UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
ESCOLA DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOTECNIA, ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL

# ANÁLISE NÃO LINEAR DE PLACAS RETANGULARES COMPOSTAS DE MATERIAL VISCOELÁSTICO

**PHABLO VERÍSSIMO INÁCIO DIAS**

D0228E2020
GOIÂNIA
2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
ESCOLA DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

**1. Identificação do material bibliográfico**

[ X ] Dissertação [ ] Tese

**2. Nome completo do autor**

Phablo Veríssimo Inácio Dias

**3. Título do trabalho**

Análise não linear de placas retangulares compostas de material viscoelástico

**4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)**

Concorda com a liberação total do documento [ X ] SIM [ ] NÃO[1]

**[1]** Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:
**a)** consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
**b)** novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.
O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

**Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.**

Documento assinado eletronicamente por **Zenon Jose Guzman Nunez Del Prado**, **Professor do Magistério Superior**, em 28/07/2020, às 18:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **PHABLO VERÍSSIMO INÁCIO DIAS**, **Discente**, em 28/07/2020, às 18:21, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

PHABLO VERÍSSIMO INÁCIO DIAS

# ANÁLISE NÃO LINEAR DE PLACAS RETANGULARES COMPOSTAS DE MATERIAL VISCOELÁSTICO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geotecnia, Estruturas e Construção Civil da Universidade Federal de Goiás para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Área de Concentração: Estruturas.

Orientador: Dr. Zenón José Guzmán Núñez del Prado.
Coorientadora: Drª. Renata Machado Soares.

D0228E2020
GOIÂNIA
2020

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)**
**GPT/BC/UFG**

Dias, Phablo Veríssimo Inácio.
Análise não linear de placas retangulares compostas de material viscoelástico [manuscrito] / Phablo Veríssimo Inácio Dias. - 2020.
103 f.: il., figs, tabs.

Orientador: Prof. Dr. Zenón José Guzmán Núñez del Prado; Coorientadora: Profª. Drª. Renata Machado Soares
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Escola de Engenharia Civil e Ambiental, 2020.
Bibliografia.
Inclui lista de figuras, tabelas e símbolos.

1. Placas viscoelásticas 2. Modelo de Kelvin-Voigt 3. Vibrações não lineares I. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

ESCOLA DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

**ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO**

Ata nº **228** da sessão de Defesa de Dissertação de **Phablo Veríssimo Inácio Dias** que confere o título de Mestre(a) em **Geotecnia, Estruturas e Construção Civil**, na área de concentração em **Estruturas**.

Ao/s **dezenove dias do mês de junho do ano de dois mil e vinte**, a partir da(s) **09:00**, através de videoconferência, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada **"Análise não linear de placas retangulares compostas de material viscoelástico"**. Os trabalhos foram instalados pelo(a) Orientador(a), Professor(a) Doutor(a) **Zenon Jose Guzman del Prado(GECON/UFG)** com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor(a) Doutor(a) **Frederico Martins Alves da Silva (GECON/UFG)**, membro titular interno; Professor(a) Doutor(a) **Diego Orlando (UERJ)**, membro titular externo. Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do **trabalho**. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação tendo sido(a) o(a) candidato(a) **aprovado(a)** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo(a) Professor(a) Doutor(a) Zenon Jose Guzman del Prado, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos **dezenove dias do mês de junho do ano de dois mil e vinte**.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

---

Documento assinado eletronicamente por **Zenon Jose Guzman Nunez Del Prado**, **Professor do Magistério Superior**, em 19/06/2020, às 15:41, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Diego Orlando**, **Usuário Externo**, em 19/06/2020, às 16:25, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **Frederico Martins Alves Da Silva**, **Professor do Magistério Superior**, em 19/06/2020, às 16:29, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

Documento assinado eletronicamente por **PHABLO VERÍSSIMO INÁCIO DIAS**, **Discente**, em 19/06/2020, às 20:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1327270** e o código CRC **0C6F5E65**.

---

*Para meus pais Valdomiro e Maria de Jesus, por todo apoio e incentivo desde sempre*

*Para minha amada Ananda Cardoso, pela paciência, companheirismo e auxílio durante toda essa jornada*

# AGRADECIMENTOS

Aos professores Zenón José Guzmán Núñez del Prado e Renata Machado Soares, pela excelente orientação e pela dedicação e paciência em ensinar muito além do que está nos livros.

Aos professores e funcionários da Escola de Engenharia Civil e Ambiental da UFG que sempre me apoiaram e auxiliaram ao longo desse período. Agradeço em especial ao professor Frederico Martins Alves da Silva, pelo precioso conhecimento compartilhado.

Aos amigos Guilherme de Paula, Kênia Togoe, Ericka Hansen, Anna Elizabete e Marcel Sales; as dicas, os momentos de descontração, os conselhos e a companhia de vocês foi, sem dúvidas, fundamental para tornar essa trajetória mais suave e menos caótica.

À UFG e ao LABMEC pelo espaço disponibilizado para o desenvolvimento desta pesquisa.

À CAPES pelo auxílio financeiro.

À Deus, pela saúde, força e motivação ao longo dessa jornada.

# RESUMO

Com base no modelo mecânico de Kelvin-Voigt, estuda-se neste trabalho a influência do amortecimento viscoelástico nas vibrações não lineares e na instabilidade dinâmica de placas retangulares carregadas transversal e axialmente. São consideradas placas retangulares com imperfeições geométricas iniciais e com molas rotacionais lineares em todas as bordas de forma a considerar o engastamento. As relações não lineares de Von-Kármán são utilizadas para descrever as relações de deformação das placas e o sistema de equações não lineares de equilíbrio dinâmico é encontrado por meio do princípio de Hamilton através da aplicação do método de Rayleigh-Ritz, sendo resolvido posteriormente através do método de Runge-Kutta de quarta ordem. Inicialmente investiga-se, por meio das relações frequência-amplitude, a influência do parâmetro de viscoelasticidade no comportamento mecânico não linear da placa, observando-se que com o aumento do parâmetro de viscoelasticidade, as amplitudes máximas e a não linearidade da resposta diminuem. Foram obtidas as curvas de ressonância, o caminho pós-crítico, os diagramas de bifurcação, os planos fase e os mapeamentos de Poincaré para duas placas diferentes em condições distintas de carregamento. Mostra-se que, para todas as amplitudes estudadas do carregamento transversal, a placa apresenta soluções periódicas de período 1T. No entanto, quando se analisa a placa com níveis mais altos do carregamento axial, encontrou-se também soluções de alta ordem, quase-periódicas e caóticas. Para todos os casos observa-se um comportamento de endurecimento (*hardening*) da placa, porém, no estudo do efeito de imperfeições geométricas iniciais, a resposta pode se tornar inicialmente amolecida (*softening*) para níveis altos da imperfeição. Por fim, é utilizado também um modelo de amortecimento não-linear, o qual é comparado com um modelo de amortecimento viscoso equivalente.

**Palavras-Chave**: Placas viscoelásticas, modelo de Kelvin-Voigt, vibrações não lineares

# ABSTRACT

In this work, based on Kelvin-Voigt mechanical model, the effect viscoelastic damping on the nonlinear vibrations and dynamic instability of transversally and axially loaded rectangular plates is studied. Rectangular plates with initial geometric imperfections and, in order to admit clamped boundary conditions, linear rotational springs at the edges are considered. The non-linear Von-Kármán relations are used to describe the deformation relations of plates and the system of non-linear dynamic equilibrium equations is found through the Hamilton principle by application of the Rayleigh-Ritz method, which are in turn, solved by the fourth-order Runge-Kutta method. Initially, using the frequency-amplitude relations, the influence of the viscoelasticity parameter on the nonlinear mechanical behavior of the plate is investigated, observing that with the increase of viscoelasticity parameter, the maximum amplitudes and nonlinearity of the response decrease. The resonance curves, the post-critical paths, the bifurcation diagrams, the basins of attraction, the phase portraits and the Poincaré maps are obtained for two different plates under distinct loading conditions. It is shown that, for all the amplitudes of the transverse loading studied, the plate presents periodic solutions of period 1T. When the plate is analyzed with higher levels of axial loading, this response may have periods of high order, and quasi-periodic and chaotic responses are also found. In all cases, a behavior of hardening of the plate is observed, however, in the study of effect of initial geometric imperfections, the response may become initially softened for high levels of imperfection. Finally, a nonlinear damping model is also used, which is compared with an equivalent viscous damping model.

**Keywords**: Viscoelastic plates, Kelvin-Voigt model, nonlinear vibrations

# LISTA DE FIGURAS

# LISTA DE TABELAS

# LISTA DE SÍMBOLOS

**Símbolos romanos**

$a$, $b$ – Dimensões da placa na direção $x$ e na direção $y$

$E$, $E_1$, $E_2$ – Módulos de elasticidade no modelo, no elemento 1 e no elemento 2

$E(t)$ – Função de relaxação

$f$ – Componente de intensidade da carga pontual

$\mathbf{F}$ – Vetor das componentes de intensidade da carga pontual

$\mathbf{G_1}$, $\mathbf{G_2(\xi)}$, $\mathbf{G_3(\xi, \xi)}$ – Matrizes de viscosidade com dependência linear, quadrática e cúbica

$h$ – Espessura da placa

$J(t)$ – Função de fluência

$k_r$ – Coeficiente de rigidez das molas

$\mathbf{K_1}$, $\mathbf{K_2(\xi)}$, $\mathbf{K_3(\xi, \xi)}$ – Matriz de rigidez com dependência linear, quadrática e cúbica

$K_1$ – Componente de rigidez relativa à primeira equação

$\mathbf{M}$ – Matriz de massa diagonal

$M_1$– Componente de massa relativa à primeira equação

$M_x$, $M_y$ – Momentos na direção do eixo $x$ e do eixo $y$

$m$, $n$ – Modos de vibração nas direções $x$ e $y$

$M$, $N$– Número de modos utilizados para discretização na direção $x$ e $y$

$N_x$, $N_y$ – Cargas axiais aplicadas na direção do eixo $x$ e do eixo $y$

$N_{x,0}$ – Amplitude da parcela estática da carga axial para estudo de flambagem

$N_{x,1}$ – Amplitude da parcela dinâmica da carga axial para estudo de flambagem

$\tilde{N}$ – Número de graus de liberdade utilizados nas expansões modal

$t$ – Tempo

$T$ – Energia cinética da placa

$U_P$ – Energia potencial da placa

$U_E$ – Energia potencial da placa relativa à parte elástica

$U_V$ – Energia potencial da placa relativa à parte viscoelástica

$U_M$ – Energia potencial relativa às molas rotacionais

$U_C$ – Energia potencial relativa às cargas axiais estáticas de tração

$U$ – Energia potencial total da placa

$u$, $v$, $w$ – Componentes de deslocamento nas direções $x$, $y$ e $z$

$u_{m,n}$, $v_{m,n}$, $w_{m,n}$ – Amplitudes dos deslocamentos nas direções $x$, $y$ e $z$, respectivamente

$w_{1,1}$ – Amplitude de deslocamento do modo fundamental

$w_0$ – Amplitude da imperfeição geométrica inicial

$\bar{w}_{1,1}$ – Amplitude média do deslocamento de uma oscilação do modo fundamental

$W$ – Trabalho realizado pela carga pontual harmônica

**Símbolos gregos**

$\alpha_{m,n}$ – Fator de amortecimento viscoelástico linear

$\alpha_{1,1}$ – Fator de amortecimento viscoelástico linear relativo ao modo (1,1)

$\beta_{m,n}$ – Fator de amortecimento viscoelástico relativo à não linearidade cúbica

$\beta_{1,1}$ – Fator de amortecimento viscoelástico não linear cúbico relativo ao modo (1,1)

$\varepsilon$, $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ – Deformações no modelo, no elemento 1 e no elemento 2

$\varepsilon_x$, $\varepsilon_y$, $\gamma_{xy}$ – Componentes de deformação em um ponto qualquer da placa

$\varepsilon_{x,0}$, $\varepsilon_{y,0}$, $\gamma_{xy,0}$ – Componentes de deformação na superfície média da placa

$\delta$ – Delta de Dirac

$\Delta t$ – Passo de tempo para integração numérica do sistema

$\kappa_x$, $\kappa_y$, $\kappa_{xy}$ – Componentes de mudança de curvatura e torção em qualquer ponto da placa

$\eta$ – Parâmetro de viscoelasticidade

$\mu$ – Coeficiente de viscosidade

$\nu$ – Coeficiente de Poisson

$\ddot{\xi}$ – Vetor de acelerações em coordenadas generalizadas

$\dot{\xi}$ – Vetor de velocidades em coordenadas generalizadas

$\xi$ – Vetor de deslocamentos em coordenadas generalizadas

$\rho$ – Massa específica do material

$\Gamma_0$ – Razão da parcela estática da carga axial com a carga crítica de flambagem

$\Gamma_1$ – Razão da parcela dinâmica da carga axial com a carga crítica de flambagem

$\sigma$, $\sigma_1$, $\sigma_2$ – Tensões no modelo, no elemento 1 e no elemento 2

$\sigma_0$, $\varepsilon_0$ – Tensão e deformação constante aplicada no instante inicial

$\sigma_x$, $\sigma_y$, $\tau_{xy}$ – Componentes de tensão na direção x, na direção y e cisalhante

$\tau$ – Tempo adimensional

$\tau_0$ – Período de uma oscilação

$\phi$ – Parâmetro adimensional de frequência da carga transversal

$\phi_L$ – Parâmetro adimensional de frequência da carga axial

$\omega$ – Frequência de vibração da placa

$\omega_L$ – Frequência de vibração da placa carregada com o carregamento axial estático

$\omega_{m,n}$ – Frequência de vibração modal da placa

$\omega_{1,1}$ – Frequência de vibração do modo fundamental da placa

$\Omega$ – Frequência de excitação da carga harmônica transversal

$\Omega_L$ – Frequência de excitação da carga harmônica axial

$\zeta_{m,n}$ – Fator de amortecimento viscoso modal

$\zeta_{m,n}$ – Fator de amortecimento viscoso modal relativo ao modo (1,1)

# SUMÁRIO

# CAPÍTULO 1
# INTRODUÇÃO

Uma placa é caracterizada como um elemento estrutural definido em coordenadas bidimensionais e geralmente com uma de suas dimensões relativamente pequena em relação às demais, podendo receber cargas transversais e no plano. Esse elemento está presente nas mais diversas aplicações da engenharia, tais como: lajes e paredes de edifícios, reservatórios, cascos de navios, tabuleiros de pontes, partes da asa e da cauda de aeronaves, entre outras.

A respeito das características geométricas as placas podem ser distribuídas em três grupos, quais sejam: as membranas, as placas finas e as placas espessas. O grupo das membranas é caracterizado por elementos esbeltos com rigidez à flexão desprezível ou nula, sendo que sua resistência aos efeitos do carregamento é fornecida por meio dos esforços de membrana e do cisalhamento no plano. Por outro lado, as placas finas e espessas resistem ao carregamento por meio do momento fletor, do momento torçor, esforços cisalhantes transversais e esforços de membrana.

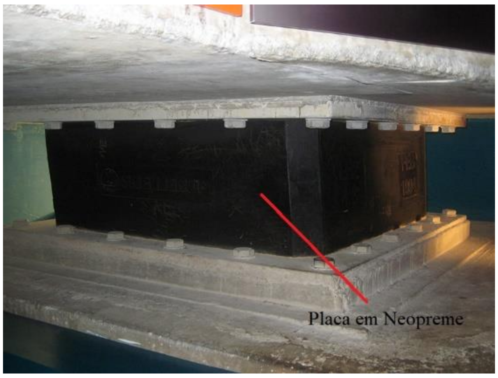
Placas finas podem ser representadas através da Teoria Clássica de Placas proposta por Kirchhoff-Love. Porém, quando se trata de placas espessas, essa teoria clássica não representa bem seu comportamento, pois para esse grupo de placas se faz necessário a consideração da contribuição do cisalhamento na rotação da seção transversal.

Além disso, as solicitações externas impostas podem provocar grandes deslocamentos e grandes amplitudes de vibração, sendo necessário, nesse caso, considerar uma análise não linear geométrica, o que torna a modelagem da placa mais complexa.

Atualmente podem-se encontrar placas constituídas por diversos materiais tais como: borracha, concreto, aço, madeira, polímeros e materiais biológicos. Neste escopo, placas de borracha podem ser facilmente encontradas na indústria mecânica e na mineração, tendo como principais aplicações o suporte estrutural de máquinas e equipamentos bem como o revestimento de peças para o amortecimento de vibrações indesejadas. Já as placas constituídas de concreto ou de aço são mais comuns na construção civil e placas compostas por polímeros têm mais utilidade em aplicações mecânicas, aeroespaciais e militares como o desenvolvimento de coletes a prova de balas nos quais são utilizadas placas em polipropileno e favos de aramida. Na Figura 1.1 apresentam-se alguns exemplos de aplicações para placas retangulares.

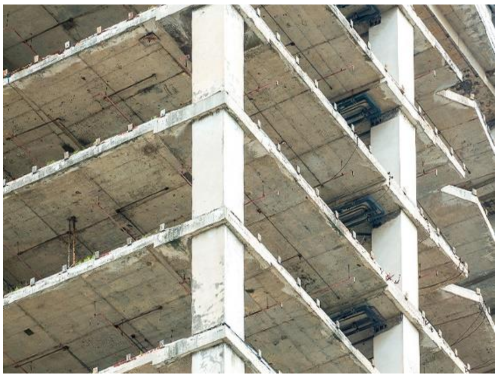
Figura 1.1 – Aplicações de placas: (a) laje Steel Deck; (b) suporte estrutural em neoprene; (c) placa em teflon; (d) lajes em concreto armado; (e) favos de aramida; (f) tabuleiro de uma ponte

(a)




(b)

(c)



(d)

(e)

(f)

Fonte: (a) http://sodef.com.br/lajes-steel-deck/;

(b) http://www.diprotec.com.br/produto/borracha-nitrilica/;

(c) http://www.imporseal.pt/produtos/plasticos-tecnicos/placas-e-varoes/placas/;

(d) https://www.mapadaobra.com.br/capacitacao/laje-macica-x-protendida/;

(e) http://www.aeroexpo.online/pt/prod/cel-components-srl/product-182895-28618.html;

(f) https://www.ecopontes.com.br/produtos-ver/ponte-hibrida-ecotex/22

Devido ao avanço da engenharia, em diversas áreas observa-se também a utilização de placas compostas por materiais viscoelásticos, tendo como principais exemplos os metais em altas temperaturas, elastômetros, materiais biológicos e compósitos.

Os materiais viscoelásticos possuem relação constitutiva dependente do tempo e possibilitam um corpo a se comportar em regime elástico e viscoso. Essa característica pode ser trabalhada em diversos aspectos dentro da engenharia bem como na caracterização do amortecimento de vibrações em estruturas. Nesse aspecto, utiliza-se as formulações da viscoelasticidade no intuito de considerar o amortecimento viscoelástico.

Para a análise da resposta dinâmica não linear de uma placa considerando o amortecimento viscoelástico, primeiramente é necessário definir seu modelo mecânico o qual é baseado em um acoplamento de molas e amortecedores que representam adequadamente a característica viscoelástica da placa. Flügge (2013), Marques e Creus (2012) e Amabili (2018a) destacam que os principais modelos viscoelásticos são: o modelo de Maxwell, o modelo de Kelvin-Voigt, o modelo de Zener e o modelo de Boltzmann. No Capítulo 2 desta dissertação apresenta-se uma explicação e a dedução das leis constitutivas viscoelásticas para cada um deles.

Por conta da dependência do tempo, as relações entre tensão e deformação em um modelo mecânico viscoelástico são obtidas por testes de fluência e relaxação. No teste de fluência aplica-se no modelo uma tensão constante em um intervalo de tempo, verificando a variação de deformações ao longo do tempo. Já no teste de relaxação uma deformação constante é aplicada ao modelo, sendo observada a variação de tensões ao longo do tempo.

Segundo Amabili (2018c) tanto o modelo de Zener quanto o modelo de Boltzmann capturam bem as propriedades de tensão e deformação em ambos os testes, porém fornecem equações constitutivas mais complexas que dificultam a caracterização matemática e a implementação computacional. Por outro lado, no modelo de Kelvin-Voigt verifica-se uma limitação matemática quanto ao teste de relaxação. No entanto, esse modelo mecânico captura com precisão o fenômeno da fluência e é amplamente utilizado para a modelagem de vibrações não lineares de placas com amortecimento viscoelástico, pois sua implementação computacional é mais simples quando comparada aos demais modelos.

É possível encontrar uma vasta bibliografia sobre análise não linear de placas em regime elástico com amortecimento viscoso linear. Porém, a bibliografia é limitada no aspecto de materiais com amortecimento viscoelástico, devido à dificuldade de modelagem pela dependência do tempo e de validação dos resultados via experimentos.

Com base nisso, o item 1.1 deste trabalho apresenta uma revisão do estado da arte das leis constitutivas viscoelásticas utilizadas para a modelagem de vibrações não lineares de placas em diversas condições e para diferentes aplicações na engenharia. Em sequência, no item 1.2 são apresentados os objetivos do trabalho. E por fim, no item 1.3 apresenta-se a organização desta dissertação.

## 1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

No trabalho de Xia e Lukasiewicz (1994), analisou-se a resposta dinâmica de uma placa sanduíche composta por três camadas, considerando as duas externas como isotrópicas e elásticas e a camada central como viscoelástica. Para isso, adotou-se o modelo de Kelvin-Voigt para caracterizar o material viscoelástico e a não linearidade geométrica do sistema foi descrita pela teoria Mindlin-Reissner.

Nessas análises variaram-se vários fatores físicos e geométricos da placa considerando o sistema em vibração livre. As equações de equilíbrio foram obtidas pelo princípio de Hamilton, utilizando o método de Runge-Kutta para resolução do sistema. Concluiu-se que a espessura e a rigidez da camada central viscoelástica são os fatores que mais influenciam na variação da frequência natural da placa.

Posteriormente Xia e Lukasiewicz (1995) acrescentaram carregamento dinâmico e utilizaram o princípio dos trabalhos virtuais para a obtenção das equações de equilíbrio dinâmico as quais foram solucionadas pelo método do Balanço Harmônico. Nesse trabalho, a camada central da placa também foi considerada como material viscoelástico, sendo caracterizada através do modelo mecânico de Kelvin-Voigt.

Com isso verificou-se a influência de alguns fatores físicos e geométricos da placa na sua resposta dinâmica não linear tais como: espessura da placa e módulo de elasticidade longitudinal e transversal. Analisaram-se as curvas de ressonância e curvas que relacionam a amplitude máxima da vibração com o fator físico ou fator geométrico em questão. Foram discutidos os melhores valores para esses fatores a fim de se obter a menor amplitude de deslocamento transversal da placa.

A influência da não linearidade geométrica e do parâmetro de viscoelasticidade na instabilidade dinâmica de placas também foi analisado por Sun e Zhang (2001). Para isso, utilizaram o princípio da superposição de Boltzmann para caracterizar o material viscoelástico e desenvolveram uma implementação computacional transformando todas as equações de equilíbrio integro-diferenciais em um sistema dinâmico autônomo o qual foi solucionado pelo método de Runge-Kutta.

Considerou-se uma placa simplesmente apoiada sob efeito de um carregamento axial distribuído composto de uma parcela estática e de uma harmônica. Concluiu-se que os parâmetros viscoelásticos podem influenciar nas condições de estabilidade de placa e que, para determinadas condições viscoelásticas, devido à não linearidade geométrica, podem existir atratores caóticos na bacia de atração do sistema dinâmico.

Rossihkin e Shitikova (2006) estudaram a ressonância interna nas vibrações livres não lineares de uma placa viscoelástica considerando a derivada fracional de Riemann-Liouville. Nesse trabalho, estudou-se a interação modal da placa submetida a diferentes ressonâncias internas, concluindo que, dependendo da ordem da derivada fracional, podem existir diferentes regimes vibracionais na estrutura, quais sejam: estacionário, quase estacionário e transiente.

Já Boutyour, Daya e Potier-Ferry (2006) desenvolveram uma metodologia limitada a respostas periódicas para a análise de vibrações não lineares de cascas viscoelásticas. O método parte de uma abordagem energética híbrida, unindo o método do balanço harmônico com um modo complexo do método de Galerkin. A análise viscoelástica nesse acoplamento foi realizada no domínio da frequência e tem como resultado uma equação que relaciona a amplitude de vibração da casca com sua respectiva frequência vibração, sendo possível análises das curvas de ressonância em relação ao parâmetro de viscoelasticidade.

Um pouco mais tarde, Bilasse, Azrar e Daya (2011) desenvolveram um método numérico para análise linear e não linear de vibrações de placas sanduíches viscoelásticas, onde foram estudadas placas compostas de três camadas, sendo as camadas externas material elástico e a camada central material viscoelástico. O procedimento computacional desenvolvido teve como base o método dos elementos finitos, acoplado ao método de balanço harmônico com um modo complexo do método de Galerkin, em que os resultados são obtidos por meio de um problema de autovalor.

Também foi admitido que o comportamento mecânico da placa é governado pela teoria de Mindlin-Reissner. Assim, desenvolveu-se uma formulação que considera o comportamento viscoelástico no domínio da frequência, mostrando ser uma abordagem bastante eficiente para caracterizar as respostas linear e não linear das placas em diferentes condições de contorno e para diferentes leis constitutivas viscoelásticas.

Balkan e Mecitoğlu (2014) analisaram teoricamente e experimentalmente o comportamento dinâmico não linear de placas sanduíche compostas de material viscoelástico submetidas a explosão não uniforme. Foram analisados dois tipos de placas, todas com três camadas, sendo a camada central composta por material viscoelástico e as camadas externas compostas por compósitos laminados. Consideraram engaste em todas as bordas das placas e o modelo mecânico de Kelvin-Voigt foi utilizado para caracterizar o material viscoelástico, onde o parâmetro de viscoelasticidade foi obtido por testes de *Dynamic Mechanical Analyzer* (*DMA*).

Esses autores concluíram que, para um controle eficiente das vibrações da placa, aumentar a espessura da camada central é mais conveniente que aumentar a espessura das demais camadas. Porém, essa assertiva só é válida para um regime linear de vibrações, pois em um regime com não-linearidade geométrica acentuada a variação da espessura das camadas não causa tanta influência na resposta dinâmica da placa. Também foi concluído que, ao alterar a excentricidade da carga de explosão, os picos de amplitude e a frequência de vibração da placa podem ser alterados.

Posteriormente, Amabili (2016) analisou as vibrações em placas retangulares viscoelásticas através do modelo mecânico de Kelvin-Voigt, comparando-as com um modelo de amortecimento viscoso equivalente no qual o amortecimento viscoelástico é negligenciado. Observou-se que a resposta da frequência da placa é diferente para cada modelo de amortecimento considerado, pois o amortecimento proporcionado por Kelvin-Voigt resulta em termos não lineares proporcionais à rigidez da placa. Concluiu-se também que, quando é considerado o efeito de imperfeições geométricas iniciais, a resposta da frequência pode ser inicialmente amolecida (*softening*) tornando-se endurecida (*hardening*) para maiores amplitudes de vibrações.

O modelo mecânico de Kelvin-Voigt também foi utilizado no trabalho de Balasubramanian *et al.* (2017) que compararam placas sob efeito de amortecimento viscoso equivalente com placas sob amortecimento viscoelástico. Analisaram numericamente e experimentalmente vibrações não lineares em dois tipos de placas viscoelásticas, uma composta por silicone e outra por neoprene, considerando-as finas, isotrópicas, engastadas em todas as bordas e submetidas a um carregamento pontual harmônico. As placas foram analisadas em quatro diferentes níveis de carga, comparando as curvas de ressonância obtidas através da análise numérica com as mesmas curvas obtidas através de análises experimentais.

Com as análises foram confirmados os resultados alcançados por Amabili (2016), nos quais a resposta da frequência é diferente para cada consideração de amortecimento da placa. Além disso, Balasubramanian *et al.* (2017) concluíram que, para altas amplitudes de vibração, o modelo de Kelvin-Voigt não consegue descrever bem o comportamento mecânico não linear da placa, pois, para que não houvesse divergência dos resultados experimentais com os resultados numéricos, necessitou-se a alteração do parâmetro de viscoelasticidade para cada nível de carga.

No trabalho de Amabili (2018a) foi apresentado um modelo de amortecimento não linear a partir do modelo de Zener, sendo obtido a partir de uma adaptação na formulação viscoelástica fornecida pelo modelo mecânico. Nas análises considerou-se uma placa retangular de aço inoxidável com imperfeições geométricas iniciais.

As curvas de ressonância da placa obtidas através da análise numérica foram comparadas com curvas obtidas via análise experimental, onde constatou-se que, com a formulação proposta pelo autor, é possível descrever o comportamento mecânico da placa para diferentes níveis de não linearidade geométrica utilizando dois valores para o parâmetro de viscoelasticidade, um representando o regime linear e outro o regime não linear de vibração.

Posteriormente, Amabili (2018b) propôs-se um modelo de amortecimento não linear para estudar as vibrações não lineares de placas retangulares e cascas cilíndricas. Nesse estudo, caracterizou-se o amortecimento a partir de um sistema de um grau de liberdade com não linearidade geométrica derivado do modelo viscoelástico de Zener. A partir disso, utilizou-se o método do balanço harmônico e obteve-se o sistema de equilíbrio dinâmico dos elementos estruturais. Por meio das curvas de ressonância, comparou-se as análises numéricas com resultados experimentais, sendo obtida concordância entre as curvas e constatando a eficácia do modelo de amortecimento.

Estudos semelhantes acerca de amortecimento não linear a partir de modelos mecânicos viscoelásticos podem ser encontrados nos trabalhos de: Balasubramanian, Ferrari e Amabili (2018) e Amabili (2019).

## 1.2 OBJETIVOS

O objetivo deste trabalho é estudar a instabilidade dinâmica de placas viscoelásticas, finas, retangulares e isotrópicas, submetidas a carregamentos transversais e a carregamentos axiais não simultâneos. Para isso, tem-se os seguintes objetivos específicos:

- Aplicar uma formulação matemática para a obtenção do sistema não linear de equações de equilíbrio dinâmico, considerando o modelo de Kelvin-Voigt para caracterizar o material viscoelástico;
- Estudar a influência do parâmetro de viscoelasticidade no grau de não linearidade das relações frequência-amplitude;
- Analisar os planos fase, os mapeamentos de Poincaré e as curvas de ressonância da placa para valores incrementais de carregamento transversal;
- Analisar o caminho pós crítico, os diagramas de bifurcação, os planos fase e os mapeamentos de Poincaré considerando o carregamento axial;
- Aplicar um modelo de amortecimento não linear obtido a partir da formulação viscoelástica fornecida pelo modelo de Kelvin-Voigt;
- Analisar a influência de imperfeições geométricas iniciais, do pré-tracionamento por cargas axiais estáticas e da geometria da placa nas curvas de ressonância e nas relações frequência-amplitude.

## 1.3 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

No **Capítulo 1,** apresenta-se uma introdução à temática das placas retangulares. Também se faz uma introdução à análise dinâmica de placas viscoelásticas. Por fim, apresenta-se também um estado da arte neste ramo de pesquisa e define-se os objetivos do trabalho.

No **Capítulo 2,** apresenta-se uma formulação matemática para análise dinâmica não linear de placas viscoelásticas utilizando o modelo mecânico de Kelvin-Voigt. A formulação é obtida pelo método de Rayleigh-Ritz através do princípio de Hamilton modificado. Apresenta-se também uma conceituação da viscoelasticidade bem como a dedução das equações constitutivas dos modelos mecânicos viscoelásticos mais recorrentes na bibliografia.

No **Capítulo 3,** apresenta-se os resultados numéricos obtidos com a formulação apresentada, nos quais são expostas as análises de instabilidade dinâmica da placa, por meio dos planos fase, mapeamentos de Poincaré, relações frequência-amplitude, curvas de ressonância, caminho pós-crítico e diagramas de bifurcação.

No **Capítulo 4,** apresenta-se as conclusões obtidas e as sugestões para trabalhos futuros.

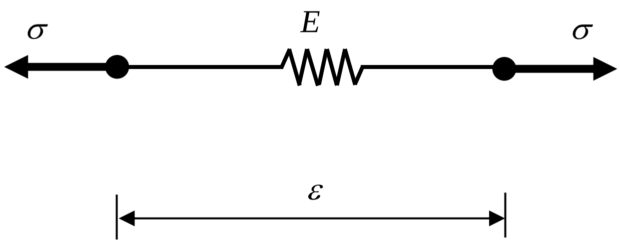
# CAPÍTULO 2
# FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Neste capítulo, apresenta-se a formulação das equações constitutivas dos modelos mecânicos viscoelásticos mais utilizados bem como a formulação matemática de placas viscoelásticas retangulares, finas e isotrópicas, a qual é baseada em abordagem energética.

## 2.1 MATERIAIS BÁSICOS

Os materiais básicos são os elementos necessários para descrever e consolidar um modelo mecânico viscoelástico, sendo que esses materiais se dividem em elásticos e viscosos (AMABILI, 2018c). Sabe-se que um material é caracterizado como elástico quando seu estado deformado é atingido imediatamente após a aplicação de uma carga externa e quando descarregado obtêm-se a recuperação total da sua forma original, caracterizando uma deformação reversível com conservação de energia interna de deformação. A representação desse material é feita pelo elemento de mola elástica linear, conforme é apresentado na Figura 2.1.

Figura 2.1 – Elemento de mola elástica linear



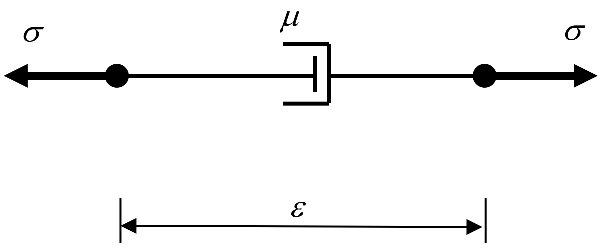

A resposta deste elemento não depende do tempo e é típica de sólidos elásticos. Dessa forma, ao aplicar uma tensão constante neste elemento, caso a deformação resultante também seja constante e proporcional à tensão aplicada, considera-se que a mola tem comportamento elástico linear e atende à Lei de Hooke, na qual tem-se o módulo de elasticidade $E$ como uma constante de proporcionalidade que governa a rigidez do elemento, em que sua relação constitutiva é mostrada na equação (2.1).

$$\sigma = E\,\varepsilon \tag{2.1}$$

Por outro lado, os materiais viscosos têm o comportamento semelhante ao de um fluido Newtoniano, o qual é governado pela Lei de Newton da Viscosidade, em que sua taxa de variação das deformações ao longo do tempo deve ser proporcional à tensão aplicada, tendo o coeficiente de viscosidade $\mu$ como a constante de proporcionalidade.

Essa constante representa a resistência do material ao escoamento devido a uma ação tangencial, isto é, $\mu$ determina o grau de resistência ao cisalhamento de um fluido, sendo denominado coeficiente de viscosidade. Esse tipo de material pode ser representado matematicamente por um elemento de amortecimento viscoso (*dashpot*), como é apresentado na Figura 2.2. A relação constitutiva para esse elemento é apresentada na equação (2.2).

Figura 2.2 – Amortecedor viscoso




$$\sigma(t) = \mu \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \tag{2.2}$$

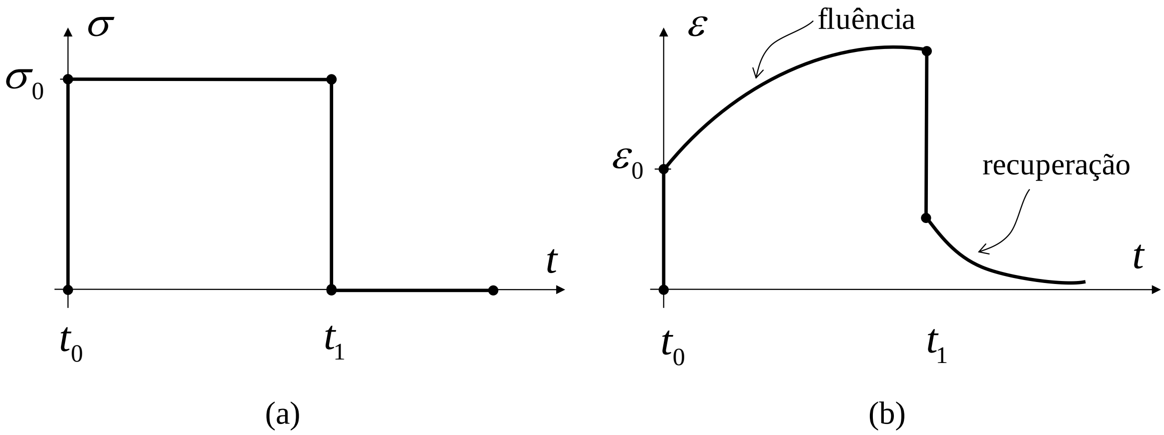
De posse da equação (2.2), verifica-se a dependência do tempo em sua resposta, haja vista que sua lei constitutiva envolve a taxa de deformações em ordem ao tempo, sendo que no instante inicial a deformação no modelo é nula ($\varepsilon(0) = 0$). Com a solução da equação diferencial (2.2) (ver equação (2.3)), verifica-se também que, durante a aplicação súbita de uma tensão constante ($\sigma_0$), as deformações ao longo do tempo variam linearmente. Com a retirada da tensão as deformações desenvolvidas no elemento permanecem e inicia-se um processo de recuperação do material, o qual tem a duração necessária para que o elemento volte à configuração original.

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{\mu} t \tag{2.3}$$

# 2.2 FLUÊNCIA E RELAXAÇÃO

Por conta da dependência do tempo, as informações mais relevantes dos materiais viscoelásticos devem ser obtidas através de testes de fluência (*creep*) e testes de relaxação. Um teste de fluência é realizado aplicando subitamente no material uma tensão constante ($\sigma_0$) uniaxial em um determinado intervalo de tempo, sendo observada a resposta de suas deformações ao longo do tempo nesse intervalo. Para uma melhor caracterização matemática, comumente utiliza-se a função de *Heaviside H(t)* para descrever a aplicação da tensão ao longo do tempo. Por exemplo, para uma variação de $t_0 \leq t \leq t_1$ pode-se escrever a função de aplicação da tensão como: $\sigma(t) = \sigma_0 \; H(t - t_0) - \sigma_0 \; H(t - t_1)$, com distribuição ilustrada na Figura 2.3(a).

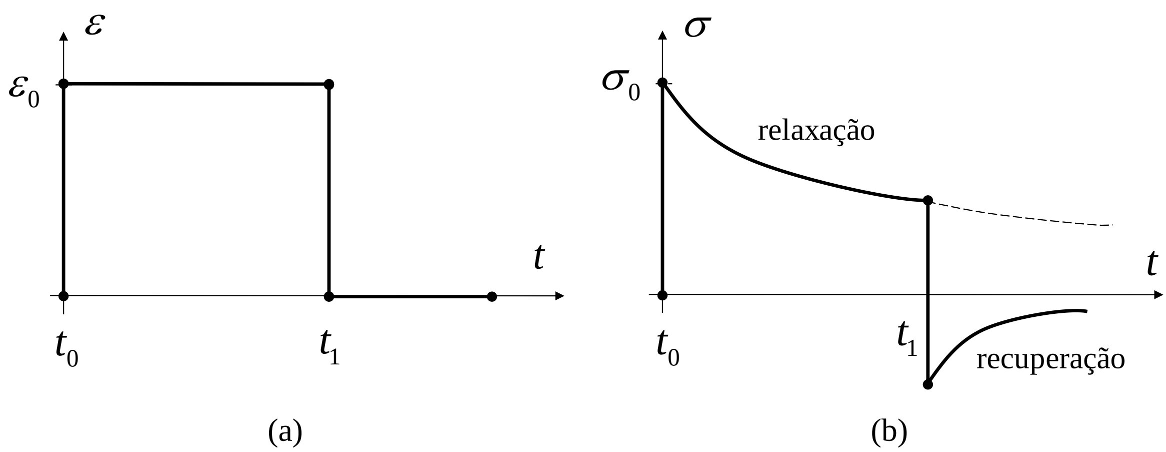
Figura 2.3 – Teste de fluência: (a) Aplicação de uma tensão constante em um intervalo de tempo; (b) resposta das deformações ao longo do mesmo intervalo para um material viscoelástico




Com a aplicação de $\sigma_0$, observa-se uma deformação instantânea em materiais elásticos, a qual é mantida constante até o término do instante de aplicação da tensão, onde toda a deformação é recuperada. Porém, nos materiais viscosos, constata-se uma deformação incremental ao longo do tempo e nula no instante inicial, sendo que ao término do instante de aplicação da tensão as deformações até então desenvolvidas são mantidas e inicia-se o processo de recuperação. Assim, a deformação ao longo do tempo nos materiais viscoelásticos é caracterizada por uma deformação instantânea em $t_0$ a qual é incrementada até o instante $t_1$, onde verifica-se a recuperação instantânea relativa à parcela elástica e inicia-se a recuperação gradativa relativa à parcela viscosa do material, conforme apresentado na Figura 2.3(b). O que governa a distribuição das deformações ao longo do tempo é a função de fluência, a qual é uma característica intrínseca de cada material/modelo e será comentada de forma mais minuciosa nos itens a seguir.

Por outro lado, o teste de relaxação consiste em aplicar no material uma deformação constante ($\varepsilon_0$) e verificar sua resposta das tensões ao longo do tempo. Assim como para a tensão, comumente se utiliza a função de *Heaviside H(t)* para caracterizar tal aplicação. Para uma aplicação no instante $t_0 \leq t \leq t_1$, é possível escrever a função de aplicação da deformação como: $\varepsilon(t) = \varepsilon_0\, H(t - t_0) - \varepsilon_0\, H(t - t_1)$ e ilustrada na Figura 2.4(a)

Figura 2.4 Teste de relaxação: (a) Aplicação de uma deformação constante em um intervalo de tempo; (b) resposta das tensões ao longo do mesmo intervalo




Ao longo de todo o teste de relaxação a tensão também se manteria constante no caso de um material perfeitamente elástico. No entanto para um material viscoelástico verifica-se um valor de tensão elástica no instante inicial ($t_0$) e, a partir desse instante, o valor da tensão possui uma variação decrescente tendendo a um valor assintótico, como ilustrado na Figura 2.4(b).

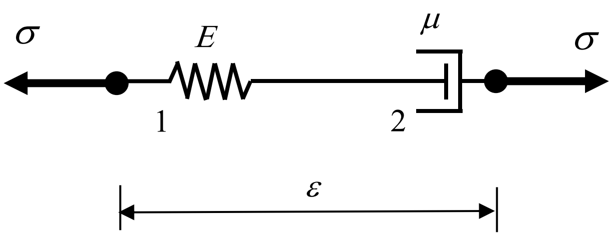
## 2.3 MODELOS MECÂNICOS

Para possibilitar o comportamento viscoelástico em um corpo, isto é, o comportamento elástico e viscoso, é necessário estabelecer um modelo mecânico que represente matematicamente tal desempenho. Para isso, faz-se o acoplamento do elemento de mola elástica linear com o elemento viscoso (*dashpot*) como será visto a seguir.

### 2.3.1 MODELO DE MAXWELL

O modelo de Maxwell é baseado em um acoplamento em série do elemento elástico com o elemento viscoso (AMABILI, 2018c), como mostrado na Figura 2.5. A deformação total nesse modelo é dada pela soma da deformação da mola e do amortecedor. Entretanto a tensão é a mesma nos dois elementos como apresentado na equação (2.4).

Figura 2.5 – Modelo de Maxwell




$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 = \sigma_2 \\ \varepsilon &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Com isso, percebe-se que a taxa de deformação total no modelo em relação ao tempo pode ser expressa pela soma da taxa relativa à parte viscosa e da taxa relativa à parte elástica, a saber:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} \tag{2.5}$$

em que a tensão em cada elemento é dada por:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= E\,\varepsilon_1 \\ \sigma_2 &= \mu \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} \end{aligned} \tag{2.6}$$

sendo $E$ o módulo de elasticidade e $\mu$ o coeficiente de viscosidade.

Assim, relacionando as equações (2.5) e (2.6), pode-se obter a equação diferencial (2.7), a qual relaciona a deformação total no modelo de Maxwell com as tensões dos elementos.

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E}\frac{d\sigma_1}{dt} + \frac{\sigma_2}{\mu} \tag{2.7}$$

Multiplicando-se a equação (2.7) por $E$, obtém-se a equação constitutiva normalizada para o modelo de Maxwell, dada por:

$$E\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta} \tag{2.8}$$

com $\eta = \dfrac{\mu}{E}$ (2.9)

sendo $\eta$ o parâmetro de viscoelasticidade do modelo, também chamado de tempo de fluência ou tempo de relaxação, medido em segundos.

Quando o modelo de Maxwell é submetido a uma tensão constante ($\sigma_0$) no instante $t$ = 0, é verificada uma deformação instantânea no elemento elástico enquanto no elemento viscoso verifica-se uma deformação mais lenta e nula nesse mesmo instante. Com isso, a deformação inicial no modelo de Maxwell submetido a um teste de fluência é dada por:

$$\varepsilon(0) = \frac{\sigma_0}{E} \tag{2.10}$$

Desse modo, admitindo-se que a tensão é constante e aplicando-se a condição inicial da equação (2.10), é possível solucionar a equação constitutiva do modelo de Maxwell (2.8) e obter uma função da deformação em relação ao tempo a qual é apresentada em (2.11).

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E}\left(\frac{t}{\eta} + 1\right) \tag{2.11}$$

Reescrevendo-se (2.11) em relação à função de fluência tem-se:

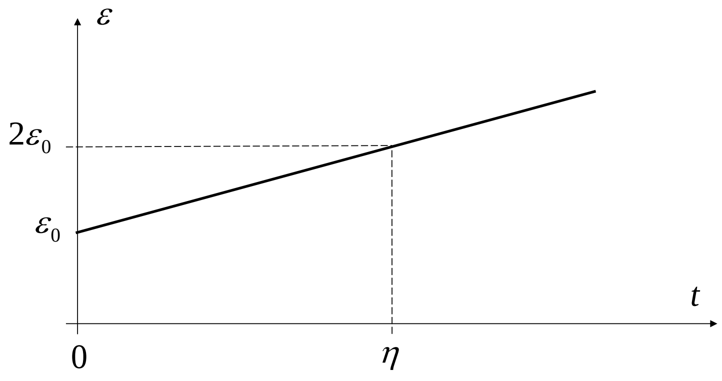
$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \, J(t)$$

$$J(t) = \frac{1}{E}\left(\frac{t}{\eta} + 1\right) \tag{2.12}$$

sendo $J(t)$ a função de fluência do modelo a qual é responsável por indicar de que forma a deformação é distribuída ao longo do tempo. Nesse caso, pode-se observar que o modelo de Maxwell submetido a uma tensão constante responde com o aumento linear das deformações, como é apresentado na Figura 2.6.

Quando o modelo de Maxwell é submetido a uma deformação constante ($\varepsilon_0$) no instante $t$ = 0, verifica-se o surgimento instantâneo de tensões somente no elemento de mola, portanto, nesse instante de tempo, só haverá tensão no elemento elástico. Após esse instante, o amortecedor começa a reagir e faz com que a tensão elástica diminua até que seja admitida toda a deformação inicial. Assim, pode-se obter a tensão inicial no modelo de Maxwell, submetido a um teste de relaxação, a qual é dada pela equação (2.13).

Figura 2.6 – Teste de fluência no modelo de Maxwell




$$\sigma(0) = \varepsilon_0 \, E \qquad (2.13)$$

Aplicando a condição inicial de (2.13) e considerando uma deformação constante, pela solução de (2.8) é possível obter uma função da tensão em relação ao tempo a qual é apresentada em (2.14).

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 \, E \exp\left( -\frac{t}{\eta} \right) \qquad (2.14)$$

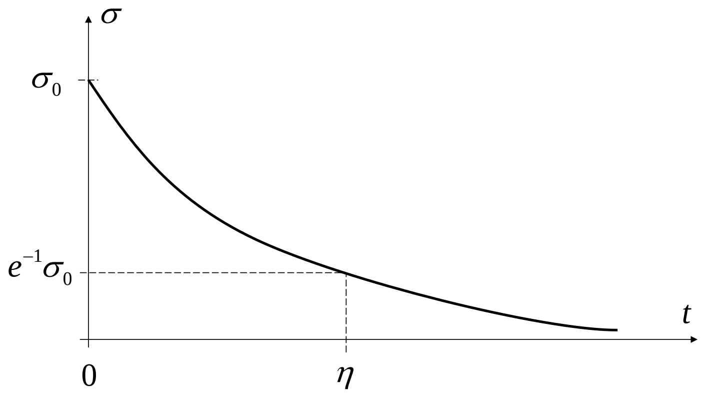
Reescrevendo-se (2.14) em relação à função de relaxação tem-se:

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 E(t)$$
$$\text{com } E(t) = E \exp\left( -\frac{t}{\eta} \right) \qquad (2.15)$$

em que $E(t)$ é a função de relaxação do modelo a qual é responsável por indicar de que forma a tensão é distribuída ao longo do tempo.

Observa-se para esse teste que o modelo de Maxwell responde com a diminuição exponencial das tensões, tendendo a um valor assintótico como apresentado na Figura 2.7. Com base nisso, o parâmetro de viscoelasticidade ($\eta$), nesse caso também chamado de tempo de relaxação, é o tempo necessário para que se obtenha uma tensão no valor de $e^{-1}$ vezes da tensão elástica inicial.

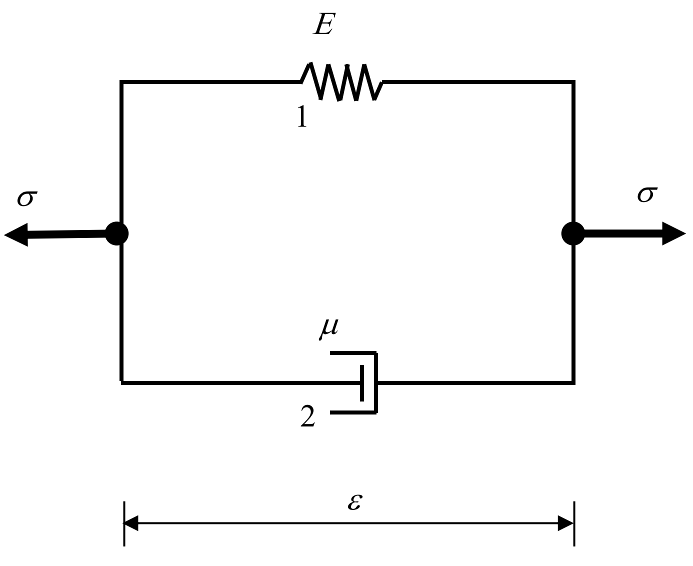
Figura 2.7 – Teste de Relaxação no modelo de Maxwell




## 2.3.2 MODELO DE KELVIN-VOIGT

O modelo de Kelvin-Voigt é caracterizado pelo acoplamento em paralelo do elemento elástico e do elemento viscoso (AMABILI, 2018c), como mostrado na Figura 2.8. Nesse modelo a tensão total é dada pela soma das tensões em cada elemento. No entanto, a deformação deverá ser a mesma tanto para a mola quanto para o amortecedor como apresenta a equação (2.16).

Figura 2.8 – Modelo de Kelvin-Voigt




$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 + \sigma_2 \\ \varepsilon &= \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Substituindo as relações (2.1) e (2.2) em (2.16) é possível estabelecer uma equação da tensão total do modelo em relação às deformações a qual é apresentada na equação (2.17).

$$\sigma = E\,\varepsilon + \mu\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} \tag{2.17}$$

Fatorando a equação (2.17) por $E$ e aplicando-se a relação do parâmetro de viscoelasticidade, tem-se a equação constitutiva normalizada do modelo de Kelvin-Voigt:

$$\sigma = E\left(\varepsilon + \eta\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\right) \tag{2.18}$$

Quando o modelo de Kelvin-Voigt é submetido a uma tensão constante ($\sigma_0$) no instante $t$ = 0, diferente do modelo de Maxwell, não haverá deformação instantânea da mola, pois esta é impedida pelo amortecedor o qual não reage instantaneamente. Por este motivo a deformação inicial no modelo será nula como mostra a equação (2.19).

$$\varepsilon(0) = 0 \tag{2.19}$$

Considerando uma tensão constante e a condição inicial de deformação nula, com a solução da equação (2.18) é possível obter uma função da deformação em relação ao tempo dada pela seguinte equação:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E}\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\eta}\right)\right) \tag{2.20}$$

Com isso, reescrevendo-se a equação (2.20) em relação à função de fluência tem-se:

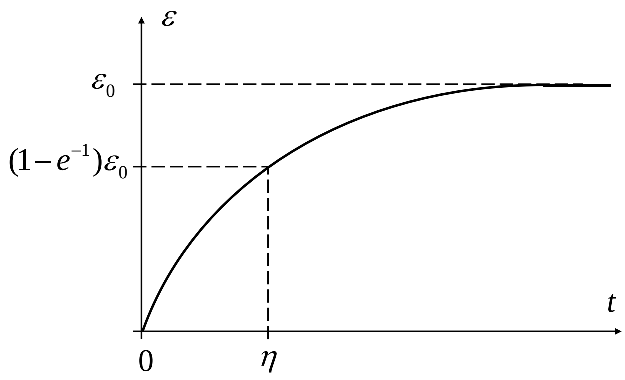
$$\begin{gathered}\varepsilon(t) = \sigma_0\, J(t) \\ \text{com } J(t) = \frac{1}{E}\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\eta}\right)\right)\end{gathered} \tag{2.21}$$

sendo $J(t)$ a função de fluência do modelo.

Para esse caso, observa-se que o modelo de Kelvin-Voigt submetido a um teste de fluência responde com o aumento exponencial das deformações ao longo do tempo como mostra a Figura 2.9.

Ao considerar a aplicação de uma tensão constante no modelo de Kelvin-Voigt, chega-se a uma equação de tensão algébrica e independente do tempo, sendo impossível colher dados relativos à relaxação do modelo. Para contornar isso, aplica-se uma deformação dada pela função de *Heaviside* no instante $t \geq t_0$, da forma: $\varepsilon(t) = \varepsilon_0\, H(t - t_0)$. Assim, é possível reescrever a equação (2.18) como:

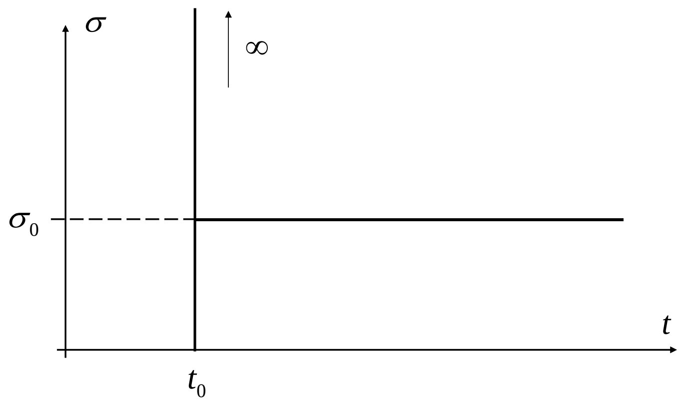
Figura 2.9 – Teste de Fluência no modelo de Kelvin-Voigt




$$\sigma(t) = E\,\varepsilon_0\,H\,(t-t_0) + \eta\;E\,\varepsilon_0\,\delta\,(t-t_0) \tag{2.22}$$

em que: $\delta\,(t - t_0)$ é o delta de Dirac, para um instante $t \geq t_0$, oriundo da derivação da função de *Heaviside* em relação ao tempo. A distribuição de tensão ao longo do tempo dada pela equação (2.22) é ilustrada na Figura 2.10.

Figura 2.10 – Teste de Relaxação no modelo de Kelvin-Voigt

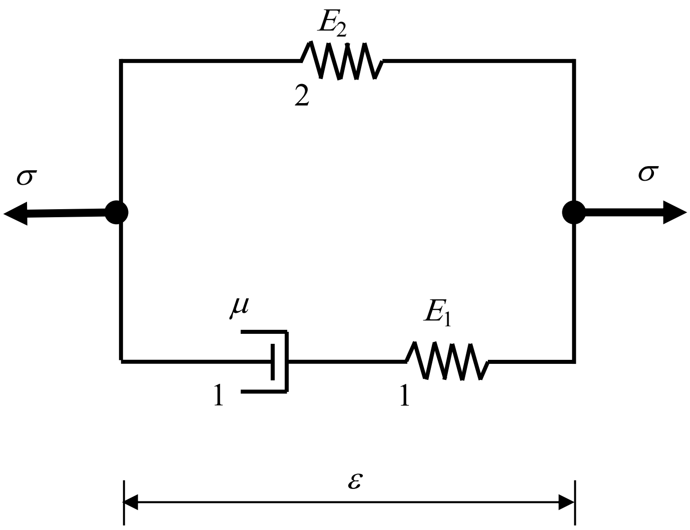



Com isso, percebe-se que é impossível realizar um teste de relaxação no modelo de Kelvin-Voigt, pois seria necessária uma tensão extremamente alta no instante inicial ($t_0$) para descrever corretamente seu comportamento.

## 2.3.3 MODELO DE ZENER

Para a obtenção deste modelo, realiza-se uma generalização no modelo mecânico de Kelvin-Voigt na qual se adiciona um modelo de mola para operar em paralelo com o modelo mecânico como apresentado na Figura 2.11. Por conta disto, este modelo também pode ser denominado como Solido Linear Padrão no formato de Maxwell (FLÜGGE, 2013; AMABILI, 2018a).

Figura 2.11 – Modelo de Zener




Como visto no modelo de Maxwell, pode-se escrever a taxa de variação da deformação em relação ao tempo como a soma da contribuição da mola e do amortecedor. Sendo assim, a taxa de variação relativa aos elementos em série pode ser escrita da como:

$$E_1\dot{\varepsilon}_1 = \dot{\sigma}_1 + \frac{\sigma_1}{\eta} \tag{2.23}$$

A taxa de variação na ordem do tempo relativa ao elemento elástico isolado é dada por:

$$E_2\,\dot{\varepsilon}_2 = \dot{\sigma}_2 \tag{2.24}$$

Assim, somando a equação (2.23) com a equação (2.24) e sabendo que para um acoplamento em paralelo dessas equações, as deformações e suas respectivas taxas de variação devem ser iguais:

$$\dot{\varepsilon}\left(E_1 + E_2\right) = \left(\dot{\sigma}_1 + \dot{\sigma}_2\right) + \frac{\sigma_1}{\eta} \tag{2.25}$$

Sabe-se também que para um acoplamento em paralelo a tensão total é dada pela soma da contribuição de cada elemento acoplado. Com isso, buscando uma conveniência matemática, é introduzido o parâmetro $\frac{E_2\,\dot{\varepsilon}}{\eta} = \frac{\dot{\sigma}_2}{\eta}$ na equação (2.25) o qual é uma adaptação da equação

(2.24). Assim, obtém-se a equação (2.26), sendo a equação constitutiva normalizada do modelo Zener.

$$\dot{\varepsilon}\left(E_1+E_2\right)+\frac{E_2\,\varepsilon}{\eta}=\dot{\sigma}+\frac{\sigma}{\eta} \tag{2.26}$$

Quando o modelo Zener é submetido a um teste de fluência, a deformação no instante inicial é dada pela contribuição dos dois elementos elásticos presentes no modelo, haja vista que no instante inicial não há deformações no amortecedor como já discutido anteriormente.

$$\varepsilon\left(0\right)=\frac{\sigma_0}{\left(E_1+E_2\right)} \tag{2.27}$$

A partir da condição inicial (2.27) é possível solucionar a equação do modelo Zener (2.26) para um valor de tensão constante, sendo obtida a equação das deformações em relação ao tempo e apresentada em (2.28).

$$\varepsilon\left(t\right)=\sigma_0\left(\frac{1}{E_2}-\frac{E_1}{E_2\left(E_1+E_2\right)}\exp\left(\frac{-E_2}{\eta\left(E_1+E_2\right)}t\right)\right) \tag{2.28}$$

Reescrevendo (2.28) em relação à função de fluência tem-se:

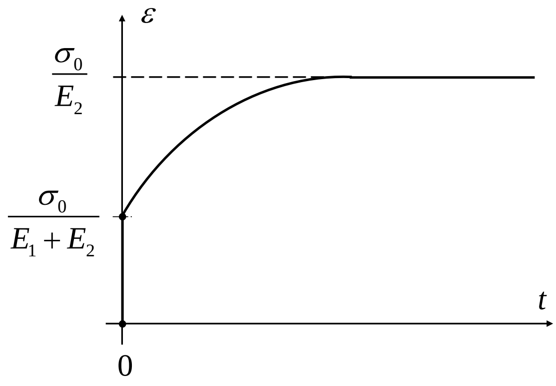
$$\varepsilon\left(t\right)=\sigma_0\,J\left(t\right)$$
$$\text{com } J\left(t\right)=\frac{1}{E_2}-\frac{E_1}{E_2\left(E_1+E_2\right)}\exp\left(\frac{-E_2}{\eta\left(E_1+E_2\right)}t\right) \tag{2.29}$$

Com isso, nota-se que o modelo Zener submetido a um teste de fluência possui uma distribuição das deformações ao longo do tempo semelhante à distribuição apresentada para o modelo de Kelvin-Voigt (Figura 2.9). Porém, com a adição do elemento elástico no modelo Zener, a solução parte de um valor inicial como ilustra a Figura 2.12.

Submetendo agora o modelo Zener a um teste de relaxação, sabe-se que a tensão no instante inicial é dada pela contribuição apenas dos dois elementos de mola como apresentado na equação (2.30).

$$\sigma\left(0\right)=\left(E_1+E_2\right)\varepsilon_0 \tag{2.30}$$

Figura 2.12 – Teste de Fluência no modelo Zener




De posse dessa condição, com a resolução de (2.26) obtém-se:

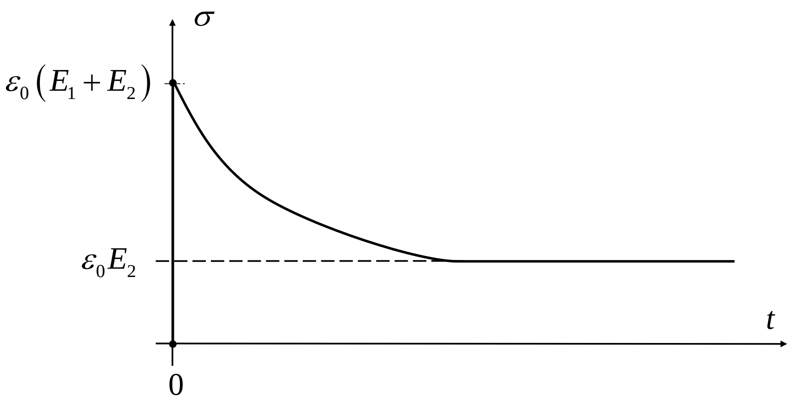
$$\sigma(t) = E_2\,\varepsilon_0 + E_1\,\varepsilon_0 \exp\left(-\frac{t}{\eta}\right) \tag{2.31}$$

Reescrevendo-se (2.31) em relação à função de relaxação, tem-se:

$$\begin{gathered} \sigma(t) = \varepsilon_0\, E(t) \\ \text{com } E(t) = E_2 + E_1 \exp\left(-\frac{t}{\eta}\right) \end{gathered} \tag{2.32}$$

Assim, observa-se que, ao submeter o modelo Zener a um teste de relaxação, o valor da tensão diminui exponencialmente a partir do valor de tensão inicial, tendendo a um valor constante como pode ser observado na Figura 2.13.

Figura 2.13 – Teste de Relaxação no modelo Zener




A fim de comparar o modelo Zener com o modelo de Kelvin-Voigt, utilizando-se o Método do Balanço Harmônico (NAYFEH e MOOK, 1979), é possível obter uma solução simples para a equação (2.26). Desse modo, adotam-se soluções harmônicas para a tensão e para a deformação do modelo, sendo introduzido um termo constante e um termo relativo ao primeiro harmônico como é indicado nas equações (2.33) e (2.34).

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \sin(\omega t) \tag{2.33}$$

$$\sigma(t) = \sigma_0 + \sigma_1 \sin(\omega t) + \sigma_2 \cos(\omega t) \tag{2.34}$$

em que $\omega$ é a frequência de vibração e $\varepsilon_0$, $\varepsilon_1$, $\sigma_0$, $\sigma_1$ e $\sigma_2$ são coeficientes a serem determinados.

Substituindo-se as equações (2.33) e (2.34) em (2.26), obtém-se:

$$\begin{gathered}\sigma_0 + \sigma_1 \sin(\omega t) + \sigma_2 \cos(\omega t) + \eta\,\omega\,\sigma_1 \cos(\omega t) - \eta\,\omega\,\sigma_2 \sin(\omega t) = E_2\,\varepsilon_0 + \\ + E_2\,\varepsilon_1 \sin(\omega t) + E_2\,\eta\,\omega\,\varepsilon_1 \cos(\omega t) + E_1\,\eta\,\omega\,\varepsilon_1 \cos(\omega t)\end{gathered} \tag{2.35}$$

Sabe-se que os termos constantes possuem a seguinte relação:

$$\sigma_0 = E_2\,\varepsilon_0 \tag{2.36}$$

Assim, os termos dos harmônicos de tensão são obtidos como:

$$\sigma_1 = E_2\,\varepsilon_1 + \frac{\eta^2\,\omega^2}{1+\eta^2\omega^2} E_1\,\varepsilon_1 \tag{2.37}$$

$$\sigma_2 = \frac{\eta\,\omega}{1+\eta^2\omega^2} E_1\,\varepsilon_1 \tag{2.38}$$

Combinando-se as equações (2.36) e (2.37), pode-se escrever:

$$\begin{gathered}\sigma_0 + \sigma_1 \sin(\omega t) = E_2\,\varepsilon_0 + E_2\,\varepsilon_1 \sin(\omega t) + \frac{\eta^2\,\omega^2}{1+\eta^2\omega^2} E_1\,\varepsilon_1 \sin(\omega t) \\ \sigma_0 + \sigma_1 \sin(\omega t) = E_2\,\varepsilon(t) + \frac{\eta^2\,\omega^2}{1+\eta^2\omega^2} E_1 \left(\varepsilon(t) - \varepsilon_0\right)\end{gathered} \tag{2.39}$$

Sabendo-se que:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \varepsilon_1 \cos(\omega t)\,\omega \tag{2.40}$$

pode-se reescrever a equação (2.38) como:

$$\sigma_2 \cos(\omega t) = \frac{\eta}{1+\eta^2\omega^2} E_1 \dot{\varepsilon}(t) \tag{2.41}$$

Para sistemas com um leve amortecimento o termo ($\eta^2\omega^2$) aproxima-se de zero, o que não é válido para borrachas e materiais biológicos (AMABILI, 2018a). Com base nessa hipótese, pode-se reescrever as equações (2.39) e (2.41) como:

$$\sigma(t) = \sigma_0 + \sigma_1 \sin(\omega t) + \sigma_2 \cos(\omega t) = E_2\, \varepsilon(t) + \eta\, E_1\, \dot{\varepsilon}(t) \tag{2.42}$$

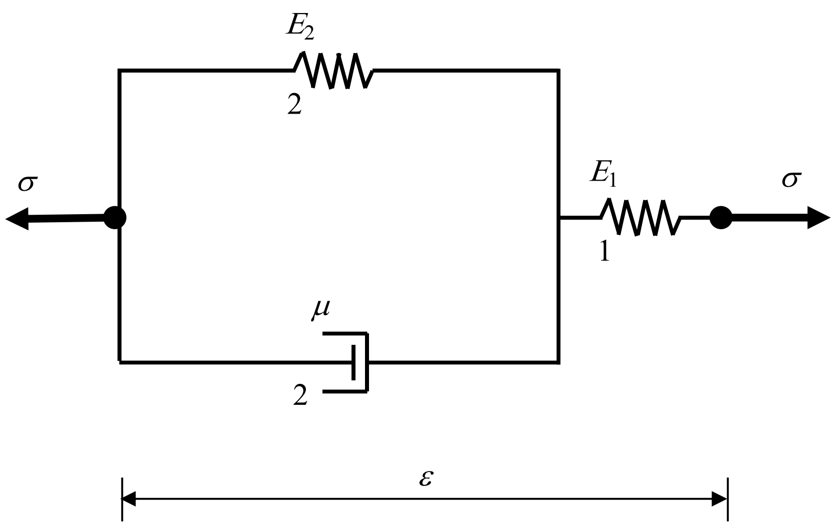
sendo a relação constitutiva do modelo Zener no caso adotado.

Assim, no caso de sistemas com amortecimento leve, a relação constitutiva do modelo Zener é idêntica à equação (2.18), a qual refere-se à relação constitutiva modelo do modelo de Kelvin-Voigt, constatando que ambos os modelos são compatíveis para análises de sistemas na condição adotada. Ainda é válido ressaltar que para uma melhor implementação computacional, é conveniente adotar-se iguais todas as rigidezes do modelo mecânico, tornando: $E_1 = E_2$.

### 2.3.4 MODELO DE BOLTZMANN

Para este modelo realiza-se uma generalização no modelo mecânico de Kelvin-Voigt, em que se adiciona um modelo de mola para operar em série com o modelo mecânico como pode ser visto na Figura 2.14. Por conta disso, este modelo também pode ser denominado como Sólido Linear Padrão no formato de Kelvin-Voigt (FLÜGGE, 2013; MARQUES e CREUS, 2012).

Figura 2.14 – Modelo de Boltzmann



Como apresentado no modelo de Kelvin-Voigt, a tensão no modelo é dada pela soma da tensão na mola e no amortecedor. Assim, a tensão nos elementos em paralelo pode ser escrita como:

$$\frac{\sigma_2}{E_2} = \varepsilon_2 + \eta\,\dot{\varepsilon}_2 \tag{2.43}$$

Por outro lado, a tensão no elemento elástico isolado é dada por:

$$\frac{\sigma_1}{E_1} = \varepsilon_1 \tag{2.44}$$

Sabendo que em um acoplamento em série as tensões devem ser iguais, pode-se escrever:

$$\frac{\sigma_1}{E_1} + \frac{\sigma_2}{E_2} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \eta\,\dot{\varepsilon}_2 \tag{2.45}$$

Como já visto, em um acoplamento em série a deformação total no modelo é dada pela soma da contribuição de cada elemento acoplado, sendo que a tensão é a mesma em cada elemento. Desse modo, buscando uma conveniência matemática, introduz-se o parâmetro $\frac{\dot{\sigma}}{E_2} = \dot{\varepsilon}$ na equação (2.45), o qual é uma adaptação da equação (2.44). Com isso, pode-se escrever a equação (2.46), sendo a equação constitutiva normalizada do modelo de Boltzmann.

$$\frac{\dot{\sigma}}{E_1} + \frac{\sigma}{\eta}\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right) = \frac{\varepsilon}{\eta} + \dot{\varepsilon} \tag{2.46}$$

Submetendo o modelo de Boltzmann a um teste de fluência, nota-se que a deformação inicial é dada somente pela reação da mola isolada, isto é:

$$\varepsilon(0) = \frac{\sigma_0}{E_1} \tag{2.47}$$

De posse disso, é possível solucionar a equação diferencial (2.46) para um valor de tensão constante ($\sigma_0$), tendo como resultado a função apresentada na equação (2.48).

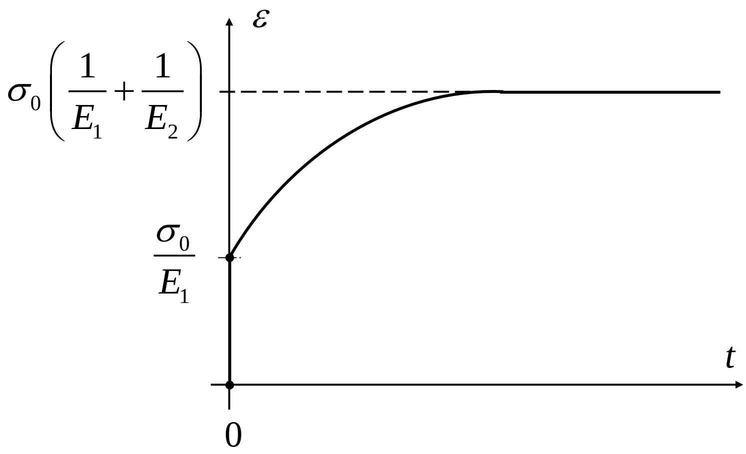
$$\varepsilon(t) = \sigma_0\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right) - \frac{\sigma_0}{E_2}\exp\left(-\frac{t}{\eta}\right) \tag{2.48}$$

Reescrevendo (2.48) em relação à função de fluência, tem-se:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 \, J(t)$$
$$\text{com } J(t) = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\eta}\right)\right) \tag{2.49}$$

De posse disso, nota-se um crescimento exponencial das deformações ao longo do tempo (ver Figura 2.15), semelhante ao fornecido pelo modelo Zener.

Figura 2.15 – Teste de Fluência no modelo de Boltzmann




Quando o modelo de Boltzmann é submetido a um teste de relaxação, constata-se que a tensão inicial no modelo será obtida apenas pela contribuição da mola isolada, pois sabe-se que a tensão inicial no modelo de Kelvin-Voigt acoplado junto a essa mola deve ser nula. Assim, tem-se que:

$$\sigma(0) = E_1 \, \varepsilon_0 \tag{2.50}$$

Com base nisso, é possível solucionar a equação diferencial (2.46) no caso de aplicação de uma deformação constante, sendo obtida uma equação das tensões em ordem ao tempo como apresenta a equação (2.51).

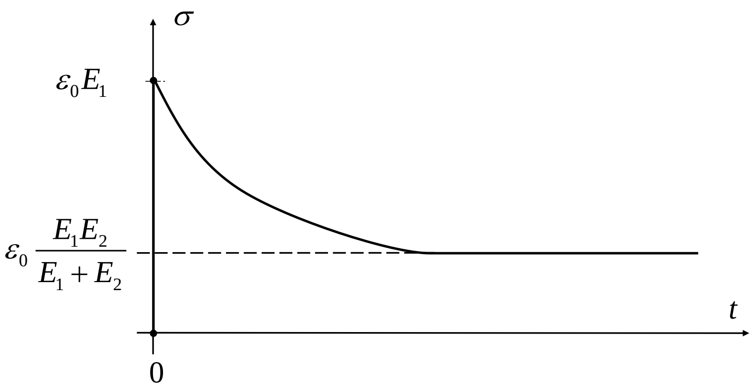
$$\sigma(t) = \varepsilon_0\left(\frac{E_1 E_2}{E_1+E_2} + \left(E_1 - \frac{E_1 E_2}{E_1+E_2}\right)\exp(-k\,t)\right)$$
$$\text{com } k = \frac{E_1}{\eta}\left(\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}\right) \tag{2.51}$$

Em que $k$ é uma constante que tem apenas a finalidade de simplificar a notação. Agora, reescrevendo (2.51) em relação à função de relaxação, é possível obter:

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 \, E(t)$$
$$\text{com}\, E(t) = \left( \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} + \left( E_1 - \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \right) \exp(-k\,t) \right) \tag{2.52}$$

A partir disso, nota-se que há um decaimento exponencial das deformações ao longo do tempo, também semelhante ao apresentado pelo modelo Zener, como pode ser visto na Figura 2.16.

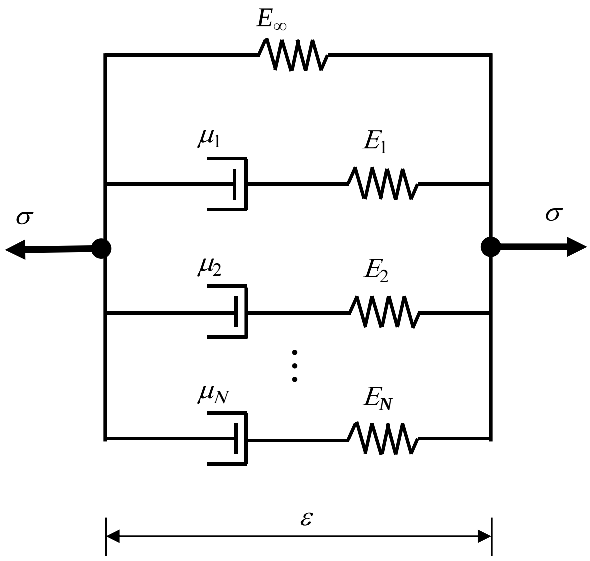
Figura 2.16 – Teste de Relaxação no modelo de Boltzmann




## 2.3.5 MODELO GENERALIZADO DE MAXWELL E SÉRIE DE PRONY

Este modelo generalizado é composto por um modelo de mola elástica e $N$ modelos mecânicos de Maxwell posicionados em paralelo (AMABILI, 2018c), conforme ilustrado na Figura 2.17.

Figura 2.17 – Modelo Generalizado de Maxwell



Para o *i*-ésimo modelo mecânico de Maxwell dentro do modelo generalizado é possível escrever:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}_i}{E_i} + \frac{\sigma_i}{E_i\,\eta_i} \tag{2.53}$$

onde: $E_i$, $\sigma_i$ e $\eta_i = E_i/\mu_i$ são, respectivamente, a rigidez, a tensão e o tempo de relaxação do *i*-ésimo modelo mecânico de Maxwell.

Para o modelo de mola isolado, pode-se estabelecer a seguinte relação: $\sigma(0) = E_\infty\,\varepsilon$, sendo: $\sigma(0)$ a tensão em um instante de tempo inicial ($t = 0$) e $E_\infty$ a rigidez instantânea relativa à mola isolada.

Com $N$ igual a 1 nota-se que o modelo generalizado passa a possuir as mesmas características do modelo mecânico Zener. Sendo assim, analisando a equação (2.32), pode-se assumir que a função de relaxação do modelo generalizado de Maxwell é dada por:

$$E(t) = E_\infty + \sum_{i=1}^{N} E_i \exp\left(-\frac{t}{\tau_i}\right) \tag{2.54}$$

Para um instante de tempo inicial ($t = 0$) a função de relaxação passa a fornecer a seguinte relação:

$$E(0) = E_\infty + \sum_{i=1}^{N} E_i \tag{2.55}$$

A partir disso pode-se obter a rigidez instantânea do modelo, sendo:

$$E_\infty = E(0) - \sum_{i=1}^{N} E_i \tag{2.56}$$

Substituindo-se (2.56) em (2.54), obtém-se:

$$E(t) = E(0) - \sum_{i=1}^{N} E_i\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_i}\right)\right) \tag{2.57}$$

Dividindo-se toda a equação (2.57) por $E(0)$, pode-se obter:

$$e(t) = 1 - \sum_{i=1}^{N} e_i\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_i}\right)\right) \tag{2.58}$$

A função $e(t) = E(t)/E(0)$ representa o módulo de relaxação normalizado do modelo de generalizado de Maxwell, que também é conhecida como a função da Série de Prony. O termo $e_i = E_i(t)/E(0)$ é a relação entre a rigidez do $i$-ésimo termo do modelo e a rigidez no instante inicial. Devido a utilização de termos normalizados, a Série de Prony não faz referência a nenhum modelo mecânico (SERBAN, MARSAVINA e SILBERSCHMIDT, 2012)

## 2.4 PLACA VISCOELÁSTICA

Considera-se uma placa flexível, retangular, imperfeita, isotrópica, engastada em todas as bordas com um sistema de coordenadas ($x$, $y$ e $z$) e campos de deslocamentos $u(t,x,y,z)$, $v(t,x,y,z)$ e $w(t,x,y,z)$ respectivamente, tendo como origem ($O$) um de seus cantos. As imperfeições geométricas iniciais ($w_0$) são assumidas na direção $z$ da placa e estão associadas à condição de tensão inicial nula. Suas dimensões nas direções $x$ e $y$ são, respectivamente, $a$ e $b$, sendo que sua espessura é dada por $h$, como está esquematizado na Figura 2.18. O texto aqui apresentado segue a formulação utilizada por Balasubramanian *et al.* (2017) e por Amabili (2018a).

Nesta formulação serão utilizadas as relações não lineares entre deformações e deslocamentos de Von Kármán, as quais, segundo Amabili (2008), podem ser escritas como:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x,0} + z\kappa_x, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_{y,0} + z\kappa_y, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xy,0} + z\kappa_{xy}$$

$$\varepsilon_{x,0} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad \varepsilon_{y,0} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w_0}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy,0} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \tag{2.59}$$

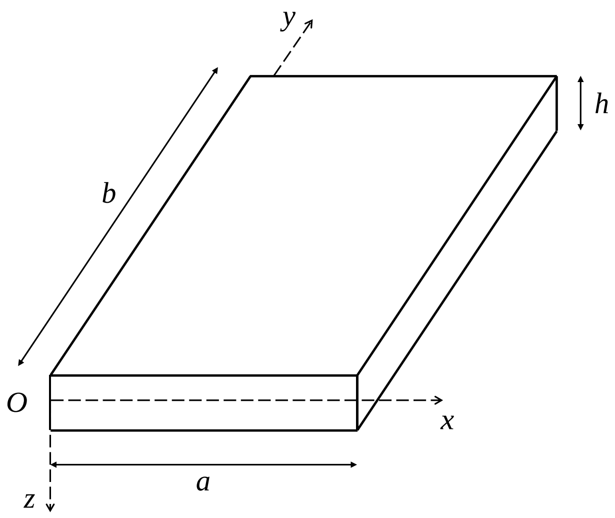
$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

em que:

- $\varepsilon_x$, $\varepsilon_y$, e $\gamma_{xy}$ são as componentes de deformação em um ponto qualquer da placa;
- $\varepsilon_{x,0}$, $\varepsilon_{y,0}$, e $\gamma_{xy,0}$ são as componentes de deformação na superfície média da placa;

- $\kappa_x$, $\kappa_y$ e $\kappa_{xy}$ são as componentes de mudança de curvatura e torção na superfície média da placa.

Figura 2.18 – Esquematização da geometria e do sistema de coordenadas da placa viscoelástica.




Considera-se uma placa viscoelástica governada pelo modelo de Kelvin-Voigt, esse modelo de material é adotado pela maior facilidade de implementação computacional em relação aos demais modelos constitutivos viscoelásticos e por conseguir representar qualitativamente o comportamento mecânico da placa.

As relações tensões-deformações da placa são governadas pela equação (2.18), a qual refere-se à equação constitutiva do modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt. A partir disso pode-se obter a relação constitutiva da placa a qual é descrita pela equação (2.60).

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\,\varepsilon_y\right) + \eta\,\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} + \nu\,\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t}\right) \\
\sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y + \nu\,\varepsilon_x\right) + \eta\,\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t} + \nu\,\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t}\right) \\
\tau_{xy} &= \frac{E}{2(1-\nu)}\left(\gamma_{xy}\right) + \eta\,\frac{E}{2(1-\nu)}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial t}\right)
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Em forma matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} + \eta \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_x \\ \dot{\varepsilon}_y \\ \dot{\gamma}_{xy} \end{bmatrix} \tag{2.61}$$

Por ser uma placa fina, não serão consideradas as inércias rotacionais e a contribuição do cisalhamento na deformação da seção transversal. De posse disso, a energia potencial da placa é dada por:

$$U_P = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^a \int_0^b (\sigma_x\, \varepsilon_x + \sigma_y\, \varepsilon_y + \tau_{xy}\, \gamma_{xy})\, dy\, dx\, dz \tag{2.62}$$

Substituindo-se as relações de (2.59) e de (2.60) em (2.62), obtém-se o funcional da energia potencial da placa viscoelástica em função das deformações, podendo ser escrita como a soma da parcela elástica ($U_E$) e da parcela viscosa ($U_V$).

$$U_P = U_E + U_V \tag{2.63}$$

Sendo:

$$\begin{aligned} U_E = {} & \frac{E\,h}{2(1-\nu^2)} \int_0^a \int_0^b \left( {\varepsilon_{x,0}}^2 + {\varepsilon_{y,0}}^2 + 2\nu\, \varepsilon_{x,0}\, \varepsilon_{y,0} + \frac{1-\nu}{2} {\gamma_{xy,0}}^2 \right) dy\, dx \\ & + \frac{E\,h^3}{2\,(12\,(1-\nu^2))} \int_0^a \int_0^b \left( {\kappa_x}^2 + {\kappa_y}^2 + 2\nu\, \kappa_x\, \kappa_y + \frac{1-\nu}{2} {\kappa_{xy}}^2 \right) dy\, dx \end{aligned} \tag{2.64}$$

$$\begin{aligned} U_V = {} & \eta \frac{E\,h}{(1-\nu^2)} \int_0^a \int_0^b \left( \varepsilon_{x,0}\, \dot{\varepsilon}_{x,0} + \varepsilon_{y,0}\, \dot{\varepsilon}_{y,0} + \nu\, \varepsilon_{x,0}\, \dot{\varepsilon}_{y,0} + \nu\, \varepsilon_{y,0}\, \dot{\varepsilon}_{x,0} + \frac{1-\nu}{2} \gamma_{xy,0}\, \dot{\gamma}_{xy,0} \right) dy\, dx \\ & + \eta \frac{E\,h^3}{12\,(1-\nu^2)} \int_0^a \int_0^b \left( \kappa_x\, \dot{\kappa}_x + \kappa_y\, \dot{\kappa}_y + \nu\, \kappa_x\, \dot{\kappa}_y + \nu\, \kappa_y\, \dot{\kappa}_x + \frac{1-\nu}{2} \kappa_{xy}\, \dot{\kappa}_{xy} \right) dy\, dx \end{aligned} \tag{2.65}$$

Pelas equações (2.64) e (2.65) é possível perceber que a parcela viscosa ($U_V$) da energia potencial pode ser obtida derivando a parcela elástica ($U_E$) em relação ao tempo e multiplicando pelo parâmetro de viscoelasticidade ($\eta$) como já previsto em (2.18).

$$U_V = \eta \left( \frac{\partial U_E}{\partial t} \right) \tag{2.66}$$

Para representar o engastamento consideram-se molas rotacionais com rigidez $k_r$ em todas as bordas da placa. Assim, adiciona-se à energia potencial da placa a energia potencial relativa às molas rotacionais a qual é dada por:

$$U_M = \frac{1}{2}\int_0^b k_r \left( \left( \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=0} \right)^2 + \left( \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a} \right)^2 \right) dy + \frac{1}{2}\int_0^a k_r \left( \left( \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} \right)^2 + \left( \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=b} \right)^2 \right) dx \tag{2.67}$$

sendo: $U_M$ a energia relativa às molas rotacionais e $k_r$ o coeficiente das molas (rigidez por unidade de comprimento).

Para um valor de $k_r = 0$ tem-se, portanto, a consideração de engastamento nulo, isto é, obtém-se uma placa apoiada nas quatro bordas. Por outro lado, para um valor de $k_r$ tendendo ao infinito, tende-se à condição de engastamento perfeito nas quatro bordas. Com um valor intermediário de $k_r$, obtém-se a condição de apoio rotacional elástico. Quando são comparados resultados numéricos e experimentais, faz-se necessária uma análise de convergência para obter um valor ideal de $k_r$ nos dois casos, a fim de representar corretamente o comportamento da placa com a condição de contorno desejada. As condições de contorno da placa podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} &w = 0,\ M_x = \pm k_r \frac{\partial w}{\partial x},\ \text{em } x = 0,\ a \\ &w = 0,\ M_y = \pm k_r \frac{\partial w}{\partial y},\ \text{em } y = 0,\ b \end{aligned} \tag{2.68}$$

Admitindo-se a condição de contorno da equação (2.68), a expansão para os deslocamentos transversais pode ser obtida por meio funções senoidais combinadas em uma série de senos duplos de Fourier, de modo que se obtenha relações para uma placa simplesmente apoiada, em que ao inserir as molas rotacionais tornam-se relações para condição de apoio elástico ou engastamento perfeito (AMABILI e GARZIERA, 1999).

Os deslocamentos axiais serão tratados em dois casos. No primeiro caso admite-se apoios fixos (ver Figura 2.19), sendo: $u = v = 0$ em $x = 0$, $a$ e $u = v = 0$ em $y = 0$, $b$. Para o segundo caso considera-se apoios móveis (ver Figura 2.20), onde: $v$ = 0 em $x$ = 0, $a$ e $u$ = 0 em $y$ = 0, $b$, com: $v$ = 0 para $y$ = 0 e $u$ = 0 para $x$ = 0.

Figura 2.19 – Representação das condições de contorno da placa com apoios axiais fixos

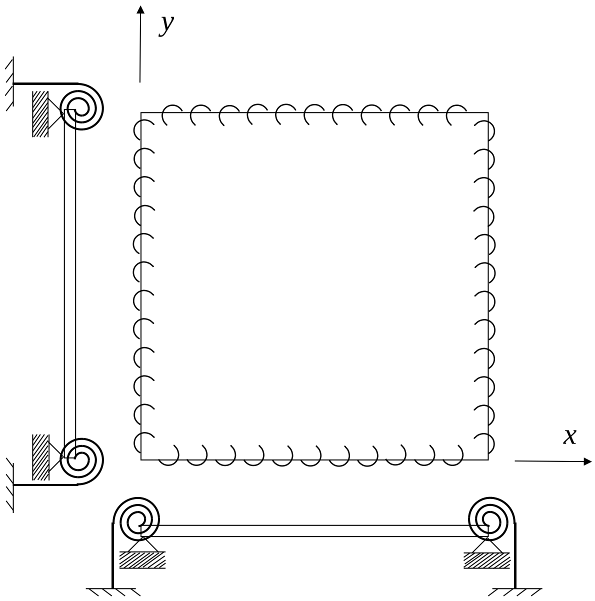
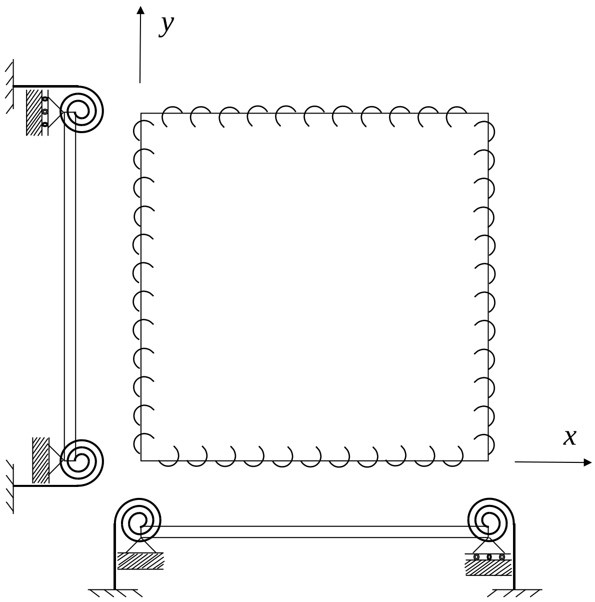



Figura 2.20 - Representação das condições de contorno da placa com apoios axiais móveis




Apresentam-se, nas equações (2.69) e (2.70), para cada caso respectivamente, a expansão dos campos de deslocamento da placa.

$$
\begin{aligned}
u(x,y,t) &= \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} u_{2m,n}(t)\ \mathrm{sen}\left(\frac{2m\pi x}{a}\right)\ \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\\
v(x,y,t) &= \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} v_{m,2n}(t)\ \mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\ \mathrm{sen}\left(\frac{2n\pi y}{b}\right)\\
w(x,y,t) &= \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} w_{m,n}(t)\ \mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\ \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)
\end{aligned}
\tag{2.69}
$$

$$
\begin{aligned}
u(x,y,t) &= \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} u_{2m,n}(t)\ \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\ \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\\
v(x,y,t) &= \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} v_{m,2n}(t)\ \mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\ \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\\
w(x,y,t) &= \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} w_{m,n}(t)\ \mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\ \mathrm{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)
\end{aligned}
\tag{2.70}
$$

onde:

- $m$ e $n$ são, respectivamente, o número de semiondas nas direções de $x$ e $y$;
- $M$ e $N$ é o número de termos utilizados na expansão de acordo com cada deslocamento;
- $u_{m,n}(t)$, $v_{m,n}(t)$ e $w_{m,n}(t)$ são as amplitudes modais para cada deslocamento.

Desse modo, o vetor das amplitudes de deslocamento em coordenadas generalizadas é definido como:

$$
\boldsymbol{\xi} = \left[u_{m,n}(t),\ v_{m,n}(t),\ w_{m,n}(t)\right]^T \tag{2.71}
$$

sendo que a dimensão de $\boldsymbol{\xi}$ será referida como $\tilde{N}$, a qual é a soma do número de graus de liberdade utilizados nas expansões dos deslocamentos.

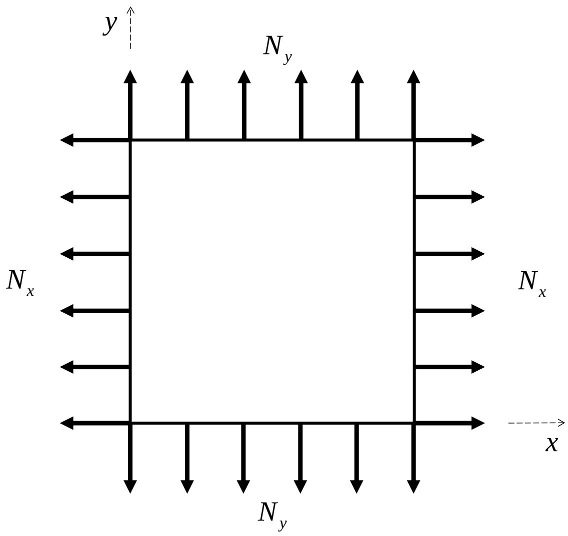
Para a consideração das imperfeições geométricas iniciais, admite-se uma expansão em série de senos duplos de Fourier conforme apresentado a seguir:

$$
w_0(x,y) = \sum_{m=1}^{M_i}\sum_{n=1}^{N_i} A_{m,n} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{2.72}
$$

onde: $M_i$ e $N_i$ são os números de termos utilizados na expansão da imperfeição e $A_{m,n}$ é a amplitude da imperfeição.

Considera-se também nesta formulação cargas axiais estáticas que atuam como uma tração inicial na placa. Para isso, é estabelecida a equação da energia relativa a esse carregamento, a qual é obtida a partir da equação (2.62), admitindo-se que $\sigma_x$ e $\sigma_y$ são as tensões normais desenvolvidas pelas cargas $N_x$ e $N_y$ (ver Figura 2.21) e que $\varepsilon_x$ e $\varepsilon_y$ são suas respectivas deformações nas direções $x$ e $y$. Assim, a equação da energia relativa ao carregamento axial de tração inicial, pode ser escrita como:

Figura 2.21 – Placa viscoelástica com pré-carregamento axial estático de tração




$$U_C = \int_0^a \int_0^b \left( N_x \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right) + N_y \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right)\right) dy\, dx \tag{2.73}$$

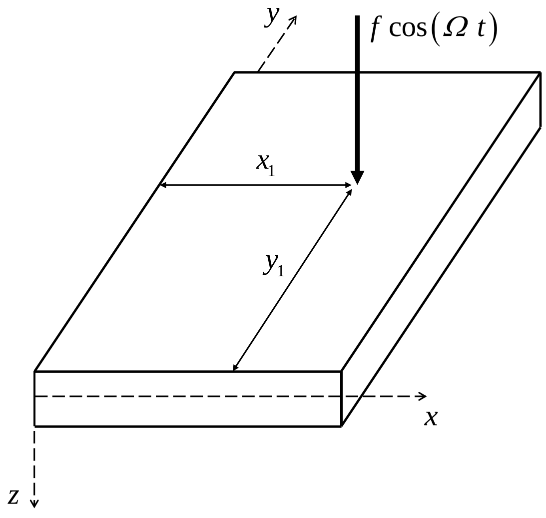
Em vista disso, a energia potencial total da placa viscoelástica será dada por:

$$U = U_P + U_M + U_C \tag{2.74}$$

sendo: $U_P$ a energia potencial relativa à parte elástica e à parte viscosa da placa; $U_M$ a energia potencial das molas rotacionais; $U_C$ a energia potencial relativa às cargas axiais de pré-tracionamento.

Para a equação relativa ao trabalho das forças externas, considera-se que a placa está submetida a uma carga pontual harmônica com frequência $\Omega$ atuando na posição $x_1$ e $y_1$ como é apresentado na Figura 2.22.

Figura 2.22 – Placa viscoelástica com carga transversal pontual harmônica




Com isso, pode-se escrever a equação do trabalho da força externa como:

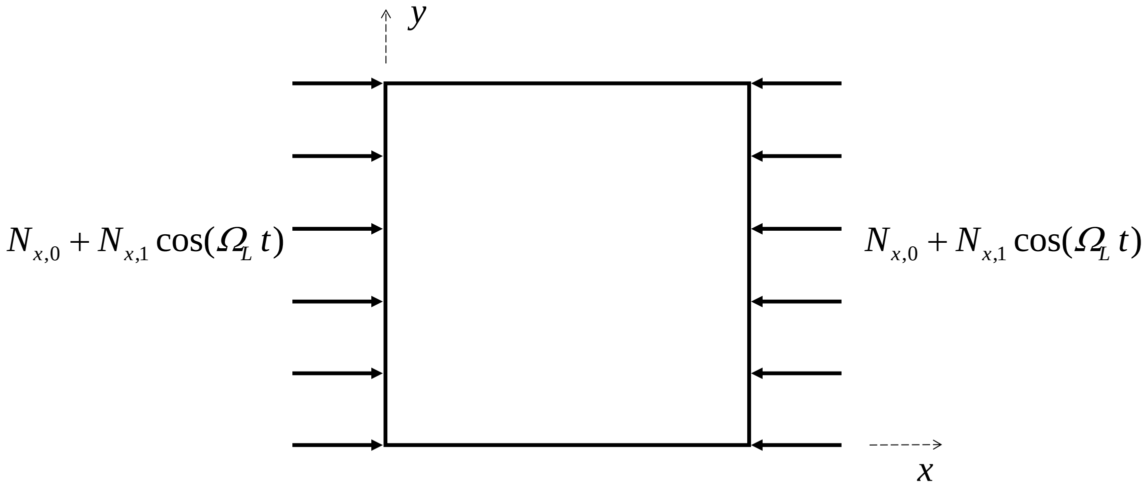
$$W = f\cos\left(\Omega\, t\right)\int_0^a\int_0^b \delta\left(x - x_1\right)\delta\left(y - y_1\right) w\, dy\, dx \qquad (2.75)$$

sendo:

- $f$, $\Omega$, e $t$, respectivamente, a intensidade da carga, a frequência excitadora e o tempo;
- $w$ o campo de deslocamento transversal;
- $\delta$ o delta de Dirac aplicado no ponto de ação ($x_1$, $y_1$) da carga.

Posteriormente, considerou-se a placa submetida somente a um carregamento axial de compressão na direção $x$, sendo composto de uma parcela estática e outra harmônica, conforme indicado na Figura 2.23

Figura 2.23 - Placa viscoelástica com carga axial de compressão composta de parcela estática e harmônica



Com isso a equação (2.75) é substituída e o trabalho das cargas externas passa a ser descrito por:

$$W = \left(N_{x,0} + N_{x,1}\cos\left(\Omega_L \ t\right)\right)\int_0^a \int_0^b \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right) dy\, dx \tag{2.76}$$

onde: $N_{x,0}$ é a parcela estática e $N_{x,1}$ é a amplitude da parcela harmônica do carregamento axial e $\Omega_L$ a frequência da carga axial.

Por fim, apresenta-se a energia cinética da placa a qual é dada por:

$$T = \frac{1}{2}\rho h \int_0^a \int_0^b \left(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2\right) dy\, dx \tag{2.77}$$

Para se chegar às equações de equilíbrio dinâmico em função das amplitudes desconhecidas, aplica-se o método de Rayleigh-Ritz e posteriormente o princípio de Hamilton, em que, segundo Amabili (2008), é dado por:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial \xi_j} + \frac{\partial U}{\partial \xi_j} = \frac{\partial W}{\partial \xi_j} \tag{2.78}$$

onde $j$ possui uma variação de $1 \le j \le \tilde{N}$

O primeiro termo da equação (2.78) é descrito por:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_j}\right) = \frac{1}{4} a\, b\, h\, \rho\, \ddot{\xi}_j \tag{2.79}$$

Após a aplicação de (2.78) são obtidas as equações de equilíbrio dinâmico da placa viscoelástica, as quais são apresentadas em notação matricial pela equação (2.80).

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\xi}} + \left[\mathbf{G_1} + \mathbf{G_2}(\boldsymbol{\xi}) + \mathbf{G_3}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi})\right]\dot{\boldsymbol{\xi}} + \left[\mathbf{K_1} + \mathbf{K_2}(\boldsymbol{\xi}) + \mathbf{K_3}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi})\right]\boldsymbol{\xi} = \mathbf{F}\cos(\Omega t) \tag{2.80}$$

em que:

- **M** é a matriz de massa diagonal, cuja dimensão é $\tilde{N} \times \tilde{N}$ ;
- **$\mathbf{G_1}$, $\mathbf{G_2}(\boldsymbol{\xi})$ e $\mathbf{G_3}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi})$** são as matrizes de viscosidade (amortecimento viscoelástico) com termos lineares, quadráticos e cúbicos, respectivamente;
- **$\mathbf{K_1}$, $\mathbf{K_2}(\boldsymbol{\xi})$ e $\mathbf{K_3}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi})$** são as matrizes de rigidez elástica com termos lineares, quadráticos e cúbicos, respectivamente;

- **F** é o vetor de cargas, o qual representa a projeção da carga pontual harmônica nas coordenadas generalizadas;
- $\ddot{\xi}$ , $\dot{\xi}$ e $\xi$ são, respectivamente, os vetores das amplitudes de acelerações, de velocidades e de deslocamentos em coordenadas generalizadas.

Os elementos das matrizes de rigidez não linear **K2(ξ)** e **K3(ξ, ξ)** podem ser generalizados da seguinte forma:

$$k_{2_{j,i}}(\xi) = \sum_{k=1}^{\tilde{N}} k_{j,i,k}\,\xi_k$$
$$k_{3_{j,i}}(\xi,\xi) = \sum_{k,l=1}^{\tilde{N}} k_{j,i,k,l}\,\xi_k\,\xi_l \qquad (2.81)$$

De maneira análoga, os elementos das matrizes amortecimento viscoelástico não linear **G2(ξ)** e **G3(ξ, ξ)** podem ser generalizados como:

$$g_{2_{j,i}}(\xi) = \sum_{k=1}^{\tilde{N}} g_{j,i,k}\,\xi_k$$
$$g_{3_{j,i}}(\xi,\xi) = \sum_{k,l=1}^{\tilde{N}} g_{j,i,k,l}\,\xi_k\,\xi_l \qquad (2.82)$$

O sistema matricial de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem apresentando em (2.80) pode ser transformado em um sistema de equações diferenciais de primeira ordem. Essa transformação permite a aplicação de ferramentas numéricas para a resolução de sistemas dinâmicos discretos.

Com o auxílio da variável auxiliar **y** dependente do tempo, admite-se que $\mathbf{y} = \dot{\xi}$ e multiplica-se todo o sistema (2.80) pela inversa da matriz de massa (**M**), tendo como resultado o novo sistema de primeira ordem apresentado em (2.83).

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \dot{\xi}; \\ \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}\cos(\Omega t) - \left[\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{G}_2(\xi) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{G}_3(\xi,\xi)\right]\dot{\xi} \\ &\quad - \left[\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_2(\xi) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_3(\xi,\xi)\right]\xi; \end{aligned} \qquad (2.83)$$

Também se estudou neste trabalho a consideração do amortecimento por meio de um modelo de amortecimento viscoso equivalente. Para uma análise considerando um amortecimento viscoso equivalente ao amortecimento viscoelástico, pode-se substituir as matrizes de viscosidade ($\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2(\boldsymbol{\xi})$ e $\mathbf{G}_3(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi})$) da equação (2.80) por uma única matriz **C**, relativa ao amortecimento viscoso equivalente. Assim a equação (2.80) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{\xi}}+\mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\xi}}+\left[\mathbf{K}_1+\mathbf{K}_2(\boldsymbol{\xi})+\mathbf{K}_3(\boldsymbol{\xi},\,\boldsymbol{\xi})\right]\boldsymbol{\xi}=\mathbf{F}\cos(\Omega t) \tag{2.84}$$

De maneira análoga, utiliza-se uma substituição de variáveis e (2.84) é reescrito em um sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem, passando a ter a seguinte forma:

$$\begin{aligned}&\mathbf{y}=\dot{\boldsymbol{\xi}};\\&\dot{\mathbf{y}}=\mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}\cos(\Omega t)-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\xi}}-\left[\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}+\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_2(\boldsymbol{\xi})+\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_3(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi})\right]\boldsymbol{\xi};\end{aligned} \tag{2.85}$$

Admite-se que a matriz de amortecimento viscoso equivalente é dada por:

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}=\begin{bmatrix}2\,\omega_{1,1}\,\zeta_{1,1} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 2\,\omega_{n,m}\,\zeta_{n,m}\end{bmatrix} \tag{2.86}$$

em que $\omega_{n,m}$ é a frequência de vibração do sistema e $\zeta_{n,m}$ é o fator de amortecimento viscoso modal, ambos relacionados com os número de semiondas *m* e *n*, os quais também representam os modos de vibração da placa.

A partir do sistema de equações apresentado em (2.83), Amabili (2018a) propõe um modelo de amortecimento não linear por meio de uma simplificação das matrizes de viscosidade. Desse modo, observando o sistema de equações (2.83), a matriz $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G}$, a qual refere-se à matriz de amortecimento viscoelástico linear, pode ser descrita como:

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G}=\begin{bmatrix}2\,\omega_{1,1}\,\alpha_{1,1} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 2\,\omega_{m,n}\,\alpha_{m,n}\end{bmatrix} \tag{2.87}$$

Em particular, de modo a se utilizar um amortecimento modal, as matrizes (2.86) e (2.87) são consideradas como diagonais e o mesmo fator de amortecimento é utilizado em todos os modos de vibração, o que ajuda a reduzir os parâmetros de amortecimento a serem identificados em uma análise. No caso da equação (2.87), o coeficiente $\alpha_{m,n}$ assume o papel do fator de amortecimento viscoelástico linear.

Através de análises experimentais os trabalhos Amabili (2018b, 2019) constataram que, no caso de sistemas com respostas periódicas e sem nenhuma ressonância interna ativada, a matriz de amortecimento viscoelástico não linear de termos quadráticos ($\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G}_2(\boldsymbol{\xi})$), pode ser negligenciada. Desse modo, pode-se escrever:

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G}_2(\boldsymbol{\xi}) = 0 \tag{2.88}$$

Assim, nessa hipótese, conclui-se que a matriz de amortecimento viscoelástico de termos cúbicos ($\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G}_3(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi})$) é a parcela não linear que causa mais influência no amortecimento do modelo para maiores amplitudes de vibração, baseando-se na hipótese de não existir ressonâncias internas ativas e que a resposta do sistema seja periódica. Por outro lado, em um regime linear a matriz $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G}$ passa a ser responsável por todo o amortecimento do sistema.

A matriz $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G}_3(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi})$ pode ser simplificada como:

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G}_3(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \frac{\beta_{1,1}\,\omega_{1,1}}{h^2}\xi_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{\beta_{m,n}\,\omega_{m,n}}{h^2}\xi_{\tilde{N}}^2 \end{bmatrix} \tag{2.89}$$

onde $\xi_{\tilde{N}}$ é a coordenada $\tilde{N}$ do vetor das amplitudes de deslocamento do sistema; $h$ é a espessura da placa; $\omega_{m,n}$ é a frequência natural de vibração do sistema e $\beta_{m,n}$ assume o fator de amortecimento viscoelástico cúbico. Nota-se, portanto, que no caso apresentado o amortecimento cúbico não é constante no tempo e varia de acordo com o período de vibração.

Assim, assumindo que o sistema possua somente respostas periódicas e que não há ressonâncias internas aplicadas, pode-se controlar todo o comportamento não linear da placa com apenas dois valores de amortecimento, um para o regime linear sendo representado pelo fator de amortecimento viscoelástico linear ($\alpha$) e outro para o regime não linear sendo representado pelo fator de amortecimento viscoelástico cúbico ($\beta$).

O termo de amortecimento viscoelástico cúbico do sistema de equações de equilíbrio dinâmico da placa (2.83) atuante no modo (1,1) é descrito por:

$$\beta_{1,1}\,\omega_{1,1}\left(\frac{\xi_1(t)}{h}\right)^2 \dot{\xi}_{1,1}(t) \tag{2.90}$$

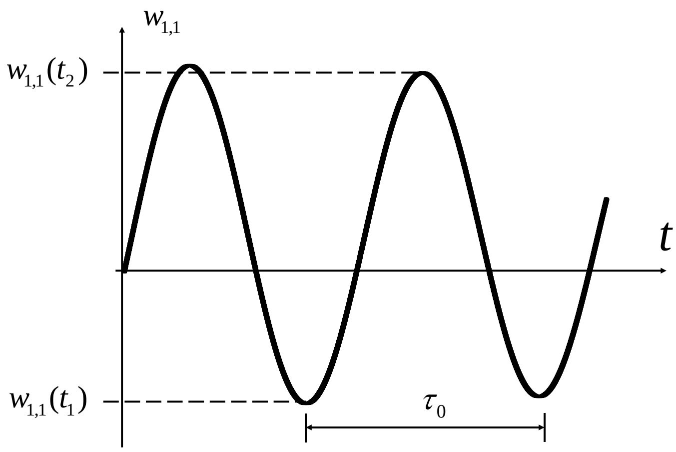
Por outro lado, o termo de amortecimento viscoelástico linear para o mesmo modo de vibração é dado por:

$$2\zeta_{1,1}\,\omega_{1,1}\,\dot{\xi}_{1,1}(t) \tag{2.91}$$

### 2.4.1 RELAÇÃO FREQUÊNCIA-AMPLITUDE

A relação frequência-amplitude auxilia na verificação do grau de não linearidade da placa quando analisada em vibração livre. Segundo Nandakumar e Chatterjee (2005) essa relação pode ser obtida analisando a projeção do modo fundamental ($w_{1,1}$) na resposta no tempo do sistema, a qual, nesta dissertação, é obtida pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem. Assim, analisa-se um valor médio da amplitude para cada oscilação ($\bar{w}_{1,1}$), bem como seu respectivo período, como está esquematizado na Figura 2.24.

Figura 2.24 – Esquematização de uma oscilação




sendo:

- $w_{1,1}(t_1)$ o valor da amplitude no instante inicial da oscilação;
- $w_{1,1}(t_2)$ o valor da amplitude no instante intermediário da oscilação;
- $\tau_0$ o período da oscilação.

A partir disso, a amplitude média é calculada como a média aritmética do módulo das amplitudes no instante inicial e no instante intermediário da oscilação:

$$\bar{w}_{1,1} = \frac{|w_{1,1}(t_1)| + |w_{1,1}(t_2)|}{2} \tag{2.92}$$

O período, que é a duração da oscilação, é dado pelo inverso da frequência, a qual é descrita por:

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau_0} \tag{2.93}$$

Com isso, a relação frequência-amplitude é obtida relacionando a frequência $\omega$ com a amplitude média de vibração da placa $\bar{w}_{1,1}$. Essa relação, também chamada de *backbone* *curve*, não só verifica o grau de não linearidade do sistema em vibração livre, como também delimita sua zona de ressonância, sendo possível identificar se o comportamento da placa apresenta ganho de rigidez (*hardening*) ou perda de rigidez (*softening*).

A verificação quanto ao grau de não linearidade é realizada basicamente analisando a inclinação da curva, ou seja, quanto mais vertical a curva for, menor será a não linearidade do sistema. Para a verificação quanto ao comportamento da placa, analisa-se os valores de frequência para os quais amplitude média se aproxima. Caso as curvas tendam a valores crescentes de frequência, tem-se, portanto, um comportamento com ganho de rigidez, caso contrário, identifica-se um comportamento com perda de rigidez.

### 2.4.2 VARIÁVEIS ADIMENSIONAIS

Por conveniência numérica e uma maior eficiência computacional realizou-se a adimensionalização do sistema não linear de equações de equilíbrio dinâmico da placa, adotando os seguintes parâmetros adimensionais:

$$
\begin{aligned}
&w_{m,n}(t) = h\,w_{m,n}(\tau); \qquad && t = \frac{\tau}{\omega_{1,1}}; \qquad && \Gamma_0 = \frac{N_{x,0}}{N_{cr}}; \quad \Gamma_1 = \frac{N_{x,1}}{N_{cr}};\\
&\dot{w}_{m,n}(t) = \omega_{1,1}\,\dot{w}_{m,n}(\tau); && \phi = \frac{\Omega}{\omega_{1,1}}; && \cos(\Omega t) = \cos(\phi\tau);\\
&\ddot{w}_{m,n}(t) = \omega^2{}_{1,1}\ddot{w}_{m,n}(\tau); && \phi_L = \frac{\Omega_L}{\omega_{1,1}}; && \cos(\Omega_L\, t) = \cos(\phi_L\, \tau);
\end{aligned}
\tag{2.94}
$$

onde:

- $t$ é o tempo em segundos;
- $h$ é a espessura da placa;
- $\tau$ é o tempo adimensional;
- $\omega_{1,1}$ é a frequência natural da placa;
- $\Omega$ é a frequência de excitação da carga harmônica transversal;
- $\Omega_L$ é a frequência de excitação da carga harmônica axial;
- $\phi$ é o parâmetro de frequência adimensional da carga transversal;
- $\phi_L$ é o parâmetro de frequência adimensional da carga axial;
- $w_{m,n}(t)$ , $\dot{w}_{m,n}(t)$ e $\ddot{w}_{m,n}(t)$ são respectivamente as amplitudes de deslocamento, velocidade e aceleração;

- $\Gamma_0$ e $\Gamma_1$ são os parâmetros adimensionais de carga axial de compressão respectivamente à parcela estática e harmônica;
- $N_{x,0}$ e $N_{x,1}$ são as amplitudes do carregamento axial de compressão respectivamente à parcela estática e harmônica;
- $N_{cr}$ é a carga crítica de flambagem da placa.

# CAPÍTULO 3
# RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo serão apresentados os resultados das análises realizadas em duas placas retangulares viscoelásticas. Inicialmente considerou-se uma placa de silicone analisada anteriormente por Balasubramanian *et al.* (2017). Nesta placa estudou-se o amortecimento viscoelástico caracterizado pelo modelo mecânico de Kelvin-Voigt, representado pela equação (2.80).

Por meio das relações frequência-amplitude e das curvas de ressonância, analisou-se a influência do parâmetro de viscoelasticidade ($\eta$) na resposta dinâmica não linear da placa. Também foi analisada a periodicidade dessa resposta por meio de planos fase e mapeamentos de Poincaré. Por fim, verificou-se a influência da geometria e de cargas axiais estáticas de tração no comportamento dinâmico não linear da placa.

Posteriormente analisou-se uma placa de aço inoxidável já estudada por Amabili (2018a). Para essa placa aplicou-se o modelo de amortecimento não linear descrito nas equações (2.87), (2.88) e (2.89), sendo comparado com um modelo de amortecimento viscoso equivalente apresentado nas equações (2.84), (2.85) e (2.86). Após isso, verificou-se também a influência de imperfeições geométricas iniciais na resposta dinâmica não linear da placa para estes dois modelos de amortecimento.

Na sequência realizou-se também uma análise de instabilidade dessa placa, a qual foi submetida a somente uma carga axial de compressão na direção paralela ao eixo $x$. O carregamento foi composto por duas parcelas não simultâneas, uma estática e outra harmônica. Nessa análise utilizou-se a formulação viscoelástica, em que o amortecimento da placa de aço foi caracterizado pelo modelo mecânico de Kelvin-Voigt. Assim, avaliaram-se as vibrações não lineares da placa viscoelástica por meio dos diagramas de bifurcação, dos planos fase e dos mapeamentos de Poincaré.

## 3.1 FREQUÊNCIA DE VIBRAÇÃO

Para placas simplesmente apoiadas é possível obter uma solução analítica no cálculo de suas frequências, as quais podem ser obtidas adotando a expansão do deslocamento transversal $w$ em relação ao número de semiondas $m$ e $n$, sendo $m$ na direção $x$ e $n$ na direção $y$, conforme indicado na equação (3.1):

$$w(x,y,t) = w_{1,1}(t)\ \mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) + w_{2,2}(t)\ \mathrm{sen}\left(\frac{2m\pi x}{a}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{2n\pi y}{b}\right) \tag{3.1}$$

A seguir, aplicou-se a expansão (3.1) na formulação apresentada para a placa viscoelástica e chegou-se a duas equações da forma apresentada em (2.80), em que as amplitudes $w_{1,1}(t)$ e $w_{2,2}(t)$ foram obtidas desacopladas em cada equação. É válido ressaltar que a expansão (3.1) deve ser realizada com no mínimo dois graus de liberdade, no intuito de evitar inconveniência numérica na formulação.

Com isso, ao admitir que a placa está em um regime linear de vibração livre não amortecida, isto é, considerando-se o vetor de cargas (**F**) nulo, excluindo os termos de amortecimento e negligenciando os termos cúbicos e quadráticos de rigidez da primeira equação resultante, chegou-se a uma relação do tipo apresentada em (3.2).

$$M_1\, \ddot{w}_{1,1}(t) + K_1(m,n)\ w_{1,1}(t) = 0 \tag{3.2}$$

a qual representa uma equação de equilíbrio linear para a placa no regime de vibração livre não amortecida, onde $M_1$ representa o termo de massa e $K_1(m, n)$ caracteriza o termo de rigidez linear da placa dependente do número de semiondas. Substituindo-se agora $w_{1,1}(t) = A\cos(\omega t)$, sendo $A$ uma constante de amplitude e $\omega$ é a frequência de vibração da placa, obteve-se a equação (3.3):

$$\omega_{m,n} = \pi^2\left(\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right)\sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho\left(1-\nu^2\right)}} \tag{3.3}$$

que fornece a frequência de vibração da placa em função dos modos de vibração. Repetindo o mesmo procedimento com a consideração do efeito do pré-carregamento axial estático, obtêm-se a frequência de vibração como:

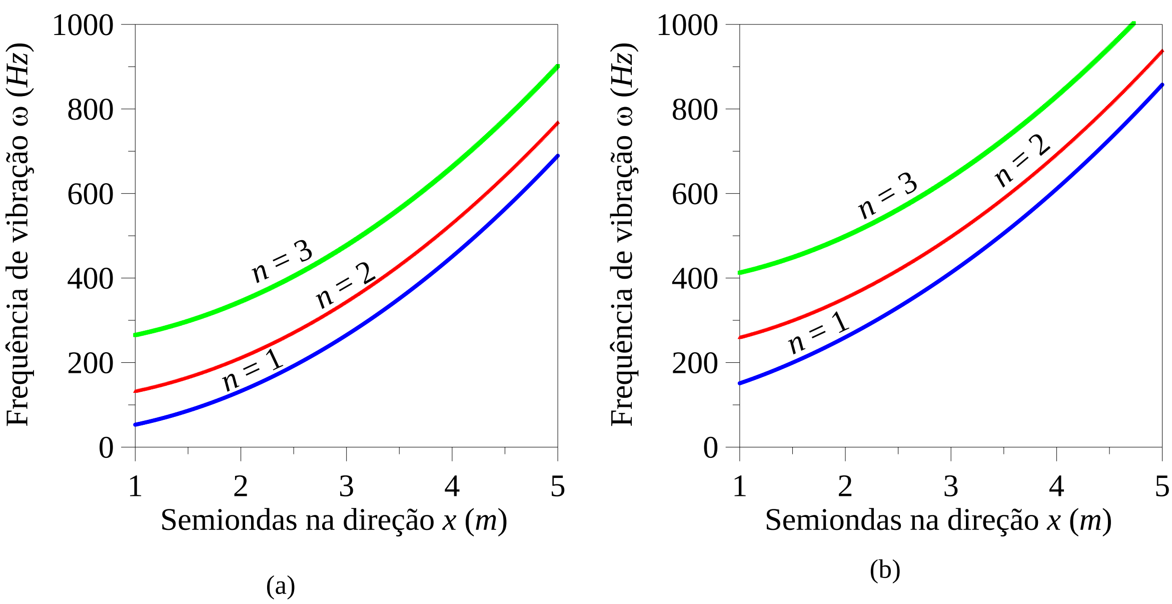
$$\omega_{m,n} = \frac{\pi}{b^2 a^2}\sqrt{\frac{1}{\rho}\left(\frac{\pi^2 E h^2\left(a^2 n^2 + b^2 m^2\right)^2}{12\left(1-\nu^2\right)} + \frac{\left(N_x b^2 m^2 + N_y a^2 n^2\right)\left(ab\right)^2}{h}\right)} \tag{3.4}$$

em que $N_x$ e $N_y$ são respectivamente os valores das cargas axiais estáticas na direção $x$ e $y$; $\omega_{m,n}$ é o valor da frequência de vibração carregada.

Como a função seno é a solução exata para descrever as condições de contorno de uma placa simplesmente apoiada, as relações apresentadas em (3.3) e em (3.4) são válidas para todos os modos de vibração de uma placa nessas condições.

Admitindo-se uma placa com pré-carregamento axial $N_x = N_y = 10\ kN$ e utilizando-se os seguintes parâmetros físicos e geométricos, dados por Amabili (2016), $E = 70\ GPa$, $\rho = 2778\ Kg/m^3$, $\nu = 0{,}3$, $h = 1\ mm$ e $a = b = 30\ cm$, mostra-se na Figura 3.1 os espectros de frequência desta placa. Percebeu-se que na presença do pré-carregamento a placa tem uma maior frequência de vibração e que a frequência natural ocorre para a combinação de semiondas $m = n = 1$ nas equações.

Figura 3.1 – Espectro de Frequência para a placa simplesmente apoiada (a) sem carregamento axial e (b) com carregamento axial




Para descrever o espectro de frequência de uma placa engastada nas quatro bordas, que não possui solução exata, deve-se utilizar uma discretização maior na expansão do campo de deslocamento transversal $w$ para atingir convergência de modos mais altos. Essa descrição deve ser realizada numericamente a partir de um problema de autovalor.

## 3.2 ANÁLISE DA PLACA DE SILICONE

Inicialmente desenvolveu-se uma placa retangular viscoelástica de silicone, já trabalhada por Balasubramanian *et al.* (2017). A placa possui as seguintes características geométricas: $h = 1{,}5\ mm$ e $a = b = 26\ cm$. O silicone apresenta os seguintes dados físicos: $E = 5{,}62\ MPa$, $\rho = 1430\ kg/m^3$ e $\nu = 0{,}5$.

Para essa placa admitiu-se a atuação de um carregamento pontual harmônico e de um pré-carregamento axial estático. As cargas axiais possuem valores fixos e iguais a: $N_x = 100\ N/m$ e $N_y = 90\ N/m$, os quais foram adotados a fim de se obter convergência com o modelo experimental. Realizou-se as análises para quatro valores incrementais de carga harmônica, quais sejam: 0,01 *N*, 0,04 *N*, 0,07 *N*, 0,10 *N*. Respectivamente a esses valores, adotou-se os seguintes parâmetros de viscoelasticidade ($\eta$): 0,0050 *s*, 0,0020 *s*, 0,0018 *s*, 0,0012 *s*. A carga pontual foi aplicada nas coordenadas ($x_1 = 0.11$; $y_1 = 0{,}19$) *m* e os deslocamentos foram metidos no centro da placa ($x = 0.13$; $y = 0{,}13$) *m*.

Através de uma análise de convergência percebeu-se que adotar $k_r = 1000\ N/rad$ é suficiente para considerar o engastamento nas extremidades da placa. Para essa placa admitiu-se que os apoios axiais são fixos, sendo utilizada, portando, a expansão para os deslocamentos apresentada na equação (2.69). De posse disso, desenvolveu-se um código em linguagem simbólica no programa Maple® para a obtenção do sistema de equações de equilíbrio dinâmico da placa, bem como para o cálculo das frequências, modos de vibração e para a montagem das relações frequência-amplitude. Assim, realizou-se uma análise de convergência, em função do número de coordenadas generalizadas, da frequência natural da placa, como pode ser observado na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Convergência da frequência natural da placa viscoelástica de silicone

| $\tilde{N}$ | $\omega_{1,1}$ *(Hz)* | (%) |
|---|---|---|
| 3 | 9,05 | - |
| 12 | 24,52 | 63,09 |
| 27 | 22,00 | -11,45 |
| 39 | 21,02 | -4,66 |
| 48 | 20,97 | -0,24 |

onde $\tilde{N}$ representa o número total de coordenadas generalizadas utilizadas em cada discretização, admitindo-se simetria de $M$ e $N$ entre os três campos de deslocamento, isto é, $\tilde{N} = 3M = 3N$.

Devido à baixa variação (0,24 %) entre os dois últimos valores de frequência e para uma maior eficiência computacional, admitiu-se a discretização com 39 graus de liberdade ($\omega_{1,1}$ = 21,02 $Hz$), sendo utilizadas as seguintes coordenadas generalizadas:

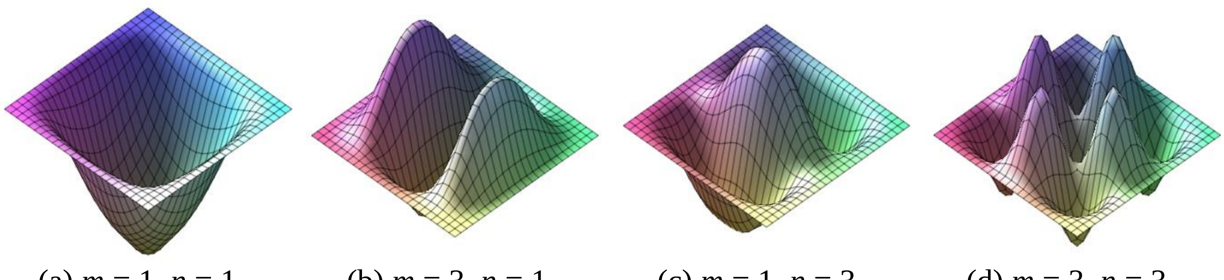
Tabela 3.2 – Coordenadas generalizadas utilizadas nas expansões dos deslocamentos

| Deslocamento | Coordenadas generalizadas |
|---|---|
| $u$ | $u_{2,1}$, $u_{4,1}$, $u_{6,1}$, $u_{8,1}$, $u_{2,3}$, $u_{4,3}$, $u_{6,3}$, $u_{8,3}$, $u_{2,5}$, $u_{4,5}$, $u_{6,5}$, $u_{2,7}$, $u_{4,7}$ |
| $v$ | $v_{1,2}$, $v_{3,2}$, $v_{5,2}$, $v_{7,2}$, $v_{1,4}$, $v_{3,4}$, $v_{5,4}$, $v_{7,4}$, $v_{1,6}$, $v_{3,6}$, $v_{5,6}$, $v_{1,8}$, $v_{3,8}$ |
| $w$ | $w_{1,1}$, $w_{1,3}$, $w_{1,5}$, $w_{1,7}$, $w_{3,1}$, $w_{3,3}$, $w_{3,5}$, $w_{3,7}$, $w_{5,1}$, $w_{5,3}$, $w_{5,5}$, $w_{7,1}$, $w_{7,3}$ |

No trabalho de Balasubramanian *et al.* (2017) também se utilizou 39 graus de liberdade para a expansão dos deslocamentos da placa com os mesmos modos apresentados na Tabela 3.2, sendo obtido pelos autores um valor de frequência natural igual a 20,90 $Hz$. Nota-se, portanto, um desvio de 0,57 % entre os valores de frequência, podendo ser explicado pela divergência de programas utilizados.

Após isso, também foram verificados os autovetores do sistema discreto o que permite analisar os modos de vibração da placa, sendo os quatro primeiros apresentados na Figura 3.2.

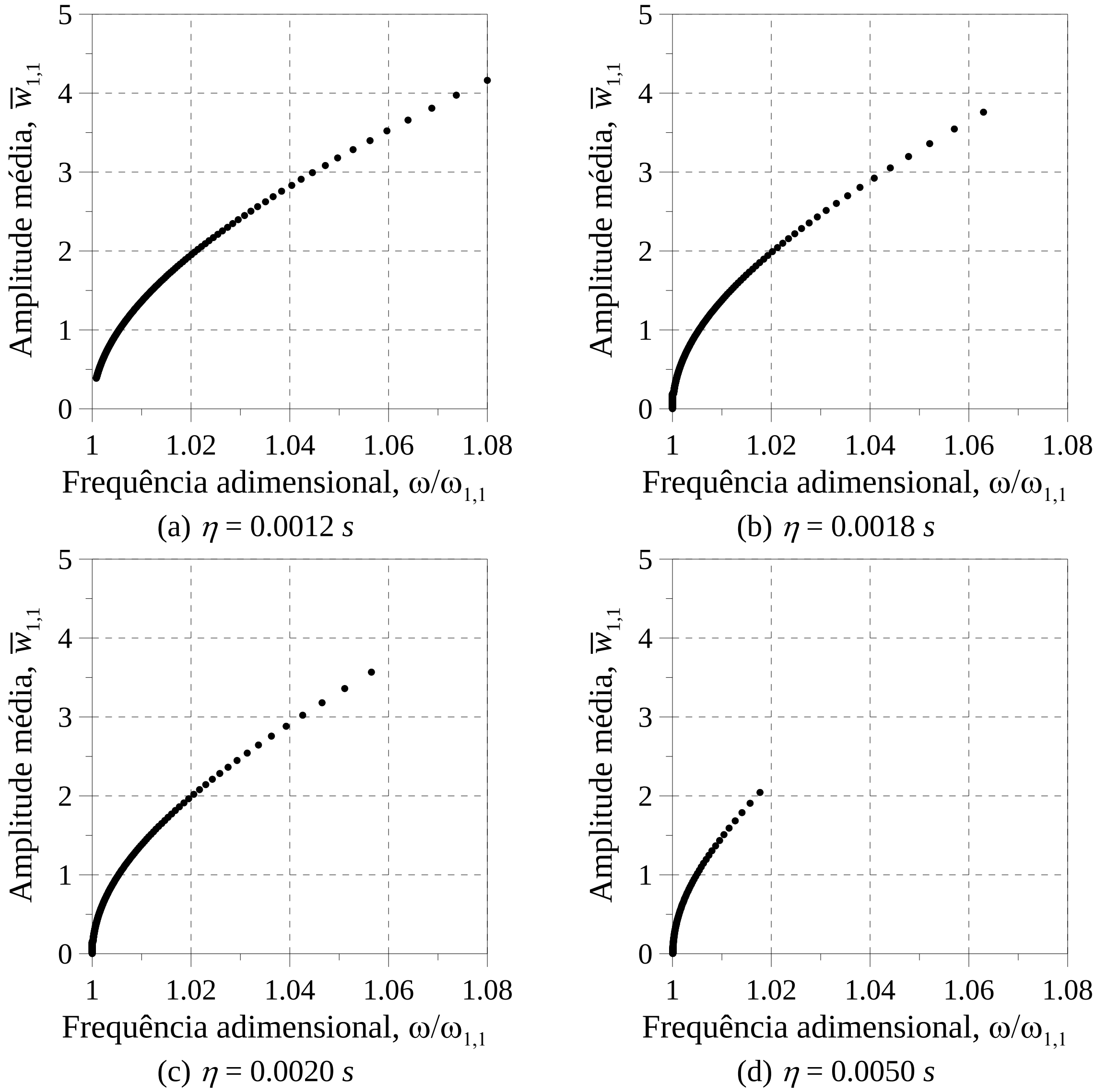
Figura 3.2 – Representação dos quatro primeiros modos de vibração da placa viscoelástica



(a) $m = 1$, $n = 1$ (b) $m = 3$, $n = 1$ (c) $m = 1$, $n = 3$ (d) $m = 3$, $n = 3$

Para verificar a influência do fator de viscoelasticidade na resposta dinâmica não linear da placa em vibração livre, analisaram-se as relações frequência-amplitude para os quatros valores de $\eta$. A resposta no tempo foi obtida através do método de Runge-Kutta, adotando as mesmas condições iniciais de amplitudes e de velocidades para todos os casos estudados. Com isso, seguindo a formulação apresentada no item 2.4.1 desta dissertação, foram obtidas as curvas apresentadas na Figura 3.3.

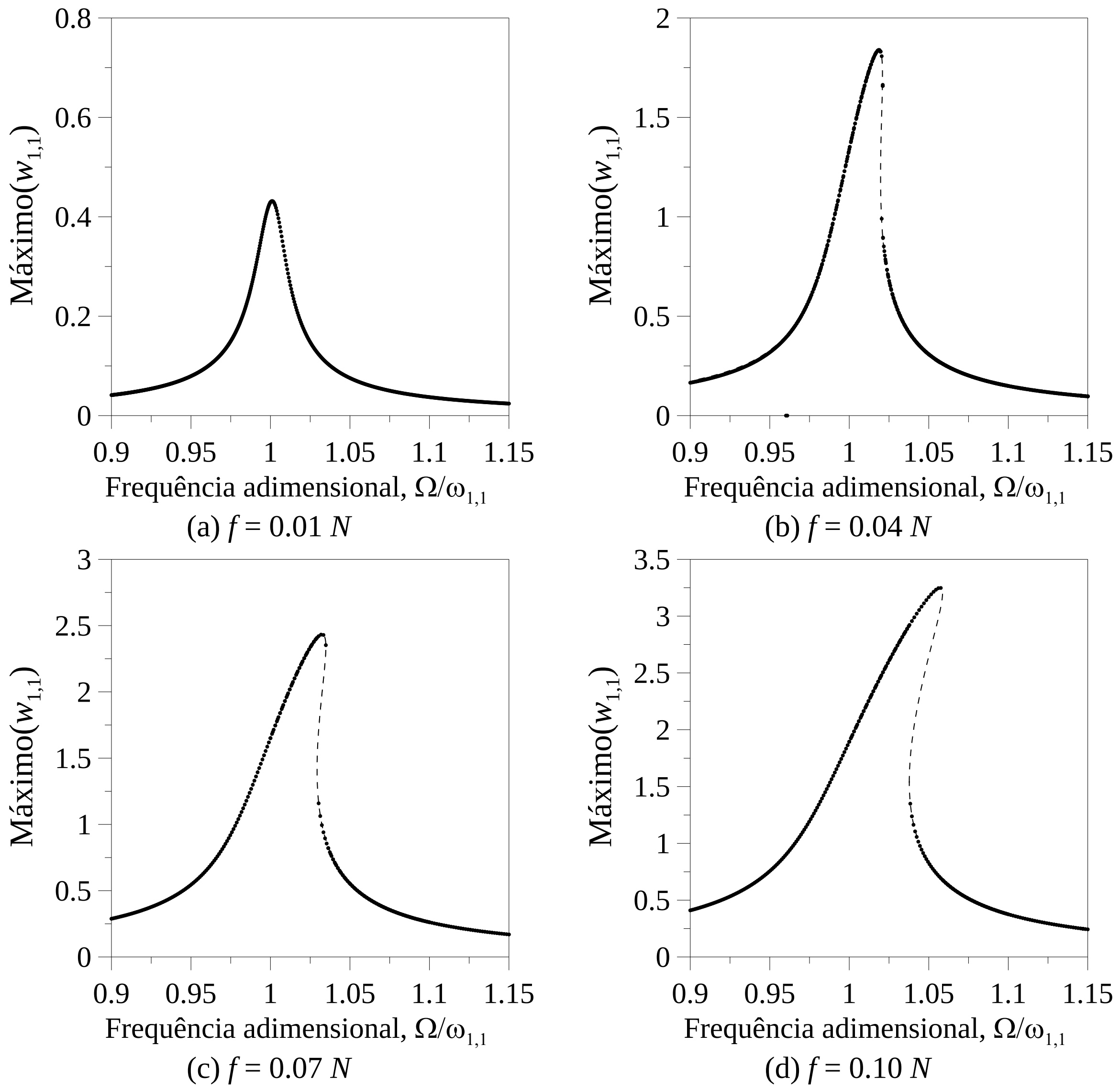
Figura 3.3 – Relações frequência-amplitude para os diferentes valores do parâmetro de viscoelasticidade




A partir da Figura 3.3 percebeu-se que na medida em que se aumenta o fator de viscoelasticidade $\eta$, a amplitude máxima diminui, constatando a sua influência na resposta dinâmica não linear da placa. Observou-se também um comportamento da placa com ganho de rigidez (*hardening)*, isto é, as curvas tendem a valores crescentes de frequência, sendo o esperado para o sistema estrutural em estudo.

Em seguida analisou-se, através das curvas de ressonância quando a placa é submetida ao carregamento harmônico, a resposta não linear da frequência considerando as variações da amplitude do carregamento. As curvas foram encontradas pelo método da força bruta e pelo método da continuação (Del Prado (2001)), obtendo-se as respostas em equilíbrio estável (linha contínua) e instável (linha tracejadas), como é apresentado na Figura 3.4.

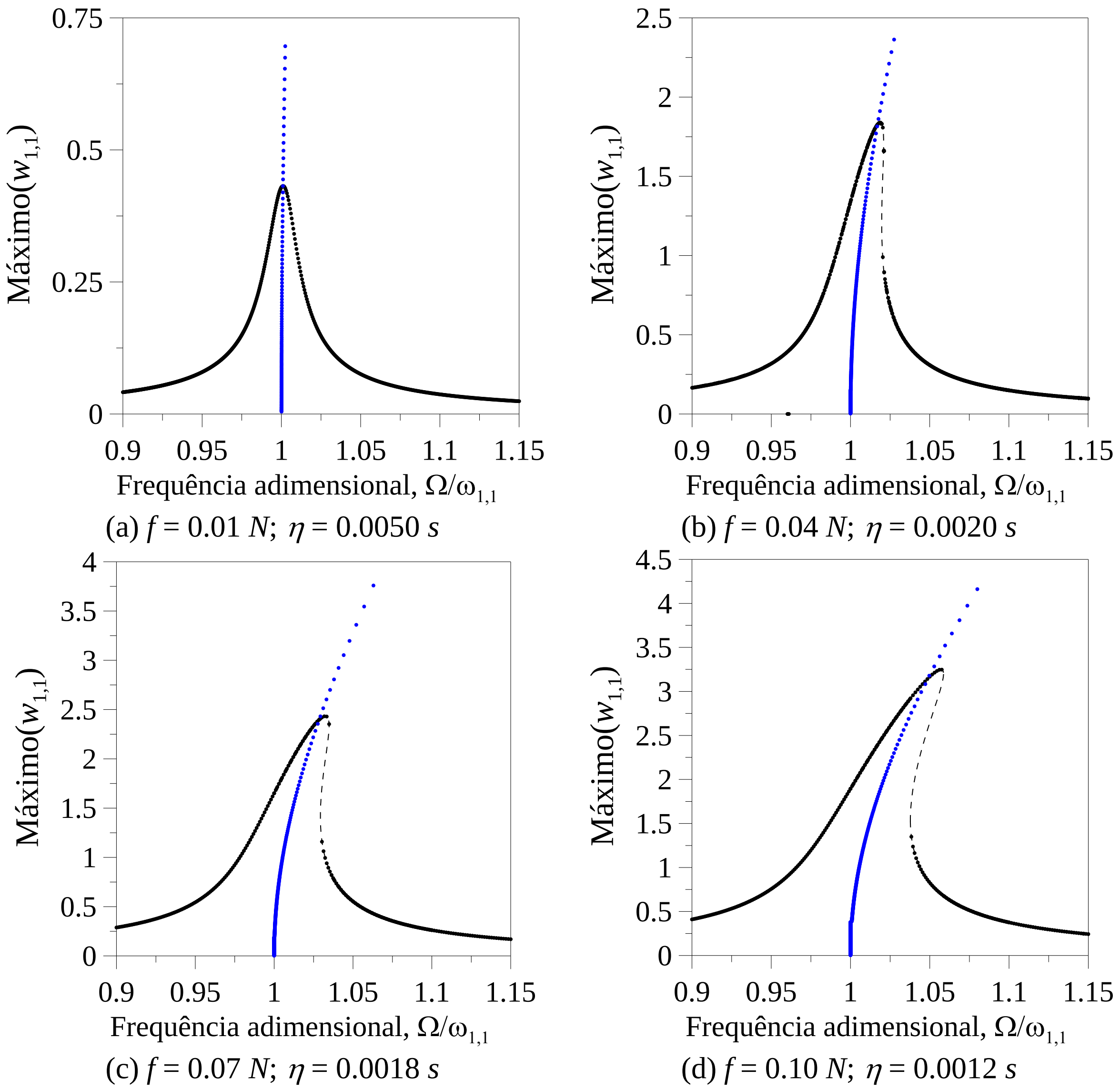
Figura 3.4 – Curvas de ressonância da placa para os diferentes valores de carga




Para os menores valores de carregamento verificou-se que a resposta da curva possui um baixo grau de não linearidade, e com o aumento do nível de carga esse grau de não linearidade cresce. Observou-se também um comportamento de endurecimento nas curvas, como já previsto nas relações frequência-amplitude. Observou-se que valores do parâmetro de frequência maiores que o ponto de ressonância ($\Omega/\omega_{1,1}$ = 1,0) a placa possui dois atratores para as curvas, um atuando em menor amplitude e outro atuando em maior amplitude, tornando a resposta da frequência nesses pontos mais sensível às perturbações iniciais.

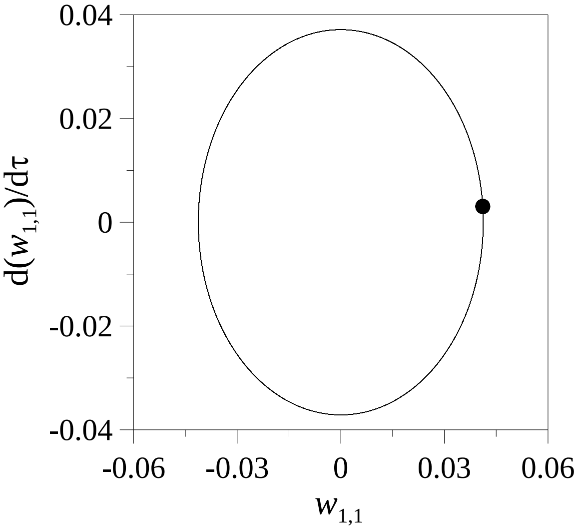
Na sequência, as relações frequência-amplitude apresentadas na Figura 3.3 foram sobrepostas nas curvas de ressonância da Figura 3.4, constatando-se que as relações frequência-amplitude também delimitam a zona de ressonância da placa, como pode ser visto na Figura 3.5.

Figura 3.5 – Sobreposição das relações frequência-amplitude nas curvas de ressonância da placa

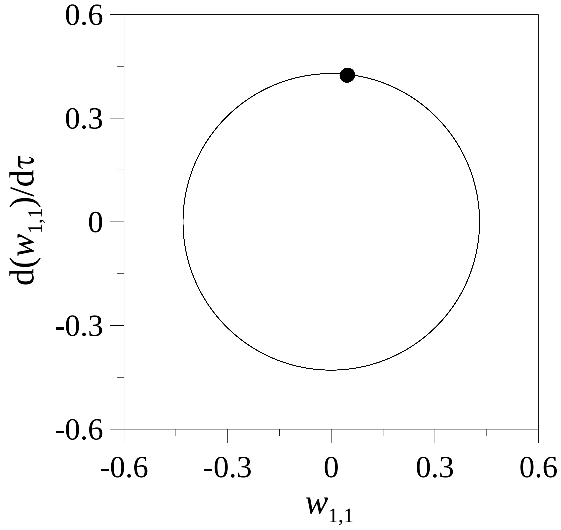



Estudaram-se também os planos fase e os mapeamentos de Poincaré da placa viscoelástica. Para isso considerou-se na carga harmônica transversal dois valores de frequência de vibração adimensional, $\phi = 0{,}9$ e $\phi = 1{,}0$. Em seguida, utilizou-se o método de Runge-Kutta de quarta ordem para integrar o sistema de equações diferencias adimensionalizado. Os resultados para os quatro valores incrementais de cargas são apresentados na Figura 3.6, na qual observou-se que com o aumento da intensidade da carga, as amplitudes também aumentam e que o modelo vibra com periodicidade 1T em todos os casos estudados.

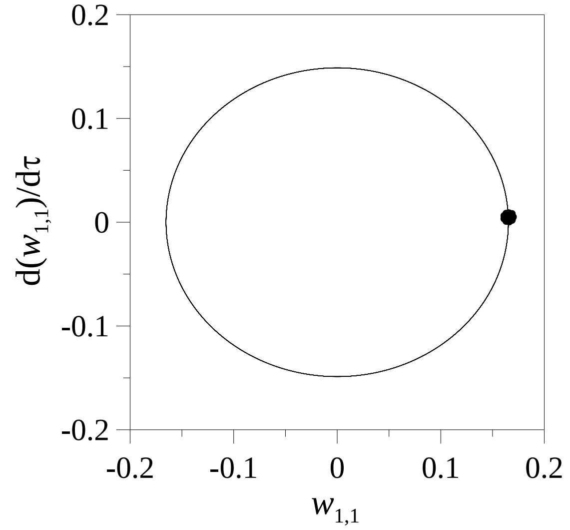
Figura 3.6 – Planos fase e mapeamentos de Poincaré para diferentes valores de carga e frequência de excitação



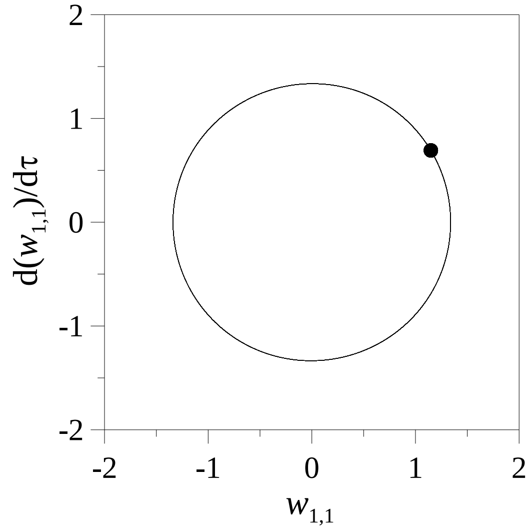

(a) $f$ = 0,01 $N$; $\Omega/\omega_{1,1}$ = 0,9



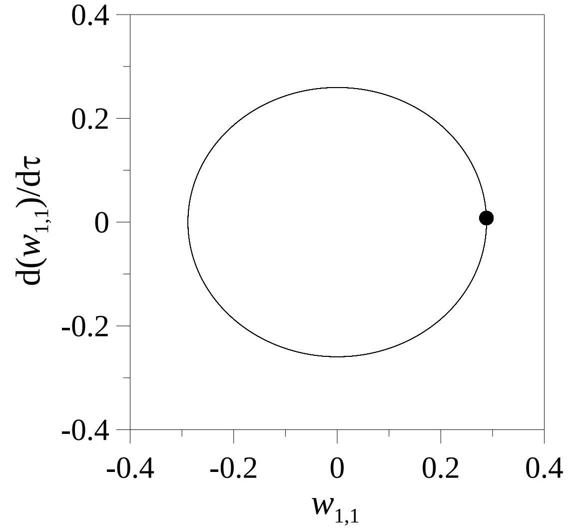

(b) $f$ = 0,01 $N$; $\Omega/\omega_{1,1}$ = 1,0



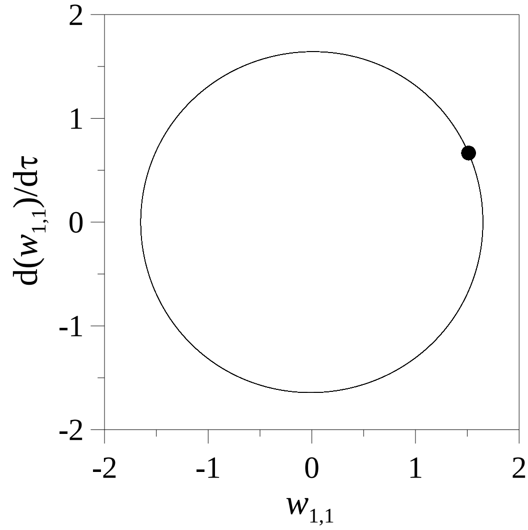

(c) $f$ = 0,04 $N$; $\Omega/\omega_{1,1}$ = 0,9



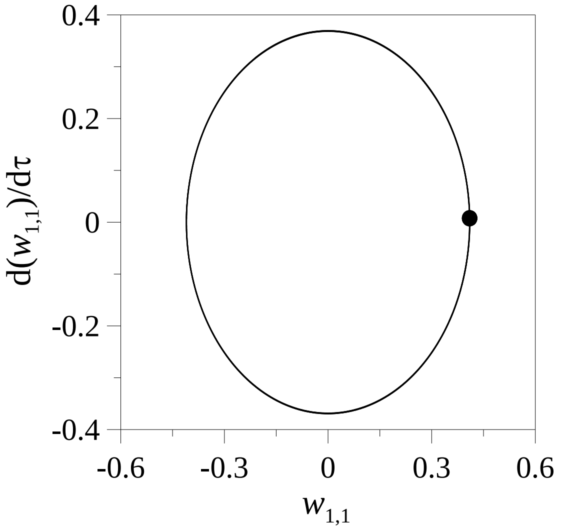

(d) $f$ = 0,04 $N$; $\Omega/\omega_{1,1}$ = 1,0



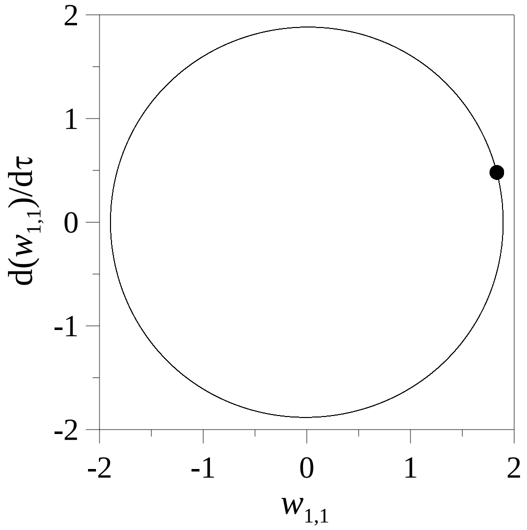

(e) $f$ = 0,07 $N$; $\Omega/\omega_{1,1}$ = 0,9




(f) $f$ = 0,07 $N$; $\Omega/\omega_{1,1}$ = 1,0




(g) $f$ = 0,10; $\Omega/\omega_{1,1}$ = 0,9




(h) $f$ = 0,10; $\Omega/\omega_{1,1}$ = 1,0

Posteriormente, realizou-se uma análise paramétrica a fim de verificar a influência da geometria e de reduções do pré-carregamento axial na resposta dinâmica não linear da placa de silicone analisada. Para a variação da geometria não foram alterados os valores das cargas axiais, as propriedades físicas, a espessura e a dimensão ($a$) relativa ao eixo $x$ da placa, sendo realizadas duas variações na dimensão ($b$) relativa ao eixo $y$. Na primeira variação adota-se que $b$ = 1,5 $a$ e na segunda variação $b$ = 2 $a$, como mostrado a seguir:

Tabela 3.3 – Variação da geometria na análise paramétrica da placa de silicone

| Variação | Dimensões da placa ($m$) | | Frequência | Posição $y_1$ da carga |
|---|---|---|---|---|
| | $a$ | $b$ | natural ($Hz$) | pontual ($m$) |
| 1,5 $a$ | 0,26 | 0,39 | 17,99 | 0,285 |
| 2,0 $a$ | 0,26 | 0,52 | 16,82 | 0,380 |

Para a variação das cargas axiais todas as propriedades físicas e geométricas foram conservadas, sendo estudadas duas reduções do carregamento. Na primeira variação admite-se uma redução de 25% das cargas axiais considerada na primeira análise, as quais possuem os seguintes valores: $N_x$ = 100 $N/m$ e $N_y$ = 90 $N/m$. Para a segunda variação, considerou-se uma redução de 50%, como pode ser visto na Tabela 3.4. É importante ressaltar que em todas as variações a frequência natural da placa altera-se, sendo essas alterações apresentadas na Tabela 3.3 e 3.4.

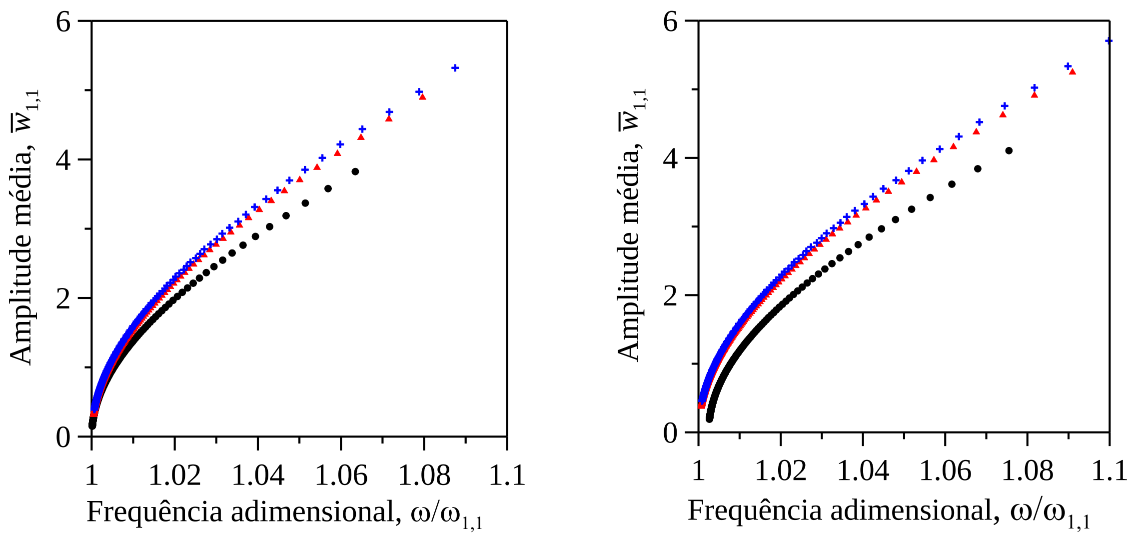
Tabela 3.4 – Variação das cargas axiais na análise paramétrica da placa de silicone

| Redução | Cargas axiais (*N/m*) | | Frequência |
|---|---|---|---|
| | $N_x$ | $N_y$ | natural (*Hz*) |
| 25% | 75 | 67.5 | 18,29 |
| 50% | 50 | 45 | 15,05 |

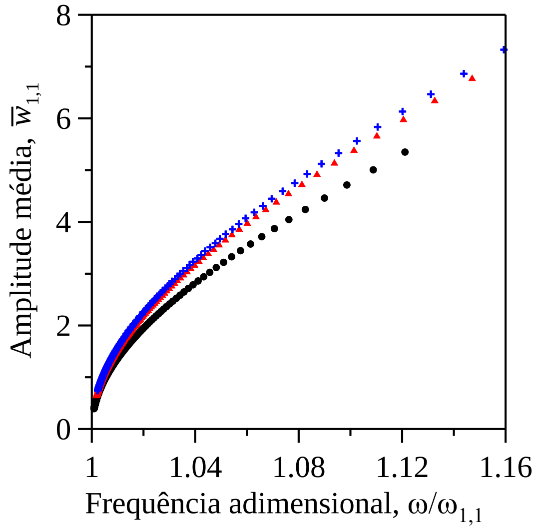
Assim investigou-se a influência destas variações nas relações frequência-amplitude da placa. Devido ao baixo grau de não-linearidade a curva relativa à $\eta = 0.0050\ s$ não foi estudada. Todas as curvas em preto representam a placa original. Na variação da geometria as curvas em vermelho representam a placa com $b = 1{,}5\ a$ e as curvas em azul representam a placa com $b = 2{,}0\ a$. Observa-se a partir da Figura 3.7 que a variação da geometria não tem grande influência na relação frequência amplitude do problema e que com o aumento da relação $a/b$ há um deslocamento das curvas para a esquerda, indicando um pequeno aumento para os menores valores de frequência.

Para a variação do carregamento axial, as curvas em azul representam a placa com redução de 25% da carga axial e as curvas em vermelho representam a placa com redução de 50% da carga. Com base nos resultados obtidos notou-se que, na medida em que se reduz os valores das cargas axiais as curvas se deslocam para a direita, indicando diminuição da amplitude de vibração para o mesmo valor de frequência, como pode ser visto nas Figuras 3.7 e 3.8.

Figura 3.7 – Relações frequência-amplitude da placa viscoelástica para a variação da geometria: curvas em preto representam a placa original, curvas em vermelho representam $b = 1{,}5\ a$ e curvas em azul representam $b = 2{,}0\ a$.

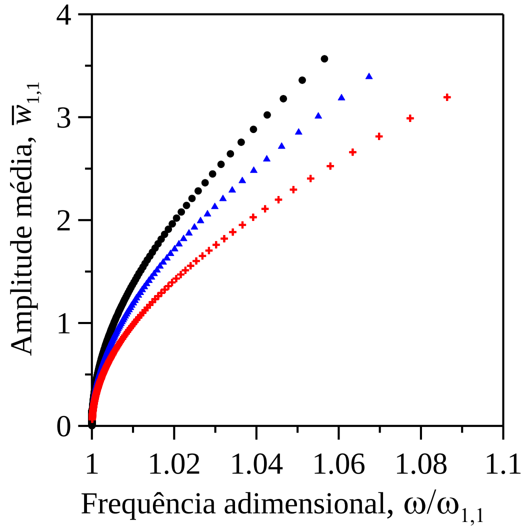



(a) variação da geometria: $\eta = 0.0020\ s$ (b) variação da geometria: $\eta = 0.0018\ s$

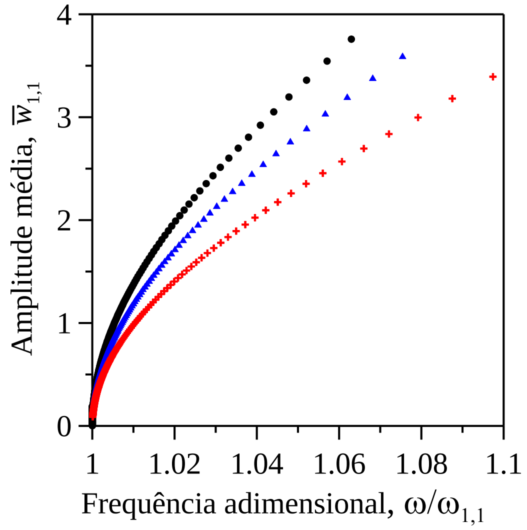



(c) variação da geometria: $\eta$ = 0.0012 *s*

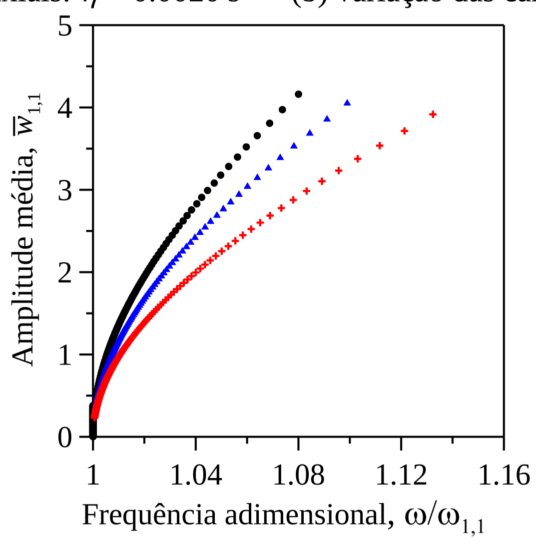
Figura 3.8 – Relações frequência-amplitude da placa viscoelástica para a variação do carregamento axial: curvas em preto representam a placa original, curvas em azul representam a redução de 25% a e curvas em vermelho representam a redução de 50%.




(a) variação das cargas axiais: $\eta$ = 0.0020 *s*



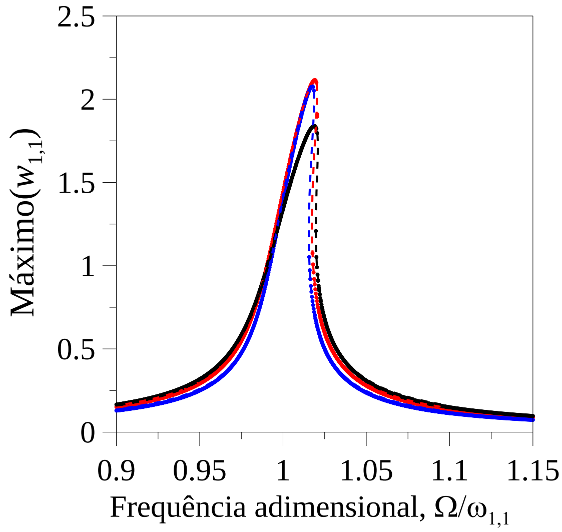

(b) variação das cargas axiais: $\eta$ = 0.0018 *s*



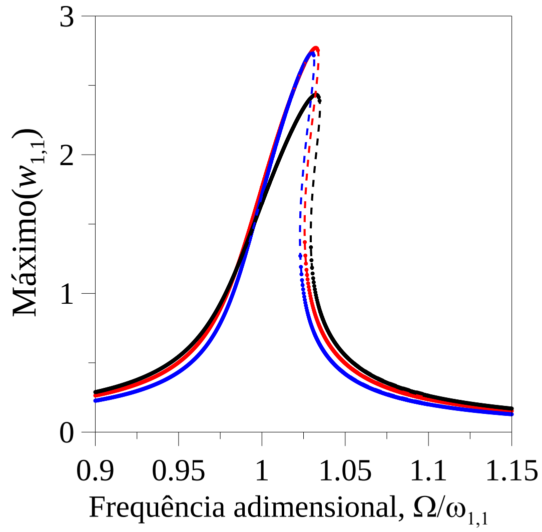

(c) variação das cargas axiais: $\eta$ = 0.0012 *s*

Em seguida, também se investigou as curvas de ressonância para todas as variações paramétricas da placa, sendo apresentadas na Figura 3.8. As cores das curvas seguem o mesmo padrão adotado para as curvas frequência-amplitude das Figuras 3.7 e 3.8. Devido ao seu baixo grau de não linearidade, nesta análise a curva relativa a $f$ = 0,01 $N$ também não foi analisada.

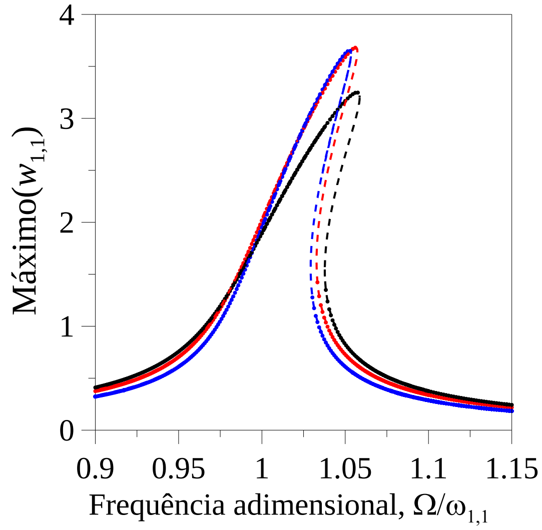
Figura 3.9 – Curvas de ressonância da placa viscoelástica para a variação da geometria: curvas em preto representam a placa original, curvas em vermelho representam $b = 1{,}5\ a$ e curvas em azul representam $b = 2{,}0\ a$.




(a) variação da geometria: $f$ = 0.04 $N$

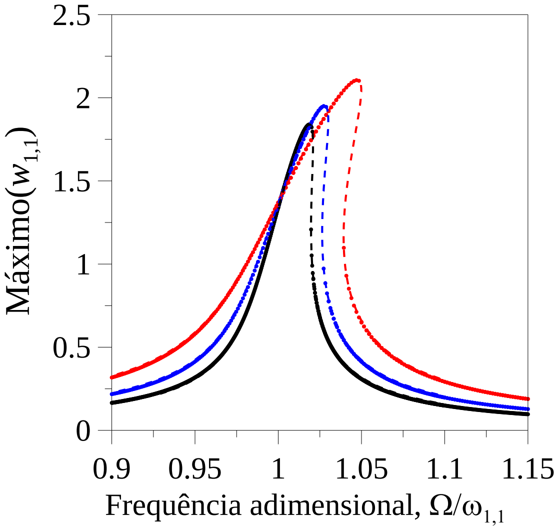



(b) variação da geometria: $f$ = 0.07 $N$

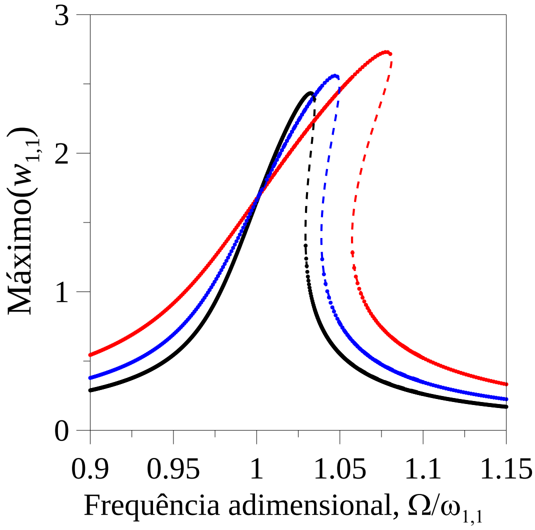



(c) variação da geometria: $f$ = 0.10 $N$

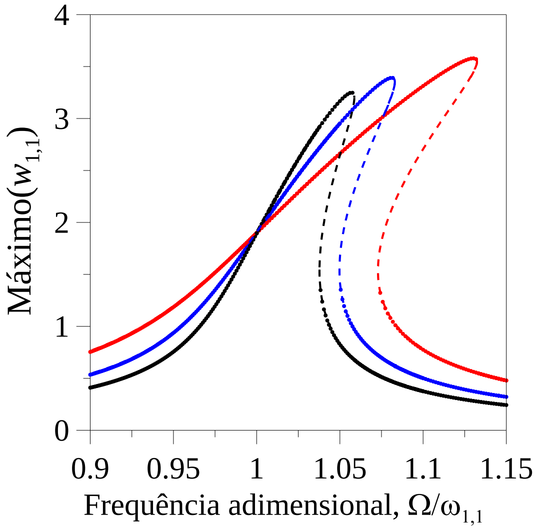
Figura 3.10 – Curvas de ressonância da placa viscoelástica para a variação do carregamento axial: curvas em preto representam a placa original, curvas em azul representam a redução de 25% a e curvas em vermelho representam a redução de 50%.




(a) variação das cargas axiais*:* $f$ = 0.04 $N$




(b) variação das cargas axiais*:* $f$ = 0.07 $N$



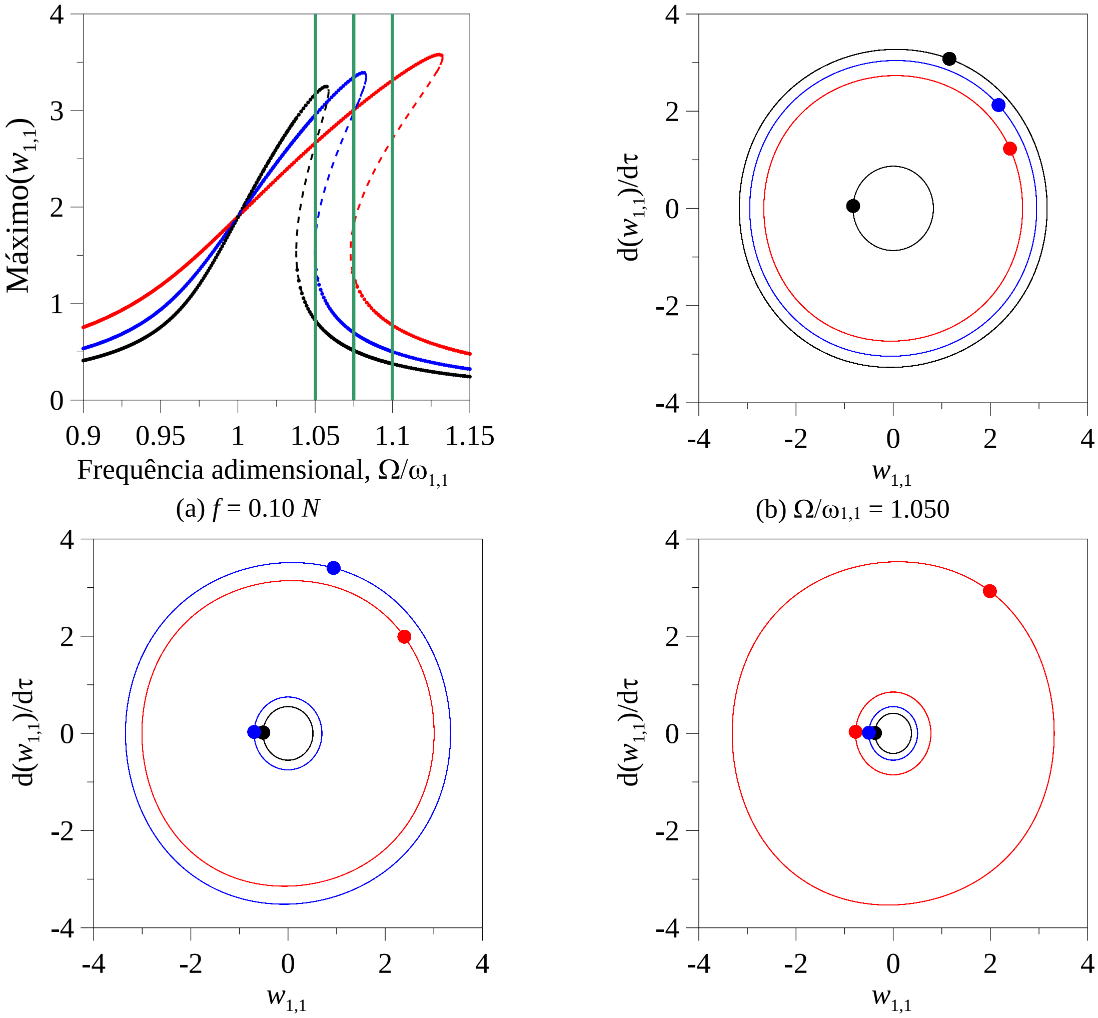

(c) variação das cargas axiais*:* $f$ = 0.10 $N$

A partir das curvas observou-se que em todas as variações as placas possuem um padrão de comportamento com ganho de rigidez (*hardening*) com uma zona instável próxima ao ponto de ressonância ($\Omega/\omega_{1,1}$ = 1), a qual é representada pelo trecho pontilhado das curvas. Notou-se também que as respostas com maior grau de não linearidade foram encontradas em placas com os menores valores de cargas axiais e em placas com menores dimensões, como previsto pelas relações frequência-amplitude das Figuras 3.7 e 3.8.

Observou-se ainda que nos pontos onde a frequência da excitação ($\Omega$) é maior do que a frequência natural ($\omega_{1,1}$) a placa pode possuir dois atratores, um atuando em maior amplitude e outro atuando em uma menor amplitude de vibração. Para comprovar isso utilizou-se a Figura 3.10(c), a qual refere-se à curva com maior grau de não linearidade encontrada, sendo verificados os mapeamentos de Poincaré em três pontos distintos das curvas ($\Omega/\omega_{1,1}$ = 1.05, $\Omega/\omega_{1,1}$ = 1.075, $\Omega/\omega_{1,1}$ = 1.1), como é apresentado na Figura 3.11.

Para todas as curvas notou-se uma resposta periódica com período unitário. Na Figura 3.11(b) observou-se a presença de dois atratores representados pelas curvas em preto, nas demais curvas notou-se somente um atrator atuando em maior amplitude. Na Figura 3.11(c) percebeu-se a presença de dois atratores representados pelas em azul, na curva em vermelho foi observado um atrator de maior amplitude e na curva em preto um atrator atuando em menor amplitude. Por fim, na Figura 3.11(d) percebeu-se que a presença de dois atratores ocorre nas curvas em vermelho, sendo que nas demais observou-se somente um atrator atuando em menor amplitude.

Figura 3.11 – Curvas de ressonância da placa relativas à variação do carregamento axial com os três pontos de frequência analisados e seus respectivos mapeamentos de Poincaré




(a) $f$ = 0.10 $N$ (b) $\Omega/\omega_{1,1}$ = 1.050
(c) $\Omega/\omega_{1,1}$ = 1.075 (d) $\Omega/\omega_{1,1}$ = 1.100

# 3.3 ANÁLISE DA PLACA DE AÇO INOXIDÁVEL

Neste item estudam-se as vibrações não-lineares em uma placa retangular de aço inoxidável com imperfeições geométricas iniciais, a qual foi analisada por Amabili (2018a). Para essa placa considerou-se as seguintes características geométricas: $h$ = 0,0005 *m*, $a$ = 0,25 *m*, $b$ = 0,24 *m* e o material foi caracterizado utilizando os seguintes dados físicos: $E$ = 193 *GPa*, $\rho$ = 8000 $kg/m^3$ e $\nu$ = 0,29.

## 3.3.1 INFLUÊNCIA DO CARREGAMENTO TRANSVERSAL

Em uma primeira análise admitiu-se a atuação somente de um carregamento transversal, pontual e harmônico nas seguintes coordenadas: ($x_1$ = 0,0625 *m*; $y_1$ = 0,18 *m*). Nesta análise, caracterizou-se o material da placa por meio do modelo de amortecimento não linear, o qual foi comparado com o modelo de amortecimento viscoso. Estudaram-se as vibrações não lineares da placa considerando quatro valores incrementais para a amplitude da carga dinâmica, sendo que para cada amplitude considerou-se um fator de amortecimento viscoso ($\zeta$) diferente, como pode ser visto na Tabela 3.5.

Tabela 3.5 – Valores utilizados para o fator de amortecimento viscoso em relação da amplitude do carregamento transversal para análise da placa de aço

| Amplitude da carga harmônica ($f$) | Fator de amortecimento viscoso ($\zeta$) |
|---|---|
| 0,30 *N* | 0,0080 |
| 0,50 *N* | 0,0097 |
| 0,70 *N* | 0,0121 |
| 0,90 *N* | 0,0140 |

Através da análise experimental, considerando-se um regime linear de vibração e utilizando-se 0,01 *N* para a amplitude da carga transversal harmônica, Amabili (2018a) obteve 0,0023 para o coeficiente de amortecimento viscoso da placa em questão. Assumindo-se esse valor para o fator de amortecimento viscoelástico linear ($\alpha$), esse autor calibrou um valor para o fator de amortecimento não linear cúbico ($\beta$), de modo a se obter coerência entre as curvas de ressonância obtidas via análise experimental e via análise numéricas.

Desse modo, utilizam-se valores fixos para os coeficientes $\alpha$ e $\beta$, de modo a representar o amortecimento do material para todos os níveis de não linearidade estudados, isto é, com estes dois fatores de amortecimento consegue-se representar as vibrações não lineares da placa para todas as amplitudes da carga pontual apresentadas na Tabela 3.5. De posse disso, admitiram-se neste trabalho os mesmos valores utilizados por Amabili (2018a), quais sejam: $\alpha = 0{,}0023$ e $\beta = 0{,}044$.

A imperfeição geométrica da placa foi caracterizada considerando somente o primeiro modo da expansão apresentada em (2.72), ou seja, $M_i = N_i = 1$, admitindo-se que $A_{1,1} = 0{,}70\ h$ e que as condições de contorno nas quatro bordas da placa são representadas por apoios elásticos, considerando $k_r = 100\ N/rad$ para caracterizar a rigidez equivalente das molas rotacionais lineares uniformemente distribuídas. Considerou-se também que a placa possui apoios axiais móveis (ver Figura 2.20), o que levou a utilização da expansão modal para os deslocamentos apresentada nas relações de (2.70).

Para a discretização da placa utilizaram-se 22 graus de liberdade, admitindo-se as coordenadas generalizadas apresentadas na Tabela 3.6 nas análises:

Tabela 3.6 – Coordenadas generalizadas utilizadas nas expansões dos deslocamentos para placa de aço

| Deslocamento | Coordenadas generalizadas |
|---|---|
| $u$ | $u_{1,1}$, $u_{1,3}$, $u_{3,1}$, $u_{3,3}$, $u_{1,5}$, $u_{5,1}$, $u_{3,5}$, $u_{5,3}$, $u_{5,5}$ |
| $v$ | $v_{1,1}$, $v_{1,3}$, $v_{3,1}$, $v_{3,3}$, $v_{1,5}$, $v_{5,1}$, $v_{3,5}$, $v_{5,3}$, $v_{5,5}$ |
| $w$ | $w_{1,1}$, $w_{1,3}$, $w_{3,1}$, $w_{3,3}$ |

A partir disso obtiveram-se os valores de frequência de vibração da placa, os quais são apresentados na Tabela 3.7. Esses valores são comparados com as frequências obtidas por Amabili (2018a) para a mesma placa em questão e não são observados desvios relativos entre os resultados desse autor e do presente estudo.

Tabela 3.7 – Frequências de vibração da placa de aço com imperfeição geométrica de $A_{1,1} = 0{,}70h$

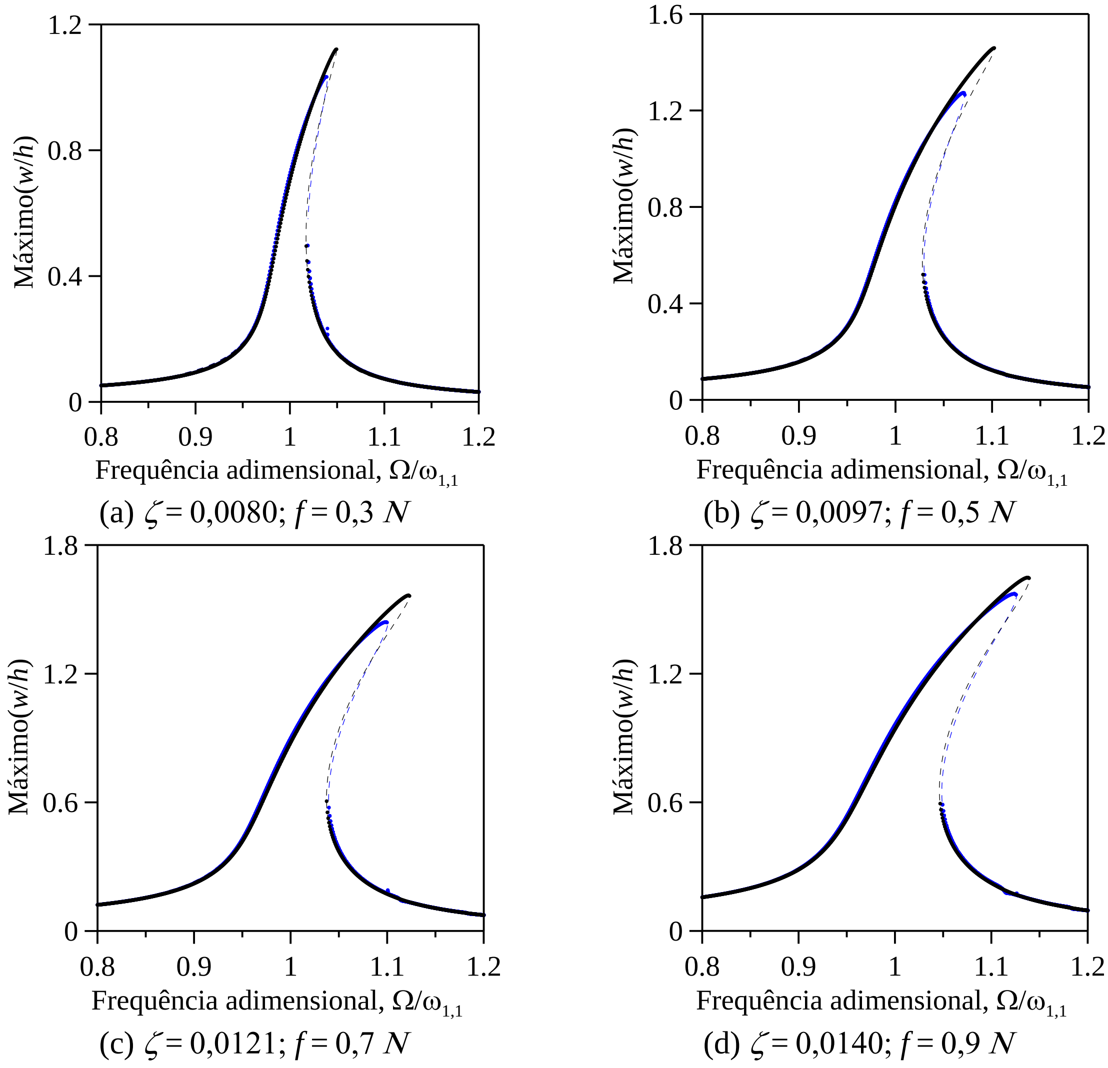
| $\omega_{1,1}$ $(rad/s)$ | $\omega_{1,3}$ $(rad/s)$ | $\omega_{3,1}$ $(rad/s)$ | $\omega_{3,3}$ $(rad/s)$ |
|---|---|---|---|
| 441,6 | 1475,59 | 1567,47 | 2493,37 |

É importante ressaltar que foram utilizados os valores de frequência respectivos a cada modo de vibração nas relações de (2.87) e de (2.89), de maneira que o fator de amortecimento passe a ser uma função do modo de vibração da placa.

A partir disso, obtiveram-se as curvas de ressonância da placa quando submetida à carga transversal com amplitudes $0{,}3\ N$, $0{,}5\ N$, $0{,}7\ N$ e $0{,}9\ N$, considerando-se o modelo de amortecimento não linear e um modelo de amortecimento viscoso equivalente. Essas curvas também foram obtidas utilizando o algoritmo da Força Bruta e da Continuação (Del Prado, 2001), sendo relacionada a frequência adimensional de vibração da placa com seu deslocamento transversal, o qual foi analisado no centro da placa ($x$ = 0,125; $y$ = 0,12) $m$.

Os trechos tracejados nas curvas representam os pontos de equilíbrio instável e os trechos contínuos representam os pontos de equilíbrio estável. As curvas considerando os dois modelos de amortecimento foram sobrepostas para cada amplitude da carga dinâmica e podem ser observadas na Figura 3.12.

Figura 3.12 – Curvas de ressonância da placa de aço obtidas com o modelo de amortecimento viscoso (linha preta) e com o amortecimento não linear (linha azul)




A partir das curvas de ressonância apresentadas na Figura 3.12 percebeu-se que a placa de aço possui, como esperado, um comportamento de endurecimento. Observou-se também que, para altas amplitudes da carga dinâmica, a placa possui dois atratores nos trechos próximos ao ponto de ressonância ($\Omega/\omega_{1,1}$ = 1,0), um atuando em maior amplitude e outro atuando em menor amplitude de vibração.

Comparando os dois modelos de amortecimento em questão, observou-se que o modelo de amortecimento não linear forneceu valores de deslocamentos inferiores aos valores encontrados com o modelo de amortecimento viscoso nos pontos próximos à zona de ressonância ($\Omega/\omega_{1,1}$ = 1,0), porém, no geral, mostrou-se eficiente para caracterizar o comportamento mecânico da placa.

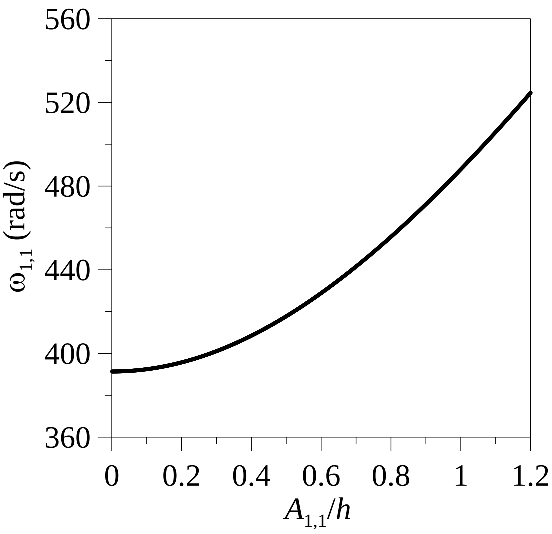
Posteriormente, verificou-se a influência do aumento da amplitude da imperfeição geométrica nas curvas de ressonância da placa, admitindo-se $M_i = N_i = 1$ na relação (2.72). Estudaram-se quatro variações para a amplitude da imperfeição, quais sejam: $A_{1,1} = 0{,}8\,h$, $A_{1,1} = 0{,}9\,h$, $A_{1,1} = 1{,}0\,h$ e $A_{1,1} = 1{,}1\,h$. Todas as características físicas e geométricas da placa foram preservadas neste estudo. Na Tabela 3.8 apresentam-se os novos valores para a frequência de vibração da placa para cada nível de imperfeição estudado.

Tabela 3.8 – Frequências de vibração da placa de aço para diferentes níveis da imperfeição geométrica

| $A_{1,1}$ | $\omega_{1,1}$ (*rad/s*) | $\omega_{1,3}$ (*rad/s*) | $\omega_{3,1}$ (*rad/s*) | $\omega_{3,3}$ (*rad/s*) |
|---|---|---|---|---|
| 0,8 *h* | 455,79 | 1489,85 | 1582,32 | 2503,56 |
| 0,9 *h* | 471,32 | 1505,85 | 1598,98 | 2515,07 |
| 1,0 *h* | 488,05 | 1523,52 | 1617,40 | 2527,90 |
| 1,1 *h* | 505,85 | 1542,80 | 1637,50 | 2542,01 |

Com a Tabela 3.8 percebeu-se que, para aumentos da imperfeição geométrica, a frequência de vibração da placa também aumenta. Isso ocorre devido à presença de termos quadráticos dentro da matriz de rigidez da placa oriundos da formulação considerando a imperfeição geométrica. Essa variação pode ser observada na Figura 3.13, onde a frequência de vibração do modo fundamental da placa ($\omega_{1,1}$) é relacionada com a amplitude da imperfeição.

Figura 3.13 – Variação da frequência natural da placa em relação da amplitude da imperfeição geométrica inicial

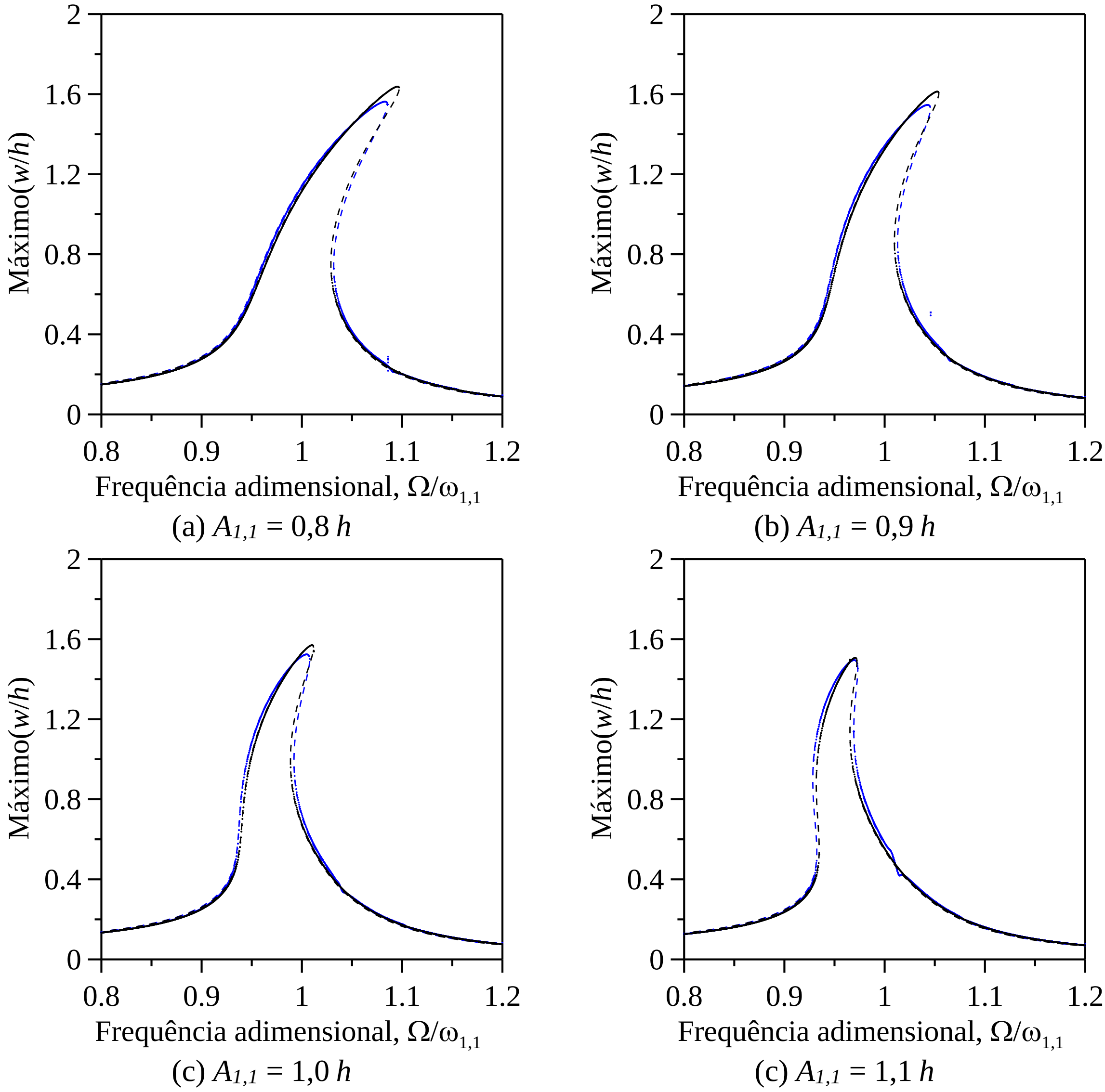



As variações da imperfeição foram aplicadas na curva de ressonância com maior não linearidade, a qual se refere à curva de $f$ = 0,9 $N$ (Figura 3.12(d)). As análises foram realizadas considerando os dois modelos de amortecimento, para os quais mantiveram-se o mesmo valor do coeficiente de amortecimento viscoso ($\zeta$ = 0,0140) e para os coeficientes de amortecimento não linear ($\alpha$ = 0,0023 e $\beta$ = 0,044).

As curvas de ressonância da placa considerando os níveis de imperfeição geométrica em questão para os dois modelos de amortecimento são apresentadas na Figura 3.14. As curvas em preto representam o modelo de amortecimento viscoso e as curvas em azul o modelo de amortecimento não linear.

Através da Figura 3.14 observou-se que na medida em que a amplitude da imperfeição geométrica aumenta, a resposta não linear da placa tende a ficar amolecida, de maneira que, para a amplitude mais alta da imperfeição, a resposta é inicialmente amolecida e se torna endurecida para maiores deslocamentos. Este comportamento foi observado para os dois modelos de amortecimento estudados, no entanto, nas curvas obtidas com o modelo de amortecimento não linear, observaram-se novamente deslocamentos menores em relação aos deslocamentos fornecidos pelo modelo de amortecimento viscoso equivalente nos pontos próximos à zona de ressonância ($\phi$ = 1,0).

Figura 3.14 – Influência da imperfeição geométrica nas curvas de ressonância da placa de aço obtidas com o modelo de amortecimento viscoso (linha preta) e com o amortecimento não linear (linha azul)



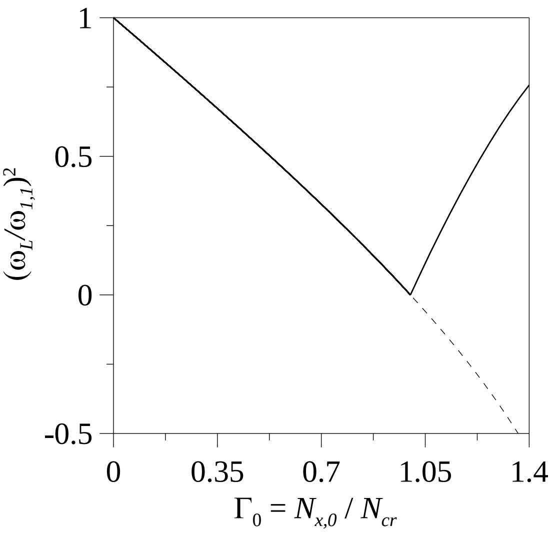

## 3.3.2 INFLUÊNCIA DO CARREGAMENTO AXIAL

Em uma segunda análise estudou-se a placa de aço inoxidável submetida somente a um carregamento axial de compressão distribuído nas bordas $x = 0$, $a$ e aplicado na direção $x$ da placa, conforme ilustrado na Figura 2.23. Inicialmente considerou-se apenas a parcela estática do carregamento, a fim de construir o caminho pós-crítico da placa. Posteriormente, para o estudo dos diagramas de bifurcação, o carregamento axial foi admitido como dinâmico sem a consideração da parcela estática.

As características físicas e geométricas da placa foram mantidas: $h = 0{,}0005\ m$, $a = 0{,}25\ m$, $b = 0{,}24\ m$, $E = 193\ GPa$, $\rho = 8000\ kg/m^3$ e $\nu = 0{,}29$, bem como a expansão modal para os deslocamentos, as coordenadas generalizadas e o número de graus de liberdade (ver Tabela 3.6). No entanto, nesta análise o material da placa foi caracterizado pelo modelo de amortecimento viscoelástico utilizando o modelo mecânico de Kelvin-Voigt com $\eta = 5\ 10^{-6}\ s$. Não foram consideradas imperfeições geométricas e também se admitiu molas rotacionais lineares distribuídas em todas as bordas da placa, com $k_r = 100\ N/rad$ para caracterizar a rigidez equivalente das molas.

Assim, encontrou-se o valor de $\omega_{1,1} = 391{,}41\ rad/s$ para a frequência natural da placa. A carga crítica de flambagem foi encontrada através de um problema de autovalor, para a qual encontrou-se $N_{cr} = 3297{,}29\ N/m$. A partir disso, a carga axial estática adimensionalizada com a carga crítica ($\Gamma_0 = N_{x,0}/N_{cr}$) foi relacionada com a frequência carregada do modo fundamental adimensionalizada com a frequência natural da placa ($\omega_L/\omega_{1,1}$). Essa relação é apresentada na Figura 3.15.

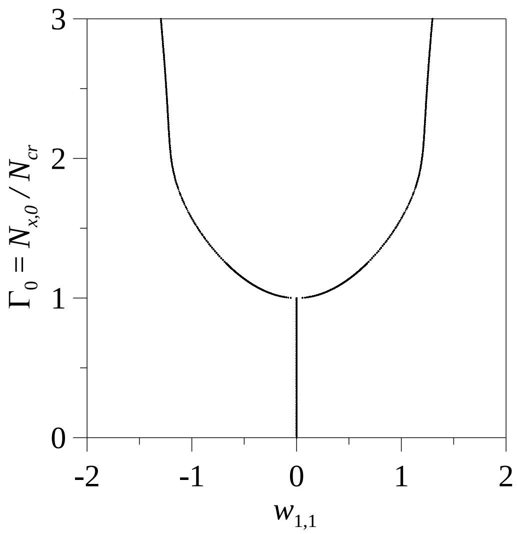
Figura 3.15 – Variação da frequência natural da placa em relação ao carregamento estático de compressão axial




A partir da Figura 3.15, percebeu-se que para valores do carregamento superiores à carga crítica a placa passa a possuir duas soluções, uma delas referente à solução instável (trecho pontilhado) onde a curva tende a valores negativos de frequência e outra referente à solução estável na qual observa-se valores crescentes de frequência.

Após isso, obteve-se o caminho pós-crítico da placa no qual relacionam-se a carga estática de compressão axial adimensionalizada com a amplitude de vibração do modo fundamental da placa, sendo apresentado na Figura 3.16. Para a construção dessa relação, utilizou-se o algoritmo da Força Bruta a partir de Del Prado (2001).

Figura 3.16 – Caminho pós-crítico da placa de aço

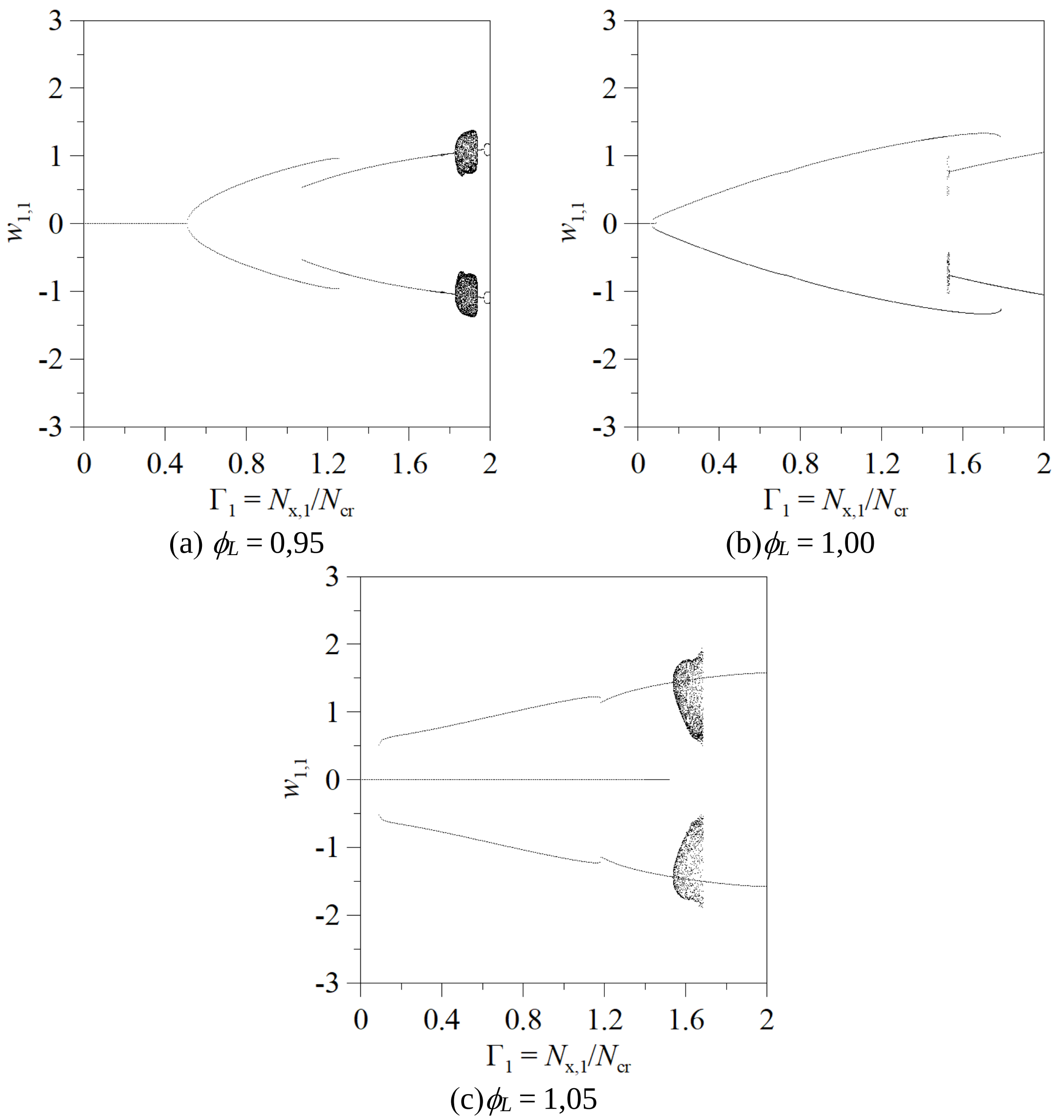



A partir da Figura 3.16 percebeu-se que, para valores de $N_{x,0}$ inferiores à carga crítica de flambagem ($\Gamma_0$ = 1), não são verificados deslocamentos transversais, sendo identificado neste trecho o caminho fundamental de equilíbrio da placa. Por outro lado, para valores de $N_{x,0}$ superiores à carga crítica, ocorre a perda de estabilidade com ganho de rigidez e a placa passa a responder com deslocamentos transversais, onde pode-se observar o caminho pós-crítico da placa o qual é caracterizado por uma bifurcação simétrica estável.

Na sequência estudaram-se os diagramas de bifurcação da placa. Para isso admitiu-se o carregamento de compressão axial como harmônico sem a presença de carregamentos estáticos. Os diagramas foram obtidos pelo algoritmo da Força Bruta (DEL PRADO, 2001), sendo a periodicidade da resposta fornecida pelos diagramas analisada pelos planos fase e pelos mapeamentos de Poincaré, os quais foram obtidos pelo método de Runge-Kutta de quarta ordem.

Além disso, também se estudaram os atratores destas respostas, os quais foram analisados projetando o modo fundamental na bacia de atração do sistema, sendo obtida através do algoritmo de Del Prado (2001). Os diagramas de bifurcação foram estudados em duas regiões de ressonância, a primeira junto a 1 $\omega_{1,1}$ e a segunda junto a 2 $\omega_{1,1}$. Na Figura 3.15 apresentam-se os diagramas referentes à primeira região.

Figura 3.17 – Diagramas de bifurcação para valores de frequência em torno de 1 $\omega_{1,1}$

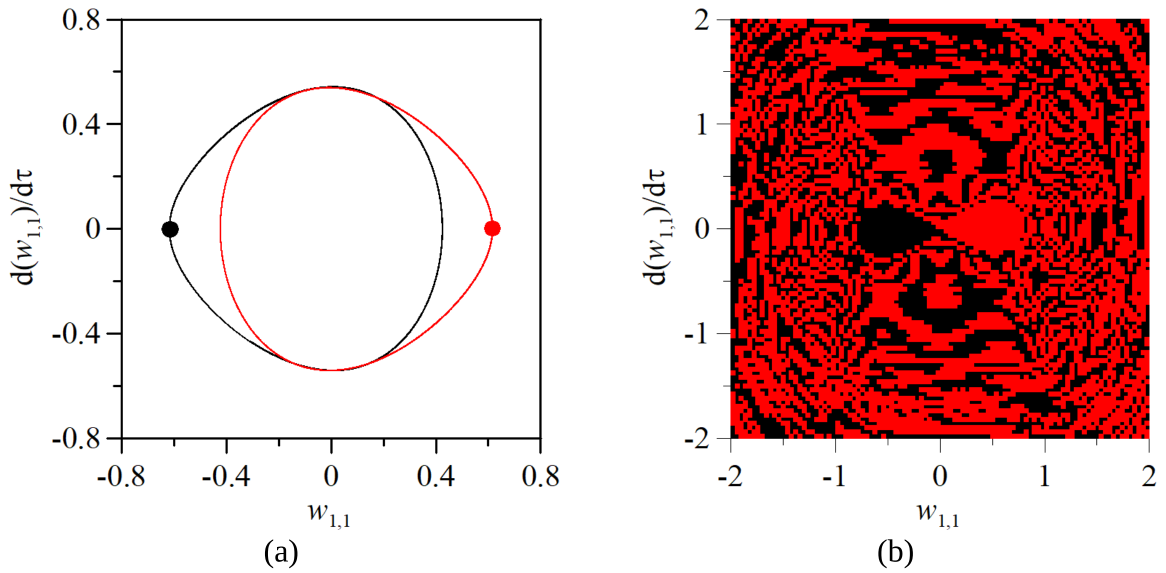



(a) $\phi_L = 0{,}95$ (b) $\phi_L = 1{,}00$ (c) $\phi_L = 1{,}05$

Na Figura 3.17(a), para valores pequenos da amplitude do carregamento, a placa apresenta soluções triviais e à medida que a carga é incrementada a placa chega a um valor crítico, onde há um ponto de bifurcação supercrítico passando a ter duas soluções periódicas de período 1T. Quando o valor da carga é aumentado, as soluções 1T aumentam de amplitude com um salto dinâmico em torno de $\Gamma_1$ = 1,18. Já para valores próximos de $\Gamma_1$ = 1,90, a placa apresenta uma janela de soluções quase periódicas.

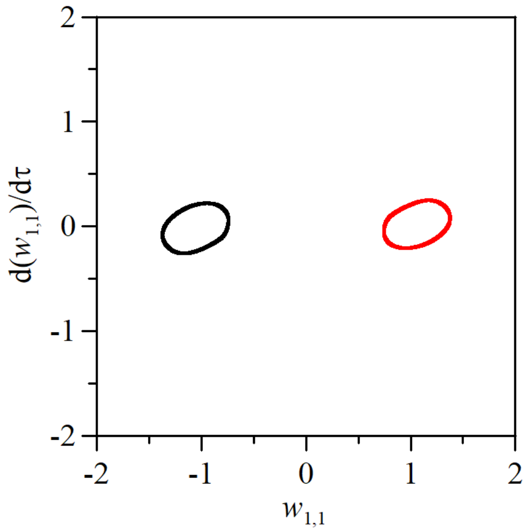
Em $\Gamma_1$ = 0,80 no diagrama da Figura 3.17(a), observou-se duas respostas periódicas com periodicidade 1T, como pode ser observado no plano fase sobreposto no mapeamento de Poincaré da Figura 3.18(a). Cada órbita foi obtida utilizando condições iniciais diferentes, o que constata a presença de dois atratores na resposta da placa, um atuando em uma amplitude negativa (em preto) e outro atuando em uma amplitude positiva (em vermelho) como pode ser observado na bacia de atração apresentada na Figura 3.18(b).

Figura 3.18 – (a) Plano fase sobreposto no mapeamento de Poincaré e (b) bacia de atração em $\phi_L$ = 0,95 com $\Gamma_1$ = 0,80



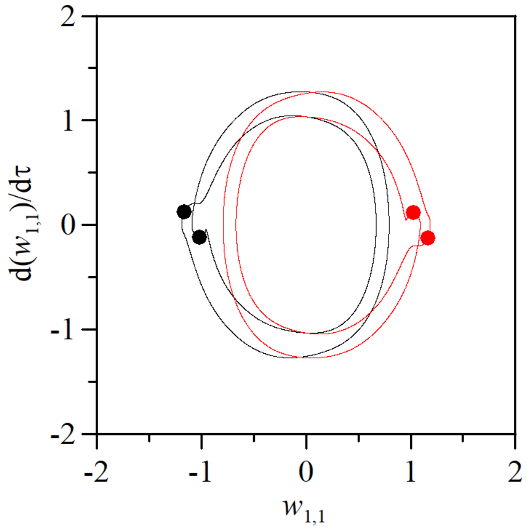

Para $\Gamma_1 = 1{,}90$ no diagrama da Figura 3.17(a), verificou-se uma janela de soluções quase periódicas caracterizada por uma nuvem de pontos no mapeamento de Poincaré, como pode ser visto na Figura 3.19.

Figura 3.19 – Mapeamento de Poincaré em $\phi_L$ = 0,95 com $\Gamma_1$ = 1,90



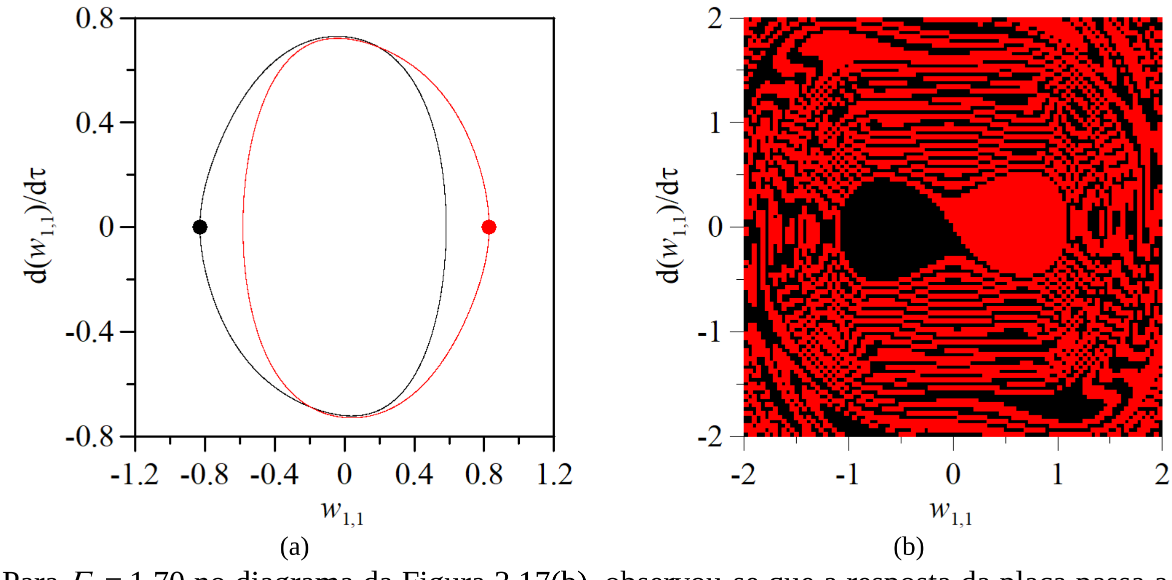

Quando se analisou o valor $\Gamma_1 = 2{,}0$ no diagrama da Figura 3.17(a), verificou-se uma duplicação de período, em que cada órbita do plano fase passa se a ter dois pontos fixos na seção de Poincaré, obtendo, portando, uma resposta de período quatro para a placa neste nível de carregamento, como pode ser visto na Figura 3.20.

Figura 3.20 – Plano fase sobreposto no mapeamento de Poincaré em $\phi_L$ = 0,95 com $\Gamma_1$ = 2,00



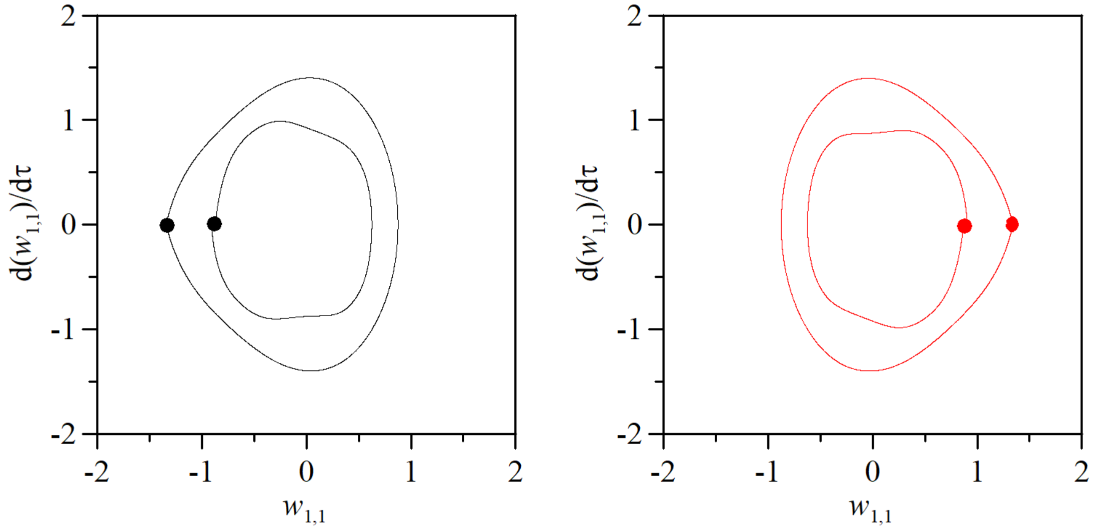

No diagrama da Figura 3.17(b), para amplitudes pequenas da carga axial, observou-se soluções triviais, sendo que para maiores amplitudes da carga a placa chega a um valor crítico e encontra-se um ponto de bifurcação subcrítico. Em $\Gamma_1 = 0{,}80$ notou-se duas respostas periódicas de periodicidade 1T (ver Figura 3.21(a)) as quais foram obtidas utilizando condições iniciais diferentes. Percebeu-se também que a solução apresenta dois atratores, um para a amplitude negativa e outra para a amplitude positiva, como é apresentado na bacia de atração da Figura 3.21(b).

Figura 3.21 – (a) Plano fase sobreposto no mapeamento de Poincaré e (b) bacia de atração em $\phi_L$ = 1,00 com $\Gamma_1$ = 0,80




Para $\Gamma_1$ = 1,70 no diagrama da Figura 3.17(b), observou-se que a resposta da placa passa a ter quatro soluções de periodicidade 1T, onde verificaram-se quatro órbitas no plano fase, duas para a amplitude negativa e duas para a amplitude positiva como pode ser visto na Figura 3.22.

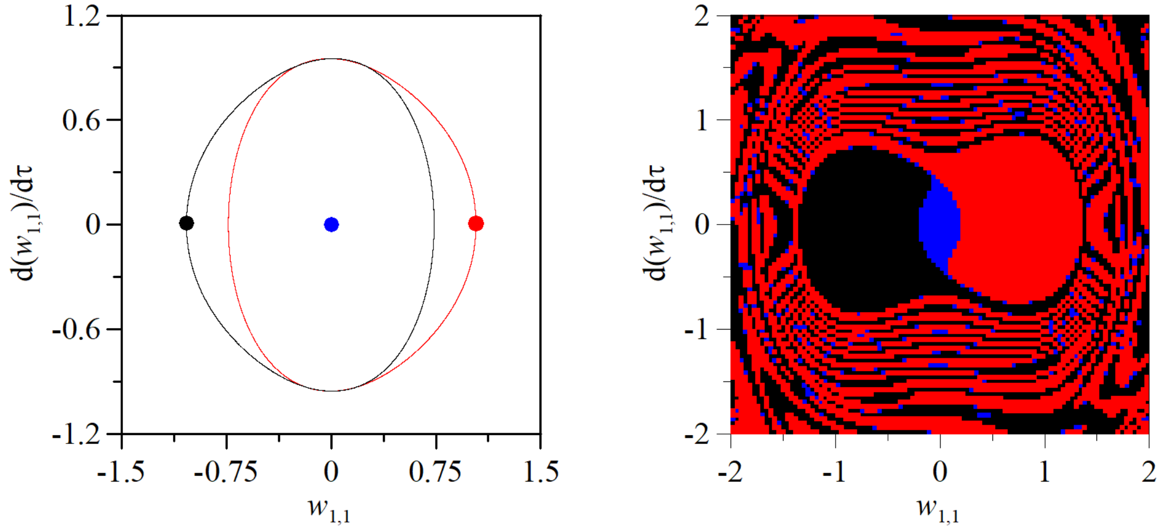
Figura 3.22 – Plano fase sobreposto no mapeamento de Poincaré em $\phi_L$ = 1,00 com $\Gamma_1$ = 1,70




(a) Amplitude negativa (b) Amplitude positiva

No diagrama da Figura 3.17(c) em $\Gamma_1 = 0{,}80$ notou-se a solução trivial da placa atuando juntamente com duas soluções de período 1T, onde verificou-se no plano fase duas órbitas fechadas com um ponto fixo na seção de Poincaré em cada uma (ver Figura 3.23(a)). Analisando-se a bacia de atração da placa neste valor de carregamento, notou-se a presença de três atratores (ver Figura 3.23(b)), o primeiro referente à solução em amplitude negativa (em preto), o segundo referente à solução em amplitude positiva (em vermelho) e o terceiro refere-se à solução trivial do sistema (em azul).

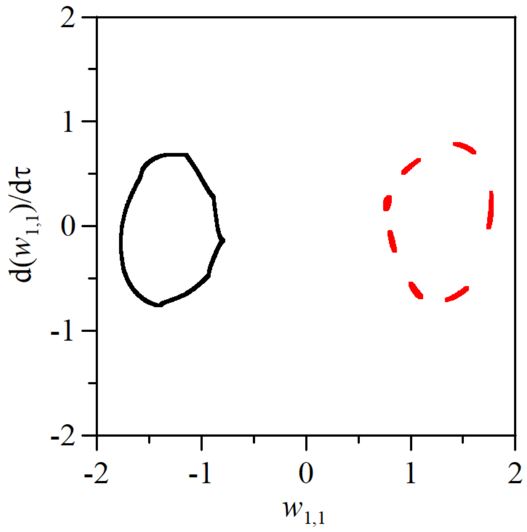
Figura 3.23 – (a) Plano fase sobreposto no mapeamento de Poincaré e (b) bacia de atração em $\phi_L$ = 1,05 com $\Gamma_1$ = 0,80




(a) (b)

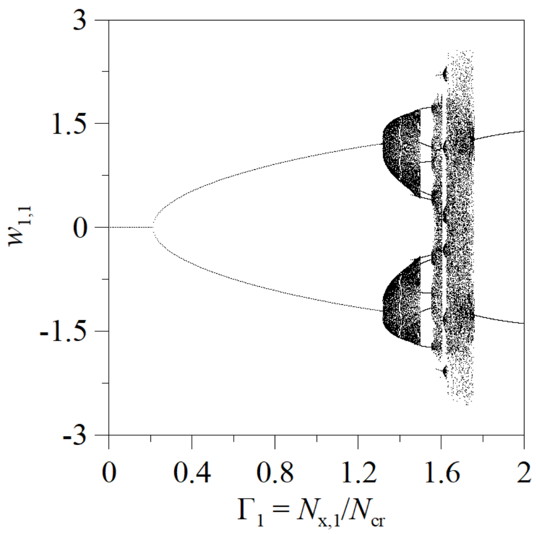
Analisando-se a resposta em $\Gamma_1 = 1{,}60$ para o diagrama da Figura 3.17(c), notou-se uma solução quase periódica para cada amplitude de vibração (negativa e positiva), como pode ser visto no mapeamento de Poincaré apresentado na Figura 3.24.

Figura 3.24 – Mapeamento de Poincaré em $\phi_L$ = 1,05 com $\Gamma_1$ = 1,60

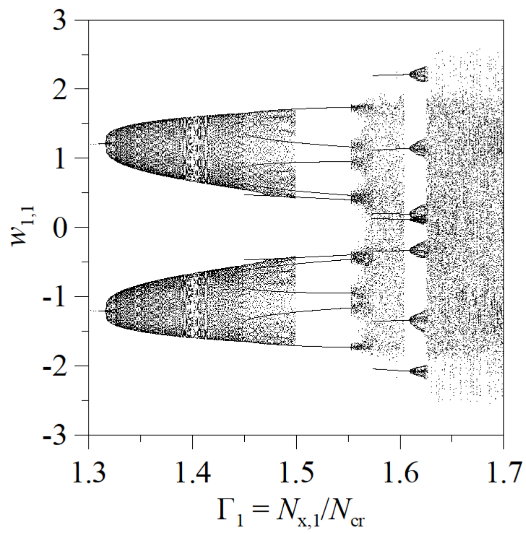



Os diagramas de bifurcação referentes à região de ressonância principal, ou seja, considerando $\phi_L$ junto a 2 $\omega_{1,1}$, são apresentados na Figura 3.25. Apresentam-se os diagramas à esquerda (Figura 3.25(a), Figura 3.25(c) e Figura 3.25(e)) e a ampliação de seus trechos mais interessantes à direita (Figura 3.25(b), Figura 3.25(d) e Figura 3.25(f)).

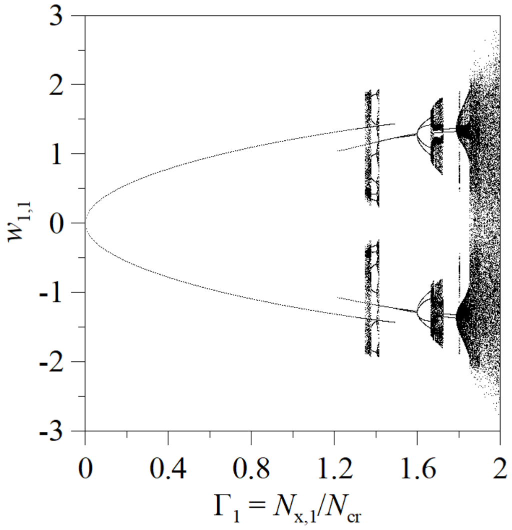
Figura 3.25 – Diagramas de bifurcação para valores de frequência junto a 2 $\omega_{1,1}$



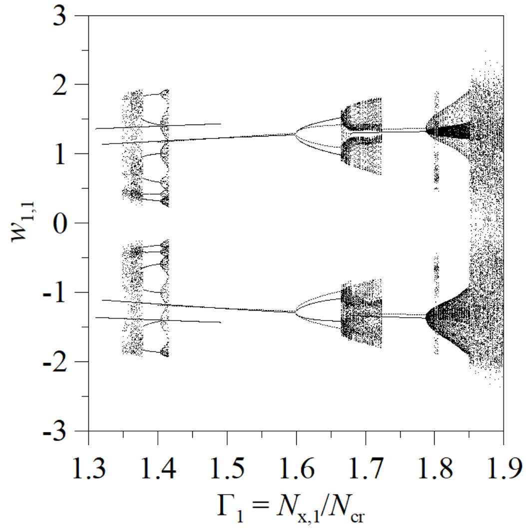

(a) $\phi_L$ = 1,90



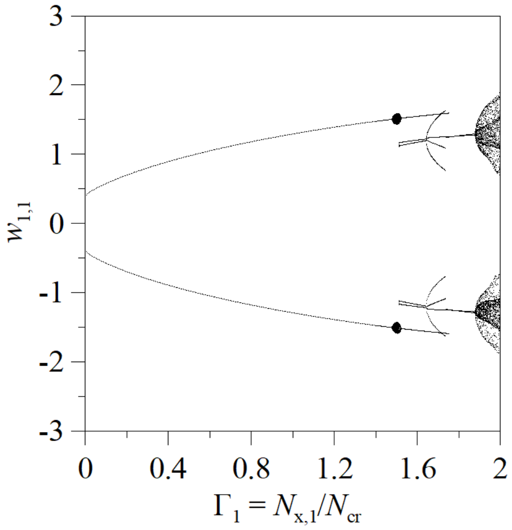

(b) $\phi_L$ = 1,90



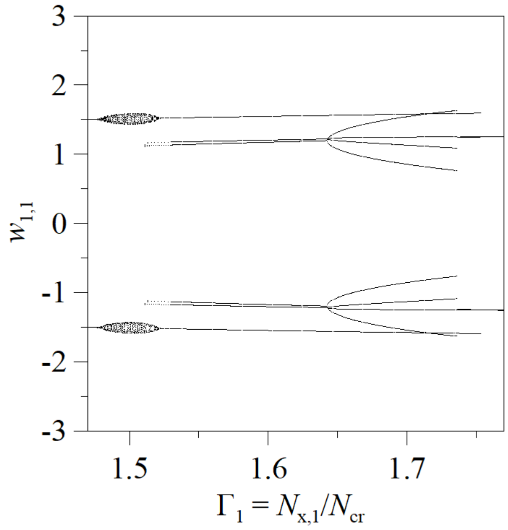

(c) $\phi_L$ = 2,00




(d) $\phi_L$ = 2,00



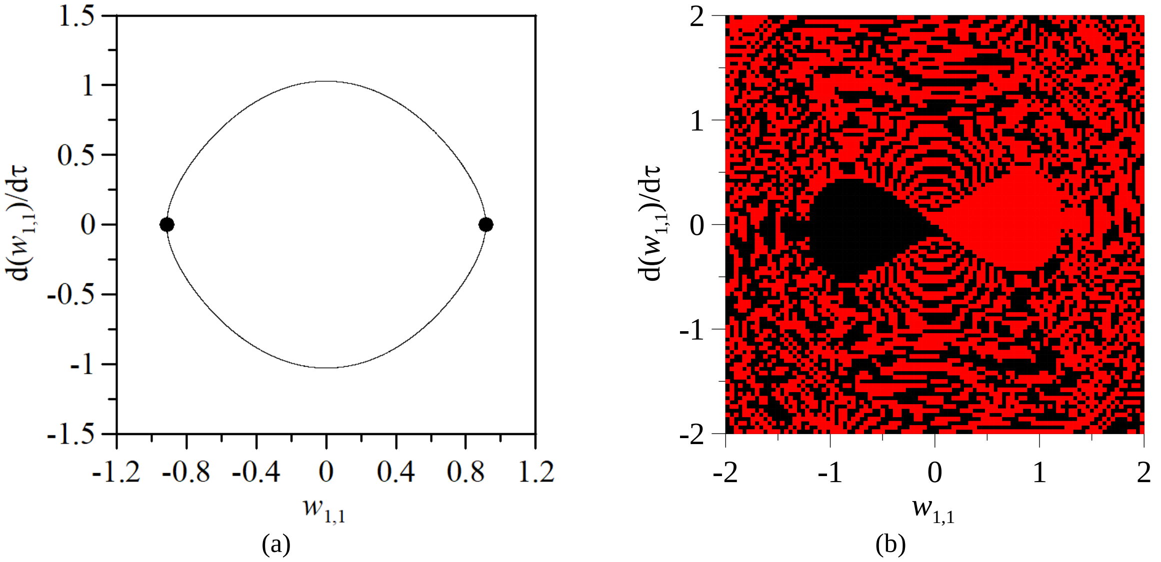

(e) $\phi_L$ = 2,05




(f) $\phi_L$ = 2,05

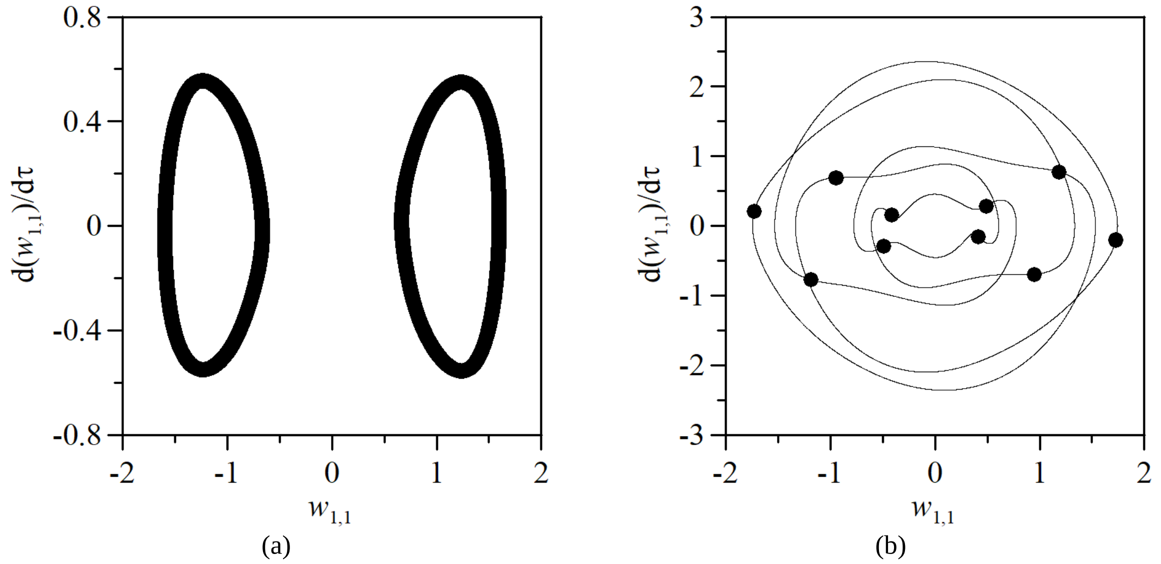
Na Figura 3.25(a), notou-se que em $\Gamma_1$ = 0,80 a placa possui resposta periódica de período 2T representada por uma órbita fechada no plano fase (ver Figura 3.26(a)). Também se observou duas regiões na bacia de atração da placa as quais se referem à projeção das seções de Poincaré como pode ser visto na Figura 3.26(b).

Figura 3.26 – (a) Plano fase sobreposto no mapeamento de Poincaré e (b) bacia de atração em $\phi_L$ = 1,90 com $\Gamma_1$ = 0,80



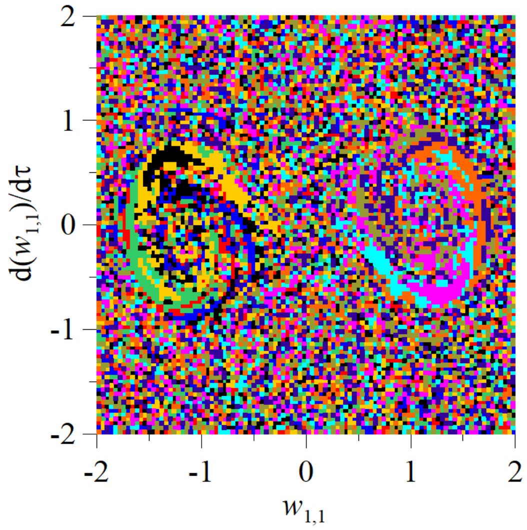

Em $\Gamma_1$ = 1,40 no diagrama da Figura 3.25(b), observou-se que a resposta da placa possui uma janela de soluções quase periódicas (ver Figura 3.27(a)) e em $\Gamma_1$ = 1,53 passa a ter periodicidade 10T, onde verificou-se uma órbita fechada no plano fase com dez pontos no mapeamento de Poincaré (ver Figura 3.27(b)).

Figura 3.27 – (a) Mapeamento de Poincaré com $\Gamma_1$ = 1,40 e (b) Plano fase sobreposto no mapeamento de Poincaré com $\Gamma_1$ = 1,53 em $\phi_L$ = 1,90



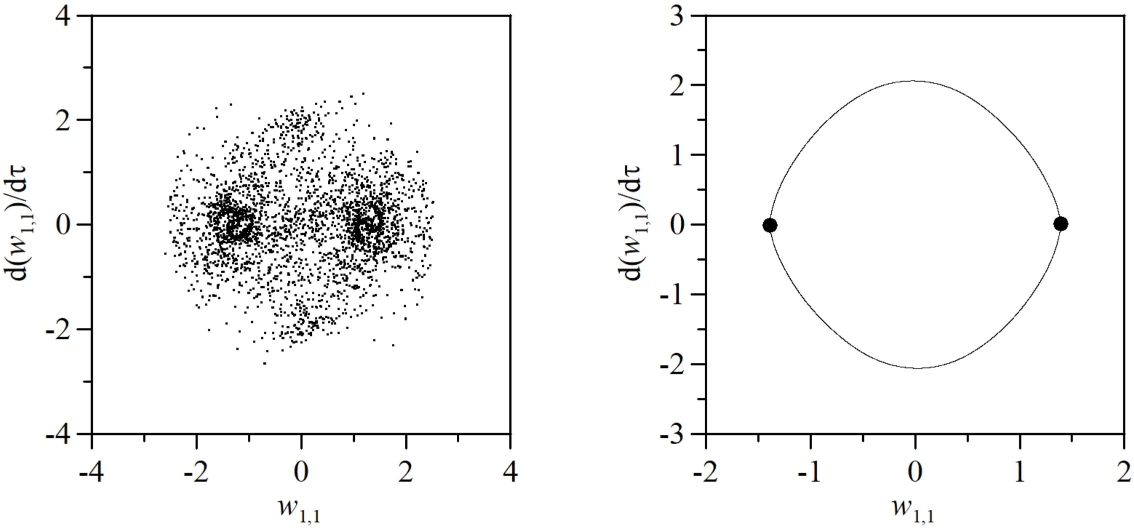

Ao analisar a bacia de atração para $\Gamma_1$ = 1,53 no diagrama da Figura 3.25(b), verificou-se dez regiões referentes à projeção das seções de Poincaré, como pode ser visto na Figura 3.28.

Figura 3.28 – Bacia de atração em $\phi_L$ = 1,90 com $\Gamma_1$ = 1,53




Ainda analisando o diagrama da Figura 3.25(b), observou-se que nos trechos próximos a $\Gamma_1$ = 1,60 tem-se uma zona com resposta periódica atuando juntamente com soluções quase periódicas, sendo que em $\Gamma_1$ = 1,64 a placa passa a ter uma resposta caótica (ver Figura 3.29(a)). Para $\Gamma_1$ = 2,00, a solução se torna periódica com periodicidade 2T, como pode ser visto na Figura 3.27(b).

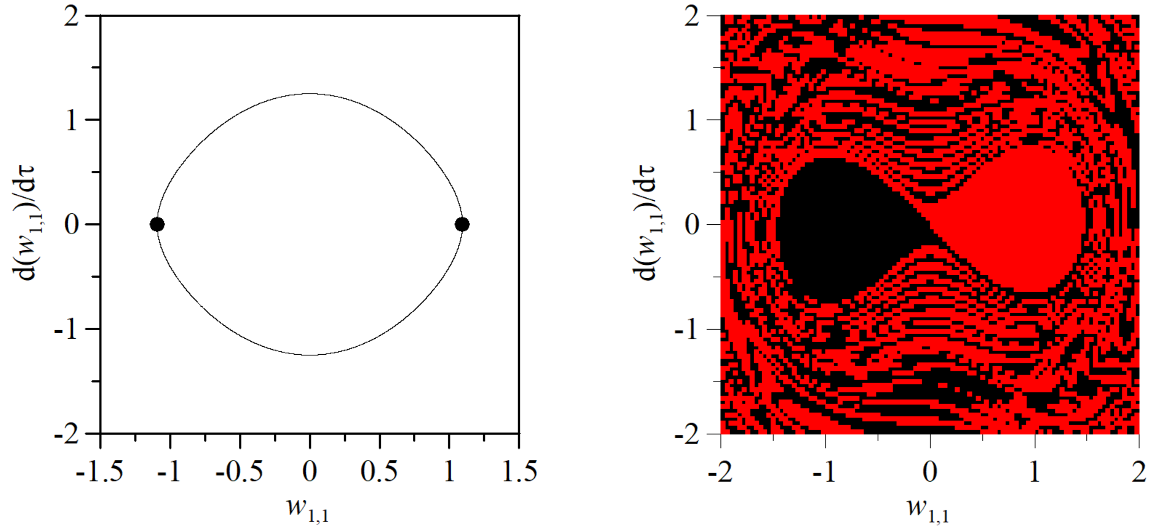
Figura 3.29 – (a) Mapeamento de Poincaré com $\Gamma_1$ = 1,70 e (b) Plano fase sobreposto no mapeamento de Poincaré com $\Gamma_1$ = 2,00, em $\phi_L$ = 1,90




(a) (b)

Quando se analisa $\Gamma_1$ = 0,80 no diagrama da Figura 3.25(c), verificou-se que a placa possui uma solução periódica com periodicidade 2T (ver Figura 3.30(a)) e que a bacia de atração para este valor de carregamento apresenta duas regiões referentes às seções de Poincaré como é mostrado na Figura 3.30(b).

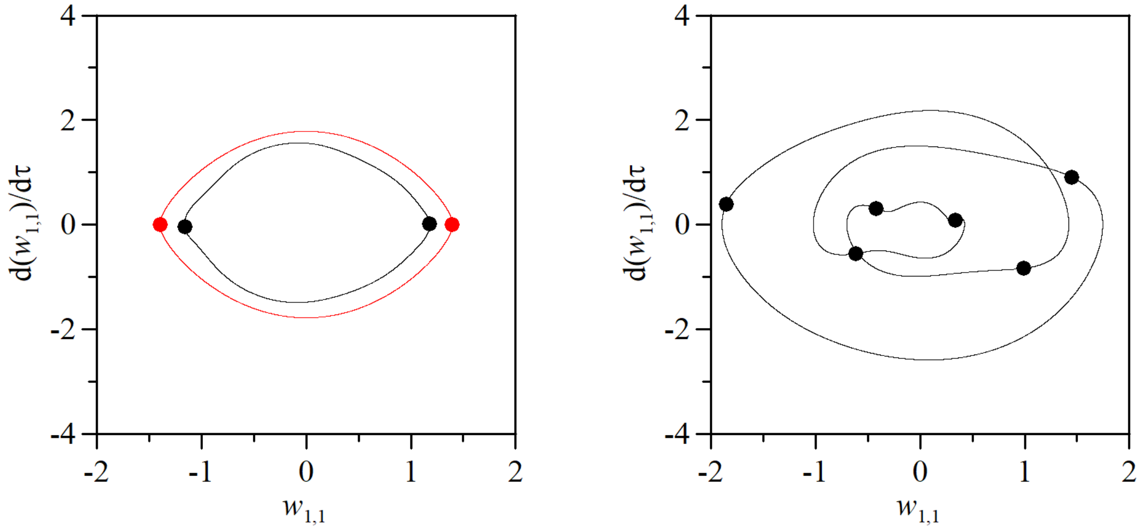
Figura 3.30 – (a) Plano fase sobreposto no mapeamento de Poincaré e (b) bacia de atração em $\phi_L$ = 2,00 com $\Gamma_1$ = 0,80



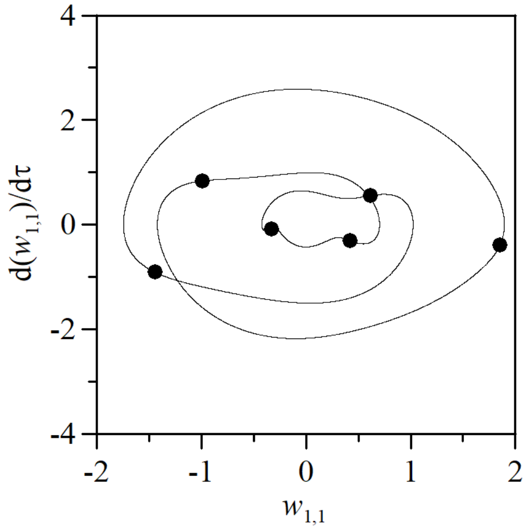

(a) (b)

Analisando-se $\Gamma_1$ = 1,39 no diagrama da Figura 3.25(d), notou-se quatro soluções periódicas para a placa. Nas duas primeiras verificou-se duas soluções periódicas de periodicidade 1T as quais são apresentadas na Figura 3.31(a). Para as outras duas verificou-se seis pontos fixos na seção de Poincaré com uma órbita fechada para cada solução, conforme apresentado na Figuras3.31(b) e na Figura 3.31(c). Ainda é válido ressaltar que cada solução foi encontrada utilizando condições iniciais diferentes.

Figura 3.31 – Plano fase sobreposto no mapeamento de Poincaré em $\phi_L$ = 2,00 com $\Gamma_1$ = 1,39



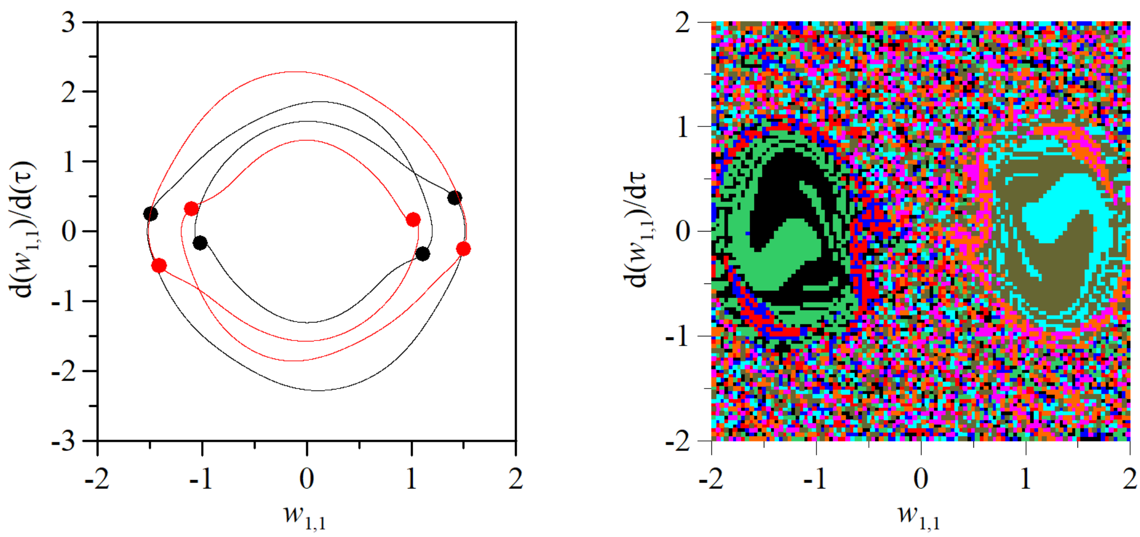

(a) $\Gamma_1$ = 1,39 (b) $\Gamma_1$ = 1,39




(c) $\Gamma_1 = 1{,}39$

Quando se analisou a resposta da placa para $\Gamma_1 = 1{,}65$, foram observadas duas soluções periódicas com periodicidade 4T, como pode ser visto na Figura 3.32(a). Também se analisou a bacia de atração da placa para esse valor de carregamento, onde verificou-se uma bacia com oito regiões as quais referenciam as seções de Poincaré, como mostrado na Figura 3.32(b).

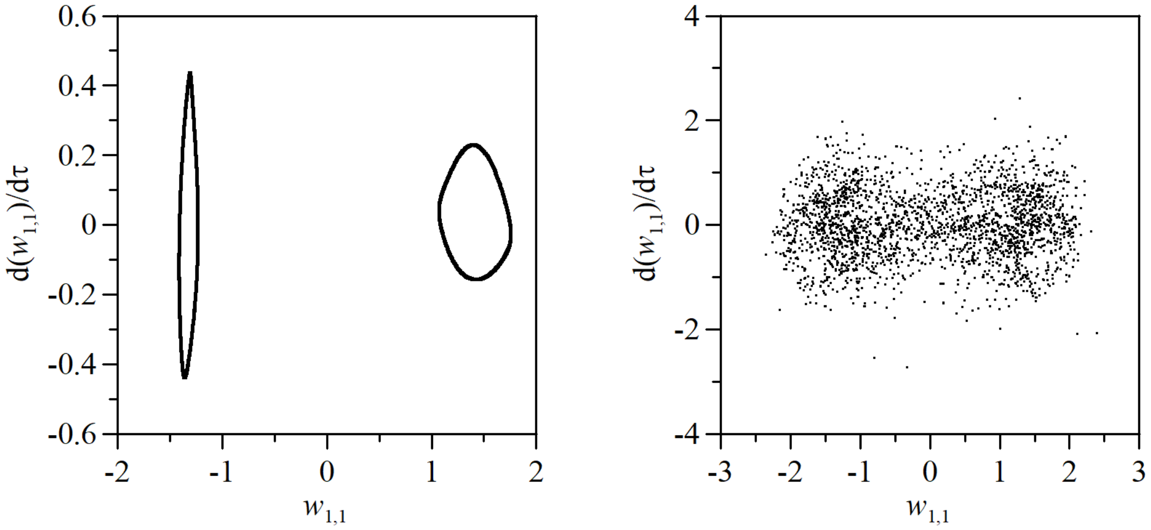
Figura 3.32 – Bacia de atração em $\phi_L = 2{,}00$ com $\Gamma_1 = 1{,}65$




(a) $\Gamma_1 = 1{,}65$ (b) $\Gamma_1 = 1{,}65$

Para $\Gamma_1 = 1{,}83$ no diagrama da Figura 3.25(d), observou-se que solução da placa passa a ser quase periódica e se torna caótica em $\Gamma_1 = 1{,}95$, como é descrito respectivamente na Figura 3.33(a) e na Figura 3.33(b).

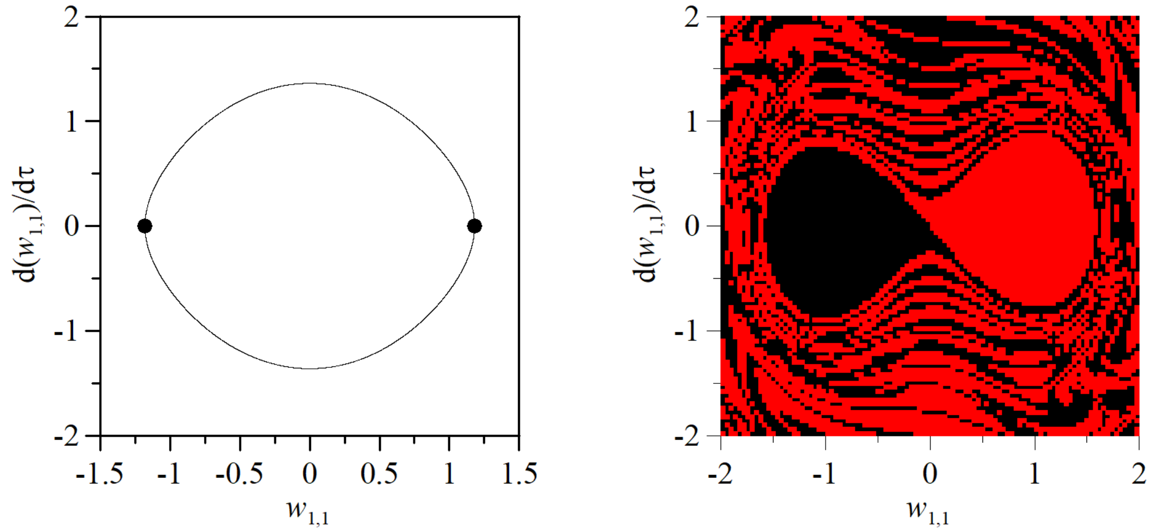
Figura 3.33 – Mapeamento de Poincaré em $\phi_L$ = 2,00




(a) $\Gamma_1$ = 1,83 (b) $\Gamma_1$ = 1,95

Ao analisar o diagrama de bifurcação da Figura 3.25(e), observou-se que em $\Gamma_1$ = 0,80 placa possui uma solução periódica de periodicidade 2T, conforme ilustrado na Figura 3.34(a). Na bacia de atração da placa para esta amplitude de carregamento, também se verificou duas regiões referentes às seções de Poincaré (ver Figura 3.34(b)).

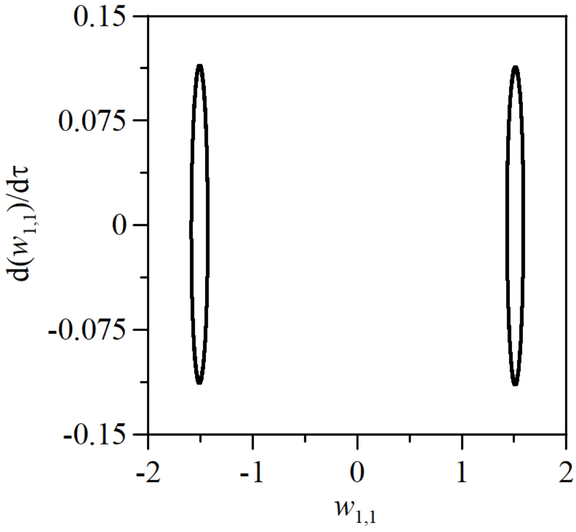
Figura 3.34 – (a) Plano fase sobreposto no mapeamento de Poincaré e (b) bacia de atração em $\phi_L$ = 2,05 com $\Gamma_1$ = 0,80




(a) $\Gamma_1$ = 0,80 (b) $\Gamma_1$ = 0,80

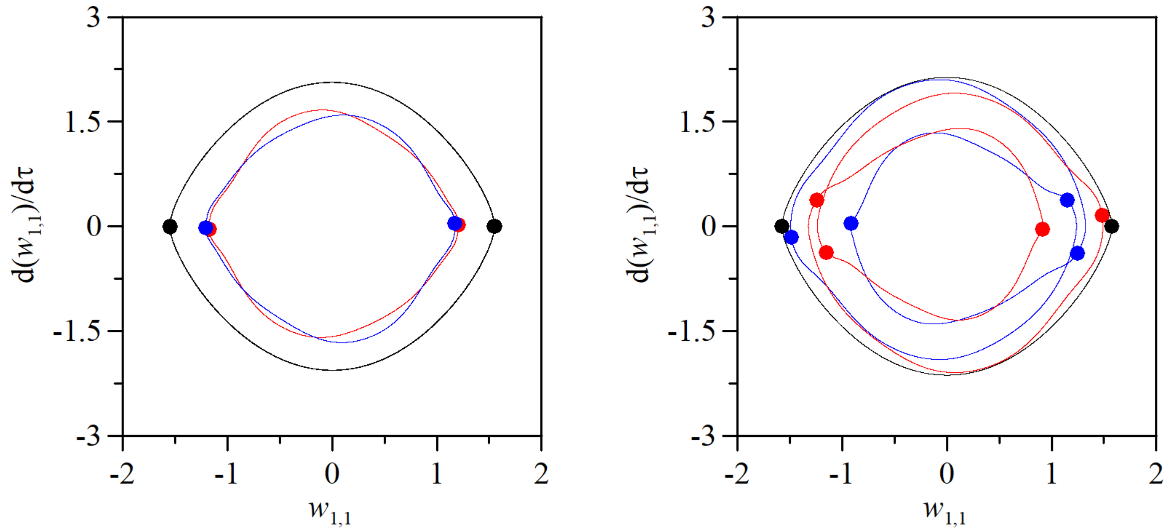
Analisando-se $\Gamma_1$ = 1,50 no diagrama da Figura 3.25(f), observou-se que a resposta da placa passar a ser caracterizada por janela de soluções quase periódicas, representada por uma nuvem de pontos no mapeamento de Poincaré o qual é apresentado na Figura 3.35.

Figura 3.35 – Mapeamento de Poincaré em $\phi_L$ = 2,05 com $\Gamma_1$ = 1,50




Em $\Gamma_1 = 1{,}60$ no diagrama da Figura 3.25(f), verificou-se que a placa possui três soluções periódicas de periodicidade 2T, sendo verificada uma órbita fechada com dois pontos fixos na seção de Poincaré para cada solução (ver Figura 3.36(a)). Em $\Gamma_1 = 1{,}68$, também se observou três soluções periódicas para a resposta dinâmica da placa (ver Figura 3.36(b)), no entanto, duas delas passam a possuir periodicidade 4T e uma se mantém com periodicidade 2T, isto é, acontece uma duplicação de período somente para as duas soluções de baixa amplitude (em vermelho e em azul) em relação a resposta obtida com $\Gamma_1 = 1{,}60$.

Figura 3.36 – Plano fase sobreposto no mapeamento de Poincaré em $\phi_L$ = 2,05

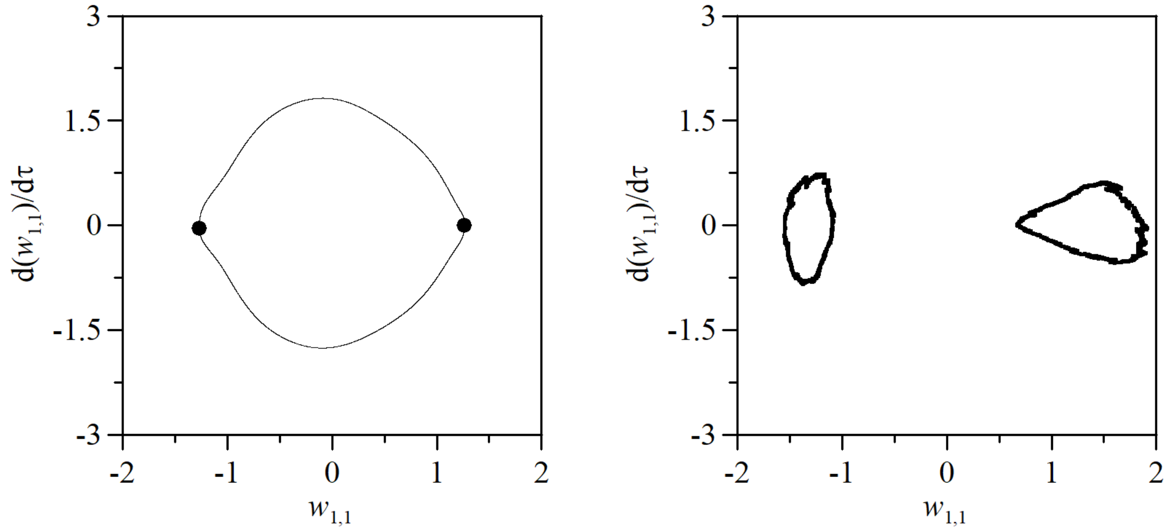



(a) $\Gamma_1$ = 1,60 (b) $\Gamma_1$ = 1,65

Ainda analisando-se o diagrama de bifurcação da Figura 3.25(f), percebeu-se que em $\Gamma_1 = 1{,}68$ a placa responde com uma solução periódica de período 2T (ver Figura 3.37(a)).

Considerando-se $\Gamma_1 = 2{,}00$, notou-se que a solução da placa passa a ser quase periódica, conforme ilustrado na Figura 3.37(b).

Figura 3.37 – (a) Plano fase sobreposto no mapeamento de Poincaré com $\Gamma_1$ = 1,80 e (b) Mapeamento de Poincaré com $\Gamma_1$ = 2,00 em $\phi_L$ = 2,05




(a) $\Gamma_1$ = 1,80 em $\phi_L$ = 2,05 (b) $\Gamma_1$ = 2,00 em $\phi_L$ = 2,05

# CAPÍTULO 4
# CONCLUSÕES

Com o objetivo de melhor compreender o efeito do amortecimento viscoelástico nas vibrações não lineares de sistemas estruturais, neste trabalho realizou-se uma análise da instabilidade de placas viscoelásticas, finas, retangulares e isotrópicas, submetidas a carregamentos harmônicos transversais e axiais não simultâneos. Para descrever as relações de deformação das placas, foram utilizadas as relações não lineares de Von-Kármán. Por meio do princípio de Hamilton, e da aplicação do método de Rayleigh-Ritz, obteve-se o sistema de equações diferenciais não lineares de equilíbrio dinâmico da placa o qual foi resolvido através do método de Runge-Kutta de quarta ordem.

Inicialmente estudou-se uma placa de silicone analisada anteriormente por Balasubramanian *et al.* (2017). Considerou-se nessa placa molas rotacionais lineares uniformemente distribuídas ao longo de todas as bordas para representar engastamento. Admitiu-se também um pré-tracionamento no plano, através de cargas axiais estáticas de tração. A caracterização do amortecimento dessa placa foi realizada pelo modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt, sendo escolhido pela sua maior facilidade de implementação computacional em relação aos outros modelos encontrados na bibliografia.

Primeiramente investigou-se a influência do coeficiente de viscoelasticidade ($\eta$) na sua resposta dinâmica não linear da placa quando submetida a um carregamento pontual, transversal e harmônico. Para isso, foram obtidas as relações frequência-amplitude e as curvas de ressonância da placa viscoelástica. As relações frequência-amplitude mostraram em todos os casos estudados que a placa possui um comportamento com ganho de rigidez e que aumentos no parâmetro de viscoelasticidade ocasionam diminuições da amplitude média de vibração. As curvas de ressonância, além de confirmarem o comportamento *hardening* encontrado nas relações frequência-amplitude, evidenciaram também que, para maiores amplitudes da carga dinâmica, a curva apresenta uma maior não linearidade e maiores amplitudes de vibração.

Através de uma análise paramétrica, verificou-se também a influência da geometria da placa e do pré-tracionamento axial nas curvas de ressonância e nas relações frequência-amplitude. Percebeu-se que, na medida em que se aumenta as dimensões longitudinais da placa ($a$ e $b$), a frequência natural diminui e as amplitudes de vibração aumentam. Por outro lado, aumentos do carregamento axial estático ocasionaram aumentos da frequência natural e diminuições das amplitudes de vibração.

Notou-se ainda em todas as variações paramétricas que a placa mantém o mesmo padrão de comportamento verificado anteriormente no qual observou-se ganho de rigidez (*hardening*) e a existência de uma zona instável próxima ao ponto de ressonância ($\Omega/\omega_{1,1} = 1$). Percebeu-se também que, quando a frequência da excitação é maior que a frequência natural ($\Omega/\omega_{1,1} > 1$), nas curvas com maior não linearidade a placa pode possuir dois atratores, um atuando em maior amplitude e outro em menor amplitude, o que torna o sistema sensível às condições iniciais.

Em seguida, por meio dos planos fase e dos mapeamentos de Poincaré, verificou-se também a periodicidade da resposta dinâmica da placa nas condições em questão, sendo observadas soluções periódicas com periodicidade 1T para todos os casos estudados.

Posteriormente investigaram-se as vibrações não lineares em uma placa retangular de aço inoxidável, estudada anteriormente no trabalho de Amabili (2018a). Nessa placa foram consideradas molas rotacionais lineares uniformemente distribuídas ao longo de todas as bordas e o efeito de imperfeições geométricas iniciais, as quais foram admitidas com a condição de tensão inicial nula. Inicialmente admitiu-se a placa submetida a um carregamento transversal, pontual e harmônico e que o amortecimento do sistema é governado pelo modelo de amortecimento não linear descrito no Capítulo 2, sendo comparado com um modelo de amortecimento viscoso equivalente.

Foram obtidas as curvas de ressonância da placa para valores incrementais do carregamento transversal, as quais foram comparadas com os resultados experimentais de Amabili (2018a). Os resultados mostraram que o modelo de amortecimento não linear consegue representar o comportamento da placa em todas as amplitudes do carregamento analisadas. Para isso, foram utilizados dois valores fixos para os coeficientes de amortecimento não linear ($\alpha$ e $\beta$), um representando o fator de amortecimento do regime de vibração linear e outro para o regime não linear cúbico, sendo considerado também que os coeficientes de amortecimento são relacionados como uma função do modo de vibração da placa.

No entanto, ressalva-se que este modelo de amortecimento não linear é válido somente para sistemas com soluções periódicas e sem ressonâncias internas ativadas. Salienta-se também que o modelo de amortecimento não linear forneceu deslocamentos menores em relação aos deslocamentos fornecidos pelo modelo de amortecimento viscoso equivalente nos pontos próximos à zona de ressonância ($\phi$ = 1,0).

Após isso, verificou-se também a influência de imperfeições geométricas iniciais na resposta dinâmica não linear da placa, também considerando o modelo de amortecimento não linear e um modelo de amortecimento viscoso equivalente. Nessa análise constatou-se que aumentos na amplitude da imperfeição geométrica ocasionaram aumento da frequência natural da placa. Também foi observado que para maiores amplitudes de imperfeição a resposta da placa é inicialmente amolecida (*softening*) e se torna endurecida (*hardening*) para maiores amplitudes de vibração.

Na sequência realizou-se uma análise da placa de aço inoxidável considerando a atuação de uma carga harmônica de compressão axial na direção paralela ao eixo $x$. Nessa análise não foram consideradas imperfeições geométricas iniciais e utilizou-se a formulação viscoelástica, em que o amortecimento da placa foi caracterizado pelo modelo mecânico de Kelvin-Voigt. Com isso, foi obtido o caminho pós-crítico, os diagramas de bifurcação, os planos fase, os mapeamentos de Poincaré e as bacias de atração da placa considerando a região de ressonância junto a 1 $\omega_{1,1}$ e a região de ressonância junto a 2 $\omega_{1,1}$.

De uma forma geral essa análise mostrou que, para baixas amplitudes do carregamento axial, como por exemplo $\Gamma_1$ = 0,8, a resposta da placa é caracterizada por duas soluções periódicas de período 1T na região de ressonância junto a 1 $\omega_{1,1}$. Já na região de ressonância junto a 2 $\omega_{1,1}$, a resposta da placa é caracterizada por uma solução periódica com periodicidade 2T em todos os casos estudados para o mesmo nível de carregamento. Para maiores níveis da carga axial se verificou que a resposta dinâmica não linear da placa se torna mais complexa, onde encontrou-se também soluções de alta ordem, quase periódicas e caóticas.

Por fim, espera-se contribuir para a continuação do estudo do amortecimento viscoelástico nas vibrações não lineares em placas retangulares, propondo as seguintes sugestões para trabalhos futuros:

Estudo da influência do coeficiente de viscoelasticidade ($\eta$) nas curvas de instabilidade paramétrica, nas bacias de atração e nos diagramas de bifurcação da placa, bem como a influência de imperfeições geométricas iniciais.

Análise de placas compostas por camadas de materiais diferentes e a influência da espessura de cada camada nas vibrações não lineares, para isso, deve-se admitir uma teoria não linear que considere o efeito do cisalhamento na rotação da seção transversal, como por exemplo a teoria de Mindlin-Reissner.

Calibrar um modelo numérico, via elementos finitos por exemplo, para caracterizar o modelo viscoelástico e reproduzir os resultados apresentados neste trabalho, para tal, é interessante analisar as formulações do integral hereditário e a formulação fornecida pelas séries de Prony para a caracterização do amortecimento viscoelástico.

Aplicar o modelo de amortecimento não linear para outros materiais em diferentes níveis de não linearidade, confirmando os resultados com análise experimental. Além disso, é interessante estudar diferentes modelos de amortecimento não linear, como pode ser encontrado em Amabili (2018b) e Amabili (2019), e compara-los com os modelos de amortecimentos apresentados nesta dissertação.

# CAPÍTULO 5
# REFERÊNCIAS


AMABILI, M. **Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates.** Cambridge University Press, 2008. 392 p.

AMABILI, M. Nonlinear damping in nonlinear vibrations of rectangular plates: Derivation from viscoelasticity and experimental validation. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**. v 118, p. 275–292, 2018a.

AMABILI, M. Nonlinear damping in large-amplitude vibrations: modelling and experiments. **Nonlinear Dynamics**. v 93, p. 5–19, 2018b.

AMABILI, M. **Nonlinear Mechanics of Shells and Plates in Composite, Soft and Biological Materials.** Cambridge University Press, 2018c. 582 p.

AMABILI, M. Derivation of nonlinear damping from viscoelasticity in case of nonlinear vibrations**. Nonlinear Dynamics**. v 97, p. 1785–1797, 2019.

AMABILI, M., GARZIERA, R. A technique for the systematic choice of admissible functions in the Rayleigh-Ritz method. **Journal Sound Vibrations**. v 224, p. 519–539, 1999.

AMABILI, M., Nonlinear vibrations of viscoelastic rectangular plates, **Journal Sound Vibrations**. v 362, p. 142–156, 2016.

BALASUBRAMANIAN, P., FERRARI, G., AMABILI, M. Identification of the viscoelastic response and nonlinear damping of a rubber plate in nonlinear vibration regime. **Mechanical Systems and Signal Processing**. v 111, p. 376–398, 2018.

BALASUBRAMANIAN, P., FERRARI, G., AMABILI, M., Del PRADO, Z. J. G. N. Experimental and theoretical study on large amplitude vibrations of clamped rubber plates. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v 94, p. 36–45, 2017.

BALKAN, D., MECITOĞLU, Z., Nonlinear dynamic behavior of viscoelastic sandwich composite plates under non-uniform blast load: Theory and experiment. International Journal of Impact Engineering. v 72, p. 85-104, 2014.

BILASSE, M., AZRAR, L., DAYA, E. M. Complex modes based numerical analysis of viscoelastic sandwich plates vibrations, **Computers and Structures.** v. 89, p. 539–555, 2011.

BOUTYOUR, E. H., DAYA, E. M., POTIER-FERRY, M., A harmonic balance method for the non-linear vibration of viscoelastic shells, **Comptes Rendus Mecanique**. v 334, p. 68-73, 2006.

BRUSH, D. O.; ALMROTH, B. O. **Buckling of bars, plates, and shells**. New York: McGraw-Hill, 1975. 377 p.

Del PRADO, Z. J. G. N. **Acoplamento e interação modal na instabilidade dinâmica de cascas cilíndricas**. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2001.

FLÜGGE, W. **Viscoelasticity**, Springer Science & Business Media, 2013. 204 p.

MARQUES, S. P.; CREUS, G. J. **Computational Viscoelasticity**, Springer Science & Business Media, 2012, 125 p.

NANDAKUMAR, K.; CHATTERJEE, A. Resonance, Parameter Estimation, and Modal Interactions in a Strongly Nonlinear Benchtop Oscillator**. Nonlinear Dynamics**. v. 40, p. 149–167, 2005.

NAYFEH, A. H.; MOOK, D. T. **Nonlinear Oscillations**. Wiley, New York, 1979. 722 p.

ROSSIHKIN, Y. A.; SHITIKOVA, M. V. Analysis of free non-linear vibrations of a viscoelastic plate under the conditions of different internal resonances. **International Journal of Non-Linear Mechanics**. v 41, p. 313-325, 2006.

SANTOS, J. P. L. **Análise de modelos reológicos viscoelásticos através de formulações mistas em elementos finitos**. 2008. 135f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de pós-graduação de engenharia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

SERBAN, D. A.; MARSAVINA, L.; SILBERSCHMIDT, V. V. Response of semi-crystalline thermoplastic polymers to dynamic loading: A finite element study. **Computational Materials Science**. v. 64, p. 116-121, 2012.

SUN, Y. X.; ZHANG, S. Y. Chaotic dynamic analysis of viscoelastic plates, **International Journal of Mechanical Sciences.** v 43, p. 1195–1208, 2001.

TARECO, M. A. C. **Conceitos de viscoelasticidade na modelação da fluência em estruturas mistas aço-betão**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, 2014.

XIA, Z. Q.; LUKASIEWICZ, S. Non-linear, free, damped vibrations of sandwich plates, **Journal of Sound and Vibration.** v 175, p. 219-232, 1994.

XIA, Z. Q.; LUKASIEWICZ, S. Nonlinear damped vibrations of simply-supported rectangular sandwich plates, **Nonlinear Dynamic**s. v 8, p. 417–433, 1995.