

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
INSTITUTO DE FÍSICA

**Incerteza quântica local em transições de fase quânticas e uma  
generalização para sistemas multipartidos**

*Thiago Mureebe Carrijo*

GOIÂNIA

4 de Junho de 2018

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE  
TESES E  
DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

**1. Identificação do material bibliográfico:**     Dissertação     Tese

**2. Identificação da Tese ou Dissertação:**

Nome completo do autor: Thiago Mureebe Carrijo

Título do trabalho: Incerteza quântica local em transições de fase quântica e uma generalização para sistemas multipartidos.

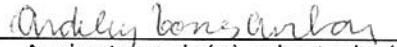
**3. Informações de acesso ao documento:**

Concorda com a liberação total do documento  SIM     NÃO<sup>1</sup>

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.

  
Assinatura do(a) autor(á)<sup>2</sup>

Ciente e de acordo:

  
Assinatura do(a) orientador(a)<sup>2</sup>

Data: 19/04/18

<sup>1</sup>Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente
- Submissão de artigo em revista científica
- Publicação como capítulo de livro
- Publicação da dissertação/tese em livro

<sup>2</sup>A assinatura deve ser escaneada.

*Thiago Mureebe Carrijo*

**“Incerteza quântica local em transições de fase quânticas e uma  
generalização para sistemas multipartidos”**

*Tese apresentada ao Instituto de Física  
da Universidade Federal de Goiás para a  
obtenção do título de doutor em física.*

ORIENTADOR: *Prof. Dr. Ardiley Torres Avelar*

COORIENTADOR: *Prof. Dr. Lucas Chibebe Céleri*

GOIÂNIA

4 de Junho de 2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Carrijo, Thiago Mureebe

Incerteza quântica local em transições de fase quânticas e uma generalização para sistemas multipartidos. [manuscrito] / Thiago Mureebe Carrijo. - 2018.

58 f.: il.

Orientador: Prof. Ardiley Torres Avelar; co-orientador Lucas Chibebe Céleri.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Goiás, , Programa de Pós-Graduação em Física, Goiânia, 2018.

Bibliografia.

Inclui siglas, símbolos, gráfico, lista de figuras.

1. correlação quântica. 2. transição de fase quântica. 3. multipartido. I. Avelar, Ardiley Torres, orient. II. Título.

CDU 530.1/145



**Universidade Federal de Goiás**  
**Instituto de Física**  
**Programa de Pós-Graduação em Física**

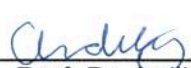



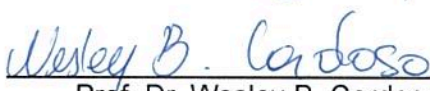
Ata Nº 35 de defesa de tese de **Thiago Mureebe Carrijo** para obtenção do título de Doutor em Física.

Aos 02 dias do mês de maio de 2018, às 14h00min, no Miniauditório do Instituto de Física da UFG, reuniu-se a Banca Examinadora designada pela Coordenadoria do Programa de Pós-Graduação em Física, composta pelo **Prof. Dr. Ardiley Torres Avelar** (orientador e presidente da Banca – IF/UFG), **Prof. Dr. Clodoaldo Valverde** (UNUCET/UEG), **Prof. Dr. Agnaldo Rosa de Almeida** (UNUCET/UEG), **Prof. Dr. Guilherme Colherinhas de Oliveira** (IF/UFG) e **Prof. Dr. Wesley Bueno Cardoso** (IF/UFG) para julgar a tese de doutorado de **Thiago Mureebe Carrijo**, intitulada: “**Incerteza quântica local em transições de fase quânticas e uma generalização para sistemas multipartidos**”. O Presidente abriu os trabalhos agradecendo a presença dos membros da Banca Examinadora e concedeu a palavra a **Thiago Mureebe Carrijo**, que expôs detalhadamente seu trabalho. Em seguida, os membros da Banca fizeram suas considerações e procederam à arguição do candidato. Concluída essa etapa, a Banca, em sessão fechada, deu prosseguimento ao julgamento do trabalho, atribuindo os seguintes conceitos:

Prof. Dr. Ardiley Torres Avelar (orientador)	<u>APROVADO</u>
Prof. Dr. Clodoaldo Valverde (UNUCET/UEG)	<u>APROVADO</u>
Prof. Dr. Agnaldo Rosa de Almeida (UNUCET/UEG)	<u>Aprovado</u>
Prof. Dr. Guilherme Colherinhas de Oliveira (IF/UFG)	<u>APROVADO</u>
Prof. Dr. Wesley Bueno Cardoso (IF/UFG)	<u>APROVADO</u>

Novamente em sessão aberta, o presidente da Banca anunciou o resultado final do julgamento, declarando o candidato **Thiago Mureebe Carrijo** APROVADO pela Banca Examinadora. Nada mais havendo a tratar, a sessão foi encerrada e lavrou-se a presente ata que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora.

Goiânia, 02 de maio de 2018.

 Prof. Dr. Ardiley T. Avelar	 Prof. Dr. Clodoaldo Valverde	 Prof. Dr. Agnaldo R. de Almeida
 Prof. Dr. Guilherme C. de Oliveira	 Prof. Dr. Wesley B. Cardoso	

# Agradecimentos

- Ao meu orientador e ao meu coorientador pelas orientações.
- À CAPES, à Universidade Federal de Goiás e ao Instituto de Física pelos recursos investidos.

*Este trabalho foi financiado pela CAPES.*

# Conteúdo

<b>Lista de figuras</b>	<b>iii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Fundamentação teórica</b>	<b>6</b>
2.1 Correlações Clássicas e Quânticas . . . . .	6
2.2 Incerteza Quântica Local . . . . .	11
2.3 Transição de Fase Quântica . . . . .	16
2.4 Modelo XY Quântico . . . . .	19
2.5 Modelo XY com Interação Tripla (XYT) . . . . .	25
2.5.1 Cálculo da região de transição de fase . . . . .	27
<b>3 Incerteza quântica local nas cadeias XY e XYT</b>	<b>29</b>
<b>4 Incerteza quântica local multipartida</b>	<b>39</b>
4.1 Particionamento . . . . .	39
4.1.1 Definições . . . . .	40
4.2 Incerteza quântica local em sistemas multipartidos . . . . .	43
<b>Bibliografia</b>	<b>51</b>

# Lista de Figuras

2.1	Representação gráfica da cadeia XY com condições de contorno cíclicas, dada pelo grafo $G(V,E)$ , e com campo magnético externo transversal e uniforme $\vec{B}$ .	21
3.1	IQL, em função de $\gamma$ e $\lambda$ , do primeiro ao quarto vizinho, para temperatura zero no modelo XY.	30
3.2	Derivada da IQL, em função de $\gamma$ e $\lambda$ , do primeiro ao quarto vizinho, para temperatura zero no modelo XY.	31
3.3	IQL, em função de $\gamma$ e $\lambda$ , do primeiro ao quarto vizinho, para temperatura finita no modelo XY.	32
3.4	PIM, em função de $\lambda$ e $\alpha$ , do primeiro ao quarto vizinho, para temperatura zero e $\gamma = 0.5$ no modelo XYT com $N = 2000$ .	33
3.5	IQL, em função de $\lambda$ e $\alpha$ , do primeiro ao quarto vizinho, para temperatura zero e $\gamma = 0.5$ no modelo XYT, para $N = 2000$ .	34
3.6	Derivada da IQL, em função de $\lambda$ e $\alpha$ , do primeiro ao quarto vizinho, para temperatura zero e $\gamma = 0$ no modelo XYT com $N = 2000$ .	35
3.7	Entropia linear, em função de $\lambda$ e $\gamma$ , do primeiro ao quarto vizinho, para temperatura zero no modelo XY.	36
3.8	Entropia linear, em função de $\lambda$ e $\alpha$ , do primeiro ao quarto vizinho, para temperatura zero e $\gamma = 0.5$ no modelo XYT com $N = 2000$ .	36
3.9	Derivada da entropia linear, do primeiro ao quarto vizinho, para temperatura zero no modelo XY.	37
3.10	Derivada da entropia linear, do primeiro ao quarto vizinho, para temperatura zero no modelo XYT com $N = 2000$ .	37
3.11	Magnetização, em relação ao primeiro vizinho, para temperatura zero no modelo XY.	38
4.1	Diferentes “fatorações” do espaço de estados $\mathbb{C}^8$ . $A$ e $B$ são dois laboratórios distintos.	40

4.2	“Sistema” 5-particionado de acordo com o particionamento $s^{(5)}$ . . . . .	41
4.3	Bipartição do particionamento $s^{(5)}$ . . . . .	42
4.4	. . . . .	43
4.5	Axioma 1. . . . .	44
4.6	Axioma 2: $\Lambda \equiv \Lambda_A \otimes \phi_B$ . . . . .	45
4.7	Axioma 3: o subsistema $S_k$ é partido em dois mas, mesmo se as partes estão quanticamente correlacionadas, o sistema não passa a possuir CQA $(n+1)$ -partida. . . . .	45
4.8	GU para o estado Werner-GHZ em função do parâmetro $\mu$ . . . . .	47

# Resumo

Neste trabalho, foi estudado como a incerteza quântica local (IQL) e a entropia linear se comportam em sistemas com transição de fase quântica. Foram investigados dois modelos de sistemas de spin  $1/2$ : XY e XY com interação tripla (XYT), ambos unidimensionais. Concluiu-se que essas medidas e suas derivadas marcam as transições de fase desses sistemas e foi dada uma justificativa para a diferença de comportamento entre a IQL e a entropia linear na região próxima da transição no modelo XY. Também foi criada uma medida de correlações quânticas multipartidas segundo um conjunto de critérios axiomáticos, a qual foi testada na família de estados quânticos Werner-GHZ, produzindo resultados em conformidade com esperado segundo o que há na literatura.

# Capítulo 1

## Introdução

Durante a investigação da origem dos fenômenos magnéticos, Heisenberg deduziu, como resultado da interação coulombiana e do princípio de exclusão de Pauli, um modelo simples de interação entre spins, chamado de modelo quântico de Heisenberg [1, 2], para explicar o ferromagnetismo. Tratado matematicamente primeiramente por Bethe [3], o qual descrevia interações quânticas de troca entre os primeiros vizinhos do sistema. Os modelos XY e Ising quântico de cadeias de spin [4] foram criados como casos particulares do hamiltoniano de Heisenberg, porém com propriedades matemáticas mais simples, de modo que pudessem ser resolvidos analiticamente, fornecendo insights para tratar modelos mais complexos e com mais dimensões.

Esses modelos, entretanto, foram analisados posteriormente, do ponto de vista termodinâmico e estatístico [5, 6] e foi verificado que eles apresentavam transições de fase quântica (TFQ) [7, 8], as quais dependem de parâmetros internos, como anisotropia e constante de acoplamento; e externos, como campos magnéticos. Fenômenos interessantes ocorrem na região desse ponto crítico, como quebra de simetria e fatorização do estado fundamental [9].

Além dessa transição, chamada transição de Ising, há outra também dependente do parâmetro de anisotropia do modelo XY [4, 10], chamada transição anisotrópica, ambas de segunda ordem. A primeira transição, que ocorre quando o campo atinge valor crítico, separa uma fase ordenada, ferromagnética, de uma desordenada, paramagnética. Já a segunda, que

localiza-se no ponto em que a cadeia é isotrópica, separa duas classes de universalidade: a de Ising e a anisotrópica [11]. Esses modelos, além de serem úteis para o entendimento de sistemas de duas ou três dimensões, também descrevem sistemas físicos reais, como os compostos unidimensionais ou quasi-unidimensionais, tais como o  $\text{Cs}_2\text{CoCl}_4$ , o  $\text{PrCl}_3$  e o  $2\text{NC}_5\text{H}_5$  [12–14].

Com o estudo do grau de emaranhamento em sistemas com TFQ, medidas de emaranhamento foram calculadas nessas cadeias de spin [38], sendo capazes de identificar as regiões críticas. Também foi estudado o comportamento de medidas de correlação clássica e do tipo discórdia [15, 16] e até mesmo não-localidade [17], ficando claro que essas medidas são ainda melhores para identificar transições do que o emaranhamento. Várias variantes das cadeias de spin também foram submetidas a análise de correlações clássicas e não clássicas, como o modelo XX com campo não uniforme [18], a cadeia de Heisenberg [19], o modelo de Heisenberg com interação Dzyaloshinskii–Moriya [20], entre outros [21–26].

Uma transição de fase de origem térmica, não quânticas, ocorre a uma determinada temperatura crítica, a qual marca uma mudança na ordem macroscópica do sistema [27]. Já as TFQ ocorrem à temperatura nula e são marcadas por valores específicos de parâmetros do sistema ou externos a ele, como a intensidade e direção de campos eletromagnéticos [28]. As TFQ foram primeiramente estudadas, de modo geral, com o objetivo de aplicar o sucesso da teoria de renormalização em transições clássicas [29] às condições em que as flutuações quânticas do sistema eram mais fortes que as térmicas [30, 31]. Muitos sistemas físicos interessantes possuem algum tipo de TFQ: sistemas bosônicos com transição de fase superfluida para isolante [32], supercondutora para isolante [33, 34], sistemas na fase Fermi-líquida [31] com transição do tipo onda de densidade de spin ou Ising-nemática [28], vidros de spin quânticos [35] que podem sofrer transição para uma fase paramagnética, entre outros [36, 37]. Nas vizinhanças de um ponto crítico, o sistema torna-se mais fortemente intracorrelacionado e seu comprimento de correlação diverge exatamente no ponto [28]. Como se suspeitava a partir desse fato, na última década foi verificado que há um grande aumento nas correlações quânticas em torno da transição de fase, tais como emaranhamento [38, 39] e discórdia quântica [40, 41], o que permitiu

usar as medidas dessas correlações como identificadores de TFQ.

Essas correlações têm origem na natureza quântica do mundo microscópico. Embora a mecânica quântica também possa ser utilizada para explicar fenômenos macroscópicos, geralmente utiliza-se teorias clássicas nesse domínio. Uma das diferenças entre a teoria clássica e a quântica é como os sistemas descritos por elas se correlacionam. Duas propriedades importantes das correlações entre sistemas clássicos são a localidade e o realismo [43, 44]. Sistemas quânticos, entretanto, podem possuir um tipo de correlação que não possui análogo clássico e não pode ser reproduzida por teorias locais e reais como, por exemplo, uma teoria local de variáveis ocultas [43, 45]. Esse resultado, inicialmente teórico, foi amplamente testado experimentalmente com sucesso [46–50]. Nem todos os estados de múltiplas partículas possuem esse tipo especial de correlação. Um exemplo desses estados são os denominados “estados emaranhados” [51, 52], especialmente quando puros [53, 54]. Entretanto, alguns estados emaranhados mistos não violam as desigualdades de Bell, ou seja, podem ser explicados pelo seu modelo clássico [52, 55–57]. Isto cria uma distinção entre o emaranhamento em geral e a violação das desigualdades de Bell, o que também diferencia os tipos de correlações existentes nesses dois fenômenos. Como é necessário emaranhamento para que haja a violação das desigualdades, mas não o contrário, estados emaranhados passaram a ser sinônimos de correlações quânticas. Rapidamente, esse tipo de estado passou a ser empregado em diversas aplicações, tais como o teletransporte quântico [58, 59], processo no qual um estado quântico é transmitido de um sistema para outro sem que haja transferência física do sistema, a correção quântica de erros [60–62], a codificação superdensa [63], em computação quântica de estados puros [64, 65] e a identificação de regiões de transição de fase quântica [38, 39].

Pela notável relevância teórica e prática das correlações quânticas, outro tipo de estado despertou o interesse da comunidade acadêmica. Foi observado que uma classe de estados separáveis (não emaranhados) também apresentava um tipo de correlação sem análogo clássico: estados com discórdia quântica [66, 67]. Um sistema possui discórdia se qualquer conjunto completo de medidas locais não seletivas altera seu estado, o que destrói parte das correlações

do sistema, sendo, por isso, um fenômeno não clássico. Logo foi observado que esse tipo de correlação poderia ser um recurso necessário à eficiência de algoritmos de computação quântica. Como exemplos, temos um protocolo de codificação e decodificação de informação quântica cuja eficiência depende da quantidade de discórdia [68], um protocolo de preparação remota de estados, cuja fidelidade depende da discórdia [69] e um algoritmo no qual se utiliza de estados mistos de baixa pureza [70, 71], como o algoritmo DQC1 [72]. Esse algoritmo estima o traço normalizado de uma operação unitária, em que há uma vantagem quântica mesmo na ausência de emaranhamento [73]. Realizações experimentais do DQC1 podem ser encontradas em [74, 75]. Inicialmente quantificada pela discórdia, outros tipos de quantificadores foram criados para medir o mesmo tipo de correlação como, por exemplo, o déficit quântico [76, 77], a perturbação induzida por medição (PIM) [78, 79], a entropia relativa de discórdia [80], a discórdia geométrica [81, 82] e a incerteza quântica local [83].

O objetivo da tese foi analisar como a IQL poderia ser usada para sinalizar TFQ e, a partir dessa medida, criar um quantificador de correlações quânticas para sistemas de múltiplas partes, generalizando a IQL. Para verificar o potencial da IQL em alcançar seu objetivo, analisei duas cadeias de spin com a presença de regiões de TFQ: os modelos unidimensionais de spin XY e XY com interação tripla, constatando a eficácia da IQL e suas derivadas em cumprir seu objetivo para esses sistemas, com potencial de aplicabilidade em outros sistemas com TFQ. Quanto à generalização da IQL, primeiramente introduzi um formalismo matemático para o conceito de “sistema multipartido”. Após, baseando-me no trabalho de Bennett et al [84], defini matematicamente o conceito de correlações quânticas assimétricas multipartidas e criei a medida multipartida baseada na IQL, fornecendo uma aplicação para uma família de estados quânticos.

O presente trabalho está estruturado da seguinte forma: o primeiro capítulo é uma introdução ao assunto da tese, o segundo contém uma fundamentação teórica básica sobre correlações, incerteza quântica local (IQL), transição de fase quântica e sobre os modelos unidimensionais de spin XY e XY com interação tripla. No terceiro capítulo, estão os resultados

dos cálculos nas cadeias de spin e, no quarto capítulo, a generalização da IQL para sistemas multipartidos. Por fim, tem-se a conclusão e a bibliografia.

# Capítulo 2

## Fundamentação teórica

### 2.1 Correlações Clássicas e Quânticas

Um sistema quântico, cujo estado é dado por um operador densidade  $\rho$ , pode ser constituído de um único ou de diversos subsistemas. Neste último caso, dizemos que o sistema é multipartido. É de se esperar que os diversos componentes do sistema global possam interagir entre si ou que operações locais e comunicação clássica (OLCC) possam ser realizadas nos subsistemas, correlacionando estatisticamente seus estados, de forma que o conhecimento de uma dessas partes fornece alguma informação a respeito das outras. Em teoria de informação, a quantidade utilizada para quantificar essas correlações é a informação mútua. Antes, porém, de revelar sua definição matemática, é conveniente introduzir outra quantidade: a entropia de Shannon. Seja  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  um espaço de probabilidade com  $\Omega$  sendo um espaço amostral,  $\mathcal{F}$  uma  $\sigma$ -álgebra e  $P$  uma função de probabilidade. Considere que  $\Omega$  possui cardinalidade finita ( $|\Omega| = n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ) e seja  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$  uma variável aleatória com  $P_X \equiv P \circ X^{-1}$  sendo sua função de probabilidade associada. A entropia de Shannon de  $X$  é então definida [85]:

$$H(X) \equiv - \sum_{\omega \in \Omega} P_X(\omega) \ln(P_X(\omega)). \quad (2.1)$$

Operacionalmente, essa medida captura a taxa ótima com que se é possível comprimir, de maneira confiável, os dados de uma fonte que emite elementos da variável aleatória  $X$ , por meio da distribuição  $p_x$ , o que está rigorosamente estabelecido no teorema da codificação

da fonte [85]. Por esse motivo, a entropia é interpretada como quantidade de informação de uma fonte. Se, porém, considerarmos duas variáveis aleatórias,  $X$  e  $Y$ , a quantidade de informação desse conjunto é dada pela entropia conjunta  $H(X, Y)$  e o quanto essas variáveis estão correlacionadas é dada pela já citada informação mútua:

$$H(X : Y) \equiv H(X) + H(Y) - H(X, Y). \quad (2.2)$$

Ela é igual à entropia das partes se  $X$  depende deterministicamente de  $Y$  e nula se são independentes. A interpretação da informação mútua como medida de correlações totais vem do fato de que ela também pode ser escrita como a entropia relativa, uma medida de divergência [86], entre a distribuição de probabilidade conjunta e a distribuição produto das marginais, que é totalmente descorrelacionada, da forma:

$$H(p_{xy} || p_x p_y) = - \sum_{xy} p_{xy} \ln \left( \frac{p_{xy}}{p_x p_y} \right) = H(X : Y), \quad (2.3)$$

em que  $p_x = \sum_y p_{xy}$  e  $p_y = \sum_x p_{xy}$ . Para introduzir a versão quântica dessa quantidade, é necessário definir a entropia de um estado quântico, que é a entropia de von Neumann [87], dada por:

$$S(\rho) = - \text{Tr}(\rho \ln \rho). \quad (2.4)$$

Essa quantidade é interpretada como a quantidade de informação contida em um sistema de estado  $\rho$ , de forma análoga à quantidade de informação contida em uma variável aleatória  $X$ , quantificada pela entropia de Shannon. A entropia de von Neumann possui uma ligação com a de Shannon dada pelo resultado de que a primeira é o valor mínimo da última quando a distribuição de probabilidade é dada por  $p_x = \text{Tr}(E_x \rho)$ , em que  $\{E_x\}$  é um conjunto de operadores positivos que constituem os valores de uma medida de probabilidade, denominada medida com valores dados por operadores positivos (MVOP) [88], e o mínimo é tomado sobre todas as possíveis MVOPs. Vamos provar esse resultado aqui para o caso particular de medições de observáveis não degenerados em qubits:

**Teorema 2.1.1.** *Seja  $\mathbb{C}^2$  o espaço de estados de um sistema com matriz densidade  $\rho$  e  $\mathcal{B}$  o conjunto dos observáveis não degenerados que atuam nesse espaço. Cada observável  $A \in \mathcal{B}$  define uma função massa de probabilidade (fmp)  $p_A$  com valores  $p_A(a_1) \equiv \text{Tr}(|a_1\rangle\langle a_1|\rho)$  e  $p_A(a_2) \equiv \text{Tr}(|a_2\rangle\langle a_2|\rho)$ , sendo  $|a_1\rangle$  e  $|a_2\rangle$  autoestados de  $A$  com autovalores dados, respectivamente, por  $a_1$  e  $a_2$ . Seja  $X_A$  a variável aleatória identidade em  $(\Omega_A, \mathbb{P}(\Omega), P_A)$  com  $\Omega \equiv \{a_1, a_2\}$  e  $P_A$  definido pela fmp  $p_A$ , temos que*

$$\min_{A \in \mathcal{B}} (H(X_A)) = - \sum_{k=1}^2 \lambda_k \ln(\lambda_k) = S(\rho), \quad (2.5)$$

em que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são os autovalores de  $\rho$ .

*Demonstração.* Seja  $\rho'$  uma matriz densidade  $2 \times 2$  com autovalores dados por  $\lambda$  e  $1 - \lambda$ ,  $\lambda \in [0, 1]$  dada, na base dos vetores  $|\lambda_1\rangle$  e  $|\lambda_2\rangle$ , por  $\rho = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 - r \end{bmatrix}$ ,  $r \in [0, 1]$ . Os autovetores de um observável  $A \in \mathcal{B}$ , com autovalores  $a_1$  e  $a_2$ , são dados pelo conjunto  $\{U|\lambda_1\rangle, U|\lambda_2\rangle\}$  para algum operador unitário  $U \in \text{SU}(2)$  que possui forma geral dada por  $U = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta^* \\ \beta & \alpha^* \end{bmatrix}$  com  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Temos então que  $p_A(a_k) = \text{Tr}(U|\lambda_k\rangle\langle\lambda_k|U^\dagger\rho) = \text{Tr}(|\lambda_k\rangle\langle\lambda_k|U^\dagger\rho U)$  e  $H(X_A) = -p_A(a_1) \ln(p_A(a_1)) - p_A(a_2) \ln(p_A(a_2))$ . Calculando  $H(X_A)$  em função de  $r, \alpha$  e  $\beta$ , temos

$$\begin{aligned} H(X_A) = & - (|\alpha|^2\lambda + |\beta|^2(1 - \lambda)) \ln (|\alpha|^2\lambda + |\beta|^2(1 - \lambda)) \\ & - (|\alpha|^2(1 - \lambda) + |\beta|^2\lambda) \ln (|\alpha|^2(1 - \lambda) + |\beta|^2\lambda) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Fazendo a mudança de variáveis  $|\alpha| = \cos(\theta)$  e  $|\beta| = \sin(\theta)$ , para minimizar  $H(X_A)$  sobre todos os observáveis de  $\mathcal{B}$ , basta achar o valor de  $\theta$  que minimiza a função para todo valor de  $\lambda$ . O mínimo é alcançado para  $\theta = 0$ , ou seja,  $|\alpha| = 1$  e  $|\beta| = 0$ . Logo,

$$\min_{A \in \mathcal{B}} (H(X_A)) = -\lambda \ln(\lambda) - (1 - \lambda) \ln(1 - \lambda) = S(\rho). \quad (2.7)$$

□

Dessa forma, a entropia de von Neumann é a menor entropia de Shannon que se pode

atribuir a um estado quântico. A informação mútua quântica, de forma análoga à informação mútua clássica, é definida por:

$$S(A : B) \equiv S(A) + S(B) - S(A, B). \quad (2.8)$$

Essa quantidade possui uma importante interpretação operacional: é a quantidade mínima de entropia que precisa ser injetada em  $AB$  para descorrelacionar completamente seu estado, no limite assintótico de muitas cópias [89]. Por isso, é interpretada como a quantidade total de correlações em um sistema, as quais são subdivididas em parte clássica e em parte quântica. Para entender o que significam essas subdivisões, é necessário entender o conceito de discórdia quântica. Essa quantidade, introduzida por Ollivier e Zurek [90], é uma proposta de mensurar as correlações de origem puramente quântica. Entende-se por puramente quânticas as correlações do estado que são destruídas pelo processo de medida local em um sistema bipartido. A definição precisa de discórdia, portanto, foi inspirada numa propriedade da informação mútua clássica, que consiste em ser escrita por meio de duas expressões equivalentes [85]:

$$H(X : Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X), \quad (2.9)$$

em que  $H(Y|X)$  é a entropia de  $Y$  condicionada ao conhecimento de  $X$ . A transposição dessa propriedade para o caso em que a entropia é a de von Neumann não é possível de ser feita se considerarmos que a definição da entropia condicional quântica é uma quantidade dependente de operações de medida. A dependência da medida é necessária, pois não é possível conhecer o estado de um sistema quântico sem realizar medidas, as quais poderão modificar o estado do sistema. Desse modo, definindo-se a entropia condicional quântica por:

$$S(A|\{\Pi_j^B\}) \equiv \sum_j p_j S(\rho_{A|\Pi_j^B}), \quad (2.10)$$

em que  $\{\Pi_j^B\}$  é um conjunto de medidas completas em  $B$ ,  $p_j$  é a probabilidade de medir-se  $\Pi_j^B$  e  $\rho_{A|\Pi_j^B}$  é o estado de  $A$  após  $\Pi_j^B$  ser medido, cria-se duas possibilidades de definição da informação

mútua quântica. Entretanto, uma vez que medidas locais podem destruir correlações quânticas como o emaranhamento, a definição que capta todas as correlações é a que está em (2.8). Dessa forma, a outra possibilidade define, na realidade, uma medida de correlações que são perdidas pela medida, ou seja, correlações clássicas:

$$J(A|\{\Pi_j^B\}) \equiv S(A) - S(A|\{\Pi_j^B\}). \quad (2.11)$$

A medida que captura, portanto, as correlações quânticas é naturalmente definida por [66]:

$$Q(A|B) \equiv I(A, B) - J(A|B), \quad (2.12)$$

denominada discórdia quântica. Desse modo, dividimos as correlações em totais, clássicas e quânticas. Elas, porém, não são as únicas medidas possíveis e existem várias outras que quantificam os mesmos tipos de correlações. Para que se possa afirmar isso, entretanto, é necessário definir o que são medidas de correlação. Existe uma forma axiomática de se fazer essa definição, tanto para correlações clássicas [67, 91] como para quânticas e totais [91]. Como nos interessam esses postulados para o caso quântico, vale a pena citá-los aqui. Entretanto, deve ficar claro que não existe um consenso absoluto sobre que postulados devem ser impostos, porém existem aqueles que são bem aceitos.

Considere  $\mathbf{M}_\rho$  uma operação, que pode depender do estado  $\rho$ , que leva o estado  $\rho$  ao estado resultante de sua medida:  $\mathbf{M}_\rho(\rho) = \sum_k \Pi_k \rho \Pi_k^\dagger$ , em que  $\{\Pi_k\}$  é um conjunto completo de medidas. Os axiomas, considerados necessários a uma medida de correlação quântica em [91] são:

1. É uma função apenas do estado  $\rho$  e de  $\mathbf{M}_\rho(\rho)$ .
2. Estados produtos não possuem correlação quântica.
3. Invariância por operações unitárias locais.
4. Não negatividade.

5. Não aumenta por operações locais.
6. Estados clássicos  $\mathbf{M}(\rho)$  não possuem correlação quântica, para todo  $\mathbf{M}$  e  $\rho$ , em que  $\mathbf{M}$  é uma medida qualquer.

Nem todas as medidas  $\mathbf{M}_\rho$  permitem que a correlação quântica satisfaça todos os postulados acima. Dessa forma, a estratégia de escolha da medida dependente do estado deve ser tal que não viole os postulados para todo estado  $\rho$ . Algumas das possíveis estratégias são:

1.  $\mathbf{M}_\rho$  invariante por  $\rho$ .
2.  $\mathbf{M}_\rho$  maximiza as correlações quânticas.
3.  $\mathbf{M}_\rho$  deixa os marginais de  $\rho$ ,  $\rho_B = \text{Tr}_A(\rho)$  e  $\rho_A = \text{Tr}_B(\rho)$ , invariantes.

A discórdia adota a estratégia 2. Outra medida de correlação, que será usada adiante, é a perturbação induzida por medição (PIM) [78]. Essa medida consiste em calcular a diferença entre a informação mútua antes e após uma medida em  $\rho$ , que é dada por  $\{\Pi_j^A \otimes \Pi_k^B\}$ , em que  $\rho_A = \sum_j p_j^a \Pi_j^A$  e  $\rho_B = \sum_k p_k^b \Pi_k^B$ , com  $p_j^a$  e  $p_k^b$  autovalores de  $\rho_A$  e  $\rho_B$  respectivamente, os quais são estados reduzidos dos subsistemas  $A$  e  $B$ . A PIM é, então, definida por:

$$PIM(\rho) \equiv S(\rho) - S\left(\sum_{jk} \Pi_j^A \otimes \Pi_k^B \rho \Pi_j^{A\dagger} \otimes \Pi_k^{B\dagger}\right). \quad (2.13)$$

Essa medida adota a estratégia 3, pois obviamente deixa  $\rho_A$  e  $\rho_B$  invariantes. Tanto a discórdia quântica quanto a PIM satisfazem os postulados [91].

## 2.2 Incerteza Quântica Local

Um fenômeno, característico da Mecânica Quântica, que pode ocorrer e que já não é exemplificável em termos clássicos, é o de uma medida local destruir a estatística global do sistema. Sistemas que possuem correlações de natureza não-clássica sofrem um distúrbio, devido à medida local, que provoca a destruição do estado global tal como ele era. Classicamente, as

medidas locais não causam distúrbio no sistema global. A perturbação, porém, acontece em sistemas quânticos tais que o estado global não comuta com nenhum observável local. Percebe-se isso pois a medida local (de von Neumann) resulta necessariamente em um estado que comuta com a algum observável local. Logo, o distúrbio necessariamente acontece em estados onde não há essa comutatividade. É interessante, portanto, quantificar o quanto o estado está distante de comutar localmente, o que provavelmente daria uma medida das correlações quânticas presentes no mesmo. Uma quantidade que faz isso, em relação a um observável específico, é a informação enviesada [92]:

$$I(\rho, O) = -\text{Tr}([\sqrt{\rho}, O]^2) / 2. \quad (2.14)$$

A informação enviesada foi uma quantidade criada com a finalidade de mensurar a quantidade de informação ganha na medida de um observável  $O$ . Vimos que a entropia de von Neumann é também uma medida de quantidade de informação. Porém, ela é a quantidade mínima de informação, quantificada pela entropia de Shannon, contida nas distribuições de probabilidade relacionadas à medidas no sistema. No caso da informação enviesada, ela se restringe a quantificar a quantidade de informação associada à medida de um observável em específico. Ela também se difere da entropia em outra característica, que é a de que ela não quantifica a quantidade de informação extraída em uma medida seletiva, porém quantifica o quanto uma medida não-seletiva não comuta com o estado. Para exemplificar essas diferenças, note que a entropia quântica é nula para todos os estados puros, porém dado um observável  $O$ , a informação enviesada só se anula se o estado for uma combinação convexa de autoestados de  $O$ . Já para estados mistos, a entropia quântica é sempre não-nula, porém a informação enviesada pode anular-se, como citado no exemplo anterior. De forma mais rigorosa, a informação enviesada foi criada de modo a satisfazer um conjunto de postulados e, apesar de satisfazê-los, não é a única quantidade capaz disso. Esses postulados são [92]:

- A informação contida na união de dois *ensembles* é menor que a média da informação contida em cada um.

- A informação contida na união de dois sistemas é a soma da informação contida em cada um.
- A informação contida em um *ensemble* de sistemas isolados é invariante no tempo.
- A informação contida em um sistema composto que foi separado em partes é menor que a informação contida no mesmo antes da separação, devido à perda de correlações no processo.

A informação enviesada pode ser entendida como a ignorância que permanece a respeito do valor de um observável  $K$  de um sistema quando um observável  $L$  é uma quantidade conservada no conjunto sistema e aparato de medição. Essa interpretação vem do teorema de Wigner-Araki-Yanase [93–95], o qual estabelece que os estados do aparato, correspondentes aos autovalores do observável  $K$ , não são perfeitamente distinguíveis se o observável não comuta com  $L$ , que é uma quantidade conservada durante a interação sistema-aparato, dado que  $L$  é aditivo ( $L = L_{\text{sistema}} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes L_{\text{aparato}}$ ), sendo  $\mathbb{1}$  o operador identidade, antes e depois da interação. Assim, se o estado do sistema é uma quantidade conservada e  $O$  não comuta com ele,  $I(\rho, O)$  retorna uma medida da incerteza associada à medição de  $O$ . Essa é uma incerteza de origem quântica, pois está associada não a uma distribuição clássica de probabilidades, mas sim à indistinguibilidade dos estados do aparato associados ao observável. De fato, a informação enviesada para estados puros, que não possuem nenhuma distribuição clássica de probabilidades, é a própria variância, que é a quantidade associada à incerteza quântica nas medidas de um estado puro e satisfaz a relação de incerteza de Heisenberg. De modo geral, para estados mistos, temos [96]:

$$I(\rho, O) \leq \Delta_\rho(O), \quad (2.15)$$

em que  $\Delta_\rho(O)$  é a variância de  $O$  no estado  $\rho$ , sendo a igualdade satisfeita para o caso em que  $\rho$  é puro. Outra propriedade importante está relacionada à aplicação de um canal quântico no estado  $\rho$ . Um canal quântico é basicamente uma operação quântica arbitrária em  $\rho$  que resulta em outra matrix densidade  $\rho'$ . Matematicamente, um canal quântico é um mapa completamente

positivo que preserva o traço da matrix densidade. Seja  $\Phi_B$  um canal quântico que atua no subsistema  $B$ , temos:

$$I(\rho_{AB}, O_A \otimes \mathbb{1}_B) \geq I((\mathbb{1}_A \otimes \Phi_B)\rho_{AB}, O_A \otimes \mathbb{1}_B), \quad (2.16)$$

em que  $O_A$  é um observável que atua somente em  $A$ .

Pela expressão de  $I$  em (2.14), vê-se que sempre há um observável que comuta com o estado, de modo que uma minimização de  $I(\rho, O)$  sobre todos os observáveis resultaria em um valor nulo de  $I$ , qualquer que fosse  $\rho$ . O mínimo é zero, pois como  $\sqrt{\rho}$  é positivo semidefinido, é também hermitiano, de modo que  $[\sqrt{\rho}, O]$  é anti-hermitiano, o que implica que seu quadrado é negativo semidefinido e o sinal negativo em no traço garante que  $I$  seja não negativo. Esse resultado trivialmente nulo não acontece, entretanto, se consideramos que o sistema é composto de dois subsistemas,  $A$  e  $B$ , e que o mínimo é tomado sobre os observáveis locais de uma das partes ( $B$ , por exemplo). Para ver isso, é necessário introduzir a quantidade incerteza quântica local [83], ou IQL, dada por:

$$U^\Lambda(\rho) = \min_{O^\Lambda} I(\rho, O^\Lambda), \quad (2.17)$$

em que  $O^\Lambda$  é um observável da forma  $O^\Lambda = O_A^\Lambda \otimes \mathbb{1}$ , em que  $O_A^\Lambda$  atua somente em  $A$  com espectro de autovalores fixo  $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  e não degenerado e o mínimo é tomado sobre todos esses observáveis. A não degenerescência é exigida para nos restringirmos a observáveis que correspondem a medidas que extraem o máximo de informação do sistema, uma vez que a degenerescência pode fazer com que uma medida não especifique o estado de saída, mas sim que retorne um *ensemble* de estados puros. O espectro  $\Lambda$  é fixado com o objetivo de fixar a escala dos resultados da IQL. Isso não restringe o conjunto de medidas representadas pelos observáveis que fazem parte do conjunto no qual se efetua a minimização, pois qualquer conjunto completo de medidas projetivas de rank 1 é levado a outro por meio de uma operação unitária, assim como qualquer observável de espectro  $\Lambda$  é levado a outro de mesmo espectro por uma também operação unitária. Desse modo, qualquer conjunto de medidas projetivas ortogonais pode ser

representado por um observável de espectro previamente fixo.

A IQL é, portanto, a mínima informação enviesada, em que o mínimo é tomado sobre todas as medidas projetivas ortogonais de rank 1 completas. Desse modo, essa medida pode ser interpretada como fornecendo a mínima ignorância alcançável em relação à medida de um observável local quando o estado global do sistema é conservado durante a interação com o aparato. Se ela é não nula, isso significa que, se o estado global se conserva, não é possível obter estados perfeitamente distinguíveis do aparato de medida que avalia observáveis locais, quaisquer que sejam esses observáveis. Há, porém, outra interpretação dessa medida, que é a de que a mesma captura as correlações quânticas do sistema. Isso é verdade porque a IQL satisfaz as condições necessárias a uma medida de correlação quântica [91]. Vamos provar esse fato a seguir.

A primeira questão, da não negatividade, segue da não negatividade da informação enviesada. A invariância sob operações unitárias locais segue de:

$$\begin{aligned} U^\Lambda ((U_A \otimes U_B)\rho(U_A \otimes U_B)^\dagger) &= \min_{O^\Lambda} I((U_A \otimes U_B)\rho(U_A \otimes U_B)^\dagger, O^\Lambda) \\ &= \min_{O^\Lambda} I(\rho, U_A^\dagger O^\Lambda U_A) = U^\Lambda. \end{aligned} \quad (2.18)$$

A contratividade por mapas completamente positivos que preservam o traço segue da informação enviesada. Por fim, o estado clássico-quântico  $\rho_c = \sum_j p_j |a_j\rangle\langle a_j| \otimes \rho_j$  comuta com o observável  $A \otimes \mathbb{1}$ , em que  $A = \sum_j p_j |a_j\rangle\langle a_j|$ , de forma que  $I(\rho_c, A \otimes \mathbb{1}) = 0 \Rightarrow U^\Lambda(\rho_c) = 0$ .

A IQL apresenta uma expressão fechada para sistemas  $2 \times d$ , em que  $d$  é uma dimensão arbitrária. Antes de proceder ao cálculo, é preciso considerar dois fatos. Um é que o autovalor máximo de uma matriz simétrica  $W$ ,  $\lambda_{max}$ , é dado por  $\lambda_{max} = \sup_{\vec{x}}(\vec{x}^T W \vec{x})$ , em que  $|\vec{x}| = 1$  e  $\vec{x}$  é real. Outro fato é que, seja  $O = \vec{x} \cdot \vec{\sigma}$ , em que  $\vec{\sigma} = (\sigma^x, \sigma^y, \sigma^z)$ , tem-se:

$$U^\Lambda(\rho) \leq \Delta_\rho(O \otimes \mathbb{1}) = \text{Tr}(\rho(O \otimes \mathbb{1})^2) - (\text{Tr}(\rho(O \otimes \mathbb{1})))^2 = 1 - (\text{Tr}(\rho(O \otimes \mathbb{1})))^2 \leq 1. \quad (2.19)$$

Calculando a IQL, tem-se:

$$\begin{aligned}
U^\Lambda(\rho) &= \min_{\vec{x}} [\text{Tr}(\rho(\vec{x} \cdot \vec{\sigma} \otimes \mathbb{1})^2) - \text{Tr}(\sqrt{\rho}(\vec{x} \cdot \vec{\sigma} \otimes \mathbb{1})\sqrt{\rho}(\vec{x} \cdot \vec{\sigma} \otimes \mathbb{1}))] \\
&= 1 - \max_{\vec{x}} \text{Tr}(\sqrt{\rho}(\vec{x} \cdot \vec{\sigma} \otimes \mathbb{1})\sqrt{\rho}(\vec{x} \cdot \vec{\sigma} \otimes \mathbb{1})) \\
&= 1 - \max_{\vec{x}} \vec{x}^T W \vec{x} = 1 - \lambda_{max},
\end{aligned} \tag{2.20}$$

em que:

$$W_{ij} = \text{Tr}(\sqrt{\rho}(\sigma_i \otimes \mathbb{1})\sqrt{\rho}(\sigma_j \otimes \mathbb{1})). \tag{2.21}$$

## 2.3 Transição de Fase Quântica

Sistemas físicos fechados, tanto clássicos como quânticos, têm em geral sua dinâmica especificada por seu hamiltoniano. Se esses sistemas possuem um número muito grande de constituintes, como objetos macroscópicos, aplicar mecânica clássica ou quântica a cada um de seus elementos torna-se uma tarefa inviável. Desse modo, faz-se uso da teoria de probabilidade e estatística para descrever esse tipo de sistema. Admitindo também que são válidos o postulado fundamental da física estatística, de equiprobabilidades a priori, e a hipótese ergódica ou quase-ergódica, é possível utilizar o formalismo de *ensembles* da física estatística para calcular quantidades macroscópicas como a entropia ou a energia livre.

No limite termodinâmico, no qual o volume do sistema é levado ao limite infinito, a energia livre fornece a descrição completa do sistema termodinâmico. Essa função é, em geral, analítica em quase todo seu domínio, porém pode apresentar regiões de não-analiticidade. As regiões analíticas correspondem à fase do sistema, enquanto as não-analíticas à região de transição de fase [97]. As transições de fase, fisicamente, correspondem a mudanças no comportamento de quantidades termodinâmicas do sistema. Isso ocorre porque a não analiticidade implica que haverá derivadas de alguma ordem que não são contínuas. Essa descontinuidade pode implicar, por exemplo, que quantidades, como a magnetização, sejam crescentes em uma região de fase e decrescentes logo após a transição.

A energia livre generalizada,  $f(g_1, \dots, g_n)$ , depende de uma série de parâmetros  $g_i$ , macroscópicos ou microscópicos, como temperatura, intensidade de campo externo ou intensidade da interação entre subsistemas vizinhos. É nesse conjunto de pontos  $\vec{g}$  do espaço de parâmetros que encontram-se as fases e as transições. Há classificações para as fases e para as transições. Estas últimas são caracterizadas pela forma de não-analiticidade de  $f$ . Uma transição será de primeira ordem se existe  $\frac{\partial f}{\partial g_i}$  descontínuo para algum  $i$ . Caso contrário, ela é de segunda ordem ou contínua. A região de transição geralmente é uma variedade de dimensão menor que a do espaço de parâmetros, a qual pode desconectar topologicamente esse espaço, dividindo-o em regiões de fases desconexas. Cada fase pode induzir as grandezas do sistema a adotarem configurações que podem ser bastante distintas. Citaremos exemplos de modelos de sistemas que admitem transição de fase:

- *Modelo de Ising*: Esse modelo [110] consiste em uma rede de spins que interagem com seus vizinhos próximos e, para dimensão 2 [111], apresenta uma transição de uma fase magneticamente ordenada (ferromagnética ou antiferromagnética) para uma fase desordenada a uma temperatura crítica  $T_c$ .
- *Modelo de Widom-Rowlinson*: Esse é um modelo [112] de um fluido contínuo constituído por moléculas, cuja interação entre elas decai com a distância. Esse modelo apresenta transição de fase líquida para vapor [113] para dimensão maior que 2 e os pontos de transição ocorrem em pontos específicos de temperatura e pressão.
- *Modelo XY clássico*: É um modelo de spins clássicos de duas dimensões que apresenta uma transição de fase a uma temperatura crítica  $T_C$  [114,115]. Abaixo dessa temperatura, existem ordenamentos de spin na forma de pares de vórtices e anti-vórtices, enquanto acima de  $T_C$  existem apenas vórtices livres. Essa mudança de fase tem o nome de transição de Kosterlitz–Thouless [116].

Esses modelos, entretanto, apresentam transição de fase clássica, que ocorre a uma temperatura finita. Quando há presença de temperatura, a transição de fase contínua sempre é

ocasionada por flutuações térmicas. A razão disso acontecer está na relação entre a energia das flutuações térmicas e a energia das flutuações quânticas. Para entender isso, é preciso introduzir o conceito de expoentes críticos e classes de universalidade.

Um sistema que possui uma transição de fase em um ponto crítico, como a temperatura  $T_c$  por exemplo, possui uma certa relação funcional entre suas grandezas físicas, como magnetização ou calor específico, e seus parâmetros descritivos, como a temperatura ou a pressão. Ocorre que, nas proximidades do ponto crítico, essa dependência funcional pode modificar-se, tornando-se uma lei de potências, uma vez que os graus de liberdade do sistema tendem a se correlacionar mais fortemente nessa região. Por exemplo, se o ponto crítico ocorrer devido ao parâmetro temperatura, tem-se que uma quantidade, como o calor específico  $C(T)$ , será dado por uma série de potências de  $T$  em torno de  $T_c$ . O termo líder dessa expansão possui um expoente chamado de expoente crítico. No caso em questão, tem-se que [97]:

$$C(t) \propto |t|^{-\alpha}, \quad t = \frac{T - T_c}{T_c}. \quad (2.22)$$

O interessante disso é que existem muitos diferentes materiais que apresentam os mesmos expoentes críticos para as mesmas grandezas. O conjunto de sistemas que possuem os mesmos expoentes define uma classe de universalidade. Alguns modelos, como o XY quântico unidimensional, possui duas classes de universalidade: a de Ising e a isotrópica [11].

Devido, então, a esse comportamento na região do ponto crítico, tem-se que a energia das flutuações quânticas, denominada energia crítica  $E_c$ , tem uma relação de proporcionalidade dada por:

$$E_c \propto |t|^{\nu z}, \quad (2.23)$$

em que  $\nu$  é o expoente de comprimento de correlação e  $z$  é o expoente dinâmico, que são expoentes críticos do comprimento de correlação  $\Xi$  e do tempo de correlação  $\tau_c$ , respectivamente. A relação (2.23) implica que as flutuações quânticas têm uma energia típica que se aproxima de zero quando  $t \rightarrow 0$ , enquanto a energia das flutuações térmicas permanece, sendo proporcional

a  $T$ . Desse modo, transições de fase de temperatura finita sempre podem ser descritas por uma teoria clássica. Em  $T = 0$ , porém, ocorrem transições de origem puramente quântica, as chamadas transições de fase quântica (TFQ). Essas são transições muito importantes para descrever o comportamento de muitos sistemas físicos. Eis alguns exemplos de TFQ [97]:

- *Transição ferromagnética-paramagnética em ferromagnetos uniaxiais na presença de campo transversal*: Uma transição entre uma fase desordenada, paramagnética, e ordenada, ferromagnética ocorre em ferromagnetos, como alguns descritos pelo modelo XY quântico anisotrópico, e é ocasionada pela aplicação de um campo magnético externo.
- *Transição Mott-Hubbard*: É uma transição da fase isolante para a metálica que ocorre em sistemas com forte correlação eletrônica e é ocasionada pelo parâmetro intensidade de correlação.
- *Transição de estado de onda de densidade de spin para líquido de Fermi*: Ocorre em alguns condutores magnéticos e é desencadeado pela intensidade da interação. A transição passa de uma fase com ordem de curto alcance, líquido de Fermi, para uma de longo alcance: onda de densidade de spin.

## 2.4 Modelo XY Quântico

Devido à natureza inerentemente quântica do magnetismo da matéria [98], modelos quânticos são necessários para explicar fenômenos como o diamagnetismo, paramagnetismo, ferromagnetismo, antiferromagnetismo, entre outros. A propriedade física de spin dos elétrons é essencial para a construção desses modelos, como o modelo de Heisenberg, que inclui a interação spin-spin e descreve um sistema com propriedades magnéticas. O hamiltoniano de Heisenberg é usado para descrever um sistema de partículas com spin organizados em um reticulado, o qual pode ter uma, duas ou três dimensões. Para investigar propriedades desse sistema, as tridimensionais e bidimensionais tornam a tarefa bastante complicada, de modo que o modelo unidimensional, também chamado de “cadeia de spins” é preferível para um

estudo inicial. Resultados nessa dimensão fornecem insights de como sistemas de dimensões maiores se comportam e também ajudam a elaborar métodos para tratá-los de forma exata ou aproximada. Ainda mais simples é o modelo XY quântico derivado da cadeia de Heisenberg, o qual passaremos a descrever.

O modelo XY quântico consiste em uma cadeia unidimensional de  $N$  sistemas com spin  $1/2$ , os quais interagem entre si por meio de seu vizinho imediato, submetida a um campo magnético  $B$  externo na direção  $z$  do sistema de coordenadas. O modelo não possui pontas livres, mas é do tipo cíclico. Supondo que está sendo modelado uma cadeia na qual as partículas com spin possuem posições limitadas em relação ao restante da cadeia, ou seja, as partículas não transitam livremente, apenas a parte do hamiltoniano que trata a interação spin-spin é a relevante para estudar efeitos magnéticos, de modo que seu hamiltoniano é dado, nas unidades de Planck, por [9]:

$$H_{XY} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left\{ J \left[ \left( \frac{1+\gamma}{2} \right) \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \left( \frac{1-\gamma}{2} \right) \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y \right] + \xi B \sigma_j^z \right\}, \quad (2.24)$$

em que  $\sigma^u$  é uma matriz de Pauli na direção  $u$ ,  $\xi$  é a razão giromagnética,  $J$  é a constante de troca e  $\sigma_{N+1}^u = \sigma_1^u$ . Os dois primeiros termos do hamiltoniano consistem na interação spin-spin, em que  $\gamma$ , tal que  $-1 \leq \gamma \leq 1$ , é o parâmetro de anisotropia. O último termo é a interação entre a cadeia e o campo magnético clássico constante de intensidade  $B$ . Para simplificar a análise do espectro do hamiltoniano, iremos trabalhar com  $H'_{XY} \equiv 2H_{XY}/J$  ao invés de  $H_{XY}$  e usaremos o parâmetro  $\lambda$  como  $\lambda \equiv 2\xi B/J$ .

Podemos representar, para fins didáticos, o modelo como um grafo  $G(V, E)$  de conjunto de vértices dado por  $V = \{v_1, \dots, v_N\}$ , em que cada vértice  $v_i$  representa a posição da  $i$ -ésima partícula e com conjunto de arestas  $E = \{E_{1,2} = \{e_1, e_2\}, E_{2,3} = \{e_2, e_3\}, \dots, E_{N-1,N} = \{e_{N-1}, e_N\}, E_{N,1} = \{e_N, e_1\}\}$  que representa as interações entre os vizinhos. Graficamente, a cadeia finita pode ser representada da forma:

Para futuros cálculos será necessário conhecermos o estado global de um par de spins da cadeia, estando a cadeia toda no estado de equilíbrio térmico  $\rho_{XY} = e^{-\beta H_{XY}}/Z$ , em que

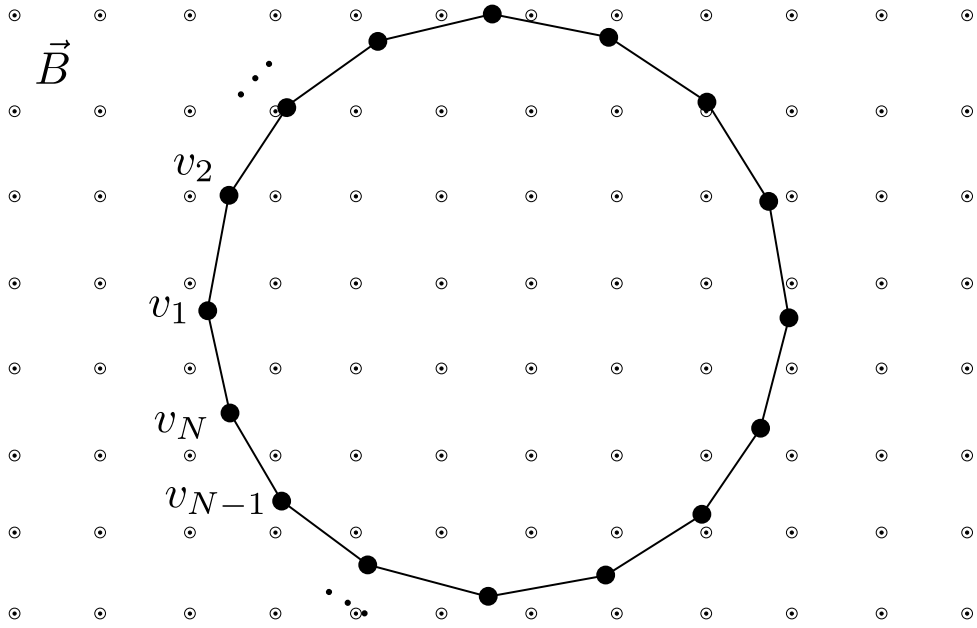


Figura 2.1: Representação gráfica da cadeia XY com condições de contorno cíclicas, dada pelo grafo  $G(V,E)$ , e com campo magnético externo transversal e uniforme  $\vec{B}$ .

$\beta = 1/k_B T$ , com  $k_B$  sendo a constante de Boltzmann, e  $Z$  sendo a função de partição na distribuição canônica.

Um estado geral de um par de qubits  $A$  e  $B$  é dado por:

$$\rho_{AB} = \frac{1}{4} \left[ I + \sum_i \left( \langle \sigma_A^i \rangle \sigma_A^i + \langle \sigma_B^i \rangle \sigma_B^i + \sum_j \langle \sigma_A^i \sigma_B^j \rangle \sigma_A^i \sigma_B^j \right) \right], \quad (2.25)$$

em que  $i, j \in \{x, y, z\}$ . Para especificarmos esse estado, é necessário então calcularmos as funções de correlação, ou seja, as médias das matrizes de Pauli no estado térmico. Para tanto, é necessário antes diagonalizarmos o hamiltoniano. O modelo XY é diagonalizável e sua forma final é a mesma de um sistema de férmions livres sem spin. É preciso, então, lançar mão de algumas transformações. Parte do procedimento está descrito em [99].

Primeiro efetuaremos uma transformação de Wigner-Jordan, a qual leva operadores de spin em operadores de Fermi  $a_j$ :

$$a_j = - \bigotimes_{k=1}^{j-1} \sigma_k^z \otimes |0_j\rangle \langle 1_j|, \quad (2.26)$$

em que  $|0_j\rangle$  e  $|1_j\rangle$  são autovetores de  $\sigma_j^z$ . Os operadores  $a_j$  satisfazem as relações fermiônicas:

$$\{a_i, a_j^\dagger\} = \delta_{ij}I, \quad \{a_i, a_j\} = 0. \quad (2.27)$$

Os operadores de Pauli são escritos em termos de  $a_j$  e de seu conjugado da forma:

$$\sigma_j^z = a_j a_j^\dagger - a_j^\dagger a_j, \quad (2.28)$$

$$\sigma_j^y = i \bigotimes_{k=1}^{j-1} \sigma_k^z (a_j^\dagger - a_j), \quad (2.29)$$

$$\sigma_j^x = - \bigotimes_{k=1}^{j-1} \sigma_k^z (a_j + a_j^\dagger). \quad (2.30)$$

Os produtos de operadores de spin ( $x$  e  $y$ ) entre os primeiros vizinhos são dados por:

$$\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x = (a_j - a_j^\dagger)(a_{j+1} + a_{j+1}^\dagger), \quad (2.31)$$

$$\sigma_j^y \sigma_{j+1}^y = -(a_j + a_j^\dagger)(a_{j+1}^\dagger - a_{j+1}). \quad (2.32)$$

Usando as equações (2.31) e (2.32) no hamiltoniano  $H_{XY}$ , tem-se:

$$H'_{XY} = \sum_{j=1}^N \left[ -a_j a_{j+1} - \gamma a_j a_{j+1}^\dagger + \gamma a_j^\dagger a_{j+1} + a_j^\dagger a_{j+1}^\dagger - \lambda (a_j a_j^\dagger - a_j^\dagger a_j) \right]. \quad (2.33)$$

Sejam  $A_{j,j+1} = \gamma$ ,  $A_{j,j} = \lambda$ ,  $B_{j,j+1} = -1$  e  $A_{ij} = B_{ij} = 0$  caso contrário. Para diagonalizar o hamiltoniano em (2.33) é necessário fazer uma transformação canônica de  $a_j$  para novos operadores de Fermi  $b_j$ , tais que:

$$b_j = \sum_k \left( \gamma_{jk} a_k + \mu_{jk} a_k^\dagger \right). \quad (2.34)$$

Das relações fermiônicas para  $b_j$ , tem-se as seguintes equivalências:

$$\{b_i, b_j^\dagger\} = \delta_{ij}I \Leftrightarrow [\gamma\gamma^\dagger]_{ij} + [\mu\mu^\dagger]_{ij} = \delta_{ij} \Leftrightarrow \gamma\gamma^\dagger + \mu\mu^\dagger = I, \quad (2.35)$$

$$\{b_i, b_j\} = 0 \Leftrightarrow \gamma\mu^T + \mu\gamma^T = 0. \quad (2.36)$$

Vamos supor, por hipótese, que as equações para  $\gamma$  e  $\mu$  são satisfeitas. Considere a seguinte

notação  $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$  e  $b^\dagger = \begin{bmatrix} b_1^\dagger \\ \vdots \\ b_n^\dagger \end{bmatrix}$ . Sejam  $a$  e  $a^\dagger$  definidos de forma análoga. De (2.34) temos que:

$$\begin{bmatrix} b \\ b^\dagger \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \mu \\ \mu^* & \gamma^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ a^\dagger \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

De (2.36), tem-se que  $T = \begin{bmatrix} \gamma & \mu \\ \mu^* & \gamma^* \end{bmatrix}$  é unitária e, portanto:

$$\begin{bmatrix} a \\ a^\dagger \end{bmatrix} = T^\dagger \begin{bmatrix} b \\ b^\dagger \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

O hamiltoniano  $H_{XY}$  pode ser reescrito, em uma forma matricial, do seguinte modo:

$$H'_{XY} = \begin{bmatrix} a^\dagger & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -B \\ B & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ a^\dagger \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

Seja  $M = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & -A \end{bmatrix}$ , substituindo (2.38) em (2.39), temos:

$$H'_{XY} = \begin{bmatrix} b^\dagger & b \end{bmatrix} T M T^\dagger \begin{bmatrix} b \\ b^\dagger \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

A diagonalização de  $H_{XY}$ , portanto, decorre de encontrar uma solução à equação:

$$T M T^\dagger = \text{diag}\{\omega, -\omega\}, \quad (2.41)$$

em que  $\omega$  é uma matriz diagonal  $N \times N$  com entradas  $\omega_j$  na linha  $j$ . Seja  $T M = \text{diag}\{\omega, -\omega\} T$ , implica-se dessa igualdade as equações:

$$\gamma A + \mu B = \omega \gamma, \quad (2.42)$$

$$\gamma B + \mu A = -\omega \mu. \quad (2.43)$$

Somando e subtraindo uma equação da outra no sistema de equações acima e fazendo a subs-

tituição  $\phi = \gamma + \mu$  e  $\psi = \gamma - \mu$ , tem-se:

$$\phi(A + B) = \omega\psi, \quad (2.44)$$

$$\psi(A - B) = \omega\phi, \quad (2.45)$$

$$\Rightarrow \psi(A - B)(A + B) = \omega^2\psi. \quad (2.46)$$

Como  $(A - B)(A + B)$  é ortogonal, seja  $\psi_j^T$  um vetor coluna de  $\psi^T$ :

$$(A - B)(A + B)\psi_j^T = \omega_j\psi_j^T. \quad (2.47)$$

Essa equação possui solução, de modo que a solução implica que  $b_j$  é um operador de Fermi e que a  $H_{XY}$  é expresso na forma diagonal de férmions livres sem spin.

Uma vez diagonalizado o hamiltoniano, serão analisadas as funções de correlação. Essas funções são médias do tipo  $c_{jk}^{uv} = \langle \sigma_j^u \sigma_k^v \rangle$  com  $u, v \in \{x, y, z, 0\}$ , sendo  $\sigma_j^0 = I$ . Um conjunto de simetrias que o modelo satisfaz implica que algumas dessas funções são nulas, entre outras simplificações. Tem-se que o hamiltoniano é real, é invariante por translação e por reflexão em torno de uma posição de spin, de modo que  $c_{jk}^{uv*} = c_{jk}^{uv} = c_{0|k-j|}^{uv} = c_{|k-j|0}^{uv} = c_{|k-j|0}^{vu}$ . Como  $\sigma_j^y$  é imaginário, seu produto tensorial com uma matriz real é imaginário também, de modo que  $c_{0r}^{0y} = c_{0r}^{xy} = c_{0r}^{zy} = 0$ , e de  $[\rho_{AB}, \sigma_A^z \sigma_B^z] = 0$ ,  $[\rho_A, \sigma_A^z] = 0$  e  $[\rho_A, \sigma_A^z] = 0$  tem-se  $c_{0r}^{xz} = c_{0r}^{0x} = 0$ . Por fim, a normalização de  $\rho_{AB}$  implica que  $c_{0r}^{00} = 1$ .

Usando o teorema de Wick aplicado à teoria quântica de campos [100] e levando em consideração que o estado da cadeia está no equilíbrio térmico, tem-se que os coeficientes são dados por [6]:

$$c_{0r}^{xx} = \begin{vmatrix} G_{-1} & G_{-2} & \cdots & G_{-r} \\ G_0 & G_{-1} & \cdots & G_{-r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{r-2} & G_{r-3} & \cdots & G_{-1} \end{vmatrix}, \quad (2.48)$$

$$c_{0r}^{yy} = \begin{vmatrix} G_1 & G_0 & \cdots & G_{-r+2} \\ G_2 & G_1 & \cdots & G_{-r+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_r & G_{r-1} & \cdots & G_1 \end{vmatrix}, \quad (2.49)$$

e:

$$c_{0r}^{zz} = \langle \sigma_r^z \rangle^2 - (G_r G_{-r}), \quad (2.50)$$

em que  $G_k = \langle C_0^+ C_k^- \rangle$ . O cálculo de  $G_k$ , no limite termodinâmico  $N \rightarrow \infty$ , resulta em:

$$G_k \equiv \int_0^\pi \frac{\tanh(\beta\omega_\phi)}{2\pi\omega_\phi} [\cos(k\phi)(1 + \lambda^{-1} \cos \phi) - \gamma\lambda^{-1} \sin(r\phi) \sin \phi] d\phi. \quad (2.51)$$

## 2.5 Modelo XY com Interação Tripla (XYT)

O modelo XY descreve um sistema que possui interação entre pares de spin. Esse modelo é diagonalizável e, portanto, exatamente solucionável. Podemos, entretanto, adicionar interações entre mais elementos de uma cadeia de spin, mantendo o hamiltoniano diagonalizável. Um dos modelos mais simples que admitem isso é a cadeia unidimensional de spins com interação dupla e tripla, denominado modelo XYT [101,102]. O hamiltoniano desse sistema é dado por:

$$H_{XYT} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left\{ J \left[ \frac{(1+\gamma)}{2} \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \frac{(1-\gamma)}{2} \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y \right] + \xi B \sigma_j^z \right. \\ \left. + \frac{J^*}{2} (\sigma_{j-1}^x \sigma_j^z \sigma_{j+1}^x + \sigma_{j-1}^y \sigma_j^z \sigma_{j+1}^y) \right\}, \quad (2.52)$$

em que  $B$ ,  $\gamma$ ,  $\xi$ ,  $J$  e  $N$  são os mesmos parâmetros do modelo XY e  $J^*$  é o parâmetro de acoplamento da interação tripla. Além disso, a cadeia é do tipo cíclica, ou seja,  $\sigma_{N+1}^u = \sigma_1^u$ , em que  $u \in \{x, y, z\}$ . Para simplificar a análise seguinte, iremos trabalhar com  $H'_{XYT} \equiv 2H_{XYT}/J$  ao invés de  $H_{XYT}$  e usaremos os parâmetros  $\lambda$  e  $\alpha$  definidos como  $\lambda \equiv 2\xi B/J$  e  $\alpha \equiv J^*/J$ .

Para diagonalizarmos os hamiltoniano, faremos a seguinte transformação:

$$\sigma_j^z = 1 - 2c_j^\dagger c_j, \quad (2.53)$$

$$\sigma_j^y = -i \prod_{i<j} (1 - 2c_i^\dagger c_i) (c_j^\dagger - c_j), \quad (2.54)$$

$$\sigma_j^x = \prod_{i<j} (1 - 2c_i^\dagger c_i) (c_j^\dagger + c_j), \quad (2.55)$$

em que  $c_j$  é um operador de Fermi, de modo que o hamiltoniano fica:

$$\begin{aligned} H'_{XYT} = & - \sum_{j=1}^N \left[ c_j^\dagger c_{j+1} + c_{j+1}^\dagger c_j + \gamma \left( c_j^\dagger c_{j+1}^\dagger - c_j c_{j+1} \right) \right] + 2\alpha \left( c_{j-1}^\dagger c_{j+1} + c_{j+1}^\dagger c_{j-1} \right) \\ & + \lambda \left( 1 - 2c_j^\dagger c_j \right). \end{aligned} \quad (2.56)$$

de forma que o sistema é diagonalizável. Para fazer isso, entretanto, utilizaremos outro procedimento [102], que inclui uma transformada de Fourier discreta (TFD) em  $H'_{XYT}$  antes de efetuar uma transformação canônica (de Bogoliubov) que finalmente resultará na forma desejada. A TFD aplicada resulta em novos operadores  $\bar{c}_l$  tais que:

$$c_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l \in I} \bar{c}_l e^{i2\pi l j / N}, \quad I = \{[-N/2], \dots, [N/2]\}. \quad (2.57)$$

Aplica-se, então a transformação de Bogoliubov em  $\bar{c}_j$ , resultando em novos operadores de Fermi  $d_l$  tais que:

$$d_l = \cos\left(\frac{\theta_l}{2}\right) \bar{c}_l - i \sin\left(\frac{\theta_l}{2}\right) c_{-l}^\dagger, \quad \theta_l = \epsilon_l / \varepsilon_l, \quad (2.58)$$

em que  $\varepsilon_l = \sqrt{\epsilon_l^2 + (\gamma \sin \phi_l)^2}$ ,  $\epsilon_l = \lambda - \cos \phi_l - 2\alpha \cos 2\phi_l$  e  $\phi_l = 2\pi l / N$ . Com isso, o hamiltoniano fica na forma:

$$H'_{XYT} = \sum_l 2\varepsilon_l \left( d_l^\dagger d_l - 1/2 \right). \quad (2.59)$$

Como esse hamiltoniano tem a mesma forma final do  $H'_{XY}$ , tem-se que, estando o sistema no estado térmico, o estado de um par de subsistemas tem a forma de um estado X e o cálculo das funções de correlação são feitos da mesma forma. No modelo  $XYT$ , entretanto,

não procederemos como limite termodinâmico, restringindo-nos a uma cadeia finita. Com isso, as funções de correlação têm a forma:

$$\langle \sigma_0^x \sigma_r^x \rangle = \begin{vmatrix} g_{-1} & g_{-2} & \cdots & g_{-r} \\ g_0 & g_{-1} & \cdots & g_{-r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{r-2} & g_{r-3} & \cdots & g_{-1} \end{vmatrix}, \quad (2.60)$$

$$\langle \sigma_0^y \sigma_r^y \rangle = \begin{vmatrix} g_1 & g_0 & \cdots & g_{-r+2} \\ g_2 & g_1 & \cdots & g_{-r+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_r & g_{r-1} & \cdots & g_1 \end{vmatrix}, \quad (2.61)$$

$$\langle \sigma_0^z \sigma_r^z \rangle = \langle \sigma^z \rangle^2 - (g_r g_{-r}), \quad (2.62)$$

$$\langle \sigma^z \rangle = \frac{1}{N} \sum_k [\epsilon_k \tanh(\beta \epsilon_k)] \frac{1}{\epsilon_k}, \quad (2.63)$$

com:

$$g_r = - \sum_k [\cos(x_k r) \epsilon_k + \gamma \sin(x_k r) \sin(x_k)] \tanh(\beta \epsilon_k) \frac{1}{N \epsilon_k}. \quad (2.64)$$

### 2.5.1 Cálculo da região de transição de fase

Vamos encontrar as regiões de transição de fase para o modelo XYT e, como caso particular, obter a região para o modelo XY. Como  $\epsilon_k \geq 0 \quad \forall k$ , temos que o estado fundamental é o de vácuo. No limite termodinâmico, a energia desse estado é dada por:

$$E_0 = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \sqrt{(\lambda - \cos x - 2\alpha \cos 2x)^2 + (\gamma \sin x)^2}. \quad (2.65)$$

Considere  $\gamma = 0, 5$ . Seja  $e_0(x, \alpha, \lambda)$  o argumento da integral acima. A quantidade  $\frac{\partial^2 E_0}{\partial \alpha^2}$  é tal que:

$$\frac{\partial^2 E_0}{\partial \alpha^2} = \int_{-\pi}^{\pi} dx \frac{\partial^2 e_0}{\partial \alpha^2}. \quad (2.66)$$

Seja  $u = (\gamma \sin x)^2$  e considere a troca  $\epsilon_k \rightarrow \epsilon(x)$  que ocorre por causa do limite

termodinâmico, tem-se:

$$\frac{\partial^2 e_0}{\partial \alpha^2} = -\frac{1}{2\pi} \left\{ (\epsilon^2 + u)^{-1/2} \left[ \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \right)^2 + \epsilon \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \alpha^2} \right] - \left( \epsilon \frac{\partial \epsilon}{\partial \alpha} \right)^2 (\epsilon^2 + u)^{-3/2} \right\}. \quad (2.67)$$

Analisando essa expressão, verifica-se que duas regiões de descontinuidade de  $\frac{\partial^2 E_0}{\partial \alpha^2}$ , dadas por:

$$\lambda - 2\alpha = \pm 1. \quad (2.68)$$

No caso do modelo XY,  $\alpha = 0$ , para valores positivos de  $\lambda$ ,  $\lambda = 1$  é o ponto de transição de fase quântica, o qual separa a fase ferromagnética ( $\lambda < 1$ ) da fase paramagnética ( $\lambda > 1$ ). Quanto ao modelo XYT, a equação (2.68) define duas retas no plano definido por  $\lambda$  e  $\alpha$ . Acima da reta  $\lambda = 2\alpha + 1$ , temos a fase ferromagnética. Entre  $\lambda = 2\alpha + 1$  e  $\lambda = 2\alpha - 1$  temos a fase líquido de spin I e, abaixo de  $\lambda = 2\alpha - 1$ , a líquido de spin II.

# Capítulo 3

## Incerteza quântica local nas cadeias XY e XYT

Neste capítulo, irei utilizar a IQL e a entropia linear e suas derivadas como ferramentas para identificar a TFQ nas cadeias de spin 1/2 XY e XYT. O objetivo é verificar o potencial dessas quantidades em identificar TFQ, motivando sua aplicação em outros sistemas de muitos corpos. A IQL será avaliada entre pares de spins das cadeias, considerando vizinhos e pares mais distantes entre si, a fim de ver sua relação com a distância. Na literatura, a identificação da região crítica do modelo XY foi estudada utilizando medidas de correlação clássica e quântica, como a discórdia quântica [15, 104, 105], a discórdia geométrica [106], IQL [107, 108] e outras [17, 109]. Quanto ao modelo XYT, análises da TFQ foram feitas utilizando a discórdia quântica, correlações clássicas e emaranhamento [22].

A rigor, a TFQ teoricamente ocorre em sistemas de muitos corpos no limite termodinâmico, como o sistema XY supracitado, porém também irei analisar uma cadeia finita, porém longa, de spins do modelo XYT. O número de spins da cadeia XYT neste trabalho é  $N = 2000$ . As regiões de TFQ, obtidas analiticamente, foram introduzidas no capítulo anterior. Supomos que ambos os sistemas estão num banho térmico à temperatura de zero kelvin, de modo que o estado da cadeia é o estado térmico dado pelo *ensemble* canônico da forma  $\rho = \frac{e^{-\beta H}}{Z}$ , em que  $Z$  é a função de partição canônica. No caso em que a temperatura é nula, esse estado é simplesmente o estado fundamental do sistema.

No modelo XY, a IQL foi avaliada na região  $\lambda \in [0, 2]$  e  $\gamma \in (0, 1]$ , a qual contém a transição de fase em  $\lambda = 1$ . Seja  $r = 0$  o índice de um spin da cadeia, que pode ser qualquer um já que a mesma é invariante por translação, os pares considerados foram os formados por  $r = 0$  combinado com  $r \in \{1, \dots, 4\}$ , em que  $r = 1$  é o primeiro vizinho,  $r = 2$  o segundo e assim por diante. Para temperatura nula, o gráfico da IQL nesses pares está na figura 3.1.

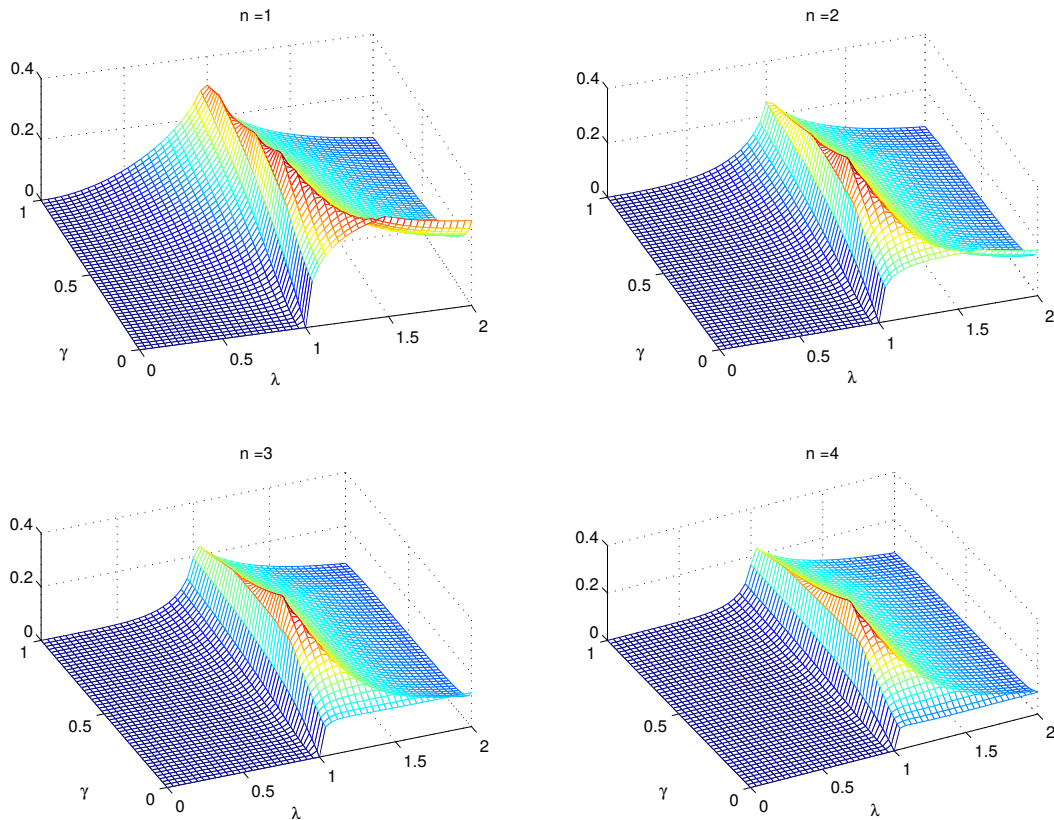


Figura 3.1: IQL, em função de  $\gamma$  e  $\lambda$ , do primeiro ao quarto vizinho, para temperatura zero no modelo XY.

Algumas propriedades podem ser observadas a partir da figura 3.1. A primeira é que seu máximo valor ocorre próximo a  $\lambda = 1$ , porém sofre um desvio desse ponto à medida que se diminui a anisotropia, de modo que ela caracteriza melhor a transição em regiões de maior anisotropia. Outra é que a IQL diminui com a distância entre os vizinhos, porém, a transição fica melhor marcada com o aumento da distância. Por fim, a IQL decresce com o aumento da

anisotropia para o primeiro vizinho, mas depois assume um aspecto côncavo com o aumento da distância entre os vizinhos, na região próxima da transição. O gráfico da derivada da IQL, na figura 3.2, entretanto, marca melhor a transição de fase, sofrendo menores desvios com a isotropia.

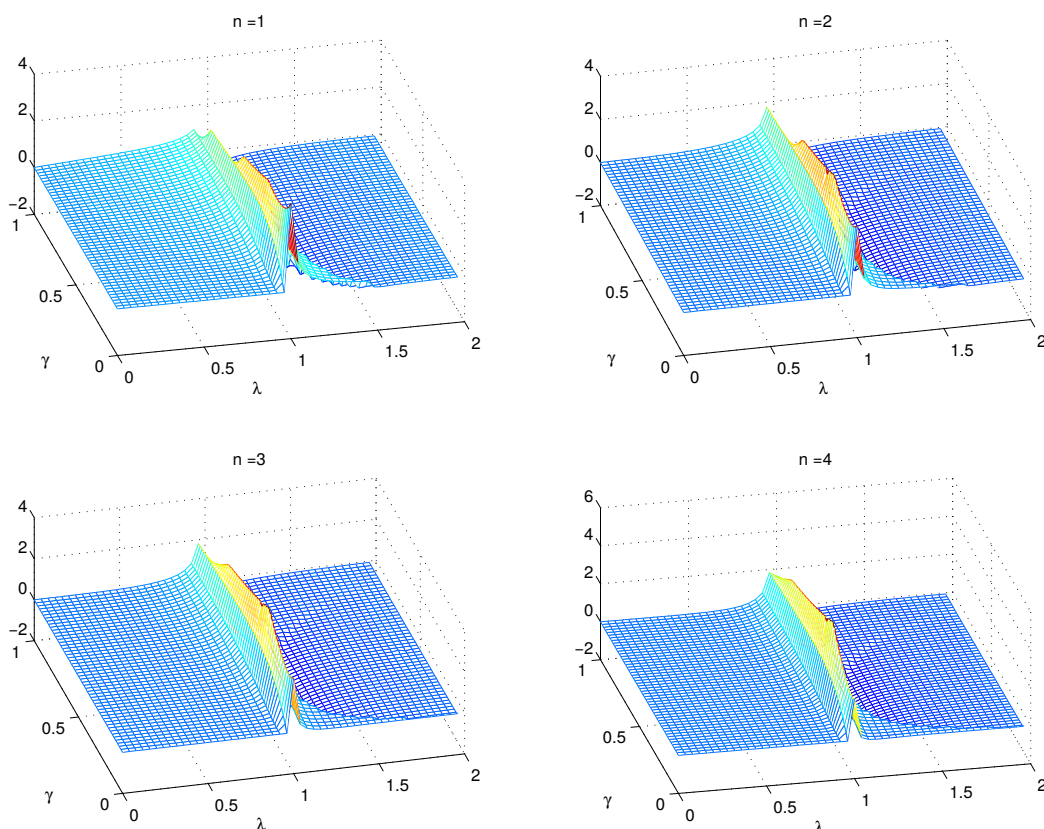


Figura 3.2: Derivada da IQL, em função de  $\gamma$  e  $\lambda$ , do primeiro ao quarto vizinho, para temperatura zero no modelo XY.

Para temperatura não nula, com  $T \in [0, 0.5]$ , no caso isotrópico, o gráfico é o da figura 3.3. É possível observar uma queda das correlações com a distância entre os vizinhos, também é observado que as correlações caem mais rapidamente com a temperatura com o aumento da distância. Por fim, como não há transição de fase em  $T$  finito, não é observado um aumento acentuado da IQL em torno de algum ponto.

Para o modelo XYT, a IQL foi calculada também para os mesmos tipos de pares de

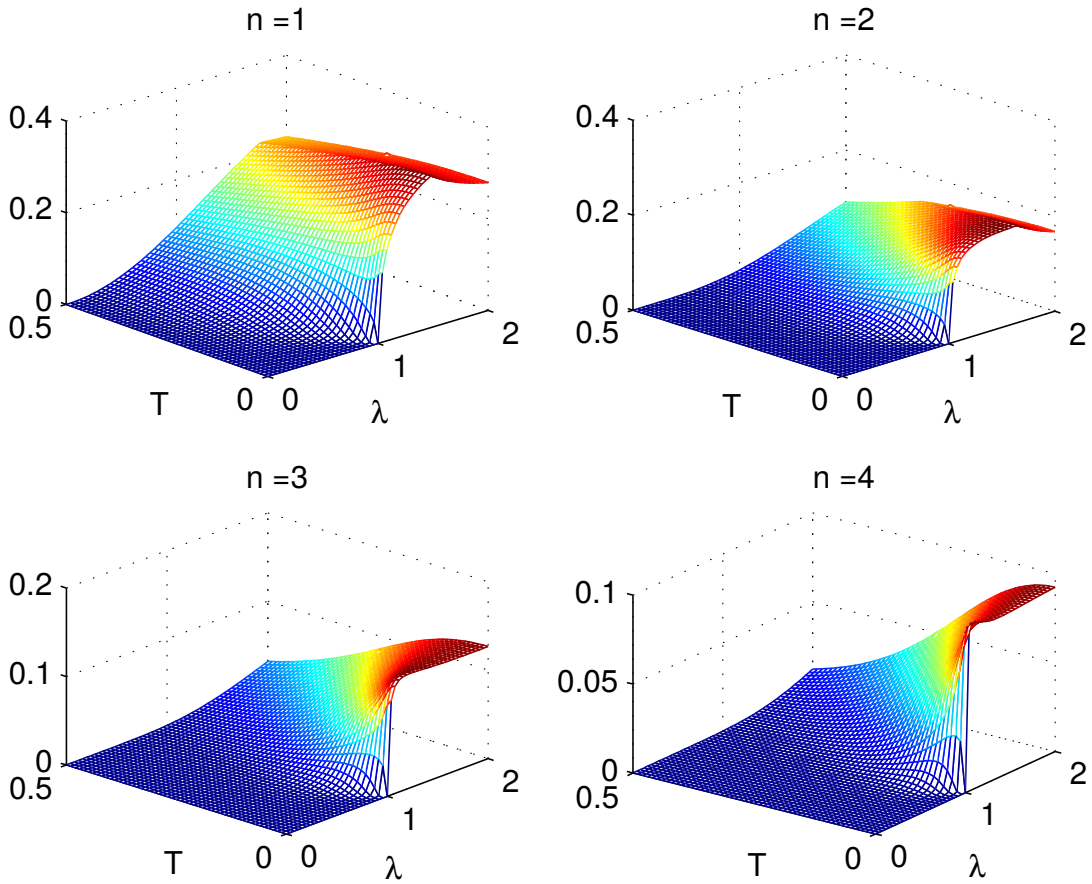


Figura 3.3: IQL, em função de  $\gamma$  e  $\lambda$ , do primeiro ao quarto vizinho, para temperatura finita no modelo XY.

spins, à temperatura zero. Para a análise gráfica, nós fixamos  $\gamma = 0.5$ , e fixamos os intervalos dos outros parâmetros, de modo que  $\lambda \in [0, 2]$  and  $\alpha \in [0, 2]$ . A fim de mostrar, inicialmente a região de transição de fase desse modelo, fizemos o cálculo da PIM, da mesma forma que foi feito na referência [17]. O gráfico dessa medida está na figura 3.4. Já o gráfico da IQL está em (3.5), o qual claramente marca as regiões de transição. Da mesma forma que no modelo XY, a IQL diminui com a distância entre os vizinhos, porém preserva sua forma qualitativa, exceto no quarto vizinho, o qual apresenta um aumento de correlação depois de  $\lambda = 0.5$ . A derivada da IQL para esse modelo também foi calculada e está na figura 3.6.

Finalmente, usamos a entropia linear para verificar se ela é capaz de identificar a transição nos modelos estudados. A resposta é que sim. Fizemos o cálculo para temperatura

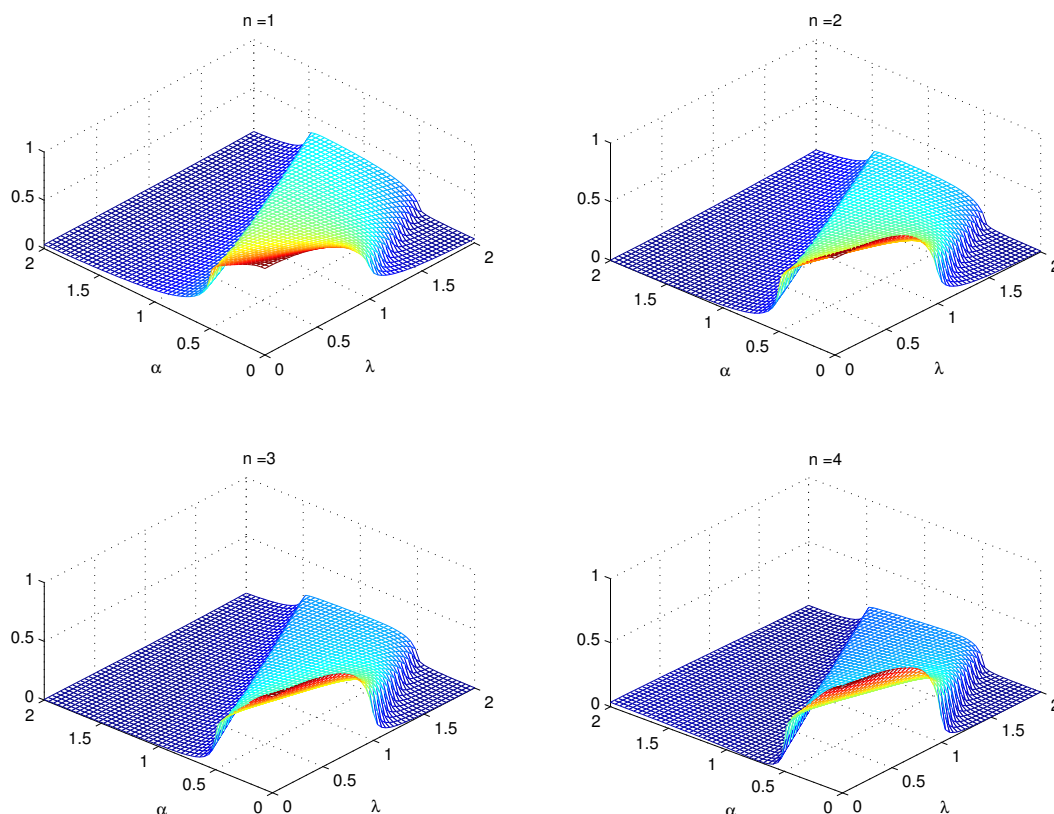


Figura 3.4: PIM, em função de  $\lambda$  e  $\alpha$ , do primeiro ao quarto vizinho, para temperatura zero e  $\gamma = 0.5$  no modelo XYT com  $N = 2000$ .

zero, de modo que os gráficos são, para o modelo XY, a figura 3.7, e para o modelo XYT, com  $\gamma = 0.5$ , a figura 3.8.

Para maior clareza na demarcação da transição, foram feitos os gráficos da derivada da entropia linear. As figuras 3.9 e (3.10) são as derivadas da entropia linear para os modelos XY e XYT, respectivamente.

Tanto a IQL e a entropia linear podem ser interpretadas como medidas de incerteza estatística nos resultados das medidas, porém a primeira capta uma incerteza de origem quântica, enquanto a segunda capta a incerteza devido à mistura estatística clássica de estados quânticos. Observando o gráfico dessas duas quantidades no modelo XY, verifica-se que são qualitativamente diferentes. Enquanto a entropia linear é alta antes da transição, com campo menor que

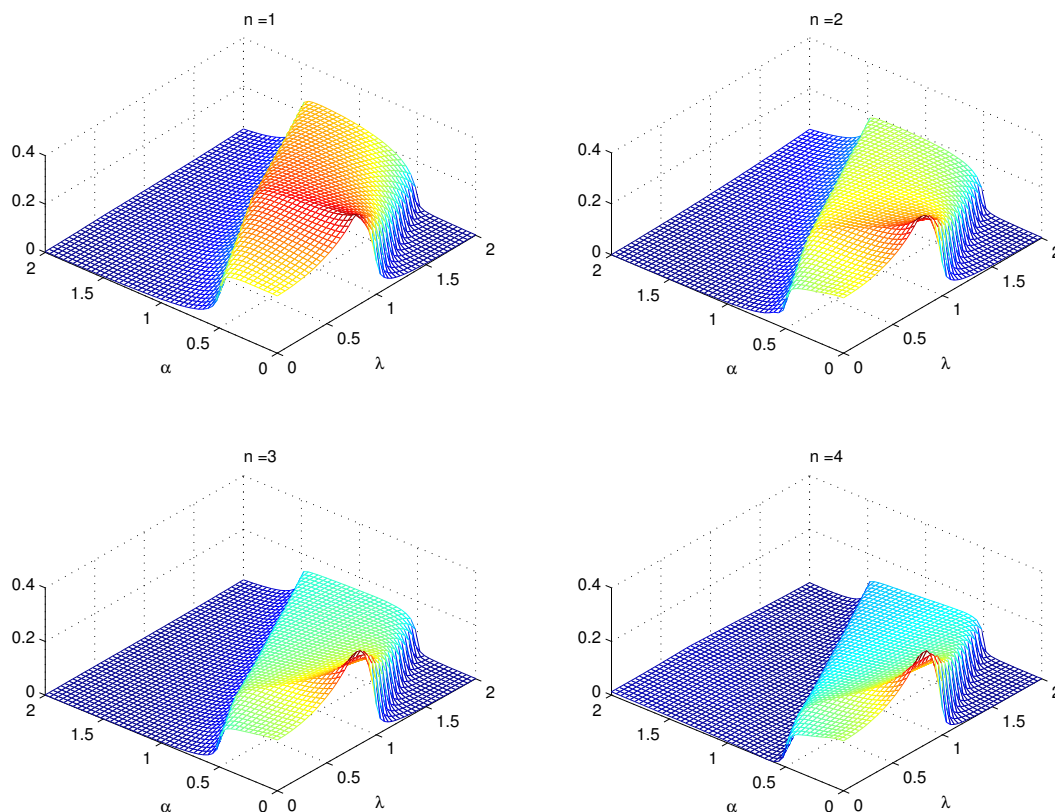


Figura 3.5: IQL, em função de  $\lambda$  e  $\alpha$ , do primeiro ao quarto vizinho, para temperatura zero e  $\gamma = 0.5$  no modelo XYT, para  $N = 2000$ .

1, e tende a zero depois desse ponto, a IQL é alta somente na transição: começa baixa com campo muito menor que 1 e tende a zero com campo muito maior que 1. Existe, porém, uma justificativa para esse comportamento. A entropia linear inicialmente é praticamente máxima porque, sem o campo, a cadeia possui simetrias de rotação de  $\pi$  em torno de qualquer eixo, de modo que não pode haver direções preferenciais de alinhamento do estado dos pares de spin do sistema. Assim, resta haver uma alta mistura de estados quânticos. O campo, à medida que aumenta, cria uma direção preferencial de alinhamento, que é a direção  $z$ , de modo que a mistura diminui bastante, principalmente perto do ponto crítico, pois a magnetização também aumenta bastante nessa região. Já a IQL tende a ser maior quando a contribuição de observáveis que não comutam torna-se mais semelhante, ou seja, quando há mais isotropia ou quando o campo

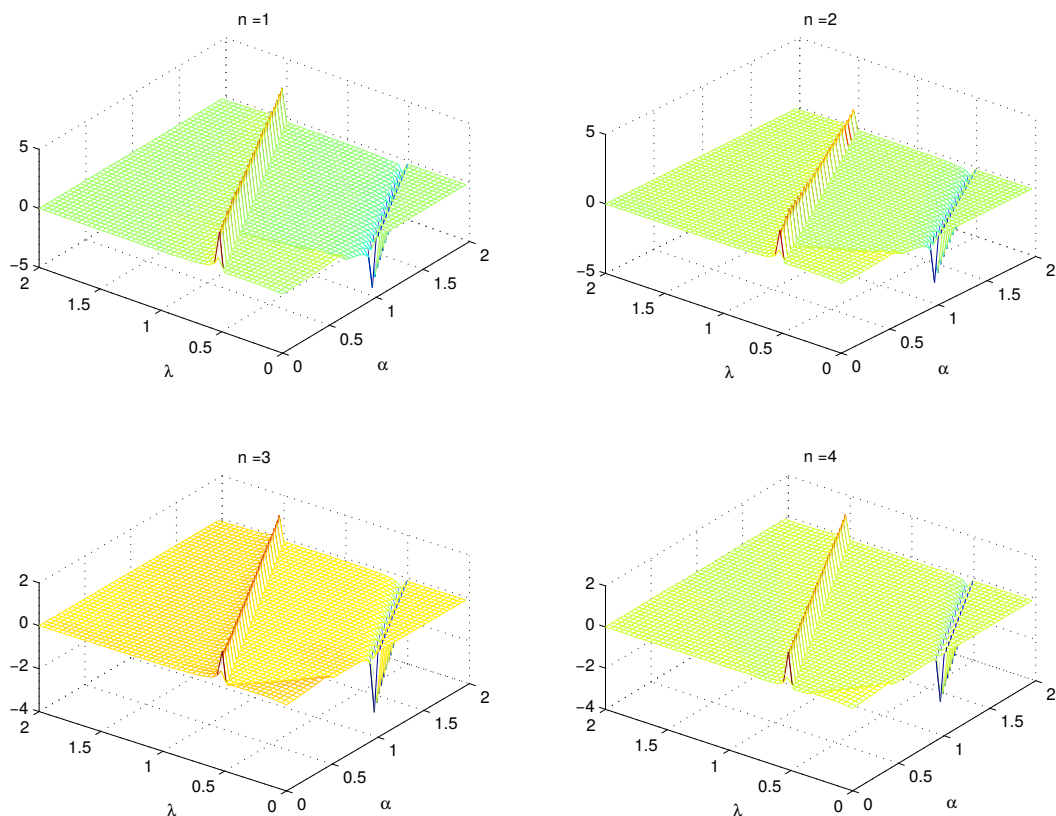


Figura 3.6: Derivada da IQL, em função de  $\lambda$  e  $\alpha$ , do primeiro ao quarto vizinho, para temperatura zero e  $\gamma = 0$  no modelo XYT com  $N = 2000$ .

tende a 1. Já o gráfico da entropia linear assemelha-se mais ao gráfico da magnetização na figura 3.11.

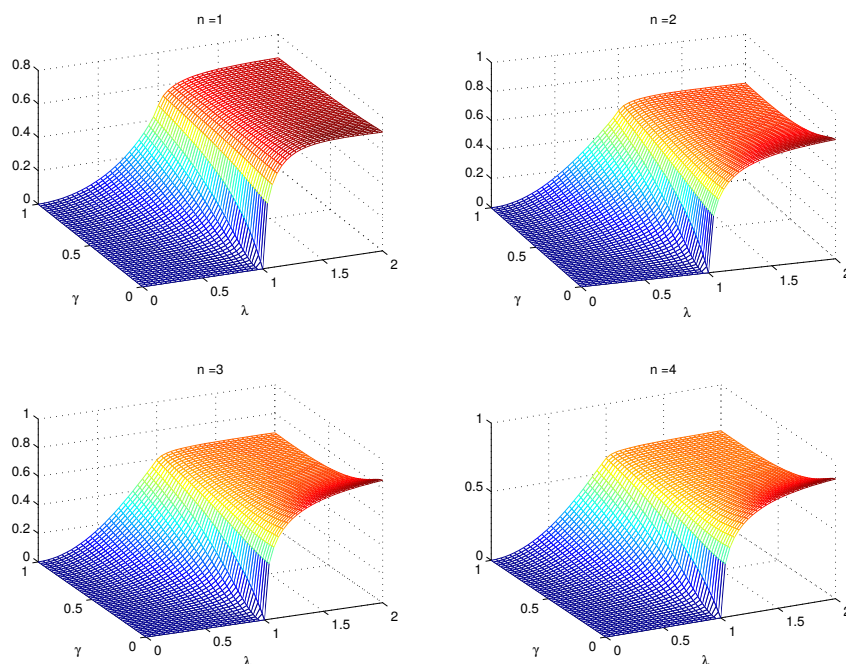


Figura 3.7: Entropia linear, em função de  $\lambda$  e  $\gamma$ , do primeiro ao quarto vizinho, para temperatura zero no modelo XY.

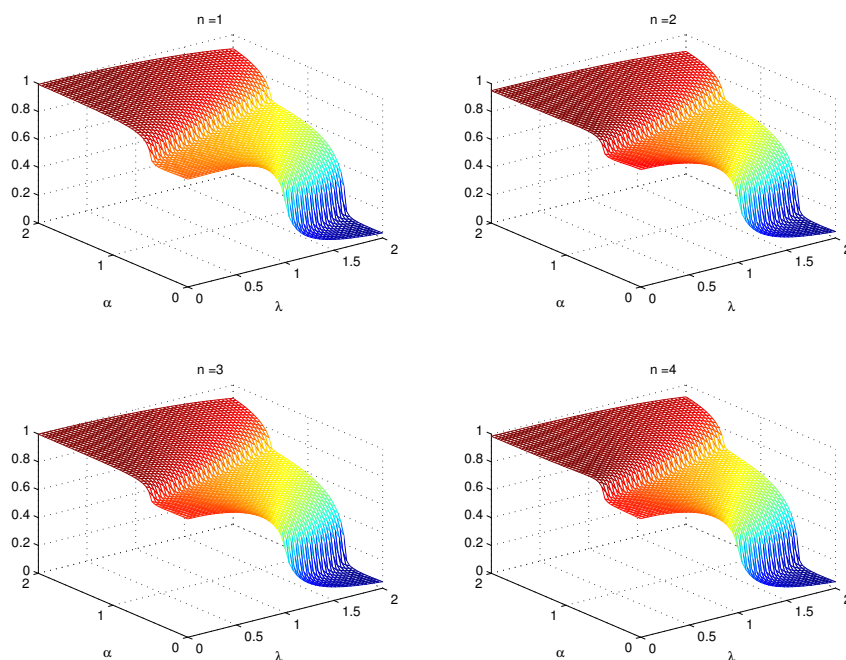


Figura 3.8: Entropia linear, em função de  $\lambda$  e  $\alpha$ , do primeiro ao quarto vizinho, para temperatura zero e  $\gamma = 0.5$  no modelo XYT com  $N = 2000$ .

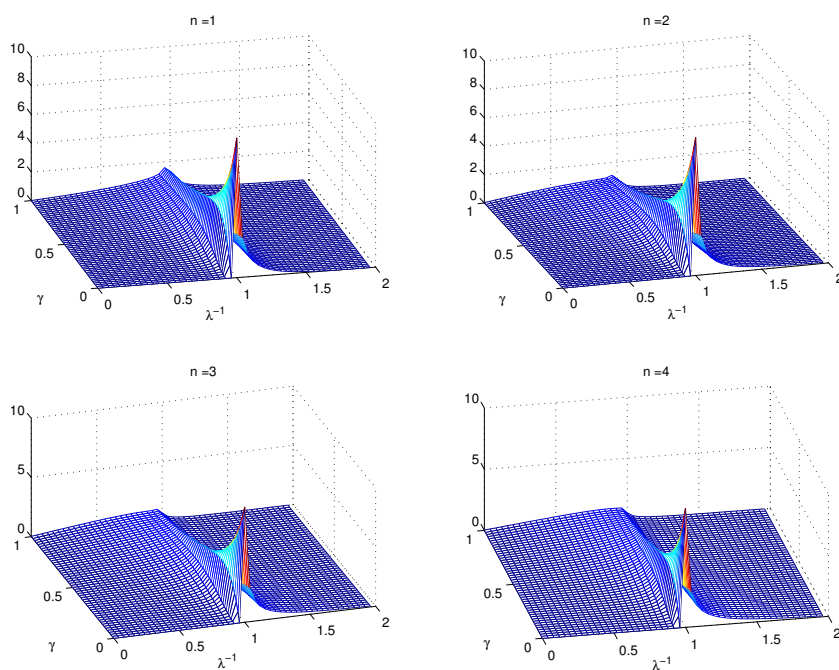


Figura 3.9: Derivada da entropia linear, do primeiro ao quarto vizinho, para temperatura zero no modelo XY.

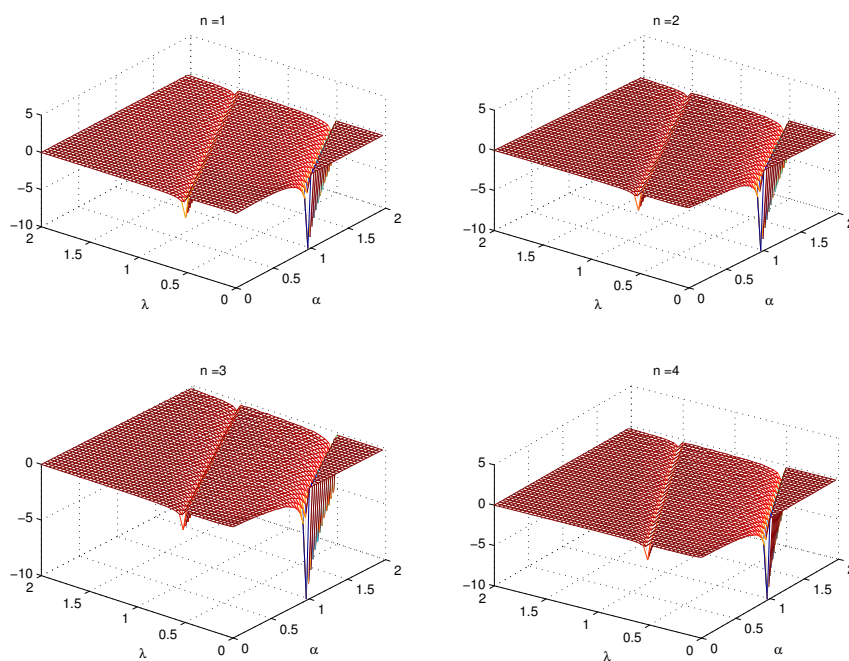


Figura 3.10: Derivada da entropia linear, do primeiro ao quarto vizinho, para temperatura zero no modelo XYT com  $N = 2000$ .

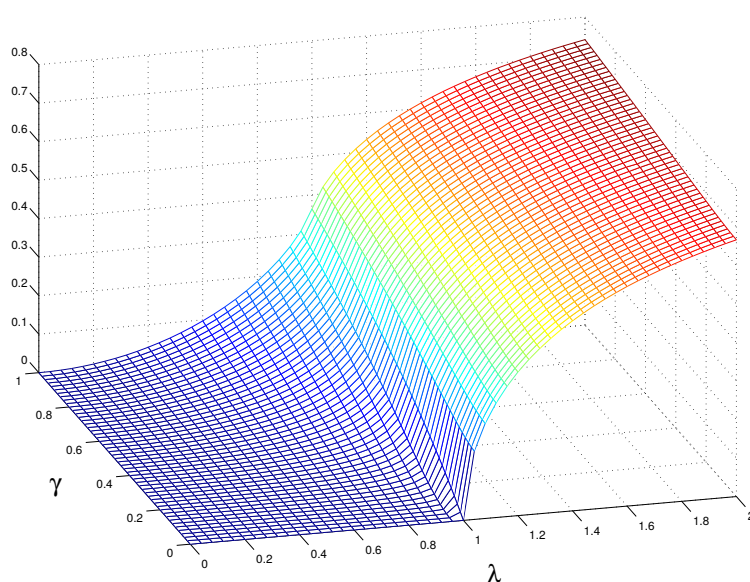


Figura 3.11: Magnetização, em relação ao primeiro vizinho, para temperatura zero no modelo XY.

# Capítulo 4

## Incerteza quântica local multipartida

Enquanto correlações bipartidas ocorrem entre dois subsistemas de um sistema global, as correlações multipartidas referem-se às que ocorrem entre três ou mais subsistemas. Diferentes medidas multipartidas foram criadas para quantificar esse tipo de correlação, como a entropia relativa de discórdia [80, 117] e generalizações da discórdia quântica [118, 119]. A medida apresentada aqui baseia-se na IQL, sendo generalizada para quantificar correlações quânticas assimétricas entre múltiplos sistemas.

### 4.1 Particionamento

Para motivar as definições apresentadas nesta seção, irei mostrar um problema que ilustra a necessidade do formalismo que será apresentado. Considere um sistema quântico com espaço de Hilbert dado por  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^8$ . Como a dimensão desse espaço é um número que pode ser fatorado de duas formas distintas, ele pode ser escrito como  $\mathbb{C}^8 = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^4$  ou como  $\mathbb{C}^8 = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ . Cada fatoração representa uma divisão distinta do sistema. A primeira pode, por exemplo, representar 3 partículas com espaço de estados  $\mathbb{C}^2$  e a segunda 2 partículas, uma com espaço  $\mathbb{C}^2$  e outra com  $\mathbb{C}^4$ . A segunda poderia ainda representar uma partícula está em um laboratório  $A$ , enquanto as outras duas estão em laboratório  $B$ , todas com espaço  $\mathbb{C}^2$ , de modo que o sistema em  $A$  tenha espaço  $\mathbb{C}^2$  e o sistema em  $B$ , composto por duas partículas, tenha espaço  $\mathbb{C}^4$ , conforme ilustra a figura 4.1. Vemos, portanto, que apenas especificar o

espaço de Hilbert do sistema não nos diz como o sistema está dividido em subsistemas devido às suas múltiplas “fatorações” possíveis.

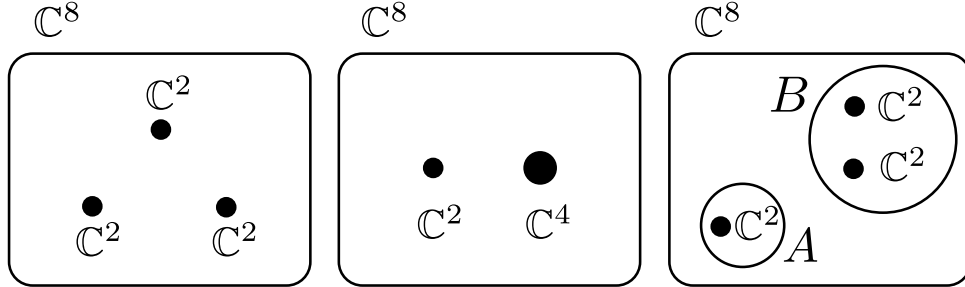


Figura 4.1: Diferentes “fatorações” do espaço de estados  $\mathbb{C}^8$ .  $A$  e  $B$  são dois laboratórios distintos.

Ainda no mesmo exemplo, podemos analisar como um estado quântico  $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^8$  fica representado em bases distintas de acordo com o tipo de “fatoração”. Sejam  $B_1 \equiv \{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle\}$  uma base de  $\mathbb{C}^2$  e  $B_2 \equiv \{|\chi_i\rangle, \dots, |\chi_4\rangle\}$  uma base de  $\mathbb{C}^4$ . O estado  $|\psi\rangle$ , de acordo com a primeira e a segunda “fatoração”, pode ser escrito da forma:

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j,k=1}^2 \psi_{i,j,k} |\phi_i\rangle |\phi_j\rangle |\phi_k\rangle = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^4 \psi'_{i,j} |\phi_i\rangle |\chi_j\rangle.$$

Algumas características de um sistema dependem de como seu estado é “fatorado”. Por exemplo: se quisermos saber se o estado  $|\psi\rangle$  possui correlação tipo discórdia, precisamos saber qual é o par de subsistemas considerado ou se queremos calcular as correlações dos três sistemas entre si (tripartidas). Com o objetivo de definir uma “fatoração” explícita para o espaço de Hilbert do sistema, irei introduzir o conceito de “particionamento”.

### 4.1.1 Definições

Seja  $M$  um conjunto de  $m$  espaços de Hilbert de dimensão maior ou igual a 2. Vamos definir a função sobrejetora  $s^{(n)} : \mathcal{I} \rightarrow M$ , com  $|\mathcal{I}| = n$  e  $n \geq m$ , tal que  $\mathcal{H}_k \equiv s^{(n)}(k) \in M$ . Nomeamos  $s^{(n)}$  de  $n$ -particionamento de  $\mathcal{H} \equiv \bigotimes_{k \in \mathcal{I}} \mathcal{H}_k$ , sendo  $s^{(1)}$  denominado particionamento trivial. Para ilustrar esta definição, considere um sistema físico com 5 partículas, conforme figura 4.2, cada uma delas possuindo um espaço de Hilbert associado à grandeza “spin”, deno-

minado  $\mathcal{H}_k$  para a partícula  $k$ . Como duas ou mais partículas podem ter espaços de Hilbert idênticos, o conjunto dos espaços de Hilbert desse sistema (o conjunto  $M$ ) possui  $m$  elementos tal que  $m \leq n$ , sendo que a igualdade ocorre quando não há duas ou mais partículas com espaços idênticos. O espaço de Hilbert do sistema total é o produto tensorial dos espaços de seus subsistemas. Assim, temos que esse sistema é  $n$ -particionado, sendo  $s^{(n)}$  seu  $n$ -particionamento da forma como foi definido anteriormente.

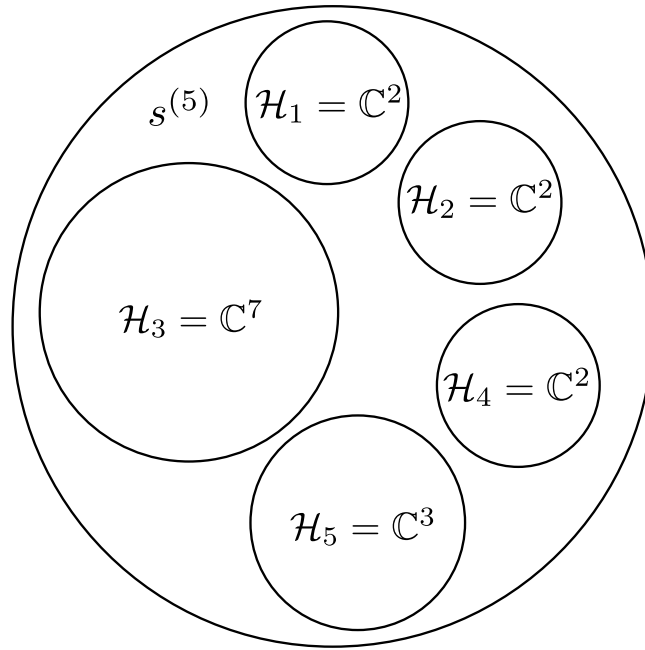


Figura 4.2: “Sistema” 5-particionado de acordo com o particionamento  $s^{(5)}$

Sejam  $s$  e  $r$  dois particionamentos de  $\mathcal{H}$ ,  $s$  é isomorfo a  $r$  se existir uma bijeção  $f : \text{Dom}(s) \rightarrow \text{Dom}(r)$  tal que  $r = s \circ f$ . Uma restrição de  $s^{(n)}$  é denominada parte de  $s^{(n)}$ . Seja  $S \subseteq \mathbb{P}(s^{(n)})$  um conjunto de  $m$  partes, se  $\bigcup S = s^{(n)}$  e  $s_1 \cap s_2 = \emptyset \forall s_1, s_2 \in S$  em que  $s_1 \neq s_2$ ,  $S$  é uma partição de  $s^{(n)}$ , também chamada de  $m$ -partição. Seja  $R$  uma  $m$ -partição de  $s^{(n)}$  e  $r_k \in R$ ,  $k \in \mathcal{J} \equiv \{1, \dots, m\}$ , definimos  $\mathcal{H}_k^R \equiv \bigotimes_{i \in J_k} r_k(i)$ , sendo  $J_k \equiv \text{Dom}(r_k)$ . Seja  $s_R^{(m)} : \mathcal{J} \rightarrow \{\mathcal{H}_k^R | k \in \mathcal{J}\}$ ,  $s_R^{(m)}(k) = \mathcal{H}_k^R$ ,  $s_R^{(m)}$  é um reparticionamento de  $\mathcal{H}$  pela partição  $R$ , que também é um  $m$ -particionamento de  $\mathcal{H}$ . Um exemplo de partição é a 2-partição (bipartição)  $S$  dada por  $S = \{t^{(2)}, u^{(3)}\}$ , em que  $t^{(2)}$  e  $u^{(3)}$  são restrições de  $s^{(5)}$ , conforme figura 4.3.

Um espaço de Hilbert  $n$ -particionado é definido pelo par ordenado  $(\mathcal{H}, s^{(n)})$ . Seja  $D(\mathcal{H})$

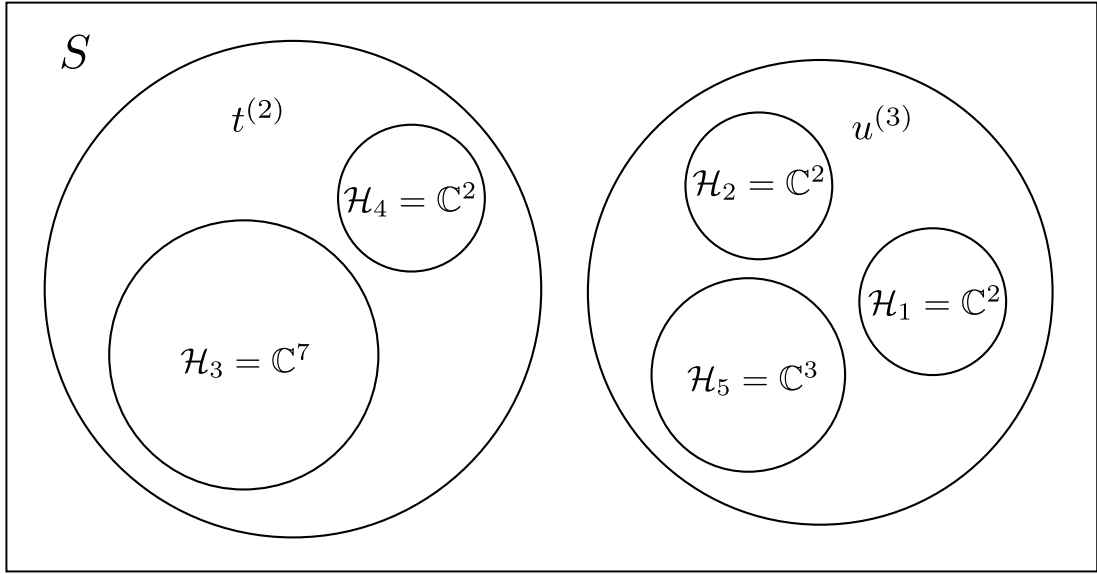


Figura 4.3: Bipartição do particionamento  $s^{(5)}$

o espaço dos operadores densidade definidos em  $\mathcal{H}$ , um estado  $\rho \in D(\mathcal{H})$  é  $m$ -partido se  $\mathcal{H}$  é  $m$ -particionado. Um estado  $\rho \in D(\mathcal{H})$ , com  $\mathcal{H}$  sem particionamento definido, é 1-partido em relação ao particionamento trivial  $\{(1, \mathcal{H})\}$ . Denominamos  $(\mathcal{H}, s^{(n)}, \rho)$  de sistema  $n$ -partido.

Vamos definir o *sistema produto*, o qual constitui na “união” de dois sistemas. Sejam  $A \equiv (\mathcal{H}_A, s^{(n)}, \rho_A)$  e  $B \equiv (\mathcal{H}_B, r^{(m)}, \rho_B)$  dois sistemas multipartidos. O sistema  $AB \equiv (\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B, t^{(n+m)}, \rho_A \otimes \rho_B)$  é o sistema produto, em que  $t^{(n+m)} : \mathcal{J} \rightarrow \text{Img}(s^{(n)}) \cup \text{Img}(r^{(m)})$ , sendo  $\mathcal{J} \equiv \text{Dom}(s^{(n)}) \cup \text{Dom}(r^{(m)})$ , denominado particionamento produto, tal que  $t^{(n+m)}(k) = s^{(n)}(k)$  se  $k \in \text{Dom}(s^{(n)})$  e  $t^{(n+m)}(l) = r^{(m)}(l)$  se  $l \in \text{Dom}(r^{(m)})$ .

Seja  $S \equiv (\mathcal{H}, s^{(n)}, \rho)$  um sistema  $n$ -partido. Vamos definir o conceito de *subsistema*. Sejam  $R = \{r_1, r_2\}$  uma bipartição (2-partição) qualquer de  $s^{(n)}$ ,  $\mathcal{H}^{r_k} \equiv \bigotimes_{i \in \text{Dom}(r_k)} \mathcal{H}_i$ ,  $\rho_{r_1} \equiv \text{Tr}_{\mathcal{H}^{r_2}}(\rho)$ , o sistema  $S_{r_1} \equiv (\mathcal{H}^{r_1}, r_1, \rho_{r_1})$  é chamado de subsistema de  $S$ . Como toda parte de  $s^{(n)}$  pertence a alguma bipartição de  $s^{(n)}$ , toda parte  $r$  de um sistema  $n$ -partido,  $n \geq 2$ , define um subsistema  $S_r$ . A figura 4.4 aplica o conceito de sistema multipartido e seus subsistemas na bipartição dada pela figura 4.3.

Seja  $S_k \equiv (\mathcal{H}_k, s_k^{(1)}, \rho_k)$  um subsistema de  $S \equiv (\mathcal{H}, s^{(n)}, \rho)$ , em que  $s^{(n)}(k) \equiv \mathcal{H}_k$  e  $s_k^{(1)} \equiv \{(k, \mathcal{H}_k)\}$ . Vamos biparticionar o subsistema  $S_k$ . Suponha que  $S_k$  é um sistema

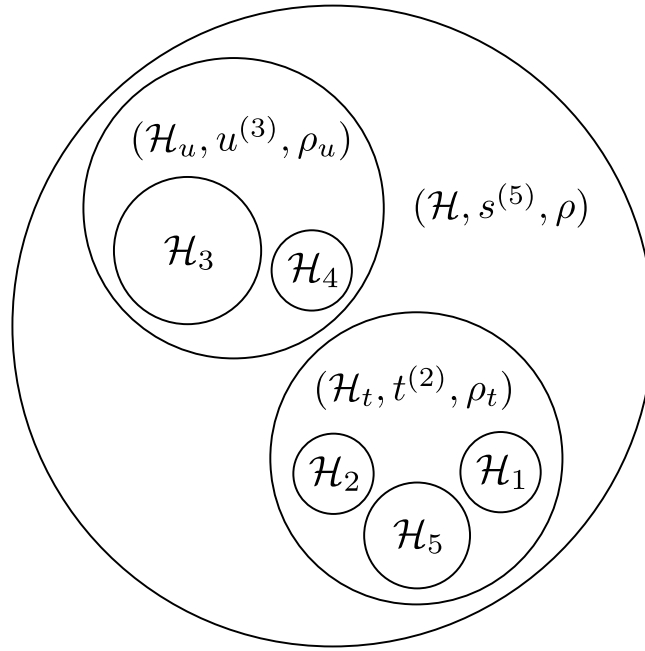


Figura 4.4:

biparticionável, ou seja, que  $\dim(\mathcal{H}_k) \notin \mathbf{P}$ , sendo  $\mathbf{P}$  o conjunto dos números primos. Assim, existe um biparticionamento  $s_k^{(2)} \equiv \{(k, \mathcal{H}_k^1), (k', \mathcal{H}_k^2)\}$ ,  $k' \notin \text{Dom}(s^{(n)})$ , de  $\mathcal{H}_k$  tal que  $S_k^2 \equiv (\mathcal{H}_k, s_k^{(2)}, \rho_k)$  é o subsistema  $S_k$  biparticionado. Com  $S_k^2$ , temos que modificar  $S$ , já que o novo sistema é  $n + 1$ -partido. O novo particionamento é dado por  $s^{(n+1)} \equiv (s^{(n)} \setminus s_k^{(1)}) \cup s_k^{(2)}$ , de modo que o sistema  $(n + 1)$ -partido é dado por  $S^{n+1,k} \equiv (\mathcal{H}, s^{(n+1)}, \rho)$ , que é o sistema  $S$  com o subsistema  $S_k$  biparticionado.

Na próxima seção, aplicarei o formalismo aqui construído na descrição e no cálculo de correlações multipartidas, ou seja, correlações entre múltiplos subsistemas.

## 4.2 Incerteza quântica local em sistemas multipartidos

Nesta seção, irei utilizar o formalismo desenvolvido na seção anterior para tratar o problema de como definir correlações multipartidas, ou seja, entre três ou mais sistemas. Mais precisamente, irei definir o conceito de correlação quântica assimétrica (CQA)  $n$ -partida, baseando-me no trabalho de Bennett et al [84], no qual correlações multipartidas são definidas.

**Definição 4.2.1.** *Sejam  $S \equiv (\mathcal{H}, s^{(n)}, \rho)$  um sistema  $n$ -partido e  $\mathcal{P}$  uma bipartição (2-partição)*

de  $s^{(n)}$ .  $S$  possui CQA  $n$ -partida se, e só se,  $S_{\mathcal{P}} \equiv (\mathcal{H}, s_{\mathcal{P}}^{(2)}, \rho)$  possui CQA bipartida para todo biparticionamento  $\mathcal{P}$  de  $s^{(n)}$ , sendo  $s_{\mathcal{P}}^{(2)}$  um reparticionamento de  $\mathcal{H}$  pela partição  $\mathcal{P}$ .

Sabemos que um sistema, com espaço de Hilbert de dimensão finita, sem CQA bipartida possui estado dado por:

$$\rho_s = \sum_k p_k \rho_k^A \otimes |k^B\rangle\langle k^B|, \quad (4.1)$$

sendo  $A$  e  $B$  as partes de  $\mathcal{P}$  e  $\{|1^B\rangle, \dots, |m^B\rangle\}$  uma base ortonormal para  $\mathcal{H}_B^{\mathcal{P}}$ , sendo  $\dim(\mathcal{H}) = m$ . Fica evidente que um sistema sem CQA  $n$ -partida possui um estado que pode ser escrito na forma  $\rho_s$  para alguma bipartição  $\mathcal{P}$ . Portanto, sistemas  $n$ -partidos com CQA  $n$ -partida são que possuem estados que não podem escritos dessa forma. Vamos verificar que sistemas com estados do tipo  $\rho_s$ , de fato, não devem possuir CQA multipartida segundo um conjunto razoável de axiomas, baseados no trabalho supracitado [84]. Seja  $S \equiv (\mathcal{H}, s^{(n)}, \rho)$  um sistema que não possui CQA  $n$ -partida, considere os seguintes axiomas:

*Axioma 1:* Se  $S'$  é um sistema 1-partido qualquer, o sistema produto  $(n+1)$ -partido  $SS'$  não possui subsistema  $n$ -partido com CQA  $n$ -partida.

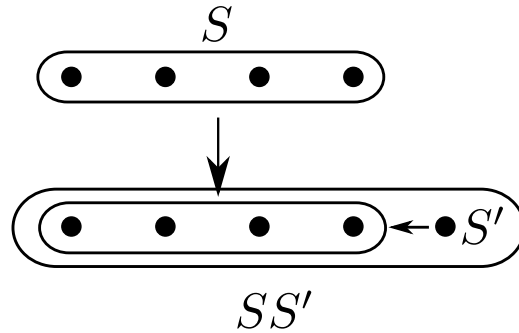
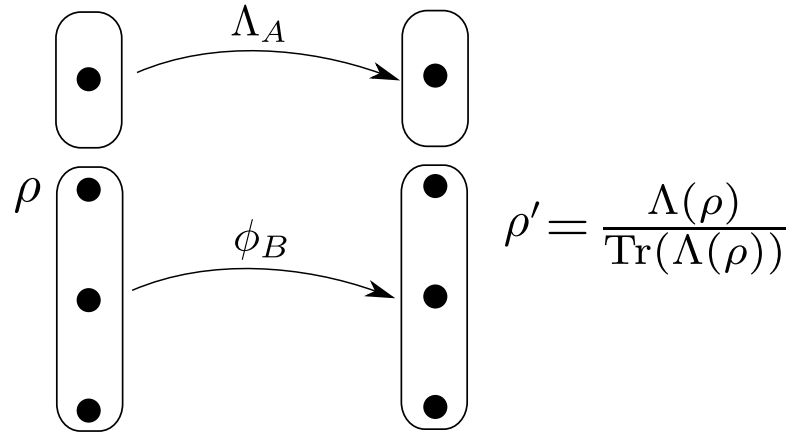


Figura 4.5: Axioma 1.

*Axioma 2:* Existe uma bipartição  $\mathcal{P} \equiv \{A, B\}$  tal que para todo mapa completamente positivo que não aumenta o traço  $\Lambda_A$  que atua em  $D(\mathcal{H}_A^{\mathcal{P}})$  e para toda operação  $\phi_B$  que atua em  $D(\mathcal{H}_B^{\mathcal{P}})$ , da forma  $\phi_B(\rho_B) \equiv U_B \rho_B U_B^\dagger$  para algum operador unitário  $U_B$ , o sistema  $S' \equiv (\mathcal{H}, s^{(n)}, \rho')$  não possui CQA  $n$ -partida, sendo  $\rho' \equiv \frac{(\Lambda_A \otimes \phi_B)(\rho)}{\text{Tr}[(\Lambda_A \otimes \phi_B)(\rho)]}$ .

*Axioma 3:* Após o subsistema de particionamento trivial  $S_k$  ser biparticionado, o novo


 Figura 4.6: Axioma 2:  $\Lambda \equiv \Lambda_A \otimes \phi_B$ 

sistema  $(n + 1)$ -particionado,  $S^{n+1,k}$ , não possui CQA  $(n + 1)$ -partida.

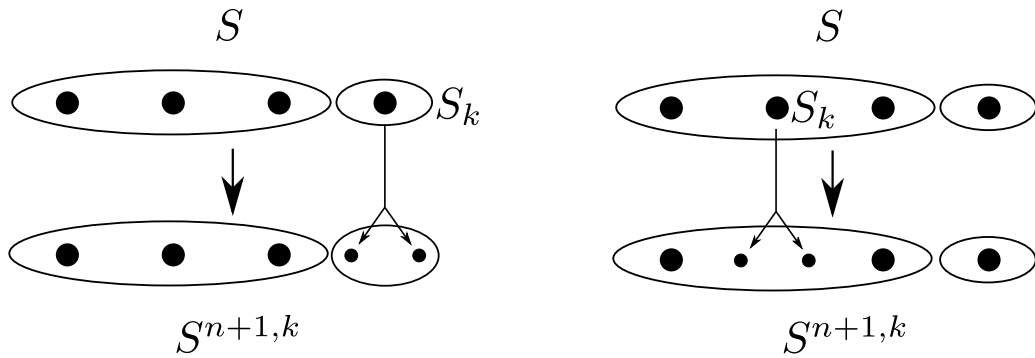


Figura 4.7: Axioma 3: o subsistema  $S_k$  é partido em dois mas, mesmo se as partes estão quanticamente correlacionadas, o sistema não passa a possuir CQA  $(n + 1)$ -partida.

**Teorema 4.2.2.** *Qualquer sistema sem CQA  $n$ -partida satisfaz os axiomas de 1, 2 e 3.*

*Demonstração.* Seja  $S = (\mathcal{H}, s^{(n)}, \rho)$  um sistema  $n$ -partido sem CQA  $n$ -partida. Portanto,  $\rho = \sum_k p_k \rho_k^A \otimes |k^B\rangle\langle k^B|$ , conforme equação 4.1. De acordo com o axioma 1, ao acrescentar  $S'$ , o estado de  $SS'$  será  $\rho'' = \rho' \otimes \sum_k \rho_k^A \otimes |k^B\rangle\langle k^B| = \rho' \otimes \rho$ . Os estados  $n$ -partidos reduzidos são da forma  $\rho_s$  ou  $\rho' \otimes \rho_r$ , em que  $\rho_r$  é um estado  $(n - 1)$ -partido de  $\rho$ . O estado  $\rho_r$  pode ser escrito por meio de sua base de autovetores da forma  $\rho_r = \sum_k q_k |r_k\rangle\langle r_k|$ . Logo,  $\rho' \otimes \rho_r = \sum_k q_k \rho_r^{(k)} \otimes |r_k\rangle\langle r_k|$  sendo  $\rho_r^{(k)} \equiv \rho' \forall k$ , o que implica que  $\rho' \otimes \rho_r$  não tem CQA  $n$ -partida. Portanto, o axioma 1 é satisfeito.

Quanto ao axioma 2, tem-se que  $(\Lambda_A \otimes \phi_B)(\rho) = \sum_k p_k \Lambda_A(\rho_k^A) \otimes U_B |k^B\rangle \langle k^B| U^\dagger = \sum_k p_k \tilde{\rho}_k^A \otimes |\tilde{k}^B\rangle \langle \tilde{k}^B|$ , sendo  $\tilde{\rho}_k^A$  uma matriz densidade não normalizada  $\forall k$  e  $\{|\tilde{1}^B\rangle, \dots, |\tilde{m}^B\rangle\}$  uma nova base de  $\mathcal{H}_B$  para  $\dim(\mathcal{H}) = m$ . Sendo  $q_k \equiv \frac{p_k}{\text{Tr}[(\Lambda_A \otimes \phi_B)(\rho)]}$ , o estado normalizado  $\sum_k q_k \tilde{\rho}_k^A \otimes |\tilde{k}^B\rangle \langle \tilde{k}^B|$  não tem CQA  $n$ -partida, satisfazendo o axioma 2.

Por fim, de acordo com o axioma 3, ocorre um reparticionamento do sistema  $S$ . Entretanto, esse reparticionamento não altera o estado  $\rho$ , apenas seu particionamento. Como ele possui a mesma forma, não há CQA  $(n+1)$ -partidas, satisfazendo o axioma 3.  $\square$

Uma vez que foi definido o conceito de correlação CQA  $n$ -partida e verificado que tal conceito satisfaz algumas propriedades fundamentais, apresentarei uma medida que objetiva quantificar esse tipo de correlação. Farei isso por meio de uma generalização da IQL, denominada GIQL.

**Definição 4.2.3.** *Sejam  $S = (\mathcal{H}, s^{(n)}, \rho)$  um sistema  $n$ -partido, com  $\dim(\mathcal{H}) = m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ ,  $t$  uma parte de  $s^{(n)}$ ,  $\Theta_{\Omega_t}$  o conjunto de todos os observáveis  $O_t$  não degenerados de  $\mathcal{H}_t$  com espectro de autovalores dado por  $\Omega_t = \{\omega_1, \dots, \omega_r\}$ , com  $r < m$ ,  $P \equiv \mathbb{P}(s^{(n)}) \setminus \{\emptyset, s^{(n)}\}$  o conjunto das partes de  $S$  e  $\Omega = \{\Omega_t | t \in P\}$ , uma medida que quantifica correlações quânticas assimétricas multipartidas genuínas é dada por:*

$$GU^\Omega(S) \equiv \min_{t \in P} \left\{ \min_{O_t \in \Theta_{\Omega_t}} I(\rho, \mathbb{1} \otimes O_t) \right\}.$$

Vamos calcular a  $GU$  para o estado Werner-GHZ, que atua num espaço de oito dimensões, dado por:

$$\rho = \frac{(1-\mu)}{8} \mathbb{1} - \mu |GHZ\rangle \langle GHZ|, \quad |GHZ\rangle = \frac{|000\rangle + |111\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (4.2)$$

sendo  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  uma base ortonormal para o espaço dos qubits. Temos que:

$$\sqrt{\rho} = a \mathbb{1} + b |GHZ\rangle \langle GHZ|, \quad (4.3)$$

$$a = \frac{\sqrt{1-\mu}}{\sqrt{8}}, \quad b = \frac{(\sqrt{1-\mu} + \sqrt{1+7\mu})}{\sqrt{8}}. \quad (4.4)$$

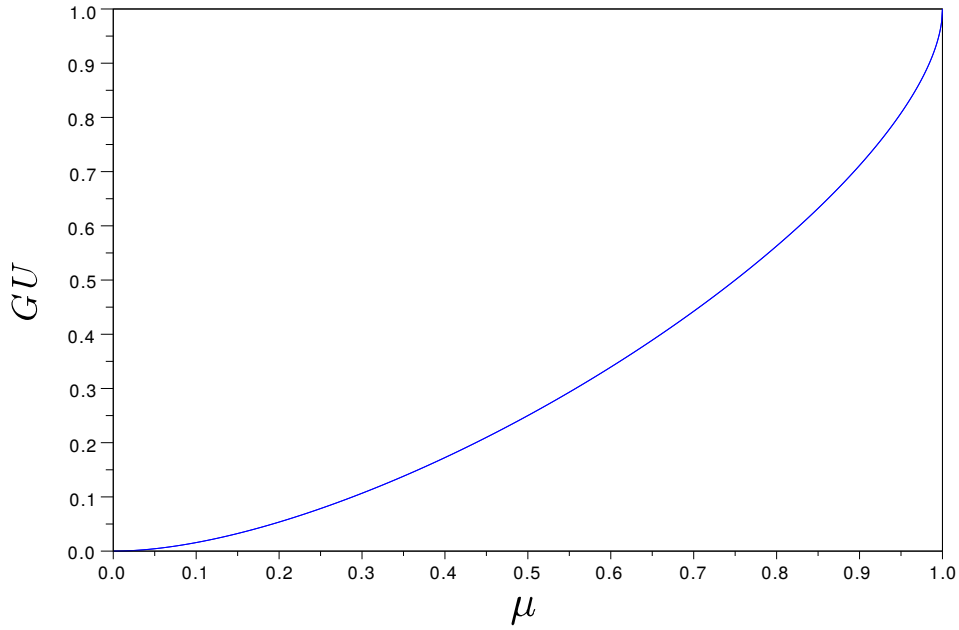


Figura 4.8: GU para o estado Werner-GHZ em função do parâmetro  $\mu$

Temos, portanto, que:

$$\begin{aligned}
GU^\Omega(S) &= \min_{t \in P} \left\{ \min_{O_t \in \Theta_{\Omega_t}} \left[ -\frac{1}{2} \text{Tr} ([\sqrt{\rho}, \mathbb{1} \otimes O_t]^2) \right] \right\} \\
&= \min_{t \in P} \left\{ \min_{O_t \in \Theta_{\Omega_t}} \left[ -\frac{1}{2} \text{Tr} ([a\mathbb{1} + b|GHZ\rangle\langle GHZ|, \mathbb{1} \otimes O_t]^2) \right] \right\} \\
&= b^2 \min_{t \in P} \left\{ \min_{O_t \in \Theta_{\Omega_t}} \left[ -\frac{1}{2} \text{Tr} (|[GHZ\rangle\langle GHZ|, \mathbb{1} \otimes O_t]^2) \right] \right\}. \tag{4.5}
\end{aligned}$$

Com isso,  $GU$  reduz-se a  $b^2 GU^\Omega(S_{GHZ})$ , sendo  $S_{GHZ} \equiv (\mathbb{C}^8, s^{(3)}, |GHZ\rangle\langle GHZ|)$  o sistema associado ao estado  $|GHZ\rangle$ . Como o valor de  $GU^\Omega(S_{GHZ})$  depende de uma escolha arbitrária de  $\Omega$ , podemos escolher um  $\Omega$  de modo que  $GU^\Omega(|GHZ\rangle) = 1$  para que possamos observar o comportamento qualitativo de  $GU$  à medida que variamos o parâmetro  $\mu$  da família de estados Werner-GHZ. Assim, temos que  $GU^\Omega(S) = b^2$ , o que está representado na curva abaixo:

O resultado mostrado pela figura 4.8 é qualitativamente semelhante ao obtido com a discórdia global [119]. À medida que  $\mu$  aumenta, o estado fica cada vez mais próximo do  $|GHZ\rangle$ ,

---

que é um estado maximamente emaranhado [120], o que sugere que as correlações quânticas no sistema devem aumentar. De fato, as CQA tripartidas são estritamente crescentes com  $\mu$ .

# Conclusão

Por meio de medidas quantitativas do grau de correlação quântica presente entre os diferentes sistemas de spin que compõe uma cadeia unidimensional de spins, foi possível investigar a presença de transição de fase quântica (TFQ). Utilizando, como modelos de cadeias, os modelos XY e XYT, verificou-se que a informação quântica local (IQL) entre sistemas de spins vizinhos na cadeia é capaz de identificar suas regiões de TFQ. Uma melhor identificação da transição foi obtida com a derivada da IQL, o que sugere uma relação mais forte entre a taxa de variação das correlações quânticas e a TFQ do que entre as próprias correlações quânticas e a TFQ quando são consideradas transições de fase contínuas; relação essa também sugerida pela literatura. Outra verificação foi a de que a IQL entre vizinhos mais distantes marca melhor transição nos modelos analisados do que entre vizinhos mais próximo, o que evidencia uma lei de decaimento das correlações quânticas diferenciada na região de TFQ, o que também é verificado para outras medidas conforme está na literatura. A entropia linear, que quantifica o grau de mistura estatística de um estado quântico também sinaliza a TFQ. Entretanto, suas derivadas, assim como no caso da IQL, obtiveram uma melhor assinatura da transição. Tal fato sinaliza que as correlações quânticas não possuem um papel tão distinto como marcadores de TFQ e que medidas mais simples podem exercer o mesmo papel. Futuras análises são necessárias para determinar o nível de abrangência da detecção de TFQ por medidas mais simples e se mistura estatística está fundamentalmente relacionada com as transições.

Correlações quânticas multipartidas também foram investigadas e um formalismo para a representação matemática de sistemas multipartidos, denominado de “particionamento” foi criado com o fim de tornar o tratamento de sistemas multipartidos mais geral e abstrato.

Utilizando esse formalismo, foi analisado um conjunto de postulados que definem correlações multipartidas genuínas, ou seja, que não são equivalentes a correlações que ocorrem em entre uma quantidade menor de partes do sistema global. Esse conjunto foi redefinido para comportar o conceito de correlação assimétrica, como a presente em estados clássico-quânticos, e uma definição para estados com correlação quântica multipartida genuína assimétrica foi criada. Para quantificar tais correlações, foi definida uma nova medida, denominada “incerteza quântica local generalizada” (GIQL) que satisfaz os postulados e fez-se seu gráfico para a família de estados tripartidos Werner-GHZ. O resultado foi comparado com a discórdia global, uma medida multipartida, e verificou-se boa compatibilidade. Espera-se que, com a publicação do trabalho contendo a GIQL e o formalismo do particionamento, que tal medida possa ser usada em futuras análises com o tipo de correlação tratada neste trabalho e que o formalismo possa ter seu potencial aproveitado, principalmente em análises mais abstratas da correlação multipartida.

# Bibliografia

- [1] W. Heisenberg, *Zeit. Phys.* **49**, 619 (1928).
- [2] P. W. Anderson, *Solid State Physics* **14**, 99 (1963).
- [3] H. Bethe, *Z. Physik* **71**, 205 (1931).
- [4] E. Lieb, T. Schultz e D. Mattis, *Ann. Phys.* **16**, 407 (1961).
- [5] T. Niemeier, *Physica* **36**, 377 (1967).
- [6] E. Barouch, B. M. McCoy e M. Dresden, *Phys. Rev. A* **2**, 1075 (1970).
- [7] R. B. Stinchcombe, *J. Phys. C: Solid St. Phys.* **6**, 2459 (1973).
- [8] I. Goldhirsch, *J. Phys. C: Solid St. Phys.* **12**, 5345 (1979).
- [9] J. Kurmann, G. Müller, H. Thomas, M. W. Puga e H. Beck, *J. Appl. Phys.* **52**, 1968 (1981).
- [10] D. S. Fisher, *Phys. Rev. B* **50**, 3799 (1996).
- [11] J. E. Bunder e R. H. McKenzie, *Phys. Rev. B* **60**, 355 (1999).
- [12] R. Basak e I. Chatterjee, *Phys. Rev. B* **40**, 4627 (1989).
- [13] E. Goovaerts, H. De Raedt e D. Schoemaker, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1649 (1984).
- [14] M. Steiner, J. Villain e G. G. Windsor, *Advances in Physics* **25**, 87 (1976).

- 
- [15] J. Maziero, H. C. Guzman, L. C. Céleri, M. S. Sarandy e R. M. Serra, Phys. Rev. A **82**, 012106 (2010).
- [16] L. Cilibert, R. Rossignoli e N. Canosa, Phys. Rev. A, **82**, 042316 (2010).
- [17] F. Altintas, and R. Eryigit, Annals of Physics **327**, 3084 (2012).
- [18] A. S. M. Hassan, B. Lari e P. S. Joag, J. Phys. A: Math. Theor. **48**, 485302 (2010).
- [19] T. Werlang e G. Rigolin, Phys. Rev. A **81**, 044101 (2010).
- [20] C. Y. -Xin e Y. Zhi, Commun. Theor. Phys. **54**, 60 (2010).
- [21] B. -Q. Liu, B. Shao, J. -G. Li, J. Zou e L. -A. Wu, Phys. Rev. A **83**, 052112 (2011).
- [22] Y. -C. Li e H. -Q. Lin, Phys. Rev. A **83**, 052323 (2011).
- [23] J. -J. Jiang, Y. -J Liu, F. Tang e C. -H. Yang, The European Physical Journal B **81**, 419 (2011).
- [24] L. B. -Qiong, S. Bin e Z. Jian, Commun. Theor. Phys. **56**, 46 (2011).
- [25] M. A. Yurishchev, Phys. Rev. B **84**, 024418 (2011).
- [26] W. W. Cheng, C. J. Shan, Y. B. Sheng, L. Y. Gong, S. M. Zhao e J. -M. Liu, Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures **54**, 72 (2013).
- [27] N. Goldenfeld, *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group*, Addison, Wesley, New York (1992).
- [28] S. Sachdev, *Quantum Phase Transitions*, Cambridge University Press, Cambridge (1999).
- [29] K. Wilson e J. Kogut, Phys. Rep. C **12**, 75 (1974).
- [30] J. A. Hertz, AIP Conf. Proc. **24**, 298 (1975).
- [31] J. A. Hertz, Phys. Rev. B **14**, 1165 (1976).

- [32] M. P. A. Fisher, P. B. Weichman, G. Grinstein e D. S. Fisher, *Phys. Rev. B* **40**, 546 (1989).
- [33] K. Damle and S. Sachdev, *Phys. Rev. B* **56**, 8714 (1997).
- [34] Y. Liu e A. M. Goldman, *Physica D* **83**, 163 (1995).
- [35] S. Sachdev, *Phys. World*. 7, **10**, 25 (1994).
- [36] K. R. A. Hazzard, *Quantum Phase Transitions in Cold Atoms and Low Temperature Solids*, Springer (2011).
- [37] Y. Maeno, H. Yaguchi e K. Deguchi, *Ruthenate and Rutheno-Cuprate Materials: Unconventional Superconductivity, Magnetism and Quantum Phase Transitions*, Springer (2011).
- [38] A. Osterloh, L. Amico, G. Falci e R. Fazio, *Nature* **416**, 608 (2002).
- [39] T. J. Osborn e M. C. Nielsen, *Quant. Inf. Proc.* **1**, 45 (2002).
- [40] M. S. Sarandy, *Phys. Rev. A* **80**, 022108 (2009).
- [41] R. Dillenschneider, *Phys. Rev. B* **78**, 224413 (2008).
- [42] R. Eisberg, R. Resnick, *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles*. 2 ed. Estados Unidos: John Wiley & Sons, (1985).
- [43] J. S. Bell, *Physics* **1**, 195 (1964).
- [44] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
- [45] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, R. A. Holt, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 880 (1969).
- [46] C. A. Kocher, E. D. Commins, *Phys. Rev. Lett* **18**, 575 (1967).
- [47] S. J. Freedman, J. F. Clauser, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 938 (1972).
- [48] A. Aspect, P. Grangier, G. Roger, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 460 (1981).

- [49] A. Aspect, J. Dalibard, G. Roger, Phys. Rev. Lett. **49**, 1804 (1982).
- [50] B. Hensen et al, Nature **526**, 682 (2015).
- [51] E. Schrödinger, Naturwissenschaften **23**, 807-812; 823-828; 844-849 (1935).
- [52] R. F. Werner, Phys. Rev. A **40**, 4277 (1989).
- [53] S. Yu, Q. Chen, C. Zhang, C. H. Lai, C. H. Oh, Phys. Rev. Lett. **109**, 120402 (2012).
- [54] N. Gisin, Phys. Lett. A **154**, 201 (1996).
- [55] S. Popescu, Phys. Rev. Lett. **72**, 797 (1994).
- [56] S. Popescu, Phys. Rev. Lett. **74**, 2619 (1995).
- [57] N. Gisin, Phys. Lett. A **210**, 151 (1996).
- [58] C. H. Bennett et al., Phys. Rev. Lett. **70**, 1895 (1993).
- [59] D. Bouwmeester, J. W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter, A. Zeilinger, Nature **390**, 575 (1997).
- [60] P. W. Shor, Phys. Rev. A **52**, 2493 (1995).
- [61] A. M. Steane, Phys. Rev. Lett. **77**, 793 (1996).
- [62] D. Gottesman, arXiv:quant-ph/9705052 (1997).
- [63] C. H. Bennett, S. J. Wiesner, Phys. Rev. Lett. **69**, 2881 (1992).
- [64] R. Jozsa, N. Linden, *On the role of entanglement in quantum computational speed-up*, eprint quant-ph/0201143 (2002).
- [65] G. Vidal, Phys. Rev. Lett. **91**, 147902, (2003).
- [66] H. Ollivier e W. H. Zurek, Phys. Rev. Lett. **88**, 017901 (2001).

- [67] L. Henderson e V. Vedral, *J. Phys. A: Math. Gen.* **34**, 6899 (2001).
- [68] M. Gu et al., *Nat. Phys.* **8**, 671 (2012).
- [69] B. Dakić et al., *Nat. Phys.* **8**, 666 (2012).
- [70] R. Laflamme, D. G. Cory, C. Negrevergne, L. Viola, *Quantum Inf. Comput.* **2** (2), 166 (2002).
- [71] V. Vedral, *Foundations of Physics* **40**, 1141 (2010).
- [72] E. Knill, R. Laflamme, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 5672 (1998).
- [73] A. Datta, A. Shaji, C. M. Caves, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 050502 (2008).
- [74] B. P. Lanyon, M. Barbieri, M. P. Almeida, A. G. White, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 200501 (2008).
- [75] G. Passante, O. Moussa, D. A. Trottier, R. Laflamme, *Phys. Rev. A* **84**, 044302 (2011).
- [76] J. Oppenheim, M. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 180402 (2002).
- [77] M. Horodecki et al., *Phys. Rev. Lett.* **90**, 100402 (2003).
- [78] S. Luo, *Phys. Rev. A* **77**, 022301 (2008).
- [79] A. K. Rajagopal e R. W. Rendell, *Phys. Rev. A* **66**, 022104 (2002).
- [80] K. Modi et al., *Phys. Rev. Lett.* **104**, 080501 (2010).
- [81] S. Luo e S. Fu, *Phys. Rev. A* **82**, 034302 (2010).
- [82] B. Dakić, V. Vedral e C. Brukner, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 190502 (2010).
- [83] D. Girolami, T. Tufarelli e Gerardo Adesso, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 240402 (2013).

- [84] C. H. Bennett et al, Phys. Rev. A **83**, 012312 (2011).
- [85] C. E. Shannon, Bell System Technical Journal **27**, 379 (1948).
- [86] S. Kullback e R. A. Leibler, Ann. Math. Statist. **22**, 79 (1951).
- [87] M. A. Nielsen e I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, Cambridge (2000).
- [88] I. Bengtsson e K. Życzkowski, *Geometry of Quantum States* (Cambridge University Press, New York, 2006).
- [89] B. Groisman, S. Popescu e A. Winter, Phys. Rev. A **72**, 032317 (2005).
- [90] H. Ollivier e W. H. Zurek, Phys. Rev. Lett. **88**, 017901 (2001).
- [91] A. Brodutch e K. Modi, Quantum Inf. Comput. **12**, 0721 (2012).
- [92] E. P. Wigner e M. M. Yanase, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **49**, 910 (1963).
- [93] E. P. Wigner, Z.Phys. **131**, 101 (1952).
- [94] H. Araki e M. M. Yanase, Phys.Rev. **120**, 622 (1960).
- [95] M. M. Yanase, Phys.Rev. **123**, 666 (1961).
- [96] S. Luo, S. Fu e C. H. Oh, Phys. Rev. A **85**, 032117 (2012).
- [97] P. Kopietz, L. Bartosch e F. Schütz, *Introduction to Functional Renormalization Group* (Springer, Berlin Heidelberg, 2010).
- [98] J. H. Vleck, Rev. Mod. Phys. **50**(2), 181 (1978).
- [99] M. A. Nielsen, *The Fermionic canonical commutation relations and the Jordan-Wigner transform*, [http://michaelnielsen.org/blog/archive/notes/fermions\\_and\\_jordan\\_wigner.pdf](http://michaelnielsen.org/blog/archive/notes/fermions_and_jordan_wigner.pdf). Acesso em 23 fevereiro 2014.

- [100] E. R. Caianello, *Nuovo Cimento* **10**, 1634 (1953).
- [101] M. Suzuki, *Prog. Theor. Phys.* **46**, 1337 (1971).
- [102] I. Titvinidze e G. I. Japaridze, *Eur. Phys. J. B* **32**, 383 (2003).
- [103] O. Derzhko, T. Verkholyak, T. Krokhmalskii e H. Büttner, *Phys. Rev. B* **73**, 214407 (2006).
- [104] M. S. Sarandy, T. R. de Oliveira e L. Amico, *Int. J. Mod. Phys. B* **27**, 1345030 (2013).
- [105] T. Werlang, G. A. P. Ribeiro e G. Rigolin, *Phys. Rev. A* **83**, 062334 (2011).
- [106] W. W. Cheng et al., *Physica E* **44** 1320 (2012).
- [107] T. M. Carrijo, A. T. Avelar e L. C. Céleri, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **48**, 125501 (2015).
- [108] G. Karpat, B. Çakmak e F. F. Fanchini, *Phys. Rev. B* **90**, 104431 (2014).
- [109] B. Çakmak, G. Karpat e Z. Gedik, *Phys. Lett. A* **376**, 2982 (2012).
- [110] W. Lenz, *Physikalische Zeitschrift* **21**, 613 (1920).
- [111] R. Peierls, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **32**, 477 (1936).
- [112] B. Widom e R. S. Rowlinson, *J. Chem. Phys.* **52**, 1670 (1970).
- [113] D. Ruelle, *Phys. Rev. Lett.* **27**, 1040 (1971).
- [114] O. McBryan e T. Spencer, *Commun. Math. Phys.* **53**, 299 (1977).
- [115] J. Fröhlich e T. Spencer, *Comm. Math. Phys.* **81**, 527 (1981).
- [116] J. M. Kosterlitz e D. J. Thouless, *J. of Phys. C: Solid State Physics* **6**, 1181 (1973).

- [117] K. Modi e V. Vedral, AIP Conf. Proc. **1384**, 69 (2011).
- [118] M. Okrasa e Z. Walczak, Eur. Phys. Lett. **96**, 60003 (2011).
- [119] C. C. Rulli e M. S. Sarandy, Phys. Rev. A **84**, 042109 (2011).
- [120] M. Enríquez, I. Wintrowicz e K. Życzkowski, J. of Phys.: Conf. Series **698**, 012003 (2016).