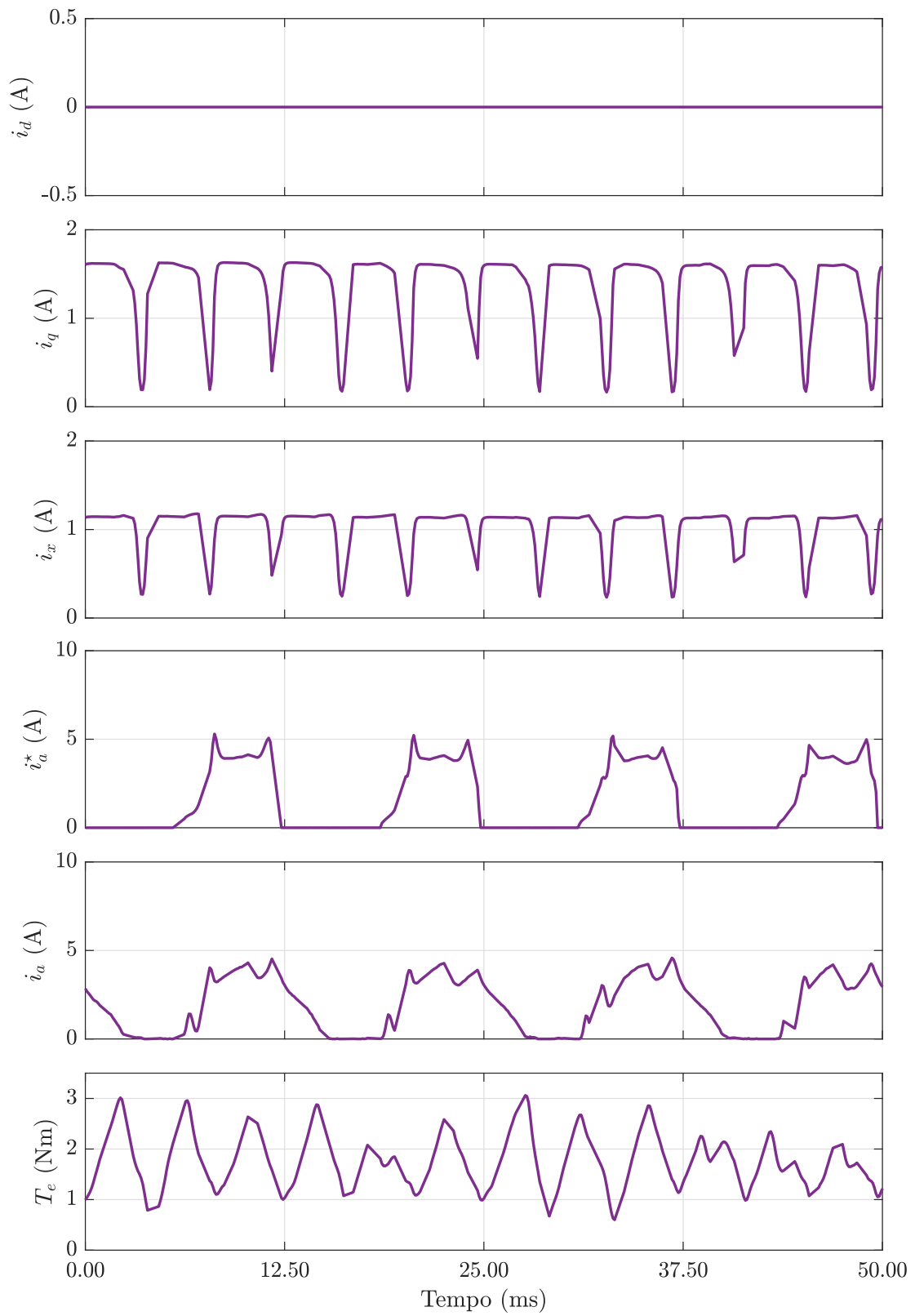
Fonte: o autor.

Figura 5.22 – Desempenho em regime permanente do método TSF para $n_r^* = 1200$ rpm



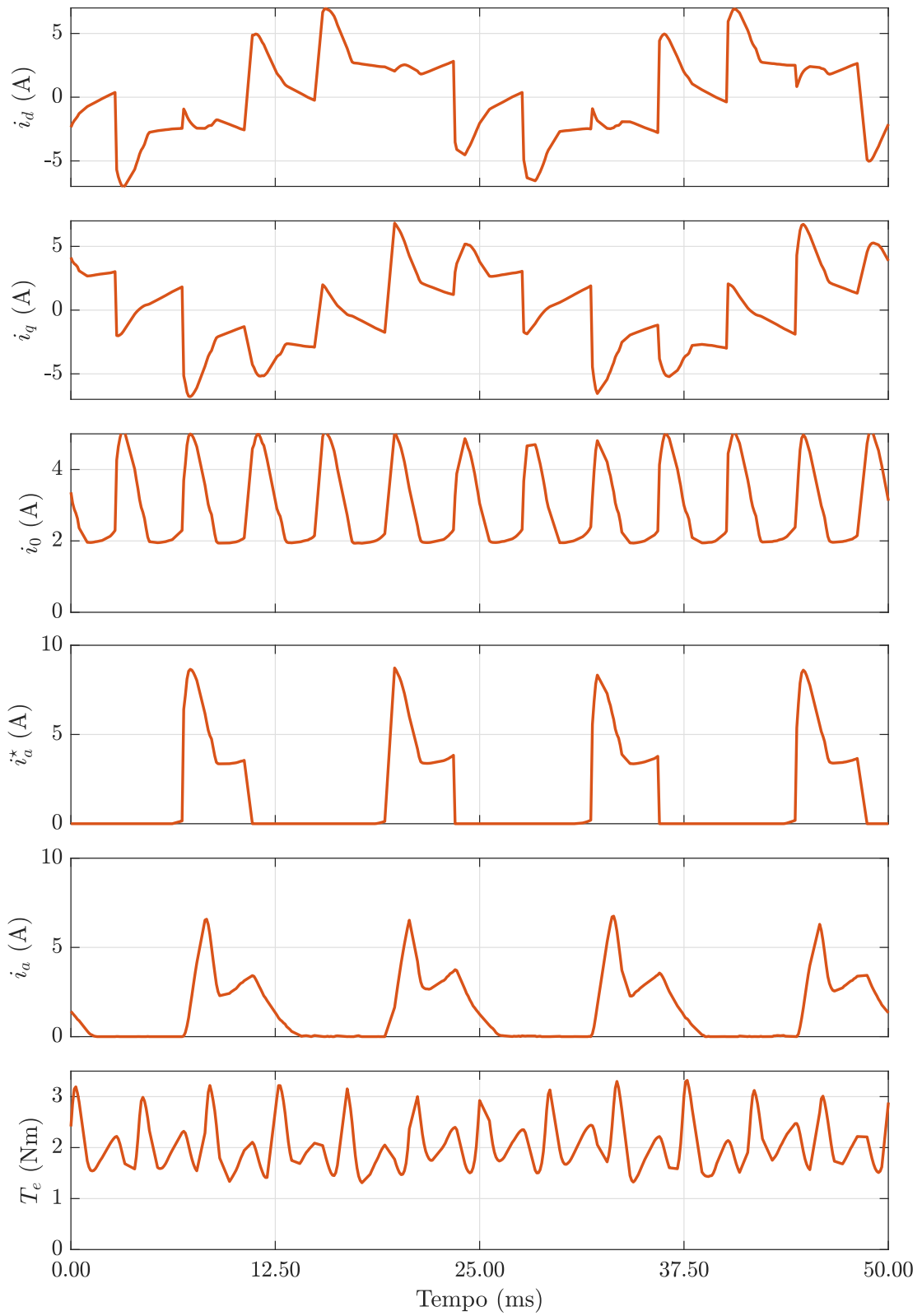
Fonte: o autor.

Figura 5.23 – Desempenho em regime permanente do método dqx para $n_r^* = 1200$ rpm



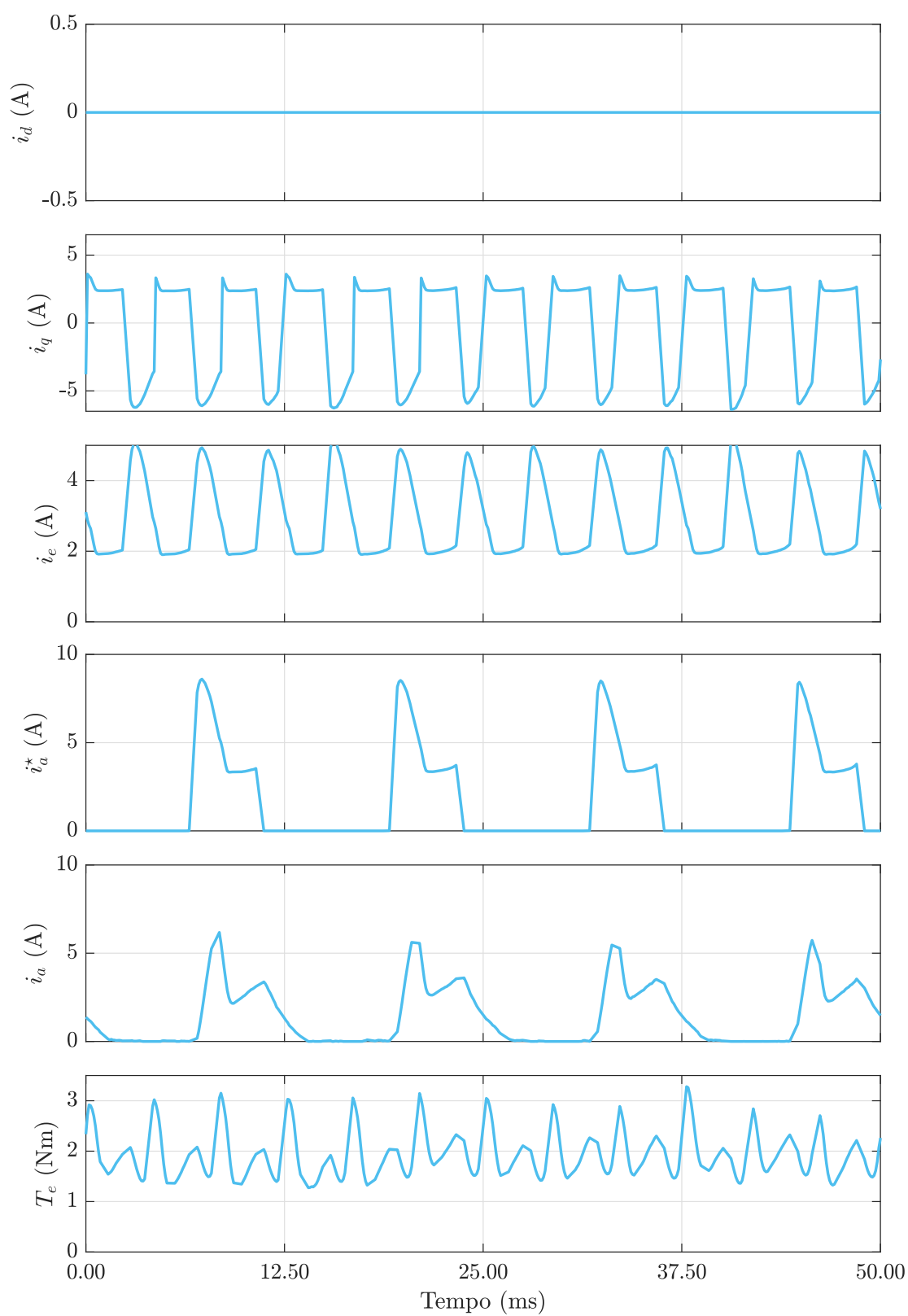
Fonte: o autor.

Figura 5.24 – Desempenho em regime permanente do método $dq0$ para $n_r^* = 1200$ rpm



Fonte: o autor.

Figura 5.25 – Desempenho em regime permanente do método *dqe* para $n_r^* = 1200$ rpm



Fonte: o autor.

o limite da corrente nominal da PMSM não foi ultrapassado. O objetivo desse ensaio é verificar a capacidade de rejeição a distúrbios dos métodos.

Os valores das métricas transitórias para as três condições de distúrbio consideradas encontram-se nas Tabelas 5.1, 5.2 e 5.3. De modo geral, observa-se que o controle convencional apresenta os maiores desvios de velocidade e os maiores erros acumulados, evidenciando menor robustez dinâmica, embora possui menor esforço elétrico durante o transitório.

No cenário de menor severidade de carga, o método TSF apresenta melhor desempenho, caracterizado por menores valores de desvio máximo e erro acumulado. Em contrapartida, os métodos propostos apresentam menor energia elétrica transitória. À medida que a severidade da perturbação aumenta, os métodos propostos passam a apresentar desempenho superior em termos de robustez dinâmica, com redução do tempo de recuperação, do erro acumulado e do esforço elétrico. Em particular, o método no referencial dqe apresenta o menor esforço elétrico em todos os cenários.

Em síntese, os resultados evidenciam o compromisso entre robustez dinâmica e esforço energético inerente às estratégias de controle avaliadas.

Tabela 5.1 – Métricas de desempenho em regime transitório para o primeiro degrau de carga

Método	$\Delta\omega_{\max}$ (rad/s)	t_s (s)	IAE $_{\omega_r}$ (rad)	E_t (A ² s)
Convenc.	11,67	1,96	14,97	14,30
TSF	10,05	1,57	12,08	17,12
dqx	11,13	1,76	13,81	16,51
$dq0$	10,59	1,64	12,97	16,23
dqe	10,39	1,69	12,73	15,51

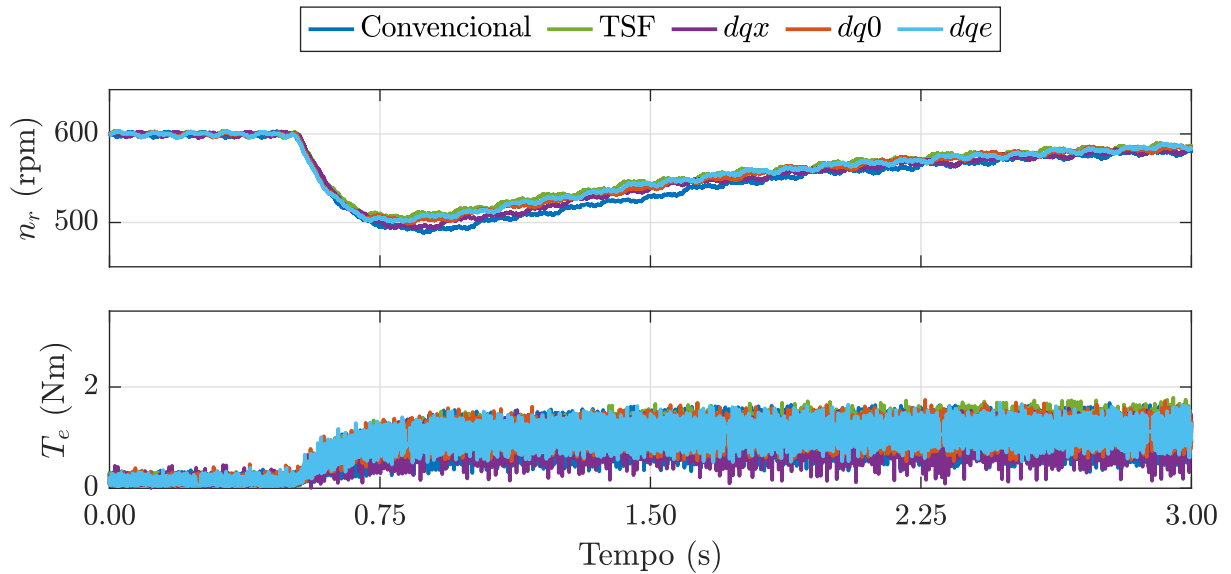
Tabela 5.2 – Métricas de desempenho em regime transitório para o segundo degrau de carga

Método	$\Delta\omega_{\max}$ (rad/s)	t_s (s)	IAE $_{\omega_r}$ (rad)	E_t (A ² s)
Convenc.	9,93	2,15	14,18	26,57
TSF	7,16	1,32	8,87	35,83
dqx	7,71	1,45	10,08	31,51
$dq0$	7,22	1,26	8,66	31,21
dqe	7,30	1,25	9,05	29,48

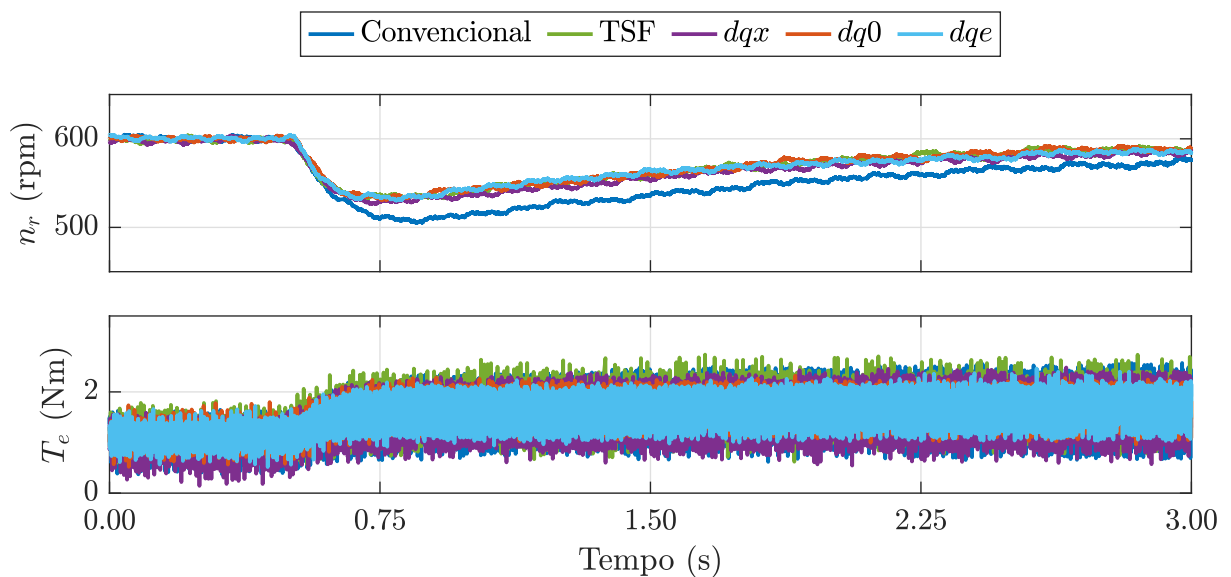
Tabela 5.3 – Métricas de desempenho em regime transitório para o terceiro degrau de carga

Método	$\Delta\omega_{\max}$ (rad/s)	t_s (s)	IAE $_{\omega_r}$ (rad)	E_t (A ² s)
Convenc.	8,18	2,21	12,68	39,03
TSF	6,29	1,25	8,15	52,79
dqx	6,34	1,25	8,15	44,69
$dq0$	6,03	1,25	7,48	45,43
dqe	6,13	1,25	7,79	42,75

As Figuras de 5.26 a 5.28 apresentam as formas de onda da velocidade medida e do torque estimado para três aplicações consecutivas de degraus de carga.

Figura 5.26 – Primeiro degrau de carga com $n_r^* = 600$ rpm

Fonte: o autor.

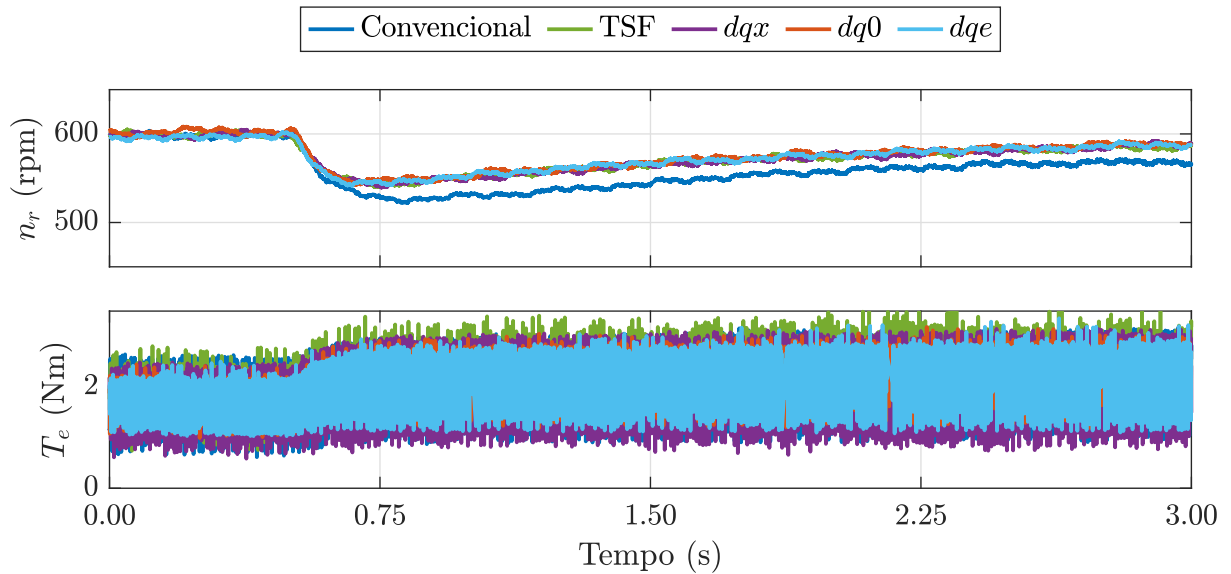
Figura 5.27 – Segundo degrau de carga com $n_r^* = 600$ rpm

Fonte: o autor.

5.3.3 Degraus de velocidade de referência

Nesse ensaio, a velocidade de referência foi aumentada em degraus de 300 rpm, iniciando em 300 rpm e finalizando em 1200 rpm, e o comportamento da máquina foi avaliado. Este ensaio tem por objetivo verificar a capacidade de rastreamento da velocidade de referência pelos métodos.

As Tabelas 5.4, 5.5, e 5.6 apresentam os valores das métricas obtidas durante esse ensaio. Novamente, observa-se que o controle convencional apresenta os maiores tempos de acomodação e os maiores erros acumulados, evidenciando resposta dinâmica mais lenta

Figura 5.28 – Terceiro degrau de carga com $n_r^* = 600$ rpm

Fonte: o autor.

e menor qualidade de rastreamento, entretanto, com o menor esforço elétrico.

O método baseado em TSF apresenta desempenho superior em termos de rapidez de resposta e erro acumulado em praticamente todos os cenários analisados. Em contrapartida, os métodos propostos apresentam tempo de acomodação e erro acumulado competitivos, todavia, em praticamente todos os cenários, apresentaram menor esforço elétrico durante os transientes.

De forma geral, os resultados indicam que, para degraus de velocidade, o método TSF apresenta melhor desempenho global quanto à rastreabilidade da velocidade de referência, enquanto os métodos propostos mantêm desempenho transitório competitivo, porém com menor custo energético associado.

Tabela 5.4 – Métricas de desempenho em regime transitório para degrau de velocidade de referência de 300 para 600 rpm

Método	t_s (s)	IAE_{ω_r} (rad)	E_t (A^2s)
Convenc.	1,88	9,76	17,17
TSF	1,68	7,04	20,03
dqx	1,91	8,60	20,23
$dq0$	1,74	7,68	18,73
dqe	1,71	7,44	17,99

As Figuras de 5.29 a 5.31 apresentam as formas de onda da velocidade medida e do torque estimado para três aplicações consecutivas de degrau de velocidade de referência de 300 rpm.

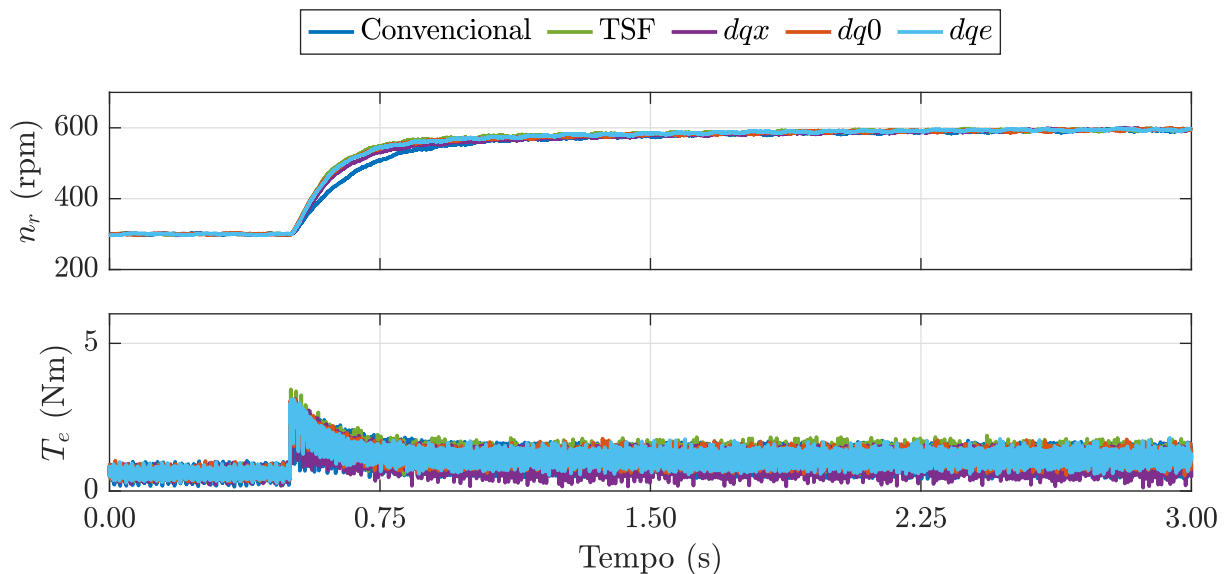
Tabela 5.5 – Métricas de desempenho em regime transitório para degrau de velocidade de referência de 600 para 900 rpm

Método	t_s (s)	IAE_{ω_r} (rad)	E_t (A ² s)
Convenc.	1,82	11,52	26,72
TSF	1,58	7,45	32,27
dqx	1,67	9,39	31,46
$dq0$	1,62	8,13	35,33
dqe	1,61	7,76	33,95

Tabela 5.6 – Métricas de desempenho em regime transitório para degrau de velocidade de referência de 900 para 1200 rpm

Método	t_s (s)	IAE_{ω_r} (rad)	E_t (A ² s)
Convenc.	2,12	16,78	38,76
TSF	1,67	12,07	43,09
dqx	1,82	12,17	46,69
$dq0$	1,58	11,13	40,20
dqe	1,62	11,00	38,39

Figura 5.29 – Degrau de velocidade de referência de 300 para 600 rpm



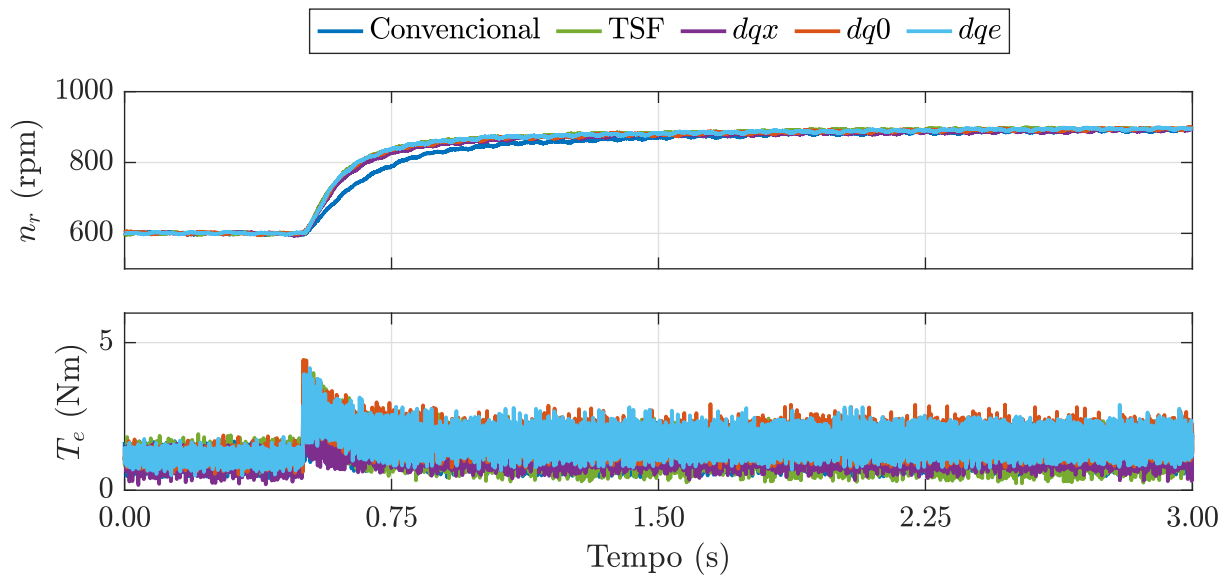
Fonte: o autor.

5.4 Análise de Custo Computacional

Para avaliação do custo computacional de cada método, o tempo de execução de cada rotina de controle foi medido e encontra-se na Tabela 5.7. Nota-se que o método convencional é o que requer menor esforço computacional entre todos; todavia, apresentou os piores resultados quanto às ondulações de torque no regime permanente e aos erros durante o regime transitório.

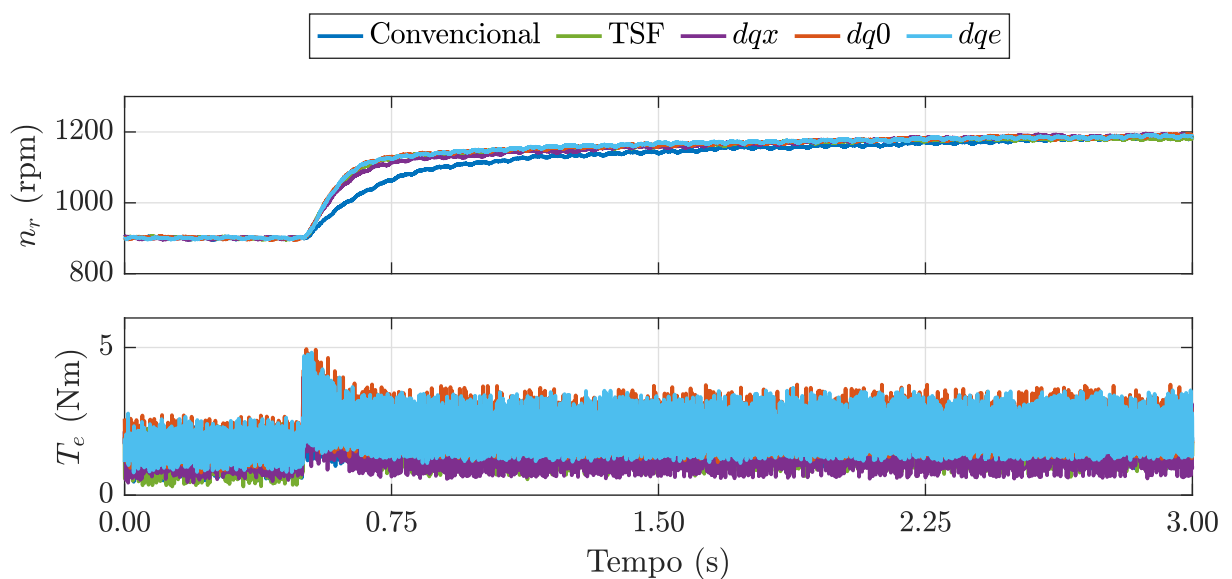
Verifica-se que, para a frequência de controle de 10 kHz (período de $100, \mu s$), todos os métodos permanecem dentro da janela temporal disponível para execução em tempo

Figura 5.30 – Degrau de velocidade de referência de 600 para 900 rpm



Fonte: o autor.

Figura 5.31 – Degrau de velocidade de referência de 900 para 1200 rpm



Fonte: o autor.

real. Em comparação aos métodos convencional e TSF, os métodos $dq0$ e dqe apresentaram maiores tempos de processamento, sendo o requerido para a execução do método dqe superior ao dobro dos primeiros. Ainda assim, em regime permanente, esses métodos obtiveram, na maioria das condições de operação, os melhores resultados, enquanto, durante os transitórios, mantiveram métricas de desempenho competitivas em relação ao TSF. Esse comportamento sugere que a melhoria na qualidade do torque é alcançada ao custo de maior complexidade computacional, sem, contudo, comprometer a viabilidade de implementação prática na frequência de controle adotada.

Tabela 5.7 – Tempo de execução das rotinas de controle

Método	Tempo (μs)
Convencional	8,8
TSF	9,6
dqx	38,4
$dq0$	14,5
dqe	21,4

Fonte: o autor.

5.5 Análise de Sensibilidade dos Métodos quanto a Variações nos Parâmetros

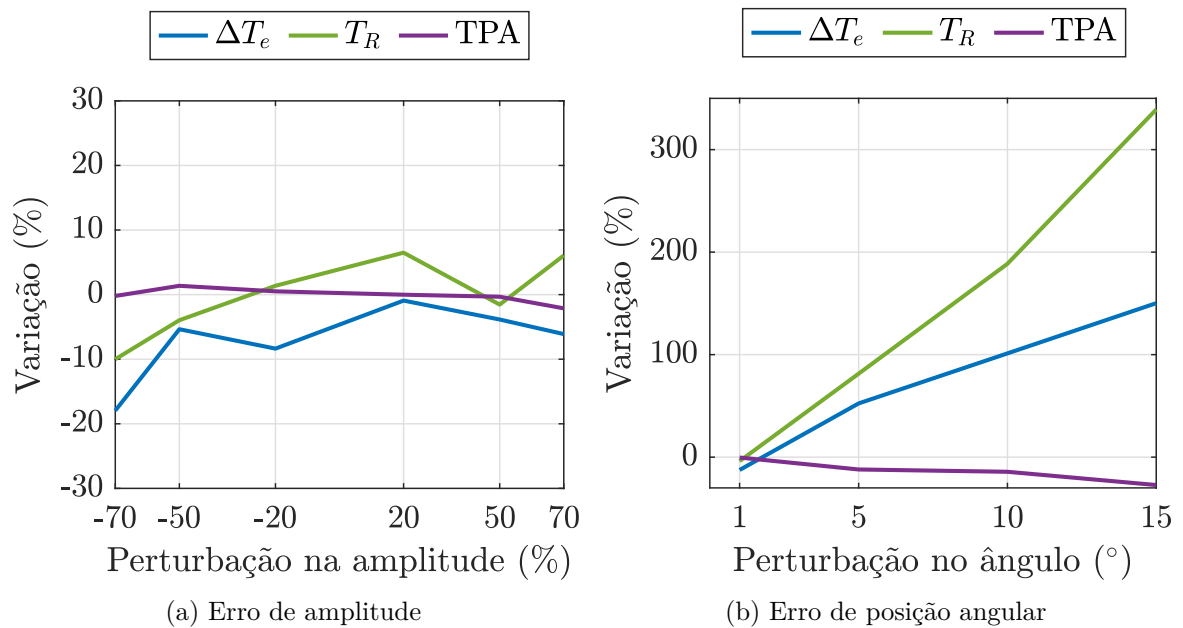
Os métodos propostos foram submetidos a uma análise de sensibilidade na qual as derivadas de indutância sofrem variações, emulando erros em seus valores. Considerou-se que essas derivadas de indutância podem apresentar erros de amplitude ou erros associados à posição angular de consulta. Foram avaliadas três magnitudes de erro de amplitude, equivalentes a seis perturbações quando considerados os sinais positivo e negativo, além de quatro níveis de deslocamento angular, permitindo comparar a robustez relativa dos métodos propostos em diferentes níveis de incerteza paramétrica.

Para emular erros de amplitude, utilizaram-se os valores das derivadas de indutância armazenadas nas LUTs e aplicaram-se perturbações de $\pm 70\%$, $\pm 50\%$ ou $\pm 20\%$. Para emular erros de posição angular, foram somados deslocamentos de 1° , 5° , 10° ou 15° no instante de consulta dos valores das LUTs.

As Figuras 5.32 e 5.33 apresentam as variações nas métricas de desempenho para a metodologia descrita, considerando velocidade de referência igual a 900 rpm. Observa-se, nessas figuras, que os erros angulares tendem a produzir variações mais acentuadas nas métricas de ondulação de torque do que os erros de amplitude, o que é coerente com a sensibilidade da produção de torque ao sincronismo entre corrente e posição.

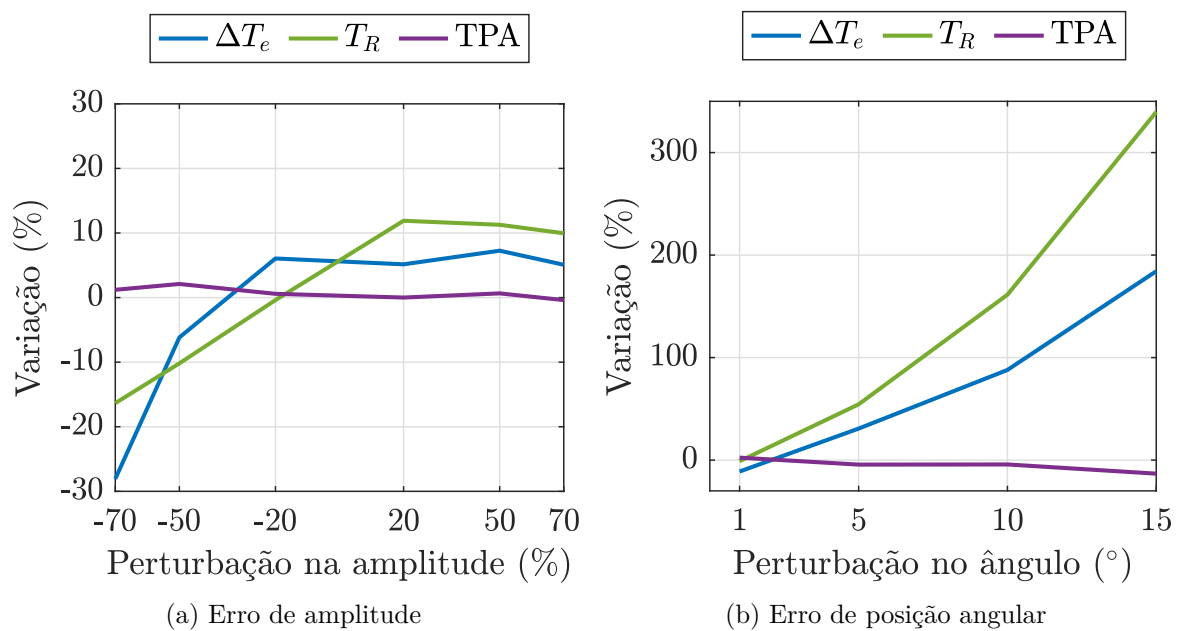
Além disso, observa-se que o TPA sofre variações discretas em todas as condições analisadas. Para desvios angulares próximos de 1° , já superiores aos erros típicos dos sensores utilizados, as variações nas métricas permanecem pequenas. De forma semelhante, para erros de amplitude de $\pm 20\%$, considerados conservadores para incertezas de medição na obtenção das derivadas de indutância, as variações dos parâmetros permanecem abaixo de 10%. Ressalta-se, contudo, que essa inferência está associada ao ponto operacional analisado (900 rpm).

Figura 5.32 – Análise de sensibilidade do método $dq0$



Fonte: o autor.

Figura 5.33 – Análise de sensibilidade do método dqe



Fonte: o autor.

5.6 Discussão Crítica

Os resultados apresentados em regime permanente e transitório, assim como a análise do custo computacional, indicam a viabilidade de implementação dos métodos analisados em tempo real, com desempenho satisfatório na redução das ondulações do torque, melhora do torque por ampère e no rastreamento da velocidade de referência. Em regime permanente, a comparação por métricas objetivas evidencia ganhos consistentes

dos métodos propostos em face dos métodos de referência na maior parte dos pontos de operação ensaiados.

Constatou-se que o desempenho superior dos métodos vem ao custo de maior esforço computacional, todavia, vale ressaltar que, considerando a frequência de 10 kHz adotada na tese, o tempo necessário para execução dos métodos propostos encontra-se dentro da janela permitida de controle.

Além disso, por meio da análise de sensibilidade, para o ponto de operação considerado, observou-se que o desempenho dos métodos propostos é sensível à qualidade das LUTs de derivadas de indutância quando há desvios elevados na posição angular ou na amplitude. Entretanto, considerando as faixas de erro mais usuais de leitura de posição angular, corrente e tensão (empregadas na obtenção das derivadas de indutância), as variações nas métricas de desempenho permanecem inferiores a 10% no ponto operacional avaliado.

Por fim, como limitações práticas dos métodos de controle propostos, destacam-se a dependência do conhecimento prévio das derivadas de indutância da máquina, juntamente com a fidelidade do modelo eletromagnético, a necessidade de calibração cuidadosa dos parâmetros de controle e a sensibilidade a incertezas paramétricas elevadas, principalmente sob desvios angulares mais severos.

Conclusão

As elevadas ondulações de torque nas máquinas de relutância variável constituem uma das principais limitações dessa topologia em aplicações como a tração elétrica. Esse comportamento é inerente à sua estrutura em dupla saliência e à forte dependência angular das indutâncias, o que impõe desafios relevantes ao desenvolvimento de estratégias de controle capazes de mitigar tais ondulações sem comprometer a eficiência energética do sistema.

No contexto das técnicas de controle vetorial aplicadas a essas máquinas, observou-se que a utilização da transformação $dq0$ não promove o desacoplamento completo entre os eixos, tampouco elimina a dependência angular das indutâncias e de suas derivadas. Como consequência, métodos presentes no estado da arte frequentemente recorrem a simplificações da modelagem eletromagnética, o que limita a fidelidade física das soluções obtidas.

Neste trabalho, foi inicialmente desenvolvido um método de controle MTPA no referencial $dq0$, no qual as não linearidades magnéticas da máquina foram explicitamente consideradas por meio das derivadas das indutâncias próprias e mútuas. Contudo, verificou-se que a obtenção de expressões analíticas para as correntes ótimas nesse referencial implica em elevado custo computacional, decorrente da necessidade de cálculos envolvendo funções trigonométricas e decomposições espectrais de matrizes de ordem três, o que restringe sua aplicação em sistemas embarcados.

Com o objetivo de contornar essa limitação, foi proposta uma nova transformação de eixos, denominada transformação dqe , construída a partir dos autovalores da matriz de derivadas das indutâncias. Nesse novo referencial, a estrutura do problema de produção de torque apresenta características de desacoplamento parcial, permitindo a obtenção de expressões analíticas para as correntes ótimas com menor complexidade computacional e maior adequação à implementação em tempo real.

Adicionalmente, considerando a impossibilidade física de extinção instantânea da corrente em circuitos indutivos, foi proposta uma estratégia de compensação angular destinada a mitigar os efeitos associados ao decaimento da corrente de fases em desligamento na região de produção de torque negativo. Essa estratégia baseia-se na estimativa do intervalo necessário para a extinção da corrente e na modificação da derivada de indutância associada à fase em questão, induzindo naturalmente, via critério MTPA, a redução de sua corrente de referência. Complementarmente, propôs-se a correção do torque de referência por meio da subtração da parcela de torque ainda produzida por essa fase.

Em relação aos objetivos estabelecidos na introdução, verifica-se que todos foram alcançados ao longo do desenvolvimento desta tese. A modelagem da máquina de relutância variável no referencial $dq0$, evidenciando a manutenção do acoplamento entre eixos e a dependência angular das indutâncias, foi apresentada no Apêndice A. A formulação do problema de otimização MTPA nesse referencial e a obtenção das expressões para as correntes ótimas, bem como a análise de sua viabilidade computacional para implementação embarcada, foram desenvolvidas no Capítulo 3. Ainda nesse capítulo, foi proposta a transformação dqe , na qual o problema MTPA foi reformulado, permitindo a obtenção de soluções analíticas para as correntes de referência. A construção matemática dessa transformação e a modelagem da máquina nesse novo referencial foram detalhadas no Apêndice C. No Capítulo 4, foi introduzida a estratégia de compensação angular destinada a mitigar os efeitos do decaimento da corrente em fases em desligamento. Por fim, no Capítulo 5, os resultados experimentais obtidos, com base nas métricas de avaliação propostas, validaram os métodos de controle desenvolvidos para a máquina ensaiada, indicando redução das ondulações de torque e aumento do torque por ampère nas condições analisadas.

Os resultados apresentados ao longo desta tese indicam a viabilidade das estratégias propostas e evidenciam o potencial da transformação dqe como ferramenta para o desenvolvimento de métodos de controle vetorial fisicamente consistentes e computacionalmente eficientes para máquinas de relutância variável. Dessa forma, espera-se que as contribuições aqui apresentadas possam auxiliar na ampliação do uso dessa tecnologia em aplicações que demandem elevada robustez e eficiência energética.

Sugestões para Trabalhos Futuros

Os resultados obtidos ao longo desta tese indicam diversas possibilidades de aprofundamento e expansão das estratégias de controle propostas. Nesse sentido, destacam-se como direções promissoras para trabalhos futuros:

- Extensão das estratégias de controle desenvolvidas para operação em quatro quadrantes, permitindo a investigação do desempenho dos métodos propostos em regimes regenerativos;
- Expansão das técnicas apresentadas para o controle por máximo torque por tensão (MTPV), visando a análise do comportamento da transformação dqe em regimes de enfraquecimento de campo;
- Investigação de topologias de conversores que possibilitem o fluxo de corrente negativa nas fases, permitindo maior flexibilidade no controle da produção de torque;

-
- Substituição do controle de corrente por histerese por estratégias baseadas em controladores PI associados a técnicas de modulação por largura de pulso (PWM), com o objetivo de avaliar impactos sobre desempenho dinâmico e perdas de comutação;
 - Aplicação das metodologias propostas a outras topologias de máquinas de relutância variável, como as máquinas mutuamente acopladas ou de fluxo variável;
 - Extensão das estratégias de controle para máquinas de relutância variável multifásicas, explorando os efeitos do aumento do número de fases sobre o desacoplamento proporcionado pela transformação *dqe*;
 - Investigação da aplicabilidade da transformação proposta a outras topologias de máquinas baseadas em relutância, como as máquinas de relutância síncrona.

Referências Bibliográficas

- [1] IPCC. *Climate Change 2023: Synthesis Report*. [S.l.], 2023. Disponível em: <<https://www.ipcc.ch/report/ar6/syr/>>. Citado na página 24.
- [2] International Energy Agency. *World Energy Outlook 2024*. [S.l.], 2024. Disponível em: <<https://www.iea.org/reports/world-energy-outlook-2024>>. Citado na página 24.
- [3] International Renewable Energy Agency. *World Energy Transitions Outlook 2024*. [S.l.], 2024. Disponível em: <<https://www.irena.org/Publications/2024/Nov/World-Energy-Transitions-Outlook-2024>>. Citado na página 24.
- [4] International Energy Agency. *Global EV Outlook 2024*. [S.l.], 2024. Disponível em: <<https://www.iea.org/reports/global-ev-outlook-2024>>. Citado na página 24.
- [5] BloombergNEF. *Electric Vehicle Outlook 2024*. [S.l.], 2024. Disponível em: <<https://about.bnef.com/electric-vehicle-outlook/>>. Citado na página 24.
- [6] VLACHOU, V. I. Overview on permanent magnet motor trends and electromagnetic analysis. *Energies*, 2024. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/1996-1073/17/2/538>>. Citado na página 24.
- [7] United States Geological Survey. *Mineral Commodity Summaries: Rare Earths*. [S.l.], 2024. Disponível em: <<https://www.usgs.gov/centers/nmic/mineral-commodity-summaries>>. Citado na página 24.
- [8] International Energy Agency. *The Role of Critical Minerals in Clean Energy Transitions*. [S.l.], 2021. Disponível em: <<https://www.iea.org/reports/the-role-of-critical-minerals-in-clean-energy-transitions>>. Citado na página 24.
- [9] ALONSO, E. et al. Evaluating rare earth element availability: A case with revolutionary demand from clean technologies. *Environmental Science & Technology*, v. 46, n. 6, p. 3406–3414, 2012. Disponível em: <<https://pubs.acs.org/doi/10.1021/es303518d>>. Citado na página 25.
- [10] KUMARI, A. et al. A comprehensive review on recycling of critical raw materials from spent ndfeb magnets. *Journal of Cleaner Production*, 2023. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S1383586623004355>>. Citado na página 25.

- [11] MILLER, T. J. E. *Switched Reluctance Motors and Their Control*. [S.l.]: Oxford University Press, 1993. ISBN 9780198593870. Citado 10 vezes nas páginas 25, 26, 38, 39, 40, 41, 44, 45, 46 e 61.
- [12] KRISHNAN, R. *Switched Reluctance Motor Drives: Modeling, Simulation, Analysis, Design, and Applications*. [S.l.]: CRC Press, 2001. ISBN 9780849308380. Citado 10 vezes nas páginas 25, 26, 38, 39, 40, 41, 44, 45, 46 e 61.
- [13] BOLDEA, I. *Reluctance Electric Machines: Design and Control*. [S.l.]: CRC Press, 2016. ISBN 9781498731524. Citado 4 vezes nas páginas 25, 44, 45 e 46.
- [14] HUA, W. et al. Analysis and experimental validation of a half-teeth-wound switched reluctance machine. *IEEE Transactions on Magnetics*, v. 50, n. 11, p. 1–5, 2014. Citado na página 26.
- [15] CHENG, H.; LIAO, S.; YAN, W. Development and performance analysis of segmented-double-stator switched reluctance machine. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 69, n. 2, p. 1298–1309, 2022. Citado na página 26.
- [16] GHAFARPOUR, A.; MIRSAALIM, M. Split-tooth double-rotor permanent magnet switched reluctance motor. *IEEE Transactions on Transportation Electrification*, v. 8, n. 2, p. 2400–2411, 2022. Citado na página 26.
- [17] XU, Z.; YU, Q.; ZHANG, F. Design and analysis of asymmetric rotor pole type bearingless switched reluctance motor. *CES Transactions on Electrical Machines and Systems*, v. 6, n. 1, p. 3–10, 2022. Citado na página 26.
- [18] R, V.; FERNANDES, B. G. Design methodology for high-performance segmented rotor switched reluctance motors. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, v. 30, n. 1, p. 11–21, 2015. Citado na página 26.
- [19] MEHTA, S. et al. Segmented rotor mutually coupled switched reluctance machine for low torque ripple applications. *IEEE Transactions on Industry Applications*, v. 57, n. 4, p. 3582–3594, 2021. Citado na página 26.
- [20] KONDELAJI, M. A. J.; MIRSAALIM, M. Segmented-rotor modular switched reluctance motor with high torque and low torque ripple. *IEEE Transactions on Transportation Electrification*, v. 6, n. 1, p. 62–72, 2020. Citado na página 26.
- [21] GUNDOGMUS, O. et al. Acoustic noise mitigation in high pole count switched reluctance machines utilizing skewing method on stator and rotor poles. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 69, n. 6, p. 5581–5593, 2022. Citado na página 26.

- [22] GAN, C. et al. Investigation of skewing effects on the vibration reduction of three-phase switched reluctance motors. *IEEE Transactions on Magnetics*, v. 51, n. 9, p. 1–9, 2015. Citado na página 26.
- [23] GUNDOGMUS, O. et al. Acoustic noise mitigation of switched reluctance machines with windows on stator and rotor poles. *IEEE Transactions on Industry Applications*, v. 56, n. 4, p. 3719–3730, 2020. Citado na página 26.
- [24] MOHAMMADI, S. E. M. et al. An alternate rotor geometry for switched reluctance machine with reduced torque ripple. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, v. 38, n. 2, p. 939–947, 2023. Citado na página 26.
- [25] HUR, J. et al. Design and optimization of high torque, low ripple switched reluctance motor with flux barrier for direct drive. In: *Conference Record of the 2004 IEEE Industry Applications Conference, 2004. 39th IAS Annual Meeting*. [S.l.: s.n.], 2004. v. 1, p. 407 Vol.1. Citado na página 26.
- [26] XU, Z. et al. A review on segmented switched reluctance motors. *Energies*, MDPI, v. 15, n. 23, p. 9212, 2022. Citado na página 26.
- [27] SUN, X. et al. Multiobjective and multiphysics design optimization of a switched reluctance motor for electric vehicle applications. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, v. 36, n. 4, p. 3294–3304, 2021. Citado na página 26.
- [28] MA, C.; QU, L. Multiobjective optimization of switched reluctance motors based on design of experiments and particle swarm optimization. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, v. 30, n. 3, p. 1144–1153, 2015. Citado na página 26.
- [29] BHAKTHA, B. S. et al. A computationally efficient multi-objective design optimization of srm using k-means clustering and artificial neural networks. *IEEE Access*, p. 1–1, 2026. Citado na página 26.
- [30] ZHANG, J.; LIU, J.; GEI, L. Multi-objective optimization of switched reluctance motor based on gaussian process regression model. In: *2024 IEEE 10th International Power Electronics and Motion Control Conference (IPEMC2024-ECCE Asia)*. [S.l.: s.n.], 2024. p. 4020–4025. Citado na página 26.
- [31] DESKUR, J.; PAJCHROWSKI, T.; ZAWIRSKI, K. Optimal control of current commutation of high speed srm drive. In: *2008 13th International Power Electronics and Motion Control Conference*. [S.l.: s.n.], 2008. p. 1204–1208. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 47.
- [32] FATEMI, S. A.; CHESHMEHBEIGI, H. M.; AFJEI, E. Self-tuning approach to optimization of excitation angles for switched-reluctance motor drives. In: *2009 European*

- Conference on Circuit Theory and Design*. [S.l.: s.n.], 2009. p. 851–856. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 47.
- [33] MADEMLIS, C.; KIOSKERIDIS, I. Performance optimization in switched reluctance motor drives with online commutation angle control. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, v. 18, n. 3, p. 448–457, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 47.
- [34] WANG, Y. et al. A high efficiency direct instantaneous torque control of srm using commutation angles control. In: *2014 17th International Conference on Electrical Machines and Systems (ICEMS)*. [S.l.: s.n.], 2014. p. 2863–2866. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 48.
- [35] GUNDOGMUS, O. et al. Current profile optimization method for simultaneous dc-link current ripple and acoustic noise minimization in switched reluctance machines. In: *2020 IEEE Energy Conversion Congress and Exposition (ECCE)*. [S.l.: s.n.], 2020. p. 5574–5579. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 49.
- [36] HUANG, L. et al. Novel current profile of switched reluctance machines for torque density enhancement in low-speed applications. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 67, n. 11, p. 9623–9634, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 49.
- [37] HUSAIN, I.; EHSANI, M. Torque ripple minimization in switched reluctance motor drives by pwm current control. *IEEE Transactions on Power Electronics*, v. 11, n. 1, p. 83–88, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 49.
- [38] MA, C. et al. Vibration and torque ripple reduction of switched reluctance motors through current profile optimization. In: *2016 IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition (APEC)*. [S.l.: s.n.], 2016. p. 3279–3285. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 49.
- [39] WIGUNA, C. A.; FURQANI, J.; CHIBA, A. Improved current profile selection for noise reduction of switched reluctance motor at middle speed considering back emf. *IEEE Transactions on Industry Applications*, v. 57, n. 5, p. 4707–4719, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 50.
- [40] VUJIČIĆ, V. P. Minimization of torque ripple and copper losses in switched reluctance drive. *IEEE Transactions on Power Electronics*, v. 27, n. 1, p. 388–399, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 53.
- [41] CHOI, C. et al. A new torque control method of a switched reluctance motor using a torque-sharing function. *IEEE Transactions on Magnetics*, v. 38, n. 5, p. 3288–3290, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 52.

- [42] LEE, D.-H. et al. A simple nonlinear logical torque sharing function for low-torque ripple sr drive. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 56, n. 8, p. 3021–3028, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 53.
- [43] LI, H.; BILGIN, B.; EMADI, A. An improved torque sharing function for torque ripple reduction in switched reluctance machines. *IEEE Transactions on Power Electronics*, v. 34, n. 2, p. 1635–1644, 2019. Citado 4 vezes nas páginas 26, 53, 60 e 61.
- [44] VUJICIC, V. P. Modeling of a switched reluctance machine based on the invertible torque function. *IEEE Transactions on Magnetics*, v. 44, n. 9, p. 2186–2194, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 52.
- [45] XIA, Z. et al. An online torque sharing function method involving current dynamics for switched reluctance motor drives. *IEEE Transactions on Transportation Electrification*, v. 9, n. 1, p. 534–548, 2023. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 54.
- [46] XUE, X. D.; CHENG, K. W. E.; HO, S. L. Optimization and evaluation of torque-sharing functions for torque ripple minimization in switched reluctance motor drives. *IEEE Transactions on Power Electronics*, v. 24, n. 9, p. 2076–2090, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 53.
- [47] YE, J.; BILGIN, B.; EMADI, A. An offline torque sharing function for torque ripple reduction in switched reluctance motor drives. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, v. 30, n. 2, p. 726–735, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 53.
- [48] GE, L. et al. A novel model predictive torque control of srms with low measurement effort. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 70, n. 4, p. 3561–3570, 2023. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 56.
- [49] FANG, G. et al. Low-ripple continuous control set model predictive torque control for switched reluctance machines based on equivalent linear srm model. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 69, n. 12, p. 12480–12495, 2022. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 56.
- [50] MIKAIL, R. et al. A fixed switching frequency predictive current control method for switched reluctance machines. In: *2012 IEEE Energy Conversion Congress and Exposition (ECCE)*. [S.l.: s.n.], 2012. p. 843–847. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 55.
- [51] TARVIRDILU-ASL, R. et al. A finite control set model predictive torque control for switched reluctance motor drives with adaptive turn-off angle. In: *IECON 2019 - 45th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*. [S.l.: s.n.], 2019. v. 1, p. 840–845. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 55.

- [52] VALENCIA, D. F. et al. A review of predictive control techniques for switched reluctance machine drives. part i: Fundamentals and current control. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, v. 36, n. 2, p. 1313–1322, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 55.
- [53] ILIC-SPONG, M. et al. Instantaneous torque control of electric motor drives. *IEEE Transactions on Power Electronics*, PE-2, n. 1, p. 55–61, 1987. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 57.
- [54] LIU, X. et al. Generalizing the blondel-park transformation of electrical machines: necessary and sufficient conditions. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, v. 36, n. 8, p. 1058–1067, 1989. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 57.
- [55] NAGEL, N.; LORENZ, R. Complex rotating vector method for smooth torque control of a saturated switched reluctance motor. In: *Conference Record of the 1999 IEEE Industry Applications Conference. Thirty-Forth IAS Annual Meeting (Cat. No.99CH36370)*. [S.l.: s.n.], 1999. v. 4, p. 2591–2598 vol.4. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 57.
- [56] LIU, X. et al. Performance comparison between unipolar and bipolar excitations in switched reluctance machine with sinusoidal and rectangular waveforms. In: *2011 IEEE Energy Conversion Congress and Exposition*. [S.l.: s.n.], 2011. p. 1590–1595. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 57.
- [57] HUSAIN, T. et al. Dq control of switched reluctance machines. In: *2013 Twenty-Eighth Annual IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition (APEC)*. [S.l.: s.n.], 2013. p. 1537–1544. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 58.
- [58] NAKAO, N.; AKATSU, K. Vector control specialized for switched reluctance motor drives. *Electrical Engineering in Japan*, v. 194, n. 2, p. 24–36, 2016. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/eej.22776>>. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 58.
- [59] HUSAIN, T. et al. Flux-weakening control of switched reluctance machines in rotating reference frame. *IEEE Transactions on Industry Applications*, v. 52, n. 1, p. 267–277, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 58.
- [60] KHAN, Y. A.; VERMA, V. Novel speed estimation technique for vector-controlled switched reluctance motor drive. *IET Electric Power Applications*, v. 13, n. 8, p. 1193–1203, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 58.
- [61] KUAI, S. et al. Unipolar sinusoidal excited switched reluctance motor control based on voltage space vector. *IET Electric Power Applications*, v. 13, n. 5, p. 670–675, 2019. Disponível em: <<https://ietresearch.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1049/iet-epa.2018.5636>>. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 58.

- [62] YU, Z. et al. Dc-biased sinusoidal current excited switched reluctance motor drives based on flux modulation principle. *IEEE Transactions on Power Electronics*, v. 35, n. 10, p. 10614–10628, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 59.
- [63] KUAI, S. et al. Low-torque ripple control of srm based on current vector. *IET Electric Power Applications*, v. 14, n. 4, p. 723–730, 2020. Disponível em: <<https://ietresearch.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1049/iet-epa.2019.0548>>. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 59.
- [64] VILELA, W. M. et al. Novel vector control approach for switched reluctance machines based on non-sinusoidal dq transform. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, v. 33, p. 345–358, 2022. Citado 3 vezes nas páginas 26, 59 e 90.
- [65] LIU, D. et al. An improved vector control strategy for switched reluctance motor drive based on the two-degree-of-freedom internal model control. *Applied Sciences*, v. 12, n. 11, 2022. ISSN 2076-3417. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/2076-3417/12/11/5407>>. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 59.
- [66] CHENG, H. et al. General analysis and vector control for doubly salient reluctance machines. *IEEE Transactions on Power Electronics*, v. 38, n. 10, p. 13019–13029, 2023. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 59.
- [67] KRAUSE, P. C. et al. *Analysis of Electric Machinery and Drive Systems*. 3. ed. [S.l.]: Wiley-IEEE Press, 2013. Citado 10 vezes nas páginas 38, 39, 40, 41, 132, 133, 134, 137, 138 e 140.
- [68] ELLABBAN, O.; ABU-RUB, H. Switched reluctance motor converter topologies: A review. In: *2014 IEEE International Conference on Industrial Technology (ICIT)*. [S.l.: s.n.], 2014. p. 840–846. Citado na página 41.
- [69] JIANWU, L.; QIONGHUA, Z. A novel soft-switching converter for switched reluctance motor: analysis, design and experimental results. In: *IEEE International Conference on Electric Machines and Drives, 2005*. [S.l.: s.n.], 2005. p. 1955–1961. Citado na página 42.
- [70] PANDA, D.; RAMANARAYANAN, V. Mutual coupling and its effect on steady-state performance and position estimation of even and odd number phase switched reluctance motor drive. *IEEE Transactions on Magnetics*, v. 43, n. 8, p. 3445–3456, 2007. Citado na página 44.
- [71] KARTAL, E. T.; ARABUL, F. K. Effects of air gap eccentricity on different rotor structures for pmsm in electric vehicles. *Scientific Reports*, Nature Publishing Group, v. 14, p. 17335, 2024. Citado na página 45.

- [72] DORRELL, D.; CHINDURZA, I.; COSSAR, C. Effects of rotor eccentricity on torque in switched reluctance machines. *IEEE Transactions on Magnetics*, v. 41, n. 10, p. 3961–3963, 2005. Citado na página 45.
- [73] FAIZ, J.; PAKDELIAN, S. Diagnosis of static eccentricity in switched reluctance motors based on mutually induced voltages. *IEEE Transactions on Magnetics*, v. 44, n. 8, p. 2029–2034, 2008. Citado na página 45.
- [74] ANUPOJU, K. et al. Design and analysis of air-gap faults in switched reluctance motor. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, IOP Publishing, v. 1529, n. 1, p. 012019, aug 2025. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1755-1315/1529/1/012019>>. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 46.
- [75] XU, S. et al. Comparative evaluation on switched reluctance motor drive with different phase current sensing methods. *IET Electric Power Applications*, v. 13, n. 12, p. 1964–1975, 2019. Citado na página 46.
- [76] TAMURA, H.; AJIMA, T.; NOTO, Y. A torque ripple reduction method by current sensor offset error compensation. In: *2013 15th European Conference on Power Electronics and Applications (EPE)*. [S.l.: s.n.], 2013. p. 1–10. Citado na página 46.
- [77] ANTONELLO, R. et al. Capacitorless synchronous reluctance motor drives for pump applications with resonance damping and line current harmonics reduction. *IEEE Journal of Emerging and Selected Topics in Power Electronics*, v. 11, n. 5, p. 5279–5289, 2023. Citado na página 46.
- [78] MATERU, P.; KRISHNAN, R. Estimation of switched reluctance motor losses. *IEEE Transactions on Industry Applications*, v. 28, n. 3, p. 668–679, 1992. Citado na página 60.
- [79] MATSUO, T.; LIPO, T. Field oriented control of synchronous reluctance machine. In: *Proceedings of IEEE Power Electronics Specialist Conference - PESC '93*. [S.l.: s.n.], 1993. p. 425–431. Citado na página 60.
- [80] MORIMOTO, S. et al. Expansion of operating limits for permanent magnet motor by current vector control considering inverter capacity. *IEEE Transactions on Industry Applications*, v. 26, p. 866–871, 1990. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/28.60058>>. Citado na página 60.
- [81] WANG, W.; FAHIMI, B. Maximum torque per ampere control of switched reluctance motors. In: *2012 IEEE Energy Conversion Congress and Exposition (ECCE)*. [S.l.: s.n.], 2012. p. 4307–4313. Citado na página 60.

- [82] CASTRO, A. G. de et al. Novel mtpa approach for ipmsm with non-sinusoidal back-emf. In: *2019 IEEE 15th Brazilian Power Electronics Conference and 5th IEEE Southern Power Electronics Conference (COBEP/SPEC)*. [S.l.: s.n.], 2019. p. 1–6. Citado 2 vezes nas páginas 60 e 61.
- [83] LI, K.; WANG, Y. Maximum torque per ampere (mtpa) control for ipmsm drives based on a variable-equivalent-parameter mtpa control law. *IEEE Transactions on Power Electronics*, v. 34, n. 7, p. 7092–7102, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 60 e 61.
- [84] DIANOV, A. et al. Review and classification of mtpa control algorithms for synchronous motors. *IEEE Transactions on Power Electronics*, v. 37, n. 4, p. 3990–4007, 2022. Citado 2 vezes nas páginas 60 e 61.
- [85] ELDEEB, H. et al. A unified theory for optimal feedforward torque control of anisotropic synchronous machines. *International Journal of Control*, Informa UK Limited, v. 91, n. 10, p. 2273–2302, jul. 2017. ISSN 1366-5820. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1080/00207179.2017.1338359>>. Citado na página 61.
- [86] NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. *Numerical Optimization*. 2. ed. New York: Springer, 2006. (Springer Series in Operations Research and Financial Engineering). ISBN 978-0387400655. Citado na página 64.
- [87] TREFETHEN, L. N.; BAU, D. *Numerical Linear Algebra*. [S.l.]: SIAM, 1997. Citado na página 66.
- [88] CAMPOS, M. J. A. *Design of an SRM machine for traction of a Formula Student car*. Tese (Dissertação) — Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2023. Disponível no Repositório Aberto da Universidade do Porto. Disponível em: <<https://repositorio-aberto.up.pt/handle/10216/162762>>. Citado na página 82.
- [89] CLARKE, E. Circuit analysis of a-c power systems. *Transactions of the AIEE*, 1951. Citado 2 vezes nas páginas 132 e 140.
- [90] PARK, R. H. Two-reaction theory of synchronous machines. *Transactions of the AIEE*, 1929. Citado 4 vezes nas páginas 132, 133, 134 e 140.
- [91] HORN, R. A.; JOHNSON, C. R. *Matrix Analysis*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013. Citado 5 vezes nas páginas 141, 142, 143, 144 e 145.
- [92] STRANG, G. *Introduction to Linear Algebra*. [S.l.]: Wellesley-Cambridge Press, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 141, 142 e 144.
- [93] NICKALLS, R. W. D. A new approach to solving the cubic: Cardan’s solution revealed. *The Mathematical Gazette*, v. 77, n. 480, p. 354–359, 1993. Citado na página 144.

Apêndice A

Transformações de Eixo e seu Papel no Controle de Motores

A modelagem de máquinas elétricas usualmente conduz a equações diferenciais com coeficientes variantes no tempo, dependentes explicitamente da posição angular e da velocidade do rotor. Além disso, é frequente a presença de acoplamentos entre as fases dos enrolamentos, representados pelas indutâncias mútuas. Conforme amplamente discutido na literatura clássica de máquinas elétricas [67], uma forma de simplificar essa modelagem consiste na adoção de transformações lineares que redefinem as variáveis elétricas em sistemas de coordenadas alternativos. Essas transformações correspondem, essencialmente, a mudanças de base no espaço vetorial das grandezas elétricas, permitindo a descrição das variáveis da máquina em referenciais estacionários, como a transformação proposta por E. Clarke [89], ou rotativos, como a introduzida por R. H. Park [90].

A.1 Transformação de Clarke

A transformação de Clarke introduz um sistema de referência estacionário com três eixos ortogonais, denotados por α , β e 0, sendo também conhecida como transformação $\alpha\beta 0$ [89]. Trata-se de uma transformação linear que projeta as variáveis trifásicas em um sistema ortogonal equivalente, preservando a potência quando devidamente normalizada [67].

Considere um sistema trifásico cujas fases são a , b e c . Seja \mathbf{x} um conjunto de variáveis genéricas, podendo representar fluxos concatenados, tensões ou correntes, descritas por meio do vetor $\mathbf{x}_{abc}^\top = (x_a, x_b, x_c)$, em que x_a , x_b e x_c correspondem às fases a , b e c , respectivamente.

Esse conjunto de variáveis pode ser referido ao sistema $\alpha\beta 0$ por meio da transformação linear $\mathbf{T}_{\alpha\beta 0}$, conforme a Eq. (A.1). Tal transformação corresponde a uma mudança de base ortonormal no espaço das variáveis trifásicas, assumindo-se que o eixo α esteja alinhado com o eixo da fase a , conforme a formulação original de Clarke [89].

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta 0} = \mathbf{T}_{\alpha\beta 0} \mathbf{x}_{abc} \quad (\text{A.1})$$

sendo $\mathbf{x}_{\alpha\beta 0}^\top = (x_\alpha, x_\beta, x_0)$ as variáveis referidas ao sistema $\alpha\beta 0$, considerando que a direção

dos eixos da fase a e α é coincidente, e

$$\mathbf{T}_{\alpha\beta 0} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Vale ressaltar que, quando devidamente normalizada, a transformação apresentada é invariante à potência, i.e., a potência elétrica calculada no sistema abc é numericamente igual àquela obtida no sistema $\alpha\beta 0$ [67]. Tal propriedade decorre do fato de a matriz de transformação representar uma base ortonormal e será demonstrada nas próximas seções.

Além disso, a matriz de Clarke é invertível e, sob a normalização adotada, sua inversa coincide com a transposta. Logo, para referir variáveis do sistema $\alpha\beta 0$ de volta ao sistema abc , utiliza-se diretamente a matriz transposta, conforme (A.2).

$$\mathbf{x}_{abc} = \mathbf{T}_{\alpha\beta 0}^{-1} \mathbf{x}_{\alpha\beta 0} \quad (\text{A.2})$$

A.2 Transformação de Park

A transformação de Park parte do sistema $\alpha\beta 0$, porém introduz um referencial rotativo composto por três eixos ortogonais, denominados eixo direto (d), eixo de quadratura (q) e eixo zero. Por esse motivo, é também conhecida como transformação $dq0$ [90].

Originalmente desenvolvida para máquinas síncronas com excitação senoidal [90], essa transformação pode ser aplicada a diferentes tipos de máquinas elétricas desde que seja definida uma velocidade angular apropriada para o referencial rotativo [67]. Do ponto de vista matemático, trata-se de uma rotação ortogonal do plano $\alpha\beta$ em torno do eixo zero por um ângulo θ , sendo também invariante à potência.

A partir das variáveis referidas ao sistema $\alpha\beta 0$, pode-se agora referi-las ao sistema $dq0$ por meio da transformação de Park, \mathbf{T}_{dq0} , utilizando (A.3).

$$\mathbf{x}_{dq0} = \mathbf{T}_{dq0} \mathbf{x}_{\alpha\beta 0} \quad (\text{A.3})$$

sendo $\mathbf{x}_{dq0}^\top = (x_d, x_q, x_0)$ as variáveis referidas ao sistema $dq0$ e

$$\mathbf{T}_{dq0} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

com $\theta = \int \omega dt$, em que ω é a velocidade angular do referencial rotativo $dq0$. Vale mencionar que, para cada valor de ω , define-se um referencial rotativo distinto, adequado ao tipo de máquina elétrica em análise.

A transformação \mathbf{T}_{dq0} também é ortogonal, sendo sua inversa igual à sua transposta. Essa propriedade decorre diretamente de sua construção como matriz de rotação no plano $\alpha\beta$, conforme estabelecido por Park [90]. É possível referir as variáveis em $dq0$ de volta para $\alpha\beta0$, por meio de (A.4).

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta0} = \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \mathbf{x}_{dq0} \quad (\text{A.4})$$

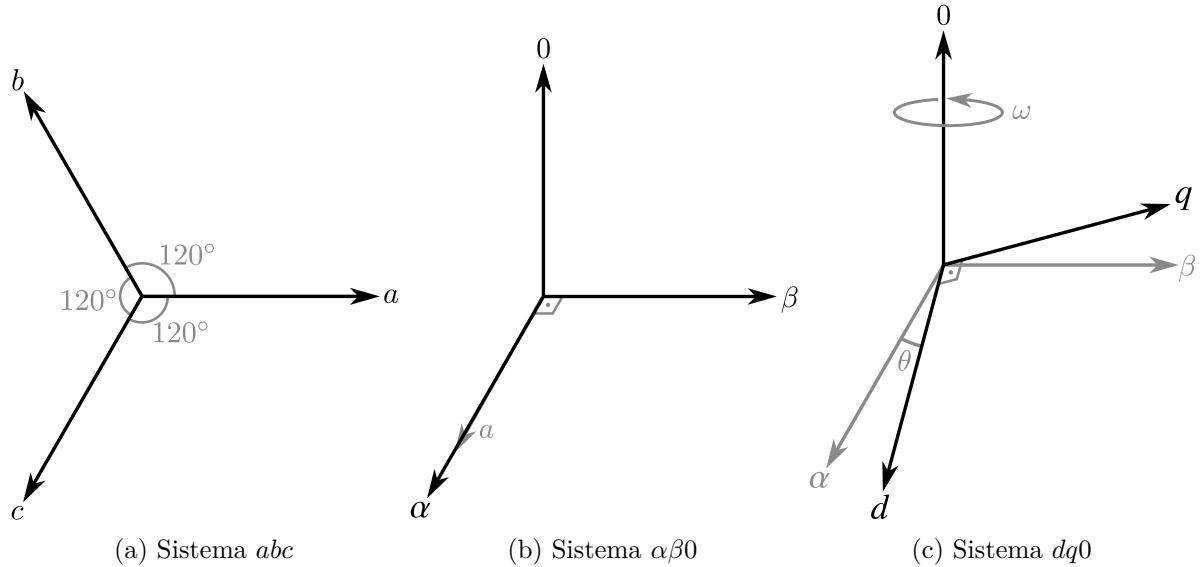
É possível referir as variáveis abc diretamente a $dq0$, como apresentado em (A.5), aplicando-se, sequencialmente, as transformações de Clarke e Park.

$$\mathbf{x}_{dq0} = \mathbf{T}_{dq0} \mathbf{T}_{\alpha\beta0} \mathbf{x}_{abc} = \mathbf{T}_{abc \rightarrow dq0} \mathbf{x}_{abc} \quad (\text{A.5})$$

sendo $\mathbf{T}_{abc \rightarrow dq0} = \mathbf{T}_{dq0} \mathbf{T}_{\alpha\beta0}$.

Para maior clareza quanto aos diferentes sistemas considerados, ver a Figura A.1. Nota-se que, embora as grandezas no sistema abc sejam variantes no tempo, o referencial é estacionário, assim como o sistema $\alpha\beta0$.

Figura A.1 – Ilustração dos diferentes sistemas de referência.



Fonte: o autor.

A aplicação sequencial das transformações de Clarke e Park usualmente simplifica a modelagem de máquinas trifásicas com excitação aproximadamente senoidal, uma vez que indutâncias variantes no tempo podem ser eliminadas ou tornar-se constantes no referencial síncrono, resultando em sistemas parcialmente ou totalmente desacoplados [67]. Essa simplificação constitui a base do controle vetorial de máquinas elétricas.

Nos casos de máquinas em que a produção do torque depende explicitamente da variação espacial da relutância, como é o caso das SRMs, o desacoplamento das fases não ocorre com a utilização das transformações citadas aqui. Nesses casos, a dependência

angular da matriz de indutância permanece, preservando os termos de acoplamento no modelo final.

Em suma, a aplicação das transformações mencionadas permite a simplificação dos modelos matemáticos das máquinas elétricas, facilitando a análise e o controle, bem como propiciando uma redução na complexidade computacional. Sua utilização é a base do controle vetorial e permite controlar separadamente fluxo magnético e torque, resultando em maior eficiência e precisão.

A.3 Aplicação das Transformações em Variáveis Estacionárias

Para manter o foco desta tese, considera-se inicialmente apenas a modelagem de elementos resistivos e indutivos lineares. Considere, inicialmente, um circuito trifásico puramente resistivo, de forma que r_a , r_b e r_c são, respectivamente, as resistências das fases a , b e c . Nesse circuito, as tensões $\mathbf{v}_{abc}^\top = (v_a, v_b, v_c)$ e correntes de fase $\mathbf{i}_{abc}^\top = (i_a, i_b, i_c)$ se relacionam como (A.6).

$$\mathbf{v}_{abc} = \mathbf{r}_{abc} \mathbf{i}_{abc} \quad (\text{A.6})$$

em que

$$\mathbf{r}_{abc} = \begin{pmatrix} r_a & 0 & 0 \\ 0 & r_b & 0 \\ 0 & 0 & r_c \end{pmatrix}$$

A Eq. (A.6) pode ser referida ao sistema $\alpha\beta 0$ por meio da transformação de Clarke, resultando em (A.7).

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\alpha\beta 0}^{-1} \mathbf{v}_{\alpha\beta 0} &= \mathbf{r}_{abc} \mathbf{T}_{\alpha\beta 0}^{-1} \mathbf{i}_{\alpha\beta 0} \\ \mathbf{T}_{\alpha\beta 0} \mathbf{T}_{\alpha\beta 0}^{-1} \mathbf{v}_{\alpha\beta 0} &= \mathbf{T}_{\alpha\beta 0} \mathbf{r}_{abc} \mathbf{T}_{\alpha\beta 0}^{-1} \mathbf{i}_{\alpha\beta 0} \\ \mathbf{v}_{\alpha\beta 0} &= \mathbf{T}_{\alpha\beta 0} \mathbf{r}_{abc} \mathbf{T}_{\alpha\beta 0}^{-1} \mathbf{i}_{\alpha\beta 0} \\ \mathbf{v}_{\alpha\beta 0} &= \mathbf{r}_{\alpha\beta 0} \mathbf{i}_{\alpha\beta 0} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

sendo $\mathbf{v}_{\alpha\beta 0}^\top = (v_\alpha, v_\beta, v_0)$ e $\mathbf{i}_{\alpha\beta 0}^\top = (i_\alpha, i_\beta, i_0)$, respectivamente, as tensões e correntes de fase referidas ao sistema $\alpha\beta 0$ e

$$\mathbf{r}_{\alpha\beta 0} = \mathbf{T}_{\alpha\beta 0} \mathbf{r}_{abc} \mathbf{T}_{\alpha\beta 0}^{-1} = \begin{pmatrix} r_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & r_\beta & 0 \\ 0 & 0 & r_0 \end{pmatrix}$$

Em seguida, a Eq. (A.7) pode ser referida ao sistema $dq0$ utilizando a transformação de Park, o que resulta em (A.8).

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \mathbf{v}_{dq0} &= \mathbf{r}_{\alpha\beta0} \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \mathbf{i}_{dq0} \\
 \mathbf{T}_{dq0} \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \mathbf{v}_{dq0} &= \mathbf{T}_{dq0} \mathbf{r}_{\alpha\beta0} \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \mathbf{i}_{dq0} \\
 \mathbf{v}_{dq0} &= \mathbf{T}_{dq0} \mathbf{r}_{\alpha\beta0} \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \mathbf{i}_{dq0} \\
 \mathbf{v}_{dq0} &= \mathbf{r}_{dq0} \mathbf{i}_{dq0}
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

em que $\mathbf{v}_{dq0}^\top = (v_d, v_q, v_0)$ e $\mathbf{i}_{dq0}^\top = (i_d, i_q, i_0)$, respectivamente, as tensões e correntes de fase referidas ao sistema $dq0$ e

$$\mathbf{r}_{dq0} = \mathbf{T}_{dq0} \mathbf{r}_{\alpha\beta0} \mathbf{T}_{dq0}^{-1} = \begin{pmatrix} r_d & 0 & 0 \\ 0 & r_q & 0 \\ 0 & 0 & r_0 \end{pmatrix}$$

No caso em que o sistema é equilibrado e todas as resistências possuem o mesmo valor, de (A.7) e (A.8), verifica-se que $\mathbf{r}_{dq0} = \mathbf{r}_{\alpha\beta0} = \mathbf{r}_{abc}$.

Considere, agora, um circuito que possui ambos os efeitos resistivo e indutivo. A equação que governa este circuito é dada por (A.9) em função do fluxo concatenado pelas fases (ψ_a, ψ_b, ψ_c) .

$$\mathbf{v}_{abc} = \mathbf{r}_{abc} \mathbf{i}_{abc} + \frac{d}{dt} \boldsymbol{\psi}_{abc} \tag{A.9}$$

Novamente, utilizando a transformação de Clarke, a Eq. (A.9) pode ser reescrita como (A.10).

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_{\alpha\beta0}^{-1} \mathbf{v}_{\alpha\beta0} &= \mathbf{r}_{abc} \mathbf{T}_{\alpha\beta0}^{-1} \mathbf{i}_{\alpha\beta0} + \frac{d}{dt} \mathbf{T}_{\alpha\beta0}^{-1} \boldsymbol{\psi}_{\alpha\beta0} \\
 \mathbf{T}_{\alpha\beta0}^{-1} \mathbf{v}_{\alpha\beta0} &= \mathbf{r}_{abc} \mathbf{T}_{\alpha\beta0}^{-1} \mathbf{i}_{\alpha\beta0} + \left(\frac{d}{dt} \mathbf{T}_{\alpha\beta0}^{-1} \right) \boldsymbol{\psi}_{\alpha\beta0} + \mathbf{T}_{\alpha\beta0}^{-1} \frac{d}{dt} \boldsymbol{\psi}_{\alpha\beta0} \\
 \mathbf{T}_{\alpha\beta0} \mathbf{T}_{\alpha\beta0}^{-1} \mathbf{v}_{\alpha\beta0} &= \mathbf{T}_{\alpha\beta0} \mathbf{r}_{abc} \mathbf{T}_{\alpha\beta0}^{-1} \mathbf{i}_{\alpha\beta0} + \mathbf{T}_{\alpha\beta0} \left(\frac{d}{dt} \mathbf{T}_{\alpha\beta0}^{-1} \right) \boldsymbol{\psi}_{\alpha\beta0} + \mathbf{T}_{\alpha\beta0} \mathbf{T}_{\alpha\beta0}^{-1} \frac{d}{dt} \boldsymbol{\psi}_{\alpha\beta0} \\
 \mathbf{v}_{\alpha\beta0} &= \mathbf{r}_{\alpha\beta0} \mathbf{i}_{\alpha\beta0} + \frac{d}{dt} \boldsymbol{\psi}_{\alpha\beta0}
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

na qual $\boldsymbol{\psi}_{\alpha\beta0}^\top = (\psi_\alpha, \psi_\beta, \psi_0)$.

Sequencialmente, utilizando a transformação de Park, obtém-se (A.11), correspondendo à Eq. (A.10) referida ao sistema $dq0$.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \mathbf{v}_{dq0} &= \mathbf{r}_{\alpha\beta0} \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \mathbf{i}_{dq0} + \frac{d}{dt} (\mathbf{T}_{dq0}^{-1} \boldsymbol{\psi}_{dq0}) \\
 \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \mathbf{v}_{dq0} &= \mathbf{r}_{\alpha\beta0} \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \mathbf{i}_{dq0} + \left(\frac{d}{dt} \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \right) \boldsymbol{\psi}_{dq0} + \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \frac{d}{dt} \boldsymbol{\psi}_{dq0}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_{dq0}\mathbf{T}_{dq0}^{-1}\mathbf{v}_{dq0} &= \mathbf{T}_{dq0}\mathbf{r}_{\alpha\beta0}\mathbf{T}_{dq0}^{-1}\mathbf{i}_{dq0} + \mathbf{T}_{dq0}\left(\frac{d}{dt}\mathbf{T}_{dq0}^{-1}\right)\boldsymbol{\psi}_{dq0} + \mathbf{T}_{dq0}\mathbf{T}_{dq0}^{-1}\frac{d}{dt}\boldsymbol{\psi}_{dq0} \\ \mathbf{v}_{dq0} &= \mathbf{r}_{dq0}\mathbf{i}_{dq0} - \mathbf{J}\boldsymbol{\psi}_{dq0} + \frac{d}{dt}\boldsymbol{\psi}_{dq0}\end{aligned}\quad (\text{A.11})$$

onde $\boldsymbol{\psi}_{dq0}^\top = (\psi_d, \psi_q, \psi_0)$ e

$$\mathbf{J} = \left(\frac{d}{dt}\mathbf{T}_{dq0}\right)\mathbf{T}_{dq0}^{-1} = \omega \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e, como $\mathbf{T}_{dq0}^{-1}\mathbf{T}_{dq0} = \mathbf{I}$, resulta

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{I}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\mathbf{T}_{dq0}\mathbf{T}_{dq0}^{-1}) = \left(\frac{d\mathbf{T}_{dq0}}{dt}\right)\mathbf{T}_{dq0}^{-1} + \mathbf{T}_{dq0}\left(\frac{d\mathbf{T}_{dq0}^{-1}}{dt}\right) = \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_{dq0}\left(\frac{d\mathbf{T}_{dq0}^{-1}}{dt}\right) &= -\left(\frac{d\mathbf{T}_{dq0}}{dt}\right)\mathbf{T}_{dq0}^{-1} = -\mathbf{J}\end{aligned}$$

Quando o circuito magnético é linear, o fluxo concatenado pode ser expresso como função linear das correntes por meio da matriz de indutâncias, como em (A.12), conforme apresentado na literatura clássica [67].

$$\boldsymbol{\psi}_{abc} = \mathbf{L}_{abc}\mathbf{i}_{abc}\quad (\text{A.12})$$

em que

$$\mathbf{L}_{abc} = \begin{pmatrix} L_a & M_{ab} & M_{ca} \\ M_{ab} & L_b & M_{bc} \\ M_{ca} & M_{bc} & L_c \end{pmatrix}$$

sendo L_a , L_b e L_c as indutâncias próprias das fases a , b e c , respectivamente, e M_{ab} , M_{bc} e M_{ca} as indutâncias mútuas entre as fases a e b , b e c e c e a , nessa ordem.

Novamente, utilizando a transformação de Clarke, refere-se a Eq. (A.12) ao novo referencial $\alpha\beta0$, obtendo-se (A.13).

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_{\alpha\beta0}^{-1}\boldsymbol{\psi}_{\alpha\beta0} &= \mathbf{L}_{abc}\mathbf{T}_{\alpha\beta0}^{-1}\mathbf{i}_{\alpha\beta0} \\ \mathbf{T}_{\alpha\beta0}\mathbf{T}_{\alpha\beta0}^{-1}\boldsymbol{\psi}_{\alpha\beta0} &= \mathbf{T}_{\alpha\beta0}\mathbf{L}_{abc}\mathbf{T}_{\alpha\beta0}^{-1}\mathbf{i}_{\alpha\beta0} \\ \boldsymbol{\psi}_{\alpha\beta0} &= \mathbf{T}_{\alpha\beta0}\mathbf{L}_{abc}\mathbf{T}_{\alpha\beta0}^{-1}\mathbf{i}_{\alpha\beta0} \\ \boldsymbol{\psi}_{\alpha\beta0} &= \mathbf{L}_{\alpha\beta0}\mathbf{i}_{\alpha\beta0}\end{aligned}\quad (\text{A.13})$$

em que

$$\mathbf{L}_{\alpha\beta0} = \mathbf{T}_{\alpha\beta0}\mathbf{L}_{abc}\mathbf{T}_{\alpha\beta0}^{-1} = \begin{pmatrix} L_\alpha & M_{\alpha\beta} & M_{0\alpha} \\ M_{\alpha\beta} & L_\beta & M_{\beta0} \\ M_{0\alpha} & M_{\beta0} & L_0 \end{pmatrix}$$

sendo L_α , L_β e L_0 as indutâncias próprias dos eixos α , β e 0, respectivamente, e $M_{\alpha\beta}$, $M_{\beta 0}$ e $M_{0\alpha}$ as indutâncias mútuas entre os eixos α e β , β e 0 e 0 e α , respectivamente.

A partir da Eq. (A.13), obtém-se a forma no sistema de referência $dq0$ por meio da transformação de Park, conforme (A.14).

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \boldsymbol{\psi}_{dq0} &= \mathbf{L}_{\alpha\beta 0} \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \mathbf{i}_{dq0} \\ \mathbf{T}_{dq0} \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \boldsymbol{\psi}_{dq0} &= \mathbf{T}_{dq0} \mathbf{L}_{\alpha\beta 0} \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \mathbf{i}_{dq0} \\ \boldsymbol{\psi}_{dq0} &= \mathbf{T}_{dq0} \mathbf{L}_{\alpha\beta 0} \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \mathbf{i}_{dq0} \\ \boldsymbol{\psi}_{dq0} &= \mathbf{L}_{dq0} \mathbf{i}_{dq0} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

sendo

$$\mathbf{L}_{dq0} = \mathbf{T}_{dq0} \mathbf{L}_{\alpha\beta 0} \mathbf{T}_{dq0}^{-1} = \begin{pmatrix} L_d & M_{dq} & M_{0d} \\ M_{dq} & L_q & M_{q0} \\ M_{0d} & M_{q0} & L_0 \end{pmatrix}$$

em que L_d , L_q e L_0 são as indutâncias próprias dos eixos d , q e 0, respectivamente, e M_{dq} , M_{q0} e M_{0d} as indutâncias mútuas entre os eixos d e q , q e 0 e 0 e d , respectivamente.

Em sistemas puramente senoidais e simétricos, sob condições específicas de equilíbrio e distribuição espacial uniforme, a aplicação das transformações de Clarke e Park pode resultar em uma representação com indutâncias constantes e termos de acoplamento nulos no referencial síncrono [67]. Todavia, para máquinas não senoidais, como é o caso tratado nesta tese, tal desacoplamento não é estruturalmente garantido, sendo mantidas as expressões completas.

Ainda considerando a hipótese de que o circuito magnético seja linear, substituindo-se (A.12) em (A.9) resulta em (A.15).

$$\mathbf{v}_{abc} = \mathbf{r}_{abc} \mathbf{i}_{abc} + \frac{d\mathbf{L}_{abc}}{dt} \mathbf{i}_{abc} + \mathbf{L}_{abc} \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{abc} \quad (\text{A.15})$$

No caso de máquinas rotativas, que constituem o escopo desta tese, é possível expressar (A.15) como (A.16), sendo θ_r o ângulo mecânico do rotor e $\omega_r = d\theta_r/dt$ a velocidade mecânica do rotor.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{abc} &= \mathbf{r}_{abc} \mathbf{i}_{abc} + \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \frac{d\theta_r}{dt} + \frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \mathbf{i}_{abc}} \frac{d\mathbf{i}_{abc}}{dt} \right) \mathbf{i}_{abc} + \mathbf{L}_{abc} \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{abc} \\ \mathbf{v}_{abc} &= \mathbf{r}_{abc} \mathbf{i}_{abc} + \omega_r \frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \mathbf{i}_{abc} + \mathbf{L}_{abc}^{\text{inc}} \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{abc} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

sendo $\mathbf{L}_{abc}^{\text{inc}} = \mathbf{L}_{abc} + \frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \mathbf{i}_{abc}} \mathbf{i}_{abc}$ a matriz das indutância incremental.

Similarmente às demais equações, a Eq. (A.16) pode ser referida ao sistema $\alpha\beta 0$ por meio da transformação de Clarke, resultando em (A.17).

$$\mathbf{T}_{\alpha\beta 0}^{-1} \mathbf{v}_{\alpha\beta 0} = \mathbf{r}_{abc} \mathbf{T}_{\alpha\beta 0}^{-1} \mathbf{i}_{\alpha\beta 0} + \omega_r \frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \mathbf{T}_{\alpha\beta 0}^{-1} \mathbf{i}_{\alpha\beta 0} + \mathbf{L}_{abc}^{\text{inc}} \frac{d}{dt} \left(\mathbf{T}_{\alpha\beta 0}^{-1} \mathbf{i}_{\alpha\beta 0} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_{\alpha\beta 0}^{-1} \mathbf{v}_{\alpha\beta 0} &= \mathbf{r}_{abc} \mathbf{T}_{\alpha\beta 0}^{-1} \mathbf{i}_{\alpha\beta 0} + \omega_r \frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \mathbf{T}_{\alpha\beta 0}^{-1} \mathbf{i}_{\alpha\beta 0} + \mathbf{L}_{abc}^{\text{inc}} \frac{d\mathbf{T}_{\alpha\beta 0}^{-1}}{dt} \mathbf{i}_{\alpha\beta 0} + \\
 &\quad + \mathbf{L}_{abc}^{\text{inc}} \mathbf{T}_{\alpha\beta 0}^{-1} \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{\alpha\beta 0} \\
 \mathbf{T}_{\alpha\beta 0} \mathbf{T}_{\alpha\beta 0}^{-1} \mathbf{v}_{\alpha\beta 0} &= \mathbf{T}_{\alpha\beta 0} \mathbf{r}_{abc} \mathbf{T}_{\alpha\beta 0}^{-1} \mathbf{i}_{\alpha\beta 0} + \omega_r \mathbf{T}_{\alpha\beta 0} \frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \mathbf{T}_{\alpha\beta 0}^{-1} \mathbf{i}_{\alpha\beta 0} + \\
 &\quad + \mathbf{T}_{\alpha\beta 0} \mathbf{L}_{abc}^{\text{inc}} \mathbf{T}_{\alpha\beta 0}^{-1} \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{\alpha\beta 0} \\
 \mathbf{v}_{\alpha\beta 0} &= \mathbf{r}_{\alpha\beta 0} \mathbf{i}_{\alpha\beta 0} + \omega_r \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{\alpha\beta 0} \mathbf{i}_{\alpha\beta 0} + \mathbf{L}_{\alpha\beta 0}^{\text{inc}} \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{\alpha\beta 0} \tag{A.17}
 \end{aligned}$$

em que

$$\left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{\alpha\beta 0} = \mathbf{T}_{\alpha\beta 0} \frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \mathbf{T}_{\alpha\beta 0}^{-1}$$

A aplicação da transformação de Park em (A.17) resulta em (A.18), a expressão no sistema de referência $dq0$ correspondente à (A.16).

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \mathbf{v}_{dq0} &= \mathbf{r}_{\alpha\beta 0} \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \mathbf{i}_{dq0} + \omega_r \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{\alpha\beta 0} \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \mathbf{i}_{dq0} + \mathbf{L}_{\alpha\beta 0}^{\text{inc}} \frac{d}{dt} \left(\mathbf{T}_{dq0}^{-1} \mathbf{i}_{dq0} \right) \\
 \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \mathbf{v}_{dq0} &= \mathbf{r}_{\alpha\beta 0} \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \mathbf{i}_{dq0} + \omega_r \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{\alpha\beta 0} \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \mathbf{i}_{dq0} + \mathbf{L}_{\alpha\beta 0}^{\text{inc}} \frac{d\mathbf{T}_{dq0}^{-1}}{dt} \mathbf{i}_{dq0} + \\
 &\quad + \mathbf{L}_{\alpha\beta 0}^{\text{inc}} \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{dq0} \\
 \mathbf{T}_{dq0} \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \mathbf{v}_{dq0} &= \mathbf{T}_{dq0} \mathbf{r}_{\alpha\beta 0} \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \mathbf{i}_{dq0} + \omega_r \mathbf{T}_{dq0} \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{\alpha\beta 0} \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \mathbf{i}_{dq0} + \\
 &\quad + \mathbf{T}_{dq0} \mathbf{L}_{\alpha\beta 0}^{\text{inc}} \left(-\mathbf{T}_{dq0}^{-1} \mathbf{J} \right) \mathbf{i}_{dq0} + \mathbf{T}_{dq0} \mathbf{L}_{\alpha\beta 0}^{\text{inc}} \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{dq0} \\
 \mathbf{v}_{dq0} &= \mathbf{r}_{dq0} \mathbf{i}_{dq0} + \left[\omega_r \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{\alpha\beta 0}}{\partial \theta_r} \right)_{dq0} - \mathbf{L}_{dq0} \mathbf{J} \right] \mathbf{i}_{dq0} + \mathbf{L}_{dq0}^{\text{inc}} \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{dq0} \tag{A.18}
 \end{aligned}$$

sendo

$$\left(\frac{\partial \mathbf{L}_{\alpha\beta 0}}{\partial \theta_r} \right)_{dq0} = \mathbf{T}_{dq0} \frac{\partial \mathbf{L}_{\alpha\beta 0}}{\partial \theta_r} \mathbf{T}_{dq0}^{-1}$$

Ademais, potência e torque também podem ser representados nos sistemas $\alpha\beta 0$ e $dq0$. A potência total P_e em abc pode ser obtida por meio da Eq. (A.19).

$$P_e = v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c = \mathbf{v}_{abc}^\top \mathbf{i}_{abc} \tag{A.19}$$

Utilizando (A.1), a Eq. (A.19) pode ser reescrita como (A.20).

$$\begin{aligned}
 P_e &= \left(\mathbf{T}_{\alpha\beta 0}^{-1} \mathbf{v}_{\alpha\beta 0} \right)^\top \mathbf{T}_{\alpha\beta 0}^{-1} \mathbf{i}_{\alpha\beta 0} \\
 &= \mathbf{v}_{\alpha\beta 0}^\top \mathbf{T}_{\alpha\beta 0}^{-T} \mathbf{T}_{\alpha\beta 0}^{-1} \mathbf{i}_{\alpha\beta 0} \\
 &= \mathbf{v}_{\alpha\beta 0}^\top \mathbf{i}_{\alpha\beta 0}
 \end{aligned}$$

$$P_e = v_\alpha i_\alpha + v_\beta i_\beta + v_0 i_0 \quad (\text{A.20})$$

A partir da expressão da potência em $\alpha\beta 0$, a aplicação de (A.3) resulta em (A.21), que corresponde à expressão da potência elétrica do circuito em análise, referida ao sistema $dq0$.

$$\begin{aligned} P_e &= \left(\mathbf{T}_{dq0}^{-1} \mathbf{v}_{dq0} \right)^\top \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \mathbf{i}_{dq0} \\ &= \mathbf{v}_{dq0}^\top \mathbf{T}_{dq0}^{-T} \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \mathbf{i}_{dq0} \\ &= \mathbf{v}_{dq0}^\top \mathbf{i}_{dq0} \\ P_e &= v_d i_d + v_q i_q + v_0 i_0 \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Verifica-se, por meio de (A.20) e (A.21), que as transformações $\mathbf{T}_{\alpha\beta 0}$ e \mathbf{T}_{dq0} , conforme definidas, preservam a potência elétrica. Essa propriedade decorre da ortogonalidade das matrizes envolvidas, conforme discutido por Clarke [89] e Park [90], e amplamente consolidado na literatura de máquinas elétricas [67].

Como demonstrado no Capítulo 1, o torque eletromagnético desenvolvido por uma máquina de relutância pode ser obtido por meio de (A.22). Utilizando a transformação de Clarke, é possível computar o torque no sistema $\alpha\beta 0$ por meio de (A.23).

$$\begin{aligned} T_e &= \frac{1}{2} \mathbf{i}_{abc}^\top \frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \mathbf{i}_{abc} \quad (\text{A.22}) \\ T_e &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{T}_{\alpha\beta 0}^{-1} \mathbf{i}_{\alpha\beta 0} \right)^\top \frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \mathbf{T}_{\alpha\beta 0}^{-1} \mathbf{i}_{\alpha\beta 0} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{i}_{\alpha\beta 0}^\top \mathbf{T}_{\alpha\beta 0}^{-T} \frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \mathbf{T}_{\alpha\beta 0}^{-1} \mathbf{i}_{\alpha\beta 0} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{i}_{\alpha\beta 0}^\top \mathbf{T}_{\alpha\beta 0} \frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \mathbf{T}_{\alpha\beta 0}^{-1} \mathbf{i}_{\alpha\beta 0} \\ T_e &= \frac{1}{2} \mathbf{i}_{\alpha\beta 0}^\top \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{\alpha\beta 0} \mathbf{i}_{\alpha\beta 0} \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Finalmente, o torque eletromagnético em $dq0$ pode ser obtido por meio de (A.24), resultado da aplicação de (A.3) em (A.23).

$$\begin{aligned} T_e &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{T}_{dq0}^{-1} \mathbf{i}_{dq0} \right)^\top \frac{\partial \mathbf{L}_{\alpha\beta 0}}{\partial \theta_r} \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \mathbf{i}_{dq0} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{i}_{dq0}^\top \mathbf{T}_{dq0}^{-T} \frac{\partial \mathbf{L}_{\alpha\beta 0}}{\partial \theta_r} \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \mathbf{i}_{dq0} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{i}_{dq0}^\top \mathbf{T}_{dq0} \frac{\partial \mathbf{L}_{\alpha\beta 0}}{\partial \theta_r} \mathbf{T}_{dq0}^{-1} \mathbf{i}_{dq0} \\ T_e &= \frac{1}{2} \mathbf{i}_{dq0}^\top \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{\alpha\beta 0}}{\partial \theta_r} \right)_{dq0} \mathbf{i}_{dq0} \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Apêndice B

Autovalores e Autovetores

B.1 Definição

Seja \mathbf{A} uma matriz quadrada de ordem $n \times n$. Definem-se o autovalor σ e o autovetor \mathbf{w} associados à matriz \mathbf{A} como as soluções da equação (B.1) [91].

$$\mathbf{A}\mathbf{w} = \sigma\mathbf{w} \tag{B.1}$$

Geometricamente, essa equação caracteriza vetores cuja direção é preservada sob a ação da transformação linear associada a \mathbf{A} . O efeito da matriz pode ser considerado, nesse caso, como um escalonamento por σ . Logo, se $\sigma < 0$, ocorre inversão da orientação de \mathbf{w} ; se $|\sigma| < 1$, há contração; se $|\sigma| > 1$, há dilatação; e se $\sigma = 0$, \mathbf{w} pertence ao espaço nulo (núcleo) [92].

A equação (B.1) pode ser reescrita como (B.2), o que evidencia que a determinação dos autovetores de \mathbf{A} equivale às soluções não triviais do sistema homogêneo associado.

$$(\mathbf{A} - \sigma\mathbf{I})\mathbf{w} = 0 \tag{B.2}$$

Para que \mathbf{w} constitua uma solução não trivial de (B.1), é necessário e suficiente que a condição imposta por (B.2) seja satisfeita. Tal condição define o polinômio característico da matriz \mathbf{A} , cujas raízes correspondem exatamente aos seus autovalores [91]. Para cada autovalor σ , o conjunto dos vetores não nulos que satisfazem (B.2) define o autoespaço associado, sendo qualquer elemento desse subespaço um autovetor correspondente.

$$\det(\mathbf{A} - \sigma\mathbf{I}) = 0 \tag{B.3}$$

Caso a matriz \mathbf{A} possua n autovetores linearmente independentes, então \mathbf{A} é diagonalizável. Em outras palavras, existe uma matriz invertível \mathbf{P} cujas n colunas são formadas pelos autovetores associados a \mathbf{A} , tal que a transformação de similaridade $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ resulta em uma matriz diagonal, cujos elementos da diagonal principal são precisamente os autovalores de \mathbf{A} [91, 92].

B.2 Propriedades

Esta seção apresenta propriedades de matrizes simétricas relevantes ao contexto desta tese, com ênfase na construção do referencial *dqe* e na interpretação espectral da matriz de derivadas das indutâncias no processo de produção de torque.

Propriedade B.1 (Invariância por similaridade) *Considere uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz invertível \mathbf{T} . As matrizes \mathbf{A} e $\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}$ possuem os mesmos autovalores [91].*

Nota B.1 *A propriedade descrita decorre diretamente da invariância do polinômio característico sob as transformações que relacionam \mathbf{A} e $\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}$, denominadas transformações de similaridade. Tal resultado é particularmente relevante no presente contexto, pois assegura que os autovalores da matriz de derivadas das indutâncias permanecem inalterados quando se realiza uma mudança de sistema de coordenadas, desde que a transformação envolvida seja linear e invertível.*

Propriedade B.2 (Ortogonalidade de autovetores) *Uma matriz \mathbf{A} é dita simétrica se $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$, i.e., seus elementos são distribuídos simetricamente em relação à diagonal principal. Este tipo de matriz possui todos os autovalores reais e todos os autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais [91].*

Nota B.2 *Essa propriedade permite definir direções de corrente ortogonais associadas a modos independentes de produção de torque no referencial *dqe*. Nessa base, a forma quadrática associada ao torque torna-se quase diagonal, eliminando termos cruzados entre o eixo *d* e os demais, caracterizando seu desacoplamento em relação aos eixos *q* e *e* no domínio energético.*

Propriedade B.3 (Decomposição espectral) *Qualquer matriz real simétrica \mathbf{A} pode ser decomposta como*

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \mathbf{\Lambda} \mathbf{P}^\top,$$

em que $\mathbf{\Lambda}$ é uma matriz diagonal contendo os autovalores de \mathbf{A} e \mathbf{P} é uma matriz ortogonal cujas colunas são os autovetores correspondentes [91, 92].

Nota B.3 *Essa propriedade já foi comentada na anterior e permite representar o torque eletromagnético como uma superposição de contribuições modais independentes, cada qual associada a um autovalor da matriz considerada.*

Propriedade B.4 (Traço e determinante) *O traço e o determinante de uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfazem*

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n \sigma_i, \quad \det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^n \sigma_i,$$

em que σ_i são os autovalores de \mathbf{A} .

Nota B.4 A utilidade dessa propriedade reside na verificação da consistência algébrica entre diferentes representações matriciais de um mesmo operador linear, visto que o traço e o determinante são invariantes sob transformações de similaridade.

Propriedade B.5 (Caracterização variacional) Considere uma matriz real simétrica $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e a forma quadrática associada

$$\Psi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

Então, os extremos globais do quociente de Rayleigh

$$r(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^\top \mathbf{x}}$$

são dados por

$$\sigma_{\max} = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} [r(\mathbf{x})], \quad \sigma_{\min} = \min_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} [r(\mathbf{x})],$$

em que σ_{\max} e σ_{\min} são, respectivamente, o maior e o menor autovalor de \mathbf{A} .

Além disso, tais extremos são atingidos se, e somente se, \mathbf{x} pertence ao autoespaço associado ao autovalor correspondente [91].

Nota B.5 Essa propriedade é particularmente relevante no contexto desta tese, pois estabelece que os autovalores de uma matriz simétrica podem ser caracterizados como valores extremos da forma quadrática associada, conforme o princípio variacional de Rayleigh. Mais do que uma interpretação geométrica, trata-se de um resultado variacional que demonstra que o maior autovalor corresponde à direção que extremiza a razão de Rayleigh, i.e., a razão entre a forma quadrática e a norma quadrática do vetor considerado.

No presente contexto, quando a matriz \mathbf{A} representa a derivada angular das indutâncias, essa formulação permite interpretar a maximização do torque sob restrição de corrente como um problema de otimização quadrática com restrição de norma. A condição ótima conduz a um problema de autovalores, de modo que a direção ótima de corrente coincide com o autovetor associado ao autovalor extremo compatível com o sinal do torque requerido.

Para torque positivo, a corrente mínima é obtida na direção do autovetor associado ao maior autovalor, enquanto, para torque negativo, ao menor autovalor. Desta forma, direções correspondentes a autovalores de maior magnitude resultam em maior produção de torque por unidade de corrente ao quadrado.

As propriedades a seguir complementam os resultados anteriormente apresentados, sendo úteis para a interpretação geométrica e para considerações de natureza numérica, embora não sejam essenciais à derivação principal da transformação dqe .

Propriedade B.6 (Autovalores nulos) Se \mathbf{A} possui um autovalor nulo, então existe um vetor não nulo \mathbf{w} tal que [91, 92]

$$\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{0}.$$

Nota B.6 Autovetores associados a autovalores nulos (ou próximos de zero) correspondem a componentes que tendem a não contribuir diretamente para a produção de torque.

Propriedade B.7 (Continuidade dos autovalores) Os autovalores de uma matriz real simétrica dependem continuamente de seus elementos [91].

Nota B.7 Para matrizes reais simétricas dependentes continuamente de um parâmetro escalar, os autovalores constituem funções contínuas desse parâmetro.

B.3 Matrizes de ordem 3

Considere uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ da forma apresentada em (B.4).

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

A obtenção dos autovalores da matriz \mathbf{A} se dá por meio de (B.5), resultando no polinômio característico descrito em (B.6).

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - \sigma & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - \sigma & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \sigma \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{B.5})$$

$$\sigma^3 + p_2\sigma^2 + p_1\sigma + p_0 = 0 \quad (\text{B.6})$$

sendo $p_2 = -(a_{11} + a_{22} + a_{33})$, $p_1 = -(a_{12}^2 + a_{23}^2 + a_{13}^2 - a_{11}a_{22} - a_{11}a_{33} - a_{22}a_{33})$ e $p_0 = -(-a_{33}a_{12}^2 + 2a_{12}a_{23}a_{13} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 + a_{11}a_{22}a_{33})$.

Define-se Q e R como mostrados em (B.7) e (B.8), respectivamente.

$$Q = \frac{p_2^2 - 3p_1}{9} \quad (\text{B.7})$$

$$R = \frac{2p_2^3 - 9p_2p_1 + 27p_0}{54} \quad (\text{B.8})$$

Os três autovalores σ_1 , σ_2 e σ_3 , soluções de (B.6), podem ser obtidos por meio de (B.9) [93].

$$\sigma_k = -2\sqrt{Q} \cos \left[\frac{\theta_3 + 2(k-1)\pi}{3} \right] - \frac{p_2}{3} \quad (\text{B.9})$$

com $k = 1, 2, 3$ e $\theta_3 = \cos^{-1}(R/\sqrt{Q^3})$.

Para o cálculo do autovetor \mathbf{w}_k associado ao autovalor σ_k , pode-se utilizar (B.10) [91]. Dependendo da multiplicidade de cada autovalor, o cálculo dos demais autovetores pode tornar-se complexo e não constitui objeto desta tese, uma vez que o cálculo de um único autovetor é suficiente para o cumprimento dos objetivos propostos.

$$\mathbf{w}_k = (\mathbf{A} - \sigma_j \mathbf{I}) (\mathbf{A} - \sigma_m \mathbf{I}) (0, 0, 1)^\top \quad (\text{B.10})$$

em que $j, k, m \in \{1, 2, 3\}$, distintos dois a dois.

Apêndice C

Construção algébrica detalhada da transformação *dqe*

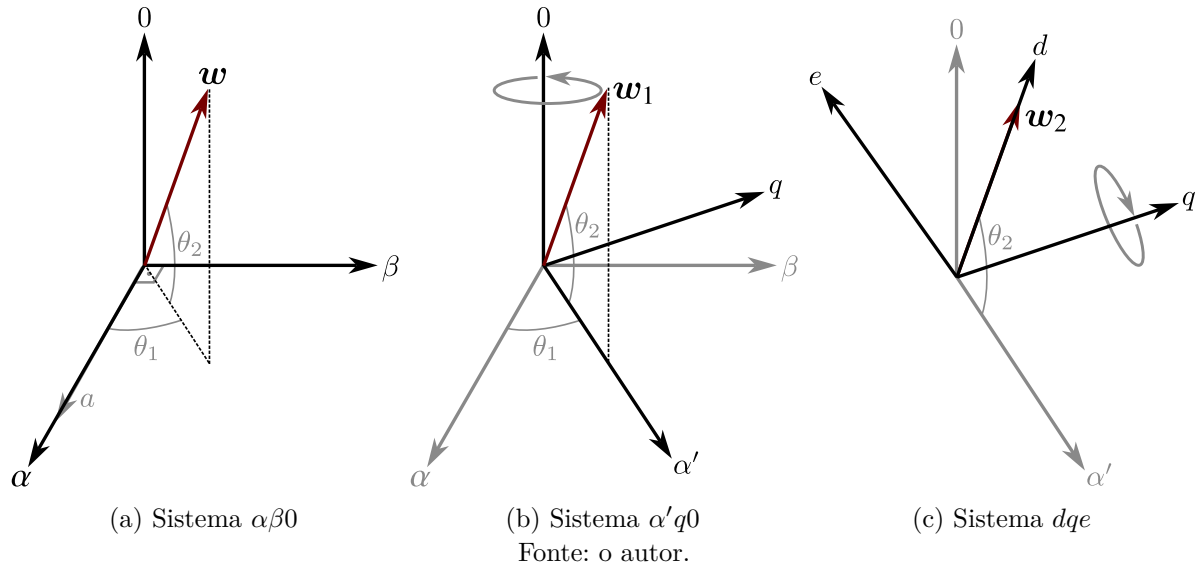
C.1 Matriz de Transformação *dqe*

A transformação *dqe* assume que as matrizes de indutâncias e de suas derivadas em relação ao ângulo do rotor são reais e simétricas, tanto no sistema de referência de fases quanto no referencial $\alpha\beta 0$, uma vez que tais matrizes decorrem das formulações de energia e coenergia magnéticas. Assim, pela Propriedade B.2, conclui-se que seus autovalores, e consequentemente os autovetores associados, são reais.

A transformação *dqe* tem como ponto de partida a matriz das derivadas das indutâncias do motor, referida ao sistema $\alpha\beta 0$. A partir de (B.9), determinam-se seus autovalores e, em seguida, o autovetor associado ao autovalor de interesse por meio de (B.10). A escolha entre o menor ou o maior autovalor depende do sentido do torque de referência. Para torque positivo, adota-se o menor autovalor; para torque negativo, o maior.

Do ponto de vista físico, conforme a Propriedade B.5, os autovalores indicam direções associadas a diferentes capacidades de produção de torque. Como será mostrado adiante, a aplicação da transformação *dqe* conduz ao desacoplamento do eixo *d* em relação aos demais; assim, ao empregar o critério adotado, o eixo *d* passa a corresponder, de forma consistente, à direção de menor capacidade de produção de torque.

De posse do autovetor associado ao autovalor de interesse da matriz de derivadas de indutâncias referida ao sistema $\alpha\beta 0$, a transformação *dqe* consiste em rotacionar o sistema de forma que o eixo α coincida com o autovetor obtido. Para tanto, realizam-se duas rotações consecutivas. Considere que $\mathbf{w}^T = (w_\alpha, w_\beta, w_0)$ é o autovetor obtido, previamente normalizado, associado ao autovalor σ . A primeira rotação é análoga àquela utilizada na transformação *dq0*, apresentada em (C.1), e tem por objetivo alinhar o eixo α com a projeção de \mathbf{w} no plano $\alpha\beta$. Pela Figura C.1a, verifica-se que $\cos\theta_1$ e $\sin\theta_1$ são obtidos por meio de (C.2) e (C.3), respectivamente, resultando na matriz \mathbf{T}_1 apresentada em (C.4).

Figura C.1 – Ilustração das etapas necessárias para obtenção do referencial dqe .


$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 0 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.1})$$

$$\cos\theta_1 = \frac{w_\alpha}{\sqrt{w_\alpha^2 + w_\beta^2}} \quad (\text{C.2})$$

$$\sin\theta_1 = \frac{w_\beta}{\sqrt{w_\alpha^2 + w_\beta^2}} \quad (\text{C.3})$$

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} \frac{w_\alpha}{\sqrt{w_\alpha^2 + w_\beta^2}} & \frac{w_\beta}{\sqrt{w_\alpha^2 + w_\beta^2}} & 0 \\ -\frac{w_\beta}{\sqrt{w_\alpha^2 + w_\beta^2}} & \frac{w_\alpha}{\sqrt{w_\alpha^2 + w_\beta^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.4})$$

Após a primeira rotação, o sistema $\alpha\beta 0$ transforma-se em $\alpha'q 0$, conforme a Figura C.1b. Nesse sistema, o autovetor \mathbf{w} passa a ser representado por $\mathbf{w}_1^\top = (\sqrt{w_\alpha^2 + w_\beta^2}, 0, w_0)$. A segunda rotação, \mathbf{T}_2 , ocorre em torno do eixo q e tem a forma mostrada por (C.5), cuja finalidade é alinhar o eixo α' com \mathbf{w}_1 . Por meio da Figura C.1b, verifica-se que os valores de $\cos\theta_2$ e $\sin\theta_2$ são obtidos por meio de (C.6) e (C.7), respectivamente, conduzindo à forma final de \mathbf{T}_2 , mostrada em (C.8).

$$\mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & 0 & \sin\theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_2 & 0 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \quad (\text{C.5})$$

$$\cos \theta_2 = \frac{\sqrt{w_\alpha^2 + w_\beta^2}}{\sqrt{w_\alpha^2 + w_\beta^2 + w_0^2}} \quad (\text{C.6})$$

$$\sin \theta_2 = \frac{w_0}{\sqrt{w_\alpha^2 + w_\beta^2 + w_0^2}} \quad (\text{C.7})$$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{w_\alpha^2 + w_\beta^2} & 0 & w_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -w_0 & 0 & \sqrt{w_\alpha^2 + w_\beta^2} \end{pmatrix} \quad (\text{C.8})$$

lembrando que $\sqrt{w_\alpha^2 + w_\beta^2 + w_0^2} = 1$.

Após a segunda rotação, o sistema $\alpha'q0$ passa a coincidir com o sistema dqe , conforme Figura C.1c, no qual o autovetor \mathbf{w} é representado por $\mathbf{w}_2^\top = (1, 0, 0)$.

A transformação dqe , denotada por \mathbf{T}_{dqe} , equivale ao produto de \mathbf{T}_2 e \mathbf{T}_1 e pode ser obtida por meio de (C.9).

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{dqe} = \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1 &= \begin{pmatrix} \sqrt{w_\alpha^2 + w_\beta^2} & 0 & w_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -w_0 & 0 & \sqrt{w_\alpha^2 + w_\beta^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{w_\alpha}{\sqrt{w_\alpha^2 + w_\beta^2}} & \frac{w_\beta}{\sqrt{w_\alpha^2 + w_\beta^2}} & 0 \\ -\frac{w_\beta}{\sqrt{w_\alpha^2 + w_\beta^2}} & \frac{w_\alpha}{\sqrt{w_\alpha^2 + w_\beta^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} w_\alpha & w_\beta & w_0 \\ -\frac{w_\beta}{\sqrt{w_\alpha^2 + w_\beta^2}} & \frac{w_\alpha}{\sqrt{w_\alpha^2 + w_\beta^2}} & 0 \\ -\frac{w_\alpha w_0}{\sqrt{w_\alpha^2 + w_\beta^2}} & -\frac{w_\beta w_0}{\sqrt{w_\alpha^2 + w_\beta^2}} & \sqrt{w_\alpha^2 + w_\beta^2} \end{pmatrix} \quad (\text{C.9}) \end{aligned}$$

Agora, uma variável \mathbf{x} , referida ao sistema $\alpha\beta 0$, pode ser transformada para o sistema dqe por meio de (C.10).

$$\mathbf{x}_{dqe} = \mathbf{T}_{dqe} \mathbf{x}_{\alpha\beta 0} \quad (\text{C.10})$$

A transformação dqe é invertível, de forma que, para referir uma variável \mathbf{x} de volta ao sistema $\alpha\beta 0$, basta utilizar (C.11).

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta 0} = \mathbf{T}_{dqe}^{-1} \mathbf{x}_{dqe} \quad (\text{C.11})$$

Vale ressaltar que, assim como nas transformações de Clarke e Park invariantes na potência, a inversa da transformação dqe é igual à sua transposta. Isso ocorre porque \mathbf{T}_1 e \mathbf{T}_2 são matrizes de rotação e, portanto, são ortogonais.

Como $\mathbf{T}_{dqe} = \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1$, tem-se

$$\mathbf{T}_{dqe}^{-1} = (\mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1)^{-1} = \mathbf{T}_1^{-1} \mathbf{T}_2^{-1}.$$

Como \mathbf{T}_1 e \mathbf{T}_2 são matrizes de rotação, vale $\mathbf{T}_1^{-1} = \mathbf{T}_1^\top$ e $\mathbf{T}_2^{-1} = \mathbf{T}_2^\top$. Substituindo,

$$\mathbf{T}_{dqe}^{-1} = \mathbf{T}_1^\top \mathbf{T}_2^\top = (\mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1)^\top = \mathbf{T}_{dqe}^\top.$$

C.2 Equações da Máquina no Sistema dqe

Esta seção tem por objetivo obter, por meio da aplicação da transformação dqe , as expressões equivalentes para tensões, fluxos concatenados, potência e torque no sistema dqe . Para tanto, o ponto de partida são as equações (A.10), (A.13), (A.17), (A.20) e (A.23), todas referidas ao sistema $\alpha\beta 0$.

Inicialmente, a Eq. (A.10), que trata da tensão em função do fluxo concatenado referido ao sistema $\alpha\beta 0$, pode ser reescrita no referencial dqe como (C.12).

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\alpha\beta 0} &= \mathbf{r}_{\alpha\beta 0} \mathbf{i}_{\alpha\beta 0} + \frac{d}{dt} \boldsymbol{\psi}_{\alpha\beta 0} \\ \mathbf{T}_{dqe}^{-1} \mathbf{v}_{dqe} &= \mathbf{r}_{\alpha\beta 0} \mathbf{T}_{dqe}^{-1} \mathbf{i}_{dqe} + \frac{d}{dt} \mathbf{T}_{dqe}^{-1} \boldsymbol{\psi}_{dqe} \\ \mathbf{T}_{dqe}^{-1} \mathbf{v}_{dqe} &= \mathbf{r}_{\alpha\beta 0} \mathbf{T}_{dqe}^{-1} \mathbf{i}_{dqe} + \left(\frac{d}{dt} \mathbf{T}_{dqe}^{-1} \right) \boldsymbol{\psi}_{dqe} + \mathbf{T}_{dqe}^{-1} \frac{d}{dt} \boldsymbol{\psi}_{dqe} \\ \mathbf{T}_{dqe} \mathbf{T}_{dqe}^{-1} \mathbf{v}_{dqe} &= \mathbf{T}_{dqe} \mathbf{r}_{\alpha\beta 0} \mathbf{T}_{dqe}^{-1} \mathbf{i}_{dqe} + \mathbf{T}_{dqe} \left(\frac{d}{dt} \mathbf{T}_{dqe}^{-1} \right) \boldsymbol{\psi}_{dqe} + \mathbf{T}_{dqe} \mathbf{T}_{dqe}^{-1} \frac{d}{dt} \boldsymbol{\psi}_{dqe} \\ \mathbf{v}_{dqe} &= \mathbf{r}_{dqe} \mathbf{i}_{dqe} - \mathbf{J}_{dqe} \boldsymbol{\psi}_{dqe} + \frac{d}{dt} \boldsymbol{\psi}_{dqe} \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

onde $\mathbf{r}_{dqe} = \mathbf{T}_{dqe} \mathbf{r}_{\alpha\beta 0} \mathbf{T}_{dqe}^{-1}$ e

$$\mathbf{J}_{dqe} = \left(\frac{d}{dt} \mathbf{T}_{dqe} \right) \mathbf{T}_{dqe}^{-1}$$

e, novamente, como $\mathbf{T}_{dqe}^{-1} \mathbf{T}_{dqe} = \mathbf{I}$, resulta

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{I}}{dt} &= \frac{d}{dt} (\mathbf{T}_{dqe} \mathbf{T}_{dqe}^{-1}) = \left(\frac{d\mathbf{T}_{dqe}}{dt} \right) \mathbf{T}_{dqe}^{-1} + \mathbf{T}_{dqe} \left(\frac{d\mathbf{T}_{dqe}^{-1}}{dt} \right) = \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_{dqe} \left(\frac{d\mathbf{T}_{dqe}^{-1}}{dt} \right) &= - \left(\frac{d\mathbf{T}_{dqe}}{dt} \right) \mathbf{T}_{dqe}^{-1} = -\mathbf{J}_{dqe} \end{aligned}$$

Por sua vez, o fluxo concatenado pelos enrolamentos, cuja expressão original em $\alpha\beta 0$ é dada por (A.13), após a aplicação da transformação dqe , mantém sua estrutura

original e é obtido por meio de (C.13). Vale ressaltar que a matriz de indutâncias é transformada por similaridade.

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\psi}_{\alpha\beta 0} &= \mathbf{L}_{\alpha\beta 0} \mathbf{i}_{\alpha\beta 0} \\
 \mathbf{T}_{dqe}^{-1} \boldsymbol{\psi}_{dqe} &= \mathbf{L}_{\alpha\beta 0} \mathbf{T}_{dqe}^{-1} \mathbf{i}_{dqe} \\
 \mathbf{T}_{dqe} \mathbf{T}_{dqe}^{-1} \boldsymbol{\psi}_{dqe} &= \mathbf{T}_{dqe} \mathbf{L}_{\alpha\beta 0} \mathbf{T}_{dqe}^{-1} \mathbf{i}_{dqe} \\
 \boldsymbol{\psi}_{dqe} &= \mathbf{L}_{dqe} \mathbf{i}_{dqe}
 \end{aligned} \tag{C.13}$$

A expressão da tensão em função das indutâncias, dada pela Eq. (A.17), também pode ser escrita no referencial dqe e possui a forma apresentada em (C.14).

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_{\alpha\beta 0} &= \mathbf{r}_{\alpha\beta 0} \mathbf{i}_{\alpha\beta 0} + \omega_r \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{\alpha\beta 0} \mathbf{i}_{\alpha\beta 0} + \mathbf{L}_{\alpha\beta 0}^{\text{inc}} \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{\alpha\beta 0} \\
 \mathbf{T}_{dqe}^{-1} \mathbf{v}_{dqe} &= \mathbf{r}_{\alpha\beta 0} \mathbf{T}_{dqe}^{-1} \mathbf{i}_{dqe} + \omega_r \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{\alpha\beta 0} \mathbf{T}_{dqe}^{-1} \mathbf{i}_{dqe} + \mathbf{L}_{\alpha\beta 0}^{\text{inc}} \frac{d}{dt} (\mathbf{T}_{dqe}^{-1} \mathbf{i}_{dqe}) \\
 \mathbf{T}_{dqe}^{-1} \mathbf{v}_{dqe} &= \mathbf{r}_{\alpha\beta 0} \mathbf{T}_{dqe}^{-1} \mathbf{i}_{dqe} + \omega_r \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{\alpha\beta 0} \mathbf{T}_{dqe}^{-1} \mathbf{i}_{dqe} + \mathbf{L}_{\alpha\beta 0}^{\text{inc}} \frac{d\mathbf{T}_{dqe}^{-1}}{dt} \mathbf{i}_{dqe} + \\
 &\quad + \mathbf{L}_{\alpha\beta 0}^{\text{inc}} \mathbf{T}_{dqe}^{-1} \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{dqe} \\
 \mathbf{T}_{dqe} \mathbf{T}_{dqe}^{-1} \mathbf{v}_{dqe} &= \mathbf{T}_{dqe} \mathbf{r}_{\alpha\beta 0} \mathbf{T}_{dqe}^{-1} \mathbf{i}_{dqe} + \omega_r \mathbf{T}_{dqe} \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{\alpha\beta 0} \mathbf{T}_{dqe}^{-1} \mathbf{i}_{dqe} + \\
 &\quad + \mathbf{T}_{dqe} \mathbf{L}_{\alpha\beta 0}^{\text{inc}} (-\mathbf{T}_{dqe}^{-1} \mathbf{J}_{dqe}) \mathbf{i}_{dqe} + \mathbf{T}_{dqe} \mathbf{L}_{\alpha\beta 0}^{\text{inc}} \mathbf{T}_{dqe}^{-1} \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{dqe} \\
 \mathbf{v}_{dqe} &= \mathbf{r}_{dqe} \mathbf{i}_{dqe} + \left[\omega_r \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{dqe} - \mathbf{L}_{dqe} \mathbf{J}_{dqe} \right] \mathbf{i}_{dqe} + \mathbf{L}_{dqe}^{\text{inc}} \frac{d}{dt} \mathbf{i}_{dqe}
 \end{aligned} \tag{C.14}$$

onde

$$\left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{dqe} = \mathbf{T}_{dqe} \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{\alpha\beta 0} \mathbf{T}_{dqe}^{-1} = \begin{pmatrix} L'_d & M'_{dq} & M'_{ed} \\ M'_{dq} & L'_q & M'_{qe} \\ M'_{ed} & M'_{qe} & L'_e \end{pmatrix}$$

Na forma como foi definida neste trabalho, a transformação dqe também é invariante à potência. A expressão para o cálculo da potência elétrica desenvolvida pela máquina em dqe é apresentada em (C.15).

$$\begin{aligned}
 P_e &= \mathbf{v}_{\alpha\beta 0}^\top \mathbf{i}_{\alpha\beta 0} = (\mathbf{T}_{dqe}^{-1} \mathbf{v}_{dqe})^\top \mathbf{T}_{dqe}^{-1} \mathbf{i}_{dqe} \\
 P_e &= \mathbf{v}_{dqe}^\top \mathbf{T}_{dqe}^{-T} \mathbf{T}_{dqe}^{-1} \mathbf{i}_{dqe} = \mathbf{v}_{dqe}^\top \mathbf{i}_{dqe} \\
 P_e &= v_d i_d + v_q i_q + v_e i_e
 \end{aligned} \tag{C.15}$$

Finalmente, a expressão para o cálculo do torque eletromagnético mantém sua estrutura quadrática, como em (C.16), com a matriz de derivadas das indutâncias transformada por similaridade.

$$\begin{aligned}
 T_e &= \frac{1}{2} \mathbf{i}_{\alpha\beta 0}^\top \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{\alpha\beta 0} \mathbf{i}_{\alpha\beta 0} \\
 T_e &= \frac{1}{2} (\mathbf{T}_{dqe}^{-1} \mathbf{i}_{dqe})^\top \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{\alpha\beta 0} (\mathbf{T}_{dqe}^{-1} \mathbf{i}_{dqe}) \\
 T_e &= \frac{1}{2} \mathbf{i}_{dqe}^\top \mathbf{T}_{dqe} \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{\alpha\beta 0} \mathbf{T}_{dqe}^{-1} \mathbf{i}_{dqe} \\
 T_e &= \frac{1}{2} \mathbf{i}_{dqe}^\top \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{dqe} \mathbf{i}_{dqe} \tag{C.16}
 \end{aligned}$$

C.3 Desacoplamento dos Eixos na Produção do Torque Eletromagnético

Após a aplicação da transformação dqe , como mencionado, o autovetor \mathbf{w} passa a ser $\mathbf{w}_2^\top = (1, 0, 0)$. Em virtude da invariância espectral sob transformações de similaridade, conforme Propriedade B.1, a matriz $(\partial \mathbf{L}_{abc} / \partial \theta_r)_{dqe}$ preserva a relação de autovalor, de forma que seus elementos assumem a forma apresentada em (C.17).

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{dqe} \mathbf{w}_2 &= \sigma \mathbf{w}_2 \quad \therefore \quad \left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{dqe} (1, 0, 0)^\top = (\sigma, 0, 0)^\top \\
 \begin{pmatrix} L'_d & M'_{dq} & M'_{ed} \\ M'_{dq} & L'_q & M'_{qe} \\ M'_{ed} & M'_{qe} & L'_e \end{pmatrix} (1, 0, 0)^\top &= (L'_d, M'_{dq}, M'_{ed})^\top = (\sigma, 0, 0)^\top
 \end{aligned}$$

assim

$$\left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{dqe} = \begin{pmatrix} L'_d & 0 & 0 \\ 0 & L'_q & M'_{qe} \\ 0 & M'_{qe} & L'_e \end{pmatrix} \tag{C.17}$$

com $L'_d = \sigma$.

Logo, com o que foi exposto, fica claro que, no que concerne à produção de torque eletromagnético no sistema dqe , o eixo d é desacoplado dos eixos q e e , o que simplifica a obtenção das correntes ótimas de referência no controle MTPA da SRM.

Além disso, com a demonstração de que $L'_d = \sigma$, prova-se que a escolha do autovalor σ não pode ser arbitrária e deve seguir a condição imposta, garantindo que o eixo d possua a menor capacidade de produção de torque.

C.4 Autovalores e Autovetores no Sistema dqe

Para a solução do problema MTPA, utilizam-se os autovalores e autovetores da matriz $(\partial \mathbf{L}_{abc}/\partial \theta_r)_{dqe}$. Dessa forma, a presente seção tem por objetivo apresentar formulações para o seu cálculo.

A equação característica para o cálculo dos autovalores de $(\partial \mathbf{L}_{abc}/\partial \theta_r)_{dqe}$ é dada por (C.18).

$$(L'_d - \sigma) [\sigma^2 - (L'_q + L'_e)\sigma + L'_q L'_e - M'^2_{qe}] = 0 \quad (\text{C.18})$$

Logo, os autovalores de $(\partial \mathbf{L}_{abc}/\partial \theta_r)_{dqe}$ são dados por (C.19).

$$\begin{cases} \sigma_1 = L'_d \\ \sigma_{2,3} = \frac{L'_q + L'_e \pm \sqrt{(L'_q - L'_e)^2 + 4M'^2_{qe}}}{2} \end{cases} \quad (\text{C.19})$$

O autovetor associado a σ_1 corresponde a $\mathbf{w}_{\sigma_1}^\top = (1, 0, 0)$. Os autovetores associados a σ_2 e σ_3 , \mathbf{w}_{σ_2} e \mathbf{w}_{σ_3} , podem ser obtidos utilizando (C.20) e (C.22), respectivamente.

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{\sigma_2} &= \left[\left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{dqe} - \sigma_1 \mathbf{I} \right] \left[\left(\frac{\partial \mathbf{L}_{abc}}{\partial \theta_r} \right)_{dqe} - \sigma_3 \mathbf{I} \right] (0, 0, 1)^\top \\ \mathbf{w}_{\sigma_2} &= \begin{pmatrix} L'_d - L'_d & 0 & 0 \\ 0 & L'_q - L'_d & M'_{qe} \\ 0 & M'_{qe} & L'_e - L'_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L'_d - \sigma_3 & 0 & 0 \\ 0 & L'_q - \sigma_3 & M'_{qe} \\ 0 & M'_{qe} & L'_e - \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{w}_{\sigma_2} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & L'_q - L'_d & M'_{qe} \\ 0 & M'_{qe} & L'_e - L'_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ M'_{qe} \\ L'_e - \sigma_3 \end{pmatrix} \\ \mathbf{w}_{\sigma_2} &= \begin{pmatrix} 0 \\ (L'_q - L'_d) M'_{qe} + M'_{qe} (L'_e - \sigma_3) \\ M'^2_{qe} + (L'_e - L'_d) (L'_e - \sigma_3) \end{pmatrix} \\ \mathbf{w}_{\sigma_2} &= \begin{pmatrix} 0 \\ (L'_q - L'_d + L'_e - \sigma_3) M'_{qe} \\ M'^2_{qe} + L'^2_e - \sigma_3 L'_e - L'_e L'_d + \sigma_3 L'_d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e, pela Propriedade B.4, $\sigma_2 + \sigma_3 = L'_q + L'_e$ e $\sigma_2 \sigma_3 = L'_q L'_e - M'^2_{qe}$, vem

$$\mathbf{w}_{\sigma_2}^\top = \left(0, M'_{qe} (\sigma_2 - L'_d), (\sigma_2 - L'_d) (\sigma_2 - L'_q) \right) \quad (\text{C.20})$$

Como apenas a direção do autovetor é relevante, e não sua norma, o termo $\sigma_2 - L'_d$ pode ser fatorado e desprezado, sendo \mathbf{w}_{σ_2} dado por (C.21), sem perda de generalidade. De forma análoga, o autovetor \mathbf{w}_{σ_3} pode ser obtido por meio de (C.22).

$$\mathbf{w}_{\sigma_2}^\top = (0, M'_{qe}, \sigma_2 - L'_q) \quad (\text{C.21})$$

$$\mathbf{w}_{\sigma_3}^\top = (0, M'_{qe}, \sigma_3 - L'_q) \quad (\text{C.22})$$

Apêndice D

Bancada Experimental

D.1 Máquinas elétricas

A bancada experimental utilizada neste trabalho, apresentada na Figura D.1, foi concebida para validar os métodos de controle propostos. O arranjo eletromecânico principal é composto por uma máquina de relutância variável (SRM), que representa o objeto de estudo, e por uma PMSM operando como gerador e alimentando uma carga resistiva variável, mecanicamente acoplada ao eixo da SRM, responsável por impor diferentes perfis de torque durante os ensaios.

O acoplamento entre as máquinas foi realizado por meio de conjunto mecânico rígido, com alinhamento cuidadoso dos eixos para minimizar vibrações, esforços radiais adicionais e efeitos de desbalanceamento que pudessem interferir nas medições.

As principais características nominais da SRM e PMSM empregadas são apresentadas, respectivamente, nas Tabelas D.1 e D.2. A Figura D.2 apresenta o estator e rotor da SRM empregada nos ensaios.

Além disso, através de medições, determinou-se o valor do coeficiente de atrito viscoso do sistema como um todo, no valor de $6,82 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}/\text{rad}$, e o momento de inércia no valor de $3,54 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Todos os parâmetros foram utilizados tanto na etapa de parametrização dos controladores quanto na definição das condições operacionais de comparação entre os métodos avaliados.

Tabela D.1 – Parâmetros da SRM

Parâmetro	Valor	Unidade
Número de fases	3	-
Número de polos do estator	6	-
Número de polos do rotor	4	-
Resistência de fase	3	Ω
Tensão nominal	220	V
Potência nominal	370	W
Corrente nominal	3.8	A
Velocidade nominal	1800	rpm

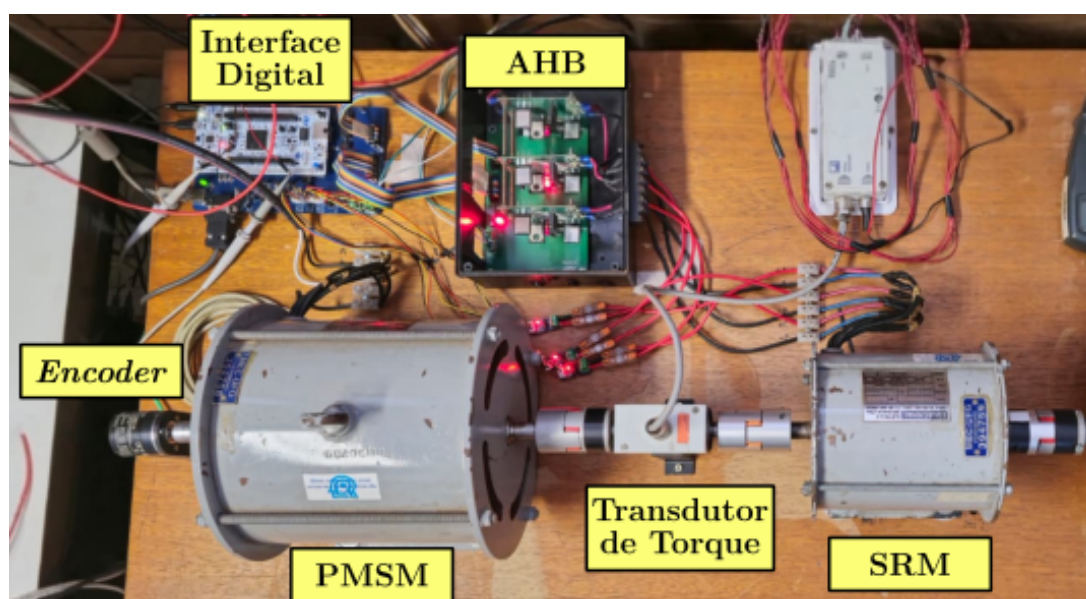
Fonte: o autor.

Tabela D.2 – Parâmetros da IPMSM

Parâmetro	Valor	Unidade
Número de fases	3	-
Número de ranhuras	24	-
Número de polos	4	-
Tensão nominal	220	V
Potência nominal	750	W
Corrente nominal	4.2	A
Velocidade nominal	1800	rpm

Fonte: o autor.

Figura D.1 – Bancada experimental.



Fonte: o autor.

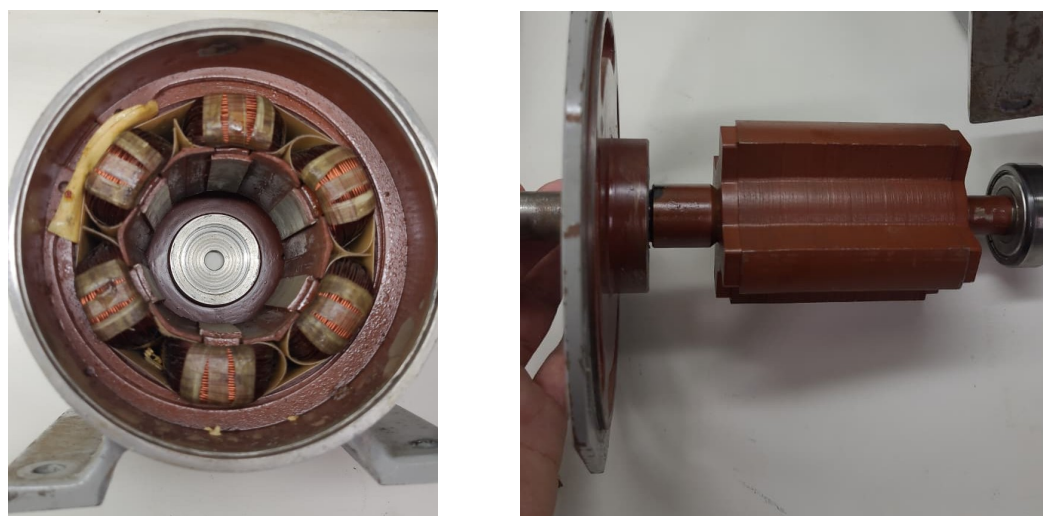
D.2 Conversor de potência

O estágio de potência do acionamento foi implementado por meio de topologia AHB, baseada em comutação independente por fase, projetado especificamente para a bancada experimental, mostrado na Figura D.3. Cada fase da máquina é alimentada por um braço composto por duas chaves semicondutoras MOSFET (IRL3705N) e dois diodos rápidos (STTH6012W), responsáveis pela circulação da corrente durante os intervalos de desmagnetização.

O acionamento das chaves é realizado por meio de um driver de meia-ponte IRS21064, que recebe os sinais de controle provenientes da interface digital. O circuito utiliza um arranjo de *bootstrap* para alimentar o estágio de acionamento das chaves.

A alimentação do conversor AHB é realizada por meio de um barramento CC obtido a partir de um inversor trifásico comercial Semikron SEMITOP Stack, modelo SKS 22F B6U+B6CI+E1CIF 13 V12. Esse equipamento possui um retificador trifásico

Figura D.2 – Estator e rotor da SRM.

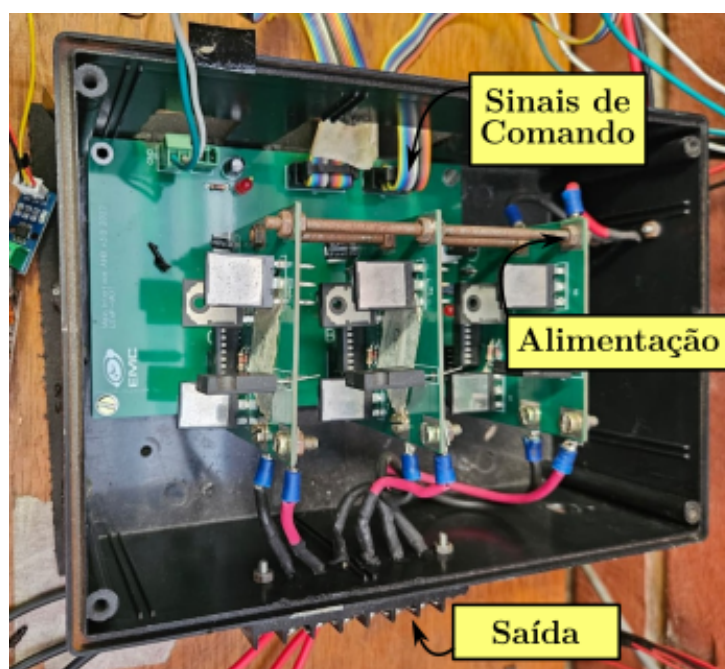


(a) Estator da SRM

(b) Rotor da SRM

Fonte: o autor.

Figura D.3 – Conversor AHB.



Fonte: o autor.

integrado e um banco de capacitores de filtragem, formando um barramento CC interno acessível por terminais externos, empregado exclusivamente como fonte de alimentação para o conversor AHB, não sendo seu estágio inversor utilizado.

A entrada do inversor Semikron é alimentada por meio de um autotransformador variável trifásico (VARIAC), permitindo ajustar a tensão aplicada ao retificador e, conseqüentemente, regular a tensão do barramento CC. Dessa forma, a tensão do barramento foi ajustada para aproximadamente 220 V, valor correspondente à tensão nominal da SRM

utilizada nos ensaios experimentais.

D.3 Instrumentação e sensores

A instrumentação da bancada foi definida de forma a garantir a observabilidade das grandezas elétricas e mecânicas relevantes à avaliação das métricas de desempenho. As correntes de fase foram medidas por meio de sensores dedicados, apresentados na Figura D.4, um para cada fase. A posição do rotor foi obtida por meio de um *encoder* incremental de alta resolução, podendo ser visualizado na Figura D.1.

Além das variáveis de fase, foram monitoradas grandezas auxiliares, como tensão do barramento CC, por meio de multímetro, e sinais de referência internos do controlador, por meio de conversores digitais-analógicos conectados a um osciloscópio ou pela interface serial (porta COM) com o computador, permitindo análise completa do comportamento do acionamento em regime permanente e transitório.

O *encoder* incremental utilizado é do modelo E6B2-CWZ1X, cujas principais características são apresentadas a seguir:

- **Tipo:** *encoder* incremental;
- **Resolução:** 2000 pulsos por revolução (PPR);
- **Sinais de saída:** canais A, B e Z (sinais em quadratura com índice de referência);
- **Tensão de alimentação:** 5 V.

Os sensores de corrente são de efeito Hall baseados no circuito integrado ACS712, com faixa nominal de ± 20 A. O dispositivo fornece um sinal analógico proporcional à corrente medida, com tensão de saída centrada em metade da tensão de alimentação. Assim, para uma alimentação de 5 V, a tensão de saída em ausência de corrente é aproximadamente 2,5 V, enquanto variações de corrente produzem variações positivas ou negativas em torno desse valor. Para compatibilização do nível do sinal de saída com a entrada do sistema digital, utilizou-se um *buffer* juntamente com um divisor de tensão.

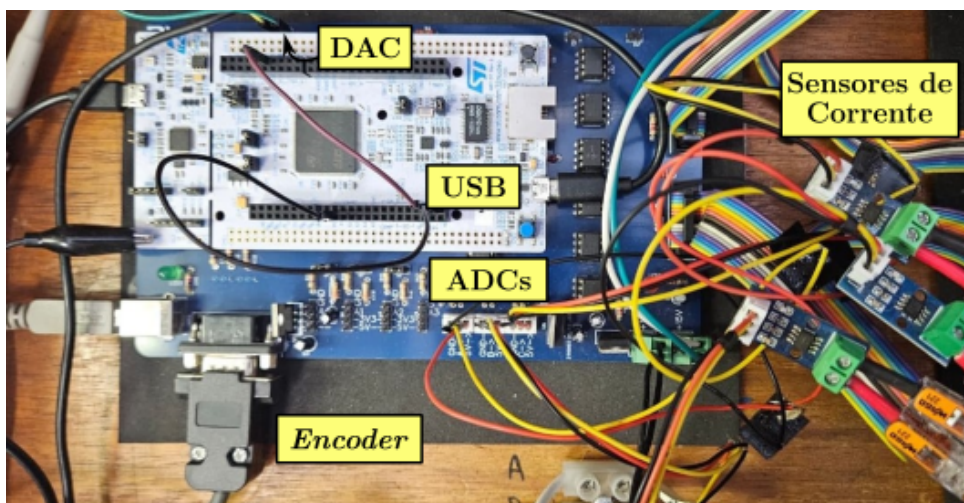
D.4 Sistema de controle digital

O sistema de controle digital foi implementado utilizando como base uma placa de desenvolvimento STM32F767ZI, conforme Figura D.4, operando com frequência de *clock* de 216 MHz e utilizando os seguintes periféricos:

- **TIM2:** temporizador configurado para gerar uma interrupção com frequência de 10 kHz, utilizada para executar a rotina de controle;

- **TIM4**: temporizador configurado no modo *encoder*, utilizado para a leitura da posição do rotor;
- **ADC1**: conversor analógico-digital utilizado para a aquisição da corrente da fase *a*. O tempo de amostragem foi configurado em 28 ciclos do *clock* do ADC (18 MHz), com resolução de 12 *bits*;
- **ADC2**: conversor analógico-digital configurado de forma análoga ao ADC1, utilizado para a aquisição da corrente da fase *b*;
- **ADC3**: conversor analógico-digital configurado de forma análoga aos anteriores, utilizado para a aquisição da corrente da fase *c*;
- **DAC**: conversor digital-analógico empregado para a visualização, em tempo real, de variáveis internas do controle por meio de um osciloscópio;
- **GPIO**: pinos de entrada e saída de propósito geral utilizados para comandar as chaves do conversor AHB. Esses pinos correspondem aos canais do temporizador TIM1, o qual possui capacidade de geração de sinais PWM, permitindo futura expansão do sistema de controle para estratégias baseadas em modulação PWM além do controle por histerese;
- **USB_OTG_FS**: controlador USB *On-The-Go* de velocidade total (*Full Speed*), utilizado no modo *device*, permitindo a transmissão de dados da placa para o computador via porta serial virtual em tempo real.

Figura D.4 – Interface digital.



Fonte: o autor.

A inicialização do sistema engloba rotinas necessárias para a operação do controle, incluindo a calibração dos sensores de corrente, com o intuito de determinar o valor de

offset das medições, e o alinhamento do rotor com a fase *a* da SRM. A calibração dos sensores é necessária para compensação das medições de corrente nos ADCs. O alinhamento é necessário para garantir uma referência inicial conhecida da posição do rotor.

Após a inicialização, o controle passa a ser executado periodicamente por meio de interrupções geradas pelo temporizador TIM2, com frequência de 10 kHz. Em cada ciclo de controle são executadas as seguintes etapas:

- leitura da posição do rotor por meio do *encoder* conectado ao temporizador TIM4 configurado no modo *encoder*;
- cálculo da velocidade mecânica do rotor a partir da variação da posição medida;
- aquisição das correntes de fase por meio dos ADCs e conversão das leituras em valores de corrente utilizando os ganhos e *offsets* previamente calibrados, sendo esse valor filtrado por meio de um filtro passa-baixa discreto de primeira ordem;
- cálculo do torque de referência a partir do erro de velocidade utilizando um controlador proporcional-integral (PI);
- execução do algoritmo de controle correspondente à estratégia considerada, responsável por determinar as correntes de referência para as fases da máquina;
- controle das correntes por meio de um controlador por histerese, utilizando banda de $\pm 0,2A$, responsável por comandar o acionamento das chaves do conversor AHB.

A velocidade mecânica do rotor é estimada a partir da diferença entre amostras consecutivas da posição fornecida pelo *encoder*. A variação de posição é normalizada pelo número de contagens por revolução e dividida pelo período de amostragem do controle. Para reduzir ruídos associados à medição, a velocidade estimada é filtrada por meio de um filtro passa-baixa discreto de primeira ordem.

Os cálculos do algoritmo de controle são realizados utilizando aritmética em ponto flutuante de precisão simples (*float_32*), explorando a unidade de ponto flutuante do microcontrolador. Para otimização do desempenho computacional são utilizadas funções da biblioteca CMSIS-DSP, incluindo a implementação do controlador PI empregado na malha de velocidade. Os ganhos do controlador PI foram obtidos utilizando o método de Ziegler–Nichols, sendo o ganho proporcional igual a $0,07 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{rad}/\text{s}$ e o integral igual a $0,0735 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{rad}$.

A interface digital e de potência são separadas por meio de optoacopladores. Também estão presentes disjuntores com o intuito de proteger o barramento CC e a saída da PMSM contra sobrecorrentes e curto-circuito, além de fusíveis para proteção do VARIAC.