



Universidade Federal de Goiás
Instituto de Física

LUCAS ELIAS VIEIRA

Campos Escalares Aplicados em Cosmologia

Goiânia
2018

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD, UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Dissertação** **Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação:

Nome completo do autor: Lucas Elias Vieira

Título do trabalho: **Campos Escalares Aplicados em Cosmologia**

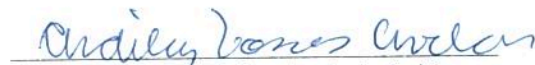
3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.


Assinatura do(a) autor(a)²

Ciente e de acordo:


Assinatura do(a) orientador(a)²

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente
- Submissão de artigo em revista científica
- Publicação como capítulo de livro
- Publicação da dissertação/tese em livro

²A assinatura deve ser escaneada.

LUCAS ELIAS VIEIRA

Campos Escalares Aplicados em Cosmologia

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Física da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

Área de pesquisa: Física de Partículas e Campos.

Orientador: Prof. Dr. Ardiley Torres Avelar

Goiânia
2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Elias Vieira, Lucas
Campos Escalares Aplicados em Cosmologia [manuscrito] /
Lucas Elias Vieira. - 2018.
LXXXVII, 87 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Ardiley Torres Avelar.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Física (IF), Programa de Pós-Graduação em Física, Goiânia, 2018.
Bibliografia. Apêndice.
Inclui símbolos, gráfico, lista de figuras.

1. Teoria clássica de campos. 2. Defeitos topológicos. 3. Cosmologia. 4. Energia escura. 5. Inflação Cósmica. I. Torres Avelar, Ardiley, orient. II. Título.

CDU 539.12



Universidade Federal de Goiás
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Física

Ata Nº 173 de defesa de dissertação
de Lucas Elias Vieira para obtenção
do título de Mestre em Física.

Aos 13 dias do mês de julho de 2018, às 14h00min, no Miniauditório do Instituto de Física, reuniu-se a Banca Examinadora designada pela Coordenadoria do Programa de Pós-Graduação do Instituto de Física da Universidade Federal de Goiás, composta pelo **Prof. Dr. Ardiley Torres Avelar** (orientador – IF/UFG), **Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito** (UAF/UFCG) e **Prof. Dr. Wesley Bueno Cardoso** (IF/UFG), para julgar a dissertação de mestrado de **Lucas Elias Vieira**, intitulada: “**Campos escalares aplicados em cosmologia**”. O Presidente abriu os trabalhos agradecendo a presença dos membros da Banca Examinadora e concedeu a palavra a Lucas Elias Vieira, que expôs detalhadamente seu trabalho. Em seguida, os membros da Banca fizeram suas considerações e procederam à arguição do candidato. Concluída essa etapa, a Banca, em sessão fechada, deu prosseguimento ao julgamento do trabalho, atribuindo os seguintes conceitos:

Prof. Dr. Ardiley Torres Avelar (orientador)

APROVADO

Prof. Dr. Francisco de A. de Brito (UAF/UFCG)

A PROVADO

Prof. Dr. Wesley Bueno Cardoso (IF/UFG)

APROVADO

Novamente em sessão aberta, o presidente da Banca anunciou o resultado final do julgamento, declarando o candidato Lucas Elias Vieira APROVADO pela Banca Examinadora. Nada mais havendo a tratar, a sessão foi encerrada e lavrou-se a presente ata que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora.

Goiânia, 13 de julho de 2018.

Ardiley Torres Avelar

Prof. Dr. Ardiley Torres Avelar (Orientador)

Francisco de Assis de Brito

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito (UAF/UFCG)

Wesley B. Cardoso

Prof. Dr. Wesley Bueno Cardoso (IF/UFG)

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador prof. Dr. Ardiley Torres Avelar pela orientação, pela sugestão do tema, pelas discussões produtivas, pelo apoio e por confiar em mim. Agradeço também ao Prof. Dr. Wesley Bueno Cardoso pelas discussões e apoio. Agradeço ao Prof. Dr. Dionisio Bazeia Filho pelas discussões, direcionamentos e sugestões.

Agradeço aos meus colegas de I.F. pela parceria, pelas conversas e pelos cafés descontraídos. Meus sinceros agradecimentos à CAPES pelo apoio financeiro que possibilitou esta etapa da minha vida.

Agradeço aos meus pais Iron e Adriana, e aos meus irmãos Mateus, Vitória, Arthur e Fernanda por sempre estarem presentes ao longo de minha vida e pelo apoio. Agradeço aos meus tios Ivan e Shirlene por me acolherem e acreditarem em mim.

RESUMO

Neste trabalho foram abordadas soluções do tipo defeitos topológicos em teoria clássica de campos. Foram investigadas soluções topológicas e não topológicas em duas dimensões, onde também analisamos a estabilidade de algumas destas. Consideramos modelos de um e dois campos escalares reais, onde utilizamos os métodos de quadratura, BPS e das órbitas para obter soluções. Com o intuito de aplicar a teoria de campos escalares em cosmologia, introduzimos a teoria da relatividade geral, falando sobre o princípio da equivalência, equações de campo de Einstein e solução de Schwarzschild para as equações de Einstein. Abordamos alguns tópicos em cosmologia, onde enunciaremos o princípio cosmológico, lei de Hubble e inflação cosmológica. Resolvemos as equações de Einstein na métrica FRW considerando o universo composto de matéria e radiação denominado modelo Big Bang quente. Com o objetivo de resolver alguns problemas de condições iniciais do universo, introduzimos a teoria inflacionária, a qual propõe que o universo primordial sofreu uma expansão acelerada guiada por um campo escalar. Após mostrar como a teoria da inflação corrige tais problemas, apresentamos o modelo cosmológico padrão, o qual afirma que o universo está em expansão acelerada e utiliza uma constante cosmológica como guia da expansão, tal constante neste cenário representa a denominada energia escura que compõe aproximadamente setenta por cento do universo. Finalmente, nós apresentamos o formalismo de primeira ordem para cosmologia e discutimos dois modelos descrevendo dinâmicas padrão e taquiônica para o campo escalar, representando a energia escura.

Palavras - chave: Teoria clássica de campos - Defeitos topológicos - Cosmologia - Energia escura - Inflação Cósmica

ABSTRACT

In this work, we study topological defects in classical field theory aiming applications in cosmology. Topological and non-topological solutions were investigated in two dimensions, where we also analyzed the stability of some of these. We consider models of one and two real scalar fields, whose solutions were obtained via quadrature, BPS and orbit methods. The stability of these solutions also were investigated in some cases. In order to apply scalar field theory in cosmology, we revisit some topics of general relativity, such that the principle of equivalence, Einstein's field equations and Schwarzschild's solution for Einstein's equation. We also present some topics in cosmology, relevant to the present work, such that the cosmological principle, Hubble's law and cosmological inflation. We discuss the solutions of the Einstein's equations in the FRW metric in the so-called Hot Big Bang model-the universe composed of matter and radiation. In order to solve some problems of initial conditions of the universe, we introduce the inflationary theory, which supposes that the primordial universe was underwent an accelerated expansion guided by a scalar field. In sequence, we introduce the standard cosmological model, which states that the universe is in accelerated expansion driving by a cosmological constant, named dark energy, which constitutes about seventy percent of the universe energy. Finally, we present a first order formalism for cosmology and discuss two model describing the standard and tachyonics dynamics for scalar field that represent the dark energy.

Key - words: Classical theory of fields - Topological defects - Cosmology - Dark Energy - Cosmic inflation

LISTA DE FIGURAS

| | | |
|---------------------|--|----|
| Figura 2.1: | Gráfico das soluções do tipo kink e anti kink associadas ao potencial ϕ^4 | 15 |
| Figura 2.2: | Gráfico da densidade de energia da solução do tipo kink do modelo ϕ^4 | 16 |
| Figura 2.3: | Gráfico do potencial seno-Gordon. | 17 |
| Figura 2.4: | Gráfico da solução tipo kink associada ao modelo seno-Gordon. . . | 18 |
| Figura 2.5: | Gráfico do potencial ϕ^3 | 18 |
| Figura 2.6: | Gráfico da solução do tipo lump associada ao modelo ϕ^3 | 19 |
| Figura 2.7: | Gráfico da densidade de energia da solução do tipo lump do modelo ϕ^3 | 20 |
| Figura 2.8: | Gráfico do potencial ϕ^4 invertido. | 20 |
| Figura 2.9: | Gráfico da solução do tipo lump associada ao potencial ϕ^4 invertido. . | 20 |
| Figura 2.10: | Gráfico do potencial que caracteriza o modelo BNRT. | 28 |
| Figura 4.1: | Gráfico do parâmetro de Hubble em função do tempo para o modelo $W = A\phi^2$ | 58 |
| Figura 4.2: | Gráfico do parâmetro de aceleração em função do tempo para o modelo definido por $W = A\phi^2$ | 59 |
| Figura 4.3: | Gráfico do parâmetro de Hubble para o modelo definido por $W(\phi) = A/\phi$ | 61 |

SUMÁRIO

| | |
|---|-----------|
| Capítulo 1: INTRODUÇÃO | 9 |
| Capítulo 2: DEFEITOS TOPOLÓGICOS | 11 |
| 2.1 Modelos de 1 campo | 11 |
| 2.2 Kinks | 14 |
| 2.3 Lumps | 18 |
| 2.4 Estabilidade linear de soluções | 21 |
| 2.5 Quebra espontânea de simetria | 22 |
| 2.6 Método de deformação | 23 |
| 2.7 Modelos de 2 campos | 25 |
| 2.8 Soluções BPS em modelos de 2 campos | 26 |
| 2.9 Modelo BNRT | 27 |
| Capítulo 3: TÓPICOS EM RELATIVIDADE GERAL E COSMOLOGIA | 31 |
| 3.1 Princípio De Equivalência | 31 |
| 3.2 Limite Para Campos Fracos | 36 |
| 3.3 Equações de Campo de Einstein | 37 |
| 3.4 Solução de Schwarzschild | 40 |
| 3.5 Princípio Cosmológico e Lei de Hubble | 41 |
| 3.6 Solução das Equações de Einstein na Métrica F.R.W | 42 |
| 3.7 Inflação Cósmica | 48 |
| 3.7.1 Problema da Planura e Problema do Horizonte | 48 |
| 3.7.2 Inflação Guiada Por Uma Constante Cosmológica Λ | 49 |
| 3.7.3 Inflação Guiada Por Um Campo Escalar ϕ | 50 |
| 3.8 Modelo Cosmológico Padrão ou Λ -CDM | 52 |
| Capítulo 4: MODELO COSMOLÓGICO ϕ-CDM | 54 |
| 4.1 ϕ -CDM | 54 |
| 4.2 Formalismo de Primeira Ordem | 57 |
| 4.2.1 Dinâmica Padrão | 57 |
| 4.2.2 Dinâmica Taquiônica | 59 |

| | |
|---|-----------|
| Capítulo 5: CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS | 62 |
| | |
| APÊNDICES | 63 |
| | |
| Apêndice A: TÓPICOS EM TEORIA CLÁSSICA DE CAMPOS | 64 |
| A.1 Formalismo de Lagrange | 64 |
| A.2 Formalismo de Hamilton | 66 |
| A.3 Teorema de Noether | 67 |
| | |
| Apêndice B: TÓPICOS EM GEOMETRIA DIFERENCIAL | 72 |
| B.1 Variedades | 72 |
| B.1.1 Espaços Topológicos | 72 |
| B.1.2 Variedades Diferenciáveis | 73 |
| B.1.3 Funções Diferenciáveis e Vetores Sobre Uma Variedade | 74 |
| B.1.4 1-forma e Tensores Sobre Uma Variedade | 75 |
| B.2 Variedades Riemannianas e Pseudo Riemannianas | 76 |
| B.2.1 Tensor Métrico | 76 |
| B.2.2 Derivada Covariante, Transporte Paralelo e Geodésicas | 78 |
| B.2.3 Tensor de Curvatura de Riemann | 81 |
| B.3 Vetores de Killing; Espaços Maximalmente Simétricos | 82 |

INTRODUÇÃO

Foi confirmado em 1998, por meio de observações astronômicas a expansão acelerada do universo [1, 2, 3]. Devido o caráter atrativo da força gravitacional, esperava-se um retardamento da expansão cosmológica, no entanto as observações indicaram o oposto. Utilizando a relatividade geral explica-se esta expansão acelerada considerando que 70 % do universo é composto de uma forma desconhecida de energia, denominada energia escura, que estaria distribuída por todo o espaço e tende a acelerar a expansão do universo através de uma forte pressão negativa [4, 5].

Apesar dos sucessos do Modelo Cosmológico Padrão, alguns problemas ainda devem ser superados, dentre estes podemos citar a necessidade de se introduzir uma fase de expansão acelerada para se explicar alguns fenômenos relativos tanto ao universo primordial, a chamada inflação cósmica [6], quanto ao universo presente, com a chamada fase de dominação da energia escura que nos referimos acima [7].

Tal fase de expansão cósmica acelerada pode ser estudada incluindo-se um campo escalar, espalhado homogeneamente e isotropicamente no Universo [5, 8, 9, 10]. Tendo em vista o regime inflacionário, a presença do campo escalar permite a construção de um modelo capaz de responder os principais conflitos apresentados na teoria padrão [11].

O objetivo deste trabalho é abordar como teoria de campos escalares pode se apresentar como solução em problemas cosmológicos, como por exemplo, a expansão acelerada do universo que é atribuída a energia escura. Neste sentido, pretendemos utilizar a teoria aqui estudada e os métodos aqui expostos para buscar novas possíveis soluções para o universo em expansão. Para isso, abordamos num primeiro momento defeitos topológicos no contexto de um e dois campos escalares reais, num segundo momento introduzimos alguns tópicos em relatividade e cosmologia, e por fim apresentamos de que maneira podemos obter modelos cosmológicos utilizando campos escalares.

Esta dissertação está organizada da seguinte maneira: no Capítulo 2 investigamos soluções do tipo defeitos topológicos para um e dois campos escalares reais, onde introduzimos os métodos de quadratura, BPS e das órbitas. Discutimos a estabilidade de alguns destes defeitos e abordamos o denominado método de deformação.

No Capítulo 3 introduzimos a teoria da relatividade geral de Einstein, discutimos o princípio de equivalência, as equações de campo de Einstein e solução de Schwarzschild para as equações de Einstein. Ainda neste capítulo enunciamos o princípio cosmológico, resolvemos as equações de Einstein na métrica FRW para um universo composto de radiação e matéria, que é o modelo denominado big bang quente. Com o intuito de resolver alguns problemas de condições iniciais do universo introduzimos a teoria de inflação cosmológica, a qual propõe que um campo escalar (inflaton) é responsável pela expansão do universo primordial e analisamos como esta teoria resolve alguns problemas. Tratamos o modelo cosmológico padrão, e expomos como um campo escalar pode ser utilizado para modelar um universo em expansão acelerada no presente.

No Capítulo 4 apresentamos um modelo alternativo ao Modelo Cosmológico Padrão Λ -CDM, denominado ϕ -CDM, já existente na literatura, que modela a energia escura como um campo escalar real [7]. Neste cenário, como proposto nas referências [12, 13, 14], consideramos um universo dominado por energia escura e apresentamos as equações de campo de Einstein neste caso. Um método de resolver estas equações é o formalismo de primeira ordem introduzido em [12], assim, apresentamos tal método para os casos de campos com dinâmica padrão e taquiônica. Para ambos os casos ilustramos o método com alguns modelos propostos na referência [12].

No Capítulo 5 foram feitas as conclusões e apontadas as perspectivas futuras. Dois apêndices sobre alguns tópicos de geometria diferencial e de teoria clássica de campos foram incluídos, com o objetivo de facilitar a leitura e não deixar o texto principal muito denso.

DEFEITOS TOPOLÓGICOS

Expomos neste capítulo soluções do tipo defeitos topológicos no contexto de campos escalares em $(1 + 1)$ dimensões espaço temporais, ver [15]. Teremos como foco defeitos unidimensionais chamados de kinks e lumps conforme a existência ou não da carga topológica.

Modelos de 1 campo

A dinâmica de modelos descritos por um único campo escalar real pode ser analisada a partir da densidade lagrangiana [16, 17, 18]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (2.1.1)$$

em que $V(\phi)$ é um potencial que depende do sistema físico o qual estamos interessados. Considerando-se campos em $(1+1)$ dimensões de espaço e tempo, do formalismo de Lagrange, teremos a seguinte equação de movimento (Veja Apêndice A):

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (2.1.2)$$

considerando $c = 1$. As soluções clássicas pode ser classificadas como segue: soluções constantes (independentes do tempo e do espaço); soluções estáticas ou estacionárias (independentes do tempo, porém dependentes do espaço); e soluções dependentes do espaço e do tempo. Considerando campos estáticos, ou seja $\phi = \phi(x)$, a Equação (2.1.2) ficará da seguinte forma

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{dV}{d\phi}. \quad (2.1.3)$$

É possível utilizar o chamado método de quadratura [15, 18, 19], que consiste em reduzir a ordem de (2.1.3) para uma equação diferencial de primeira ordem. O método consiste

em multiplicar ambos os lados de (2.1.3) por $\frac{d\phi}{dx}$

$$\frac{d\phi}{dx} \frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{d\phi}{dx} \frac{dV}{d\phi},$$

assim podemos reescrever a última equação da seguinte forma

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 \right] = \frac{dV}{dx}, \quad (2.1.4)$$

e integrando ambos os lados temos que

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 = V + c, \quad (2.1.5)$$

onde c é uma constante de integração. A partir do tensor momento-energia (Ver Apêndice A), podemos obter a energia associada a solução estática, que é dada por

$$E = P^0 = \int_{-\infty}^{+\infty} T^{00} dx, \quad (2.1.6)$$

portanto

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \phi'^2 + V \right] dx, \quad (2.1.7)$$

substituindo (2.1.5) em (2.1.7) teremos que

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} [2V(\phi) + c] dx,$$

no entanto estamos interessados em soluções com energias finitas, logo para evitar divergências devemos impor que $c = 0$; que $V(\phi(x \rightarrow \pm\infty)) = 0$; e também que $\phi'(x \rightarrow \pm\infty) = 0$, onde $\phi' = \frac{d\phi}{dx}$. Essas condições nos levam a soluções ϕ com energia finita e portanto são soluções fisicamente aceitáveis.

Feitas as observações acima, de (2.1.5), podemos escrever o potencial da seguinte maneira

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 = V, \quad (2.1.8)$$

logo,

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{2V(\phi)}, \quad (2.1.9)$$

onde $V \geq 0$, para campos escalares reais. Assim obtivemos pelo método de quadratura uma equação de primeira ordem para o campo.

Um método alternativo para investigar a presença de defeitos topológicos em modelos de campos escalares consiste em identificar as soluções denominadas de BPS [16, 17, 18, 19, 20, 21, 22]. Esta classe especial de soluções surge quando o potencial $V(\phi)$

pode ser escrito como função de $W = W(\phi)$, da seguinte maneira

$$V(\phi) = \frac{1}{2}W_\phi^2, \quad (2.1.10)$$

onde denotamos $W_\phi = \frac{dW}{d\phi}$. Assim (2.1.8) assume a forma

$$\phi'' = W_\phi W_{\phi\phi}. \quad (2.1.11)$$

A densidade de energia que é dada por

$$T^{00} = \frac{1}{2}\phi'^2 + \frac{1}{2}W_\phi^2,$$

pode ser reescrita, completando-se quadrado, da seguinte forma

$$T^{00} = \frac{1}{2}(\phi' \mp W_\phi)^2 \pm \frac{dW}{dx},$$

portanto, a energia associada é

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\phi' \mp W_\phi)^2 dx \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dW}{dx} dx. \quad (2.1.12)$$

Devido ao fato de que as soluções fisicamente aceitáveis são as de energia finita, nosso interesse serão as configurações de menor energia, logo ϕ deve ser escolhido de modo que a energia seja mínima, e assim devemos ter:

$$\phi' = \pm W_\phi, \quad (2.1.13)$$

com essa escolha, o primeiro termo de (2.1.12) se anula e a energia associada ao campo será dada por

$$E = |W[\phi(x \rightarrow +\infty)] - W[\phi(x \rightarrow -\infty)]|, \quad (2.1.14)$$

que é conhecida como energia de Bogomolnyi [16]. A vantagem desse método é que as equações que precisamos resolver são de primeira ordem e podemos calcular as energias usando somente a função $W(\phi)$.

De uma forma geral pode ser dito que, para soluções localizadas de teorias de campos unidimensional existem duas possibilidades para valor de ϕ nos extremos. A primeira possibilidade é a de que o campo tem o mesmo comportamento assintótico, ou seja $\phi(x \rightarrow \pm\infty) = \phi_0$. Segunda, o comportamento assintótico da solução é diferente, ou seja, $\phi(x \rightarrow +\infty) = \phi_+$ e $\phi(x \rightarrow -\infty) = \phi_-$. A corrente topológica definida por [16]

$$J_T^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu}\partial_\nu\phi, \quad (2.1.15)$$

caracteriza essas duas possibilidades. Por mais que J_T^μ não seja uma corrente de Noether ela é conservada, ou seja

$$\partial_\mu J_T^\mu = 0.$$

Logo

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} J_T^0 dx, \quad (2.1.16)$$

é uma carga conservada, denominada carga topológica. Utilizando (2.1.15) em (2.1.16) obtemos que

$$Q = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi' dx = \frac{1}{2} \phi(+\infty) - \frac{1}{2} \phi(-\infty) = \frac{1}{2} \phi_+ - \frac{1}{2} \phi_-, \quad (2.1.17)$$

sendo assim, podemos identificar dois tipos de soluções distintas: as soluções topológicas com $Q \neq 0$ e as soluções não topológicas com $Q = 0$. Podemos ainda definir a carga topológica como:

$$Q = W[\phi(+\infty)] - W[\phi(-\infty)], \quad (2.1.18)$$

desta forma se Q é nula a solução é não topológica, e do contrário a solução é topológica. Esta definição é interessante pois permite caracterizar as soluções em modelos descritos por mais de um campo.

Kinks

Nesta seção discutimos dois modelos em teoria de um campo escalar real onde nos deparamos com defeitos do tipo kink, tais defeitos são exemplos de soluções topológicas, ou seja $Q \neq 0$, o que nos diz que conforme nos afastarmos, em direções opostas, do centro da solução observamos comportamentos distintos.

Como primeiro exemplo, consideramos o modelo descrito pelo potencial com auto interação quártica, conhecido como modelo ϕ^4 [17]. A dinâmica deste modelo é descrita pela seguinte densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\lambda^2}{8} (\phi^2 - c^2)^2, \quad (2.2.19)$$

onde λ e c são constantes positivas. Note que $\phi = \pm c$ são soluções de (2.2.19), e ainda mais, ambas possuem energia zero, verifica-se isso pois

$$T^{00} = \frac{1}{2} \phi'^2 + \frac{\lambda^2}{8} (\phi^2 - c^2)^2,$$

portanto

$$T^{00}(\phi = \pm c) = 0, \quad (2.2.20)$$

logo $\phi = \pm c$ são estados de vácuo degenerados do sistema. Considerando soluções estáticas podemos aplicar o método de quadratura tratado na seção anterior. Assim, sendo

$$V(\phi) = \frac{\lambda^2}{8} (\phi^2 - c^2)^2, \quad (2.2.21)$$

substituímos (2.2.21) em (2.1.9) e obtemos a seguinte equação diferencial

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \frac{1}{2} \lambda (\phi^2 - c^2).$$

De modo que, separando as variáveis teremos

$$\frac{d\phi}{\phi^2 - c^2} = \pm \frac{\lambda}{2} dx, \quad (2.2.22)$$

e integrando em ambos os lados obtemos a seguinte solução [23, 18]

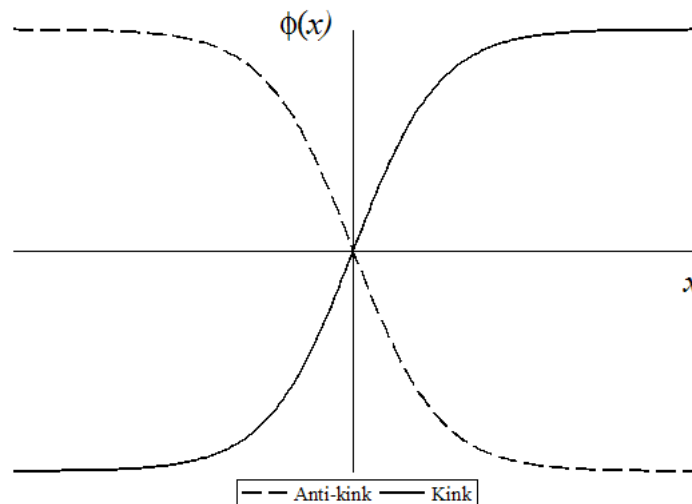


Figura 2.1: Gráfico das soluções do tipo kink e anti kink associadas ao potencial ϕ^4 .

$$\phi(x) = \mp c \tanh\left(\frac{\lambda c x}{2}\right). \quad (2.2.23)$$

Considere a solução com sinal positivo em (2.2.23), esta configuração de campo conecta dois estados fundamentais distintos em $x = \pm\infty$ como mostra a Figura 2.1, e costuma ser denominada um kink. Tomando o sinal negativo em (2.2.23) temos a solução denominada antikink.

A densidade de energia associada ao kink é

$$\mathcal{H} = T^{00} = \frac{1}{2} \phi'^2 + \frac{\lambda^2}{8} (\phi^2 - c^2)^2, \quad (2.2.24)$$

utilizando (2.1.9) teremos

$$T^{00} = \frac{\lambda^2}{4} (\phi^2 - c^2)^2, \quad (2.2.25)$$

e substituindo (2.2.23) nesta última equação obtemos que

$$T^{00}(x) = \frac{\lambda^2 c^4}{4} \operatorname{sech}^4 \left(\frac{\lambda c x}{2} \right), \quad (2.2.26)$$

cujo gráfico é dado na Figura 2.2.

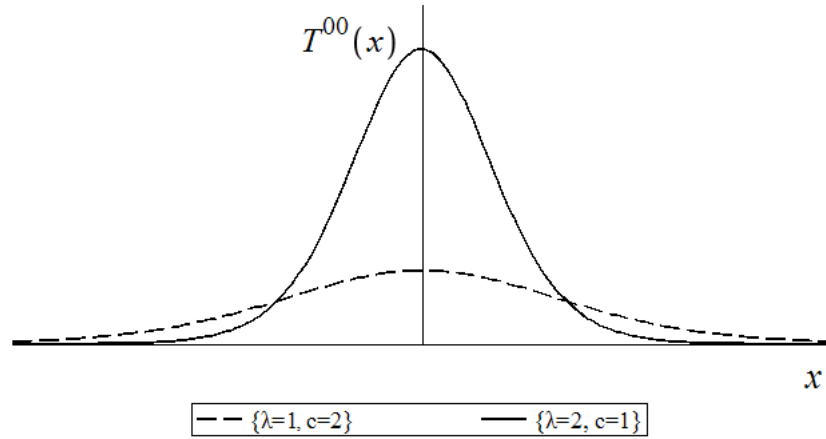


Figura 2.2: Gráfico da densidade de energia da solução do tipo kink do modelo ϕ^4

Assim, a energia do defeito é [23]:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^2 c^4}{4} \operatorname{sech}^4 \left(\frac{\lambda c x}{2} \right) dx = \frac{2\lambda c^3}{3}. \quad (2.2.27)$$

Um segundo exemplo de defeito topológico é o denominado modelo seno-Gordon [15], cuja densidade lagrangiana é dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 (1 - \cos \phi), \quad (2.2.28)$$

sendo m uma constante positiva. O potencial seno-Gordon está plotado na Figura 2.3. Para o modelo ϕ^4 utilizamos o método de quadratura, apenas para aplicarmos as ideias da seção anterior utilizaremos o método BPS para investigar as soluções do potencial seno-Gordon.

Temos que

$$V(\phi) = m^2 (1 - \cos \phi),$$

portanto podemos fazer $W(\phi) = -4m \cos \left(\frac{\phi}{2} \right)$, para que (2.1.10) seja satisfeita. Assim, de (2.1.13) temos a seguinte relação de BPS:

$$\phi' = \pm W_\phi,$$

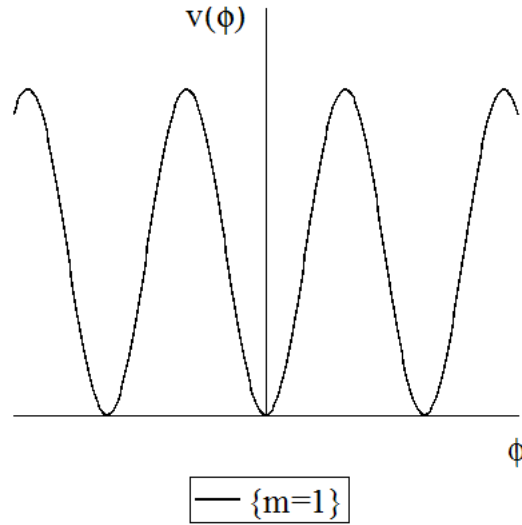


Figura 2.3: Gráfico do potencial seno-Gordon.

logo

$$\phi' = \pm 2m \sin\left(\frac{\phi}{2}\right),$$

e separando as variáveis obtemos:

$$\pm \int_{\phi(x_0)}^{\phi(x)} \frac{d\phi}{2 \sin(\phi/2)} = m(x - x_0). \quad (2.2.29)$$

Resolvendo esta integral obtemos, ver referência [15]:

$$\pm \ln \tan\left(\frac{\phi}{4}\right) = m(x - x_0), \quad (2.2.30)$$

em termos de ϕ temos a seguinte solução:

$$\phi(x) = \pm 4 \arctan \left[e^{m(x-x_0)} \right], \quad (2.2.31)$$

onde \pm nos dão as soluções kink e antikink respectivamente, representados na Figura 2.4. Tomando o sinal positivo, convém observar que $\phi = 2\pi N$, $N \in \mathbb{Z}$ são estados de vácuo do modelo, tomando $\phi = 0$ e $\phi = 2\pi$ como vácuos do sistema, temos que a solução (2.2.31) conecta os estados fundamentais distintos do sistema, o que a caracteriza como uma solução topológica, $Q \neq 0$. Utilizando $W(\phi)$, a energia BPS associada a solução é dada por:

$$E = W(2\pi) - W(0) = -4m \cos(\pi) + 4m \cos(0) = 8m,$$

obtida de forma mais direta pelo método BPS.

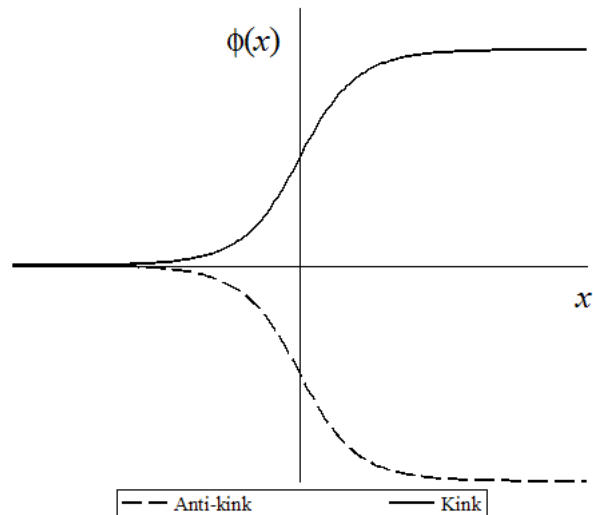


Figura 2.4: Gráfico da solução tipo kink associada ao modelo seno-Gordon.

Lumps

Na seção anterior obtivemos soluções do tipo kink as quais apresentam carga topológica não nula. Agora trataremos modelos que possuem soluções com carga topológica nula, tais defeitos são denominados lumps [15, 16, 18, 19]. Um exemplo de defeito não topológico é o modelo ϕ^3 descrito pelo potencial

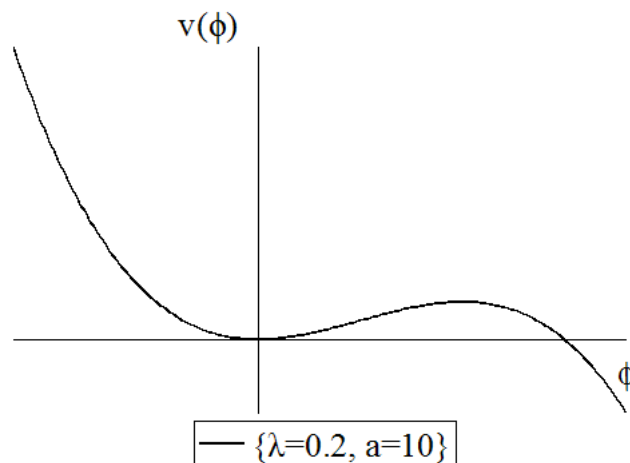


Figura 2.5: Gráfico do potencial ϕ^3

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{2} \phi^2 \left(1 - \frac{\phi}{a} \right), \quad (2.3.32)$$

ilustrado na Figura 2.5. Tal potencial apresenta um máximo local em $\phi = 2a/3$ e um mínimo local em $\phi = 0$. A equação de movimento é obtida de (2.1.9) onde temos

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{\lambda\phi^2 \left(1 - \frac{\phi}{a}\right)} \quad (2.3.33)$$

cuja solução é dada por [18]:

$$\phi(x) = a \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}(x - x_0) \right), \quad (2.3.34)$$

a solução está plotada na Figura 2.6.

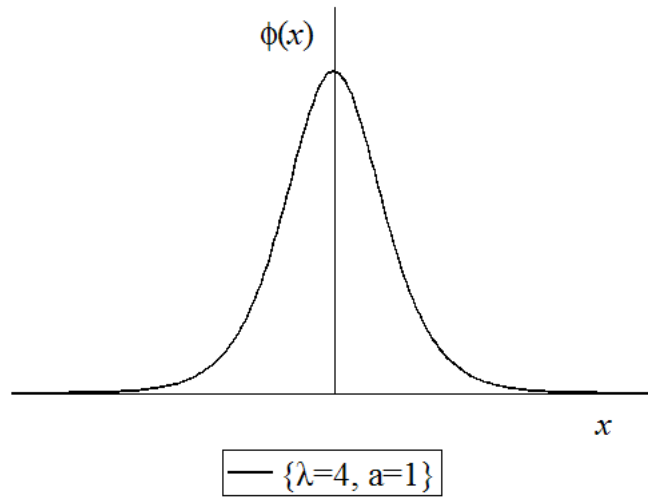


Figura 2.6: Gráfico da solução do tipo lump associada ao modelo ϕ^3 .

A densidade de energia associada a essa solução é dada por

$$\mathcal{H} = T^{00} = \frac{1}{2}\phi'^2 + V(\phi) = 2V(\phi),$$

portanto utilizando que: $1 - \operatorname{sech}^2(x) = \tanh^2(x)$, temos

$$T^{00}(x) = \lambda a^2 \operatorname{sech}^4 \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}(x - x_0) \right) \tanh^2 \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}(x - x_0) \right), \quad (2.3.35)$$

representada na Figura 2.7.

Outro exemplo onde obtemos soluções do tipo lump é considerando-se o potencial

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\lambda^2\phi^2(a^2 - \phi^2), \quad (2.3.36)$$

denominado modelo ϕ^4 invertido, pois como podemos observar na Figura 2.8 ele é semelhante ao modelo ϕ^4 porém invertido. Este potencial tem máximos em $\phi = \pm \frac{a\sqrt{2}}{2}$ e um mínimo local em $\phi = 0$.

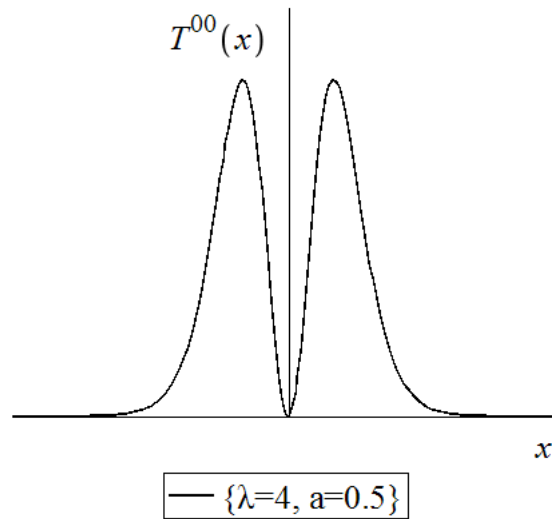


Figura 2.7: Gráfico da densidade de energia da solução do tipo lump do modelo ϕ^3 .

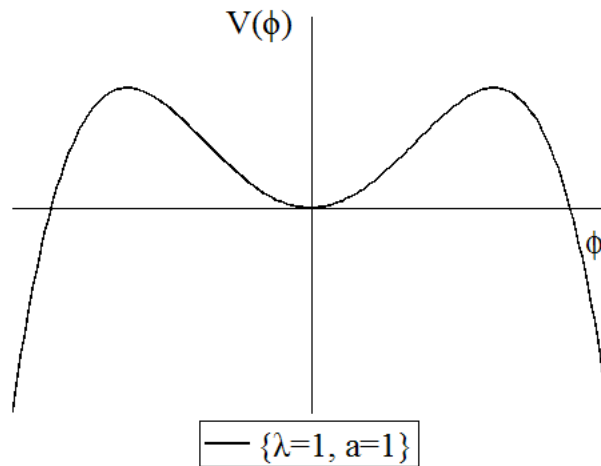


Figura 2.8: Gráfico do potencial ϕ^4 invertido.

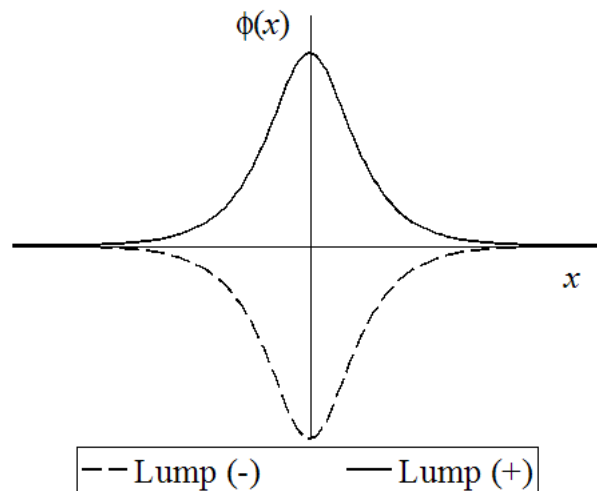


Figura 2.9: Gráfico da solução do tipo lump associada ao potencial ϕ^4 invertido.

Por quadratura, de (2.1.9) temos as seguintes equações diferenciais

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{\lambda^2 \phi^2 (a^2 - \phi^2)}, \quad (2.3.37)$$

logo separando as variáveis,

$$\frac{d\phi}{\phi \sqrt{a^2 - \phi^2}} = \pm \lambda dx, \quad (2.3.38)$$

e por integração obtemos

$$-\frac{1}{a} \operatorname{arcsech} \left(\frac{\phi}{a} \right) = \pm \lambda (x - x_0). \quad (2.3.39)$$

Resolvendo para $\phi(x)$ e considerando $x_0 = 0$ temos

$$\phi(x) = \pm a \operatorname{sech}(\lambda ax). \quad (2.3.40)$$

que é a solução não topológica para o modelo ϕ^4 invertido e o gráfico é dado na Figura 2.9.

Estabilidade linear de soluções

A não linearidade das equações de movimento em teoria de campos escalares nos leva a necessidade de estudar a estabilidade linear das soluções estáticas $\phi(x) \equiv \phi_s(x)$ destas equações. Com esse intuito, consideraremos pequenas perturbações de primeira ordem em torno destas soluções da seguinte forma [17]:

$$\phi(x, t) = \phi_s(x) + \psi_k(x) e^{i\omega_k t}. \quad (2.4.41)$$

Esperamos assim linearizar as equações de movimento, obter o potencial de estabilidade e os autovalores associados. Substituindo (2.4.41) em (2.1.2) teremos

$$-\omega_k^2 \psi_k(x) e^{i\omega_k t} - \frac{d^2 \phi_s(x)}{dx^2} - \frac{d^2 \psi_k(x)}{dx^2} e^{i\omega_k t} + V_\phi(\phi) = 0, \quad (2.4.42)$$

e utilizando a expansão em série de Taylor $V_\phi(\phi) = V_\phi(\phi_s) + \psi_k e^{i\omega_k t} V_{\phi\phi}(\phi_s)$ e a Equação (2.1.3) obtemos

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + U \right) \psi_k(x) = \omega_k^2 \psi_k(x), \quad (2.4.43)$$

onde $U = V_{\phi\phi}(\phi_s)$ é denominado potencial de estabilidade. A equação (2.4.43) é uma equação de autovalores do tipo Schrodinger:

$$H\psi_k = \omega_k^2 \psi_k,$$

onde $H = -\frac{d^2}{dx^2} + U$ seria o respectivo hamiltoniano e ψ_k as auto-funções associadas.

Para assegurar a estabilidade é necessário que H seja positivo definido [17, 18] tendo assim autovalores não negativos, pois se $\omega_k^2 \leq 0$ então o exponencial da perturbação deixa de ser imaginário e passa a ser real e conseqüentemente a solução explode para $t \rightarrow \infty$. Para garantir que H é positivo definido podemos conferir se o mesmo pode ser fatorado na forma $H = A^\dagger A$. Se este for o caso teremos que

$$\omega_k^2 = (\psi_k, H\psi_k) = (\psi_k, A^\dagger A\psi_k) = (A\psi_k, A\psi_k) = |A\psi_k|^2 \geq 0, \quad (2.4.44)$$

garantindo assim a não negatividade dos autovalores e portanto a estabilidade da solução. Desta forma, por exemplo, podemos analisar a estabilidade das soluções BPS. Lembrando que para estas soluções temos que

$$V(\phi) = \frac{1}{2}W_\phi^2,$$

e

$$\phi' = \pm W_\phi,$$

podemos fatorar H da seguinte forma:

$$H = \left(-\frac{d}{dx} \pm W_{\phi\phi} \right) \left(\frac{d}{dx} \pm W_{\phi\phi} \right), \quad (2.4.45)$$

onde

$$A = \frac{d}{dx} \pm W_{\phi\phi},$$

e

$$A^\dagger = -\frac{d}{dx} \pm W_{\phi\phi},$$

é seu conjugado hermitiano. Logo H é positivo definido e as soluções BPS são linearmente estáveis mediante pequenas perturbações do campo. Sendo assim os modelos ϕ^4 e seno-Gordon dos quais podemos obter soluções BPS são exemplos de modelos estáveis.

Quebra espontânea de simetria

Nas últimas seções discutiu-se defeitos topológicos unidimensionais, que como vimos, são soluções com energia finita de uma equação diferencial não linear provinda da dinâmica de uma densidade lagrangiana \mathcal{L} . Nesta seção discutiremos sobre simetria e como a mesma é responsável pela formação de defeitos. Se um dado sistema mantém suas características e/ou propriedades diante de alterações dos parâmetros que o descrevem, esse sistema pode ser dito simétrico. O teorema de Noether, por exemplo, nos revela o quão importante é a ideia de simetria na Física, nos mostrando que a cada simetria

contínua de um sistema existe uma lei de conservação correspondente, discutiremos agora a ideia de quebra espontânea de simetria.

Seja certo sistema descrito pela densidade lagrangiana \mathcal{L} e o consideremos invariante sob a ação de um grupo de transformações unitárias U , isto significa que

$$\mathcal{L} = U^\dagger \mathcal{L} U. \quad (2.5.46)$$

Agora, seja ϕ_0 um dos estados de vácuo do modelo descrito por \mathcal{L} , então se o estado de vácuo, sob a ação de U , é mapeado nele mesmo, isto é

$$U\phi_0 = \phi_0,$$

dizemos que a simetria da lagrangeana é a mesma do vácuo. Em caso contrário, ou seja

$$U\phi_0 \neq \phi_0, \quad (2.5.47)$$

então é dito que a simetria da lagrangeana foi espontaneamente quebrada. Em geral, a quebra espontânea de simetria é responsável pela formação de defeitos topológicos. A título de exemplo vamos reexaminar o modelo ϕ^4 que abordamos e identificar quais quebras de simetrias geraram estes defeitos.

Considerando o modelo ϕ^4 , descrito pela densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\lambda^2}{8} (\phi^2 - c^2)^2,$$

a qual claramente possui simetria Z_2 , pois é invariante pela transformação

$$\phi \rightarrow -\phi, \quad (2.5.48)$$

ou seja, $\mathcal{L}(-\phi) = \mathcal{L}(\phi)$. Como vimos os vácuos deste modelo são $\phi_0 = \pm c$, a simetria da lagrangeana é espontaneamente quebrada por esses estados de vácuo, pois $-\phi_0 \neq \phi_0$, ou sejam os estados de vácuo não são mapeados neles mesmos através da transformação (2.5.48). Como consequência da quebra de simetria, o sistema tem a possibilidade de se encontrar em dois estados de vácuo distintos de mínima energia, surge assim um defeito do tipo kink conectando dois estados fundamentais distintos.

Método de deformação

O método de deformação nos permite deformar potenciais conhecidos e obter as soluções destes novos potenciais a partir das soluções do modelo conhecido. Tal método possui várias aplicações, sendo de grande interesse na obtenção de soluções do tipo defeitos

topológicos. Nesta seção abordamos de maneira breve o método e o ilustramos com um simples exemplo, mais sobre o assunto pode ser encontrado na referência [24]. Com efeito, considere um modelo de campo escalar dado pela seguinte densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (2.6.49)$$

obtemos assim, como visto anteriormente, a seguinte equação de movimento

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{2V(\phi)}, \quad (2.6.50)$$

para soluções com energia finita. Suponha agora uma densidade lagrangiana distinta que descreve outro modelo, dada por:

$$\mathcal{L}_d = \frac{1}{2} \partial_\mu \psi \partial^\mu \psi - U(\psi), \quad (2.6.51)$$

cujas equações de movimento são dadas por

$$\frac{d\psi}{dx} = \pm \sqrt{2U(\psi)}, \quad (2.6.52)$$

analogamente ao modelo anterior. Seja f uma função inversível, diferenciável e que possua derivada não nula em todos os pontos denominada função deformadora, tal que:

$$\phi = f(\psi), \quad (2.6.53)$$

então podemos deformar um modelo no outro [18], utilizando que

$$\frac{d\phi}{dx} = f_\psi \frac{d\psi}{dx}. \quad (2.6.54)$$

Portanto das equações de movimento segue que

$$\pm \sqrt{2V(\phi)} = f_\psi \left(\pm \sqrt{2U(\psi)} \right)$$

quadrando ambos os lados temos que

$$U(\psi) = \frac{V(\phi = f(\psi))}{f_\psi^2}, \quad (2.6.55)$$

que relaciona os dois modelos. Assim, se conhecemos as soluções para ϕ devido ao potencial $V(\phi)$, as soluções da teoria que tem potencial $U(\psi)$ são:

$$\psi(x) = f^{-1}(\phi(x)), \quad (2.6.56)$$

que são as soluções do modelo deformado \mathcal{L}_d .

Por exemplo, podemos deformar o modelo ϕ^4 em um outro modelo. Considere o potencial 2.2.21 com $\lambda = 2$ e $c = 1$:

$$V(\phi) = \frac{1}{2} (\phi^2 - 1)^2, \quad (2.6.57)$$

que tem como solução

$$\phi(x) = \tanh(x). \quad (2.6.58)$$

De acordo com (2.2.23). Consirando a seguinte função deformadora

$$\phi = \sin(\psi), \quad (2.6.59)$$

de (2.6.55) obtemos que o potencial do modelo deformado é

$$U(\psi) = \frac{1}{2} \cos^2(\psi), \quad (2.6.60)$$

que é um outro modelo que admite um defeito do tipo kink, e de acordo com (2.6.56) tem solução

$$\psi(x) = \arcsin(\tanh(x)). \quad (2.6.61)$$

Modelos de 2 campos

No capítulo anterior abordamos defeitos topológicos em modelos de um campo escalar real, onde foram apresentadas técnicas de resolver as equações de movimento restringindo as soluções fisicamente aceitáveis.

Um próximo passo é pensar em modelos de 2 campos escalares reais em $(1 + 1)$ dimensões espaço temporais [15, 16, 18], descritos pela seguinte densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} \partial_\mu \psi \partial^\mu \psi - V(\phi, \psi), \quad (2.7.62)$$

porém surge agora a questão da integrabilidade das equações de movimento devido nos depararmos com equações diferenciais de segunda ordem não lineares e acopladas dadas por

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \quad (2.7.63)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial \psi} = 0, \quad (2.7.64)$$

o que pode dificultar bastante a resolução. Considerando soluções estáticas temos

$$\phi'' = V_\phi \quad (2.7.65)$$

$$\psi'' = V_\psi, \quad (2.7.66)$$

assim, esta dificuldade pode ser bastante reduzida quando consideradas classes específicas de sistemas de dois campos que são os modelos BPS. Estes modelos são estudados por meio de equações diferenciais de primeira ordem mais simples que as equações de movimento, mesmo assim, a resolução ainda é complicada, pois as equações de primeira ordem são não lineares e acopladas. O método das órbitas tentativas desenvolvido por Rajaraman [15], que será abordado melhor neste capítulo, mostra-se bastante eficiente na obtenção destas soluções.

Soluções BPS em modelos de 2 campos

Seja um modelo de dois campos escalares reais descrito por (2.7.62), a energia associada ao sistema é

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \phi'^2 + \frac{1}{2} \psi'^2 + V(\phi, \psi) \right] dx. \quad (2.8.67)$$

Considere os potenciais limitados inferiormente que podem ser escritos na forma

$$V(\phi, \psi) = \frac{1}{2} W_\phi^2 + \frac{1}{2} W_\psi^2, \quad (2.8.68)$$

onde $W = W(\phi, \psi)$ ([22, 20]). Substituindo o potencial na equação da energia teremos

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \phi'^2 + \frac{1}{2} \psi'^2 + \frac{1}{2} W_\phi^2 + \frac{1}{2} W_\psi^2 \right] dx \quad (2.8.69)$$

e completando quadrado obtemos

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(\phi' \mp W_\phi)^2 + (\psi' \mp W_\psi)^2 \right] dx \pm \int_{-\infty}^{+\infty} (\phi' W_\phi + \psi' W_\psi) dx \quad (2.8.70)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(\phi' \mp W_\phi)^2 + (\psi' \mp W_\psi)^2 \right] dx + E_{BPS}, \quad (2.8.71)$$

onde $E_{BPS} = |W(\phi(\infty), \psi(\infty)) - W(\phi(-\infty), \psi(-\infty))|$. Buscamos soluções de menor energia, se as configurações obedecerem as equações de primeira ordem

$$\phi' = \pm W_\phi, \quad \psi' = \pm W_\psi, \quad (2.8.72)$$

a energia é minimizada na forma

$$E = E_{BPS} \quad (2.8.73)$$

denominada energia Bogomol'nyi [22, 18]. No limite de soluções BPS podemos calcular a energia através de W e do comportamento assintótico do campo escalar, e temos também

que os estados BPS possuem energias potencial E_p e gradiente E_g iguais, dadas por $E_g = E_p = E_{BPS}/2$.

As Equações (2.8.72) podem ser vistas como sistemas dinâmicos, que é uma área matemática bem desenvolvida e nos oferece um rico ferramental na investigação deste sistema de equações. Resolvendo as equações $W_\phi = 0$ e $W_\psi = 0$ encontramos o conjunto de pontos singulares do sistema dinâmico associado a (2.8.72). No contexto de campos os pontos singulares são o conjunto de mínimos globais do modelo. Seja $M_i = (\phi_i, \psi_i)$ com $i = 1, 2, \dots$ um conjunto de mínimos globais, cada par M_i e M_j define um setor topológico do modelo, que pode ou não ser BPS [18].

Um setor ij associado ao par de mínimos M_i, M_j é BPS se $E_{BPS}^{ij} = |W_i - W_j| \neq 0$, onde $W_i = W(\phi_i, \psi_i) = W(M_i)$. Entretanto, se $E_{BPS}^{ij} = 0$, ij é um setor topológico não BPS, pois não há solução BPS conectando os mínimos globais [15, 20]. Tal setor ainda é topológico pois as equações de movimento de segunda ordem podem ter soluções que não obedecem às equações de primeira ordem. Um método bastante eficiente para resolver as equações de primeira ordem no limite BPS é o denominado método das órbitas tentativas. Tal método consiste em encontrar uma função $F(\phi, \psi)$ que desacople as equações de primeira ordem. O método das órbitas foi utilizado em diversos trabalhos, na referência [18] ele foi sintetizado da seguinte forma:

1. Selecione um setor BPS, ou seja, escolha dois mínimos M_i e M_j tais que $W_i \neq W_j$.
2. Escolha uma órbita, isto é uma função $F_{ij}(\phi, \psi) = 0$, que seja compatível com os mínimos do setor, ou seja, $F_{ij}(\phi_i, \psi_i) = 0$ e $F_{ij}(\phi_j, \psi_j) = 0$.
3. Teste a órbita escolhida, isto é feito diferenciando a órbita para obter:

$$\frac{\partial F_{ij}}{\partial \phi} W_\phi + \frac{\partial F_{ij}}{\partial \psi} W_\psi = 0 \quad (2.8.74)$$

no caso em que a órbita é compatível com esta equação, então tal órbita pode ser usada para desacoplar as equações de primeira ordem.

Modelo BNRT

Um modelo ilustrativo é o denominado BNRT [18, 20], este é descrito pelo potencial

$$V(\phi, \psi) = \frac{1}{2} (1 - \phi^2)^2 - r\psi^2 + r(1 + 2r)\phi^2\psi^2 + \frac{1}{2}r^2\psi^4, \quad (2.9.75)$$

onde r é um parâmetro real.

Este potencial admite o seguinte superpotencial:

$$W(\phi, \psi) = \phi - \frac{1}{3}\phi^3 - r\phi\psi^2. \quad (2.9.76)$$

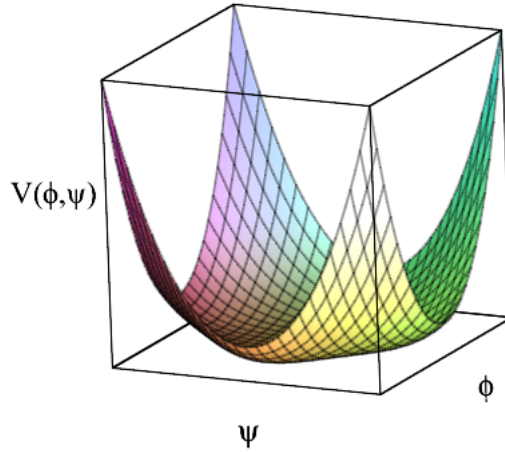


Figura 2.10: Gráfico do potencial que caracteriza o modelo BNRT.

Para soluções estáticas, o modelo nos fornece as seguintes equações de movimento:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -2\phi + 2r(1+2r)\phi\psi^2 + 2\phi^3 \quad (2.9.77)$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -2r\psi + 2r(1+2r)\phi^2\psi + 2r^2\psi^3 \quad (2.9.78)$$

que são equações de segunda ordem não lineares e acopladas. No entanto, no limite BPS as equações de primeira ordem são dadas por

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm 1 \mp \phi^2 \mp r\psi^2 \quad (2.9.79)$$

e

$$\frac{d\psi}{dx} = \mp 2r\phi\psi. \quad (2.9.80)$$

Considerando $r > 0$, temos que os mínimos do potencial são dados por $M_1 = (1, 0)$, $M_2 = (-1, 0)$, $M_3 = (0, \frac{1}{\sqrt{r}})$ e $M_4 = (0, -\frac{1}{\sqrt{r}})$. Dados estes quatro mínimos temos seis setores topológicos que conectam estes pontos, são eles os setores 12, 13, 14, 23, 24 e 34.

Considerando o superpotencial BNRT temos que: $W_1 = 2/3$, $W_2 = -2/3$, $W_3 = W_4 = 0$, conseqüentemente $E_{BPS}^{12} = 4/3$ e $E_{BPS}^{13} = E_{BPS}^{14} = E_{BPS}^{23} = E_{BPS}^{24} = 2/3$, o setor 34 é um setor não BPS, pois $W_3 = W_4$ e portanto sua energia será conhecida somente de posse da solução explícita de (2.9.77) e (2.9.78).

Vamos agora obter soluções explícitas para este modelo, primeiramente consideremos soluções que dependem apenas de um campo. Para isso, considerando $\psi = 0$ nas equações de movimento obtemos que

$$\phi'' = -2\phi(1 - \phi^2)$$

que tem como solução $\phi = \pm \tanh(x)$, portanto

$$\psi = 0, \quad \phi = \pm \tanh(x),$$

são soluções do modelo de 2 campos. Neste caso, fazer $\psi = 0$ é equivalente a considerarmos a semi reta que liga M_1 e M_2 como órbita. Fazendo desta vez $\phi = 0$ nas equações de movimento temos que

$$\psi'' = -2r^2\psi \left(\frac{1}{r} - \psi^2 \right).$$

Portanto

$$\phi = 0, \quad \psi = \pm \frac{1}{\sqrt{r}} \tanh(\sqrt{r}x),$$

são soluções simples do modelo de 2 campos. No entanto, como já dito anteriormente este setor é não BPS, não admitindo assim soluções BPS, uma vez que não são soluções das equações de primeira ordem (2.8.72), pois utilizando as equações de primeira ordem e fazendo $\phi = 0$ obtemos necessariamente $\psi = \frac{\pm 1}{\sqrt{r}}$, tal resultado nos diz não ser possível encontrar uma órbita reta conectando M_3 e M_4 .

Como foi comentado, com excessão do setor 34, todos os outros são setores BPS, e a título de ilustração utilizaremos o método das órbitas tentativas para obter soluções BPS para o setor 12 utilizando a órbita [18]:

$$F(\phi, \psi) = \phi^2 + b\psi^2 - 1 = 0. \quad (2.9.81)$$

Utilizando o método das órbitas obtemos a condição

$$\phi^2 + r(1 + 2b)\psi^2 = 1,$$

assim para que a órbita proposta seja compatível devemos ter

$$b = \frac{1}{\frac{1}{r} - 2}.$$

Desta forma a órbita

$$F(\phi, \psi) = \phi^2 + \frac{1}{\frac{1}{r} - 2}\psi^2 - 1 = 0, \quad (2.9.82)$$

pode ser utilizada para desacoplar a equação 2.9.79. Tomando $\psi^2 = \left(\frac{1}{\frac{1}{r} - 2} \right) (1 - \phi^2)$ em (2.9.79) temos:

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm 2r(1 - \phi^2),$$

cuja solução é dada por

$$\phi = \pm \tanh(2rx), \quad (2.9.83)$$

e como consequência obtemos

$$\psi = \pm \sqrt{\frac{1}{r} - 2\operatorname{sech}(2rx)}. \quad (2.9.84)$$

Podemos notar que no limite $r \rightarrow 1/2$ a órbita elíptica tende a semi reta e recupera-se as soluções obtidas utilizando tal órbita.

TÓPICOS EM RELATIVIDADE GERAL E COSMOLOGIA

Neste capítulo introduzimos a teoria da relatividade geral e tópicos em cosmologia, ver referências [5, 25, 26, 27], começamos expondo o princípio de equivalência, em seguida no limite de campos fracos recuperamos a expressão de uma partícula sujeita a um campo gravitacional da teoria Newtoniana. Abordamos as equações de campo de Einstein e as utilizamos para obter a solução de Schwarzschild. Enunciamos o princípio cosmológico e a lei de Hubble, em seguida resolvemos as equações de Einstein na métrica FRW para um Universo composto de radiação e matéria que é o modelo denominado Big-Bang quente. Com a finalidade de resolver alguns problemas de condições iniciais do Universo introduzimos a teoria de inflação cósmica primordial. Finalizamos apresentando o Modelo Cosmológico Padrão.

Princípio De Equivalência

Considere S um referencial inercial, e S' um outro referencial que se movimenta com relação a S . Considere que o referencial S' se desloque com velocidade \vec{V} constante com relação a S e que por conveniência as origens de ambos referenciais coincidam em $t = 0$. Desta forma os sistemas estão relacionados através da seguinte relação:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t, \quad (3.1.1)$$

que é conhecida como transformação de Galileu especial. Derivando ambos os lados com relação ao tempo obtemos

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}, \quad (3.1.2)$$

que relaciona as velocidades em S e S' . Derivando novamente com relação ao tempo resulta que

$$\vec{a} = \vec{a}'. \quad (3.1.3)$$

As interações entre partículas em geral dependem das distâncias relativas entre as mesmas, por exemplo: força eletromagnética, forças de contato, força gravitacional, força elástica, entre outras [28, 25]. Assim, como as distâncias relativas não são alteradas por 3.1.1 então

$$\vec{F} = \vec{F}', \quad (3.1.4)$$

e portanto, as leis de Newton são covariantes por transformações de Galileu, pois se vale

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (3.1.5)$$

em S , então de (3.1.3) e (3.1.4) vale

$$\vec{F}' = m\vec{a}' \quad (3.1.6)$$

em S' . Tal resultado é conhecido como princípio de relatividade de Galileu, o qual então afirma que para um referencial inercial é impossível detectar o movimento retilíneo uniforme em relação a um outro referencial inercial analisando as leis da mecânica, uma vez que estas são as mesmas em sistemas de referenciais inerciais.

Considere agora que S' tenha um movimento uniformemente variado com relação a S , ou seja possua uma aceleração constante \vec{A} com relação a S , e que as origens coincidam em $t = 0$. Assim, a conexão entre os referenciais agora é dada por

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}_0 t - \frac{1}{2} \vec{A} t^2, \quad (3.1.7)$$

onde \vec{V}_0 é a velocidade de S' com relação a S no instante $t = 0$. Derivando (3.1.7) de ambos os lados obtemos

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}_0 - \vec{A} t, \quad (3.1.8)$$

que relaciona as velocidades em ambos referenciais, e derivando (3.1.8) com relação ao tempo em ambos lados obtemos

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{A}. \quad (3.1.9)$$

As forças ainda dependem da distância relativa e continua valendo

$$\vec{F}' = \vec{F} = m\vec{a}, \quad (3.1.10)$$

porém de (3.1.9) temos

$$\vec{F}' = m\vec{a}' + m\vec{A}, \quad (3.1.11)$$

e portanto as leis de Newton não mantêm sua forma em referenciais não inerciais. Neste caso onde propomos que S' possui aceleração constante \vec{A} , aparece um termo $m\vec{A}$ que denomina-se força de inércia, pois não corresponde a nenhuma força física e é proporcional à massa inercial. Assim, se vale $\vec{F} = m\vec{a}$ em S , em S' temos

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{A}. \quad (3.1.12)$$

Desta forma, um observador não inercial pode observar forças que não são de natureza física, apenas são forças inerciais.

Desde Galileu é conhecido o fato de que em pequenas regiões próximas à superfície terrestre qualquer corpo material cai com a mesma aceleração de queda livre $-\vec{g}$, com sentido ao centro terrestre e com um módulo de $g \simeq 9,8m/s^2$ [25, 28]. Se tomarmos a lei de Newton em regiões próximas a superfície da Terra para um corpo sob ação da força gravitacional teremos

$$m_i\vec{a} = -m_g\vec{g}. \quad (3.1.13)$$

Como dito anteriormente, é fato que $\vec{a} = -\vec{g}$ qualquer que seja o corpo material, e portanto a massa inercial m_i é igual à massa gravitacional m_g .

Logo a força gravitacional exhibe a propriedade de ser proporcional à massa inercial do corpo sobre o qual atua, como discutido acima, esta é uma propriedade de forças inerciais, que surgem em referenciais não inerciais. Esta foi uma das principais pistas que levou Einstein a reformulação da gravitação. Seja S um referencial inercial próximo à superfície terrestre, e em uma região pequena o suficiente para que o campo gravitacional possa ser considerado uniforme, a segunda lei de Newton para uma partícula de massa m é dada por

$$m\vec{a} = -m\vec{g} + \vec{F}_{ng}, \quad (3.1.14)$$

onde \vec{F}_{ng} representa a força resultante de forças não gravitacionais. Seja agora S' um referencial que se desloca em relação a S com aceleração constante \vec{A} , então de (3.1.9) obtemos

$$m(\vec{a}' + \vec{A}) = -m\vec{g} + \vec{F}_{ng}, \quad (3.1.15)$$

que são as equações de movimento no referencial S' . Se considerarmos que o referencial se encontra em queda livre no campo gravitacional, ou seja, tomando $\vec{A} = -\vec{g}$ temos que

$$m\vec{a}' = \vec{F}_{ng}, \quad (3.1.16)$$

e portanto S' se comporta localmente como um referencial inercial na ausência de campo gravitacional. Desta forma, generalizando o princípio da relatividade de Galileu, Einstein introduz o princípio de equivalência [25, 5, 27]:

- Em todos os pontos do espaço tempo em um campo gravitacional arbitrário,

é possível escolher um sistema de coordenadas local, que seja inercial, tal que em uma vizinhança suficientemente pequena do ponto em questão, as leis da natureza tomam a forma daquelas em um sistema cartesiano não acelerado, na ausência de qualquer campo gravitacional.

Portanto S' e S não detectam diferenças nas leis da mecânica, exceto que S dirá que sente um campo gravitacional, enquanto S' dirá que não sofre influência de nenhum campo gravitacional [25].

Na ausência de gravidade prevalece a teoria da relatividade restrita que afirma que o espaço tempo é uma variedade pseudo-riemanniana do tipo Minkowsky caracterizada pelo tensor métrico $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. O princípio da equivalência nos diz que localmente um observador em queda livre é um referencial inercial, ou seja, localmente não existe gravidade e o espaço tempo é de Minkowsky. Desta forma o espaço tempo na presença de campo gravitacional é uma variedade localmente Minkowsky e portanto uma variedade lorentziana, logo a gravitação está relacionada com a própria geometria do espaço tempo [5].

Para evidenciar tal proposição, de acordo com o princípio de equivalência, existe um sistema de coordenadas y^α tal que localmente

$$\frac{d^2 y^\alpha}{d\tau^2} = 0, \quad (3.1.17)$$

onde τ é o tempo próprio tal que

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \eta_{\mu\nu} dy^\mu dy^\nu. \quad (3.1.18)$$

Considere x^β outro sistema de coordenadas, que pode ser por exemplo o sistema de coordenadas associado ao laboratório em repouso com relação a superfície terrestre. As coordenadas do referencial em queda livre são funções das coordenadas x^β , ou seja, $y^\alpha = y^\alpha(x^\beta)$. Assim, temos que no novo sistema de coordenadas

$$\frac{d^2 y^\alpha}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = 0, \quad (3.1.19)$$

logo

$$\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (3.1.20)$$

Multiplicando a última equação por $\partial x^\lambda / \partial y^\alpha$ temos que

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (3.1.21)$$

onde $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ é a conexão afim, definida por

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial y^{\alpha}} \frac{\partial^2 y^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}}. \quad (3.1.22)$$

Em geometria diferencial (3.1.21) é exatamente a equação de geodésica numa variedade diferenciável munida de uma conexão (vide Apêndice B). O elemento de linha ds escrito no novo sistema de coordenadas é

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} dx^{\mu} \frac{\partial y^{\beta}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu}, \quad (3.1.23)$$

ou

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}, \quad (3.1.24)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é denominado tensor métrico, definido por

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial y^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \eta_{\alpha\beta}. \quad (3.1.25)$$

Diferenciando $g_{\mu\nu}$ com relação a x^{λ} temos que

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} = \frac{\partial^2 y^{\alpha}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\mu}} \frac{\partial y^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial^2 y^{\beta}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} \eta_{\alpha\beta}, \quad (3.1.26)$$

e lembrando de (3.1.22) e (3.1.25) podemos reescrever a última expressão da seguinte maneira

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} = \Gamma_{\lambda\mu}^{\rho} g_{\rho\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^{\rho} g_{\rho\mu}. \quad (3.1.27)$$

Afim de obter a conexão em termos da métrica, podemos utilizar (3.1.27) para obter a seguinte relação

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} = 2g_{\kappa\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^{\kappa}. \quad (3.1.28)$$

Multiplicando ambos os lados por $\frac{1}{2}g^{\nu\sigma}$ obtemos

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\nu\sigma} (\partial_{\lambda} g_{\mu\nu} + \partial_{\mu} g_{\lambda\nu} - \partial_{\nu} g_{\mu\lambda}). \quad (3.1.29)$$

que são os denominados símbolos de Christoffel e nos dizem que a conexão que estamos considerando é uma conexão de Levi-Civita, ou seja é uma conexão métrica e livre de torções (vide Apêndice B).

Desta forma, tratamos o espaço tempo como uma 4-variedade lorentziana, de (3.1.21) observamos que o movimento de uma partícula sob a ação de um campo gravitacional descreve uma geodésica no espaço-tempo, e portanto a partícula é livre, forças só existem quando as partículas são impedidas de percorrer sua trajetória geodésica no espaço-tempo. Por exemplo, um corpo apoiado sobre o chão, está sendo impedido de

seguir a sua trajetória geodésica natural no espaço-tempo.

Limite Para Campos Fracos

Considerando o espaço tempo uma variedade lorentziana, como vimos na seção anterior, de (3.1.21) a equação para a geodésica neste espaço curvo é dado por

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda dx^\mu dx^\nu = 0, \quad (3.2.30)$$

desta forma considerando a gravitação como um efeito geométrico, para campos fracos devemos recuperar a expressão de uma partícula sujeita a um campo gravitacional da teoria newtoniana. Com esse intuito, desenvolvendo (3.2.30) obtemos

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + c^2 \Gamma_{00}^\lambda \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 + 2c \Gamma_{0I}^\lambda \frac{dt}{d\tau} \frac{dx^I}{d\tau} + \Gamma_{IJ}^\lambda \frac{dx^I}{d\tau} \frac{dx^J}{d\tau} = 0, \quad (3.2.31)$$

onde os índices maiúsculos tomam os valores 1, 2, 3 apenas. Como $dx^I/d\tau \ll c$, podemos desprezar os dois últimos termos de 3.2.31 relativamente ao segundo,

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + c^2 \Gamma_{00}^\lambda \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0. \quad (3.2.32)$$

Considerando que o caso newtoniano deve estar relacionado com campos gravitacionais estáticos, e portanto com uma métrica independente do tempo, obtemos que os símbolos de Christoffel são dados por

$$\Gamma_{00}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_0 g_{0\sigma} + \partial_0 g_{0\sigma} - \partial_\sigma g_{00}) = -\frac{1}{2} g^{\lambda I} \partial_I g_{00}. \quad (3.2.33)$$

Substituindo em (3.2.32) obtemos

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} - \frac{1}{2} c^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 g^{\lambda I} \partial_I g_{00} = 0. \quad (3.2.34)$$

Considerando que o campo gravitacional é fraco, podemos considerar que o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ difira do caso chato $\eta_{\mu\nu}$ (Minkowsky) apenas por uma quantidade infinitesimal $h_{\mu\nu}$ [5], ou seja

$$g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (3.2.35)$$

Fazendo uma aproximação em primeira ordem de $h_{\mu\nu}$ em (3.2.34) obtemos

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} - \frac{1}{2} c^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \eta^{\lambda I} \partial_I h_{00} = 0. \quad (3.2.36)$$

Para $\lambda = 0$ em (3.2.36), obtemos que

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0, \quad (3.2.37)$$

que é compatível com $dt/d\tau \simeq 1$ que é a situação não relativística. Os outros valores de λ em (3.2.36) nos fornecem

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{1}{2}c^2 \nabla h_{00}. \quad (3.2.38)$$

Comparando com o caso Newtoniano,

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\nabla \phi, \quad (3.2.39)$$

onde M é a massa do corpo responsável pelo campo gravitacional fraco, e $\phi = -GM/r$ é o potencial Newtoniano, obtemos que

$$h_{00} = \frac{2\phi}{c^2}, \quad (3.2.40)$$

logo

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}, \quad (3.2.41)$$

que nos mostra a compatibilidade do limite da formulação relativística com a gravitação newtoniana. Uma vez que $h_{\mu\nu}$ é uma pequena perturbação, de (3.2.40) podemos notar que esta compatibilidade é válida no limite em que r é suficientemente grande, ou seja, para pontos relativamente distantes da massa M .

Equações de Campo de Einstein

Assim como é o caso da equação de Schrodinger em mecânica quântica, as equações de campo de Einstein não foram deduzidas, ele utilizou raciocínios por analogia e suas generalizações para chegar às equações que agora têm o seu nome, porém em última análise tais equações tiveram de ser postuladas. Utilizando a interpretação dada para g_{00} , como procedeu Einstein para chegar às equações dinâmicas?

Começou pela equação de Poisson a qual obedece o potencial newtoniano [5, 25]:

$$\nabla^2 \phi = -4\pi G\rho, \quad (3.3.42)$$

onde ρ é a densidade de matéria. A componente T_{00} do tensor momento-energia nos dá informações a respeito da densidade de energia, neste caso a densidade de matéria ρ . Portanto no limite de campos fracos, utilizando (3.2.41), podemos reescrever a equação

de Poisson da seguinte maneira

$$\nabla^2 g_{00} \simeq T_{00}. \quad (3.3.43)$$

Em busca de uma generalização para campos arbitrários, espera-se que a maneira como a distribuição de matéria e energia influencia na métrica do espaço-tempo seja dada por uma relação do tipo

$$\nabla^2 g_{\mu\nu} \simeq T_{\mu\nu}. \quad (3.3.44)$$

O lado esquerdo da relação acima nos diz que precisamos de um tensor que possua primeiras e segundas derivadas da métrica, este é o caso do tensor de Ricci, logo um primeiro palpite para a equação poderia ser $R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$. Este chute no entanto apresenta um problema, a conservação de energia-momento implica que $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, porém $\nabla_\mu R^{\mu\nu}$ não é necessariamente nula. Para solucionar este problema Einstein propôs o tensor

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (3.3.45)$$

que possui primeiras e segundas derivadas da métrica e satisfaz [5]:

$$\nabla_\mu G_{\mu\nu} = 0. \quad (3.3.46)$$

Assim, postulou-se que as equações de campo teriam a forma

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (3.3.47)$$

onde κ é uma constante de proporcionalidade. Esta constante deve ser tal que, no limite de campos fracos se recupere a equação de Poisson, para isso temos que fazer $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$, e portanto teremos que as equações de campo de Einstein são dadas por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (3.3.48)$$

Esta equação nos diz como a distribuição de matéria e energia influencia na geometria do espaço tempo e inversamente como a gravidade influencia a matéria e a energia. Tais equações podem ser particularmente complicadas por serem não lineares.

Podemos ainda obter as equações de Einstein utilizando o princípio de mínima ação, para isto considere a ação de Einstein-Hilbert [25], definida como

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{c^4}{16\pi G} R + \mathcal{L}_M \right), \quad (3.3.49)$$

onde g é o determinante da métrica, R é o escalar de Ricci e \mathcal{L}_M é a densidade lagrangeana

associada aos campos de matéria. Do princípio de Hamilton temos que

$$\delta S = \int d^4x \left[(\delta\sqrt{-g}) \left(-\frac{c^4}{16\pi G} R + \mathcal{L}_M \right) + \sqrt{-g} \delta \left(-\frac{c^4}{16\pi G} R + \mathcal{L}_M \right) \right] = 0, \quad (3.3.50)$$

que pode ser reescrita como

$$\int d^4x \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-g}} \delta g \left(-\frac{c^4}{16\pi G} R + \mathcal{L}_M \right) + \sqrt{-g} \left(-\frac{c^4}{16\pi G} \delta (g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) + \delta \mathcal{L}_M \right) \right] = 0. \quad (3.3.51)$$

Temos que g é o determinante da métrica, logo $\delta g = g g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$, assim

$$\int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{c^4}{16\pi G} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + 2g_{\mu\nu} \mathcal{L}_M \right) \delta g^{\mu\nu} - \frac{c^2}{16\pi G} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + \delta \mathcal{L}_M \right] = 0, \quad (3.3.52)$$

o teorema de divergente de Gauss pode ser aplicado na integral do termo $g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}$, reduzindo a integral no volume a uma integral de superfície que se anula uma vez que as condições de contorno impõe que os campos sejam nulos no infinito, para mais detalhes veja a referência [5]. Assim obtemos

$$\int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{c^4}{16\pi G} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) + \frac{1}{2} \left(2 \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu} \mathcal{L}_M \right) \right] \delta g^{\mu\nu} = 0. \quad (3.3.53)$$

Identificando

$$T_{\mu\nu} = 2 \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu} \mathcal{L}_M \quad (3.3.54)$$

em (3.3.53), obtemos finalmente que

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{c^4}{16\pi G} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) + \frac{1}{2} T_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} = 0. \quad (3.3.55)$$

Para variações arbitrárias de $\delta g^{\mu\nu}$ temos que o integrando deve ser identicamente nulo e portanto

$$-\frac{c^4}{16\pi G} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) + \frac{1}{2} T_{\mu\nu} = 0. \quad (3.3.56)$$

Rearranjando a última equação obtemos que

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (3.3.57)$$

que são as equações de campo de Einstein, desta vez obtidas pelo princípio de Hamilton da ação de Einstein-Hilbert.

Solução de Schwarzschild

A solução de Schwarzschild, descreve a geometria de um espaço-tempo estático e esfericamente simétrico ao redor de um objeto de massa M , no vácuo. Uma variedade Lorentziana (espaço-tempo) diz-se estática se admite um vetor de Killing (vide Apêndice B) do tipo tempo ($K = \partial_t$) que seja ortogonal a uma família de hipersuperfícies ($\dim = 3$), isto significa que podemos escolher um sistema de coordenadas para o qual a métrica é independente do tempo. O espaço-tempo em questão é dito esfericamente simétrico se admite o grupo $SO(3)$ como grupo de isometrias [5]. Desta forma, a métrica para uma solução estática e esfericamente simétrica é dada por:

$$ds^2 = e^{A(r)} dt^2 - e^{B(r)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2. \quad (3.4.58)$$

Utilizando a métrica (3.4.58), podemos calcular as componentes não nulas do tensor de Ricci, que são dadas por [26]:

$$R_{00} = -e^{(A-B)} \left(\frac{1}{2} A'' - \frac{1}{4} A' B' + \frac{1}{4} A'^2 + \frac{A'}{r} \right), \quad (3.4.59)$$

$$R_{11} = \frac{1}{2} A'' - \frac{1}{4} A' B' + \frac{1}{4} A'^2 - \frac{B'}{r}, \quad (3.4.60)$$

$$R_{22} = e^{-B} \left(1 + \frac{1}{2} r (A' - B') \right) - 1, \quad (3.4.61)$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2(\theta), \quad (3.4.62)$$

onde o prima denota a derivada com relação a r . Como estamos interessados em soluções no vácuo, as equações de Einstein se reduzem a:

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (3.4.63)$$

Portanto de (3.4.59) e (3.4.60) obtemos que:

$$A' = -B', \quad (3.4.64)$$

que tem como solução $A = -B + k$, com k constante. Podemos reescalonar o tempo fazendo $t \rightarrow e^{-k/2} t$, assim obtemos a condição

$$A = -B. \quad (3.4.65)$$

Com efeito, de (3.4.61) temos que:

$$e^A (1 + r A') = 1, \quad (3.4.66)$$

fazendo $e^{A(r)} = \alpha(r)$ encontramos que

$$(r\alpha)' = 1, \quad (3.4.67)$$

que tem como solução

$$\alpha(r) = 1 + \frac{c_2}{r}. \quad (3.4.68)$$

No limite de campos fracos devemos recuperar a gravitação newtoniana, de (3.2.41) podemos identificar $c_2 = -2GM/c^2$, desta forma encontramos que a soluções estáticas esfericamente simétricas das equações de Einstein no vácuo são dadas por:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2, \quad (3.4.69)$$

que é denominada solução de Schwarzschild. Esta foi a primeira solução exata das equações de Einstein publicadas em 1916 pelo astrofísico alemão Karl Schwarzschild [26]. Esta solução possui várias aplicações, dentre elas, cálculo de órbitas planetárias, cálculo do encurvamento da trajetória da luz ao passar nas proximidades de corpos de grande massa, cálculo do desvio para o vermelho gravitacional, estudo de buracos negros (área relativamente recente), etc. [25].

Princípio Cosmológico e Lei de Hubble

Um ponto de partida para estudar o Universo é o denominado princípio cosmológico, o qual afirma que em largas escalas o Universo é homogêneo e isotrópico [25, 5, 27, 26]. Por largas escalas queremos dizer algumas centenas de megaparsecs.

Antes da relatividade geral, existia a convicção de que o universo era estático em largas escalas, de modo que com excessão dos movimentos relativos dos astros, as distâncias inter-intergalácticas permaneciam constantes. No entanto, em 1929, Edwin Hubble confirmou através de diversas medições observacionais que o universo estaria sim se expandindo e que a velocidade de afastamento entre os astros era diretamente proporcional à distância entre estes. Tal lei ficou conhecida como lei de Hubble [25], e nos diz que

$$\vec{v} = H_0 \vec{r}, \quad (3.5.70)$$

onde \vec{v} é a velocidade de afastamento entre dois objetos separados por uma distância \vec{r} . A constante H_0 é denominada constante de Hubble e vale $H_0 = 100h Kms^{-1} Mpc^{-1}$ [5], sendo $h = 0,67 \pm 0,12$.

Utilizando (3.5.70) para galáxias suficientemente distantes concluiremos que a velocidade de afastamento entre elas é superior a velocidade da luz, o que implica em uma violação da relatividade restrita. Porém admitindo que estes objetos não estão, de

fato, se movendo ultra relativisticamente no espaço, mas que o próprio espaço está em expansão eliminamos o aparente problema com a relatividade restrita. Desta forma, no cenário de relatividade geral o efeito de afastamento das galáxias é compreendido como um efeito da expansão do espaço [25].

Um sistema de coordenadas particularmente muito útil é o denominado sistema de coordenadas comóveis, o qual é um sistema que acompanha a expansão. Deste modo, considerando que \vec{x} é o vetor posição fixo que conecta dois objetos no novo sistema de coordenadas, então o vetor posição \vec{r} que conecta tais objetos (relacionado à distância física) é dado por:

$$\vec{r} = a(t)\vec{x}, \quad (3.5.71)$$

onde $a(t)$ é o denominado fator de escala, que nos informa a escala em um determinado instante de tempo.

Derivando (3.5.71) com relação ao tempo obtemos

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{a}\vec{x}, \quad (3.5.72)$$

utilizando novamente (3.5.71) e utilizando que $\dot{r} = \vec{v}$ temos que

$$\vec{v} = \frac{\dot{a}}{a}\vec{r}. \quad (3.5.73)$$

De (3.5.70) defini-se o parâmetro de Hubble

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (3.5.74)$$

de forma que $H(0) = H_0$ seja a constante de Hubble, onde por convenção toma-se atualmente $a(0) = 1$.

Solução das Equações de Einstein na Métrica F.R.W

O próximo passo é encontrar a métrica que descreve um universo em expansão que esteja de acordo com o princípio cosmológico. Em largas escalas pode-se desprezar o movimento local das galáxias, e portanto, considerar que a velocidade com que as galáxias se afastam é aquela que é devida à expansão geral do espaço. Assim, podemos adotar o sistema de coordenadas comóveis, de maneira que neste referencial os aglomerados estão fixos [25, 26].

Esta foi a ideia introduzida por Hermann Weyl, o qual postulou que adotando este sistema de coordenadas podemos tratar o universo como um fluido perfeito onde as galáxias não interagem entre si [27]. Desta forma, uma vez que os aglomerados estão fixos no sistema comóvel, suas trajetórias no espaço-tempo cruzam perpendicularmente a hiper

superfície do tipo tempo ($ds^2 = c^2 d\tau^2$) e as linhas de mundo das partículas (aglomerados de galáxias) formam uma congruência de geodésicas do tipo tempo [5].

O princípio cosmológico afirma que o universo é espacialmente homogêneo e isotrópico, mas dependente do tempo. Matematicamente isso significa que nosso universo é uma 4-variedade que pode ser decomposta como $\mathbb{R} \times \Sigma$, onde \mathbb{R} representa a direção temporal e Σ uma 3-variedade maximalmente simétrica (vide Apêndice B) [5]. Neste caso a métrica é dada de forma mais geral por

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \right), \quad (3.6.75)$$

que é a intitulada métrica de Friedman-Robertson-Walker ou métrica F.R.W [26]. A constante k está associada aos três tipos de geometria espacial para nosso universo, são elas: Hiper-Esférica ($k = 1$); Hiper-Hiperbólica ($k = -1$) e Plana ($k = 0$).

Considerando-se a métrica F.R.W que descreve um espaço-tempo homogêneo e isotrópico, podemos agora resolver as equações de campo da gravitação

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (3.6.76)$$

onde por conveniência consideramos $c = 1$ a partir daqui. A matriz do tensor métrico neste caso é dada por

$$g_{\mu\nu} \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2 r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}, \quad (3.6.77)$$

e a matriz inversa do tensor métrico é escrita da seguinte forma

$$g^{\mu\nu} \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1-kr^2}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{a^2 r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a^2 r^2 \sin^2(\theta)} \end{pmatrix}, \quad (3.6.78)$$

de maneira que é satisfeita a relação $g_{\mu\nu} g^{\nu\sigma} = \delta_{\mu}^{\sigma}$. Considerando a conexão de Levi-Civita, a métrica permite calcular os símbolos de Christoffel (veja Apêndice B), as componentes

não nulas são (veja a Referência [5]):

$$\begin{aligned}
\Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{a}}{a} \\
\Gamma_{33}^0 &= \sin^2(\theta)\Gamma_{22}^0 = a\dot{a}r^2 \sin^2(\theta) \\
\Gamma_{11}^0 &= \frac{a\dot{a}}{kr}\Gamma_{11}^1 = \frac{a\dot{a}}{1-kr^2} \\
\Gamma_{33}^2 &= -\sin^2(\theta) = -\sin(\theta)\cos(\theta) \\
\Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r} \\
\Gamma_{33}^1 &= \Gamma_{22}^1 \sin^2(\theta) = -r(1-kr^2)\sin^2(\theta).
\end{aligned} \tag{3.6.79}$$

De posse dos símbolos de Christoffel, podemos obter as componentes do tensor de Ricci (veja Apêndice B), as componentes não nulas são dadas por (veja a Referência [5]):

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \tag{3.6.80}$$

$$R_{11} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1-kr^2}, \tag{3.6.81}$$

$$R_{22} = r^2 (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k), \tag{3.6.82}$$

$$R_{33} = r^2 (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \sin^2(\theta), \tag{3.6.83}$$

e em sequência podemos obter também o escalar de Ricci [5]:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = -6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right). \tag{3.6.84}$$

Em largas escalas, de acordo com o princípio cosmológico, o conteúdo de matéria do universo comporta-se como um fluido perfeito [26, 25], o tensor momento energia neste caso é dado por:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}, \tag{3.6.85}$$

onde ρ é a densidade de energia, p é a pressão do fluido cosmológico e u^μ é a quadrivelocidade do fluido que é dada por $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ pois as linhas de mundo dos constituintes do fluido são geodésicas do tipo tempo ($ds^2 = d\tau^2$) de acordo com o postulado de Weyl .

Substituindo as componentes do tensor de Ricci e do tensor momento energia em (3.6.76), obtemos que para $(\mu, \nu) = (0, 0)$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \tag{3.6.86}$$

e devido às simetrias associadas a métrica F.R.W temos que para as componentes $(\mu, \nu) = (1, 1) = (2, 2) = (3, 3)$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \tag{3.6.87}$$

As equações (3.6.86) e (3.6.87) são denominadas, respectivamente, a equação de Friedmann e a equação da aceleração, as quais são as soluções das equações de Einstein para a métrica F.R.W [5, 26, 25, 27].

Lembrando que $H = \dot{a}/a$, podemos notar que a equação de Friedman relaciona a geometria do Universo, a densidade de energia total e a taxa de crescimento do fator de escala da seguinte maneira

$$\rho = \frac{3}{8\pi G} \left(H^2 + \frac{k}{a^2} \right). \quad (3.6.88)$$

Se $k = 0$, obtemos a densidade de energia total de um universo plano, esta é denominada densidade de energia crítica e é dada por $\rho_c = \frac{3}{8\pi G} H^2$. Podemos assim definir também o parâmetro de densidade Ω

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}, \quad (3.6.89)$$

muito relevante na análise de modelos cosmológicos. Escrevendo a equação de Friedman em termos de Ω obtemos que

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2}, \quad (3.6.90)$$

assim se o Universo é esférico temos $\Omega > 1$, Universo hiperbólico fornece $\Omega < 1$ e se $\Omega = 1$ trata-se de um Universo plano, portanto Ω é uma medida indireta da geometria do Universo [25].

Analisando agora a equação da aceleração dada por 3.6.87, nota-se que se $\rho + 3p \geq 0$, denominada condição de energia forte, então a evolução cosmológica é estacionária ($\ddot{a} = 0$) para o caso em que $\rho + 3p = 0$ ou a evolução é desacelerada $\ddot{a} < 0$ para o caso em que $\rho + 3p > 0$. Dessa forma, a violação da condição de energia forte ($\rho + 3p < 0$) indica uma expansão acelerada do Universo ($\ddot{a} > 0$).

Por mais que \ddot{a} seja uma boa estimativa da aceleração do Universo, o parâmetro de desaceleração cósmica q é mais utilizado na literatura

$$q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}, \quad (3.6.91)$$

que permite classificar a evolução cosmológica como: acelerada $q < 0$; estática $q = 0$; desacelerada $q > 0$ [26].

Considerando agora a componente T_0^μ da equação de conservação da energia-momento, temos que

$$\nabla_\mu T_0^\mu = \partial_\mu T_0^\mu + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu T_0^\lambda - \Gamma_{\mu 0}^\lambda T_\lambda^\mu = 0, \quad (3.6.92)$$

utilizando os símbolos de Christoffel dados por (3.6.79) obtemos que

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (3.6.93)$$

Esta é uma equação de continuidade para o fluido cosmológico, podemos obter tal relação

a partir da primeira lei da termodinâmica $dE = pdV \rightarrow d(\rho a^3) = pd(a^3)$, desde que admitimos que o Universo sofre uma expansão adiabática.

Neste ponto, é importante entender como a pressão se relaciona com a densidade de energia. Com a aproximação de que o Universo é um fluido perfeito, nós podemos assumir que a pressão depende exclusivamente das características de seu componente, ou seja que a pressão é uma função da densidade de energia, $p = p(\rho)$. Isto é conveniente para definir uma equação de estado com um parâmetro ω tal que

$$p = \omega\rho. \quad (3.6.94)$$

Dois casos importantes são os que dizem respeito a um universo dominado por matéria (poeira) e a um universo dominado por radiação [5]. Para o caso de um universo dominado por poeira consideramos $p = 0$ uma vez que os constituintes do fluido se interagem apenas gravitacionalmente, desta maneira a Equação (3.6.93) nos fornece

$$\dot{\rho}_m = -3\frac{\dot{a}}{a}\rho_m, \quad (3.6.95)$$

onde ρ_m indica que tratamos de densidade de matéria, portanto,

$$\rho_m(t) = \frac{\rho_m(0)}{a^3}, \quad (3.6.96)$$

como esperado, uma vez que a densidade de matéria é inversamente proporcional ao volume.

Consideremos agora um universo dominado por radiação ρ_r , de (3.6.85) sabemos que se tomarmos o traço obtemos

$$T^\mu_\mu = \rho_r - 3p. \quad (3.6.97)$$

O tensor momento-energia para o eletromagnetismo pode ser expresso por [23]

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu\lambda}F^\nu_\lambda - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^{\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma}, \quad (3.6.98)$$

tomando o traço temos que

$$T^\mu_\mu = F^{\mu\lambda}F_{\mu\lambda} - \frac{1}{4}(4)F^{\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma} = 0, \quad (3.6.99)$$

mas ambos devem ser iguais pois tratam da radiação, logo

$$p = \frac{1}{3}\rho_r. \quad (3.6.100)$$

Portanto a equação de estado neste caso tem $\omega = 1/3$. Substituindo (3.6.100) em (3.6.93)

obtemos

$$\dot{\rho}_r + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho_r = 0, \quad (3.6.101)$$

que nos fornece a seguinte expressão

$$\rho_r(t) = \frac{\rho_r(0)}{a^4}. \quad (3.6.102)$$

Esta variação mais acentuada de ρ_r com $a(t)$ resulta de haver um fator adicional causado pela diminuição da frequência e da energia de cada fóton com a expansão do Universo, que é o fenômeno denominado desvio para o vermelho ou red-shift [5]. Este efeito Doppler evidencia o afastamento das galáxias, uma vez que por técnicas espectroscópicas podemos medir a diferença relativa entre o comprimento de onda emitido (λ_e) e o comprimento de onda observado λ_o dada por

$$z = \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e}, \quad (3.6.103)$$

onde z é denominado redshift. O redshift está relacionado com o fator de escala $a(t)$ pela seguinte relação (confira nas referências [5, 25]):

$$z + 1 = \frac{a(t_0)}{a(t)}, \quad (3.6.104)$$

onde t_0 é o tempo presente. Considerando então que o Universo seja constituído apenas de matéria (poeira) e radiação, então temos que a densidade total dada por $\rho = \rho_m + \rho_r$. Para pequenos valores do fator de escala temos um Universo dominado por radiação, substituindo (3.6.102) na equação de Friedmann (3.6.86) e considerando um universo plano ($k = 0$) obtemos que

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_r(0)}{a^4}, \quad (3.6.105)$$

cuja integração direta nos leva à relação

$$a(t) \propto \sqrt{t}. \quad (3.6.106)$$

Considerando agora valores maiores do fator de escala, o termo predominante é de poeira, e a equação de Friedman fornece que

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho_m(0)}{a^3}, \quad (3.6.107)$$

integrando direto obtemos que

$$a(t) \propto t^{2/3}. \quad (3.6.108)$$

Assim, podemos notar que a expansão cosmológica é mais acentuada no domínio da matéria, do que no da radiação. No domínio da radiação vimos que $a(t) \propto \sqrt{t}$, portanto

de acordo com a Lei de Stefan-Boltzmann [25], $\rho_r = \sigma T^4$, onde $\sigma = 5,7 \times 10^{-8} \text{Wm}^{-2} \text{K}^{-4}$ é a constante de Stefan-Boltzmann e T é a temperatura, concluímos que na era da radiação a temperatura tinha a seguinte relação com o fator de escala $T \propto \frac{1}{a}$, o que indica que em tempos remotos o Universo tinha altas temperaturas e por isso esse modelo às vezes é denominado Big-Bang quente.

Inflação Cósmica

O modelo de Big-Bang quente falha em resolver o problema das condições iniciais do Universo que inclui questões como o problema da planura e o problema do horizonte [6]. Discutimos agora tais problemas.

Problema da Planura e Problema do Horizonte

Começemos pelo problema da planaridade ou planura. De (3.6.90) e (3.6.103) podemos derivar a seguinte relação:

$$\frac{1 - \Omega(t)}{\Omega(t)} = \frac{1}{(1+z)^{3\omega+1}} \frac{1 - \Omega(t_0)}{\Omega(t_0)}, \quad (3.7.109)$$

onde $\omega = 0$ se for o caso de um Universo dominado por poeira e $\omega = 1/3$ para o caso de um Universo dominado pela radiação, e t_0 é o tempo presente. Podemos notar que $\Omega(t_0) = 1$, implica matematicamente $\Omega(t) = 1$ sempre. Porém, se $\Omega(t_0) \neq 1$, mas finito, então $\Omega(t) \rightarrow 1$, quando $z \rightarrow \infty$, isto é, quando analisamos o passado remoto. Para elevados valores de z , típicos da época da nucleossíntese dos elementos ($z \approx 10^{10}$) [25], para obtermos valores finitos e razoáveis de $\Omega(t_0)$, $\Omega(t)$ nessa época deveria ser praticamente igual a 1.

Ou seja, se o valor de $\Omega(t)$ diferisse de 1, mesmo que muito ligeiramente, então o valor de $\Omega(t_0)$ atualmente seria diferente por muitas ordens de grandeza, sendo que dados observacionais impõe $\Omega(t_0) \simeq 1$ [29, 5, 27, 25], temos que o Universo apesar de ser muito próximo da planura hoje, à medida que considerarmos fases mais remotas teremos que o Universo foi cada vez mais plano. Por quê o Universo foi assim tão plano? Este é o denominado problema da planura, e sua resolução se propõe justificar porquê o Universo primordial foi tão plano no passado.

Foi observado que as radiações emitidas de direções opostas do Universo devem ter se comunicado de alguma maneira no passado, uma vez que a radiação cósmica de fundo em microondas apresenta aproximadamente a mesma temperatura em todas direções do céu. Como isto poderia acontecer se estes pontos não tiveram contato um com o outro? Como pode ser que a informação de um chegou até o outro, sem estes nunca terem tido interação? Como um ponto sabe da existência do outro e parece exatamente igual? Não

houve tempo da informação ser transferida de um ponto a outro porque esta não pode ser transmitida com uma velocidade maior que a da luz. Este paradoxo chamou-se de “problema do horizonte” e questiona tal isotropia da radiação [6, 29].

Inflação Guiada Por Uma Constante Cosmológica Λ

Uma possível solução para estes problemas de condições iniciais do Universo é admitir uma fase de expansão acelerada no Universo primordial [6]. Considere por exemplo a equação de Friedmann (3.6.86), de onde obtemos que

$$k = \dot{a}^2(\Omega - 1), \quad (3.7.110)$$

se pretendermos que $\Omega \rightarrow 1$ (problema da planura), uma vez que k é constante, devemos ter \dot{a} crescente e portanto uma aceleração $\ddot{a} > 0$. Por outro lado, da equação da aceleração (3.6.87) temos que

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (3.7.111)$$

Desta forma, para obtermos $\ddot{a} > 0$ devemos ter $\rho + 3p < 0$, ou seja $\omega < -1/3$, condição esta que caracteriza modelos inflacionários. Para satisfazer tal condição podemos adicionar um termo com uma constante cosmológica Λ nas equações de Einstein [27], da seguinte maneira:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{T_{\mu\nu}} - g_{\mu\nu}\Lambda. \quad (3.7.112)$$

Onde $-g_{\mu\nu}\Lambda$ é um termo associado à distribuição de matéria e energia. As equações de Friedman e da aceleração serão reescritas respectivamente agora da seguinte forma:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (3.7.113)$$

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (3.7.114)$$

A constante cosmológica Λ pode ser a responsável pela aceleração cósmica primordial uma vez que $\omega_\Lambda = -1$ e satisfaz portanto o regime inflacionário. Com efeito considere que a inflação é um regime onde Λ é dominante, e portanto as equações são reduzidas a

$$H^2 = \frac{\Lambda}{3}, \quad (3.7.115)$$

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\Lambda}{3}. \quad (3.7.116)$$

Por substituição direta obtemos

$$H^2 = \frac{\ddot{a}}{a}, \quad (3.7.117)$$

que tem como solução para o fator de escala

$$a(t) = a_i e^{H(t-t_i)}. \quad (3.7.118)$$

Define-se $N \equiv H(t_f - t_i)$ como o número de e-foldings, um parâmetro adimensional para medir intervalos temporais de inflação cósmica. Considerando que a inflação tem início em um instante $t_i \approx 10^{-35} s$ que é o instante em que ocorre a unificação das forças fundamentais [6], e término em um instante de tempo t_f tal que tenhamos um número de 100 e-foldings, temos assim que

$$\frac{a_f}{a_i} = e^{100} \approx 10^{43}, \quad (3.7.119)$$

e portanto $a(t)$ aumentou 10^{43} vezes seu tamanho sob a ação de Λ . Vejamos como essa teoria resolve o problema da planura. Primeiramente façamos $\omega = -1$ em (3.7.109), desta forma temos que

$$\frac{1 - \Omega(t)}{\Omega(t)} = e^{-2N} \frac{1 - \Omega(t_0)}{\Omega(t_0)}, \quad (3.7.120)$$

assim, mesmo que o Universo primordial estivesse fora da planura antes do regime inflacionário ($|1 - \Omega| \approx 1$), transcorridos 100 e-foldings o Universo após a inflação estaria muito próximo da planura.

Como a inflação pode responder ao problema do horizonte? Este problema pode ser resolvido a partir da ideia de uma expansão exponencial sofrida pelo universo num curto período logo após o Big-Bang. Antes desse período de inflação, todo o universo pode ter estado em contato causal e em equilíbrio térmico. Regiões que hoje estão amplamente separadas estariam muito próximas no universo primordial, razão pela qual fótons dessas regiões têm quase exatamente a mesma temperatura, portanto a inflação resolve os problemas de condições iniciais do Universo [6].

No entanto, a dificuldade em compatibilizar a constante cosmológica necessária para guiar o regime inflacionário, e o valor de energia observável atualmente nos leva a descartar este modelo, para assim considerar um modelo dinâmico de inflação, onde consideraremos que um campo escalar denominado inflaton é o responsável pela inflação cósmica primordial.

Inflação Guiada Por Um Campo Escalar ϕ

Neste modelo considera-se que o inflaton domina a densidade de energia do Universo primordial [6, 5, 29], portanto a ação é dada por

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{c^2}{16\pi G} R + \mathcal{L}_i(\phi, \partial_\mu \phi) \right], \quad (3.7.121)$$

onde \mathcal{L}_i é a lagrangiana associada ao inflaton. Considerando uma dinâmica padrão para \mathcal{L}_i temos que

$$\mathcal{L}_i = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (3.7.122)$$

assim, de 1.3.44 temos que

$$\rho_i = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (3.7.123)$$

enquanto

$$p_i = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (3.7.124)$$

As equações de Friedmann são dadas agora por

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right) \quad (3.7.125)$$

$$\dot{H} = -4\pi G \dot{\phi}^2. \quad (3.7.126)$$

A partir das equações de Friedmann acima, podemos obter a equação de movimento do inflaton, dada por

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (3.7.127)$$

que é a própria equação de continuidade. Admitindo que o inflaton sofre o processo de slow roll [6], o qual considera que ϕ varia muito lentamente em um potencial $V(\phi)$ temos que então

$$\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 \ll V, \quad (3.7.128)$$

tal aproximação nos diz que ao longo de um tempo considerável o potencial é aproximadamente constante, e portanto das equações de Friedmann e da equação da continuidade obtemos

$$H^2 \simeq \frac{8\pi G}{3}, \quad 3H\dot{\phi} \simeq -V. \quad (3.7.129)$$

As equações acima nos fornece uma solução do tipo exponencial para o fator de escala

$$a(t) = a_0 e^{\sqrt{\frac{8\pi G V}{3}} t},$$

e resolvemos os problemas de condições iniciais como vimos anteriormente. Porém temos que neste modelo, diferentemente do modelo onde utilizamos uma constante cosmológica, a inflação termina quando o termo cinético consegue suplantado o potencial, e assim ocorrerá o processo de reaquecimento onde a energia do inflaton decai em energia de radiação e assim ocorre um aumento da energia térmica do Universo [6, 5].

Modelo Cosmológico Padrão ou Λ -CDM

Até o momento consideramos um Universo composto de matéria e radiação e vimos que para resolver os problemas de condições iniciais do Universo consideramos uma fase inflacionária em tempos remotos. Dados atuais nos fornecem o seguinte valor para o parâmetro de densidade de matéria no presente [5, 30]:

$$\Omega_m(t_0) = 0,3 \pm 0,1, \quad (3.8.130)$$

sendo o parâmetro de densidade de matéria bariônica estimado em [5, 30]:

$$\Omega_b(t_0) = 0,04 \pm 0,02. \quad (3.8.131)$$

Assim, podemos notar que a maior parte da matéria é composta de matéria não bariônica, e uma vez que a mesma não interage com a radiação, a denominamos de matéria escura. Atualmente o Universo é muito próximo da planura ($\Omega(t_0) \simeq 1$) com um vínculo observacional atual de $|\Omega_{total}(t_0) - 1| < 0,0005$ [30, 5], uma vez que o parâmetro de densidade de energia associado à radiação é dado por $\Omega_r(t_0) \approx 10^{-4}$, temos que aproximadamente 70 por cento da densidade de energia que compõe o Universo não é matéria, nem radiação, sendo denominada energia escura.

Um candidato natural à energia escura é a constante cosmológica, pois $\omega_\Lambda = -1$ está de acordo com os principais resultados observacionais [27]. O modelo cosmológico padrão, também denominado Λ -CDM, reproduz corretamente vários dados observacionais que possuímos na atualidade. Em tal modelo, o Universo seria constituído por matéria (bariônica e escura), radiação e uma constante cosmológica. Incorporamos a inflação no modelo Λ -CDM admitindo que o inflaton existia no universo primordial, cuja densidade de energia decaiu nos campos de matéria posteriormente. Desta forma a ação para o modelo Λ -CDM é dada por

$$S = -\frac{c^4}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m \quad (3.8.132)$$

onde Λ é a constante cosmológica, R é o escalar de Ricci e \mathcal{L}_m é a lagrangiana associada as fontes de campo gravitacional.

Pelo princípio de Hamilton obtemos as equações de campo de Einstein modificadas devido a presença de energia escura

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\Lambda. \quad (3.8.133)$$

As equações de Friedmann e da aceleração para um Universo plano são respectivamente:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3}, \quad (3.8.134)$$

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}, \quad (3.8.135)$$

onde podemos notar que se $\Lambda > \frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)$ então temos um Universo em expansão acelerada, que corresponde às observações atuais.

MODELO COSMOLÓGICO ϕ -CDM

ϕ -CDM

Um modelo alternativo ao Λ -CDM pode ser construído considerando que ao invés de tratarmos a energia escura utilizando uma constante cosmológica, consideramos um modelo dinâmico, onde um campo escalar homogêneo ϕ responde pela expansão acelerada do Universo. Esta alternativa é denominado modelo ϕ -CDM, e é descrito pela seguinte ação:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{c^4}{16\pi G} R + \mathcal{L}_M + \mathcal{L}_s(\phi, \partial_\mu \phi) \right], \quad (4.1.1)$$

onde \mathcal{L}_M é a lagrangiana dos campos de matéria, \mathcal{L}_s está associada ao campo escalar e R é o escalar de Ricci. Desta forma podemos decompor esta ação em $S = S_{EH} + S_s$, onde S_{EH} é a ação de Einstein-Hilbert dada por (3.3.49) e S_s é a ação do campo escalar.

Desta forma teremos que o tensor energia-momento é dado por

$$T_\nu^\mu \doteq \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix}, \quad (4.1.2)$$

onde $\rho = \rho_m + \rho_r + \rho_s$ e $p = p_m + p_r + p_s$.

Considerando o caso em que ϕ admite uma dinâmica padrão, cuja lagrangeana é dada por:

$$\mathcal{L}_s = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi), \quad (4.1.3)$$

e portanto de (1.3.44) sabemos que a densidade de energia associada a este campo escalar é dada por $\rho_s = T_0^0 = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi)$, e a pressão é $p = -T_1^1 = -T_2^2 = -T_3^3 = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi)$. Variando a ação (4.1.1) na métrica F.R.W obtemos as seguintes equações de movimento:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (4.1.4)$$

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p), \quad (4.1.5)$$

que são as equações de Friedmann e aceleração, porém agora considerando a densidade de energia e a pressão associadas ao campo escalar. Para a equação da aceleração temos que

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_r + \rho_m + \rho_s + 3p_r + 3p_m + 3p_s), \quad (4.1.6)$$

utilizando que $p_m = 0$, $p_r = \rho_r/3$ e que $p_s = \omega_s \rho_s$ temos que

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(2\rho_r + \rho_m + (1 + 3\omega_s)\rho_s). \quad (4.1.7)$$

Desta forma, para obtermos uma expansão acelerada do Universo devemos ter ω_s suficientemente negativo. Como ϕ admite uma dinâmica padrão, a equação de estado $\omega_s = \frac{p_s}{\rho_s}$ é dada por

$$\omega_s = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)}, \quad (4.1.8)$$

que pode assumir valores no intervalo $[-1, +1]$, que inclui o valor observacional $\omega_s \approx -1$. Desta forma, a escolha conveniente de um potencial pode levar o Universo de uma fase desacelerada para uma acelerada. Em [12, 13, 14], Bazeia et al. considera um Universo dominado por energia escura descrita por um campo escalar, nessas circunstâncias desprezamos as outras formas de energia e consideramos a ação

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{-c^4}{16\pi G} R + \mathcal{L}_s \right], \quad (4.1.9)$$

dessa maneira, as denominadas equações de Friedman e da aceleração serão respectivamente:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_s - \frac{k}{a^2}, \quad (4.1.10)$$

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_s + 3p_s), \quad (4.1.11)$$

onde $\rho_s = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)$ e $p_s = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)$. Utilizando que $H = \dot{a}/a$ podemos reescrever as equações de campo da seguinte maneira:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_s - \frac{k}{a^2} \quad (4.1.12)$$

$$\dot{H} = -4\pi G(\rho_s + p_s) + \frac{k}{a^2}. \quad (4.1.13)$$

Da equação de continuidade $\dot{\rho}_s + 3H(\rho_s + p_s) = 0$, logo a equação de movimento para o campo escalar é:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_\phi = 0. \quad (4.1.14)$$

Uma observação a ser feita é que esta equação não é independente, uma vez que pode ser obtida diretamente de (4.1.12) e (4.1.13).

Apesar de ter considerado até agora que o inflaton admite uma dinâmica padrão, nada nos impede de considerar outras dinâmicas, por exemplo, a dinâmica taquiônica, como considerada na referência [12], dada pela seguinte densidade lagrangiana:

$$\mathcal{L}_T = -V(\phi)\sqrt{1 - g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi}, \quad (4.1.15)$$

onde $V(\phi)$ é o potencial do modelo. Táquions seriam partículas que viajam com velocidades superiores à da luz. A relatividade restrita diz não ser possível acelerar uma partícula até que ela atinja a velocidade da luz, no entanto, nada impede a existência na natureza de partículas com velocidade superiores à da luz. De 3.3.54 temos que o tensor momento energia associado é

$$T_{\mu\nu} = \frac{V(\phi)\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi}{\sqrt{1 - g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi}} + g_{\mu\nu}V(\phi)\sqrt{1 - g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi}. \quad (4.1.16)$$

Nesse caso a densidade de energia e a pressão do campo escalar são dadas respectivamente por:

$$\rho_T = T_0^0 = \frac{V(\phi)}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}}, \quad p_T = -T_1^1 = -V(\phi)\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}. \quad (4.1.17)$$

O parâmetro da equação de estado $\omega_t = p_T/\rho_T$ nesse caso será:

$$\omega_T = -1 + \dot{\phi}^2, \quad (4.1.18)$$

que agora se encontra limitado no intervalo $[-1, 0]$ como pode ser conferido na referência [31]. Da equação de conservação local do tensor momento energia

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0,$$

obtemos a equação de movimento para o campo escalar taquiônico expressa por

$$\ddot{\phi} + (1 - \dot{\phi}^2) \left(3H\dot{\phi} + \frac{V_\phi}{V} \right) = 0. \quad (4.1.19)$$

Assim, além de poder modelar a expansão do universo utilizando campos escalares (inflaton), estes ainda podem ser descritos por dinâmicas não padrões, o que fornece

uma gama de possibilidades para se estudar o cenário cosmológico atual.

Formalismo de Primeira Ordem

Dinâmica Padrão

Vimos que quando consideramos um universo dominado por energia escura descrita por um campo escalar que admite uma dinâmica padrão, as equações de campo de Einstein são dadas por (4.1.12) e (4.1.13), considerando ($k = 0$) e substituindo os valores de energia e pressão temos:

$$H^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right) \quad (4.2.20)$$

$$\dot{H} = -\dot{\phi}^2, \quad (4.2.21)$$

onde convencionamos $4\pi G = 1$. Temos que por definição o fator de escala $a(t)$ depende do tempo, enquanto o inflaton $\phi(t)$ também possui dependência temporal, e como $H = H(t)$, das equações acima temos que considerar o potencial que também depende do tempo. No entanto consideramos que $V = V(\phi)$, sendo assim precisamos olhar o parâmetro de Hubble como função do inflaton. Neste ponto o formalismo de primeira ordem [12, 13], que tem como objetivo reduzir a ordem das equações de movimento, propõe que existe uma função $W = W(\phi)$, tal que

$$H = W(\phi). \quad (4.2.22)$$

Substituindo $H = W(\phi)$ e $\dot{H} = W_\phi \dot{\phi}$ em (4.2.20) e (4.2.21) temos as seguintes equações:

$$V(\phi) = \frac{3}{2} W^2 - \frac{1}{2} W_\phi^2 \quad (4.2.23)$$

$$\dot{\phi} = -W_\phi. \quad (4.2.24)$$

O parâmetro de aceleração cósmica \bar{q} é definido como

$$\bar{q} = \frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = 1 + \frac{\dot{H}}{H^2},$$

onde $\bar{q} > 0$ indica um universo em expansão acelerada, $\bar{q} < 0$ desacelerada e $\bar{q} = 0$ estática. Utilizando que $H = W$, podemos reescrever o parâmetro de aceleração cósmica da seguinte forma

$$\bar{q} = 1 - \left(\frac{W_\phi}{W} \right)^2. \quad (4.2.25)$$

Tal formalismo pode simplificar a obtenção de soluções cosmológicas considerando a energia escura guiada por um campo escalar.

Somente com o intuito de ilustrar o método, consideramos um modelo descrito na referência [12], onde considera-se o caso em que $W(\phi) = A\phi^2$, com A constante. De (4.2.23), o potencial associado ao modelo é dado por:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}A^2\phi^4 \left(3 - \frac{4}{\phi^2} \right). \quad (4.2.26)$$

A respectiva equação de movimento, de acordo com (4.2.24), é dada por

$$\dot{\phi} = -2A\phi, \quad (4.2.27)$$

que admite a seguinte solução

$$\phi(t) = \phi_0 e^{-2At}. \quad (4.2.28)$$

Desta maneira obtemos o parâmetro de Hubble utilizando que $H(t) = W(\phi(t))$, logo

$$H(t) = A\phi_0^2 e^{-4At}, \quad (4.2.29)$$

representado graficamente na figura (4.1).

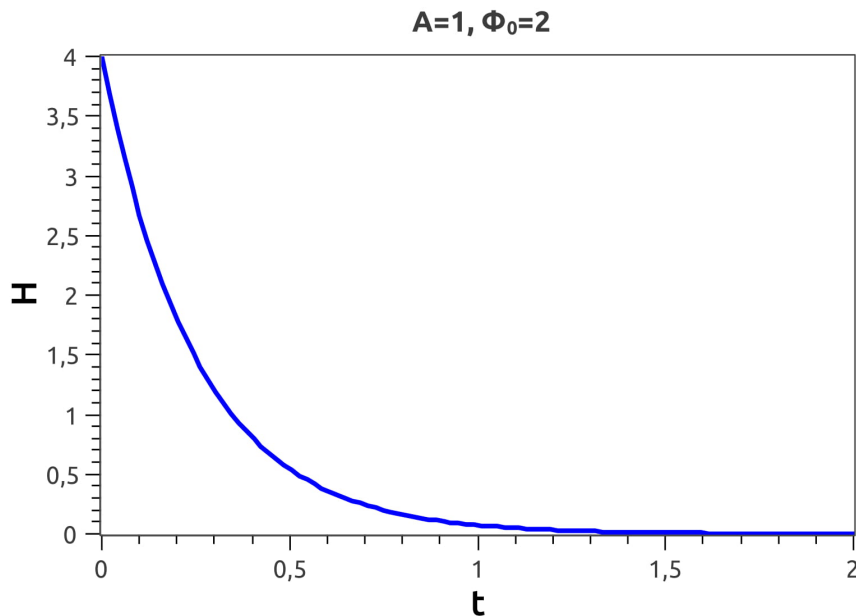


Figura 4.1: Gráfico do parâmetro de Hubble em função do tempo para o modelo $W = A\phi^2$

De (4.2.25), tal modelo nos fornece por sua vez o seguinte parâmetro de aceleração cósmica:

$$\bar{q} = 1 - \frac{4e^{4At}}{\phi_0^2}, \quad (4.2.30)$$

cujos gráficos estão representados na figura (4.2).

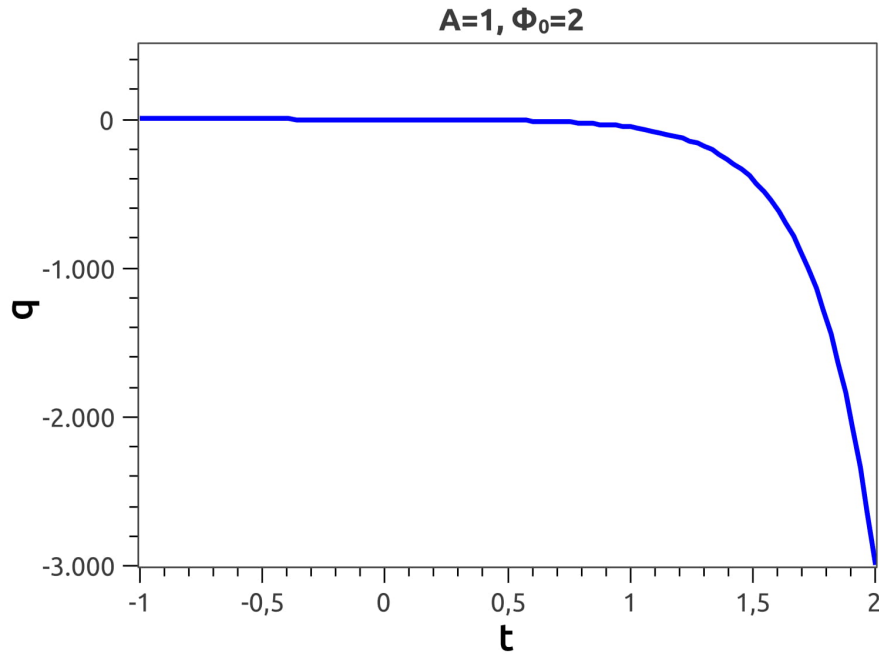


Figura 4.2: Gráfico do parâmetro de aceleração em função do tempo para o modelo definido por $W = A\phi^2$.

Como pode ser notado, tal modelo resulta em um Universo desacelerado, uma vez que $\bar{q} < 0$ para $t > 0$. Como dito anteriormente, o intuito em introduzir tal modelo foi de ilustrar como o método pode ajudar a fornecer modelos cosmológicos dependendo da escolha de $W(\phi)$.

Dinâmica Taquiônica

Podemos aplicar o formalismo de primeira ordem para o caso taquiônico. Assim, considerando que o inflaton admite uma dinâmica taquiônica descrita pela densidade lagrangiana (4.1.15), teremos que as equações de Friedman (4.1.12) e da aceleração (4.1.13) para um espaço plano ($k=0$) serão dadas respectivamente por

$$H^2 = \frac{2}{3} \frac{V}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}}, \quad (4.2.31)$$

e

$$\dot{H} = -\frac{V\dot{\phi}^2}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}}, \quad (4.2.32)$$

onde utilizamos a pressão e densidade de energia dadas na equação (4.1.17).

Utilizando agora o mesmo processo da seção anterior, fazendo $H = W(\phi)$, temos

que $\dot{H} = W_\phi \dot{\phi}$. Utilizando estas duas equações em (4.2.31) e (4.2.32) teremos

$$W^2 = \frac{2}{3} \frac{V}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}} \quad (4.2.33)$$

e

$$W_\phi = -\frac{V\dot{\phi}}{\sqrt{1 - \dot{\phi}^2}}. \quad (4.2.34)$$

Dividindo (4.2.34) por (4.2.33) encontramos a seguinte equação:

$$\dot{\phi} = -\frac{2}{3} \frac{W_\phi}{W^2}, \quad (4.2.35)$$

que é uma equação diferencial de primeira ordem, determinada uma vez que conhecemos a função $W(\phi)$. Substituindo esta equação em (4.2.33) obtemos o potencial em termos da função $W(\phi)$ da seguinte forma:

$$V(\phi) = \frac{3}{2} \sqrt{W^4 - \frac{4}{9} W_\phi^2}. \quad (4.2.36)$$

Utilizando estas equações podemos escrever o parâmetro de aceleração cósmica \bar{q} da seguinte maneira:

$$\bar{q} = 1 - \frac{2}{3} \left(\frac{W_\phi}{W^2} \right)^2. \quad (4.2.37)$$

Novamente com o intuito de ilustrar o método do formalismo de primeira ordem, dessa vez para uma dinâmica taquiônica, utilizaremos um modelo proposto na referência [12], definido pela seguinte escolha:

$$W(\phi) = \frac{A}{\phi}, \quad (4.2.38)$$

onde $A > 2/3$ é uma constante. Neste caso, de (4.2.36), o potencial associado ao modelo é dado por:

$$V(\phi) = \frac{3}{2} A \sqrt{A^2 - \frac{4}{9}} \frac{1}{\phi^2}. \quad (4.2.39)$$

Com efeito, de (4.2.35), obtemos a equação de movimento dada por:

$$\dot{\phi} = \frac{2}{3A}, \quad (4.2.40)$$

integrando obtemos

$$\phi(t) = \frac{2}{3A} t. \quad (4.2.41)$$

Assim, uma vez que o parâmetro de Hubble é dado por $H(t) = W(\phi(t))$, temos que:

$$H(t) = \frac{3A^2}{2t}, \quad (4.2.42)$$

cujo gráfico é dado pela Figura (4.3).

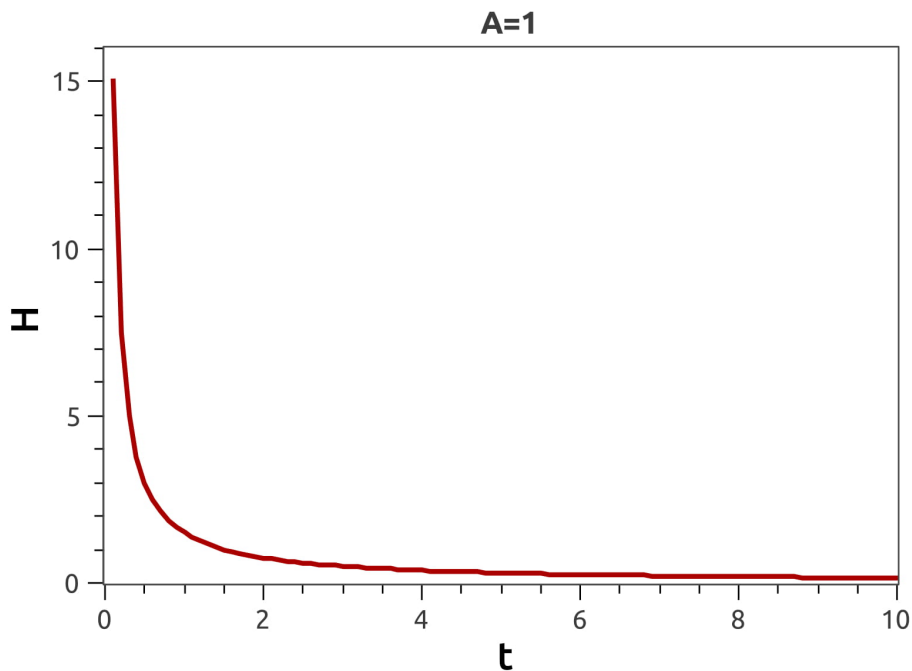


Figura 4.3: Gráfico do parâmetro de Hubble para o modelo definido por $W(\phi) = A/\phi$.

Para este potencial, da Equação (4.2.37), o parâmetro de aceleração cósmica é dado por $\bar{q} = 1 - \frac{2}{3A^2}$, sendo neste caso uma constante, ou seja, o Universo estaria se expandindo com uma aceleração constante.

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Neste trabalho investigamos como campos escalares se aplicam no cenário cosmológico. Para isso, inicialmente estudamos alguns modelos de campos escalares reais que admitem soluções do tipo defeito topológico e abordamos alguns métodos de resolvê-los. Em sequência introduzimos alguns tópicos em relatividade geral e cosmologia, contextualizando e discutindo como campos escalares resolvem problemas de condições iniciais do Universo na denominada teoria de inflação cósmica.

Abordamos também como campos escalares podem ser usados para modelar a energia escura que compõe 70% do Universo e responde pela atual expansão acelerada do mesmo. Para facilitar a obtenção de soluções das equações dinâmicas, apresentamos o formalismo de primeira ordem para dinâmicas padrão e taquiônica. Por fim, ilustramos o método utilizando alguns modelos propostos na referência [12].

Com a teoria aqui exposta, pretendemos futuramente ser capazes de propôr novos modelos para um Universo dominado por energia escura, com a finalidade de encontrar um modelo satisfatório com relação às observações e vínculos atuais.

APÊNDICES

TÓPICOS EM TEORIA CLÁSSICA DE CAMPOS

Formalismo de Lagrange

Sistemas mecânicos descritos por um conjunto enumerável de graus de liberdade podem ser descritos pelas coordenadas generalizadas $q_k(t)$, onde $k = 1, 2, \dots, N, \dots$. Quando passamos para um sistema contínuo, descrito por um conjunto não enumerável de graus de liberdade, trocamos o índice discreto k pelo contínuo x e temos assim em um dado instante um valor de campo definido em cada posição $\phi_x(t)$ que denotamos por $\phi(x, t)$, ver [35, 23].

A lagrangiana de um sistema discreto está relacionada com a soma sobre todos os graus de liberdade, no limite de um sistema contínuo trocamos a soma por uma integral, e temos a seguinte relação

$$L = \int d^3x \mathcal{L}, \quad (1.1.1)$$

que define a densidade lagrangiana denotada por \mathcal{L} , onde L é a lagrangiana do sistema. A densidade lagrangiana depende de ϕ , do termo cinético $\frac{\partial \phi}{\partial t}$, e também do termo $\nabla \phi$, o qual nos diz que o campo só interage consigo mesmo em regiões infinitesimalmente próximas, ver [35, 23], sendo assim escrevemos $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial t}, \nabla \phi, x, t)$. Seja um sistema de N campos $\phi = \{\phi_1, \dots, \phi_N\}$ em (3+1) dimensões espaço temporais, temos a seguinte expressão para a ação:

$$S(\phi) = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial t}, \nabla \phi, x, t), \quad (1.1.2)$$

onde $\Omega = V \times [t_1, t_2]$, sendo V o volume tridimensional e $[t_1, t_2]$ o intervalo temporal. Pelo princípio de Hamilton

$$\delta S = \delta \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial t}, \nabla \phi, x, t) = 0, \quad (1.1.3)$$

assim, de (1.1.3) teremos

$$\int_{\Omega} d^4x \sum_{\alpha=1}^N \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\alpha}} \delta \phi_{\alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_{\alpha}} \delta \dot{\phi}_{\alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \phi_{\alpha}} \delta (\nabla \phi_{\alpha}) \right\} = 0, \quad (1.1.4)$$

sob as condições

$$\delta \phi_{\alpha}(x, t_1) = \delta \phi_{\alpha}(x, t_2) = 0 \quad , \quad \delta \phi_{\alpha}(x, t)|_{\partial V} = 0, \quad (1.1.5)$$

em que ∂V é a superfície que delimita o volume tridimensional V . Utilizando integração por partes e a condição (1.1.5) teremos que

$$\int_{\Omega} d^4x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_{\alpha}} \delta \dot{\phi}_{\alpha} = - \int_{\Omega} d^4x \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_{\alpha}} \right) \delta \phi_{\alpha}. \quad (1.1.6)$$

De posse da identidade:

$$\nabla \cdot \left(\phi_{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi_{\alpha})} \right) = \nabla (\delta \phi_{\alpha}) \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi_{\alpha})} + \delta \phi_{\alpha} \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi_{\alpha})}$$

, teremos que o terceiro termo de (1.1.4) pode ser escrito como

$$\int_{\Omega} d^4x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \phi_{\alpha}} \delta (\nabla \phi_{\alpha}) = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3x \left\{ \nabla \cdot \left(\phi_{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi_{\alpha})} \right) - \delta \phi_{\alpha} \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi_{\alpha})} \right\}, \quad (1.1.7)$$

e utilizando o teorema da divergência no primeiro termo de (1.1.7) teremos

$$\int_{\Omega} d^4x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi_{\alpha})} \delta (\nabla \phi_{\alpha}) = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\partial V} \nabla \cdot \left(\phi_{\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi_{\alpha})} \right) \cdot \hat{n} dS - \int_{\Omega} d^4x \delta \phi_{\alpha} \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi_{\alpha})}. \quad (1.1.8)$$

Considerando que os campos não contribuem na superfície, o primeiro termo da direita de (1.1.8) se anula e obtemos

$$\int_{\Omega} d^4x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \phi_{\alpha}} \delta (\nabla \phi_{\alpha}) = - \int_{\Omega} d^4x \delta \phi_{\alpha} \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi_{\alpha})}. \quad (1.1.9)$$

Substituindo por fim (1.1.6) e (1.1.9) em (1.1.4) obtemos

$$\int_{\Omega} d^4x \sum_{\alpha=1}^N \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\alpha}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_{\alpha}} \right) - \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi_{\alpha})} \right\} \delta \phi_{\alpha} = 0, \quad (1.1.10)$$

como $\delta \phi_{\alpha}$ são independentes e arbitrários temos como soluções

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\alpha}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_{\alpha}} \right) - \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi_{\alpha})} = 0, \quad (1.1.11)$$

com $\alpha = 1, 2, \dots, N$. Estas são as equações de Lagrange para o sistema de N campos em

(3+1) dimensões espaço temporais.

Como as equações de Lagrange mantêm-se inalteradas diante de uma mudança das escalas das coordenadas x, t , ver [23], podemos fazer $x^0 = ct$ em (1.1.11) obtendo assim as equações de Lagrange na notação covariante

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_\alpha)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\alpha} = 0, \quad (1.1.12)$$

onde $\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla \right)$. O produto interno entre quadrivetores no espaço de Minkowsky é dado por $B_\mu B^\mu = \eta_{\mu\nu} B^\nu B^\mu$, onde $\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ é o tensor métrico. Basta exigir que a lagrangiana seja um escalar para que as equações de Lagrange sejam manifestamente covariantes, sendo \mathcal{L} um escalar, como d^4x é invariante sob transformações de Lorentz, resulta que a própria ação S é um escalar [35, 5].

Formalismo de Hamilton

De maneira semelhante a dinâmica clássica de partículas, define-se

$$\pi^\alpha(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_\alpha}, \quad (1.2.13)$$

como momento conjugado associado ao campo ϕ_α . Sendo (1.2.13) solúveis para $\dot{\phi}_\alpha$, define-se

$$\mathcal{H} = \sum_\alpha \pi^\alpha \dot{\phi}_\alpha - \mathcal{L}, \quad (1.2.14)$$

como densidade hamiltoniana [35]. A hamiltoniana é um funcional dos campos e seus momentos conjugados, sendo definida por

$$H[\phi_\alpha, \pi^\alpha] = \int d^3x \mathcal{H}(\phi_\alpha(x), \nabla \phi_\alpha(x), \pi^\alpha(x), \nabla \pi^\alpha(x)). \quad (1.2.15)$$

A ação na forma hamiltoniana é

$$S = \int_\Omega d^4x \left\{ \sum_\alpha \pi^\alpha \dot{\phi}_\alpha - \mathcal{H}(\phi_\alpha(x), \nabla \phi_\alpha(x), \pi^\alpha(x), \nabla \pi^\alpha(x)) \right\}.$$

Portanto segue do principio variacional de Hamilton que

$$\delta S = \int_\Omega d^4x \sum_\alpha \left\{ \left(-\dot{\pi}^\alpha - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_\alpha} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \phi_\alpha)} \right) \delta \phi_\alpha + \left(\dot{\phi}_\alpha - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^\alpha} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \pi^\alpha)} \right) \delta \pi^\alpha \right\} = 0. \quad (1.2.16)$$

Considerando variações independentes dos campos e seus momentos conjugados devemos ter portanto

$$\dot{\pi}^\alpha = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi_\alpha} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \phi_\alpha)}, \quad \dot{\phi}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi^\alpha} - \nabla \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\nabla \pi^\alpha)}, \quad (1.2.17)$$

que são as equações de campo na forma hamiltoniana.

Teorema de Noether

Consideremos as seguintes transformações

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + \Delta x^\mu, \quad (1.3.18)$$

e

$$\phi_\alpha(x) \longrightarrow \phi'_\alpha(x') = \phi_\alpha(x) + \Delta \phi_\alpha(x), \quad (1.3.19)$$

onde $\Delta \phi_\alpha(x) = \phi'_\alpha(x') - \phi_\alpha(x)$ é a variação total ¹ de ϕ_α . Sendo assim podemos escrever

$$\Delta \phi_\alpha(x) = \phi'_\alpha(x') - \phi_\alpha(x') + \phi_\alpha(x') - \phi_\alpha(x), \quad (1.3.20)$$

desprezando termos de segunda ordem teremos

$$\Delta \phi_\alpha(x) = \delta \phi_\alpha(x) + \partial_\mu \phi_\alpha \Delta x^\mu. \quad (1.3.21)$$

A partir de agora denotaremos $\partial_\mu \phi_\alpha = \phi_{\alpha;\mu}$ por questão de compacidade. Temos de (1.3.21) que a variação total de $\phi_{\alpha;\beta}$ é dada por

$$\Delta \phi_{\alpha;\beta} = \delta \phi_{\alpha;\beta} + \phi_{\alpha;\beta;\mu} \Delta x^\mu. \quad (1.3.22)$$

Diz-se que a ação é invariante sob um conjunto de transformações se [23]

$$\Delta S = \int d^4 x' \mathcal{L}(\phi'_\alpha(x'), \phi'_{\alpha;\beta}(x'), x') - \int d^4 x \mathcal{L}(\phi_\alpha(x), \phi_{\alpha;\beta}(x), x) = 0, \quad (1.3.23)$$

¹ é importante não confundi-la com o $\delta \phi_\alpha = \phi'_\alpha(x) - \phi_\alpha(x)$ que leva em consideração apenas a variação funcional de ϕ_α .

onde o conjunto de transformações considerado será (1.3.18) e (1.3.19). Sendo assim, denotando $\mathcal{L}(\phi'_\alpha(x'), \phi'_{\alpha;\beta}(x'), x') = \mathcal{L}'$ podemos escrever

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\alpha} \Delta \phi_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\alpha;\beta}} \Delta \phi_{\alpha;\beta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \Delta x^\mu, \quad (1.3.24)$$

substituindo (1.3.21) e (1.3.22) em (1.3.24) teremos

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\alpha} [\delta \phi_\alpha(x) + \phi_{\alpha;\mu} \Delta x^\mu] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\alpha;\beta}} [\delta \phi_{\alpha;\beta} + \phi_{\alpha;\beta;\mu} \Delta x^\mu] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \Delta x^\mu, \quad (1.3.25)$$

assim, obtemos

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \delta \mathcal{L} + \frac{d\mathcal{L}}{dx^\mu} \Delta x^\mu, \quad (1.3.26)$$

onde

$$\frac{d\mathcal{L}}{dx^\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\alpha} \phi_{\alpha;\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\alpha;\beta}} \phi_{\alpha;\beta;\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \Delta x^\mu,$$

é a derivada parcial total com relação a x^μ . Para dar continuidade aos cálculos utilizaremos o seguinte lema

Lema 1.3.1. *Seja B uma matriz tal que $B = 1 + \lambda A$, então $\det(B) = 1 + \lambda \text{Tr}(A) + O(\lambda^2)$.*

Demonstração. Demonstraremos para o caso em que A e B são matrizes 4×4 , pois é o caso que precisaremos, porém o resultado pode ser demonstrado da mesma maneira para matrizes $n \times n$. Seja a_{ij} os elementos de A e b_{ij} elementos de B então temos que $b_{ij} = \delta_{ij} + \lambda a_{ij}$, usando que [36]

$$\det(B) = \epsilon_{ijkl} b_{i1} b_{j2} b_{k3} b_{l4}, \quad (1.3.27)$$

temos como consequência que

$$\det(B) = \epsilon_{ijk} (\delta_{i1} + \lambda a_{i1}) (\delta_{j2} + \lambda a_{j2}) (\delta_{k3} + \lambda a_{k3}) (\delta_{l4} + \lambda a_{l4}), \quad (1.3.28)$$

que pode ser reescrita da seguinte forma

$$\det(B) = 1 + \lambda(a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44}) + O(\lambda^2).$$

Logo

$$\det(B) = 1 + \lambda \text{Tr}(A) + O(\lambda^2).$$

Q.E.D. \square

Como consequência deste lema segue que

$$d^4 x' = \left(1 + \frac{\partial \Delta x^\mu}{\partial x^\mu} \right) d^4 x. \quad (1.3.29)$$

Substituindo (1.3.26) e (1.3.29) em (1.3.23), a condição de invariância da ação pode ser reescrita como

$$\int d^4x \left(1 + \frac{\partial \Delta x^\mu}{\partial x^\mu} \right) \left\{ \mathcal{L} + \delta \mathcal{L} + \frac{d\mathcal{L}}{dx^\mu} \Delta x^\mu \right\} - \int d^4x \mathcal{L} = 0, \quad (1.3.30)$$

portanto,

$$\int d^4x \left\{ \delta \mathcal{L} + \mathcal{L} \frac{\partial \Delta x^\mu}{\partial x^\mu} + \frac{d\mathcal{L}}{dx^\mu} \Delta x^\mu \right\} = 0. \quad (1.3.31)$$

Lembrando que o termo $\delta \mathcal{L}$ é dado pela seguinte expressão

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\alpha} \delta \phi_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\alpha;\beta}} \delta \phi_{\alpha;\beta},$$

e utilizando (1.1.11) podemos escrever

$$\delta \mathcal{L} = \frac{d}{dx^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\alpha;\mu}} \right) \delta \phi_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\alpha;\beta}} \frac{\partial \delta \phi_\alpha}{\partial x^\beta}, \quad (1.3.32)$$

e conseqüentemente (1.3.32) é dada por

$$\delta \mathcal{L} = \frac{d}{dx^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\alpha;\mu}} \delta \phi_\alpha \right), \quad (1.3.33)$$

cuja substituição em (1.3.31) resulta

$$\int d^4x \left\{ \frac{d}{dx^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\alpha;\mu}} \delta \phi_\alpha \right) + \mathcal{L} \frac{\partial \Delta x^\mu}{\partial x^\mu} + \frac{d\mathcal{L}}{dx^\mu} \Delta x^\mu \right\} = 0.$$

O que implica que

$$\int d^4x \frac{d}{dx^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\alpha;\mu}} \delta \phi_\alpha + \mathcal{L} \Delta x^\mu \right) = 0, \quad (1.3.34)$$

portanto a condição de invariância da ação sob o conjunto de transformações proposto nos leva na seguinte lei de conservação local na forma covariante

$$\frac{d}{dx^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\alpha;\mu}} \delta \phi_\alpha + \mathcal{L} \Delta x^\mu \right) = 0. \quad (1.3.35)$$

Consideremos que R parâmetros infinitesimais independentes $\epsilon_1, \dots, \epsilon_R$ sejam suficientes para especificar as transformações (1.3.18) e (1.3.19) da seguinte forma

$$\Delta x^\mu = X^{\mu(r)} \epsilon_r, \quad (1.3.36)$$

$$\Delta \phi_\alpha = \psi_\alpha^{(r)} \epsilon_r, \quad (1.3.37)$$

onde α e r podem ou não representar índices tensoriais. Substituindo (1.3.36) e (1.3.37)

em (1.3.34) e fazendo

$$\Theta^{\mu(r)} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{\alpha;\mu}} \left(\psi_{\alpha}^r - \phi_{\alpha;\nu} X^{\nu(r)} \right) - \mathcal{L} X^{\mu(r)}, \quad (1.3.38)$$

seremos conduzidos a

$$\Delta S = - \int_{\Omega} d^4 x \epsilon_r \partial_{\mu} \Theta^{\mu(r)} = 0. \quad (1.3.39)$$

Como os parâmetros ϵ_r e a região de integração Ω são arbitrários, teremos R leis de conservação local

$$\partial_{\mu} \Theta^{\mu(r)} = 0, \quad (1.3.40)$$

com $r = 1, \dots, R$. Considerando o quadrivetor $\Theta^{\mu(r)} = (\Theta^{0(r)}, \Theta^{(r)})$ escrevemos as leis de conservação da seguinte forma

$$\partial_0 \Theta^{0(r)} + \nabla \cdot \Theta^{(r)} = 0. \quad (1.3.41)$$

Sendo assim se calcularmos

$$\frac{d}{dx_0} \int_V d^3 x \Theta^{0(r)} = \int_V d^3 x \partial_0 \Theta^{0(r)},$$

utilizando (1.3.41) somos conduzidos a

$$\frac{d}{dx_0} \int_V d^3 x \Theta^{0(r)} = - \int_V d^3 x \nabla \cdot \Theta^{(r)} = - \oint_{\partial V} \Theta^{(r)} \cdot d\vec{S}, \quad (1.3.42)$$

e uma vez que V engloba todo o espaço $3D$ e assumindo que os campos tendam a zero no infinito [35], a integral de superfície nesta última expressão é nula, logo

$$\frac{d}{dx_0} \int_V d^3 x \Theta^{0(r)} = 0.$$

Assim as R quantidades

$$C^{(r)} = \int d^3 x \Theta^{0(r)}, \quad (1.3.43)$$

são conservadas. Portanto existem quantidades conservadas devido a invariância da ação sob cada transformação infinitesimal das coordenadas e campos, estas quantidades $C^{(r)}$ são conhecidas como cargas de Noether. Como exemplo, se considerarmos a seguinte transformação

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon^{\mu},$$

onde consideramos translação no espaço-tempo sem alterações nos campos, isto é, $\Delta \phi_{\alpha} = 0$. Assim tomando em (1.3.36) e (1.3.37) $X^{\nu(r)} = g^{\mu(r)}$ e $\psi_{\alpha}^{(r)} = 0$ e substituindo em (1.3.38) obtemos

$$\Theta^{\mu\nu} \equiv T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi_{\alpha})} \frac{\partial \phi_{\alpha}}{\partial x_{\nu}} - \mathcal{L} g^{\mu\nu}, \quad (1.3.44)$$

que é conhecido como tensor de energia-momento [35, 37, 23]. Assim as quantidades de Noether conservadas são

$$P^\nu = \int d^3x T^{0\nu}. \quad (1.3.45)$$

Podemos observar que a componente T^{00} do tensor energia-momento é a densidade lagrangiana \mathcal{H} , ou seja,

$$T^{00} = \mathcal{H}, \quad (1.3.46)$$

logo a componente P^0 conservada é a energia, e as demais são as componentes do momento.

TÓPICOS EM GEOMETRIA DIFERENCIAL

Variedades

Espaços Topológicos

Um espaço topológico é um par (X, τ) , onde X é um conjunto não vazio e τ é uma família de subconjuntos abertos U_i ($i \in I$) de X satisfazendo as seguintes condições

- (1) $\emptyset, X \in \tau$
- (2) $\bigcup_{i \in J} U_i \in \tau$ ($J \subset I$)
- (3) $\bigcap_{i \in J} U_i \in \tau$ ($J \subset I, J$ finito).

Os elementos de X são chamados abertos e sob essas condições τ é uma topologia em X [33, 27]. Frequentemente se diz apenas "o espaço topológico X ", mencionando τ somente quando for necessário para evitar ambiguidades. Qualquer conjunto X será um espaço topológico se tomarmos uma das seguintes topologias $\tau = \{\text{todos subconjuntos de } X\}$ ou $\tau' = \{X, \emptyset\}$ que são exemplos diretos, claramente satisfazem as condições (1) a (3) e são denominadas respectivamente topologia discreta e topologia indiscreta.

Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ de um espaço topológico X em um espaço topológico Y , diz-se contínua quando a imagem inversa $f^{-1}(B)$ de todo aberto $B \subset Y$ for um aberto em X . Mais especificamente f se diz contínua no ponto $a \in X$ quando, para cada aberto B contido em Y , com $f(a) \in B$, existir um aberto $A \subset X$, com $a \in A$, tal que $f(A) \subset B$ [33]. Portanto podemos falar de continuidade de uma função sem falar de distância, ou seja, sem necessidade de que necessariamente X e Y sejam munidos de uma métrica. Neste sentido, espaços métricos são subconjuntos de espaços topológicos.

Um exemplo interessante de espaço topológico é obtido tomando $X = \mathbb{R}$ e τ consistindo de todos subconjuntos de \mathbb{R} que podem ser escritos como uniões de intervalos abertos (a, b) . Assim, considerando-se funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com a topologia acima definida

para \mathbb{R} , verificamos que a condição de continuidade é equivalente a definida num curso de cálculo onde utilizamos o conceito de norma.

Um espaço topológico (X, τ) se diz Hausdorff se para cada par de pontos distintos $p, q \in X$, com $p \neq q$, podemos encontrar conjuntos abertos $U_p, U_q \in \tau$ tal que $p \in U_p$ e $q \in U_q$, e $U_p \cap U_q = \emptyset$. A título de exemplo, considere $X = \mathbb{R}^n$ e a topologia τ consistindo de todo subconjunto de \mathbb{R}^n que possa ser escrito como a união de conjuntos abertos $(a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$. Com essa topologia definida \mathbb{R}^n é claramente um espaço topológico Hausdorff.

Variedades Diferenciáveis

No cálculo em \mathbb{R}^n , seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciável, então a derivada de f na direção v no ponto p é dada por

$$Df_p(v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t} \quad (2.1.1)$$

portanto necessitamos de uma estrutura de espaço vetorial, pois somamos e multiplicamos por escalar na definição acima. Porém, se olharmos mais atentamente, como f é diferenciável e portanto contínua, precisamos de uma estrutura de espaço vetorial local, pois estamos somando "coisas" que estão muito próximas. Sutilezas como estas nos mostram que podemos ter espaços mais gerais que \mathbb{R}^n , pois são localmente euclidianos, mas que nos permitem falar de diferenciabilidade. Uma das estruturas mais gerais que podemos trabalhar em matemática são os espaços topológicos [33], portanto natural impormos que esses espaços mais gerais que denomina-se variedades sejam espaços topológicos, localmente euclidianos.

Define-se agora matematicamente variedades diferenciáveis, quando diz-se diferenciáveis, por conveniência considere C^∞ . M é uma variedade diferenciável n -dimensional se:

- i M é um espaço topológico Hausdorff;
- ii M é munido com uma família de pares $A = \{(U_i, \varphi_i)\}$;
- iii U_i é uma família de conjuntos abertos os quais formam uma cobertura para M , ou seja, $\bigcup_i U_i = M$. φ_i é um homeomorfismo de U_i sobre um subconjunto aberto U'_i de \mathbb{R}^n ;
- iv Dados U_i e U_j tal que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, o mapa $\psi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ de $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ em $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ é C^∞ .

O par (U_i, φ_i) é denominado uma carta enquanto toda a família A é denominada atlas. O subconjunto U_i é a vizinhança coordenada, enquanto φ_i é a função coordenada.

Dado um ponto $p \in M$ então φ_i é representado por n funções $\{x^\mu(p)\}$ chamadas coordenadas [33, 34].

O item *iv* nos garante que a transição entre sistemas de coordenadas deve ser diferenciável, onde a diferenciabilidade é no sentido usual do cálculo em \mathbb{R}^n , ou seja, se $p \in U_i \cap U_j \neq \emptyset$, com $\phi_i = \{x^\mu\}$ e $\phi_j = \{y^\nu\}$ então $x^\mu(y)$ é diferenciável com respeito a cada y^ν .

Por exemplo, a esfera n -dimensional $S^n = \{(x^0, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^{n+1} / \sum_{i=0}^n x_i^2 = 1\}$ é uma variedade diferenciável. Considere por exemplo as vizinhanças coordenadas que formam uma cobertura para S^n

$$U_{i\pm} = \{(x^0, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^{n+1} / x^i \gtrless 0\}. \quad (2.1.2)$$

Sejam agora as funções coordenadas $\varphi_{i\pm} : U_{i\pm} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dadas por

$$\varphi_{i\pm} = (x^0, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^n), \quad (2.1.3)$$

e portanto $\varphi_{i\pm}^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow U_{i\pm}$ dadas por

$$\varphi_{i\pm}^{-1} = (x^0, \dots, x^{i-1}, \sqrt{1 - \sum_{j \neq i, j=1}^n x_j^2}, x^{i+1}, \dots, x^n). \quad (2.1.4)$$

Com essa construção para o atlas as funções de transição $\psi_{\{i\pm\}\{j\pm\}}$ são diferenciáveis em $U_{\{i\pm\}} \cap U_{\{j\pm\}} \neq \emptyset$, portanto S^n é uma variedade diferenciável [27].

Funções Diferenciáveis e Vetores Sobre Uma Variedade

Seja M uma variedade m -dimensional e N uma variedade n -dimensional, então um mapa $f : M \rightarrow N$ tem a seguinte representação coordenada:

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (2.1.5)$$

Se tomarmos $\varphi(p) = \{x^\mu\}$ como coordenada em $p \in M$ e $\psi(f(p)) = \{y^\alpha\}$ coordenadas em $f(p) \in N$, então f é dita diferenciável se $y = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x)$ é diferenciável no sentido usual do cálculo em \mathbb{R}^n .

Uma vez que temos definido o que são mapas diferenciáveis, podemos definir outros objetos geométricos. Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, e uma curva $c(\lambda) : (a, b) \rightarrow M$ tal que $c(0) = p \in M$, define-se o vetor tangente em $c(0)$ através da derivada direcional de uma função $f(c(\lambda))$ ao longo da curva $c(\lambda)$ em $\lambda = 0$

$$\left. \frac{df(c(\lambda))}{d\lambda} \right|_{\lambda=0}. \quad (2.1.6)$$

Dada uma coordenada local $\{x^\mu\}$, podemos escrever

$$\frac{df(c(\lambda))}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu(c(\lambda))}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0}. \quad (2.1.7)$$

Definindo o operador diferencial X

$$X = \frac{dx^\mu(c(\lambda))}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (2.1.8)$$

temos que

$$\frac{df(c(\lambda))}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} = X[f]. \quad (2.1.9)$$

Define-se assim $X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = X^\mu \partial_\mu$ como vetor tangente a M no ponto $p = c(0)$. O conjunto de vetores tangentes a todas as curvas que passam por $p \in M$ é denominado espaço vetorial tangente $T_p(M)$. Assim, dado um sistema de coordenadas $\{x^\mu\}$ local válido em alguma vizinhança de $p \in M$, os operadores $\{\partial_\mu\}$ formam uma base natural de $T_p(M)$ [33]. Assim, se um vetor $V_p \in T_p(M)$ então $V_p = V^\mu \partial_\mu$ são chamados vetores ou vetores contravariantes, onde V^μ são chamadas componentes de V_p na base ∂_μ .

Seja $V_p \in T_p(M)$, então o mesmo não deve depender do sistema de coordenadas, portanto dado $p \in U_i \cap U_j \neq \emptyset$ e $x = \varphi_i(p)$, $y = \varphi_j(p)$ devemos ter

$$V_p = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = X^{\mu'} \frac{\partial}{\partial y^{\mu'}} \quad (2.1.10)$$

e portanto devemos ter a seguinte relação

$$X^{\mu'} = \frac{\partial y^{\mu'}}{\partial x^\nu} X^\nu \quad (2.1.11)$$

que é a lei de transformação para as componentes dos vetores para que os mesmos permaneçam invariantes diante de uma mudança de coordenadas.

1-forma e Tensores Sobre Uma Variedade

O espaço tangente a um ponto $p \in M$ é um espaço vetorial, portanto existe um espaço vetorial dual $T_p^*(M)$ de $T_p(M)$. Os elementos $\omega : T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$ de $T_p^*(M)$ são chamados vetores duais, ou vetores covariantes, ou ainda no contexto de formas diferenciais de 1-forma. Denotando

$$\mathcal{L}(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} / f \in C^\infty\}$$

como o conjunto de todas as funções diferenciáveis de M em \mathbb{R} , um exemplo de 1-forma é a diferencial df de uma função $f \in \mathcal{L}(M)$. A ação de $df \in T_p^*(M)$ em um vetor $V \in T_p(M)$

é definida por

$$df \circ V = V[f] = V^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu}. \quad (2.1.12)$$

A base dual associada a base $\{\partial_\mu\}$ de $T_p(M)$ é dx^μ , a qual é L.I e gera $T_p^*(M)$ pois de (2.1.12) temos que

$$dx^\mu \circ V = V^\mu. \quad (2.1.13)$$

Assim, tomando $\lambda_\mu dx^\mu = 0$, então $\lambda_\mu dx^\mu(V) = 0 \quad \forall V \in T_p(M)$, logo fazendo $V = \partial_\nu$ sucessivamente obteremos

$$\lambda_\mu dx^\mu \circ \partial_\nu = \lambda_\nu = 0. \quad (2.1.14)$$

para $\nu = 1, \dots, n$ e portanto $\{dx^\mu\}$ é L.I. Considere agora a 1-forma $\omega \in T_p^*(M)$, então

$$\omega \circ V = V[\omega] = V^\mu \partial_\mu \omega = \omega_\mu dx^\mu \circ V \quad (2.1.15)$$

logo, $\forall \omega \in T_p^*(M)$, temos que $\omega = \omega_\mu dx^\mu$, portanto $\{dx^\mu\}$ gera $T_p^*(M)$ e forma uma base para o mesmo, ω_μ são chamadas componentes da 1-forma.

Vetores e 1-formas são objetos lineares, pode-se utiliza-los para construir objetos multilineares denominados tensores. Um tensor do tipo (q, r) é um objeto multilinear que mapeia q elementos de $T_p^*(M)$ e r elementos de $T_p(M)$ nos números reais. O conjunto dos tensores do tipo (q, r) num ponto $p \in M$ é denotado por $\mathcal{T}_{r,p}^q(M)$. Seja $T \in \mathcal{T}_{r,p}^q(M)$, podemos escreve-lo em termos das bases de $T_p(M)$ e $T_p^*(M)$ da seguinte maneira:

$$T = T_{\nu_1, \dots, \nu_r}^{\mu_1, \dots, \mu_q} \partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_q} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_r}. \quad (2.1.16)$$

Deste modo,

$$T : \bigotimes^q T_p^*(M) \otimes \bigotimes^r T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

é um mapa linear.

Variedades Riemannianas e Pseudo Riemannianas

Tensor Métrico

O tensor métrico generaliza a ideia de produto interno em espaços vetoriais, pois em variedades tem-se uma estrutura de espaço vetorial local e portanto o produto interno é definido também localmente, assim em cada espaço tangente a um ponto $p \in M$ definimos o tensor métrico g_p [33].

Seja M uma variedade diferenciável. Uma métrica riemanniana g sobre M é um $(0,2)$ campo tensorial sobre M tal que para cada $p \in M$:

- (1) $g_p(U, V) = g_p(V, U)$,
- (2) $g_p(U, U) \geq 0$, sendo a igualdade válida apenas se $U = 0$, onde $U, V \in T_p(M)$.

Seja agora M uma variedade diferenciável. Uma métrica pseudo-riemanniana g sobre M é um (0,2) campo tensorial sobre M se para cada $p \in M$ satisfaz:

$$(1) \quad g_p(U, V) = g_p(V, U),$$

$$(2) \quad \text{Se } g_p(U, V) = 0 \text{ qualquer que seja } U \in T_p(M), \text{ então } V = 0.$$

Seja (U, φ) uma carta em M e $\{x^\mu\}$ as coordenadas, então sendo g_p um (0,2) tensor temos que

$$g_p = g_{\mu\nu}(p)dx^\mu \otimes dx^\nu, \quad (2.2.17)$$

onde

$$g_{\mu\nu}(p) = g_p(\partial_\mu, \partial_\nu). \quad (2.2.18)$$

O tensor métrico pode ser representado por uma matriz cujos elementos são $g_{\mu\nu}$, desta forma a inversa do tensor métrico será representada pela matriz cujos elementos são $g^{\mu\nu}$ e satisfazem por definição $g_{\mu\nu}g^{\nu\alpha} = \delta_\mu^\alpha$.

Temos por definição que $g_p : T_p(M) \otimes T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$ é um produto interno $g_p(U, V)$ entre dois vetores $U, V \in T_p(M)$. Assim, dado um $U \in T_p(M)$ temos que $g_p(U, V) = g_p(U^\mu \partial_\mu, V^\nu \partial_\nu) = U^\mu V^\nu g_p(\partial_\mu, \partial_\nu) = g_{\mu\nu}U^\mu V^\nu = \omega_\nu V^\nu = (\omega_U, V)$, o qual nos diz que podemos tomar o produto interno equivalentemente como um mapa $T_p^*(M) \otimes T_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$ se considerarmos $\omega_U = \omega_\nu dx^\nu$ como 1-forma e portanto g_p dá origem a um isomorfismo entre $T_p^*(M)$ e $T_p(M)$. Este isomorfismo entre o espaço tangente e o respectivo dual é dado por

$$\omega_\mu = g_{\mu\nu}U^\nu \quad (2.2.19)$$

e

$$U^\mu = g^{\mu\nu}\omega_\nu. \quad (2.2.20)$$

Define-se um deslocamento infinitesimal ds como

$$ds^2 = g(dx^\mu \partial_\mu, dx^\nu \partial_\nu) = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu. \quad (2.2.21)$$

Se a matriz $g_{\mu\nu}$ tem todos autovalores estritamente positivos, então g é riemanniana, e se possui alguns autovalores negativos o tensor métrico é dito pseudo riemanniano [33]. Um caso especial de métrica pseudo Riemanniana é quando apenas um autovalor é positivo, neste caso g é dita métrica de Lorentz.

Uma variedade M é dita riemanniana se admite uma métrica riemanniana, pseudo riemanniana se admite uma métrica pseudo riemanniana e num caso especial em que a variedade admite uma métrica de Lorentz a variedade é chamada lorentziana.

Derivada Covariante, Transporte Paralelo e Geodésicas

Seja $\alpha : (a, b) \rightarrow M$ uma curva diferenciável em M , não podemos simplesmente definir

$$\frac{d^2\alpha(\lambda)}{d\lambda^2} = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{\alpha'(\lambda) - \alpha'(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} \quad (2.2.22)$$

pois $\alpha'(\lambda) \in T_{\alpha(\lambda)}(M)$ e $\alpha'(\lambda_0) \in T_{\alpha(\lambda_0)}(M)$ estão definidos em espaços vetoriais distintos e portanto esta operação não faz sentido.

A definição do conceito de conexão afim atende esta necessidade de definir uma noção de derivada intrínseca para campos vetoriais e se comporta exatamente como uma derivada direcional. O nome conexão se refere exatamente à ideia de conectar localmente os espaços tangentes de uma variedade.

Seja $\Gamma(M)$ o conjunto dos campos vetoriais sobre M , uma conexão afim ∇ é um mapa $\nabla : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \rightarrow \Gamma(M)$ o qual satisfaz as seguintes condições:

- (1) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
- (2) $\nabla_{(X+Y)}Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$
- (3) $\nabla_{(fX)}Y = f\nabla_X Y$
- (4) $\nabla_X(fY) = X[f]Y + f\nabla_X Y$,

onde $f \in \mathcal{L}(M)$ e $X, Y, Z \in \Gamma(M)$.

Seja M uma variedade de dimensão n e (U, φ) uma carta com coordenadas $x = \varphi(p)$ sobre M , então define-se os coeficientes de conexão $\Gamma_{\nu\mu}^\lambda$ pela seguinte expressão

$$\nabla_\nu e_\mu \equiv \nabla_{e_\nu} e_\mu = e_\lambda \Gamma_{\nu\mu}^\lambda, \quad (2.2.23)$$

onde $e_\mu = \partial_\mu$ é a base coordenada em $T_p(M)$. Desta forma, os coeficientes de conexão especificam como os vetores da base variam de um ponto para outro [33, 34]. Sabendo como ∇ atua na base, podemos obter sua atuação sobre vetores quaisquer. Seja, por exemplo, $V = V^\mu e_\mu$ e $W = W^\nu e_\nu$ vetores de $T_p(M)$ então

$$\nabla_V W = V^\mu \nabla_{e_\mu} (W^\nu e_\nu) = V^\mu (e_\mu [W^\nu] e_\nu), \quad (2.2.24)$$

e portanto de (2.2.23) temos que

$$\nabla_V W = V^\mu (\partial_\mu W^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) e_\lambda. \quad (2.2.25)$$

Portanto ∇ mapeia V e W em um novo vetor $V^\mu \nabla_\mu W^\lambda e_\lambda$ onde

$$\nabla_\mu W^\lambda = \partial_\mu W^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \quad (2.2.26)$$

é a λ -ésima componente do vetor $\nabla_\mu W$. Denomina-se $\nabla_\mu W$ como a derivada covariante do vetor W .

Seja a 1-forma ω , pode se demonstrar que sua derivada covariante é dada por $\nabla_\mu \omega = \nabla_\mu \omega_\alpha dx^\alpha$, onde

$$\nabla_\mu \omega_\alpha = \partial_\mu \omega_\alpha - \omega_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \quad (2.2.27)$$

é a α -ésima componente de $\nabla_\mu \omega$. [33]

De maneira geral, a derivada covariante de um tensor (p,q) é dada por

$$\nabla_\beta T = \nabla_\beta t_{\mu_1 \dots \mu_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_q} e_{\mu_1} \otimes \dots \otimes e_{\mu_p}$$

onde

$$\nabla_\beta t_{\mu_1 \dots \mu_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_q} = \partial_\beta t_{\mu_1 \dots \mu_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_q} + \Gamma_{\beta k}^{\alpha_1} t_{\mu_1 \dots \mu_q}^{k \alpha_2 \dots \alpha_p} + \dots + \Gamma_{\beta k}^{\alpha_p} t_{\mu_1 \dots \mu_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1} k} - \Gamma_{\beta \mu_1}^k t_{k \mu_2 \dots \mu_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} - \dots - \Gamma_{\beta \mu_q}^k t_{\mu_1 \dots \mu_{q-1} k}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} \quad (2.2.28)$$

são as componentes do tensor $\nabla_\mu T$ [34, 27].

Seja $c(\lambda) : I \rightarrow M$ uma curva em M , seja (U, φ) uma carta que cobre a imagem de $c(\lambda)$ e tenha coordenada $x = \varphi(p)$, considere também um campo vetorial X definido ao longo de $c(\lambda)$ tal que

$$X = X^\mu(c(\lambda)) e_\mu|_{c(\lambda)}, \quad (2.2.29)$$

então se $V = \frac{d}{d\lambda}$ é o vetor tangente a $c(\lambda)$, X é dito ser transportado paralelamente ao longo de $c(\lambda)$ se satisfaz a condição:

$$\nabla_V X = 0, \quad (2.2.30)$$

qualquer que seja $\lambda \in I$. Podemos escrever a condição de transporte paralelo em termo das componentes do campo, abrindo (2.2.30)

$$\nabla_{\left(\frac{dx^\alpha}{d\lambda} e_\alpha\right)} (X^\mu e_\mu) = 0 \quad (2.2.31)$$

e utilizando as propriedades de conexão obtemos

$$\frac{dx^\alpha}{d\lambda} \nabla_\alpha (X^\mu e_\mu) = 0 \quad (2.2.32)$$

e consequentemente obtem-se

$$\frac{dX^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\alpha\sigma}^\mu X^\sigma \frac{dx^\alpha}{d\lambda} = 0. \quad (2.2.33)$$

De modo semelhante [33], um tensor T é transportado paralelamente ao longo de uma curva $c(\lambda)$ definida em M se

$$\frac{dx^\alpha}{d\lambda} \nabla_\alpha T_{\nu_1 \dots \nu_q}^{\mu_1 \dots \mu_p} = 0. \quad (2.2.34)$$

Se tomarmos X em (2.2.30) como o próprio vetor tangente a $c(\lambda)$ e obtivermos

$$\nabla_V V = 0 \quad (2.2.35)$$

então $c(\lambda)$ é denominada geodésica, em termos de componentes escreve-se

$$\nabla_{\left(\frac{dx^\mu}{d\lambda} e_\mu\right)} \left(\frac{dx^\alpha}{d\lambda} e_\alpha\right) = 0 \quad (2.2.36)$$

que resulta na equação

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \quad (2.2.37)$$

que é a equação geodésica para uma dada conexão.

Seja M uma variedade diferenciável, então podemos ter várias conexões possíveis, porém se a variedade for munida de uma métrica podemos restringir as possíveis formas de conexões impondo que a métrica seja covariante, ou seja, exigindo que se dois vetores X e Y são transportados paralelamente ao longo de uma curva, então o produto interno não é alterado ao longo deste transporte. Matematicamente tal condição significa que restringimos as conexões tais que a métrica satisfaça:

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} \nabla_\mu g_{\alpha\beta} = 0. \quad (2.2.38)$$

Se esta relação é satisfeita, a conexão ∇ é dita compatível com a métrica ou chamada conexão métrica. Desta forma uma conexão métrica satisfaz $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0$, ou seja

$$\partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\alpha\nu}^\lambda g_{\mu\lambda} = 0. \quad (2.2.39)$$

Tomando as permutações cíclicas de (α, μ, ν) em (2.2.39) obtemos

$$\partial_\nu g_{\alpha\mu} - \Gamma_{\nu\alpha}^\lambda g_{\lambda\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda g_{\alpha\lambda} = 0. \quad (2.2.40)$$

$$\partial_\mu g_{\nu\alpha} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda g_{\lambda\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda g_{\nu\lambda} = 0. \quad (2.2.41)$$

Somando (2.2.40) e (2.2.41) e subtraindo (2.2.39) e utilizando o fato de que o tensor métrico é simétrico obtemos

$$\partial_\mu g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu} + T_{\alpha\nu}^\lambda g_{\mu\lambda} + T_{\alpha\mu}^\lambda g_{\nu\lambda} - 2\Gamma_{(\mu\nu)}^\lambda g_{\lambda\alpha} = 0, \quad (2.2.42)$$

onde $T_{\alpha\mu}^\lambda = \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda - \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda$ é denominado tensor de torsão e $\Gamma_{(\mu\nu)}^\lambda = \frac{1}{2}(\Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda)$. No caso em que a variedade é livre de torsão, ou seja, $T_{\mu\nu}^\lambda = 0$ então diz-se que a conexão métrica ∇ é dita conexão de Levi-Civita e (2.2.42) toma a forma

$$\partial_\mu g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu} - 2\Gamma_{\mu\nu}^\lambda g_{\lambda\alpha} = 0, \quad (2.2.43)$$

assim pode-se obter os coeficientes de conexão dados por

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}(\partial_{\mu}g_{\nu\alpha} + \partial_{\nu}g_{\alpha\mu} - \partial_{\alpha}g_{\mu\nu}) \quad (2.2.44)$$

denominados símbolos de Christoffel [33]. Reforçamos que estes são os coeficientes de conexão para uma conexão métrica ∇ em uma variedade que não apresenta torsão, ou seja para conexões de Levi-Civita.

Tensor de Curvatura de Riemann

Em espaços euclidianos, como \mathbb{R}^n , se transportarmos um vetor V de um ponto p a um ponto q paralelamente ao longo de uma curva c , não interessa qual curva utilizemos, o vetor deslocado será sempre o mesmo. Assim, se transportarmos um vetor V paralelamente ao longo de uma curva fechada no \mathbb{R}^n , obteremos que o vetor não sofre variações. O mesmo não é verdade em espaços de natureza não euclideana, por exemplo no caso da esfera. Se imaginarmos uma esfera embebida no \mathbb{R}^n , intuitivamente afirmariamos que a mesma apresenta curvatura, porém não é tão óbvio falar de curvatura de um espaço que não está embebido em \mathbb{R}^n , tratando a curvatura como uma propriedade intrínseca da variedade.

Para definir um conceito intrínseco de curvatura em uma variedade diferenciável utilizaremos a ideia de transporte paralelo de vetores [33]. A curvatura em uma variedade mede o quanto um vetor transportado paralelamente ao longo de diferentes curvas varia. Desta forma variando um vetor V^{ρ} ao longo da direção μ e depois ν , e comparando com o mesmo variando primeiro na direção ν e depois μ obtemos informação da curvatura, da seguinte maneira:

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]V^{\rho} = \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}V^{\rho} - \nabla_{\nu}\nabla_{\mu}V^{\rho} \quad (2.2.45)$$

utilizando a definição de derivada covariante obtemos que

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]V^{\rho} = (\partial_{\mu}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda})V^{\sigma} - 2\Gamma_{[\mu\nu]}^{\lambda}\nabla_{\lambda}V^{\rho} \quad (2.2.46)$$

e portanto podemos reescrever (2.2.46) da seguinte maneira

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]V^{\rho} = R_{\sigma\mu\nu}^{\rho}V^{\sigma} - 2T_{\mu\nu}^{\lambda}\nabla_{\lambda}V^{\rho} \quad (2.2.47)$$

onde $T_{\mu\nu}^{\sigma}$ é o já definido tensor de torsão e

$$R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} = \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \quad (2.2.48)$$

é o denominado tensor de curvatura de Riemann que nos dá informações de curvatura da

variedade [34]. Tomando o traço do tensor de Riemann $R_{\sigma\mu\nu}^{\rho}$, obtemos

$$R_{\sigma\nu} = R_{\sigma\mu\nu}^{\mu} \quad (2.2.49)$$

que é chamado tensor de curvatura de Ricci. O traço do tensor de Ricci por sua vez nos dá

$$R = R_{\sigma}^{\sigma} = g^{\sigma\nu} R_{\sigma\nu} \quad (2.2.50)$$

denominado escalar de curvatura de Ricci.

Vetores de Killing; Espaços Maximalmente Simétricos

Campos tensoriais podem possuir diferentes simetrias, simetrias da métrica são chamadas isometrias. Por exemplo, considere a métrica de Minkowski:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}. \quad (2.3.51)$$

Translações são isometrias deste espaço, uma vez que a transformação $x^{\mu} \rightarrow x^{\mu} + a^{\mu}$ mantém a métrica invariante. As transformações de Lorentz $x^{\mu} \rightarrow \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$ são outro exemplo de isometrias deste espaço.

A invariância da métrica por translações está associada ao fato de que a métrica não depende das funções coordenadas individuais x^{μ} , de fato, sempre que $\partial_{\sigma^*} g_{\mu\nu} = 0$ para algum σ^* fixo (para todo μ, ν), então a transformação:

$$x^{\sigma^*} \rightarrow x^{\sigma^*} + a^{\sigma^*}, \quad (2.3.52)$$

é uma isometria do espaço em questão [5]. Isometrias desta forma possuem consequências imediatas para o movimento de partículas teste descritas pela equação geodésica. A equação geodésica pode ser escrita em termos do 4-momento ($p^{\mu} = m dx^{\mu}/d\tau$) da seguinte maneira:

$$p^{\lambda} \nabla_{\lambda} p^{\mu} = 0. \quad (2.3.53)$$

Por se tratar de uma conexão métrica, podemos baixar o índice μ , assim obtemos que

$$p^{\lambda} \partial_{\lambda} p_{\mu} - \Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} p^{\lambda} p_{\sigma} = 0. \quad (2.3.54)$$

Uma vez que

$$p^{\lambda} \partial_{\lambda} p_{\mu} = m \frac{dp_{\mu}}{d\tau},$$

podemos notar que o primeiro termo está relacionada com a taxa com que a componente

do momento varia ao longo do caminho. O segundo termo é

$$\Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} p^{\lambda} p^{\sigma} = \frac{1}{2} (\partial_{\lambda} g_{\mu\nu} + \partial_{\mu} g_{\nu\lambda} - \partial_{\nu} g_{\lambda\mu}) p^{\lambda} p^{\nu} = \frac{1}{2} (\partial_{\mu} g_{\nu\lambda}) p^{\lambda} p^{\nu}. \quad (2.3.55)$$

Assim, a equação geodésica pode ser escrita como:

$$m \frac{dp_{\mu}}{d\tau} = \frac{1}{2} (\partial_{\mu} g_{\nu\lambda}) p^{\lambda} p^{\nu}, \quad (2.3.56)$$

portanto, se todas componentes da métrica são independentes da coordenada x^{σ^*} , então a isometria associada implica na conservação da σ^* -ésima componente do momento, ou seja:

$$\partial_{\sigma^*} g_{\mu\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp_{\sigma^*}}{d\tau} = 0, \quad (2.3.57)$$

que vale ao longo de qualquer geodésica. Portanto entender as isometrias de um espaço é muito útil no estudo do movimento de partículas teste em variedades curvas. Um campo vetorial que representa a direção de isometria de uma variedade é o denominado campo vetorial de Killing, o qual segue adiante.

Considere (M, g) uma variedade (pseudo)-Riemanniana e K um campo vetorial sobre M . Se um deslocamento ϵK , onde ϵ é infinitesimal, gera uma isometria, então o campo vetorial K é um campo vetorial de Killing [33]. Se a transformação $x^{\mu} \rightarrow x^{\mu} + \epsilon K^{\mu}$ é uma isometria, então:

$$\frac{\partial(x^{\alpha} + \epsilon K^{\alpha})}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial(x^{\beta} + \epsilon K^{\beta})}{\partial x^{\nu}} g_{\alpha\beta}(x + \epsilon K) = g_{\mu\nu}(x). \quad (2.3.58)$$

Desprezando termos da ordem de ϵ^2 obtemos a seguinte condição:

$$K^{\sigma} \partial_{\sigma} g_{\mu\nu} + \partial_{\mu} K^{\alpha} g_{\alpha\nu} + \partial_{\nu} K^{\beta} g_{\mu\beta} = 0, \quad (2.3.59)$$

denominada equação de Killing, a qual deve ser satisfeita por vetores de Killing, que nos informam as direções de isometria da variedade. Para conexões de Levi-Civita, utilizando (2.2.39), podemos reescrever as equações de Killing da seguinte maneira:

$$\nabla_{\mu} K_{\nu} + \nabla_{\nu} K_{\mu} = 0. \quad (2.3.60)$$

Desta forma, é evidente que se $\partial g_{\mu\nu} / \partial x^{\sigma^*} = 0$, $\forall \mu, \nu$, então $K = \partial_{\sigma^*}$ é um vetor de Killing.

Com efeito, considere o espaço \mathbb{R}^3 , podemos notar que $K_1 = \partial_x$, $K_2 = \partial_y$, $K_3 = \partial_z$, $K_4 = -y\partial_x + x\partial_y$, $K_5 = z\partial_x - x\partial_z$ e $K_6 = -z\partial_y + y\partial_z$ são vetores de Killing deste espaço, linearmente independentes e associados às simetrias de translação e rotação. Para o \mathbb{R}^3 temos 6 vetores de Killing linearmente independentes, de forma geral, considerando o \mathbb{R}^n temos n vetores de Killing associados às simetrias de translação e $\frac{1}{2}n(n-1)$ associados a

rotação, portanto para o \mathbb{R}^n temos $\frac{1}{2}n(n+1)$ simetrias independentes e portanto a mesma quantidade de vetores de Killing linearmente independentes.

Variedades (pseudo)-Riemannianas de $dim = n$, que admitem $n(n+1)/2$ vetores de Killing são denominados espaços maximamente simétricos. Esta classe de variedades, em qualquer ponto, ou sistema de coordenadas satisfazem a relação [5, 25]:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = \frac{R}{n(n-1)} (g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu}), \quad (2.3.61)$$

onde $R_{\rho\sigma\mu\nu}$ é o tensor de curvatura de Riemann e R é o escalar de curvatura de Ricci.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] RIESS, A. G. et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. **Astron. J.**, v. 116, p. 1009–1038, 1998. Citado na página 9.
- [2] PERLMUTTER, S. et al. Measurements of Omega and Lambda from 42 high redshift supernovae. **Astrophys. J.**, v. 517, p. 565–586, 1999. Citado na página 9.
- [3] BAHCALL, N. A. et al. The Cosmic triangle: Assessing the state of the universe. **Science**, v. 284, p. 1481–1488, 1999. Citado na página 9.
- [4] COPELAND, E. J.; SAMI, M.; TSUJIKAWA, S. Dynamics of dark energy. **Int. J. Mod. Phys.**, D15, p. 1753–1936, 2006. Citado na página 9.
- [5] CARROLL, S. **Spacetime and geometry: an introduction to General Relativity**. [S.l.]: Benjamin Cummings, 2004. Citado 22 vezes nas páginas 9, 31, 33, 34, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 50, 51, 52, 66, 82 e 84.
- [6] (AUTH.) T. SHANKS, A. J. B. R. S. E. C. S. F. A. W. W. e. A. H. G. **Observational Tests of Cosmological Inflation**. 1. ed. [S.l.]: Springer Netherlands, 1991. (NATO ASI Series 348). ISBN 978-0-7923-1431-8, 978-94-011-3510-8. Citado 5 vezes nas páginas 9, 48, 49, 50 e 51.
- [7] TSUJIKAWA, S. Quintessence: A Review. **Class. Quant. Grav.**, v. 30, p. 214003, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 10.
- [8] FRIEMAN, J. A. et al. Cosmology with ultralight pseudo Nambu-Goldstone bosons. **Phys. Rev. Lett.**, v. 75, p. 2077–2080, 1995. Citado na página 9.
- [9] CALDWELL, R. R.; DAVE, R.; STEINHARDT, P. J. Cosmological imprint of an energy component with general equation of state. **Phys. Rev. Lett.**, v. 80, p. 1582–1585, 1998. Citado na página 9.
- [10] CARROLL, S. M. Quintessence and the rest of the world. **Phys. Rev. Lett.**, v. 81, p. 3067–3070, 1998. Citado na página 9.
- [11] CALDWELL, R. R.; LINDER, E. V. The Limits of quintessence. **Phys. Rev. Lett.**, v. 95, p. 141301, 2005. Citado na página 9.
- [12] BAZEIA, D. et al. First-order formalism and dark energy. **Phys. Lett.**, B633, p. 415–419, 2006. Citado 7 vezes nas páginas 10, 55, 56, 57, 58, 60 e 62.
- [13] BAZEIA, D. et al. First-order formalism for dark energy and dust. **Eur. Phys. J.**, C55, p. 113–117, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 10, 55 e 57.

- [14] BAZEIA, D.; LOSANO, L.; RODRIGUES, J. J. First-order formalism for scalar field in cosmology. 2006. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 55.
- [15] RAJARAMAN, R. **Solitons and Instantons: An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory**. [S.l.]: North-Holland Publishing Company, 1982. (North-Holland personal library). Citado 7 vezes nas páginas 11, 16, 17, 18, 25, 26 e 27.
- [16] VACHASPATI, T. **Kinks and domain walls: an introduction to classical and quantum solitons**. 1. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2006. Citado 5 vezes nas páginas 11, 12, 13, 18 e 25.
- [17] JACKIW, R. Quantum meaning of classical field theory. v. 49, p. 681–706, 07 1977. Citado 5 vezes nas páginas 11, 12, 14, 21 e 22.
- [18] BAZEIA, D. Defect structures in field theory. In: **13th Jorge Andre Swieca Summer School on Particle and Fields Campos do Jordao, Brazil, January 9-22, 2005**. [S.l.: s.n.], 2005. Citado 11 vezes nas páginas 11, 12, 15, 18, 19, 22, 24, 25, 26, 27 e 29.
- [19] AVELAR, A. T. et al. Lump-like Structures in Scalar-field Models. **Phys. Lett.**, A374, p. 222–227, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 11, 12 e 18.
- [20] BAZEIA, D.; LOSANO, L.; SANTOS, J. R. L. Kinklike structures in scalar field theories: from one-field to two-field models. **Phys. Lett.**, A377, p. 1615–1620, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 12, 26 e 27.
- [21] BAZEIA, D.; BEMFICA, F. S. From Scalar Field Theories to Supersymmetric Quantum Mechanics. **Mod. Phys. Lett.**, A32, n. 2, p. 1750073, 2017. Citado na página 12.
- [22] ALONSO-IZQUIERDO, A. et al. New Models for Two Real Scalar Fields and Their Kink-Like Solutions. **Adv. High Energy Phys.**, v. 2013, p. 183295, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 26.
- [23] LEMOS, N. A. **Mecânica Analítica**. Second. [S.l.]: Livraria da Física, 2007. Citado 7 vezes nas páginas 15, 16, 46, 64, 66, 67 e 71.
- [24] BAZEIA, D.; LOSANO, L.; MALBOUISSON, J. M. C. Deformed defects. **Phys. Rev.**, D66, p. 101701, 2002. Citado na página 24.
- [25] WEINBERG, S. **Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity**. First edition. [S.l.]: Wiley, 1972. ISBN 9780471925675,0471925675. Citado 13 vezes nas páginas 31, 32, 33, 34, 37, 38, 41, 42, 44, 45, 47, 48 e 84.
- [26] RINDLER, W. **Relativity: special, general, and cosmological**. [S.l.]: Oxford University Press, USA, 2006. Citado 7 vezes nas páginas 31, 40, 41, 42, 43, 44 e 45.
- [27] WALD, R. **General Relativity**. [S.l.]: University of Chicago Press, 2010. Citado 11 vezes nas páginas 31, 33, 41, 42, 45, 48, 49, 52, 72, 74 e 79.

- [28] NUSSENZVEIG, M. **Curso de Física Básica: Mecânica - Vol. 1**. 4. ed. [S.l.]: Edgard Blucher, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 33.
- [29] A.B., H. **Teoria da relatividade geral: uma introdução**. [S.l.]: IST Press, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 48, 49 e 50.
- [30] REVIEW of particle physics. [S.l.: s.n.], 2006. ISBN 1-884932-57-6,0-19-852784-5,0-19-850733-X. Citado na página 52.
- [31] GIBBONS, G. W. Cosmological evolution of the rolling tachyon. **Phys. Lett.**, B537, 2002. Citado na página 56.
- [32] BAZEIA, D.; DANTAS, J. D. On the presence of twinlike models in cosmology. **Phys. Rev.**, D85, p. 067303, 2012. Nenhuma citação no texto.
- [33] NAKAHARA, M. **Geometry, Topology and Physics, Second Edition**. [S.l.]: Taylor & Francis, 2003. (Graduate student series in physics). Citado 10 vezes nas páginas 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 81 e 83.
- [34] CARMO, F. F. Manfredo P. do. **Riemannian geometry**. 1. ed. [S.l.]: Birkhäuser, 1992. (Mathematics. Theory applications). Citado 4 vezes nas páginas 74, 78, 79 e 82.
- [35] GOLDSTEIN CHARLES P. POOLE, J. L. S. H. **Classical mechanics**. 3. ed. [S.l.]: Addison Wesley, 2001. Citado 4 vezes nas páginas 64, 66, 70 e 71.
- [36] LIMA, E. L. **Algebra Linear**. [S.l.]: IMPA, 2014. Citado na página 68.
- [37] BARCELOS, J. B. **Matemática para Físicos com Aplicações**. First. [S.l.]: Livraria da Física, 2011. v. 2. Citado na página 71.