

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ADRIANA ARAUJO CINTRA

**Superfícies Completas com Curvatura
Gaussiana Constante em $H^2 \times \mathbb{R}$ e $S^2 \times \mathbb{R}$**

Goiânia
2010

ADRIANA ARAUJO CINTRA

Superfícies Completas com Curvatura Gaussiana Constante em $H^2 \times \mathbb{R}$ e $S^2 \times \mathbb{R}$

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria e Topologia.

Orientador: Prof. Dr. Romildo Da Silva Pina

Goiânia
2010

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Adriana Araujo Cintra

Graduou-se Bacharel em Matemática na UFG - Universidade Federal de Goiás. Durante sua graduação, foi bolsista do programa institucional de bolsas de iniciação científica/CNPq. Durante o Mestrado, na UFG- Universidade Federal de Goiás, foi bolsista do CNPq. Atualmente é aluna do programa de doutorado em Matemática da Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
GPT/BC/UFG

C575s Cintra, Adriana Araujo.
Superfícies completas com curvatura Gaussiana
Constante em $H^2 \times R$ e $S^2 \times R$ [manuscrito] / Adriana Araujo
Cintra. - 2010.
85 f. : il., figs.

Orientador: Prof. Dr. Romildo da Silva Pina.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás,
Instituto de Matemática e Estatística, 2010.
Bibliografia.
Inclui lista de figuras.

1. Superfícies Completas 2. Curvatura Gaussiana
Constante. I. Título.

CDU: 512.77

ADRIANA ARAUJO CINTRA

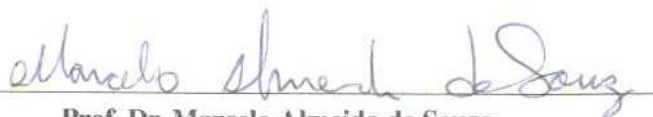
Superfícies Completas com Curvatura Gaussiana Constante em $H^2 \times \mathbb{R}$ e $S^2 \times \mathbb{R}$

Dissertação defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 19 de março de 2010, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



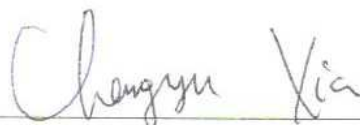
Prof. Dr. Romildo da Silva Pina

Instituto de Matemática e Estatística – UFG
Presidente da Banca



Prof. Dr. Marcelo Almeida de Souza

Instituto de Matemática e Estatística – UFG



Prof. Dr. Changyu Xia

Departamento de Matemática – UNB

Às pessoas que mais amo:
meus pais, meus irmãos,
e a minha querida sobrinha Yasmim.

Agradecimentos

Agradeço:

A Deus primeiramente por ter me dado a oportunidade de estar nesse mundo e iluminado sempre meu caminho. A toda minha família, em especial aos meus pais Brasil e Juliana por estarem sempre do meu lado me dando carinho e incentivo e aos meus irmãos, pelo apoio.

Ao meu orientador Dr. Romildo da Silva Pina por todo empenho, sabedoria, compreensão e por ser um exemplo como orientador e professor.

A minha amiga Lidiane Lima que me deu muita força durante toda minha vida acadêmica e pessoal, em especial pela paciência e carinho. E aos meus amigos Arianny Baião Malaquias, Darlene Rodrigues de Melo, Flávia Cristina da Silva e Wender José de Souza pela amizade e conhecimento compartilhado.

Aos amigos e colegas de graduação e mestrado que me apoiaram durante a minha vida acadêmica.

Aos professores e funcionários do IME/UFG.

E ao CNPq pelo apoio financeiro.

“A felicidade não é uma constante matemática, mas pode alcançar o infinito em um dado momento.”

Fabício Britto,

Resumo

Cintra, Adriana Araujo. **Superfícies Completas com Curvatura Gaussiana Constante em $H^2 \times \mathbb{R}$ e $S^2 \times \mathbb{R}$** . Goiânia, 2010. 85p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Neste trabalho classificamos as superfícies completas, com curvatura Gaussiana constante, em $H^2 \times \mathbb{R}$ e $S^2 \times \mathbb{R}$. Mostramos que existe uma única superfície completa, a menos de isometria, com curvatura Gaussiana constante positiva em $H^2 \times \mathbb{R}$, maior que um, em $S^2 \times \mathbb{R}$, e que não existe superfície completa com curvatura Gaussiana, $K(I) < -1$, em $H^2 \times \mathbb{R}$ e $S^2 \times \mathbb{R}$. Provamos ainda que, se $-1 \leq K(I) < 0$, existem infinitas superfícies completas em $H^2 \times \mathbb{R}$ com curvatura Gaussiana $K(I)$ e, com hipóteses adicionais, provamos que, se $-1 \leq K(I) < 0$ e $0 < K(I) < 1$, não existe superfície completa em $S^2 \times \mathbb{R}$ com curvatura Gaussiana $K(I)$. Estes resultados foram obtidos por Aledo, Espinar e Gálvez e podem ser encontrados em [1].

Palavras-chave

Superfícies completas, Curvatura Gaussiana constante

Abstract

Cintra, Adriana Araujo. **Complete surfaces with constant Gaussian curvature into the $H^2 \times \mathbb{R}$ and $S^2 \times \mathbb{R}$.** Goiânia, 2010. 85p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

In this work we classify the complete surfaces with constant Gaussian curvature into the $H^2 \times \mathbb{R}$ and $S^2 \times \mathbb{R}$. We show that exists a unique complete surface, up to isometries, with positive constant Gaussian curvature into the $H^2 \times \mathbb{R}$, and greater than one, into the $S^2 \times \mathbb{R}$ and that there is no complete surfaces with constant Gaussian curvature $K(I) < -1$ into the $H^2 \times \mathbb{R}$ and $S^2 \times \mathbb{R}$. We prove that even if $-1 \leq K(I) < 0$ there are infinite complete surfaces into the $H^2 \times \mathbb{R}$ with Gaussian curvature $K(I)$ and with additional assumption we prove there is if $-1 \leq K(I) < 0$ and $0 < K(I) < 1$ there is no exists complete surfaces into $S^2 \times \mathbb{R}$ with Gaussian curvature $K(I)$. These results were obtained by Aledo, Espinar and Gálvez and can be found in [1].

Keywords

Complete surfaces, Constant curvature Gaussian

Sumário

Lista de Figuras	i
Introdução	ii
1 Preliminares	1
1.1 Conceitos Básicos	1
1.2 Superfícies Completas e Compactas	2
1.3 Superfícies de Revolução, Completas, em \mathbb{R}^3	4
1.4 A Fórmula de Gauss e as equações de Codazzi	12
1.5 Pares Codazzi e formas quadráticas holomorfas	20
2 Superfícies de revolução completas em $H^2 \times \mathbb{R}$	25
2.1 Caso 1 - $K(I) > 0$.	28
2.2 Caso 2 - $K(I) = 0$.	31
2.3 Caso 3 - $K(I) < 0$.	33
3 Superfícies de revolução completas em $S^2 \times \mathbb{R}$	41
3.1 Caso 1 - $K(I) > 0$.	43
3.2 Caso 2 - $K(I) = 0$.	46
3.3 Caso 3 - $K(I) < 0$.	47
4 Resultados sobre unicidade e não-existência de superfícies completas com curvatura Gaussiana constante em $H^2 \times \mathbb{R}$ e $S^2 \times \mathbb{R}$	48
4.1 Lemas Básicos	48
4.2 Teorema do Tipo Liebmann	61
4.3 Teorema do Tipo Hilbert	67
Conclusão	82
Referências Bibliográficas	84

Lista de Figuras

1.1	Esfera: Superfície com curvatura Gaussiana $K(I) > 0$ em \mathbb{R}^3 .	7
1.2	(a) Cilindro e (b) Plano : Superfícies com curvatura Gaussiana $K(I) = 0$	9
1.3	Pseudoesfera: Superfície com curvatura Gaussiana $K(I) = -1$ em \mathbb{R}^3 .	11
2.1	Representação da curva geratriz da superfície com curvatura Gaussiana $K(I) > 0$ em $H^2 \times \mathbb{R}$.	30
2.2	Representação das curvas geratrizes das superfícies com curvatura Gaussiana nula em $H^2 \times \mathbb{R}$ que: (a) Não intercepta o eixo de revolução e (b) Intercepta o eixo de revolução.	32
2.3	Representação da curva geratriz da superfície de revolução com curvatura Gaussiana $-1 \leq K(I) < 0$ em $H^2 \times \mathbb{R}$ que corta o eixo de revolução.	36
2.4	Representação da curva geratriz da superfície de revolução com curvatura Gaussiana $-1 \leq K(I) < 0$ em $H^2 \times \mathbb{R}$ que não corta o eixo de revolução - Caso $A^2 = B^2$.	38
2.5	Representação das curvas geratrizes das superfícies de revolução com curvatura Gaussiana $-1 \leq K(I) < 0$ em $H^2 \times \mathbb{R}$ que não corta o eixo de revolução - Caso $A^2 > B^2$.	40
3.1	Representação da curva geratriz da superfície com curvatura Gaussiana $K(I) > 0$ em $S^2 \times \mathbb{R}$.	46
3.2	Representação da curva geratriz da superfície com curvatura Gaussiana nula em $S^2 \times \mathbb{R}$ que não intercepta o eixo de revolução.	47

Introdução

Em 1899, H. Liebmann mostrou que se S é uma superfície regular, compacta e conexa com curvatura Gaussiana constante, então S é uma esfera.

Dois anos depois, em 1901, D. Hilbert provou que não existe superfície completa de curvatura Gaussiana constante negativa em \mathbb{R}^3 .

Esses dois resultados foram muito importantes dentro da teoria de subvariedades pois classifica as superfícies de curvatura Gaussiana constante no \mathbb{R}^3 , e eles foram estendidos para S^3 e H^3 , já que nesses espaços as equações de Codazzi permanecem as mesmas e a Fórmula de Gauss é similar a do \mathbb{R}^3 . Todavia, não podemos estender para outros espaços, uma vez que as equações de compatibilidade, em geral, mudam bastante.

A mais ou menos cinquenta e cinco anos, H. Hopf associou formas diferenciais quadráticas holomorfas a superfícies com curvatura média constante. Essa forma quadrática é conhecida como a diferencial de Hopf e é a chave principal para a demonstração de seu teorema que afirma que uma esfera imersa em \mathbb{R}^3 com curvatura média constante é a esfera redonda, ou seja, todos os seus pontos são umbílicos.

Em 2004, U. Abresch e H. Rosenberg, em [2], generalizaram a diferencial de Hopf para superfícies imersas em $S^2 \times \mathbb{R}$ e $H^2 \times \mathbb{R}$, associando uma forma quadrática holomorfa com a diferencial de Hopf provaram que toda esfera imersa em $S^2 \times \mathbb{R}$ e $H^2 \times \mathbb{R}$, com curvatura média constante, é uma superfície rotacionalmente simétrica.

Motivados por esses resultados Alencar, Do Carmo e Tribuzy levantaram a seguinte questão:

Quais eram as superfícies fechadas imersas em $S^2 \times \mathbb{R}$ e $H^2 \times \mathbb{R}$ de curvatura Gaussiana constante?

Gálvez, Espinar e Alencar, em [1], classificaram as superfícies completas de curvatura Gaussiana constante em $S^2 \times \mathbb{R}$ e $H^2 \times \mathbb{R}$.

O principal objetivo do nosso trabalho é apresentar a resposta para o problema proposto por Alencar, Do Carmo e Tribuzzi, mostrando que valem os seguintes resultados em $S^2 \times \mathbb{R}$ e $H^2 \times \mathbb{R}$:

Teorema do Tipo Liebmann: *Existe uma única superfície completa, a menos de isometria, com curvatura Gaussiana constante $K(I) > 1$ em $S^2 \times \mathbb{R}$, e $K(I) > 0$ em $H^2 \times \mathbb{R}$. Em particular, essa superfície é rotacionalmente simétrica.*

Teorema do Tipo Hilbert: *Não existe qualquer imersão completa com curvatura Gaussiana $K(I) < -1$, constante, em $S^2 \times \mathbb{R}$ e $H^2 \times \mathbb{R}$.*

O nosso trabalho está dividido em quatro capítulos da seguinte maneira:

No primeiro capítulo, apresentamos alguns resultados e definições que serão necessários no decorrer do trabalho, sobre superfícies completas e compactas, relembramos a classificação das superfícies completas de curvatura constante em \mathbb{R}^3 , calculamos as equações de compatibilidade em $S^2 \times \mathbb{R}$ e $H^2 \times \mathbb{R}$ e fizemos um breve estudo sobre superfícies de Riemann mostrando que a existência de um par Codazzi, com curvatura extrínseca constante, implica na existência de uma forma quadrática holomorfa.

No segundo capítulo, classificamos as superfícies de revolução completas, com curvatura Gaussiana constante $K(I)$, em $H^2 \times \mathbb{R}$, mostrando que, para $K(I) > 0$ existe uma única superfície de revolução completa, a menos de isometria, com curvatura $K(I)$ e que para $-1 \leq K(I) \leq 0$ existem infinitas superfícies de revolução completas em $H^2 \times \mathbb{R}$ com curvatura Gaussiana constante $K(I)$, e encontramos uma parametrização para todas elas.

No terceiro capítulo, classificamos as superfícies de revolução completas, com curvatura Gaussiana $K(I)$, em $S^2 \times \mathbb{R}$ mostrando que para $K(I) > 1$, existe uma única superfície de revolução completa, a menos de isometria, com curvatura $K(I)$, e que os cilindros flats são as únicas superfícies de revolução completas em $S^2 \times \mathbb{R}$ com curvatura Gaussiana $K(I) < 1$.

No quarto capítulo, definimos uma nova forma quadrática A , a partir da métrica induzida I e mostramos que (A, II) é um par Codazzi com curvatura extrínseca constante, onde II é a segunda forma fundamental da imersão. Assim garantimos a existência de uma forma quadrática holomorfa que é a chave principal para a demonstração do Teorema do Tipo Liebmann. Finalmente, mostrarmos usando o fato de (A, II) ser um par Codazzi, que vale o Teorema do Tipo Hilbert. Os casos em que $-1 \leq K(I) < 0$ e $0 < K(I) < 1$ em $S^2 \times \mathbb{R}$ permanecem em abertos, mas mostramos também no quarto capítulo, que não existem superfícies completas com curvatura Gaussiana constante $K(I)$, nesses casos, se o gradiente da função altura satisfaz a uma certa condição.

Preliminares

Neste capítulo iremos abordar algumas definições e resultados que usaremos no decorrer do trabalho. Maiores detalhes podem ser encontrados em [5], [6], [8] e [9].

1.1 Conceitos Básicos

Nesta seção definiremos alguns conceitos básicos que usaremos no decorrer do trabalho.

Definição 1.1 *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ de abertos U_α de \mathbb{R}^n em M tais que:*

1. $\bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha) = M$.
2. Para todo par α, β , com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos em \mathbb{R}^n e as aplicações $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ são diferenciáveis.
3. A família $\{U_\alpha, x_\alpha\}$ é máxima relativamente às condições (1) e (2).

O par (U_α, x_α) com $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ é chamado uma **parametrização** de M em p e $x_\alpha(U_\alpha)$ é chamada uma **vizinhança coordenada** em p . Uma família $\{U_\alpha, x_\alpha\}$ satisfazendo (1) e (2) é denominada uma **estrutura diferenciável** em M .

O espaço Euclidiano \mathbb{R}^n , com a estrutura diferenciável dada pela aplicação identidade é uma variedade diferenciável.

Definição 1.2 *Sejam M e N variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $\phi : M \rightarrow N$ é uma **imersão** se $d\phi_p : T_p M \rightarrow T_\phi(p)N$ é injetiva pra todo $p \in M$. Se, além disso, ϕ é um homeomorfismo sobre $\phi(M) \subset N$, onde $\phi(M)$ tem a topologia induzida por N , diz-se que ϕ é um **mergulho**. Se $M \subset N$ e a inclusão $i : M \hookrightarrow N$ é um mergulho, diz-se que M é uma **subvariedade** de N .*

Uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é um exemplo de uma subvariedade do \mathbb{R}^3 .

Introduziremos agora uma maneira de medir comprimentos de vetores tangentes que varia diferenciavelmente com o ponto em uma variedade diferenciável.

Definição 1.3 Uma *métrica Riemanniana* em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ no espaço tangente T_pM , que varia diferencialmente no seguinte sentido : Se $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p , com $x(x_1, x_2, \dots, x_n) = q \in x(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}q = dx(0, \dots, 1, \dots, 0)$, então

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q$$

é uma função diferenciável em U . Uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana chama-se uma *variedade Riemanniana*.

Sejam M e N variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \rightarrow N$ é uma *isometria* se:

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, \text{ para todo } p \in M \text{ e } u, v \in T_pM. \quad (1.1)$$

Definição 1.4 Seja $f : M \rightarrow N$ uma imersão. Se N tem uma estrutura Riemanniana, então f induz uma estrutura Riemanniana em M por (1.1). A métrica M é chamada então a *métrica induzida* por f , e f é uma *imersão isométrica*.

Uma métrica *Pseudo-Riemanniana* em uma superfície S é uma correspondência que associa a cada ponto p de S uma forma bilinear simétrica não degenerada $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (porém não necessariamente positiva definida) em T_pS e que varia diferenciavelmente com p .

Definição 1.5 Considerando a forma quadrática $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$, com $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, a métrica pseudo-Riemanniana induzida por Q em \mathbb{R}^4 é chamada *métrica Lorentziana*.

1.2 Superfícies Completas e Compactas

Nesta seção iremos relembrar alguns resultados importantes sobre superfícies completas e compactas que faremos uso no desenrolar do trabalho.

Definição 1.6 Uma superfície regular S é dita *completa* se para qualquer ponto $P \in S$, qualquer geodésica parametrizada $\gamma : [0, \varepsilon) \rightarrow S$ de S , começando em $P = \gamma(0)$, pode ser estendida em uma geodésica parametrizada $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow S$, definida sobre toda reta real.

Proposição 1.7 *Uma superfície regular fechada mergulhada em \mathbb{R}^3 é completa na métrica induzida.*

Uma curva *divergente* em uma superfície S é uma aplicação diferenciável $\alpha : [0, \infty) \rightarrow S$ tal que para qualquer conjunto compacto $K \subset S$ existe um $t_0 \in [0, \infty)$ com $\alpha(t) \notin K$ para $t > t_0$. O *comprimento* de uma curva divergente é definido como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \|\alpha'(t)\| dt.$$

Observação 1.8 *Uma superfície regular S é completa se, e somente se, o comprimento de qualquer curva divergente em S é ilimitado.*

Uma superfície regular S compacta é sempre completa, porém nem toda superfície completa é compacta. Quando a curvatura Gaussiana de uma superfície S é positiva e não se aproxima de zero muito rapidamente, veremos em seguida, que S é compacta.

Teorema 1.9 (Bonnet) *Se a curvatura Gaussiana $K(I)$ de uma superfície completa satisfaz*

$$K(I) \geq \delta > 0,$$

então S é compacta e o diâmetro ρ de S satisfaz a desigualdade $\rho \leq \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$.

Considerando S uma superfície regular, dizemos que uma região (conexa) $R \subset S$ é *regular* se R é compacta e a sua fronteira, ∂R , é a união finita de curvas regulares por partes fechadas e simples que não se interceptam.

Um *triângulo* é uma região simples que tem apenas três vértices com ângulos externos $\alpha_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3$. Uma *triangulação* de uma região regular $R \subset S$ é uma família finita \mathcal{T} de triângulos T_i , $i = 1, \dots, n$, tal que

1. $\bigcup_{i=1}^n T_i = R$
2. Se $T_i \cap T_j \neq \emptyset$, $i \neq j$, então $T_i \cap T_j$ é uma aresta comum de T_i e T_j ou um vértice comum de T_i e T_j .

Definição 1.10 *Dada uma triangulação \mathcal{T} de uma região regular R , de uma superfície regular S , denotaremos por F o número de triângulos, por E o número de arestas, e por V o número de vértices da triangulação. O número*

$$F - E + V = \chi(\mathcal{T}) \tag{1.2}$$

é chamado característica de Euler-Poincaré da triangulação.

Prova-se que a característica de Euler-Poincaré não depende da triangulação de R , e neste caso, $\chi(\mathcal{T}) = \chi(R)$ para toda família \mathcal{T} .

O Teorema de Gauss-Bonnet é provavelmente o mais profundo na geometria diferencial das superfícies. Uma primeira versão deste teorema foi dada por Gauss em triângulos geodésicos e a extensão para uma região simples deve-se a Bonnet.

Teorema 1.11 (Gauss-Bonnet Global) *Seja $R \subset S$ uma região regular de uma superfície orientada S e sejam C_1, \dots, C_n as curvas fechadas, simples e regulares por partes que formam a fronteira de R . Suponha que cada C_i é orientada positivamente e sejam $\theta_1, \dots, \theta_p$ o conjunto de ângulos externos das curvas C_1, \dots, C_n . Então*

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s) ds + \iint_R K(I) d\sigma + \sum_{l=1}^p \theta_l = 2\pi\chi(R), \quad (1.3)$$

onde s denota o comprimento de arco de C_i , e a integral sobre C_i significa a soma das integrais em todos os arcos regulares de C_i .

Existem aplicações muito interessantes do Teorema de Gauss-Bonnet, mas no nosso trabalho vamos utilizar a seguinte:

Teorema 1.12 (Aplicação do Teorema de Gauss-Bonnet) *Uma superfície compacta com curvatura positiva é homeomorfa a uma esfera.*

Observação 1.13 *Todos os resultados desta seção podem ser estendidos para $H^2 \times \mathbb{R}$ e $S^2 \times \mathbb{R}$.*

1.3 Superfícies de Revolução, Completas, em \mathbb{R}^3

Nesta seção vamos classificar as superfícies de revolução, completas, com curvatura Gaussiana constante no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 .

A menos de isometria, podemos escolher o eixo de rotação como sendo o eixo $(0, 0, x_3)$. Neste caso, a matriz de rotação é dada por

$$R = \begin{bmatrix} \cos v & -\operatorname{sen} v & 0 \\ \operatorname{sen} v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.4)$$

onde v é o ângulo de rotação em torno do eixo de revolução

Seja $\alpha(u) = (l(u), 0, h(u)) \subset \mathbb{R}^3$ uma curva regular tal que $l(u) \geq 0$, parametrizada pelo comprimento de arco, ou seja,

$$(l'(u))^2 + (h'(u))^2 = 1 \quad (1.5)$$

que corta ortogonalmente o eixo de rotação $(0, 0, x_3)$ somente nos pontos final e inicial.

Uma parametrização $\Psi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ para a superfície de revolução, neste caso é dada por

$$\Psi(u, v) = (l(u)\cos v, l(u)\sen v, h(u)).$$

Derivando em relação a u e v temos que

$$\begin{cases} \Psi_u(u, v) = (l'(u)\cos v, l'(u)\sen v, h'(u)) \\ \Psi_v(u, v) = (-l(u)\sen v, l(u)\cos v, 0). \end{cases} \quad (1.6)$$

Portanto os coeficientes da primeira forma fundamental são dados por:

$$\begin{cases} E(u, v) = |\Psi_u(u, v)|^2 = l'(u)^2 + h'(u)^2 = 1 \\ F(u, v) = \langle \Psi_u(u, v), \Psi_v(u, v) \rangle = 0 \\ G(u, v) = |\Psi_v(u, v)|^2 = l^2(u). \end{cases}$$

Logo a métrica induzida é dada por

$$I = du^2 + l^2(u)dv^2.$$

Fazendo o produto vetorial em (1.6) temos que

$$\Psi_u \times \Psi_v = (-h'(u)l(u)\cos v, -h'(u)l(u)\sen v, l'(u)l(u)).$$

Assim, de (1.5) temos que

$$\begin{aligned} \|\Psi_u \times \Psi_v\|^2 &= (h'(u))^2 l^2(u) \cos^2 v + (h'(u))^2 l^2(u) \sen^2 v + (l'(u))^2 l^2(u) \\ &= (h'(u))^2 l^2(u) + (l'(u))^2 l^2(u) \\ &= [(h'(u))^2 + (l'(u))^2] l^2(u) \\ &= l^2(u). \end{aligned}$$

Portanto, o vetor normal $N : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$ da superfície é dado por

$$N(u, v) = \frac{\Psi_u \times \Psi_v}{\|\Psi_u \times \Psi_v\|} = (-h'(u)\cos v, -h'(u)\sen v, l'(u)).$$

Agora derivando o normal em relação a u e v temos que

$$\begin{cases} N_u(u, v) = (-h''(u)\cos v, -h''(u)\sen v, l''(u)), \\ N_v(u, v) = (h'(u)\sen v, -h'(u)\cos v, 0). \end{cases}$$

Portanto os coeficientes da segunda forma fundamental são dados por

$$\begin{cases} e(u, v) = \langle \Psi_u(u, v), -N_u(u, v) \rangle = h''(u)l'(u) - h'(u)l''(u) \\ f(u, v) = \langle \Psi_u(u, v), -N_v(u, v) \rangle = 0 \\ g(u, v) = \langle \Psi_v(u, v), -N_v(u, v) \rangle = h'(u)l(u). \end{cases}$$

Neste caso, a curvatura Gaussiana $K(I)$ da superfície é igual a

$$\begin{aligned} K(I) &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{[h''(u)l'(u) - h'(u)l''(u)]h'(u)l(u)}{l^2(u)} \\ &= \frac{h''(u)h'(u)l'(u) - (h'(u))^2l''(u)}{l(u)}. \end{aligned}$$

Observemos agora que derivando (1.5) obtemos que

$$2l'(u)l''(u) + 2h'(u)h''(u) = 0,$$

ou seja, $h'(u)h''(u) = -l'(u)l''(u)$. Portanto substituindo em (1.7) temos que

$$K(I) = \frac{-l''(u)(l'(u))^2 - (h'(u))^2l''(u)}{l(u)} = -\frac{l''(u)}{l(u)}.$$

Sendo assim, classificar as superfícies de revolução com a curvatura Gaussiana constante é equivalente a estudar a seguinte equação diferencial ordinária,

$$l''(u) + K(I)l(u) = 0.$$

A solução dessa equação, de acordo com o sinal da curvatura, é dada por

$$l(u) = \begin{cases} A\cos(\sqrt{K(I)}u) + B\sin(\sqrt{K(I)}u), & \text{se } K(I) > 0 \\ Au + B, & \text{se } K(I) = 0 \\ A\cosh(\sqrt{-K(I)}u) + B\sinh(\sqrt{-K(I)}u), & \text{se } K(I) < 0, \end{cases} \quad (1.7)$$

onde A e B são constantes reais que não se anulam simultaneamente.

Caso 1 - $K(I) > 0$

Neste caso, por (1.7), temos que

$$l(u) = A\cos(\sqrt{K(I)}u) + B\sin(\sqrt{K(I)}u). \quad (1.8)$$

Se S é completa com $K(I) > 0$, então pelo Teorema de Bonnet temos que S é compacta. Assim pelo Teorema (1.12), $\Psi(u, v)$ tem que ser a parametrização de uma esfera, isto é, $\alpha(u)$ é uma curva que intercepta o eixo em um ponto inicial e um ponto

final.

Se u_0 é o ponto inicial, então reparametrizando α trocando u por $z = u - u_0$ temos que $\alpha(z)$ corta o eixo na origem em $z = 0$, isto é, $\alpha(0) = (0, 0, h(0))$. Logo, $l(0) = 0$. Portanto, de (1.8) tem-se que $A = 0$. Logo,

$$l(z) = B \operatorname{sen}(\sqrt{K(I)}z).$$

Assim,

$$l'(z) = \sqrt{K(I)}B \operatorname{cos}(\sqrt{K(I)}z).$$

Portanto, de (1.5) temos que

$$(h'(z))^2 = 1 - K(I)B^2 \operatorname{cos}^2(\sqrt{K(I)}z). \quad (1.9)$$

Considerando que a curva intercepta o eixo ortogonalmente, isto é, $h'(0) = 0$, logo de (1.9) tem-se que $B = \frac{1}{\sqrt{K(I)}}$. Portanto, a menos de isometria

$$\begin{cases} l(z) = \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{K(I)}z)}{\sqrt{K(I)}} \\ h'(z) = \sqrt{1 - \operatorname{cos}^2(\sqrt{K(I)}z)} = \operatorname{sen}(\sqrt{K(I)}z). \end{cases} \quad (1.10)$$

Portanto integrando $h'(z)$ temos que

$$h(z) = -\frac{\operatorname{cos}(\sqrt{K(I)}z)}{\sqrt{K(I)}}, \quad (1.11)$$

e a superfície completa com curvatura Gaussiana constante positiva é a esfera.

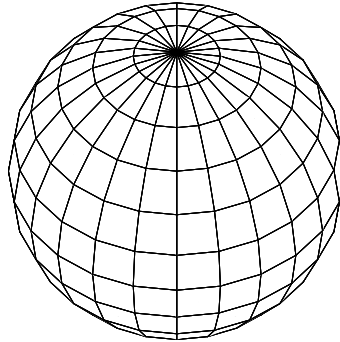


Figura 1.1: Esfera: Superfície com curvatura Gaussiana $K(I) > 0$ em \mathbb{R}^3 .

Caso 2 - $K(I) = 0$

Neste caso por (1.7), temos que $l(u) = Au + B$.

- i. Se $\alpha(u)$ não intercepta o eixo então a métrica induzida $I = du^2 + (Au + B)^2 dv^2$ da superfície será completa se $\alpha(u)$ está bem definida para todo $u \in \mathbb{R}$. Portanto $A = 0$. Assim temos que $l(u) = B$, e conseqüentemente $l'(u) = 0$.

Portanto, a menos de isometrias, de (1.5) temos que $h'(u) = 1$, e $h(u) = u$.

Assim obtemos o cilindro $\Psi(u, v) = (B \cos v, B \sin v, u)$.

Como $\alpha(u)$ é bem definida temos que o cilindro é fechado em \mathbb{R}^3 , então pela Proposição (1.7) temos que o cilindro é completo. (Ver Figura (1.2(b))).

- ii. Se $\alpha(u)$ intercepta o eixo, então podemos assumir sem perda de generalidade que intercepta em $u = 0$, ou seja, $\alpha(0) = (0, 0, h(0))$. Assim,

$$0 = l(0) = A \cdot 0 + B = B,$$

Portanto, para todo $u \in \mathbb{R}_+$

$$l(u) = Au. \quad (1.12)$$

Derivando a equação acima obtemos que $l'(u) = A$. Assim de (1.5) temos que

$$(h'(u))^2 = 1 - A^2.$$

Como $\alpha(u)$ deve interceptar o eixo ortogonalmente, então $h'(0) = 0$.

Logo, $1 - A^2 = 0$, ou seja, $A = \pm 1$. Como $l(u) \geq 0$ e $u \in \mathbb{R}_+$ segue que $A = 1$. Assim,

$$l(u) = u \quad \text{e} \quad h'(u) = 0.$$

Integrando temos que

$$h(u) = h(0). \quad (1.13)$$

Neste caso $\Psi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, h(0))$ é uma parametrização do plano que é uma superfície completa. (Ver Figura (1.2(a))).

Assim obtemos, a menos de isometrias, duas superfícies de revolução completas que possuem curvatura Gaussiana nula.

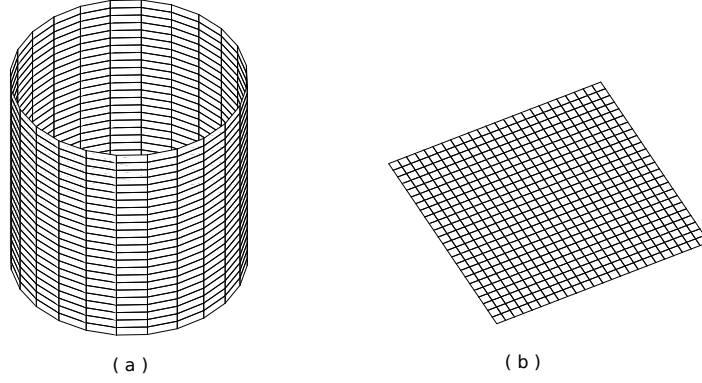


Figura 1.2: (a) Cilindro e (b) Plano : Superfícies com curvatura Gaussiana $K(I) = 0$

Caso 3 - $K(I) < 0$

Neste caso por (1.7), temos que

$$l(u) = A \cosh(\sqrt{-K(I)}u) + B \sinh(\sqrt{-K(I)}u). \quad (1.14)$$

- i. Se $\alpha(u)$ intercepta o eixo então podemos assumir novamente que intercepta para $u = 0$, ou seja, $\alpha(0) = (0, 0, 0)$. Assim,

$$0 = l(0) = A \cdot 1 + B \cdot 0 = A.$$

Logo $l(u) = B \sinh(\sqrt{-K(I)}u)$ para todo $u \in \mathbb{R}_+$, pois $l(u) \geq 0$. Portanto, derivando temos que

$$l'(u) = \sqrt{-K(I)} B \cosh(\sqrt{-K(I)}u).$$

Portanto de (1.5)

$$(h'(u))^2 = 1 + K(I) B^2 \cosh^2(\sqrt{-K(I)}u).$$

Como a curva α deve interceptar ortogonalmente temos que $h'(0) = 0$ e consequentemente, a menos de isometrias, $B = \frac{1}{\sqrt{-K(I)}}$, que é um absurdo. Logo não existe superfície completa com curvatura negativa constante interceptando o eixo ortogonalmente.

- ii. Se $\alpha(u)$ não intercepta o eixo então a métrica induzida

$$I = du^2 + (A \cosh(\sqrt{-K(I)}u) + B \sinh(\sqrt{-K(I)}u))^2 dv^2$$

da superfície para ser completa deve ser bem definida para todo $u \in \mathbb{R}$.

Primeiramente vamos mostrar que $A^2 \geq B^2$.

De fato, suponhamos por absurdo que $A^2 < B^2$. Então pela definição das funções trigonométricas hiperbólicas temos que (1.14) é dada por

$$\begin{aligned} l(u) &= A \frac{e^{\sqrt{-K(I)}u} + e^{-\sqrt{-K(I)}u}}{2} + B \frac{e^{\sqrt{-K(I)}u} - e^{-\sqrt{-K(I)}u}}{2} \\ &= \frac{(A+B)e^{\sqrt{-K(I)}u} + (A-B)e^{-\sqrt{-K(I)}u}}{2}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Fazendo $u = 0$ em (1.14) temos que $A = l(0) \geq 0$.

Como $A^2 < B^2$, então $A - B < 0$ ou $A + B < 0$.

Se $A + B < 0$ e $u \rightarrow \infty$ em (1.15) então

$$\lim_{u \rightarrow \infty} l(u) = -\infty.$$

Analogamente temos que se $A - B < 0$ e $u \rightarrow -\infty$ em (1.15) então

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} l(u) = -\infty.$$

Nos dois casos temos uma contradição pois $l(u) \geq 0$ para todo $u \in \mathbb{R}$. Portanto $A^2 \geq B^2$.

Se $A^2 = B^2$ então mudando u para $-u$ se necessário, podemos assumir que $A = B$.

Logo, de (1.14) temos que

$$\begin{aligned} l(u) &= A \cosh(\sqrt{-K(I)}u) + A \sinh(\sqrt{-K(I)}u) \\ &= A \left[\frac{e^{\sqrt{-K(I)}u} + e^{-\sqrt{-K(I)}u}}{2} + \frac{e^{\sqrt{-K(I)}u} - e^{-\sqrt{-K(I)}u}}{2} \right] \\ &= A e^{\sqrt{-K(I)}u}. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança $z = u - \frac{\ln A}{\sqrt{-K(I)}}$ obtemos que

$$l(z) = e^{\sqrt{-K(I)}z}$$

Portanto,

$$l'(z) = \sqrt{-K(I)}e^{\sqrt{-K(I)}z}.$$

Assim, $(l'(z))^2 = -K(I)e^{2\sqrt{-K(I)}z}$.

Mas de (1.5) temos que $(l'(z))^2 \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$-K(I)e^{2\sqrt{-K(I)}z} \leq 1, \forall z \in \mathbb{R};$$

Agora fazendo $z = 0$ na equação acima temos que $K(I) \geq -1$. Portanto, de (1.5) temos que

$$h'(z) = \sqrt{1 + K(I)e^{2\sqrt{-K(I)}z}}$$

Portanto encontramos a superfície tal que a parametrização da curva geratriz é dada por

$$l(z) = e^{\sqrt{-K(I)}z} \quad \text{e} \quad h(z) = \int_0^z \sqrt{1 + K(I)e^{2\sqrt{-K(I)}z}} dz,$$

e esta superfície não é completa pois sua curva geratriz possui bicos.

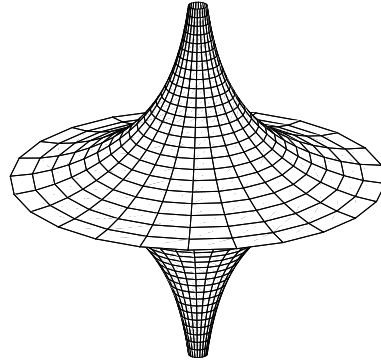


Figura 1.3: Pseudoesfera: Superfície com curvatura Gaussiana $K(I) = -1$ em \mathbb{R}^3 .

Se $A^2 > B^2$ então $\frac{B^2}{A^2} < 1$. Portanto existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{B}{A} = \tanh \theta$. Assim existe $C > 0$ tal que $A = C \cosh \theta$ e $B = C \sinh \theta$. Portanto de (1.14) temos que

$$\begin{aligned} l(u) &= C \cosh \theta \cosh(\sqrt{-K(I)}u) + C \sinh \theta \sinh(\sqrt{-K(I)}u) \\ &= C \cosh(\sqrt{-K(I)}u + \theta). \end{aligned}$$

Assim reparametrizando a curva trocando u por $z = u + \frac{\theta}{\sqrt{-K(I)}}$ temos que

$$l(z) = C \cosh(\sqrt{-K(I)}z).$$

Portanto,

$$l'(z) = C\sqrt{-K(I)}\operatorname{senh}(\sqrt{-K(I)}z).$$

Assim,

$$(l'(z))^2 = -K(I)C^2\operatorname{senh}^2(\sqrt{-K(I)}z).$$

Mas de (1.5) temos que $l'(z) \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$-K(I)C^2\operatorname{senh}^2(\sqrt{-K(I)}z) \leq 1, \forall z \in \mathbb{R}. \quad (1.16)$$

Agora existe $d \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{senh}(\sqrt{-K(I)}d) = \frac{1}{C}$ e da equação acima temos que $K(I) \geq -1$.

Portanto, de (1.5) temos que

$$h'(z) = \sqrt{1 + K(I)C^2\operatorname{senh}^2(\sqrt{-K(I)}z)}.$$

Observe que para $h'(z)$ ser bem definida temos que

$$z \in \left[\frac{1}{\sqrt{-K(I)}}\operatorname{arcsenh}\left(\frac{-1}{C\sqrt{-K(I)}}\right), \frac{1}{\sqrt{-K(I)}}\operatorname{arcsenh}\left(\frac{1}{C\sqrt{-K(I)}}\right) \right].$$

Portanto,

$$h(z) = \int_0^u \sqrt{1 + K(I)C^2\operatorname{senh}^2(\sqrt{-K(I)}z)} dz.$$

Neste casos, estas superfícies não são completas pois a curva não definida para todo $z \in \mathbb{R}$.

Apesar de saber que estes resultados são verdadeiros usando o Teorema de Liebmann e Hilbert, desenvolvi as contas para superfícies de revolução pois foi usando estas ideias que Aledo, Espinar e Gálvez em [1], generalizaram estes resultados para $H^2 \times \mathbb{R}$ e $S^2 \times \mathbb{R}$.

1.4 A Fórmula de Gauss e as equações de Codazzi

Nesta seção iremos obter a Fórmula de Gauss e as equações de Codazzi em $M^2(\xi) \times \mathbb{R}$ onde

$$M^2(\xi) = \begin{cases} S^2, & \text{se } \xi = 1 \\ H^2, & \text{se } \xi = -1. \end{cases}$$

Seja \mathbb{R}_k^4 , $k = 0, 1$, o espaço vetorial \mathbb{R}^4 com coordenadas lineares (x_1, x_2, x_3, x_4) e com a métrica \langle, \rangle induzida pela forma quadrática $\xi x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$, onde

$$\xi = \begin{cases} 1, & \text{se } k = 0 \\ -1, & \text{se } k = 1. \end{cases}$$

Veremos $S^2 \times \mathbb{R}$ como subvariedade do espaço Euclidiano \mathbb{R}_0^4 , isto é,

$$S^2 \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Analogamente veremos $H^2 \times \mathbb{R}$ como uma subvariedade do espaço Lorentziano \mathbb{R}_1^4 , isto é,

$$H^2 \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1, x_1 > 0\}.$$

Seja S uma superfície orientável e (A, B) um par de formas quadráticas reais em S tais que A é métrica Riemanniana. Associado a esse par podemos definir a **curvatura média** e a **curvatura extrínseca**, respectivamente, por

$$H(A, B) = \frac{Eg - 2fF + eG}{2(EG - F^2)} \quad \text{e} \quad K(A, B) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2},$$

onde $A = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ e $B = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$, sendo (u, v) um sistema de coordenadas locais.

Definição 1.14 Dizemos que (A, B) é um **par Codazzi** se satisfaz as equações clássicas de Codazzi, isto é,

$$\begin{cases} e_v - f_u = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2, \\ f_v - g_u = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2. \end{cases}$$

onde Γ_{ij}^k são os símbolos de Christoffel da métrica Riemanniana A , e são dados por

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \frac{\frac{1}{2}(E_u G + E_v F) - FF_u}{EG - F^2} \\ \Gamma_{11}^2 = \frac{-\frac{1}{2}(E_u F + E_v E) + EF_u}{EG - F^2} \\ \Gamma_{12}^1 = \frac{\frac{1}{2}E_v G - FG_u}{EG - F^2} \\ \Gamma_{12}^2 = \frac{\frac{1}{2}EG_u - FE_v}{EG - F^2} \\ \Gamma_{22}^1 = \frac{-\frac{1}{2}(GG_u + FG_v) + GF_v}{EG - F^2} \\ \Gamma_{22}^2 = \frac{\frac{1}{2}(EG_v + FG_u) - FF_v}{EG - F^2}. \end{cases} \quad (1.17)$$

Seja S uma superfície orientável e $\Psi : S \rightarrow M^2(\xi) \times \mathbb{R}$ uma imersão com campo de vetores normais unitários N . Sejam $I = \langle d\Psi, d\Psi \rangle$ e $II = \langle -dN, d\Psi \rangle$ a primeira e a segunda formas fundamentais de Ψ respectivamente e $K(I)$ a curvatura Gaussiana. Seja $h(u, v)$ a quarta coordenada da imersão Ψ , a qual chamaremos de **função altura**. Sejam

$$\Psi(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v), h(u, v)) \in \mathbb{R}^4, \quad (1.18)$$

tal que

$$\xi x_1^2(u, v) + x_2^2(u, v) + x_3^2(u, v) = \xi \quad \text{e se } \xi = -1 \quad \text{tem-se } x_1 > 0, \quad (1.19)$$

onde u e v são parâmetros locais e

$$\eta = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v), 0) \in \mathbb{R}_k^4. \quad (1.20)$$

Uma base do plano tangente $T_q\Psi$ em $q = \Psi(u, v)$ é $\{\Psi_u(u, v), \Psi_v(u, v)\}$.

Derivando (1.19) em relação a u temos que

$$2\xi x_1(u, v) \frac{\partial x_1(u, v)}{\partial u} + 2x_2(u, v) \frac{\partial x_2(u, v)}{\partial u} + 2x_3(u, v) \frac{\partial x_3(u, v)}{\partial u} = 0,$$

ou seja, $2\langle \Psi_u(u, v), \eta \rangle = 0$.

De modo análogo, temos que $2\langle \Psi_v(u, v), \eta \rangle = 0$.

Logo, $\eta \in [T_q\Psi]^\perp$ e

$$|\eta| = \sqrt{|\langle \eta, \eta \rangle|} = \sqrt{|\xi x_1^2(u, v) + x_2^2(u, v) + x_3^2(u, v)|} = \sqrt{|\xi|} = 1.$$

Como η é normal a N , então η é o normal unitário de $M^2(\xi) \times \mathbb{R}$ em \mathbb{R}_k^4 . Seja $II_\eta = \langle -d\eta, d\Psi \rangle$ a segunda forma fundamental induzida por η em S . Considerando

$$\begin{cases} I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \\ II = edu^2 + 2fdudv + gdv^2 \\ II_\eta = e_\eta du^2 + 2f_\eta dudv + g_\eta dv^2, \end{cases}$$

as curvaturas extrínsecas são dadas por

$$K(I, II) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad \text{e} \quad K(I, II_\eta) = \frac{e_\eta g_\eta - f_\eta^2}{E_\eta G_\eta - F_\eta^2}.$$

Temos que $\{\Psi_u, \Psi_v, N, \eta\}$ formam uma base ortonormal para \mathbb{R}_k^4 . Assim usando

que

$$\begin{cases} \langle \Psi_u, N \rangle = \langle \Psi_v, N \rangle = \langle \Psi_u, \eta \rangle = \langle \Psi_v, \eta \rangle = \langle N, \eta \rangle = 0 \\ \langle N, N \rangle = 1 \quad \text{e} \quad \langle \eta, \eta \rangle = \xi, \end{cases}$$

temos que

$$\begin{cases} \Psi_{uu} = \Gamma_{11}^1 \Psi_u + \Gamma_{11}^2 \Psi_v + eN + \xi e_\eta \eta \\ \Psi_{uv} = \Gamma_{12}^1 \Psi_u + \Gamma_{12}^2 \Psi_v + fN + \xi f_\eta \eta \\ \Psi_{vv} = \Gamma_{22}^1 \Psi_u + \Gamma_{22}^2 \Psi_v + gN + \xi g_\eta \eta, \end{cases} \quad (1.21)$$

onde Γ_{ij}^k são os símbolos de Christoffel e que

$$\begin{cases} N_u = a_{11} \Psi_u + a_{21} \Psi_v + c_1 \eta \\ N_v = a_{12} \Psi_u + a_{22} \Psi_v + c_2 \eta \\ \eta_u = b_{11} \Psi_u + b_{21} \Psi_v + d_1 N \\ \eta_v = b_{12} \Psi_u + b_{22} \Psi_v + d_2 N, \end{cases} \quad (1.22)$$

onde

$$a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \quad a_{21} = \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \quad a_{12} = \frac{gF - fG}{EG - F^2} \quad \text{e} \quad a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2} \quad (1.23)$$

$$b_{11} = \frac{f_\eta F - e_\eta G}{EG - F^2}, \quad b_{21} = \frac{e_\eta F - f_\eta E}{EG - F^2}, \quad b_{12} = \frac{g_\eta F - f_\eta G}{EG - F^2} \quad \text{e} \quad b_{22} = \frac{f_\eta F - g_\eta E}{EG - F^2} \quad (1.24)$$

$$c_1 = \xi \langle N_u, \eta \rangle, \quad c_2 = \xi \langle N_v, \eta \rangle, \quad d_1 = \langle \eta_u, N \rangle, \quad d_2 = \langle \eta_v, N \rangle. \quad (1.25)$$

Agora derivando a primeira equação de (1.21) em relação a v temos que

$$\Psi_{uv} = (\Gamma_{11}^1)_v \Psi_u + (\Gamma_{11}^2)_v \Psi_v + e_v N + \xi (e_\eta)_v \eta + \Gamma_{11}^1 \Psi_{uv} + \Gamma_{11}^2 \Psi_{vv} + e N_v + \xi \eta v. \quad (1.26)$$

Assim usando (1.21) e (1.22) segue que

$$\begin{aligned} \Psi_{uv} &= (\Gamma_{11}^1)_v \Psi_u + \Gamma_{11}^1 \{ \Gamma_{12}^1 \Psi_u + \Gamma_{12}^2 \Psi_v + fN + \xi f_\eta \eta \} \\ &+ (\Gamma_{11}^2)_v \Psi_v + \Gamma_{11}^2 \{ \Gamma_{22}^1 \Psi_u + \Gamma_{22}^2 \Psi_v + gN + \xi g_\eta \eta \} \\ &+ e_v N + e \{ a_{12} \Psi_u + a_{22} \Psi_v + c_2 \eta \} \\ &+ \xi (e_\eta)_v \eta + \xi e_\eta \{ b_{12} \Psi_u + b_{22} \Psi_v + d_2 N \} \\ &= \{ (\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + e a_{12} + \xi e_\eta b_{12} \} \Psi_u \\ &+ \{ (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + e a_{22} + \xi e_\eta b_{22} \} \Psi_v \\ &+ \{ f \Gamma_{11}^1 + g \Gamma_{11}^2 + e_v + \xi e_\eta d_2 \} N \\ &+ \{ \xi f_\eta \Gamma_{11}^1 + \xi g_\eta \Gamma_{11}^2 + \xi (e_\eta)_v + e c_2 \} \eta. \end{aligned}$$

Analogamente derivando a segunda equação de (1.21) em relação a u temos que

$$\Psi_{uvu} = (\Gamma_{12}^1)_u \Psi_u + (\Gamma_{12}^2)_u \Psi_v + f_u N + \xi(f_\eta)_u \eta + \Gamma_{12}^1 \Psi_{uu} + \Gamma_{12}^2 \Psi_{vu} + f N_u + \xi f_\eta \eta_u.$$

Assim usando (1.21) e (1.22) segue que

$$\begin{aligned} \Psi_{uvu} &= (\Gamma_{12}^1)_u \Psi_u + \Gamma_{12}^1 \{ \Gamma_{11}^1 \Psi_u + \Gamma_{11}^2 \Psi_v + eN + \xi e_\eta \eta \} \\ &+ (\Gamma_{12}^2)_u \Psi_v + \Gamma_{12}^2 \{ \Gamma_{12}^1 \Psi_u + \Gamma_{12}^2 \Psi_v + fN + \xi f_\eta \eta \} \\ &+ f_u N + f \{ a_{11} \Psi_u + a_{21} \Psi_v + c_1 \eta \} \\ &+ \xi(f_\eta)_u \eta + \xi f_\eta \{ b_{11} \Psi_u + b_{21} \Psi_v + d_1 N \} \\ &= \{ (\Gamma_{12}^1)_u + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 + f a_{11} + \xi f_\eta b_{11} \} \Psi_u \\ &+ \{ (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + (\Gamma_{12}^2)^2 + f a_{21} + \xi f_\eta b_{21} \} \Psi_v \\ &+ \{ e \Gamma_{12}^1 + f \Gamma_{12}^2 + f_u + \xi f_\eta d_1 \} N \\ &+ \{ \xi e_\eta \Gamma_{12}^1 + \xi f_\eta \Gamma_{12}^2 + \xi(f_\eta)_u + f c_1 \} \eta. \end{aligned}$$

Como queremos estudar imersões diferenciáveis segue que $\Psi_{uvu} - \Psi_{uvv} = 0$,

logo

$$\begin{aligned} &\{ (\Gamma_{12}^1)_u - (\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + T_1 \} \Psi_u + \\ &\{ (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + (\Gamma_{12}^2)^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + T_2 \} \Psi_v + \\ &\{ f_u - e_v + e \Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g \Gamma_{11}^2 + \xi f_\eta d_1 - \xi e_\eta d_2 \} N + \\ &\{ \xi[(f_\eta)_u - (e_\eta)_v + e_\eta \Gamma_{12}^1 + f_\eta(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g_\eta \Gamma_{11}^2] + f c_1 - e c_2 \} \eta = 0. \end{aligned} \quad (1.27)$$

onde

$$\begin{cases} T_1 = f a_{11} + \xi f_\eta b_{11} - e a_{12} - \xi e_\eta b_{12} \\ T_2 = f a_{21} - e a_{22} + \xi f_\eta b_{21} - \xi e_\eta b_{22}. \end{cases} \quad (1.28)$$

Agora como $\{\Psi_u, \Psi_v, N, \eta\}$ forma uma base temos que cada coeficiente acima é nulo.

Então olhando para o coeficiente de Ψ_v temos que

$$(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + (\Gamma_{12}^2)^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 = -T_2. \quad (1.29)$$

Substituindo (1.23) e (1.24) em (1.28) temos que

$$\begin{aligned}
-T_2 &= e \frac{fF - gE}{EG - F^2} - f \frac{eF - fE}{EG - F^2} + \xi e_\eta \frac{f_\eta F - g_\eta E}{EG - F^2} - \xi f_\eta \frac{e_\eta F - f_\eta E}{EG - F^2} \\
&= \frac{(-eg + f^2)E}{EG - F^2} + \xi \frac{(-e_\eta g_\eta + f_\eta^2)E}{EG - F^2} \\
&= -EK(I, II) - \xi EK(I, II)_\eta \\
&= -E[K(I, II) + \xi K(I, II)_\eta].
\end{aligned}$$

Como

$$(\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + (\Gamma_{12}^2)^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 = -EK(I). \quad (1.30)$$

Assim (1.29) é dada por

$$K(I) = K(I, II) + \xi K(I, II)_\eta. \quad (1.31)$$

A equação (1.31) é dita a **Fórmula de Gauss**.

Agora olhando para o coeficiente do normal N em (1.27) temos que

$$e_v - f_u = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2 + \xi f_\eta d_1 - \xi e_\eta d_2. \quad (1.32)$$

Derivando a terceira equação de (1.21) em relação a u temos que

$$\begin{aligned}
\Psi_{vuu} &= (\Gamma_{22}^1)_u \Psi_u + (\Gamma_{22}^2)_u \Psi_v + g_u N + \xi(g_\eta)_u \eta + \Gamma_{22}^1 \Psi_{uu} + \Gamma_{22}^2 \Psi_{vu} + gN_u + \xi g_\eta \eta_u \\
&= \{(\Gamma_{22}^1)_u + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{12}^1 + ga_{11} + \xi g_\eta b_{11}\} \Psi_u \\
&+ \{(\Gamma_{22}^2)_u + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{12}^2 + ga_{21} + \xi g_\eta b_{21}\} \Psi_v \\
&+ \{e\Gamma_{22}^1 + f\Gamma_{22}^2 + g_u + \xi g_\eta d_1\} N \\
&+ \{\xi e_\eta \Gamma_{22}^1 + \xi f_\eta \Gamma_{22}^2 + \xi(g_\eta)_u + gc_1\} \eta.
\end{aligned}$$

Derivando a segunda equação de (1.21) em relação a v obtemos que

$$\begin{aligned}
\Psi_{uvv} &= (\Gamma_{12}^1)_v \Psi_u + (\Gamma_{12}^2)_v \Psi_v + f_v N + \xi(f_\eta)_v \eta + \Gamma_{12}^1 \Psi_{uv} + \Gamma_{12}^2 \Psi_{vv} + fN_v + \xi f_\eta \eta_v \\
&= \{(\Gamma_{12}^1)_v + (\Gamma_{12}^1)^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1 + fa_{12} + \xi f_\eta b_{12}\} \Psi_u \\
&+ \{(\Gamma_{12}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^2 + fa_{22} + \xi f_\eta b_{22}\} \Psi_v \\
&+ \{f\Gamma_{12}^1 + g\Gamma_{12}^2 + f_v + \xi f_\eta d_2\} N \\
&+ \{\xi f_\eta \Gamma_{12}^1 + \xi g_\eta \Gamma_{12}^2 + \xi(f_\eta)_v + fc_2\} \eta.
\end{aligned}$$

Como $\Psi_{vuu} - \Psi_{uvv} = 0$ temos que

$$\begin{aligned} & \{(\Gamma_{22}^1)_u - (\Gamma_{12}^1)_v + \Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2\Gamma_{12}^1 - (\Gamma_{12}^1)^2 - \Gamma_{12}^2\Gamma_{22}^1 + T_3\}\Psi_u + \\ & \{(\Gamma_{22}^2)_u - (\Gamma_{12}^2)_v + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1 - \Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2 + T_4\}\Psi_v + \\ & \{g_u - f_v + e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2 + \xi g_\eta d_1 - \xi f_\eta d_2\}N + \\ & \{\xi[(g_\eta)_u - (f_\eta)_v + e_\eta\Gamma_{22}^1 + f_\eta(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g_\eta\Gamma_{12}^2] + gc_1 - fc_2\}\eta = 0. \end{aligned} \quad (1.33)$$

onde

$$\begin{cases} T_3 = ga_{11} + \xi g_\eta b_{11} - fa_{12} - \xi f_\eta b_{12} \\ T_4 = ga_{21} - fa_{22} + \xi g_\eta b_{21} - \xi f_\eta b_{22}. \end{cases} \quad (1.34)$$

Como $\{\Psi_u, \Psi_v, N, \eta\}$ forma uma base para \mathbb{R}_k^4 temos que cada coeficiente de (1.33) é nulo.

Agora olhando para o coeficiente de Ψ_u temos que

$$(\Gamma_{22}^1)_u - (\Gamma_{12}^1)_v + \Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2\Gamma_{12}^1 - (\Gamma_{12}^1)^2 - \Gamma_{12}^2\Gamma_{22}^1 = -T_3. \quad (1.35)$$

Substituindo (1.23) e (1.24) em (1.34) e usando a Fórmula de Gauss temos que

$$\begin{aligned} -T_3 &= f \frac{gF - fG}{EG - F^2} - g \frac{fF - eG}{EG - F^2} - \xi g_\eta \frac{f_\eta F - e_\eta G}{EG - F^2} + \xi f_\eta \frac{g_\eta F - f_\eta G}{EG - F^2} \\ &= \frac{(eg - f^2)G}{EG - F^2} + \xi \frac{(e_\eta g_\eta - f_\eta^2)G}{EG - F^2} \\ &= GK(I, II) + \xi GK(I, II_\eta) \\ &= G[K(I, II) + \xi K(I, II_\eta)] \\ &= GK(I). \end{aligned}$$

Assim, (1.35) passa a ser dada por

$$(\Gamma_{22}^1)_u - (\Gamma_{12}^1)_v + \Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2\Gamma_{12}^1 - (\Gamma_{12}^1)^2 - \Gamma_{12}^2\Gamma_{22}^1 = GK(I). \quad (1.36)$$

Agora igualando a zero o coeficiente de Ψ_v temos que

$$(\Gamma_{22}^2)_u - (\Gamma_{12}^2)_v + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1 - \Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^2 = -T_4. \quad (1.37)$$

Analogamente de (1.23), (1.24), (1.34) e da Fórmula de Gauss temos que

$$\begin{aligned}
-T_4 &= f \frac{fF - gE}{EG - F^2} - g \frac{eF - fE}{EG - F^2} - \xi g \eta \frac{e_\eta F - f_\eta E}{EG - F^2} + \xi f \eta \frac{f_\eta F - g_\eta E}{EG - F^2} \\
&= -\frac{(eg - f^2)F}{EG - F^2} - \xi \frac{(e_\eta g_\eta - f_\eta^2)F}{EG - F^2} \\
&= -FK(I, II) - \xi FK(I, II_\eta) \\
&= -F[K(I, II) + \xi K(I, II_\eta)] \\
&= -FK(I).
\end{aligned}$$

Assim (1.37) fica

$$(\Gamma_{22}^2)_u - (\Gamma_{12}^2)_v + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2 = -FK(I). \quad (1.38)$$

Assim de (1.36) e (1.38) temos que

$$\begin{aligned}
(EG - F^2)K(I) &= E((\Gamma_{22}^1)_u - (\Gamma_{12}^1)_v + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{12}^1 - (\Gamma_{12}^1)^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1) \\
&\quad + F((\Gamma_{22}^2)_u - (\Gamma_{12}^2)_v + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^2). \quad (1.39)
\end{aligned}$$

Finalmente analisando o coeficiente de N na equação (1.33) temos que

$$f_v - g_u = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2 + \xi g_\eta d_1 - \xi f_\eta d_2. \quad (1.40)$$

As equações (1.32) e (1.40) são conhecidas como as **equações de Codazzi**.

Observação 1.15 *Se S imersa em M temos pela fórmula de Gauss que*

$$K(I) = K(I, II) + K,$$

onde K é a curvatura seccional de M . Assim se $M = \mathbb{R}^3$ temos que $K = 0$, e portanto $K(I, II) = K(I)$.

Observação 1.16 *Da equação (1.30) a curvatura Gaussiana $K(I)$ da métrica $I = du^2 + f(u)^2 dv^2$ é dada por:*

$$\begin{aligned}
K(I) &= -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\} \\
&= -\frac{1}{2f(u)} \left(\frac{2f(u)f'(u)}{f(u)} \right)_u \\
&= -\frac{1}{2f(u)} (2f''(u)) \\
&= -\frac{f''(u)}{f(u)}.
\end{aligned}$$

Assim se a curvatura é constante temos que:

$$f(u) = \begin{cases} A\cos(\sqrt{K(I)}u) + B\sin(\sqrt{K(I)}u), & \text{se } K(I) > 0 \\ Au + B, & \text{se } K(I) = 0 \\ A\cosh(\sqrt{-K(I)}u) + B\sinh(\sqrt{-K(I)}u), & \text{se } K(I) < 0, \end{cases}$$

onde A, B são constantes reais que não se anulam simultaneamente.

Observação 1.17 Da equação (1.30), a curvatura Gaussiana $K(I)$ da métrica $I = Edu^2 + Edv^2$ é dada por:

$$\begin{aligned} K(I) &= -\frac{1}{2\sqrt{E^2}} \left\{ \left(\frac{E_v}{E} \right)_v + \left(\frac{E_u}{E} \right)_u \right\} \\ &= -\frac{1}{2E} \Delta(\log E), \end{aligned}$$

onde $\Delta(\log E)$ é o Laplaciano do $\log E$ na métrica induzida I .

1.5 Pares Codazzi e formas quadráticas holomorfas

Nesta seção vamos fazer um breve estudo sobre superfícies de Riemann, para mais detalhes ver Farkas [8]. Vamos mostrar que sob certas hipóteses, a existência de um par Codazzi (A, B) implica que a curvatura extrínseca $K(A, B)$ é constante se, somente se, existe uma forma quadrática holomorfa.

Definição 1.18 Seja $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua, onde U é um aberto de \mathbb{C} . Seja $w = u + iv$ e $F(w) = x(u, v) + iy(u, v)$ onde $x, y : U \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas. Dizemos que F é **holomorfa** em z se, e somente, se

$$\begin{cases} x_u = y_v \\ x_v = -y_u. \end{cases} \quad (1.41)$$

As identidades (1.41) são chamadas de relações de Cauchy-Riemann.

Definição 1.19 Uma forma quadrática $Q = Fdw^2$, onde $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função contínua, é dita **holomorfa** se F é uma função holomorfa.

Seja S uma superfície orientável e $\Psi : S \rightarrow M^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ uma imersão. Seja $w = u + iv$ e $\bar{w} = u - iv$ seu conjugado. Então

$$u = \frac{w + \bar{w}}{2} \quad \text{e} \quad v = \frac{w - \bar{w}}{2i}.$$

Portanto,

$$\begin{cases} \Psi_w = \frac{1}{2}\Psi_u + \frac{1}{2i}\Psi_v = \frac{1}{2}(\Psi_u - i\Psi_v) \\ \Psi_{\bar{w}} = \frac{1}{2}\Psi_u - \frac{1}{2i}\Psi_v = \frac{1}{2}(\Psi_u + i\Psi_v). \end{cases} \quad (1.42)$$

Seja h a quarta coordenada de Ψ . Então olhando para a quarta coordenada de (1.42) temos que

$$\begin{cases} h_w = \frac{1}{2}h_u + \frac{1}{2i}h_v = \frac{1}{2}(h_u - ih_v), \\ h_{\bar{w}} = \frac{1}{2}h_u - \frac{1}{2i}h_v = \frac{1}{2}(h_u + ih_v). \end{cases} \quad (1.43)$$

Definição 1.20 *Uma superfície de Riemann é uma variedade complexa analítica conexa unidimensional, isto é, uma variedade real M de dimensão 2 conexa com uma família de homeomorfismo $w_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$, com $\alpha \in I$, e U_α são abertos de \mathbb{C} tais que*

i. $\bigcup_\alpha w_\alpha(U_\alpha) = M$

ii. Para todo $\alpha, \beta \in I$ com $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ tem-se que as funções transições

$$f_{\alpha\beta} = w_\alpha \circ w_\beta^{-1} : w_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow w_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

são holomorfas.

A família $\{U_\alpha, w_\alpha\}$ que cobre M (não necessariamente máxima) que satisfaz (i) e (ii) será chamada estrutura analítica (ou parametrizações de coordenadas analíticas).

Exemplo 1.21 *Um exemplo simples é a esfera de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (ou extensão do plano complexo). As parametrizações de coordenadas analíticas são $\{U_i, w_j\}_{i,j=1,2}$ com*

$$\begin{cases} U_1 = \mathbb{C}, \\ U_2 = (\mathbb{C}/\{0\}) \cup \{\infty\} \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} w_1 = w, & w \in U_1, \\ w_2 = \frac{1}{w}, & w \in U_2. \end{cases}$$

observemos que

i. $\bigcup_{i=1}^2 w_i(U_i) = \mathbb{C} \cup (\mathbb{C}/\{0\}) \cup \{\infty\} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

ii. Neste caso a função transição é

$$f_{12} : \mathbb{C}/\{0\} \rightarrow \mathbb{C}/\{0\}$$

$$w \mapsto \frac{1}{z}$$

pois $U_1 \cap U_2 = \mathbb{C}/\{0\} \neq \emptyset$.

Notemos que se escrevermos $w = u + iv$ então $\bar{w} = u - iv$. Logo temos que $z\bar{w} = (u + iv)(u - iv) = u^2 + v^2$. Portanto

$$f_{12}(w) = \frac{1}{w} \frac{\bar{w}}{\bar{w}} = \frac{\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{u}{u^2 + v^2} - i \frac{v}{u^2 + v^2} = x(u, v) + iy(u, v).$$

Logo,

$$\begin{cases} x_u = \frac{v^2 - u^2}{(u^2 + v^2)^2}, & x_v = \frac{-2uv}{(u^2 + v^2)^2}, \\ y_u = \frac{2uv}{(u^2 + v^2)^2}, & y_v = \frac{v^2 - u^2}{(u^2 + v^2)^2}. \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{cases} x_u = y_v, \\ x_v = -y_u. \end{cases}$$

Isto é f_{12} satisfaz as relações de Cauchy - Riemann. Portanto, pela definição (1.18), temos que f_{12} é holomorfa.

Concluimos então que a esfera de Riemann é uma superfície de Riemann.

Definição 1.22 Seja $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ um difeomorfismo. Dizemos que F é um **biholomorfismo** ou um **difeomorfismo holomorfo** se F e F^{-1} são holomorfas. Diz-se que U é **biholomorfo** a $F(U)$ se F é um bilohomorfismo.

Teorema 1.23 (Teorema da Uniformização de Riemann) Seja R uma superfície de Riemann simplesmente conexa. Então R é biholomorfa a uma e somente uma das três superfícies seguintes:

- a) a esfera de Riemann $\mathbb{C} \cup \infty$,
- b) o plano complexo \mathbb{C} ,
- c) o disco unitário $D = \{z \in \mathbb{C}; \|z\| < 1\}$.

Toda superfície regular admite uma estrutura de superfície de Riemann, e em toda superfície de Riemann podemos introduzir uma métrica Riemanniana C^∞ coerente com a estrutura conforme.

Definição 1.24 Seja R uma estrutura de superfície de Riemann de S . Usaremos somente as coordenadas u e v em S tal que $w = u + iv$ é um parâmetro conforme em R . Sejam

$$A = Edu^2 + Fdudv + Gdv^2 \quad e \quad B = edu^2 + fdudv + gdv^2$$

formas quadráticas reais.

Se A é uma forma quadrática real definida em S , escrevemos $R = R_A$ quando $A = \lambda dwd\bar{w}$ em R para alguma função λ . Neste caso, A é dita uma métrica R -conforme. Em R definimos a forma quadrática

$$Q(B, R_A) = \frac{1}{4}(e - g - 2if)dw^2.$$

Se B é positiva definida podemos definir em R_B a forma quadrática

$$Q(A, R_B) = \frac{1}{4}(E - G - 2iF)dw^2. \quad (1.44)$$

Notemos que

$$Q(A, R_B) \equiv 0 \Leftrightarrow E = G \text{ e } F = 0. \quad (1.45)$$

Lema 1.25 Se (A, B) é um par Codazzi e B é definida positiva então a curvatura extrínseca $K(A, B)$ é constante se, e somente se, a forma quadrática $Q(A, R_B)$ é holomorfa.

Prova. Temos que $Q(A, R_B) = \frac{1}{4}(E - G - 2iF)dw^2$ é holomorfa se, e somente se, satisfaz as relações de Cauchy - Riemann. Isto é,

$$\begin{cases} E_u - G_u = -2F_v, \\ E_v - G_v = 2F_u. \end{cases} \quad (1.46)$$

Assim de (1.46) e (1.17) temos que Q é holomorfa se, e somente, se

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(E_u - G_u) + F_v = E(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1) + F(\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2) = 0, \\ \frac{1}{2}(E_v - G_v) - F_u = F(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1) + G(\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2) = 0. \end{cases}$$

Assim temos um sistema linear homogêneo na variáveis

$$(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1) \text{ e } (\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2).$$

Como $D = EG - F^2 \neq 0$ então a única solução desse sistema é nula.

Portanto Q é holomorfa se, e somente se,

$$\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2 = 0. \quad (1.47)$$

Por outro lado $K(A, B)$ é constante se, e somente se, $K_u(A, B) = K_v(A, B) = 0$. Mas em R_B temos que $B = \mu dwd\bar{w}$, onde μ é uma função não nula, ou seja, $e = g = \mu$ e $f = 0$. Logo, pela definição de curvatura extrínseca temos que

$$K(A, B) = \frac{\mu^2}{D}.$$

Portanto $K(A, B)$ é constante se, e somente se,

$$\begin{cases} \mu_u - \mu \frac{D_u}{2D} = 0, \\ \mu_v - \mu \frac{D_v}{2D} = 0. \end{cases} \quad (1.48)$$

Como $D = EG - F^2$, então temos que

$$\begin{cases} D_u = E_u G + E G_u - 2FF_u, \\ D_v = E_v G + E G_v - 2FF_v. \end{cases}$$

Logo, de (1.17) temos que

$$\begin{cases} \frac{D_u}{2D} = \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2, \\ \frac{D_v}{2D} = \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2. \end{cases} \quad (1.49)$$

Portanto substituindo (1.49) em (1.48) temos que $K(A, B)$ é constante se, e somente se,

$$\begin{cases} \mu_u = \mu(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{22}^1), \\ \mu_v = \mu(\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2). \end{cases} \quad (1.50)$$

Mas por outro lado, como (A, B) é um par Codazzi logo (A, B) satisfaz as equações clássicas de Codazzi, ou seja,

$$\begin{cases} \mu_u = \mu(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2), \\ \mu_v = \mu(\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2). \end{cases} \quad (1.51)$$

Logo de (1.50) e (1.51) temos que $K(A, B)$ é constante se, e somente se,

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2, \\ \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2. \end{cases}$$

Portanto $K(A, B)$ é constante se, e somente se,

$$\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2 = 0. \quad (1.52)$$

Concluimos de (1.47) e (1.52) que $K(A, B)$ é constante se, e somente se, a forma quadrática $Q(A, R_B)$ é holomorfa. \square

Superfícies de revolução completas em $H^2 \times \mathbb{R}$

Neste capítulo iremos estudar as superfícies de revolução completas com curvatura Gaussiana constante, $K(I)$, em $H^2 \times \mathbb{R}$.

É conhecido que as rotações preservam orientação e o eixo de rotação. A menos de isometria podemos escolher o eixo de rotação como sendo $(1, 0, 0) \times \mathbb{R}$.

Sejam $X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in H^2 \times \mathbb{R}$. Para rotacionar X em torno do eixo $(1, 0, 0) \times \mathbb{R} = (1, 0, 0, x_4)$ primeiramente vamos transladar para a origem do sistema aplicando a translação $T : H^2 \times \mathbb{R} \rightarrow H^2 \times \mathbb{R}$, tal que $T(X) = X - V$ onde $V = (1, 0, 0, 0)$. Agora podemos aplicar a rotação no eixo $(0, 0, 0, x_4)$ que é dada pela matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v & -\text{sen } v & 0 \\ 0 & \text{sen } v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

onde v é o ângulo de rotação.

Agora para obtermos a rotação no eixo desejado aplicamos a translação inversa $T^{-1}(X) = X + V$. Portanto a rotação em $(1, 0, 0) \times \mathbb{R}$ é dada por

$$R(X) = T^{-1} \circ M \circ T(X). \quad (2.1)$$

Mas

$$T(X) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Agora de (2.2) temos que

$$M \circ T(X) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v & -\operatorname{sen} v & 0 \\ 0 & \operatorname{sen} v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 \cos v - x_3 \operatorname{sen} v \\ x_2 \operatorname{sen} v + x_3 \cos v \\ x_4 \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Por (2.3) temos que a rotação em torno do eixo $(1, 0, 0) \times \mathbb{R}$ é dada por

$$R(x) = T^{-1} \circ M \circ T(x) = \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 \cos v - x_3 \operatorname{sen} v \\ x_2 \operatorname{sen} v + x_3 \cos v \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \cos v - x_3 \operatorname{sen} v \\ x_2 \operatorname{sen} v + x_3 \cos v \\ x_4 \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Agora notemos que o conjunto

$$\mathcal{P} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in H^2 \times \mathbb{R}; x_2 \geq 0 \text{ e } x_3 = 0\} \quad (2.5)$$

intercepta toda órbita da rotação uma única vez. Portanto, iremos tomar uma curva α contida em \mathcal{P} tal que α não intercepta o eixo de rotação exceto no pontos inicial e final. Como queremos superfícies completas se a curva interceptar o eixo de rotação, em seus pontos finais e iniciais, deverá ser ortogonalmente.

Consideremos a curva $\alpha(u) = (\cosh l(u), \operatorname{senh} l(u), 0, h(u)) \subseteq \mathcal{P}$, onde $l(u) \geq 0$ e u é o comprimento de arco, ou seja, $\|\alpha'(u)\| = 1$.

Observações 2.1 *Dois fatos importantes são:*

i. Derivando $\alpha(u)$ temos que $\alpha'(u) = (l'(u) \operatorname{senh} l(u), l'(u) \cosh l(u), 0, h'(u))$. Assim

$$\begin{aligned} \|\alpha'(u)\|^2 &= -(l'(u))^2 \operatorname{senh}^2 l(u) + (l'(u))^2 \cosh^2 l(u) + (h'(u))^2 \\ &= (l'(u))^2 [-\operatorname{senh}^2 l(u) + \cosh^2 l(u)] + (h'(u))^2 \\ &= (l'(u))^2 + (h'(u))^2. \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$(l'(u))^2 + (h'(u))^2 = 1. \quad (2.6)$$

ii. Considerando um ponto $p = \alpha(u)$ para algum $u \in \mathbb{R}$, seja

$$v(u) = \alpha(u) - (1, 0, 0, h(u)) = (\cosh l(u) - 1, \operatorname{senh} l(u), 0, 0)$$

Então a distância de p ao eixo de rotação é

$$\begin{aligned}
 \|v(u)\| &= \sqrt{-(\cosh l(u) - 1)^2 + \sinh^2 l(u)} \\
 &= \sqrt{-\cosh^2 l(u) + 2\cosh l(u) - 1 + \sinh^2 l(u)} \\
 &= \sqrt{-1 + 2\cosh l(u) - 1} \\
 &= \sqrt{2(\cosh l(u) - 1)}.
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Como p é arbitrário, a distância pontual da curva ao eixo é por (2.7).

Notemos que $\alpha(u) \in H^2 \times \mathbb{R}$, pois $\cosh l(u) > 0$ e

$$-\cosh^2 l(u) + \sinh^2 l(u) + 0 = -[\cosh^2 l(u) + \sinh^2 l(u)] = -1.$$

Temos que $\alpha(u) \subset \mathcal{P}$, pois $\sinh l(u) \geq 0$, uma vez que $l(u) \geq 0$ e $x_3 = 0$. Agora de (2.4) temos que a superfície de revolução associada é

$$\Psi(u, v) = (\cosh l(u), \sinh l(u)\cos v, \sinh l(u)\sin v, h(u)).$$

Portanto,

$$\Psi_u(u, v) = (l'(u)\sinh l(u), l'(u)\cosh l(u)\cos v, l'(u)\cosh l(u)\sin v, h'(u)),$$

$$\Psi_v(u, v) = (0, -\sinh l(u)\sin v, \sinh l(u)\cos v, 0),$$

e os coeficientes da primeira forma fundamental são:

$$E(u, v) = 1, \quad F(u, v) = 0 \quad \text{e} \quad G(u, v) = \sinh^2 l(u). \tag{2.8}$$

Logo a métrica induzida é

$$I = du^2 + \sinh^2 l(u)dv^2. \tag{2.9}$$

Considerando $K(I)$ a curvatura Gaussiana de $\Psi(u, v)$, vamos agora analisar os três casos em termos do sinal da constante $K(I)$.

As figuras que serão mostradas no decorrer deste capítulo são gráficos paramétricos que irão representar as curvas geratrizes das superfícies obtidas onde, o eixo y representa a função altura $h(u)$, e o eixo x , a distância da curva ao eixo de rotação.

2.1 Caso 1 - $K(I) > 0$.

Neste caso pela Observação (1.16), temos que

$$\sinh l(u) = A \cos(\sqrt{K(I)}u) + B \sin(\sqrt{K(I)}u).$$

Se $\Psi(u, v)$ é completa, com $K(I) > 0$, então pelo Teorema de Bonnet temos que $\Psi(u, v)$ é compacta. Assim pelo Teorema (1.12), $\Psi(u, v)$ tem que ser a parametrização de uma esfera topológica, isto é, $\alpha(u)$ é uma curva que intercepta o eixo em um ponto inicial e um ponto final.

Seja u_0 o ponto inicial. Reparametrizando α e trocando o parâmetro u por $z = u - u_0$ temos que $\alpha(z)$ corta o eixo em $z = 0$, isto é, $\alpha(0) = (1, 0, 0, h(0))$. Assim obtemos que

$$\begin{cases} \cosh l(0) = 1 \\ \sinh l(0) = 0. \end{cases}$$

Portanto $0 = \sinh l(0) = A_1 \cos(\sqrt{K(I)}0) + B_1 \sin(\sqrt{K(I)}0) = A_1$, onde A_1 e B_1 são constantes reais.

Assim, $\sinh l(z) = B_1 \sin(\sqrt{K(I)}z)$. Portanto,

$$l(z) = \operatorname{arcsenh}(B_1 \sin(\sqrt{K(I)}z)). \quad (2.10)$$

Derivando (2.10) temos que

$$l'(z) = \frac{B_1 \sqrt{K(I)} \cos(\sqrt{K(I)}z)}{\sqrt{1 + B_1^2 \sin^2(\sqrt{K(I)}z)}}.$$

Assim

$$(l'(z))^2 = \frac{B_1^2 K(I) \cos^2(\sqrt{K(I)}z)}{1 + B_1^2 \sin^2(\sqrt{K(I)}z)}.$$

Agora substituindo em (2.6) obtemos que,

$$(h'(z))^2 = 1 - \frac{B_1^2 K(I) \cos^2(\sqrt{K(I)}z)}{1 + B_1^2 \sin^2(\sqrt{K(I)}z)}.$$

Como $\alpha(z)$ deve interceptar o eixo ortogonalmente então $h'(0) = 0$. Logo, $1 - B_1^2 K(I) = 0$, ou seja, $B_1 = \frac{1}{\sqrt{K(I)}}$. Assim,

$$l(z) = \operatorname{arcsenh}\left(\frac{1}{\sqrt{K(I)}} \sin(\sqrt{K(I)}z)\right) \quad (2.11)$$

e

$$(h'(z))^2 = 1 - \frac{K(I)\cos^2(\sqrt{K(I)z})}{K(I) + \operatorname{sen}^2(\sqrt{K(I)z})}.$$

Considerando $W(z) = K(I) + \operatorname{sen}^2(\sqrt{K(I)z})$, temos que

$$h'(z)^2 = \frac{1}{W(z)}[W(z) - K(I)\cos^2(\sqrt{K(I)z})].$$

Agora

$$\begin{aligned} W(z) - K(I)\cos^2(\sqrt{K(I)z}) &= K(I) + \operatorname{sen}^2(\sqrt{K(I)z}) - K(I)\cos^2(\sqrt{K(I)z}) \\ &= [1 + K(I)]\operatorname{sen}^2(\sqrt{K(I)z}). \end{aligned}$$

Assim,

$$(h'(z))^2 = \frac{1}{W(z)}[1 + K(I)]\operatorname{sen}^2(\sqrt{K(I)z}).$$

Portanto, a menos de isometria, temos que

$$\begin{aligned} h'(z) &= \frac{1}{\sqrt{W(z)}}\sqrt{1 + K(I)}\operatorname{sen}(\sqrt{K(I)z}) \\ &= \frac{1}{K(I)\sqrt{W(z)}}K(I)\sqrt{1 + K(I)}\operatorname{sen}(\sqrt{K(I)z}). \end{aligned}$$

Observemos que

$$\begin{aligned} K(I) &= K(I) + \operatorname{sen}^2(\sqrt{K(I)z}) + \cos^2(\sqrt{K(I)z}) \\ &= W(z) + \cos^2(\sqrt{K(I)z}). \end{aligned}$$

Assim obtemos que,

$$\begin{aligned} h'(z) &= \frac{1}{K(I)\sqrt{W(z)}}[W(z) + \cos^2(\sqrt{K(I)z})]\sqrt{1 + K(I)}\operatorname{sen}(\sqrt{K(I)z}) \\ &= \frac{\sqrt{1 + K(I)}}{K(I)}\left[\sqrt{W(z)}\operatorname{sen}(\sqrt{K(I)z}) + \frac{1}{\sqrt{W(z)}}\cos^2(\sqrt{K(I)z})\operatorname{sen}(\sqrt{K(I)z})\right] \\ &= -\frac{\sqrt{1 + K(I)}}{K(I)\sqrt{K(I)}}R(z). \end{aligned}$$

onde

$$R(z) = \left[-\sqrt{W(z)}\sqrt{K(I)}\operatorname{sen}(\sqrt{K(I)z}) - \frac{\sqrt{K(I)}\cos^2(\sqrt{K(I)z})\operatorname{sen}(\sqrt{K(I)z})}{\sqrt{W(z)}} \right],$$

Logo,

$$h'(z) = -\sqrt{\frac{1+K(I)}{K(I)}} \frac{R(z)W(z)}{W(z)K(I)} = -\sqrt{\frac{1+K(I)}{K(I)}} \frac{1}{1+S^2(z)} \frac{R(z)}{W(z)},$$

onde $S(z) = \frac{\cos(\sqrt{K(I)}z)}{\sqrt{W(z)}}$.

Notemos que

$$\begin{aligned} S'(z) &= \frac{1}{W(z)} \left[-\sqrt{W(z)}\sqrt{K(I)}\text{sen}(\sqrt{K(I)}z) - \frac{\sqrt{K(I)}\cos^2(\sqrt{K(I)}z)\text{sen}(\sqrt{K(I)}z)}{\sqrt{W(z)}} \right] \\ &= \frac{R(z)}{W(z)}, \end{aligned}$$

uma vez que $W'(z) = 2\sqrt{K(I)}\cos(\sqrt{K(I)}z)\text{sen}(\sqrt{K(I)}z)$.

Assim,

$$h(z) = -\sqrt{\frac{1+K(I)}{K(I)}} \arctan S(z).$$

Portanto,

$$h(z) = -\sqrt{\frac{1+K(I)}{K(I)}} \arctan \left(\frac{\cos(\sqrt{K(I)}z)}{\sqrt{K(I) + \text{sen}^2(\sqrt{K(I)}z)}} \right). \quad (2.12)$$

Assim $\Psi(u, v) = (\cosh l(u), \text{senh } l(u) \cos v, \text{senh } l(u) \text{sen } v, h(u))$, onde $l(u)$ e $h(u)$ são dadas por (2.11) e (2.12), respectivamente, é a única superfície de revolução completa a menos de isometria, que possui curvatura Gaussiana constante positiva e a curva geratriz é representada graficamente na figura a seguir:

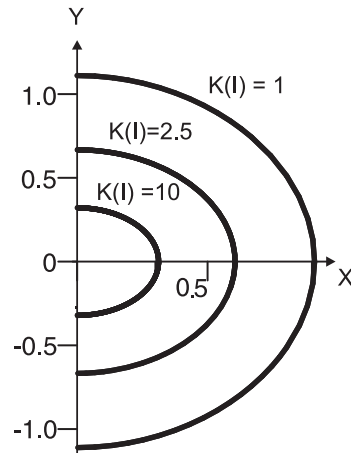


Figura 2.1: Representação da curva geratriz da superfície com curvatura Gaussiana $K(I) > 0$ em $H^2 \times \mathbb{R}$.

2.2 Caso 2 - $K(I) = 0$.

Neste caso, pela Observação (1.16), temos que $\sinh l(u) = Au + B$.

- i. Se $\alpha(u)$ não intercepta o eixo, então a métrica induzida $I = du^2 + (Au + B)^2 dv^2$ da superfície será completa se $\alpha(u)$ é bem definida pra todo $u \in \mathbb{R}$. Portanto $A = 0$ e

$$l(u) = \operatorname{arcsenh} B,$$

e neste caso, $l'(u) = 0$. Portanto, a menos de isometria, segue de (2.6) que $h'(u) = 1$, ou seja,

$$h(u) = u.$$

Assim obtemos o cilindro $\Psi(u, v) = (\cosh(\operatorname{arcsenh} B), B \cos v, B \sin v, u)$.

Como $\alpha(u)$ é bem definida temos que o cilindro é fechado em $H^2 \times \mathbb{R}$, que é uma subvariedade completa de \mathbb{R}_+^4 . Então pela Observação (1.13) e pela Proposição (1.7) temos que o cilindro é uma superfície completa. (Ver Figura (2.2(a)))

- ii. Se $\alpha(u)$ intercepta o eixo, então podemos assumir, sem perda de generalidade, que intercepta em $u = 0$, ou seja, $\alpha(0) = (1, 0, 0, 0)$. Assim,

$$0 = \sinh l(0) = A \cdot 0 + B = B,$$

Logo, $\sinh l(u) = Au$ para todo $u \in \mathbb{R}_+$.

Portanto,

$$l(u) = \operatorname{arcsenh} Au. \tag{2.13}$$

Derivando a equação (2.13) obtemos que

$$l'(u) = \frac{A}{\sqrt{1 + A^2 u^2}}.$$

Assim de (2.6) temos que

$$(h'(u))^2 = 1 - \frac{A^2}{1 + A^2 u^2}.$$

Como $\alpha(u)$ deve interceptar o eixo ortogonalmente, então $h'(0) = 0$.

Logo, $1 - A^2 = 0$, que implica que $A = 1$ pois $\sinh l(u) \geq 0$ e $u \in \mathbb{R}_+$.

Assim, a menos de isometria, temos que

$$l(u) = \operatorname{arcsenh} u$$

e

$$\begin{aligned} h'(u) &= \sqrt{1 - \frac{1}{1+u^2}} \\ &= \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}. \end{aligned}$$

Integrando temos que

$$h(u) = -1 + \sqrt{1+u^2},$$

pois podemos assumir que $\alpha(u)$ intercepta o eixo em $h(0) = 0$.

Como $\alpha(u)$ é bem definida para todo $u \in \mathbb{R}_+$ temos que $\Psi(u, v)$ é fechada em $H^2 \times \mathbb{R}$, que é uma subvariedade completa de \mathbb{R}_1^4 , então pela Observação (1.13) e pela Proposição (1.7) temos que $\Psi(u, v)$ é completa. (Ver Figura (2.2(b)))

Assim obtemos duas superfícies de revolução completas, a menos de isometria, que possuem curvatura Gaussiana nula.

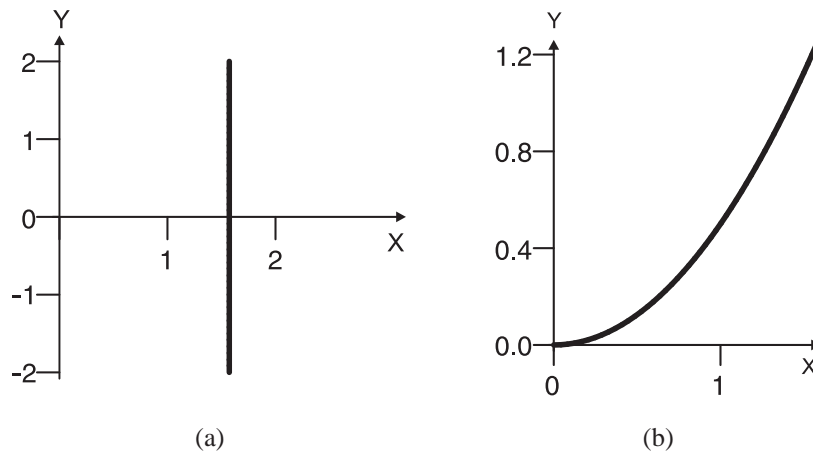


Figura 2.2: Representação das curvas geratrizes das superfícies com curvatura Gaussiana nula em $H^2 \times \mathbb{R}$ que: (a) Não intercepta o eixo de revolução e (b) Intercepta o eixo de revolução.

2.3 Caso 3 - $K(I) < 0$.

Neste caso, pela Observação (1.16), temos que

$$\sinh l(u) = A \cosh(\sqrt{-K(I)}u) + B \sinh(\sqrt{-K(I)}u). \quad (2.14)$$

- i. Se $\alpha(u)$ intercepta o eixo então podemos assumir novamente que intercepta para $u = 0$, ou seja, $\alpha(0) = (1, 0, 0, 0)$. Assim,

$$0 = \sinh l(0) = A \cdot 1 + B \cdot 0 = A.$$

Logo, $\sinh l(u) = B \sinh(\sqrt{-K(I)}u)$ para todo $u \in \mathbb{R}_+$, pois $\sinh l(u) \geq 0$.

Portanto,

$$l(u) = \operatorname{arcsenh}(B \sinh(\sqrt{-K(I)}u)).$$

Derivando a equação acima obtemos que

$$l'(u) = \frac{\sqrt{-K(I)} B \cosh(\sqrt{-K(I)}u)}{\sqrt{1 + B^2 \sinh^2(\sqrt{-K(I)}u)}}.$$

Assim de (2.6) temos que

$$(h'(u))^2 = 1 + \frac{K(I) B^2 \cosh^2(\sqrt{-K(I)}u)}{1 + B^2 \sinh^2(\sqrt{-K(I)}u)}.$$

Como $\alpha(u)$ deve interceptar o eixo ortogonalmente, então $h'(0) = 0$.

Logo, $1 + B^2 K(I) = 0$, que implica que $B = \frac{1}{\sqrt{-K(I)}}$.

Assim,

$$l(u) = \operatorname{arcsenh}\left(\frac{1}{\sqrt{-K(I)}} \sinh(\sqrt{-K(I)}u)\right) \quad (2.15)$$

e

$$(h'(u))^2 = 1 + \frac{K(I) \cosh^2(\sqrt{-K(I)}u)}{-K(I) + \sinh^2(\sqrt{-K(I)}u)}. \quad (2.16)$$

Notemos que $(l'(u))^2 \leq 1$ de (2.6). Assim temos que

$$\frac{-K(I) \cosh^2(\sqrt{-K(I)}u)}{-K(I) + \sinh^2(\sqrt{-K(I)}u)} \leq 1.$$

Assim,

$$-K(I)[\cosh^2(\sqrt{-K(I)u}) - 1] \leq \sinh^2(\sqrt{-K(I)u}).$$

Logo,

$$-K(I) \leq \frac{\sinh^2(\sqrt{-K(I)u})}{\cosh^2(\sqrt{-K(I)u}) - 1} = 1.$$

Portanto, $K(I) \geq -1$. Agora podemos calcular $h(u)$.

Seja

$$W(u) = -K(I) + \sinh^2(\sqrt{-K(I)u}). \quad (2.17)$$

Então derivando temos que

$$W'(u) = 2\sqrt{-K(I)}\sinh(\sqrt{-K(I)u})\cosh(\sqrt{-K(I)u}). \quad (2.18)$$

Assim de (2.16),temos que

$$(h'(u))^2 = \frac{1}{W(u)}[W(u) + K(I)\cosh^2(\sqrt{-K(I)u})].$$

Mas de (2.17) temos que

$$\begin{aligned} W(u) + K(I)\cosh^2(\sqrt{-K(I)u}) &= K(I)[\cosh^2(\sqrt{-K(I)u}) - 1] + \sinh^2(\sqrt{-K(I)u}) \\ &= [1 + K(I)]\sinh^2(\sqrt{-K(I)u}). \end{aligned}$$

Assim,

$$(h'(u))^2 = \frac{1}{W(u)}[1 + K(I)]\sinh^2(\sqrt{-K(I)u}).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} h'(u) &= \frac{1}{\sqrt{W(u)}}\sqrt{1 + K(I)}\sinh(\sqrt{-K(I)u}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{W(u)}}\sqrt{1 + K(I)}\sinh(\sqrt{-K(I)u})\frac{1 + \sqrt{-K(I)}}{1 + \sqrt{-K(I)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{W(u)}}\sqrt{1 + K(I)}\sinh(\sqrt{-K(I)u})\frac{1 + \sqrt{-K(I)}}{1 + \sqrt{-K(I)}}\frac{R(u)}{R(u)} \\ &= \frac{1 + \sqrt{-K(I)}}{R(u)}\sqrt{1 + K(I)}\frac{R(u)\sinh(\sqrt{-K(I)u})}{\sqrt{W(u)}(1 + \sqrt{-K(I)})}, \end{aligned}$$

onde

$$R(u) = \sqrt{W(u)} + \cosh(\sqrt{-K(I)u}).$$

Assim derivando $R(u)$ e usando (2.17) e (2.18) temos que

$$\begin{aligned}
 R'(u) &= \frac{\sqrt{-K(I)}\sinh(\sqrt{-K(I)}u)\cosh(\sqrt{-K(I)}u)}{\sqrt{-K(I) + \sinh^2(\sqrt{-K(I)}u)}} + \sqrt{-K(I)}\sinh(\sqrt{-K(I)}u) \\
 &= \frac{\sqrt{-K(I)}\sinh(\sqrt{-K(I)}u)\cosh(\sqrt{-K(I)}u)}{\sqrt{W(u)}} + \sqrt{-K(I)}\sinh(\sqrt{-K(I)}u) \\
 &= \sqrt{-K(I)}\sinh(\sqrt{-K(I)}u) \left[\frac{\cosh(\sqrt{-K(I)}u)}{\sqrt{W(u)}} + 1 \right]. \tag{2.19}
 \end{aligned}$$

Considerando,

$$L(u) = \frac{R(u)}{1 + \sqrt{-K(I)}}, \tag{2.20}$$

então,

$$\begin{aligned}
 h'(u) &= \frac{1}{L(u)} \sqrt{1 + K(I)} \frac{R(u)\sinh(\sqrt{-K(I)}u)}{\sqrt{W(u)}(1 + \sqrt{-K(I)})} \\
 &= \frac{1}{L(u)} \sqrt{1 + K(I)} \frac{[\sqrt{W(u)} + \cosh(\sqrt{-K(I)}u)]\sinh(\sqrt{-K(I)}u)}{\sqrt{W(u)}(1 + \sqrt{-K(I)})} \\
 &= \frac{1}{L(u)} \frac{\sqrt{1 + K(I)}}{\sqrt{-K(I)}} \sqrt{-K(I)}S(u), \tag{2.21}
 \end{aligned}$$

onde

$$S(u) = \frac{[\sqrt{W(u)} + \cosh(\sqrt{-K(I)}u)]\sinh(\sqrt{-K(I)}u)}{\sqrt{W(u)}(1 + \sqrt{-K(I)})}.$$

Derivando (2.20) e usando (2.19) obtemos que

$$\begin{aligned}
 L'(u) &= \frac{\sqrt{-K(I)}\sinh(\sqrt{-K(I)}u)}{1 + \sqrt{-K(I)}} \left[\frac{\cosh(\sqrt{-K(I)}u)}{\sqrt{W(u)}} + 1 \right] \\
 &= \frac{\sqrt{-K(I)}\sinh(\sqrt{-K(I)}u)}{\sqrt{W(u)}} \left[\frac{\sqrt{W(u)} + \cosh(\sqrt{-K(I)}u)}{(1 + \sqrt{-K(I)})} \right] \\
 &= \sqrt{-K(I)}S(u).
 \end{aligned}$$

Substituindo em (2.21) temos que

$$h'(u) = \sqrt{-\frac{1 + K(I)}{K(I)}} \frac{L'(u)}{L(u)}.$$

Portanto integrando a equação acima temos que

$$h(u) = \sqrt{-\frac{1+K(I)}{K(I)}} \log(L(u)).$$

Substituindo (2.20) na equação acima e usando (2.17) e (2.19) obtemos que

$$h(u) = \sqrt{-\frac{1+K(I)}{K(I)}} \log \left[\frac{\cosh(\sqrt{-K(I)}u) + \sqrt{\sinh^2(\sqrt{-K(I)}u) - K(I)}}{1 + \sqrt{-K(I)}} \right]. \quad (2.22)$$

Como $\alpha(u)$ é bem definida para todo $u \in \mathbb{R}_+$ temos que $\Psi(u, v)$ é fechada em $H^2 \times \mathbb{R}$, que é uma subvariedade completa de \mathbb{R}_1^4 , então pela Observação (1.13) e pela Proposição (1.7) temos que $\Psi(u, v)$ é completa.

Portanto, $\Psi(u, v) = (\cosh l(u), \sinh l(u) \cos v, \sinh l(u) \sin v, h(u))$, onde $l(u)$ e $h(u)$ são dadas respectivamente por (2.15) e (2.22), é a única, a menos de isometria, superfície de revolução completa com curvatura Gaussiana $-1 \leq K(I) < 0$ que corta o eixo de revolução e a curva geratriz é representada graficamente na figura a seguir:

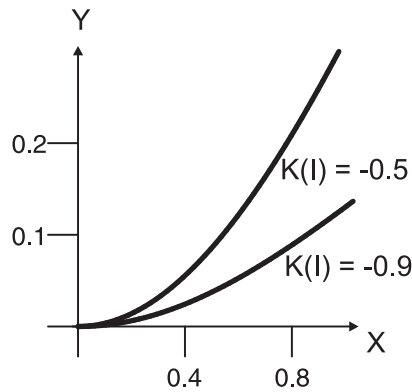


Figura 2.3: Representação da curva geratriz da superfície de revolução com curvatura Gaussiana $-1 \leq K(I) < 0$ em $H^2 \times \mathbb{R}$ que corta o eixo de revolução.

ii. Se $\alpha(u)$ não intercepta o eixo então a métrica induzida

$$I = du^2 + (A \cosh(\sqrt{-K(I)}u) + B \sinh(\sqrt{-K(I)}u))^2 dv^2$$

da superfície para ser completa deve ser bem definida para todo $u \in \mathbb{R}$.

Primeiramente vamos mostrar que $A^2 \geq B^2$.

De fato, suponhamos por absurdo que $A^2 < B^2$. Então pela definição das funções trigonométricas hiperbólicas temos que (2.14) fica

$$\begin{aligned} \sinh l(u) &= A \frac{e^{\sqrt{-K(I)u}} + e^{-\sqrt{-K(I)u}}}{2} + B \frac{e^{\sqrt{-K(I)u}} - e^{-\sqrt{-K(I)u}}}{2} \\ &= \frac{(A+B)e^{\sqrt{-K(I)u}} + (A-B)e^{-\sqrt{-K(I)u}}}{2}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Fazendo $u = 0$ em (2.14) temos que $A = \sinh(l(0)) \geq 0$. Como $A^2 < B^2$ então $A - B < 0$ ou $A + B < 0$. Portanto, se $A + B < 0$ fazendo $u \rightarrow \infty$ em (2.23) obtemos que

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \sinh l(u) = -\infty. \quad (2.24)$$

Analogamente, temos que se $A - B < 0$ fazendo $u \rightarrow -\infty$ em (2.23) obtemos que

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} \sinh l(u) = -\infty, \quad (2.25)$$

que gera uma contradição pois $\sinh l(u) \geq 0$ para todo $u \in \mathbb{R}$. Portanto $A^2 \geq B^2$.

Se $A^2 = B^2$ então mudando u para $-u$ se necessário, podemos assumir que $A = B$.

Logo, (2.14) se torna

$$\begin{aligned} \sinh l(u) &= A \cosh(\sqrt{-K(I)u}) + A \sinh(\sqrt{-K(I)u}) \\ &= A \left[\frac{e^{\sqrt{-K(I)u}} + e^{-\sqrt{-K(I)u}}}{2} + \frac{e^{\sqrt{-K(I)u}} - e^{-\sqrt{-K(I)u}}}{2} \right] \\ &= A e^{\sqrt{-K(I)u}}. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança $z = u - \frac{\ln A}{\sqrt{-K(I)}}$ obtemos que

$$\sinh l(z) = e^{\sqrt{-K(I)z}}.$$

Assim temos que

$$l(z) = \operatorname{arcsenh}(e^{\sqrt{-K(I)z}}). \quad (2.26)$$

Portanto,

$$l'(z) = \frac{\sqrt{-K(I)} e^{\sqrt{-K(I)z}}}{\sqrt{1 + e^{2\sqrt{-K(I)z}}}}.$$

Assim, $(l'(z))^2 = -\frac{K(I)e^{2\sqrt{-K(I)z}}}{1 + e^{2\sqrt{-K(I)z}}}$. Mas de (2.6) temos que $l'(z) \leq 1$ para todo $z \in \mathbb{R}$,

ou seja,

$$-\frac{K(I)e^{2\sqrt{-K(I)z}}}{1 + e^{2\sqrt{-K(I)z}}} \leq 1, \forall z \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$-K(I) \leq \frac{1 + e^{2\sqrt{-K(I)z}}}{e^{2\sqrt{-K(I)z}}} \leq \frac{1}{e^{2\sqrt{-K(I)z}}} + 1.$$

Agora fazendo $z \rightarrow \infty$ na equação acima temos que $K(I) \geq -1$.

Portanto, de (2.6) temos que

$$h'(u) = \sqrt{\frac{1 + (1 + K(I))e^{2\sqrt{-K(I)u}}}{1 + e^{2\sqrt{-K(I)u}}}}.$$

Portanto,

$$h(u) = \int_0^u \sqrt{\frac{1 + (1 + K(I))e^{2\sqrt{-K(I)u}}}{1 + e^{2\sqrt{-K(I)u}}}} du. \quad (2.27)$$

Como $\alpha(u)$ é bem definida para todo $u \in \mathbb{R}$ temos que $\Psi(u, v)$ é fechada em $H^2 \times \mathbb{R}$, que é uma subvariedade completa de \mathbb{R}_1^4 , então pela observação (1.13) e pela proposição (1.7) temos que $\Psi(u, v)$ é completa.

Logo, se $A^2 = B^2$ existe uma única imersão completa, a menos de isometria, de curvatura Gaussiana constante, $K(I) > -1$, cuja a curva geratriz é dada por $\alpha(u) = (\cosh l(u), \sinh l(u), 0, h(u))$ tal que $l(u)$ e $h(u)$ são dados respectivamente por (2.26) e (2.27) e é representada graficamente na figura a seguir:

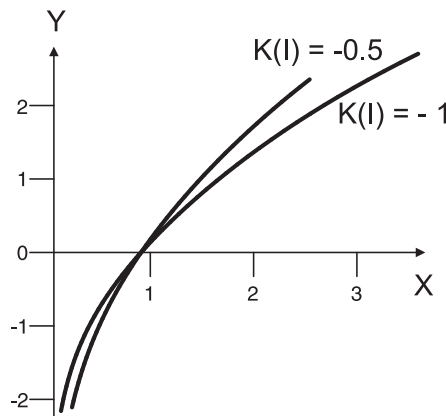


Figura 2.4: Representação da curva geratriz da superfície de revolução com curvatura Gaussiana $-1 \leq K(I) < 0$ em $H^2 \times \mathbb{R}$ que não corta o eixo de revolução - Caso $A^2 = B^2$.

Se $A^2 > B^2$ então $\frac{B^2}{A^2} < 1$. Portanto existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{B}{A} = \tanh \theta$. Assim existe $C > 0$ tal que $A = C \cosh \theta$ e $B = C \sinh \theta$. Portanto de (2.14) temos que

$$\begin{aligned} \sinh l(u) &= C \cosh \theta \cosh(\sqrt{-K(I)}u) + C \sinh \theta \sinh(\sqrt{-K(I)}u) \\ &= C \cosh(\sqrt{-K(I)}u + \theta). \end{aligned}$$

Assim fazendo a mudança u pra $z = u + \frac{\theta}{\sqrt{-K(I)}}$ temos que

$$\sinh l(u) = C \cosh(\sqrt{-K(I)}u). \quad (2.28)$$

Portanto,

$$l'(u) = \frac{C \sqrt{-K(I)} \sinh(\sqrt{-K(I)}u)}{\sqrt{1 + C^2 \cosh^2(\sqrt{-K(I)}u)}}.$$

Assim,

$$(l'(u))^2 = -\frac{K(I)C^2 \sinh^2(\sqrt{-K(I)}u)}{1 + C^2 \cosh^2(\sqrt{-K(I)}u)}.$$

Mas de (2.6) temos que $l'(u) \leq 1$ para todo $u \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$-\frac{K(I)C^2 \sinh^2(\sqrt{-K(I)}u)}{1 + C^2 \cosh^2(\sqrt{-K(I)}u)} \leq 1, \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} -K(I) &\leq \frac{1 + C^2 \cosh^2(\sqrt{-K(I)}u)}{C^2 \sinh^2(\sqrt{-K(I)}u)} \\ &\leq \frac{1 + C^2}{C^2 \sinh^2(\sqrt{-K(I)}u)} + 1. \end{aligned}$$

Agora fazendo $u \rightarrow -\infty$ na equação acima temos que $K(I) \geq -1$.

Portanto, de (2.6) temos que

$$h'(u) = \sqrt{1 + \frac{K(I)C^2 \sinh^2(\sqrt{-K(I)}u)}{1 + C^2 \cosh^2(\sqrt{-K(I)}u)}}.$$

Logo,

$$h(u) = \int_0^u \sqrt{1 + \frac{K(I)C^2 \sinh^2(\sqrt{-K(I)}u)}{1 + C^2 \cosh^2(\sqrt{-K(I)}u)}} du. \quad (2.29)$$

Como $\alpha(u)$ é bem definida para todo $u \in \mathbb{R}$ e toda constante $C \in \mathbb{R}$ temos que $\Psi(u, v)$ é fechada em $H^2 \times \mathbb{R}$, que é uma subvariedade completa de \mathbb{R}_+^4 , então pela observação (1.13) e pela proposição (1.7) temos que $\Psi(u, v)$ é completa.

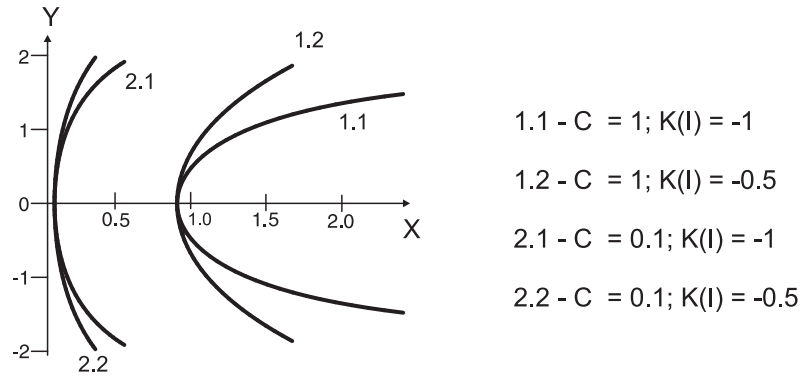


Figura 2.5: Representação das curvas geratrizes das superfícies de revolução com curvatura Gaussiana $-1 \leq K(I) < 0$ em $H^2 \times \mathbb{R}$ que não corta o eixo de revolução - Caso $A^2 > B^2$.

Portanto, se $A^2 > B^2$ encontramos infinitas superfícies de curvatura Gaussiana constante, $K(I) > -1$, que não interceptam o eixo de revolução tal que a curva geratriz é dada por $\alpha(u) = (\cosh l(u), \sinh l(u), 0, h(u))$ onde $l(u)$ e $h(u)$ são dados respectivamente por (2.28) e (2.29) e C é um número real qualquer.

Neste caso, provamos a existência de infinitas superfícies de revolução completas com curvatura Gaussiana constante $-1 \leq K(I) < 0$.

Assim classificamos as superfícies de revolução com curvatura Gaussiana constante completas em $H^2 \times \mathbb{R}$.

Superfícies de revolução completas em $S^2 \times \mathbb{R}$

Neste capítulo iremos fazer o mesmo estudo do capítulo anterior classificando as superfícies de revolução completas com curvatura Gaussiana constante, $K(I)$, em $S^2 \times \mathbb{R}$.

Assim como no capítulo 2, a menos de isometria, podemos escolher o eixo $(1, 0, 0) \times \mathbb{R}$ como o eixo de revolução e analogamente a matriz rotação será dada por (2.1).

Novamente o conjunto

$$\mathcal{P} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^2 \times \mathbb{R}; x_2 \geq 0 \text{ e } x_3 = 0\} \quad (3.1)$$

intercepta toda órbita da rotação uma vez. Portanto, nós iremos tomar uma curva α contida em \mathcal{P} tal que α não intercepta o eixo de rotação, exceto no pontos inicial e final ortogonalmente, pois queremos superfícies completas.

Consideremos a curva $\alpha(u) = (\text{sen } l(u), \text{cos } l(u), 0, h(u)) \subseteq \mathcal{P}$ onde $\text{cos } l(u) \geq 0$ e u é o comprimento de arco, ou seja, $\|\alpha'(u)\| = 1$.

Observações 3.1 *Dois fatos importantes são:*

i. Derivando $\alpha(u)$ temos que $\alpha'(u) = (l'(u)\text{cos } l(u), -l'(u)\text{sen } l(u), 0, h'(u))$. Assim

$$\begin{aligned} \|\alpha'(u)\|^2 &= (l'(u))^2 \text{cos}^2 l(u) + (l'(u))^2 \text{sen}^2 l(u) + (h'(u))^2 \\ &= (l'(u))^2 [\text{cos}^2 l(u) + \text{sen}^2 l(u)] + h'(u)^2 \\ &= (l'(u))^2 + (h'(u))^2. \end{aligned}$$

Assim temos que

$$(l'(u))^2 + (h'(u))^2 = 1. \quad (3.2)$$

ii. Considere um ponto $p = \alpha(u)$ para algum $u \in \mathbb{R}$. Seja

$$v(u) = \alpha(u) - (1, 0, 0, h(u)) = (\text{sen } l(u) - 1, \text{cos } l(u), 0, 0)$$

então a distância de p ao eixo de rotação é

$$\begin{aligned}
\|v(u)\| &= \sqrt{(\operatorname{sen} l(u) - 1)^2 + \cos^2 l(u)} \\
&= \sqrt{\operatorname{sen}^2 l(u) - 2\operatorname{sen} l(u) + 1 + \cos^2 l(u)} \\
&= \sqrt{1 - 2\operatorname{sen} l(u) + 1} \\
&= \sqrt{2(1 - \operatorname{sen} l(u))}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Como p é arbitrário, a distância pontual da curva ao eixo é dada por (3.3).

Notemos que $\alpha(u) \in \mathcal{S}^2 \times \mathbb{R}$, pois

$$\operatorname{sen}^2 l(u) + \cos^2 l(u) + 0 = \operatorname{sen}^2 l(u) + \cos^2 l(u) = 1.$$

Assim $\alpha(u) \subset \mathcal{P}$ pois $\cos l(u) \geq 0$ e $x_3 = 0$.

Portanto a superfície de revolução associada é

$$\Psi(u, v) = (\operatorname{sen} l(u), \cos l(u) \cos v, \cos l(u) \operatorname{sen} v, h(u)).$$

Portanto,

$$\Psi_u(u, v) = (l'(u) \cos l(u), -l'(u) \operatorname{sen} l(u) \cos v, -l'(u) \operatorname{sen} l(u) \operatorname{sen} v, h'(u)),$$

$$\Psi_v(u, v) = (0, -\cos l(u) \operatorname{sen} v, \cos l(u) \cos v, 0)$$

e os coeficientes da primeira forma fundamental são:

$$E(u, v) = 1, \quad F(u, v) = 0 \quad \text{e} \quad G(u, v) = \cos^2 l(u).$$

Logo a métrica induzida é

$$I = du^2 + \cos^2 l(u) dv^2.$$

Considerando $K(I)$ a curvatura Gaussiana de $\Psi(u, v)$, vamos agora analisar os três casos em termos do sinal da constante $K(I)$.

As figuras que serão mostradas no decorrer deste capítulo são gráficos paramétricos que irão representar as curvas geratrizes das superfícies obtidas onde, o eixo y representa a função altura $h(u)$, e o eixo x , a distância da curva ao eixo de rotação.

3.1 Caso 1 - $K(I) > 0$.

Neste caso pela Observação (1.16), temos que

$$\cos l(u) = A \cos(\sqrt{K(I)}u) + B \sin(\sqrt{K(I)}u).$$

Se $\Psi(u, v)$ é completa com $K(I) > 0$ então pelo Teorema de Bonnet temos que $\Psi(u, v)$ é compacta. Assim pelo Teorema (1.12), $\Psi(u, v)$ tem que ser a parametrização de uma esfera topológica, isto é, $\alpha(u)$ é uma curva que intercepta o eixo em um ponto inicial e um ponto final.

Seja u_0 o ponto inicial. Reparametrizando α e trocando o parâmetro u por $z = u - u_0$ temos que $\alpha(z)$ corta o eixo em $z = 0$, isto é, $\alpha(0) = (1, 0, 0, h(0))$. Assim obtemos que

$$\begin{cases} \sin l(0) = 1 \\ \cos l(0) = 0. \end{cases}$$

Portanto $0 = \cos l(0) = A_1 \cos(\sqrt{K(I)}0) + B_1 \sin(\sqrt{K(I)}0) = A_1$ onde A_1 e B_1 são constantes reais.

Assim,

$$\cos l(z) = B_1 \sin(\sqrt{K(I)}z). \quad (3.4)$$

Portanto,

$$l(z) = \arccos(B_1 \sin(\sqrt{K(I)}z)). \quad (3.5)$$

Derivando (3.5) temos que

$$l'(z) = -\frac{B_1 \sqrt{K(I)} \cos(\sqrt{K(I)}z)}{\sqrt{1 - B_1^2 \sin^2(\sqrt{K(I)}z)}}.$$

Assim,

$$(l'(z))^2 = \frac{B_1^2 K(I) \cos^2(\sqrt{K(I)}z)}{1 - B_1^2 \sin^2(\sqrt{K(I)}z)}.$$

Agora substituindo em (3.2) obtemos que,

$$(h'(z))^2 = 1 - \frac{B_1^2 K(I) \cos^2(\sqrt{K(I)}z)}{1 - B_1^2 \sin^2(\sqrt{K(I)}z)}.$$

Como $\alpha(z)$ deve interceptar o eixo ortogonalmente então $h'(0) = 0$. Logo, $1 - B_1^2 K(I) = 0$, ou seja, $B_1 = \frac{1}{\sqrt{K(I)}}$. Assim,

$$l(z) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{K(I)}} \sin(\sqrt{K(I)}z)\right) \quad (3.6)$$

e

$$(h'(z))^2 = 1 - \frac{K(I)\cos^2(\sqrt{K(I)}z)}{K(I) - \operatorname{sen}^2(\sqrt{K(I)}z)}. \quad (3.7)$$

Como $\cos l(z) \geq 0$ então de (3.4) temos que $\frac{1}{\sqrt{K(I)}}\operatorname{sen}(\sqrt{K(I)}z) \geq 0$. Portanto, $0 \leq \sqrt{K(I)}z \leq \pi$, isto é, $0 \leq z \leq \frac{\pi}{\sqrt{K(I)}}$.

Mas por outro lado temos que $\cos l(z) \leq 1$, logo $\frac{1}{\sqrt{K(I)}}\operatorname{sen}(\sqrt{K(I)}z) \leq 1$ para todo $0 \leq z \leq \frac{\pi}{\sqrt{K(I)}}$. Em particular, para $z = \frac{\pi}{2\sqrt{K(I)}}$ assim obtemos que $\frac{1}{\sqrt{K(I)}} \leq 1$, ou seja, $K(I) \geq 1$.

Agora podemos calcular $h(z)$. De (3.7) temos que

$$\begin{aligned} (h'(z))^2 &= \frac{K(I) - \operatorname{sen}^2(\sqrt{K(I)}z) - K(I)\cos^2(\sqrt{K(I)}z)}{K(I) - \operatorname{sen}^2(\sqrt{K(I)}z)} \\ &= \frac{(K(I) - 1)\operatorname{sen}^2(\sqrt{K(I)}z)}{K(I) - \operatorname{sen}^2(\sqrt{K(I)}z)}. \end{aligned}$$

Portanto, a menos de isometria, temos que

$$h'(z) = \frac{\sqrt{(K(I) - 1)}\operatorname{sen}(\sqrt{K(I)}z)}{\sqrt{K(I) - \operatorname{sen}^2(\sqrt{K(I)}z)}}. \quad (3.8)$$

Multiplicando e dividindo a equação acima por

$$S(z) = \cos(\sqrt{K(I)}z) + \sqrt{K(I) - \operatorname{sen}^2(\sqrt{K(I)}z)}, \quad (3.9)$$

(3.8) é dada por

$$\begin{aligned} h'(z) &= \frac{\sqrt{(K(I) - 1)}\operatorname{sen}(\sqrt{K(I)}z)S(z)}{\sqrt{K(I) - \operatorname{sen}^2(\sqrt{K(I)}z)}S(z)} \\ &= \frac{\sqrt{(K(I) - 1)}\operatorname{sen}(\sqrt{K(I)}z)[\cos(\sqrt{K(I)}z) + \sqrt{K(I) - \operatorname{sen}^2(\sqrt{K(I)}z)}]}{\sqrt{K(I) - \operatorname{sen}^2(\sqrt{K(I)}z)}S(z)} \\ &= \frac{\sqrt{(K(I) - 1)}\operatorname{sen}(\sqrt{K(I)}z)}{S(z)} \left[\frac{\cos(\sqrt{K(I)}z)}{\sqrt{K(I) - \operatorname{sen}^2(\sqrt{K(I)}z)}} + 1 \right]. \quad (3.10) \end{aligned}$$

Multiplicando e dividindo a equação (3.10) por $\sqrt{K(I)}(1 + \sqrt{K(I)})$ temos que

$$h'(z) = -\frac{\sqrt{K(I)-1}\text{sen}(\sqrt{K(I)}z)\sqrt{K(I)}}{\sqrt{K(I)}S(z)} \left[\frac{-\cos(\sqrt{K(I)}z)}{\sqrt{K(I)-\text{sen}^2(\sqrt{K(I)}z)}} - 1 \right] \frac{1+\sqrt{K(I)}}{1+\sqrt{K(I)}}. \quad (3.11)$$

Fazendo

$$W(z) = \frac{S(z)}{1+\sqrt{K(I)}}. \quad (3.12)$$

Derivando (3.9) e (3.12) temos que

$$\begin{aligned} S'(z) &= -\sqrt{K(I)}\text{sen}(\sqrt{K(I)}z) - \frac{\sqrt{K(I)}\text{sen}(\sqrt{K(I)}z)\cos(\sqrt{K(I)}z)}{\sqrt{K(I)-\text{sen}^2(\sqrt{K(I)}z)}} \\ &= \sqrt{K(I)}\text{sen}(\sqrt{K(I)}z) \left[-\frac{\cos(\sqrt{K(I)}z)}{\sqrt{K(I)-\text{sen}^2(\sqrt{K(I)}z)}} - 1 \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

e

$$W'(z) = \frac{S'(z)}{1+\sqrt{K(I)}}. \quad (3.14)$$

Portanto usando (3.12), (3.13) e (3.14) temos que

$$\begin{aligned} h'(z) &= -\sqrt{\frac{K(I)-1}{K(I)}} \frac{\sqrt{K(I)}\text{sen}(\sqrt{K(I)}z)}{W(z)(1+\sqrt{K(I)})} \left[\frac{-\cos(\sqrt{K(I)}z)}{\sqrt{K(I)-\text{sen}^2(\sqrt{K(I)}z)}} - 1 \right] \\ &= -\sqrt{\frac{K(I)-1}{K(I)}} \frac{S'(z)}{W(z)(1+\sqrt{K(I)})} \\ &= -\sqrt{\frac{K(I)-1}{K(I)}} \frac{W'(z)}{W(z)}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Portanto integrando a equação acima temos que

$$\begin{aligned} h(z) &= -\sqrt{\frac{K(I)-1}{K(I)}} \log(W(z)) \\ &= -\sqrt{\frac{K(I)-1}{K(I)}} \log \left[\frac{S(z)}{1+\sqrt{K(I)}} \right] \\ &= -\sqrt{\frac{K(I)-1}{K(I)}} \log \left[\frac{\cos(\sqrt{K(I)}z) + \sqrt{K(I)-\text{sen}^2(\sqrt{K(I)}z)}}{1+\sqrt{K(I)}} \right]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Assim $\Psi(u, v) = (\text{sen } l(u), \cos l(u) \cos v, \cos l(u) \text{sen } v, h(u))$ onde $l(u)$ e $h(u)$ são dadas por (3.6) e (3.16) respectivamente, é a única superfície de revolução completa, a

menos de isometria, que possui curvatura Gaussiana positiva constante $K(I) \geq 1$ e a sua curva geratriz é representada graficamente na figura a seguir:

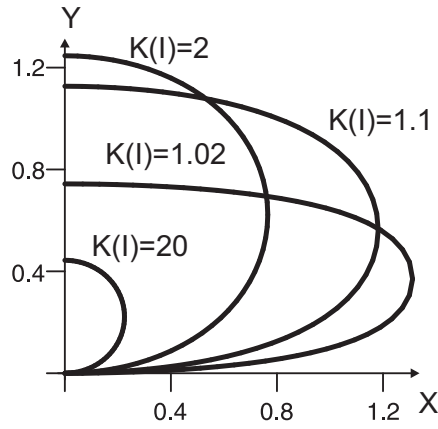


Figura 3.1: Representação da curva geratriz da superfície com curvatura Gaussiana $K(I) > 0$ em $S^2 \times \mathbb{R}$.

3.2 Caso 2 - $K(I) = 0$.

Neste caso, pela Observação (1.16), temos que $\cos l(u) = Au + B$.

- i. Se $\alpha(u)$ não intercepta o eixo então a métrica induzida $I = du^2 + (Au + B)^2 dv^2$ da superfície será completa se $\alpha(u)$ é bem definida pra todo $u \in \mathbb{R}$. Portanto $A = 0$. Assim temos que $\cos l(u) = B$. Logo, $l(u) = \arccos B$ e $l'(u) = 0$. Portanto de (2.6) temos que $h'(u) = 1$, ou seja,

$$h(u) = u$$

Assim obtemos o cilindro $\Psi(u, v) = (\sin(\arccos B), B \cos v, B \sin v, u)$.

Como $\alpha(u)$ é bem definida temos que o cilindro é fechado em $S^2 \times \mathbb{R}$, e como $S^2 \times \mathbb{R}$ é uma subvariedade completa de \mathbb{R}_0^4 então pela Observação (1.13) e pela Proposição (1.7) temos que o cilindro é uma superfície completa. Ver Figura 7.

- ii. Se $\alpha(u)$ intercepta o eixo então podemos assumir sem perda de generalidade que intercepta pra $u = 0$, ou seja, $\alpha(0) = (1, 0, 0, 0)$. Assim,

$$0 = \cos l(0) = A \cdot 0 + B = B,$$

Logo, $\cos l(u) = Au \in [-1, 1]$. Assim $u \in [\frac{-1}{A}, \frac{1}{A}]$. Portanto a métrica induzida não é completa.

Assim obtemos somente os cilindros flat como superfície de revolução com curvatura nula em $S^2 \times \mathbb{R}$.

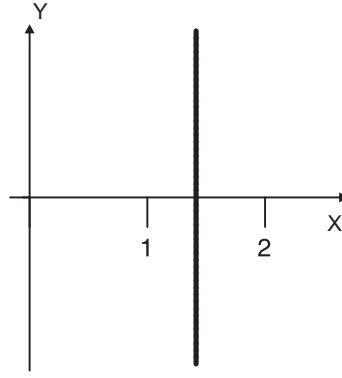


Figura 3.2: Representação da curva geratriz da superfície com curvatura Gaussiana nula em $S^2 \times \mathbb{R}$ que não intercepta o eixo de revolução.

3.3 Caso 3 - $K(I) < 0$.

Neste caso, pela Observação (1.16), temos que

$$\cos l(u) = A \cosh(\sqrt{-K(I)}u) + B \sinh(\sqrt{-K(I)}u). \quad (3.17)$$

- i. Se $\alpha(u)$ não intercepta o eixo e a imersão é completa então $u \in \mathbb{R}$, mas isto não ocorre pois $A \cosh(\sqrt{-K(I)}u) + B \sinh(\sqrt{-K(I)}u) \notin [-1, 1]$ e $\cos l(u) \in [-1, 1]$ para todo $u \in \mathbb{R}$, que contradiz (3.17).
- ii. Se $\alpha(u)$ intercepta o eixo então podemos assumir sem perda de generalidade que intercepta pra $u = 0$, ou seja, $\alpha(0) = (1, 0, 0, 0)$. Assim,

$$0 = \cos l(0) = A \cosh(\sqrt{-K(I)}0) + B \sinh(\sqrt{-K(I)}0) = A,$$

Logo,

$$\cos l(u) = B \sinh(\sqrt{-K(I)}u). \quad (3.18)$$

Se a imersão é completa então $u \in \mathbb{R}_+$ mas isto não ocorre pois $B \sinh(\sqrt{-K(I)}u) \notin [-1, 1]$ e $\cos l(u) \in [-1, 1]$ para todo $u \in \mathbb{R}_+$ que contradizem (3.18).

Portanto não existem superfícies de revolução completas em $S^2 \times \mathbb{R}$ com curvatura Gaussiana constante negativa.

Resultados sobre unicidade e não-existência de superfícies completas com curvatura Gaussiana constante em $H^2 \times \mathbb{R}$ e $S^2 \times \mathbb{R}$

Neste capítulo vamos demonstrar a unicidade de imersões isométricas completas com curvatura Gaussiana constante $K(I) > 0$ em $H^2 \times \mathbb{R}$ e $K(I) > 1$ em $S^2 \times \mathbb{R}$ e a não existência de imersões isométricas completas em $H^2 \times \mathbb{R}$ e $S^2 \times \mathbb{R}$ com curvatura Gaussiana constante negativa $K(I) < -1$.

Mas antes de demonstramos os teoremas principais precisamos de algumas definições e resultados.

4.1 Lemas Básicos

Nesta seção iremos definir uma nova forma quadrática A e encontraremos condições necessárias e suficientes para que A seja Riemanniana, e neste caso o par (A, II) será um par Codazzi com curvatura extrínseca constante.

Seja S uma superfície orientável e $\Psi : S \rightarrow M^2(\xi) \times \mathbb{R}$ a imersão dada por (1.18) com vetor normal unitário N . Sejam $I = \langle d\Psi, d\Psi \rangle$ e $II = \langle -dN, d\Psi \rangle$ a primeira e a segunda formas fundamentais de Ψ respectivamente e $K(I)$ a curvatura Gaussiana.

Definição 4.1 *Considere $K(I) \neq \xi$ para todo ponto de S . Então podemos definir uma nova forma quadrática*

$$A = I + \frac{1}{\xi K(I) - 1} dh^2, \quad (4.1)$$

onde h é a função altura.

Se A é uma métrica Riemanniana podemos relacionar a curvatura extrínseca $K(A, II)$ com a curvatura Gaussiana $K(I)$.

Lema 4.2 *Se A é uma métrica Riemanniana em S então a curvatura extrínseca do par (A, II) é dada por $K(A, II) = K(I) - \xi$.*

Prova. Sejam η o normal unitário de $M^2(\xi) \times \mathbb{R}$ em \mathbb{R}_k^4 dado por (1.20) e $II_\eta = \langle -d\eta, d\Psi \rangle$ a segunda forma fundamental induzida por η em S . Observemos que

$$d\eta = d\Psi - (0, 0, 0, dh). \quad (4.2)$$

Assim

$$\langle -d\eta, d\Psi \rangle = \langle -d\Psi + (0, 0, 0, dh), d\Psi \rangle = \langle -d\Psi, d\Psi \rangle + dh^2 = -I + dh^2$$

Consideremos (u, v) parâmetros isotérmicos locais para a métrica induzida I , ou seja, $I = E(du^2 + dv^2)$ para uma função positiva E . Assim da equação acima temos que

$$\begin{cases} e_\eta = -E + h_u^2, \\ f_\eta = h_u h_v, \\ g_\eta = -E + h_v^2. \end{cases} \quad (4.3)$$

Assim temos que

$$\begin{aligned} K(I, II_\eta) &= \frac{e_\eta g_\eta - f_\eta^2}{EG - F^2} = \frac{(-E + h_u^2)(-E + h_v^2) - (h_u h_v)^2}{E^2} = \frac{E^2 - E(h_u^2 + h_v^2)}{E^2} \\ &= 1 - \frac{h_u^2 + h_v^2}{E} = 1 - \|\nabla h\|^2. \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde $\|\nabla h\|$ é a norma do gradiente de h na métrica induzida I .

Tomemos

$$c = \frac{1}{\xi K(I) - 1}. \quad (4.5)$$

Temos por (4.1) que A é dada por

$$A = (E + ch_u^2)du^2 + 2ch_u h_v + (E + ch_v^2)dv^2, \quad (4.6)$$

assim os coeficientes de A são

$$\bar{E} = E + ch_u^2, \quad \bar{F} = ch_u h_v \text{ e } \bar{G} = E + ch_v^2. \quad (4.7)$$

Então pela definição de curvatura extrínscica temos que

$$\begin{aligned} K(A, II) &= \frac{eg - f^2}{(E + ch_u^2)(E + ch_v^2) - (ch_u h_v)^2} \\ &= \frac{eg - f^2}{E^2} \frac{1}{1 + c\|\nabla h\|^2} = \frac{K(I, II)}{1 + c\|\nabla h\|^2}. \end{aligned}$$

Agora usando (1.31),(4.4) e (4.5) temos que

$$\begin{aligned}
 K(A, II) &= \frac{K(I, II)}{1 + \frac{1}{\xi K(I) - 1} \|\nabla h\|^2} \\
 &= \frac{(\xi K(I) - 1)K(I, II)}{\xi K(I) - 1 + \|\nabla h\|^2} \\
 &= \frac{(\xi K(I) - 1)(K(I) - \xi K(I, II_\eta))}{\xi K(I) - K(I, II_\eta)}. \tag{4.8}
 \end{aligned}$$

observemos que como $\xi = \pm 1$ temos $\frac{1}{\xi} = \xi$ e $\xi^2 = 1$. Logo $K(A, II)$ fica

$$\begin{aligned}
 K(A, II) &= \frac{(\xi K(I) - 1)(K(I) - \xi K(I, II_\eta))}{\xi(K(I) - \xi K(I, II_\eta))} \\
 &= \frac{\xi K(I) - 1}{\xi} = K(I) - \xi. \tag{4.9}
 \end{aligned}$$

□

A forma quadrática real A dada por (4.6) é uma métrica Riemanniana em S se, e somente se, A é positiva definida, isto é,

$$\begin{cases} (E + ch_u^2) + (E + ch_v^2) = E(2 + c\|\nabla h\|^2) > 0, \\ (E + ch_u^2)(E + ch_v^2) - (ch_u h_v)^2 = E^2(1 + c\|\nabla h\|^2) > 0, \end{cases} \tag{4.10}$$

ou equivalentemente,

$$1 + c\|\nabla h\|^2 > 0. \tag{4.11}$$

Lema 4.3 *Seja S uma superfície orientável e $\Psi : S \rightarrow M^2(\xi) \times \mathbb{R}$ uma imersão isométrica com curvatura Gaussiana $K(I)$. Então a forma quadrática A dada por (4.6) **não** é uma métrica Riemanniana em S se, e somente se,*

- a) *Existe um ponto em S satisfazendo $0 \leq K(I) < 1$ e $\|\nabla h\|^2 \geq 1 - K(I)$ quando $\xi = 1$.*
- b) *Existe um ponto em S satisfazendo $-1 < K(I) \leq 0$ e $\|\nabla h\|^2 \geq 1 + K(I)$ quando $\xi = -1$.*

onde h é a função altura da imersão Ψ .

Prova. Seja $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ então $h = \langle \Psi, e_4 \rangle$. Assim para todo vetor tangente unitário w temos que

$$\langle \nabla h, w \rangle = \langle d\Psi(w), e_4 \rangle.$$

Assim pela desigualdade de Cauchy-Schwartz temos que

$$|\langle \nabla h, w \rangle| = |\langle d\Psi(w), e_4 \rangle| \leq \|d\Psi(w)\| \|e_4\| = \|d\Psi(w)\|. \quad (4.12)$$

Como Ψ é imersão isométrica então para todo vetor tangente unitário w temos que

$$\|d\Psi(w)\| = \|w\| = 1.$$

Assim (4.12) fica

$$|\langle \nabla h, w \rangle| \leq \|w\| = 1. \quad (4.13)$$

Agora fazendo $w = \frac{\nabla h}{\|\nabla h\|}$ na equação acima obtemos que

$$|\langle \nabla h, \frac{\nabla h}{\|\nabla h\|} \rangle| = \frac{|\langle \nabla h, \nabla h \rangle|}{\|\nabla h\|} = \frac{\|\nabla h\|^2}{\|\nabla h\|} = \|\nabla h\| \leq 1.$$

Portanto $\|\nabla h\| \leq 1$. Assim a condição (4.11) só não é satisfeita se somente, se

$$c \leq -1 \quad \text{e} \quad \|\nabla h\|^2 \geq \frac{-1}{c}. \quad (4.14)$$

a) Se $\xi = 1$ temos de (4.5) que $c = \frac{1}{K(I)-1}$. Logo (4.14) é satisfeita se, e somente se ,

$$\frac{1}{K(I)-1} \leq -1 \quad \text{e} \quad \|\nabla h\|^2 \geq \frac{-1}{\frac{1}{K(I)-1}}. \quad (4.15)$$

Ou seja,

$$-1 \leq K(I) - 1 < 0 \quad \text{e} \quad \|\nabla h\|^2 \geq 1 - K(I). \quad (4.16)$$

Portanto,

$$0 \leq K(I) < 1 \quad \text{e} \quad \|\nabla h\|^2 \geq 1 - K(I). \quad (4.17)$$

b) Se $\xi = -1$ temos de (4.5) que $c = \frac{1}{-K(I)-1}$. Logo (4.14) é satisfeita se, e somente se ,

$$\frac{1}{-K(I)-1} \leq -1 \quad \text{e} \quad \|\nabla h\|^2 \geq \frac{-1}{\frac{1}{-K(I)-1}}. \quad (4.18)$$

Ou seja,

$$-1 \leq -K(I) - 1 < 0 \quad \text{e} \quad \|\nabla h\|^2 \geq 1 + K(I). \quad (4.19)$$

Portanto,

$$-1 < K(I) \leq 0 \quad \text{e} \quad \|\nabla h\|^2 \geq 1 + K(I). \quad (4.20)$$

□

Agora vamos focar nossa atenção nas imersões de curvatura Gaussiana constante.

Observação 4.4 *Seja $\Psi : S \rightarrow M^2(\xi) \times \mathbb{R}$ uma imersão com curvatura Gaussiana constante $K(I)$ e com a métrica induzida $I = \frac{1}{d^2}(du^2 + dv^2)$ onde $d = d(u, v)$. Então pela observação (1.17) temos que*

$$K(I) = -\frac{d^2}{2}\Delta\left(\log \frac{1}{d^2}\right). \quad (4.21)$$

Notemos que

$$\begin{cases} \frac{\partial \log \frac{1}{d^2}}{\partial u} = \frac{-2d_u}{d} \\ \frac{\partial \log \frac{1}{d^2}}{\partial v} = \frac{-2d_v}{d}, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \log \frac{1}{d^2}}{\partial u^2} = \frac{2d_u^2}{d^2} - \frac{2d_{uu}}{d} \\ \frac{\partial^2 \log \frac{1}{d^2}}{\partial v^2} = \frac{2d_v^2}{d^2} - \frac{2d_{vv}}{d}. \end{cases}$$

Assim,

$$\Delta\left(\log \frac{1}{d^2}\right) = \frac{\partial^2 \log \frac{1}{d^2}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log \frac{1}{d^2}}{\partial v^2} = \frac{2d_u^2}{d^2} - \frac{2d_{uu}}{d} + \frac{2d_v^2}{d^2} - \frac{2d_{vv}}{d} = \frac{2}{d^2}[d_u^2 + d_v^2] - \frac{2}{d}[d_{uu} + d_{vv}].$$

Portanto (4.21) fica

$$K(I) = -\frac{d^2}{2} \left\{ \frac{2}{d^2}[d_u^2 + d_v^2] - \frac{2}{d}[d_{uu} + d_{vv}] \right\} = -(d_u^2 + d_v^2) + d(d_{uu} + d_{vv}). \quad (4.22)$$

Portanto, temos a seguinte equação diferencial parcial

$$d(d_{uu} + d_{vv}) - (d_u^2 + d_v^2) - K(I) = 0.$$

Uma solução para a equação acima é

$$d = \frac{1}{2}[1 + K(I)(u^2 + v^2)]. \quad (4.23)$$

Consideremos uma imersão $\Psi : S \rightarrow M^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ com curvatura Gaussiana $K(I)$ constante. Então pela observação (4.4) temos que para todo ponto $p \in S$ existe uma parametrização de uma vizinhança de p e um domínio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ tais que a métrica induzida

é dada por

$$I = \frac{1}{d^2}(du^2 + dv^2) \quad \text{onde} \quad d = \frac{1}{2}[1 + K(I)(u^2 + v^2)] \quad \text{com} \quad (u, v) \in \Omega. \quad (4.24)$$

Assim tomando

$$\begin{cases} I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \\ II = edu^2 + 2fdudv + gdv^2 \\ II_\eta = e_\eta du^2 + 2f_\eta dudv + g_\eta dv^2. \end{cases} \quad (4.25)$$

Logo neste caso temos que

$$E = G = \frac{1}{d^2} \quad \text{e} \quad F = 0. \quad (4.26)$$

Portanto de (1.17) os símbolos de Christoffel relacionado a métrica I são

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = -\Gamma_{22}^1 = -\frac{uK(I)}{d}, \\ -\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = -\frac{vK(I)}{d}, \end{cases} \quad (4.27)$$

Agora usando (4.3) temos que

$$\begin{cases} e_\eta = -\frac{1}{d^2} + h_u^2 \\ f_\eta = h_u h_v \\ g_\eta = -\frac{1}{d^2} + h_v^2. \end{cases} \quad (4.28)$$

Assim neste caso (1.21) fica

$$\begin{cases} \Psi_{uu} = -\frac{uK(I)}{d}\Psi_u + \frac{vK(I)}{d}\Psi_v + eN + \xi(-\frac{1}{d^2} + h_u^2)\eta \\ \Psi_{uv} = -\frac{vK(I)}{d}\Psi_u - \frac{uK(I)}{d}\Psi_v + fN + \xi dh_u h_v \eta \\ \Psi_{vv} = +\frac{uK(I)}{d}\Psi_u - \frac{vK(I)}{d}\Psi_v + gN + \xi(-\frac{1}{d^2} + h_v^2)\eta. \end{cases} \quad (4.29)$$

Seja $\delta = \delta(u, v)$ a quarta coordenada do normal N . Como $\langle N, \eta \rangle = 0$ então derivando em relação a u e v temos que

$$\begin{cases} \langle N_u, \eta \rangle = -\langle N, \eta_u \rangle \\ \langle N_v, \eta \rangle = -\langle N, \eta_v \rangle. \end{cases} \quad (4.30)$$

Assim de (4.2) obtemos que

$$\begin{cases} \langle N_u, \eta \rangle = -\langle N, \eta_u \rangle = -[\langle N, \Psi_u \rangle - \langle N, (0, 0, 0, h_u) \rangle] = -\langle N, \Psi_u \rangle + \delta h_u = \delta h_u \\ \langle N_v, \eta \rangle = -\langle N, \eta_v \rangle = -[\langle N, \Psi_v \rangle - \langle N, (0, 0, 0, h_v) \rangle] = -\langle N, \Psi_v \rangle + \delta h_v = \delta h_v. \end{cases} \quad (4.31)$$

Portanto (1.23), (1.24) e (1.25) ficam

$$\begin{cases} a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2} = -\frac{e}{d^2}d^4 = -ed^2 \\ a_{21} = \frac{eF - fE}{EG - F^2} = -\frac{f}{d^2}d^4 = -fd^2 \\ a_{12} = \frac{gF - fG}{EG - F^2} = -\frac{f}{d^2}d^4 = -fd^2 \\ a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2} = -\frac{g}{d^2}d^4 = -gd^2, \end{cases} \quad (4.32)$$

$$\begin{cases} b_{11} = \frac{f_\eta F - e_\eta G}{EG - F^2} = -\frac{-\frac{1}{d^2} + h_u^2}{d^2}d^4 = 1 - d^2 h_u^2 \\ b_{21} = \frac{e_\eta F - f_\eta E}{EG - F^2} = -\frac{h_u h_v}{d^2}d^4 = -d^2 h_u h_v \\ b_{12} = \frac{g_\eta F - f_\eta G}{EG - F^2} = -\frac{h_u h_v}{d^2}d^4 = -d^2 h_u h_v \\ b_{22} = \frac{f_\eta F - g_\eta E}{EG - F^2} = -\frac{-\frac{1}{d^2} + h_v^2}{d^2}d^4 = 1 - d^2 h_v^2 \end{cases} \quad (4.33)$$

e

$$\begin{cases} c_1 = \xi \langle N_u, \eta \rangle = \xi \delta h_u \\ c_2 = \xi \langle N_v, \eta \rangle = \xi \delta h_v \\ d_1 = \langle \eta_u, N \rangle = -\delta h_u \\ d_2 = \langle \eta_v, N \rangle = -\delta h_v. \end{cases} \quad (4.34)$$

Assim temos de (1.22) que

$$\begin{cases} -N_u = ed^2 \Psi_u + fd^2 \Psi_v - \xi \delta h_u \eta \\ -N_v = fd^2 \Psi_u + gd^2 \Psi_v - \xi \delta h_v \eta \\ -\eta_u = (d^2 h_u^2 - 1) \Psi_u + d^2 h_u h_v \Psi_v + \delta h_u N \\ -\eta_v = d^2 h_u h_v \Psi_u + (d^2 h_v^2 - 1) \Psi_v + \delta h_v N. \end{cases} \quad (4.35)$$

Portanto de (4.4) e (4.26) temos que a equação de Gauss é dada por

$$K(I) = (eg - f^2)d^4 + \xi(1 - \|\nabla h\|^2). \quad (4.36)$$

Agora de (4.27), (4.28) e (4.34) temos que as equações de Codazzi (1.32) e (1.40) ficam

$$\begin{aligned} e_v - f_u &= e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2 + \xi f_\eta d_1 - \xi e_\eta d_2 \\ &= -e\frac{K(I)_v}{d} + f\left(-\frac{K(I)_u}{d} + \frac{K(I)_u}{d}\right) - g\frac{K(I)_v}{d} + \xi h_u h_v \delta h_u - \xi\left(-\frac{1}{d^2} + h_u^2\right)\delta h_v \\ &= -\frac{K(I)_v}{d}(e + g) - \xi\frac{\delta h_v}{d^2}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

e

$$\begin{aligned}
f_v - g_u &= e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g\Gamma_{12}^2 + \xi g_\eta d_1 - \xi f_\eta d_2 \\
&= e\frac{K(I)u}{d} + f\left(-\frac{K(I)v}{d} + \frac{K(I)v}{d}\right) + g\frac{K(I)u}{d} - \xi\left(-\frac{1}{d^2} + h_v^2\right)\delta h_u + \xi h_u h_v \delta h_v \\
&= \frac{K(I)u}{d}(e + g) + \xi\frac{\delta h_u}{d^2}
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Agora podemos provar o teorema que é a chave principal para demonstrar os teoremas principais deste trabalho.

Teorema 4.5 *Seja S uma superfície orientável e $\Psi : S \rightarrow M^2(\xi) \times \mathbb{R}$ uma imersão de curvatura Gaussiana constante. Se a forma quadrática A dada por (4.1) é uma métrica Riemanniana então (A, II) é um par Codazzi de curvatura extrínseca constante.*

Prova. Pela observação (4.4) temos que para todo ponto $p \in S$ existe uma parametrização de uma vizinhança de p e um domínio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ tais que a métrica induzida é dada por

$$I = \frac{1}{d^2}(du^2 + dv^2) \quad \text{onde} \quad d = \frac{1}{2}[1 + K(I)(u^2 + v^2)] \quad \text{com} \quad (u, v) \in \Omega. \tag{4.39}$$

Assim temos que

$$A = \left(\frac{1}{d^2} + ch_u^2\right)du^2 + 2ch_u h_v dudv + \left(\frac{1}{d^2} + ch_v^2\right)dv^2 \quad \text{onde} \quad c = \frac{1}{\xi K(I) - 1}, \tag{4.40}$$

e neste caso temos que

$$\bar{E} = \frac{1}{d^2} + ch_u^2, \quad \bar{F} = ch_u h_v \quad \text{e} \quad \bar{G} = \frac{1}{d^2} + ch_v^2.$$

Se olharmos para quarta coordenada de (4.29) veremos que

$$\begin{cases} h_{uu} = -\frac{uK(I)}{d}h_u + \frac{vK(I)}{d}h_v + e\delta \\ h_{uv} = -\frac{vK(I)}{d}h_u - \frac{uK(I)}{d}h_v + f\delta \\ h_{vv} = \frac{uK(I)}{d}h_u - \frac{vK(I)}{d}h_v + g\delta. \end{cases} \tag{4.41}$$

Notemos que

$$\begin{cases} \bar{E}_u = \left(\frac{1}{d^2} + ch_u^2\right)_u = -\frac{2}{d^3}K(I)u + 2ch_u h_{uu} & \bar{E}_v = \left(\frac{1}{d^2} + ch_u^2\right)_v = -\frac{2}{d^3}K(I)v + 2ch_u h_{uv} \\ \bar{F}_u = (ch_u h_v)_u = c(h_{uu}h_v + h_u h_{uv}) & \bar{F}_v = (ch_u h_v)_v = c(h_{uv}h_v + h_u h_{vv}) \\ \bar{G}_u = \left(\frac{1}{d^2} + ch_v^2\right)_u = -\frac{2}{d^3}K(I)u + 2ch_v h_{uv} & \bar{G}_v = \left(\frac{1}{d^2} + ch_v^2\right)_v = -\frac{2}{d^3}K(I)v + 2ch_v h_{vv}, \end{cases} \tag{4.42}$$

e

$$\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2 = \left(\frac{1}{d^2} + ch_u^2\right) \left(\frac{1}{d^2} + ch_v^2\right) - c^2 h_u^2 h_v^2 = \frac{1}{d^4} (1 + c\|\nabla h\|^2). \quad (4.43)$$

Logo de (1.17), (4.42) e (4.43) os símbolos de Christoffel da métrica A são

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{11}^1 &= \frac{d^4}{1 + c\|\nabla h\|^2} \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{2}{d^3} K(I)u + 2ch_u h_{uu} \right) \left(\frac{1}{d^2} + ch_v^2 \right) \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left(-\frac{2}{d^3} K(I)v + 2ch_u h_{uv} \right) ch_u h_v \right] - ch_u h_v c(h_{uu} h_v + h_u h_{uv}) \right\} \\ &= \frac{d^4}{1 + c\|\nabla h\|^2} \left(-\frac{1}{d^5} K(I)u - \frac{1}{d^3} cK(I)uh_v^2 + \frac{c}{d^2} h_u h_{uu} \right. \\ &+ \left. c^2 h_u h_v^2 h_{uu} - \frac{1}{d^3} cK(I)vh_u h_v + c^2 h_u^2 h_v h_{uv} - c^2 h_u h_v^2 h_{uu} - c^2 h_u^2 h_v h_{uv} \right) \\ &= \frac{d^4}{1 + c\|\nabla h\|^2} \left(-\frac{1}{d^5} K(I)u - \frac{1}{d^3} cK(I)uh_v^2 - \frac{1}{d^3} cK(I)vh_u h_v + \frac{c}{d^2} h_u h_{uu} \right) \\ &= \frac{d^4}{1 + c\|\nabla h\|^2} \left[-\frac{1}{d^5} K(I)u - \frac{1}{d^3} cK(I)uh_v^2 - \frac{1}{d^3} cK(I)vh_u h_v \right. \\ &+ \left. \frac{c}{d^2} h_u \left(-\frac{uK(I)}{d} h_u + \frac{vK(I)}{d} h_v + e\delta \right) \right] \\ &= \frac{d^4}{1 + c\|\nabla h\|^2} \left[-\frac{1}{d^5} K(I)u - \frac{1}{d^3} cK(I)u(h_u^2 + h_v^2) + \frac{c}{d^2} e\delta h_u \right] \\ &= \frac{d^4}{1 + c\|\nabla h\|^2} \left[-\frac{1}{d^5} K(I)u - \frac{1}{d^5} cK(I)u\|\nabla h\|^2 + \frac{c}{d^2} e\delta h_u \right] \\ &= \frac{d^4}{1 + c\|\nabla h\|^2} \left[-\frac{1}{d^5} K(I)u(1 + c\|\nabla h\|^2) + \frac{c}{d^2} e\delta h_u \right] = -\frac{K(I)u}{d} + \frac{ecd^2 \delta h_u}{1 + c\|\nabla h\|^2} \quad (4.44) \end{aligned}$$

De modo análogo temos que,

$$\bar{\Gamma}_{11}^2 = \frac{K(I)v}{d} + \frac{ecd^2 \delta h_v}{1 + c\|\nabla h\|^2}, \quad (4.45)$$

$$\bar{\Gamma}_{12}^1 = -\frac{K(I)v}{d} + \frac{fcd^2 \delta h_u}{1 + c\|\nabla h\|^2}, \quad (4.46)$$

$$\bar{\Gamma}_{12}^2 = -\frac{K(I)u}{d} + \frac{fcd^2 \delta h_v}{1 + c\|\nabla h\|^2}, \quad (4.47)$$

$$\bar{\Gamma}_{22}^1 = \frac{K(I)u}{d} + \frac{gcd^2\delta h_u}{1+c\|\nabla h\|^2}, \quad (4.48)$$

$$\bar{\Gamma}_{22}^2 = -\frac{K(I)v}{d} + \frac{gcd^2\delta h_v}{1+c\|\nabla h\|^2}. \quad (4.49)$$

Assim da equação de Gauss (4.36) temos que

$$\begin{aligned} e\bar{\Gamma}_{12}^1 + f(\bar{\Gamma}_{12}^2 - \bar{\Gamma}_{11}^1) - g\bar{\Gamma}_{11}^2 &= e \left[\frac{fcd^2\delta h_u}{1+c\|\nabla h\|^2} - \frac{K(I)v}{d} \right] \\ &+ f \left[\frac{fcd^2\delta h_v}{1+c\|\nabla h\|^2} - \frac{K(I)u}{d} - \frac{ecd^2\delta h_u}{1+c\|\nabla h\|^2} + \frac{K(I)u}{d} \right] \\ &- g \left[\frac{ecd^2\delta h_v}{1+c\|\nabla h\|^2} + \frac{K(I)v}{d} \right] \\ &= -e\frac{K(I)v}{d} + \frac{f^2cd^2\delta h_v}{1+c\|\nabla h\|^2} - \frac{egcd^2\delta h_v}{1+c\|\nabla h\|^2} - g\frac{K(I)v}{d} \\ &= -\frac{K(I)v}{d}(e+g) - \frac{(eg-f^2)cd^2\delta h_v}{1+c\|\nabla h\|^2} \\ &= -\frac{K(I)v}{d}(e+g) - \frac{[K(I) - \xi(1 - \|\nabla h\|^2)]c\delta h_v}{(1+c\|\nabla h\|^2)d^2} \\ &= -\frac{K(I)v}{d}(e+g) - \frac{[(K(I) - \xi)c + \xi c\|\nabla h\|^2]\delta h_v}{(1+c\|\nabla h\|^2)d^2}. \end{aligned}$$

Mas de (4.40) temos que

$$(K(I) - \xi)c = (K(I) - \xi)\frac{1}{\xi K(I) - 1} = \xi\frac{\xi K(I) - 1}{\xi K(I) - 1} = \xi. \quad (4.50)$$

Logo da equação de Codazzi (4.37) temos que

$$\begin{aligned} e\bar{\Gamma}_{12}^1 + f(\bar{\Gamma}_{12}^2 - \bar{\Gamma}_{11}^1) - g\bar{\Gamma}_{11}^2 &= -\frac{K(I)v}{d}(e+g) - \frac{[\xi + \xi c\|\nabla h\|^2]\delta h_v}{(1+c\|\nabla h\|^2)d^2} \\ &= -\frac{K(I)v}{d}(e+g) - \frac{\xi(1+c\|\nabla h\|^2)\delta h_v}{(1+c\|\nabla h\|^2)d^2} \\ &= -\frac{K(I)v}{d}(e+g) - \frac{\xi\delta h_v}{d^2} \\ &= e_v - f_u. \end{aligned}$$

De modo análogo, usando a equação de Gauss (4.36), (4.50) e a equação de Codazzi (4.38), prova-se que

$$e\bar{\Gamma}_{22}^1 + f(\bar{\Gamma}_{22}^2 - \bar{\Gamma}_{12}^1) - g\bar{\Gamma}_{12}^2 = f_v - g_u.$$

Portanto o par (A, II) satisfaz as equações clássicas de Codazzi, ou seja, (A, II) é um par Codazzi. Além disso, como a curvatura Gaussiana $K(I)$ é constante então pelo Lema (4.2) temos que $K(A, II)$ é constante. \square

O teorema acima mostra que a existência deste par Codazzi em $M^2(\xi) \times \mathbb{R}$ não depende só das equações de Codazzi mas da equação de Gauss também, diferentemente do que acontece no espaço \mathbb{R}^3 .

Corolário 4.6 *Seja S uma superfície orientável e $\Psi : S \rightarrow M^2(\xi) \times \mathbb{R}$ uma imersão de curvatura Gaussiana positiva constante $K(I)$ tal que $K(I) - \xi > 0$. Se considerarmos S como a superfície de Riemann com estrutura conforme induzida pela segunda forma fundamental então*

$$Q = \left(\langle \Psi_z, \Psi_z \rangle + \frac{1}{\xi K(I) - 1} h_z^2 \right) dz^2 \quad (4.51)$$

é uma forma quadrática holomorfa, onde z denota um parâmetro conforme local em S .

Prova. Como Ψ é uma imersão com curvatura Gaussiana constante $K(I)$ que satisfaz $K(I) - \xi > 0$ então pelo Lema (4.3) temos que a forma quadrática A é Riemanniana e portanto do Teorema (4.5), (A, II) é um par Codazzi com curvatura extrínica constante positiva, isto é, II é definida positiva. Assim pelo Lema (1.25) temos que a forma quadrática

$$Q = \frac{1}{4}(E - G - 2Fi)dz^2 \quad (4.52)$$

é holomorfa.

Observemos primeiramente que de (1.42) e (1.43) temos que

$$\begin{aligned} \langle \Psi_z, \Psi_z \rangle &= \left\langle \frac{1}{2}(\Psi_u - i\Psi_v), \frac{1}{2}(\Psi_u - i\Psi_v) \right\rangle = \frac{1}{4}\langle \Psi_u, \Psi_u \rangle - \frac{1}{4}\langle \Psi_v, \Psi_v \rangle - \frac{i}{2}\langle \Psi_u, \Psi_v \rangle \\ &= \frac{1}{4}(\langle \Psi_u, \Psi_u \rangle - \langle \Psi_v, \Psi_v \rangle - 2i\langle \Psi_u, \Psi_v \rangle) \end{aligned}$$

e

$$h_z^2 = \left[\frac{1}{2}(h_u - ih_v) \right]^2 = \frac{1}{4}(h_u^2 - h_v^2 - 2ih_u h_v). \quad (4.53)$$

Portanto, de (4.1) temos que

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{1}{4} \left(\langle \Psi_u, \Psi_u \rangle + ch_u^2 - \langle \Psi_v, \Psi_v \rangle - ch_v^2 - 2i(\langle \Psi_u, \Psi_v \rangle + ch_u h_v) \right) dz^2 \\
 &= \left[\frac{1}{4} \left(\langle \Psi_u, \Psi_u \rangle - \langle \Psi_v, \Psi_v \rangle - 2i\langle \Psi_u, \Psi_v \rangle \right) + \frac{1}{4} c(h_u^2 - h_v^2 - 2ih_u h_v) \right] dz^2 \\
 &= \left(\langle \Psi_z, \Psi_z \rangle + \frac{1}{\varepsilon K(I) - 1} h_z^2 \right) dz^2.
 \end{aligned}$$

Portanto a forma quadrática (4.51) é holomorfa. \square

Teorema 4.7 *Se S é uma superfície de Riemann homeomorfa a esfera, então toda forma quadrática holomorfa, globalmente definida em S , é nula.*

Prova. Pelo Teorema da Uniformização de Riemann S é biholomorfa a esfera de Riemann, ou seja, existe um difeomorfismo holomorfo de S em $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Pelo exemplo (1.21) as parametrizações de coordenadas analíticas são $\varphi_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ e $\varphi_2 : \mathbb{C}/\{0\} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C}$ definidas por

$$\varphi_1(z) = z \quad \text{e} \quad \varphi_2 = \begin{cases} \frac{1}{z}, & \text{se } z \neq \infty, \\ 0; & \text{se } z = \infty. \end{cases}$$

Seja C uma forma quadrática holomorfa globalmente definida em S . Então C admite expressões locais holomorfas nesse sistema de coordenadas, a saber

$$\begin{cases} \gamma(z)dz^2, & \text{se } z \in \varphi_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}, \\ \beta(z)dz^2, & \text{se } z \in \varphi_2(\mathbb{C}/\{0\} \cup \{\infty\}) = \mathbb{C}. \end{cases}$$

Na intersecção $\mathbb{C}/\{0\}$ das vizinhanças coordenadas pelo exemplo (1.21) temos que a função transição é $f_{12}(z) = \frac{1}{z}$, ou seja, a mudança de coordenada $z = \frac{1}{w}$. Logo,

$$dw = -\frac{1}{z^2} dz,$$

ou seja,

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{1}{z^2} = -w^2.$$

Portanto na intersecção temos que

$$\gamma(z) = \beta(w) \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 = \beta(w) (-w^2)^2 = \beta(w) w^4 \quad (4.54)$$

Como γ e β são inteiras temos que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \gamma(z) = \lim_{w \rightarrow 0} \beta(w)w^4 = \beta(0)0 = 0.$$

Assim γ e β são limitadas e inteiras, portanto pelo Teorema de Liouville temos que γ e β são constantes, ou seja, $\gamma(z) = c_1$ e $\beta(w) = c_2$. Logo de (4.54) temos que

$$c_1 = c_2 w^4 \text{ para todo } w \in \mathbb{C}.$$

Assim $c_1 = c_2 = 0$. Portanto $C \equiv 0$. □

O seguinte resultado será fundamental para a demonstração do Teorema do Tipo Hilbert.

Teorema 4.8 *Se (A, II) é um par Codazzi com curvatura extrínseca $K(A, II)$ constante negativa e A é completa então $\inf |K(A)| \equiv 0$.*

Este resultado não será demonstrado aqui. Para ver a demonstração olhar [11] e [12].

4.2 Teorema do Tipo Liebmann

Nesta seção vamos demonstrar o importante resultado sobre unicidade:

Dada uma constante real positiva determina-se unicamente, a menos de isometria, uma imersão completa com curvatura Gaussiana igual a essa constante em $H^2 \times \mathbb{R}$ e quando essa constante é maior que um determina-se também uma única imersão completa, a menos de isometria, com curvatura Gaussiana igual a essa constante em $S^2 \times \mathbb{R}$. Em particular, essas superfícies são de revolução.

A ideia principal da prova é que sendo (A, II) um par Codazzi, com curvatura extrínseca constante, garantimos a existência de uma forma quadrática holomorfa e que essa forma se anula em superfícies de Riemann homeomorfas a esfera de Riemann.

Também vamos mostrar que sob certas condições sobre o gradiente da função altura não existe superfície completa com curvatura Gaussiana constante $0 < K(I) < 1$ em $S^2 \times \mathbb{R}$.

Teorema 4.9 (do Tipo Liebmann) *Dada uma constante real $K(I)$, existe, a menos de isometria, uma única superfície completa de curvatura Gaussiana constante $K(I) > 1$ em $S^2 \times \mathbb{R}$ e uma única de curvatura Gaussiana constante $K(I) > 0$ em $H^2 \times \mathbb{R}$. Além disso, estas superfícies são rotacionalmente simétricas.*

Prova. Nos capítulos (2) e (3) mostramos a existência de superfícies rotacionalmente simétricas com curvatura Gaussiana constante, então nos resta mostrar que elas são únicas, a menos de isometria.

Seja S uma superfície orientável e $\Psi : S \rightarrow M^2(\xi) \times \mathbb{R}$ uma imersão completa com curvatura Gaussiana constante $K(I)$ positiva satisfazendo $K(I) > 1$ quando $\xi = 1$. Uma vez que $K(I)$ é positiva pelo Teorema de Bonnet temos que S é compacta.

Além disso como a característica de Euler $\chi(S)$ é positiva, considerando o recobrimento universal se necessário podemos assumir que S é simplesmente conexa, logo que S é uma esfera topológica, ou seja, S é homeomorfa a uma esfera.

Por outro lado, pelo Lema (4.3) temos que a forma quadrática A é Riemanniana e portanto do Teorema (4.5) e do Lema (4.2), (A, II) é um par codazzi com curvatura extrínseca $K(A, II)$ constante positiva onde II é a segunda forma fundamental de S .

Como $K(A, II) > 0$ temos que II é positiva definida, logo podemos considerar a superfície de Riemann de S com estrutura conforme, induzida pela segunda forma fundamental. Então pelo Corolário (4.6) a forma quadrática Q dada por (1.44) é holomorfa. Mas pelo Teorema (4.7) temos que Q é identicamente nula uma vez que S é homeomorfa a esfera, ou seja, $\bar{E} = \bar{G}$ e $\bar{F} = 0$.

Mas em R_{II} temos que $II = \mu dudv$. Logo $K(A, II) = \frac{\bar{E}^2}{\mu^2}$ e portanto A e II são conformes, ou seja, $II = \lambda A$ onde $\lambda^2 = K(A, II)$. Portanto pelo Lema (4.2), $\lambda^2 = K(I) - \xi$. Como II é definida positiva, então $\lambda = \sqrt{K(I) - \xi}$.

Podemos assumir que S é uma esfera de Riemann $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ do Teorema da representação de Riemann com a métrica induzida I dada por (4.39). Portanto, a forma quadrática A é dada por (4.40). Como A e II são conformes com parâmetro $\lambda = \sqrt{K(I) - \xi}$ então

$$\begin{cases} e = \lambda \left(\frac{1}{d^2} + ch_u^2 \right) = \sqrt{K(I) - \xi} \left(\frac{1}{d^2} + ch_u^2 \right), \\ f = \lambda ch_u h_v = \sqrt{K(I) - \xi} ch_u h_v, \\ g = \lambda \left(\frac{1}{d^2} + ch_v^2 \right) = \sqrt{K(I) - \xi} \left(\frac{1}{d^2} + ch_v^2 \right). \end{cases} \quad (4.55)$$

onde c é dado por (4.5).

Agora analisando a quarta coordenada das duas últimas equações em (4.35) temos que

$$\begin{cases} 0 = (h_u^2 d^2 - 1)h_u + h_u h_v d^2 h_v + \delta^2 h_u \\ \quad = [(h_u^2 + h_v^2)d^2 - 1 + \delta^2]h_u \\ \quad = [|\nabla h|^2 - 1 + \delta^2]h_u. \\ 0 = h_u h_v d^2 h_u + (h_v^2 d^2 - 1)h_v + \delta^2 h_v \\ \quad = [(h_u^2 + h_v^2)d^2 - 1 + \delta^2]h_v \\ \quad = [|\nabla h|^2 - 1 + \delta^2]h_v. \end{cases} \quad (4.56)$$

Portanto temos que

$$\delta^2 = 1 - \|\nabla h\|^2. \quad (4.57)$$

Agora analisando a quarta coordenada das duas primeiras equações em (4.35) e usando (4.55) temos que

$$\begin{cases} -\delta_u = \lambda \left(\frac{1}{d^2} + ch_u^2 \right) d^2 h_u + c \lambda h_u h_v d^2 h_v \\ \quad = [1 + c(h_u^2 + h_v^2)d^2] \lambda h_u \\ \quad = [1 + c\|\nabla h\|^2] \lambda h_u. \\ -\delta_v = c \lambda h_u h_v d^2 h_v + \lambda \left(\frac{1}{d^2} + ch_v^2 \right) d^2 h_v \\ \quad = [1 + c(h_u^2 + h_v^2)d^2] \lambda h_v \\ \quad = [1 + c\|\nabla h\|^2] \lambda h_v. \end{cases} \quad (4.58)$$

Agora substituindo (4.57) temos que

$$\frac{-\delta_u}{1 + c(1 - \delta^2)} = \lambda h_u = \sqrt{K(I) - \xi} h_u \quad \text{e} \quad \frac{-\delta_v}{1 + c(1 - \delta^2)} = \lambda h_v = \sqrt{K(I) - \xi} h_v \quad (4.59)$$

Uma vez que S é compacta e a função altura h é de classe C^∞ , h possui um ponto de mínimo $p \in S$ pelo Teorema de Weierstrass. Portanto, a menos de isometria, podemos assumir que $p = (0,0)$ e $h(0,0) = 0$. Como p é ponto de mínimo temos que $h_u(p) = h_v(p) = 0$. Logo de (4.57) $\delta(p) = 1$ uma vez que II é positiva definida.

Agora temos que encontrar $\delta(u, v)$ satisfazendo (4.59) tal que $h(p) = 0$ e $\delta(p) = 1$ onde $p = (0, 0)$.

a) Se $\xi = 1$ tem-se que $K(I) > 1$. Logo, de (4.5), $c = \frac{1}{1-K(I)} \in (0, \infty)$. Substituindo em (4.59) temos que

$$\begin{cases} \frac{-\delta_u(K(I)-1)}{K(I)-\delta^2} = \sqrt{K(I)-1}h_u \\ \frac{-\delta_v(K(I)-1)}{K(I)-\delta^2} = \sqrt{K(I)-1}h_v, \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} \frac{\delta_u}{\sqrt{K(I)}\left(1-\frac{\delta^2}{K(I)}\right)} = -\sqrt{\frac{K(I)}{K(I)-1}}h_u \\ \frac{\delta_v}{\sqrt{K(I)}\left(1-\frac{\delta^2}{K(I)}\right)} = -\sqrt{\frac{K(I)}{K(I)-1}}h_v. \end{cases} \quad (4.60)$$

Integrando a primeira equação de (4.60) em relação a u temos que

$$\operatorname{arctanh}\left(\frac{\delta}{\sqrt{K(I)}}\right) = -\sqrt{\frac{K(I)}{K(I)-1}}h + c_1(v). \quad (4.61)$$

Portanto derivando em relação a v a equação acima obtemos que

$$\frac{\delta_v}{\sqrt{K(I)}\left(1-\frac{\delta^2}{K(I)}\right)} = -\sqrt{\frac{K(I)}{K(I)-1}}h_v + \frac{dc_1(v)}{dv}. \quad (4.62)$$

Por outro lado a equação acima tem que ser igual a segunda equação de (4.60) portanto

$$\frac{dc_1(v)}{dv} = 0.$$

Isto é, c_1 é constante. Mas temos $h(p) = 0$ e $\delta(p) = 1$, logo aplicando (4.61) em p temos que

$$c_1 = \operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{\sqrt{K(I)}}\right). \quad (4.63)$$

Portanto de (4.61),

$$\delta = \sqrt{K(I)}\operatorname{tanh}\left(-\sqrt{\frac{K(I)}{K(I)-1}}h + c_1\right), \quad (4.64)$$

onde c_1 é dado por (4.63)

b) Se $\xi = -1$ tem-se que $K(I) > 0$. Logo, de (4.5), $c = \frac{-1}{1+K(I)} \in (-1, 0)$ uma vez que $c \rightarrow 0$ quando $K(I) \rightarrow \infty$. Substituindo em (4.59) temos que

$$\begin{cases} \frac{-\delta_u(K(I)+1)}{K(I)+\delta^2} = \sqrt{K(I)+1}h_u \\ \frac{-\delta_v(K(I)+1)}{K(I)+\delta^2} = \sqrt{K(I)+1}h_v, \end{cases} \quad (4.65)$$

ou seja,

$$\begin{cases} \frac{\delta_u}{\sqrt{K(I)}\left(1+\frac{\delta^2}{K(I)}\right)} = -\sqrt{\frac{K(I)}{K(I)+1}}h_u \\ \frac{\delta_v}{\sqrt{K(I)}\left(1+\frac{\delta^2}{K(I)}\right)} = -\sqrt{\frac{K(I)}{K(I)+1}}h_v. \end{cases}$$

De modo análogo

$$\delta = \sqrt{K(I)}\tan\left(-\sqrt{\frac{K(I)}{K(I)+1}}h+c_2\right) \quad (4.66)$$

onde $c_2 = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{K(I)}}\right)$.

Agora substituindo (4.55) em (4.41) temos que

$$\begin{cases} h_{uu} = -\frac{uK(I)}{d}h_u + \frac{vK(I)}{d}h_v + \sqrt{K(I)-\xi}\left(\frac{1}{d^2}+ch_u^2\right)\delta, \\ h_{uv} = -\frac{vK(I)}{d}h_u - \frac{uK(I)}{d}h_v + \sqrt{K(I)-\xi}ch_uh_v\delta, \\ h_{vv} = \frac{uK(I)}{d}h_u - \frac{vK(I)}{d}h_v + \sqrt{K(I)-\xi}\left(\frac{1}{d^2}+ch_v^2\right)\delta. \end{cases} \quad (4.67)$$

onde δ é dado por (4.64) se $\xi = 1$ e por (4.66) se $\xi = -1$.

O sistema (4.67) é um sistema de equações diferenciais parciais de segunda ordem elíptico então pelo Teorema de Bernstein [14], h é analítica na vizinhança de p . Como h é C^∞ e $h(p) = h_u(p) = h_v(p) = 0$ então podemos calcular toda derivada de h no ponto p . Uma vez que h é analítica e conhecemos toda derivada de h no ponto p então pela unicidade da série de Taylor de h em torno de p temos que h é unicamente determinado pela analiticidade.

Agora nos resta mostrar a unicidade das três primeiras coordenadas da imersão, ou seja, que o normal η é único, a menos de isometria. Suponhamos por absurdo que existem duas imersões completas $\Psi_1, \Psi_2 : S \rightarrow M^2(\varepsilon) \times \mathbb{R}$ com a mesma curvatura Gaussiana constante positiva e mesma função altura h tais que os normais dados por (1.20) são respectivamente η_1 e η_2 .

Como a quarta coordenada dos normais η_1 e η_2 são nulas então podemos considerar as aplicações $\eta_i : S \rightarrow M^2(\varepsilon)$ com $i = 1, 2$. Além disso, das duas últimas

equações de (4.35) temos que

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial \eta_i}{\partial u}, \frac{\partial \eta_i}{\partial u} \right\rangle &= \left\langle (d^2 h_u^2 - 1) \frac{\partial \Psi_i}{\partial u} + d^2 h_u h_v \frac{\partial \Psi_i}{\partial v} + \delta h_u N_i, (d^2 h_u^2 - 1) \frac{\partial \Psi_i}{\partial u} + d^2 h_u h_v \frac{\partial \Psi_i}{\partial v} + \delta h_u N_i \right\rangle \\
&= (d^2 h_u^2 - 1)^2 \left\langle \frac{\partial \Psi_i}{\partial u}, \frac{\partial \Psi_i}{\partial u} \right\rangle + d^4 h_u^2 h_v^2 \left\langle \frac{\partial \Psi_i}{\partial v}, \frac{\partial \Psi_i}{\partial v} \right\rangle + \delta^2 h_u^2 \langle N_i, N_i \rangle \\
&= (d^4 h_u^4 - 2d^2 h_u^2 + 1) \frac{1}{d^2} + d^4 h_u^2 h_v^2 \frac{1}{d^2} + \delta^2 h_u^2 \\
&= [d^2 (h_u^2 + h_v^2) + \delta^2 - 2] h_u^2 + \frac{1}{d^2} \\
&= [\|\nabla h\|^2 + \delta^2 - 2] h_u^2 + \frac{1}{d^2}
\end{aligned}$$

com $i = 1, 2$.

De modo análogo

$$\left\langle \frac{\partial \eta_i}{\partial u}, \frac{\partial \eta_i}{\partial v} \right\rangle = [\|\nabla h\|^2 + \delta^2 - 2] h_u h_v,$$

e

$$\left\langle \frac{\partial \eta_i}{\partial v}, \frac{\partial \eta_i}{\partial v} \right\rangle = [\|\nabla h\|^2 + \delta^2 - 2] h_v^2 + \frac{1}{d^2},$$

com $i = 1, 2$.

Portanto de (4.57) temos para $i = 1, 2$ que

$$\left\langle \frac{\partial \eta_i}{\partial u}, \frac{\partial \eta_i}{\partial u} \right\rangle = \frac{1}{d^2} - h_u^2, \quad \left\langle \frac{\partial \eta_i}{\partial u}, \frac{\partial \eta_i}{\partial v} \right\rangle = -h_u h_v \quad \text{e} \quad \left\langle \frac{\partial \eta_i}{\partial v}, \frac{\partial \eta_i}{\partial v} \right\rangle = \frac{1}{d^2} - h_v^2. \quad (4.68)$$

Portanto as métricas induzida de η_1 e η_2 coincidem em todo ponto. Além disso

$$\left\langle \frac{\partial \eta_i(p)}{\partial u}, \frac{\partial \eta_i(p)}{\partial u} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \eta_i(p)}{\partial v}, \frac{\partial \eta_i(p)}{\partial v} \right\rangle = 4 = E(p) = G(p) \quad (4.69)$$

$$\left\langle \frac{\partial \eta_i(p)}{\partial u}, \frac{\partial \eta_i(p)}{\partial v} \right\rangle = 0 = F(p). \quad (4.70)$$

Ou seja, no ponto $p = (0, 0)$ as métricas induzidas de η_1 e η_2 coincidem com a métrica induzida I em p .

Portanto, η_i , com $i = 1, 2$, pode ser visto como uma imersão da vizinhança conexa U de p .

Como as métricas induzidas coincidem temos que

$$\eta_2 \circ \eta_1^{-1} : \eta_1(\mathcal{U}) \subseteq M^2(\xi) \rightarrow M^2(\xi)$$

é uma isometria, ou seja, η_1 e η_2 são iguais, a menos de isometria, em \mathcal{U} . Assim mostramos que Ψ_1 e Ψ_2 coincidem localmente.

Para estendermos para todo $M^2(\xi) \times \mathbb{R}$, seja $\eta_i = (x_1^i, x_2^i, x_3^i, 0)$ com $i = 1, 2$, olhando para as três primeiras coordenadas de (4.29) temos que

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 x_j^i}{\partial u^2} = -\frac{uK(I)}{d} \frac{\partial x_j^i}{\partial u} + \frac{vK(I)}{d} \frac{\partial x_j^i}{\partial v} + eN_j^i & + \xi(-\frac{1}{d^2} + h_u^2)x_j^i, \\ \frac{\partial^2 x_j^i}{\partial u \partial v} = -\frac{vK(I)}{d} \frac{\partial x_j^i}{\partial u} - \frac{uK(I)}{d} \frac{\partial x_j^i}{\partial v} + fN_j^i & + \xi dh_u h_v x_j^i, \\ \frac{\partial^2 x_j^i}{\partial v^2} = \frac{uK(I)}{d} \frac{\partial x_j^i}{\partial u} - \frac{vK(I)}{d} \frac{\partial x_j^i}{\partial v} + gN_j^i & + \xi(-\frac{1}{d^2} + h_v^2)x_j^i \end{cases} \quad (4.71)$$

onde $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$. O sistema (4.71) é também um sistema de equações diferenciais parciais elíptico. Logo pelo Teorema de Bernstein [14] temos que $\eta_i, i = 1, 2$ é analítica uma vez que N^i é analiticamente determinado por $\frac{\partial \Psi_i}{\partial u}, \frac{\partial \Psi_i}{\partial v}$ e η_i . Portanto, Ψ_1 e Ψ_2 coincidem globalmente pelo Princípio da extensão analítica [13]. \square

Agora em $S^2 \times \mathbb{R}$ quando $K(I)$ é uma constante positiva menor que um temos que não existe qualquer imersão $\Psi : S \rightarrow S^2 \times \mathbb{R}$ de curvatura Gaussiana $K(I)$ com uma hipótese adicional sobre o gradiente da função altura. Antes de mostrarmos isso precisamos do seguinte resultado que Tim Tzaneteas mostrou em [7].

Teorema 4.10 *Seja S uma superfície diferenciável compacta. Então S admite métrica Lorentziana se, e somente se, a característica de Euler $\chi(S)$ de S é identicamente nula.*

Agora podemos demonstrar o seguinte resultado:

Lema 4.11 *Seja S uma superfície compacta. Não existe qualquer imersão $\Psi : S \rightarrow S^2 \times \mathbb{R}$ de curvatura Gaussiana $0 < K(I) < 1$ satisfazendo*

$$\|\nabla h\|^2 < 1 - K(I) \quad (4.72)$$

onde h é a função altura.

Em particular, não existe qualquer imersão completa em $S^2 \times \mathbb{R}$ de curvatura Gaussiana constante $0 < K(I) < 1$ satisfazendo (4.72).

Prova. Suponha por absurdo que exista uma imersão $\Psi : S \rightarrow S^2 \times \mathbb{R}$ de curvatura Gaussiana positiva $K(I)$ satisfazendo (4.72). Como $K(I) > 0$ então pelo o Teorema de Gauss-Bonnet temos que S é uma esfera topológica. Por outro lado de (4.72) temos que $K(I) < 1 - \|\nabla h\|^2$. Assim de (4.4) temos que

$$K(I, II_\eta) = 1 - \|\nabla h\|^2 > K(I). \quad (4.73)$$

Portanto pela equação de Gauss (1.31) e de (4.73) temos que

$$K(I, II) = K(I) - K(I, II_\eta) < K(I) - K(I) = 0. \quad (4.74)$$

Logo pela definição de curvatura extrínseca e de (4.74) temos que

$$K(I, II) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} < 0 \quad (4.75)$$

Como $EG - F^2 > 0$, segue que $eg - f^2 < 0$. Portanto II não é definida, ou seja, II é uma métrica Lorentziana. Mas isto é uma contradição pois pelo Teorema (4.10) não existe métrica Lorentziana em uma esfera. Portanto não existe qualquer imersão $\Psi : S \rightarrow S^2 \times \mathbb{R}$ de curvatura Gaussiana positiva $K(I)$ satisfazendo (4.72). \square

É conhecido que os slab $S^2 \times \{t_0\}$ de $S^2 \times \mathbb{R}$ têm curvatura Gaussiana igual 1 mas ainda não é conhecido se estas são as únicas superfícies imersas em $S^2 \times \mathbb{R}$ com curvatura Gaussiana $K(I) \in (0, 1]$.

4.3 Teorema do Tipo Hilbert

Nesta seção vamos demonstrar que

Não existe qualquer superfície completa com curvatura Gaussiana constante, $K(I) < -1$, em $M^2(\xi) \times \mathbb{R}$.

A ideia principal da prova é que sendo (A, B) um par Codazzi com curvatura extrínseca constante negativa, tem-se que o ínfimo do módulo da curvatura Gaussiana $K(A)$ na métrica Riemanniana A é identicamente nulo.

Também vamos mostrar que, com hipótese adicional sobre o gradiente da função altura, não existe superfície completa com curvatura Gaussiana constante $-1 < K(I) < 0$ em $S^2 \times \mathbb{R}$.

Teorema 4.12 (do Tipo Hilbert) *Não existe imersão completa de curvatura Gaussiana constante $K(I) < -1$ em $H^2 \times \mathbb{R}$ e $S^2 \times \mathbb{R}$.*

Prova. Suponhamos por absurdo que exista uma imersão completa $\Psi : S \rightarrow M^2(\xi) \times \mathbb{R}$ de curvatura Gaussiana constante $K(I) < -1$.

Como $K(I) < -1$, então pelo Lema (4.3) temos que a forma quadrática A dada por (4.1) é uma métrica Riemanniana.

Primeiramente vamos mostrar que A é completa. Para isto consideremos um vetor unitário w e $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M^2(\xi) \times \mathbb{R}$ uma curva divergente na imersão e observemos que

$$K(I) - 1 < -2 \quad \text{e} \quad K(I) + 1 < 0. \quad (4.76)$$

Assim temos que

- Se $\xi = 1$ então de (4.5) e (4.76) temos que

$$-\frac{1}{2} < c = \frac{1}{K(I) - 1} < 0. \quad (4.77)$$

Por outro lado de (4.1) obtemos que

$$A(w) = I(w) + cdh^2(w) = I(w) + c\langle \nabla h, w \rangle^2. \quad (4.78)$$

Mas de (4.13) temos que

$$\langle \nabla h, w \rangle^2 \leq \|w\|^2 = I(w). \quad (4.79)$$

Assim de (4.77), (4.78) e de (4.79) temos que

$$A(w) \geq I(w) + cI(w) = (1 + c)I(w). \quad (4.80)$$

Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t A(\gamma'(\tau)) d\tau \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t (1 + c)I(\gamma'(\tau)) d\tau = (1 + c) \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t I(\gamma'(\tau)) d\tau. \quad (4.81)$$

- Se $\xi = -1$ então de (4.5) e (4.76) temos que

$$c = -\frac{1}{K(I) - 1} > 0. \quad (4.82)$$

Por outro lado de (4.1) e de (4.82) obtemos que

$$A(w) = I(w) + cdh^2(w) = I(w) + c\langle \nabla h, w \rangle^2 \geq I(w) \quad (4.83)$$

Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t A(\gamma'(\tau)) d\tau \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t I(\gamma'(\tau)) d\tau. \quad (4.84)$$

Como I é completa pela observação (1.8) temos que o comprimento da curva γ na métrica I é ilimitado, ou seja, o limite abaixo diverge

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t I(\gamma'(\tau)) d\tau. \quad (4.85)$$

Assim de (4.81) e (4.84) temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t A(\gamma'(\tau)) d\tau \quad (4.86)$$

também diverge, ou seja, o comprimento da curva γ na métrica A é ilimitado. Portanto da observação (1.8) A é completa.

Vamos agora calcular a curvatura Gaussiana $K(A)$ da métrica A , logo de (1.39) temos que

$$\begin{aligned} (\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2)K(A) &= \bar{E}((\bar{\Gamma}_{22}^1)_u - (\bar{\Gamma}_{12}^1)_v + \bar{\Gamma}_{22}^1\bar{\Gamma}_{11}^1 + \bar{\Gamma}_{22}^2\bar{\Gamma}_{12}^1 - (\bar{\Gamma}_{12}^1)^2 - \bar{\Gamma}_{12}^2\bar{\Gamma}_{22}^1) \\ &+ \bar{F}((\bar{\Gamma}_{22}^2)_u - (\bar{\Gamma}_{12}^2)_v + \bar{\Gamma}_{11}^2\bar{\Gamma}_{22}^1 - \bar{\Gamma}_{12}^1\bar{\Gamma}_{12}^2). \end{aligned} \quad (4.87)$$

onde $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ são os símbolos de Christoffel de A .

A equação acima pode escrita da forma

$$\begin{aligned} (\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2)K(A) &= [\bar{E}((\bar{\Gamma}_{22}^1)_u - (\bar{\Gamma}_{12}^1)_v) + \bar{F}((\bar{\Gamma}_{22}^2)_u - (\bar{\Gamma}_{12}^2)_v)] \\ &+ [\bar{E}(\bar{\Gamma}_{22}^1\bar{\Gamma}_{11}^1 + \bar{\Gamma}_{22}^2\bar{\Gamma}_{12}^1 - (\bar{\Gamma}_{12}^1)^2 - \bar{\Gamma}_{12}^2\bar{\Gamma}_{22}^1) \\ &+ \bar{F}(\bar{\Gamma}_{11}^2\bar{\Gamma}_{22}^1 - \bar{\Gamma}_{12}^1\bar{\Gamma}_{12}^2)]. \end{aligned} \quad (4.88)$$

Agora derivando $\bar{\Gamma}_{22}^1$ e $\bar{\Gamma}_{22}^2$ em relação a u em (4.44)-(4.49) temos que

$$\begin{cases} (\bar{\Gamma}_{22}^1)_u = \frac{(gcd^2\delta h_u)_u}{1+c\|\nabla h\|^2} - \frac{gcd^2\delta h_u(1+c\|\nabla h\|^2)_u}{(1+c\|\nabla h\|^2)^2} + \frac{K(I)}{d} - \frac{K(I)^2u^2}{d^2}, \\ (\bar{\Gamma}_{22}^2)_u = \frac{(gcd^2\delta h_u)_u}{1+c\|\nabla h\|^2} - \frac{gcd^2\delta h_u(1+c\|\nabla h\|^2)_u}{(1+c\|\nabla h\|^2)^2} + \frac{K(I)^2uv}{d^2}. \end{cases} \quad (4.89)$$

e derivando $\bar{\Gamma}_{12}^1$ e $\bar{\Gamma}_{12}^2$ em relação a v em (4.44)-(4.49) temos que

$$\begin{cases} (\bar{\Gamma}_{12}^1)_v = \frac{(fcd^2\delta h_u)_v}{1+c\|\nabla h\|^2} - \frac{fcd^2\delta h_u(1+c\|\nabla h\|^2)_v}{(1+c\|\nabla h\|^2)^2} - \frac{K(I)}{d} + \frac{K(I)^2v^2}{d^2}, \\ (\bar{\Gamma}_{12}^2)_v = \frac{(fcd^2\delta h_u)_v}{1+c\|\nabla h\|^2} - \frac{fcd^2\delta h_u(1+c\|\nabla h\|^2)_v}{(1+c\|\nabla h\|^2)^2} + \frac{K(I)^2uv}{d^2}. \end{cases} \quad (4.90)$$

Por outro lado temos de (4.39) que

$$u^2 + v^2 = \frac{2d-1}{K(I)}. \quad (4.91)$$

Assim subtraindo $(\bar{\Gamma}_{12}^1)_v$ de $(\bar{\Gamma}_{22}^1)_u$ e usando (4.91) temos que

$$\begin{aligned} (\bar{\Gamma}_{22}^1)_u - (\bar{\Gamma}_{12}^1)_v &= \frac{cd^2\delta h_u[f(1+c\|\nabla h\|^2)_v - g(1+c\|\nabla h\|^2)_u]}{(1+c\|\nabla h\|^2)^2} \\ &+ \frac{(gcd^2\delta h_u)_u - (fcd^2\delta h_u)_v}{1+c\|\nabla h\|^2} + \frac{2K(I)}{d} - \frac{K(I)^2(u^2+v^2)}{d^2} \\ &= \frac{cd^2\delta h_u[f(1+c\|\nabla h\|^2)_v - g(1+c\|\nabla h\|^2)_u]}{(1+c\|\nabla h\|^2)^2} \\ &+ \frac{(gcd^2\delta h_u)_u - (fcd^2\delta h_u)_v}{1+c\|\nabla h\|^2} + \frac{2K(I)}{d} - \frac{K(I)(2d-1)}{d^2} \\ &= \frac{cd^2\delta h_u[f(1+c\|\nabla h\|^2)_v - g(1+c\|\nabla h\|^2)_u]}{(1+c\|\nabla h\|^2)^2} \\ &+ \frac{(gcd^2\delta h_u)_u - (fcd^2\delta h_u)_v}{1+c\|\nabla h\|^2} + \frac{K(I)}{d^2}. \end{aligned} \quad (4.92)$$

e subtraindo $(\bar{\Gamma}_{12}^2)_v$ de $(\bar{\Gamma}_{22}^2)_u$ obtemos que

$$(\bar{\Gamma}_{22}^2)_u - (\bar{\Gamma}_{12}^2)_v = \frac{cd^2\delta h_v[f(1+c\|\nabla h\|^2)_v - g(1+c\|\nabla h\|^2)_u]}{(1+c\|\nabla h\|^2)^2} + \frac{(gcd^2\delta h_v)_u - (fcd^2\delta h_v)_v}{1+c\|\nabla h\|^2}. \quad (4.93)$$

Seja $M = \bar{E}((\bar{\Gamma}_{22}^1)_u - (\bar{\Gamma}_{12}^1)_v) + \bar{F}((\bar{\Gamma}_{22}^2)_u - (\bar{\Gamma}_{12}^2)_v)$. Então de (4.92) e (4.93) temos que

$$\begin{aligned} M &= \bar{E} \left\{ \frac{cd^2\delta h_u[f(1+c\|\nabla h\|^2)_v - g(1+c\|\nabla h\|^2)_u]}{(1+c\|\nabla h\|^2)^2} + \frac{(gcd^2\delta h_u)_u - (fcd^2\delta h_u)_v}{1+c\|\nabla h\|^2} + \frac{K(I)}{d^2} \right\} \\ &+ \bar{F} \left\{ \frac{cd^2\delta h_v[f(1+c\|\nabla h\|^2)_v - g(1+c\|\nabla h\|^2)_u]}{(1+c\|\nabla h\|^2)^2} + \frac{(gcd^2\delta h_v)_u - (fcd^2\delta h_v)_v}{1+c\|\nabla h\|^2} \right\} \\ &= \frac{cd^2\delta(\bar{E}h_u + \bar{F}h_v)[f(1+c\|\nabla h\|^2)_v - g(1+c\|\nabla h\|^2)_u]}{(1+c\|\nabla h\|^2)^2} \\ &+ \frac{\bar{E}[(gcd^2\delta h_u)_u - (fcd^2\delta h_u)_v] + \bar{F}[(gcd^2\delta h_v)_u - (fcd^2\delta h_v)_v]}{1+c\|\nabla h\|^2} + \bar{E} \frac{K(I)}{d^2}. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Agora de (4.40) temos que

$$\begin{cases} \bar{E} = \frac{1}{d^2} + ch_u^2 \\ \bar{F} = ch_u h_v \\ \bar{G} = \frac{1}{d^2} + ch_v^2. \end{cases} \quad (4.95)$$

Sejam

$$\begin{cases} N = cd^2\delta(\bar{E}h_u + \bar{F}h_v)[f(1 + c\|\nabla h\|^2)_v - g(1 + c\|\nabla h\|^2)_u], \\ O = \bar{E}[(gcd^2\delta h_u)_u - (fcd^2\delta h_u)_v] + \bar{F}[(gcd^2\delta h_v)_u - (fcd^2\delta h_v)_v]. \end{cases} \quad (4.96)$$

Assim de (4.95) temos que

$$\begin{aligned} N &= cd^2\delta \left[\left(\frac{1}{d^2} + ch_u^2 \right) h_u + ch_u h_v^2 \right] [f(1 + c\|\nabla h\|^2)_v - g(1 + c\|\nabla h\|^2)_u] \\ &= cd^2\delta h_u \left(\frac{1}{d^2} + c(h_u^2 + h_v^2) \right) [f(1 + c\|\nabla h\|^2)_v - g(1 + c\|\nabla h\|^2)_u] \\ &= c\delta h_u (1 + c\|\nabla h\|^2) [f(1 + c\|\nabla h\|^2)_v - g(1 + c\|\nabla h\|^2)_u] \\ &= c^2\delta h_u (1 + c\|\nabla h\|^2) [f(\|\nabla h\|^2)_v - g(\|\nabla h\|^2)_u]. \end{aligned} \quad (4.97)$$

Mas

$$\begin{cases} (\|\nabla h\|^2)_u = (d^2(h_u^2 + h_v^2))_u = 2dK(I)u(h_u^2 + h_v^2) + 2d^2(h_u h_{uu} + h_v h_{uv}), \\ = 2K(I)ud^{-1}\|\nabla h\|^2 + 2d^2(h_u h_{uu} + h_v h_{uv}), \\ (\|\nabla h\|^2)_v = (d^2(h_u^2 + h_v^2))_v = 2dK(I)v(h_u^2 + h_v^2) + 2d^2(h_u h_{uv} + h_v h_{vv}), \\ = 2K(I)vd^{-1}\|\nabla h\|^2 + 2d^2(h_u h_{uv} + h_v h_{vv}), \end{cases} \quad (4.98)$$

Assim substituindo (4.98) em (4.97) e usando (4.95) e (4.96) temos que

$$\begin{aligned} N &= c^2\delta h_u (1 + c\|\nabla h\|^2) \{ f[2K(I)vd^{-1}\|\nabla h\|^2 + 2d^2(h_u h_{uv} + h_v h_{vv})] \\ &\quad - g[2K(I)ud^{-1}\|\nabla h\|^2 + 2d^2(h_u h_{uu} + h_v h_{uv})] \} \\ &= c^2\delta h_u (1 + c\|\nabla h\|^2) \{ 2d^2[(fh_{uv} - gh_{uu})h_u + (fh_{vv} - gh_{uv})h_v] \\ &\quad + 2K(I)vd^{-1}\|\nabla h\|^2(vf - ug) \} \end{aligned} \quad (4.99)$$

e

$$\begin{aligned}
O &= \left(\frac{1}{d^2} + ch_u^2\right)[(gcd^2\delta h_u)_u - (fcd^2\delta h_u)_v] + ch_u h_v [(gcd^2\delta h_v)_u - (fcd^2\delta h_v)_v] \\
&= c\left(\frac{1}{d^2} + ch_u^2\right)[(gd^2\delta)_u h_u + gd^2\delta h_{uu} - (fd^2\delta)_v h_u - fd^2\delta h_{uv}] \\
&\quad + c^2 h_u h_v [(gd^2\delta)_u h_v + gd^2\delta h_{uv} - (fd^2\delta)_v h_v - fd^2\delta h_{vv}] \\
&= c\left(\frac{1}{d^2} + ch_u^2\right)\{h_u[(gd^2\delta)_u - (fd^2\delta)_v] + d^2\delta(gh_{uu} - fh_{uv})\} \\
&\quad + c^2 h_u h_v \{h_v[(gd^2\delta)_u - (fd^2\delta)_v] + d^2\delta(gh_{uv} - fh_{vv})\} \\
&= c\left(\frac{1}{d^2} + ch_u^2\right)h_u[(gd^2\delta)_u - (fd^2\delta)_v] + c\left(\frac{1}{d^2} + ch_u^2\right)d^2\delta(gh_{uu} - fh_{uv}) \\
&\quad + c^2 h_u h_v^2 [(gd^2\delta)_u - (fd^2\delta)_v] + c^2 h_u h_v d^2\delta(gh_{uv} - fh_{vv}) \\
&= ch_u\left(\frac{1}{d^2} + ch_u^2 + ch_v^2\right)[(gd^2\delta)_u - (fd^2\delta)_v] \\
&\quad + cd^2\delta\left(\frac{1}{d^2} + ch_u^2\right)(gh_{uu} - fh_{uv}) + c^2 h_u h_v d^2\delta(gh_{uv} - fh_{vv}) \\
&= \frac{ch_u}{d^2}(1 + c\|\nabla h\|^2)[(gd^2\delta)_u - (fd^2\delta)_v] \\
&\quad + cd^2\delta\left(\frac{1}{d^2} + ch_u^2\right)(gh_{uu} - fh_{uv}) + c^2 h_u h_v d^2\delta(gh_{uv} - fh_{vv}). \tag{4.100}
\end{aligned}$$

Portanto substituindo (4.99) e (4.100) em (4.94) obtemos que

$$\begin{aligned}
M &= \frac{1}{1 + c\|\nabla h\|^2} \left\{ -2c^2\delta h_u d^2 [(-fh_{uv} + gh_{uu})h_u + (-fh_{vv} + gh_{uv})h_v] \right. \\
&\quad + 2c^2\delta K(I)vd^{-1}\|\nabla h\|^2(vf - ug) + \frac{ch_u}{d^2}(1 + c\|\nabla h\|^2)[(gd^2\delta)_u - (fd^2\delta)_v] \\
&\quad \left. + cd^2\delta\left(\frac{1}{d^2} + ch_u^2\right)(gh_{uu} - fh_{uv}) + c^2 h_u h_v d^2\delta(gh_{uv} - fh_{vv}) \right\} + \left(\frac{1}{d^2} + ch_u^2\right)\frac{K(I)}{d^2}. \\
&= \frac{1}{1 + c\|\nabla h\|^2} \left\{ -2c^2\delta h_u^2 d^2(gh_{uu} - fh_{uv}) - 2c^2\delta d^2 h_u h_v(gh_{uv} - fh_{vv}) \right. \\
&\quad + 2c^2\delta K(I)vd^{-1}\|\nabla h\|^2(vf - ug) + \frac{ch_u}{d^2}(1 + c\|\nabla h\|^2)[(gd^2\delta)_u - (fd^2\delta)_v] \\
&\quad \left. + (c\delta + c^2 d^2\delta h_u^2)(gh_{uu} - fh_{uv}) + c^2 h_u h_v d^2\delta(gh_{uv} - fh_{vv}) \right\} + \left(\frac{1}{d^2} + ch_u^2\right)\frac{K(I)}{d^2}. \\
&= \frac{1}{1 + c\|\nabla h\|^2} \left\{ 2c^2\delta K(I)vd^{-1}\|\nabla h\|^2(vf - ug) + \frac{ch_u}{d^2}(1 + c\|\nabla h\|^2)[(gd^2\delta)_u - (fd^2\delta)_v] \right. \\
&\quad \left. + (c\delta - c^2 d^2\delta h_u^2)(gh_{uu} - fh_{uv}) - c^2 h_u h_v d^2\delta(gh_{uv} - fh_{vv}) \right\} + \left(\frac{1}{d^2} + ch_u^2\right)\frac{K(I)}{d^2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1+c\|\nabla h\|^2} \left\{ \frac{2c^2\delta K(I)v}{d} \|\nabla h\|^2 (vf-ug) + \frac{ch_u}{d^2} (1+c\|\nabla h\|^2) [(gd^2\delta)_u - (fd^2\delta)_v] \right. \\
&+ \left. c\delta(1-cd^2h_u^2)(gh_{uu} - fh_{uv}) - c^2h_uh_vd^2\delta(gh_{uv} - fh_{vv}) \right\} + \left(\frac{1}{d^2} + ch_u^2 \right) \frac{K(I)}{d^2}.
\end{aligned} \tag{4.101}$$

Agora temos que

$$\begin{aligned}
(gd^2\delta)_u - (fd^2\delta)_v &= 2gdK(I)u\delta + d^2(g\delta)_u - 2fdK(I)v\delta - d^2(f\delta)_v \\
&= 2dK(I)\delta(ug - fv) + d^2[(g\delta)_u - (f\delta)_v].
\end{aligned} \tag{4.102}$$

Agora substituindo (4.102) em (4.101) obtemos que

$$\begin{aligned}
M &= \frac{1}{1+c\|\nabla h\|^2} \left\{ \frac{2c^2\delta K(I)v}{d} \|\nabla h\|^2 (vf-ug) + \frac{ch_u}{d^2} (1+c\|\nabla h\|^2) \{2dK(I)\delta(ug - fv) \right. \\
&+ \left. d^2[(g\delta)_u - (f\delta)_v]\} + c\delta(1-cd^2h_u^2)(gh_{uu} - fh_{uv}) - c^2h_uh_vd^2\delta(gh_{uv} - fh_{vv}) \right\} \\
&+ \left(\frac{1}{d^2} + ch_u^2 \right) \frac{K(I)}{d^2}. \\
&= \frac{1}{1+c\|\nabla h\|^2} \left\{ \frac{2c^2\delta K(I)v}{d} \|\nabla h\|^2 (vf-ug) - \frac{2K(I)ch_u}{d} (1+c\|\nabla h\|^2) \delta(fv-ug) \right. \\
&+ \left. ch_u(1+c\|\nabla h\|^2) [(g\delta)_u - (f\delta)_v] + c\delta(1-cd^2h_u^2)(gh_{uu} - fh_{uv}) \right. \\
&- \left. c^2h_uh_vd^2\delta(gh_{uv} - fh_{vv}) \right\} + \left(\frac{1}{d^2} + ch_u^2 \right) \frac{K(I)}{d^2} \\
&= \frac{1}{1+c\|\nabla h\|^2} \left\{ \frac{2K(I)ch_u}{d} \delta(ug - vf) + ch_u(1+c\|\nabla h\|^2) [(g\delta)_u - (f\delta)_v] \right. \\
&+ \left. c\delta(1-cd^2h_u^2)(gh_{uu} - fh_{uv}) - c^2h_uh_vd^2\delta(gh_{uv} - fh_{vv}) \right\} + \left(\frac{1}{d^2} + ch_u^2 \right) \frac{K(I)}{d^2}.
\end{aligned} \tag{4.103}$$

Mas de (4.41) temos que

$$gh_{uu} - fh_{uv} = \frac{K(I)}{d} [(vf-ug)h_u + (gv+fu)h_v] + (eg-f^2)\delta \tag{4.104}$$

e

$$gh_{uv} - fh_{vv} = \frac{K(I)}{d} [-(vg+uf)h_u + (fv-gu)h_v]. \tag{4.105}$$

Agora substituindo (4.104) e (4.105) em (4.103) obtemos que

$$\begin{aligned}
M &= \frac{1}{1+c\|\nabla h\|^2} \left\{ \frac{2K(I)ch_u}{d} \delta(ug-vf) + ch_u(1+c\|\nabla h\|^2)[(g\delta)_u - (f\delta)_v] \right. \\
&+ c\delta(1-cd^2h_u^2) \left\{ \frac{K(I)}{d} [(vf-ug)h_u + (gv+fu)h_v] + (eg-f^2)\delta \right\} \\
&- \left. c^2h_uh_vd^2\delta \left\{ \frac{K(I)}{d} [-(vg+uf)h_u + (fv-gu)h_v] \right\} \right\} + \left(\frac{1}{d^2} + ch_u^2 \right) \frac{K(I)}{d^2} \\
&= \frac{1}{1+c\|\nabla h\|^2} \left\{ \frac{2K(I)ch_u}{d} \delta(ug-vf) + ch_u(1+c\|\nabla h\|^2)[(g\delta)_u - (f\delta)_v] \right. \\
&+ (c\delta - c^2\delta d^2h_u^2) \frac{K(I)}{d} [(vf-ug)h_u + (gv+fu)h_v] + c\delta^2(1-cd^2h_u^2)(eg-f^2) \\
&- \left. c^2h_uh_vd^2\delta \left\{ \frac{K(I)}{d} [-(vg+uf)h_u + (fv-gu)h_v] \right\} \right\} + \left(\frac{1}{d^2} + ch_u^2 \right) \frac{K(I)}{d^2} \\
&= \frac{1}{1+c\|\nabla h\|^2} \left\{ -\frac{2K(I)ch_u}{d} \delta(vf-ug) + ch_u(1+c\|\nabla h\|^2)[(g\delta)_u - (f\delta)_v] \right. \\
&+ \frac{K(I)c\delta}{d} [(vf-ug)h_u + (gv+fu)h_v] - c^2\delta dK(I)h_u[(vf-ug)h_u^2 + (gv+fu)h_uh_v] \\
&+ \left. c\delta^2(1-cd^2h_u^2)(eg-f^2) - c^2d^2\delta K(I)h_u[-(vg+uf)h_uh_v + (fv-gu)h_v^2] \right\} \\
&+ \left(\frac{1}{d^2} + ch_u^2 \right) \frac{K(I)}{d^2} \\
&= \frac{1}{1+c\|\nabla h\|^2} \left\{ ch_u(1+c\|\nabla h\|^2)[(g\delta)_u - (f\delta)_v] + \frac{K(I)c\delta}{d} [-(vf-ug)h_u + (gv+fu)h_v] \right. \\
&- \left. c^2\delta dK(I)h_u(vf-ug)(h_u^2+h_v^2) + c\delta^2(1-cd^2h_u^2)(eg-f^2) \right\} + \left(\frac{1}{d^2} + ch_u^2 \right) \frac{K(I)}{d^2} \\
&= \frac{1}{1+c\|\nabla h\|^2} \left\{ ch_u(1+c\|\nabla h\|^2)[(g\delta)_u - (f\delta)_v] + \frac{K(I)c\delta h_u}{d} (ug-vf) + \frac{K(I)c\delta h_v}{d} (gv+fu) \right. \\
&+ \left. \frac{c^2\delta K(I)h_u}{d} (ug-vf)\|\nabla h\|^2 + c\delta^2(1-cd^2h_u^2)(eg-f^2) \right\} + \left(\frac{1}{d^2} + ch_u^2 \right) \frac{K(I)}{d^2} \\
&= \frac{1}{1+c\|\nabla h\|^2} \left\{ ch_u(1+c\|\nabla h\|^2)[(g\delta)_u - (f\delta)_v] + \frac{K(I)c\delta h_v}{d} (gv+fu) \right. \\
&+ \left. \frac{c\delta K(I)h_u}{d} (ug-vf)(1+c\|\nabla h\|^2) + c\delta^2(1-cd^2h_u^2)(eg-f^2) \right\} + \left(\frac{1}{d^2} + ch_u^2 \right) \frac{K(I)}{d^2} \\
&= ch_u[(g\delta)_u - (f\delta)_v] + \frac{c\delta K(I)h_u}{d} (ug-vf) + \left(\frac{1}{d^2} + ch_u^2 \right) \frac{K(I)}{d^2} \\
&+ \frac{1}{1+c\|\nabla h\|^2} \left\{ \frac{K(I)c\delta h_v}{d} (gv+fu) + c\delta^2(1-cd^2h_u^2)(eg-f^2) \right\}. \tag{4.106}
\end{aligned}$$

Analisando a quarta coordenada de (4.35) temos que

$$\begin{cases} \delta_u = -ed^2h_u - fd^2h_v \\ \delta_v = -fd^2h_u - gd^2h_v. \end{cases} \quad (4.107)$$

Assim de (4.107) temos que

$$\begin{aligned} (g\delta)_u - (f\delta)_v &= g_u\delta + g\delta_u - f_v\delta - f\delta_v = \delta(g_u - f_v) + g\delta_u - f\delta_v \\ &= \delta(g_u - f_v) + g(-ed^2h_u - fd^2h_v) - f(-fd^2h_u - gd^2h_v) \\ &= \delta(g_u - f_v) - egd^2h_u - fgd^2h_v + f^2d^2h_u + fgd^2h_v \\ &= \delta(g_u - f_v) - (eg - f^2)d^2h_u. \end{aligned} \quad (4.108)$$

Logo, substituindo (4.108) em (4.106) obtemos que

$$\begin{aligned} M &= ch_u[\delta(g_u - f_v) - (eg - f^2)d^2h_u] + \frac{c\delta K(I)h_u}{d}(ug - vf) + \left(\frac{1}{d^2} + ch_u^2\right)\frac{K(I)}{d^2} \\ &+ \frac{1}{1+c\|\nabla h\|^2} \left\{ \frac{K(I)c\delta h_v}{d}(gv + fu) + c\delta^2(1 - cd^2h_u^2)(eg - f^2) \right\}. \end{aligned} \quad (4.109)$$

Agora seja

$$\begin{cases} R = \bar{E}(\bar{\Gamma}_{22}^1\bar{\Gamma}_{11}^1 + \bar{\Gamma}_{22}^2\bar{\Gamma}_{12}^1 - (\bar{\Gamma}_{12}^1)^2 - \bar{\Gamma}_{12}^2\bar{\Gamma}_{22}^1) \\ T = \bar{F}(\bar{\Gamma}_{11}^2\bar{\Gamma}_{22}^1 - \bar{\Gamma}_{12}^1\bar{\Gamma}_{12}^2). \end{cases} \quad (4.110)$$

Mas de (4.44)-(4.49) temos que

$$\begin{cases} \bar{\Gamma}_{22}^1\bar{\Gamma}_{11}^1 = \frac{egc^2\delta^2d^4h_u^2}{(1+c\|\nabla h\|^2)^2} + \frac{c\delta dK(I)uh_u(e-g)}{1+c\|\nabla h\|^2} - \frac{K(I)^2u^2}{d^2}, \\ \bar{\Gamma}_{12}^1\bar{\Gamma}_{12}^1 = \frac{f^2c^2\delta^2d^4h_u^2}{(1+c\|\nabla h\|^2)^2} - \frac{2c\delta dK(I)vh_u f}{1+c\|\nabla h\|^2} + \frac{K(I)^2v^2}{d^2}, \\ \bar{\Gamma}_{22}^2\bar{\Gamma}_{12}^1 = \frac{gfc^2\delta^2d^4h_uh_v}{(1+c\|\nabla h\|^2)^2} - \frac{c\delta dK(I)v(gh_v+fh_u)}{1+c\|\nabla h\|^2} + \frac{K(I)^2v^2}{d^2}, \\ \bar{\Gamma}_{12}^2\bar{\Gamma}_{22}^1 = \frac{gfc^2\delta^2d^4h_uh_v}{(1+c\|\nabla h\|^2)^2} + \frac{c\delta dK(I)u(fh_v-gh_u)}{1+c\|\nabla h\|^2} - \frac{K(I)^2u^2}{d^2}, \\ \bar{\Gamma}_{11}^2\bar{\Gamma}_{22}^1 = \frac{egc^2\delta^2d^4h_uh_v}{(1+c\|\nabla h\|^2)^2} + \frac{c\delta dK(I)(euh_v+gvh_u)}{1+c\|\nabla h\|^2} + \frac{K(I)^2uv}{d^2}, \\ \bar{\Gamma}_{12}^1\bar{\Gamma}_{12}^2 = \frac{f^2c^2\delta^2d^4h_uh_v}{(1+c\|\nabla h\|^2)^2} - \frac{c\delta dK(I)(ufh_u+vf h_v)}{1+c\|\nabla h\|^2} + \frac{K(I)^2uv}{d^2}. \end{cases} \quad (4.111)$$

Assim (4.110) e (4.111) temos que

$$\begin{aligned}
R &= \bar{E} \left\{ \frac{egc^2\delta^2d^4h_u^2}{(1+c\|\nabla h\|^2)^2} + \frac{c\delta dK(I)uh_u(e-g)}{1+c\|\nabla h\|^2} - \frac{K(I)^2u^2}{d^2} \right. \\
&+ \frac{gfc^2\delta^2d^4h_uh_v}{(1+c\|\nabla h\|^2)^2} - \frac{c\delta dK(I)v(gh_v+fh_u)}{1+c\|\nabla h\|^2} + \frac{K(I)^2v^2}{d^2} \\
&- \frac{f^2c^2\delta^2d^4h_u^2}{(1+c\|\nabla h\|^2)^2} + \frac{2c\delta dK(I)vh_uf}{1+c\|\nabla h\|^2} - \frac{K(I)^2v^2}{d^2} \\
&\left. - \frac{gfc^2\delta^2d^4h_uh_v}{(1+c\|\nabla h\|^2)^2} - \frac{c\delta dK(I)u(fh_v-gh_u)}{1+c\|\nabla h\|^2} + \frac{K(I)^2u^2}{d^2} \right\} \\
&= \bar{E} \left\{ \frac{(eg-f^2)c^2\delta^2d^4h_u^2}{(1+c\|\nabla h\|^2)^2} + \frac{c\delta dK(I)[uh_u(e-g) - v(gh_v+fh_u) + 2vh_uf - u(fh_v-gh_u)]}{1+c\|\nabla h\|^2} \right\} \\
&= \left(\frac{1}{d^2} + ch_u^2 \right) \left\{ \frac{(eg-f^2)c^2\delta^2d^4h_u^2}{(1+c\|\nabla h\|^2)^2} + \frac{c\delta dK(I)[(eu+vf)h_u - (gv+uf)h_v]}{1+c\|\nabla h\|^2} \right\} \\
&= \frac{(eg-f^2)c^2\delta^2d^2h_u^2}{(1+c\|\nabla h\|^2)^2} + \frac{c\delta K(I)[(eu+vf)h_u - (gv+uf)h_v]}{(1+c\|\nabla h\|^2)d} \\
&+ \frac{(eg-f^2)c^3\delta^2d^4h_u^4}{(1+c\|\nabla h\|^2)^2} + \frac{c^2\delta dK(I)[(eu+vf)h_u^3 - (gv+uf)h_u^2h_v]}{1+c\|\nabla h\|^2}. \tag{4.112}
\end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned}
T &= \bar{F} \left\{ \frac{egc^2\delta^2d^4h_uh_v}{(1+c\|\nabla h\|^2)^2} + \frac{c\delta dK(I)(euh_v+gvh_u)}{1+c\|\nabla h\|^2} + \frac{K(I)^2uv}{d^2} \right. \\
&- \left. \frac{f^2c^2\delta^2d^4h_uh_v}{(1+c\|\nabla h\|^2)^2} + \frac{c\delta dK(I)(ufh_u+vf h_v)}{1+c\|\nabla h\|^2} - \frac{K(I)^2uv}{d^2} \right\} \\
&= \bar{F} \left\{ \frac{(eg-f^2)c^2\delta^2d^4h_uh_v}{(1+c\|\nabla h\|^2)^2} + \frac{c\delta dK(I)[(gv+uf)h_u + (eu+vf)h_v]}{1+c\|\nabla h\|^2} \right\} \\
&= ch_uh_v \left\{ \frac{(eg-f^2)c^2\delta^2d^4h_uh_v}{(1+c\|\nabla h\|^2)^2} + \frac{c\delta dK(I)[(gv+uf)h_u + (eu+vf)h_v]}{1+c\|\nabla h\|^2} \right\} \\
&= \frac{(eg-f^2)c^3\delta^2d^4h_u^2h_v^2}{(1+c\|\nabla h\|^2)^2} + \frac{c^2\delta dK(I)[(gv+uf)h_u^2h_v + (eu+vf)h_uh_v^2]}{1+c\|\nabla h\|^2}. \tag{4.113}
\end{aligned}$$

Assim temos que

$$\begin{aligned}
R + T &= \frac{(eg - f^2)c^2\delta^2 d^2 h_u^2}{(1 + c\|\nabla h\|^2)^2} + \frac{c\delta K(I)[(eu + vf)h_u - (gv + uf)h_v]}{(1 + c\|\nabla h\|^2)d} \\
&+ \frac{(eg - f^2)c^3\delta^2 d^4 h_u^2 (h_u^2 + h_v^2)}{(1 + c\|\nabla h\|^2)^2} + \frac{c^2\delta d K(I)(eu + vf)h_u (h_u^2 + h_v^2)}{1 + c\|\nabla h\|^2} \\
&= \frac{(eg - f^2)c^2\delta^2 d^2 h_u^2}{(1 + c\|\nabla h\|^2)^2} + \frac{c\delta K(I)[(eu + vf)h_u - (gv + uf)h_v]}{(1 + c\|\nabla h\|^2)d} \\
&+ \frac{(eg - f^2)c^2\delta^2 d^2 h_u^2 c\|\nabla h\|^2}{(1 + c\|\nabla h\|^2)^2} + \frac{c\delta K(I)(eu + vf)h_u c\|\nabla h\|^2}{(1 + c\|\nabla h\|^2)d} \\
&= \frac{(eg - f^2)c^2\delta^2 d^2 h_u^2 (1 + c\|\nabla h\|^2)}{(1 + c\|\nabla h\|^2)^2} + \frac{c\delta K(I)(eu + vf)h_u (1 + c\|\nabla h\|^2)}{(1 + c\|\nabla h\|^2)d} \\
&- \frac{c\delta K(I)(gv + uf)h_v}{(1 + c\|\nabla h\|^2)d} \\
&= \frac{(eg - f^2)c^2\delta^2 d^2 h_u^2}{1 + c\|\nabla h\|^2} + \frac{c\delta K(I)(eu + vf)h_u}{d} - \frac{c\delta K(I)(gv + uf)h_v}{(1 + c\|\nabla h\|^2)d}. \quad (4.114)
\end{aligned}$$

Logo de (4.109) e (4.114) obtemos que

$$\begin{aligned}
M + R + T &= ch_u[\delta(g_u - f_v) - (eg - f^2)d^2 h_u] + \frac{c\delta K(I)h_u}{d}(ug - vf) + \left(\frac{1}{d^2} + ch_u^2\right)\frac{K(I)}{d^2} \\
&+ \frac{1}{1 + c\|\nabla h\|^2} \left\{ \frac{K(I)c\delta h_v}{d}(gv + fu) + c\delta^2(1 - cd^2 h_u^2)(eg - f^2) \right\} \\
&+ \frac{(eg - f^2)c^2\delta^2 d^2 h_u^2}{1 + c\|\nabla h\|^2} + \frac{c\delta K(I)(eu + vf)h_u}{d} - \frac{c\delta K(I)(gv + uf)h_v}{(1 + c\|\nabla h\|^2)d} \\
&= ch_u[\delta(g_u - f_v) - (eg - f^2)d^2 h_u] + \frac{c\delta K(I)u(e + g)h_u}{d} + \left(\frac{1}{d^2} + ch_u^2\right)\frac{K(I)}{d^2} \\
&+ \frac{[c\delta^2(1 - cd^2 h_u^2) + c^2\delta^2 d^2 h_u^2](eg - f^2)}{1 + c\|\nabla h\|^2} \\
&= \frac{c\delta K(I)u(e + g)h_u}{d} + \frac{K(I)}{d^4}(1 + cd^2 h_u^2) - ch_u[(eg - f^2)d^2 h_u + \delta(f_v - g_u)] \\
&+ \frac{c\delta^2(eg - f^2)}{1 + c\|\nabla h\|^2} \\
&= \frac{K(I)\{1 + ch_u d^2[h_u + ud(e + g)\delta]\}}{d^4} - ch_u[(eg - f^2)d^2 h_u + \delta(f_v - g_u)] \\
&+ \frac{c\delta^2(eg - f^2)}{1 + c\|\nabla h\|^2}. \quad (4.115)
\end{aligned}$$

Agora de (4.95) temos que

$$\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2 = \frac{1}{d^4}(1 + c\|\nabla h\|^2). \quad (4.116)$$

Portanto de (4.95), (4.115) e (4.116) temos que a curvatura Gaussiana da métrica A é

$$\begin{aligned} K(A) &= \frac{K(I)\{1 + ch_u d^2[h_u + ud(e + g)\delta]\} - ch_u d^4[(eg - f^2)d^2 h_u + \delta(f_v - g_u)]}{1 + c\|\nabla h\|^2} \\ &+ \frac{cd^4 \delta^2(eg - f^2)}{(1 + c\|\nabla h\|^2)^2}. \end{aligned} \quad (4.117)$$

Agora usando a equação de Gauss (4.37), a segunda de Codazzi (4.38) e a equação (4.57) temos que

$$\begin{aligned} K(A) &= \frac{K(I)[1 + ch_u^2 d^2 + uch_u d^3(e + g)\delta] - c(eg - f^2)d^4 d^2 h_u^2 - cd^4 h_u \delta(f_v - g_u)}{1 + c\|\nabla h\|^2} \\ &+ \frac{cd^4 \delta^2(eg - f^2)}{(1 + c\|\nabla h\|^2)^2} \\ &= \frac{K(I)[1 + ch_u^2 d^2 + ch_u d^3 u(e + g)\delta] - cd^2 h_u^2 [K(I) - \xi(1 - \|\nabla h\|^2)] - cd^4 h_u \delta(f_v - g_u)}{1 + c\|\nabla h\|^2} \\ &+ \frac{cd^4 \delta^2(eg - f^2)}{(1 + c\|\nabla h\|^2)^2} \\ &= \frac{K(I) + cK(I)h_u d^3 u(e + g)\delta + cd^2 h_u^2 \xi(1 - \|\nabla h\|^2) - cd^4 h_u \delta(f_v - g_u)}{1 + c\|\nabla h\|^2} + \frac{cd^4 \delta^2(eg - f^2)}{(1 + c\|\nabla h\|^2)^2} \\ &= \frac{K(I) + ch_u d^2 \delta[dK(I)u(e + g) - d^2(f_v - g_u)] + cd^2 h_u^2 \xi(1 - \|\nabla h\|^2)}{1 + c\|\nabla h\|^2} + \frac{cd^4 \delta^2(eg - f^2)}{(1 + c\|\nabla h\|^2)^2} \\ &= \frac{K(I) - c\xi h_u^2 d^2 \delta^2 + cd^2 h_u^2 \xi(1 - \|\nabla h\|^2)}{1 + c\|\nabla h\|^2} + \frac{cd^4 \delta^2(eg - f^2)}{(1 + c\|\nabla h\|^2)^2} \\ &= \frac{K(I) - c\xi h_u^2 d^2 \delta^2 + cd^2 h_u^2 \xi \delta^2}{1 + c\|\nabla h\|^2} + \frac{cd^4 \delta^2(eg - f^2)}{(1 + c\|\nabla h\|^2)^2} \\ &= \frac{K(I)}{1 + c\|\nabla h\|^2} + \frac{cd^4 \delta^2(eg - f^2)}{(1 + c\|\nabla h\|^2)^2} \\ &= \frac{K(I)[1 + c\|\nabla h\|^2] + c\delta^2(eg - f^2)d^4}{(1 + c\|\nabla h\|^2)^2} \\ &= \frac{K(I)[1 + c\|\nabla h\|^2] + c\delta^2[K(I) - \xi(1 - \|\nabla h\|^2)]}{(1 + c\|\nabla h\|^2)^2} \\ &= \frac{K(I)[1 + c\|\nabla h\|^2] + c(1 - \|\nabla h\|^2)[K(I) - \xi(1 - \|\nabla h\|^2)]}{(1 + c\|\nabla h\|^2)^2} \\ &= \frac{K(I)[1 + c\|\nabla h\|^2] + cK(I)(1 - \|\nabla h\|^2) - c\xi(1 - \|\nabla h\|^2)^2}{(1 + c\|\nabla h\|^2)^2} \\ &= \frac{K(I)(1 + c) - c\xi(1 - \|\nabla h\|^2)^2}{(1 + c\|\nabla h\|^2)^2}. \end{aligned} \quad (4.118)$$

Logo, podemos considerar $K(A)$ como uma função de $\|\nabla h\|^2$.

Vamos denotar $x = \|\nabla h\|^2 \in [0, 1]$ e $K(A) = K(A)(x) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

i. Se $\xi = 1$ então de (4.5) temos que $c = \frac{1}{K(I)-1}$. Assim substituindo em (4.118) temos que

$$\begin{aligned}
K(A)(x) &= \frac{K(I)(K(I)-1+1) - (1-x)^2}{K(I)-1} \frac{(K(I)-1)^2}{(K(I)-1+x)^2} \\
&= \frac{[K(I)^2 - (1-x)^2](K(I)-1)}{(K(I)-1+x)^2} \\
&= \frac{[K(I) - (1-x)][K(I) + (1-x)](K(I)-1)}{[K(I) - (1-x)]^2} \\
&= \frac{[K(I) + (1-x)](K(I)-1)}{K(I) - (1-x)} \\
&= \frac{K(I)^2 - K(I) + K(I) - xK(I) - 1 + x}{K(I) - (1-x)} \\
&= \frac{K(I)^2 + x[1 - K(I)] - 1}{K(I) - (1-x)}. \tag{4.119}
\end{aligned}$$

Agora derivando a equação (4.119) temos que

$$\begin{aligned}
K(A)'(x) &= \frac{(1 - K(I)[K(I) - (1-x)] - [K(I)^2 + x[1 - K(I)] - 1])}{[K(I) - (1-x)]^2} \\
&= \frac{-[1 - K(I)]^2 + [1 - K(I)]x - K(I)^2 - x[1 - K(I)] + 1}{[K(I) - (1-x)]^2} \\
&= \frac{-[1 - K(I)]^2 - K(I)^2 + 1}{[K(I) - (1-x)]^2} \\
&= \frac{-1 + 2K(I) - K(I)^2 - K(I)^2 + 1}{[K(I) - (1-x)]^2} \\
&= \frac{2K(I)[1 - K(I)]}{[K(I) - (1-x)]^2}. \tag{4.120}
\end{aligned}$$

Como $K(I) < -1$ temos que $K(I)[1 - K(I)] < 0$. Portanto, de (4.120) temos que $K(A)'(x) < 0$. Logo, $K(A)(x)$ é uma função decrescente em $[0,1]$. Logo, para todo $x \in [0, 1]$ temos que

$$K(A)(1) \leq K(A)(x) \leq K(A)(0). \tag{4.121}$$

Mas

$$K(A)(0) = \frac{K(I)^2 - 1}{K(I) - 1} = K(I) + 1 \quad \text{e} \quad K(A)(1) = \frac{K(I)^2 - K(I)}{K(I)} = K(I) - 1. \tag{4.122}$$

Portanto de (4.121) temos que

$$K(I) - 1 \leq K(A) \leq K(I) + 1. \tag{4.123}$$

ii. Se $\xi = -1$ então de (4.5) temos que $c = \frac{-1}{K(I)+1}$. Assim substituindo em (4.118) temos que

$$\begin{aligned}
K(A)(x) &= \frac{K(I)(K(I)+1-1) - (1-x)^2}{K(I)+1} \frac{(K(I)+1)^2}{(K(I)+1-x)^2} \\
&= \frac{[K(I)^2 - (1-x)^2](K(I)+1)}{(K(I)+1-x)^2} \\
&= \frac{[K(I) - (1-x)][K(I) + (1-x)](K(I)+1)}{[K(I) + (1-x)]^2} \\
&= \frac{[K(I) - (1-x)](K(I)+1)}{K(I) + (1-x)} \\
&= \frac{K(I)^2 + K(I) - K(I) + xK(I) - 1 + x}{K(I) + (1-x)} \\
&= \frac{K(I)^2 + x[K(I)+1] - 1}{K(I) + (1-x)}. \tag{4.124}
\end{aligned}$$

Agora derivando a equação (4.124) temos que

$$\begin{aligned}
K(A)'(x) &= \frac{(K(I)+1)[K(I) + (1-x)] + [K(I)^2 + x[K(I)+1] - 1]}{[K(I) + (1-x)]^2} \\
&= \frac{[K(I)+1]^2 - [K(I)+1]x + K(I)^2 + x[1+K(I)] - 1}{[K(I) + (1-x)]^2} \\
&= \frac{[K(I)+1]^2 + K(I)^2 - 1}{[K(I) + (1-x)]^2} \\
&= \frac{K(I)^2 + 2K(I) + 1 + K(I)^2 - 1}{[K(I) + (1-x)]^2} \\
&= \frac{2K(I)[1+K(I)]}{[K(I) + (1-x)]^2}. \tag{4.125}
\end{aligned}$$

Como $K(I) < -1$ temos que $K(I)[1+K(I)] > 0$. Portanto, de (4.125) temos que $K(A)'(x) > 0$. Logo, $K(A)(x)$ é uma função crescente em $[0,1]$. Logo, para todo $x \in [0, 1]$ temos que

$$K(A)(0) \leq K(A)(x) \leq K(A)(1). \tag{4.126}$$

Mas

$$K(A)(0) = \frac{K(I)^2 - 1}{K(I) + 1} = K(I) - 1 \quad \text{e} \quad K(A)(1) = \frac{K(I)^2 + K(I)}{K(I)} = K(I) + 1. \tag{4.127}$$

Portanto de (4.121) temos que

$$K(I) - 1 \leq K(A)(x) \leq K(I) + 1. \tag{4.128}$$

Assim concluímos de (4.121) e (4.128) que

$$K(I) - 1 \leq K(A) \leq K(I) + 1 < 0, \quad (4.129)$$

neste caso, segue que

$$\inf |K(A)| > 0 \quad (4.130)$$

Uma vez que (A, II) é um par Codazzi com curvatura extrínseca constante $K(A, II) < 0$ pelo Teorema (4.5) e A é completa então pelo Teorema (4.8) temos que $\inf |K(A)| \equiv 0$, mas isto contraria (4.130).

Portanto não existe qualquer imersão em $H^2 \times \mathbb{R}$ e $S^2 \times \mathbb{R}$ com curvatura Gaussiana constante $K(I) < -1$. \square

No capítulo 3 mostramos a existência de infinitas superfícies completas em $H^2 \times \mathbb{R}$ com curvatura Gaussiana constante $-1 < K(I) < 0$. Porém em $S^2 \times \mathbb{R}$ ainda não se sabe a existência de superfície completa com curvatura Gaussiana constante $-1 < K(I) < 0$, neste caso podemos observar que não existe qualquer imersão com curvatura Gaussiana constante $-1 < K(I) < 0$ quando o gradiente da função altura h satisfaz a uma certa hipótese.

Lema 4.13 *Não existe qualquer imersão completa com curvatura Gaussiana constante $-1 < K(I) < 0$ em $S^2 \times \mathbb{R}$ satisfazendo*

$$\|\nabla h\|^2 \leq c_0 < 1 + K(I) \quad \text{ou} \quad \|\nabla h\|^2 \geq c_0 > 1 + K(I) \quad (4.131)$$

para uma constante positiva $c_0 \in \mathbb{R}$.

Prova. Suponhamos por absurdo a existência de tal imersão. Neste caso pelo lema (4.3) temos que A é riemanniana. Como $-1 < K(I) < 0$ então $-2 < K(I) - 1 < -1$. Logo de (4.5) temos que

$$-1 < c = \frac{1}{K(I) - 1} < -\frac{1}{2}. \quad (4.132)$$

Assim de (4.132) e (4.78) temos que

$$A(w) \geq I(w) + cI(w) = (1 + c)I(w). \quad (4.133)$$

Assim como foi visto na demonstração do Teorema do Tipo Hilbert temos que A é completa.

Pelo teorema (4.5) temos que (A, II) é par codazzi com curvatura extrínseca negativa.

Portanto pelo teorema (4.8) temos que $\inf |K(A)| \equiv 0$. Mas de (4.118) temos que $K(A) = 0$ se, e somente se,

$$(1+c)K(I) - c(1 - \|\nabla h\|^2)^2 = 0. \quad (4.134)$$

Substituindo (4.77) na equação acima temos que

$$0 = \left(1 + \frac{1}{K(I)-1}\right)K(I) - \frac{1}{K(I)-1}(1 - \|\nabla h\|^2)^2 = \frac{K(I)^2}{K(I)-1} - \frac{(1 - \|\nabla h\|^2)^2}{K(I)-1},$$

então $K(A) = 0$ se, e somente se, $(1 - \|\nabla h\|^2)^2 = K(I)^2$.

Mas $1 - \|\nabla h\|^2 > 0$ e $-1 < K(I) < 0$, logo $1 - \|\nabla h\|^2 = -K(I)$. Portanto $K(A) = 0$ se, e somente se, $\|\nabla h\|^2 = K(I) + 1$.

Por outro lado pelo item *i*) da demonstração do Teorema do Tipo Hilbert temos que $K(A)(x)$ é decrescente onde $x = \|\nabla h\|^2 \in [0, 1]$. Logo, de (4.131) temos

$$K(A)(x) \geq K(A)(c_0) > K(A)(1 + K(I)) = 0$$

ou

$$K(A)(x) \leq K(A)(c_0) < K(A)(1 + K(I)) = 0. \quad (4.135)$$

Portanto nós temos que $|K(A)| \geq |K(A)(c_0)| > 0$ que contraria o Teorema (4.8).

Logo, não existe alguma imersão em $S^2 \times \mathbb{R}$ com curvatura constante $-1 < K(I) < 0$ satisfazendo (4.131). \square

Conclusão

Em $H^2 \times \mathbb{R}$ mostramos que a esfera topológica é a única superfície completa, a menos de isometria, com curvatura Gaussiana $K(I)$ constante positiva. No caso em que a curvatura é nula encontramos os cilindros flat e a superfície que corta o eixo de revolução representada pela Figura (2.2(a)). E no caso em que $-1 < K(I) < 0$ mostramos a existência de infinitas superfícies completas com curvatura Gaussiana $K(I)$ representadas pelas Figuras (2.3), (2.4) e (2.5). E finalmente, quando $K(I) < -1$ mostramos que não existe qualquer superfície completa que possua curvatura Gaussiana igual a $K(I)$.

Agora em $S^2 \times \mathbb{R}$ mostramos também que a esfera topológica é a única superfície completa, a menos de isometria, com curvatura Gaussiana constante $K(I) > 1$. No caso em $0 < K(I) < 1$ mostramos que sob certa condição no gradiente da função altura não existe qualquer superfície completa que possua curvatura Gaussiana igual a $K(I)$. No caso em a curvatura é nula encontramos somente os cilindros flats. E no caso em que $-1 < K(I) < 0$ mostramos também que sob certa condição no gradiente da função altura não existe qualquer superfície completa de curvatura Gaussiana constante igual a $K(I)$. Finalmente, quando $K(I) < -1$ mostramos que não existe qualquer superfície completa que possua curvatura Gaussiana igual a $K(I)$.

Referências Bibliográficas

- [1] ALEDO, A.J., ESPINAR, M.J. AND GÁLVEZ, A.J.: *Complete surfaces of constant curvature in $S^2 \times \mathbb{R}$ and $H^2 \times \mathbb{R}$* , Springer-Verlag, 2006.
- [2] ABRESH, U., ROSENBERG, H.: *A Hopf differential for constant mean curvature surfaces in $S^2 \times \mathbb{R}$ and $H^2 \times \mathbb{R}$* . Acta Math. **193**, 141-174(2004).
- [3] ALENCAR, H., DO CARMO, M. AND TRIBUZY, R.: *A theorem of H.Hopf and the Cauchy-Riemann inequality*, preprint(Available at <http://www.pos.mat.ufal.br/AlencarCarmoTri.pdf>)
- [4] HOPF, H.: *Differential Geometry in the Large*, Lecture Notes in Mathematics 1000, Berlin, Springer-Verlag, 1983.
- [5] DO CARMO, M.: *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, Rio de Janeiro, SBM, 2006.
- [6] DO CARMO, M.: *Geometria Riemanniana*, Rio de Janeiro, IMPA, 2008.
- [7] TZANETEAS, T.: *Existence of Lorentzian Metrics on Compact Manifolds and the Euler Characteristic*, May 6, 2004.
- [8] FARKAS, H., KRA, I.: *Riemann Surfaces*, Springer-Verlag, 1991.
- [9] MILNOR, T.K.: *Abstract Weingarten Surfaces*. J.Diff.Geom. **15**. 365-380(1980).
- [10] SILVA, A.R.M.R DA: *Extensão do teorema de H.Hopf para superfícies com curvatura média constante em $S^2 \times \mathbb{R}$* , Matemática, UFPE, Recife, 21 de fevereiro de 2006.
- [11] WEINSTEIN, T.: *An Introduction to Lorentz Surfaces*, Walter de Gruiter, Berlin, New York,(1996).
- [12] WISSLER, C.: *Globale Tschebyscheff-Netze auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten und Fortsetzung von Flächen Konstanter negativer Krümmung*. Comm. Math. Helv. **47**,348-372(1972).

- [13] LINS NETO, A.: *Funções de uma variável complexa*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro.
- [14] MARIANO GIAQUINTA.: *Multiple integrals in the calculus of variations and non-linear elliptic systems*. Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, 1983.
- [15] SANTOS ROCHA, M. A. P.: *Superfícies Estáveis em \mathbb{R}^3 de curvatura média constante com bordo circular*, IME, UFG, Goiânia, 2003.
- [16] DORES, K. C. DAS: *Hipersuperfícies de curvatura média constante folheadas por esferas*, IME, UFG, Goiânia, 2004.