Universidade Federal de Goiás

UFG

UMA AVALIAÇÃO DA ESTRUTURA DE TIPOS PRESENTE NA TERCEIRA SEÇÃO DA *BEGRIFFSSCHRIFT*, À LUZ DO CÁLCULO LAMBDA.

Hiury Duarte Correia

Dissertação apresentada ao Departamento de Filosofia da UFG como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Filosofia. Professor Orientador: André da Silva Porto. Faculdade de Filosofia Departamento de Filosofia Universidade Federal de Goiás.

Departamento de Filosofia

Goiânia, Setembro de 2009

UMA AVALIAÇÃO DA ESTRUTURA DE TIPOS PRESENTE NA TERCEIRA SEÇÃO DA *BEGRIFFSSCHRIFT*, À LUZ DO CÁLCULO LAMBDA.

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Departamento de Filosofia
Universidade Federal de Goiás
Goiânia, Setembro de 2009

Correia, Hiury Duarte

Uma avaliação da Estrutura de Tipos da Terceira Seção

da *Begriffsschrift* / Hiury Duarte Correia

- 2009

137.p

1.Filosofia da Lógica;

2.Lógica; 3.Teoria dos Tipos. I.Título.

CDU 101:571.1

A porta da verdade estava aberta,
Mas só deixava passar

Meia pessoa de cada vez.

Trecho do poema *“A verdade”*,

Carlos Drummond de Andrade

Resumo

O tema da nossa dissertação é a idéia de que, por trás da idiossincrática notação lógica utilizada por Frege, podemos encontrar a noção de abstração como componente fundamental de sua *Begriffsschrift*. Tal posição vai contra a concepção ordinária, como, por exemplo, a que encontramos na introdução de Van Heijenoort àquela obra. Ela contraria, também, a rejeição de Frege à possibilidade de se referir a entidades insaturadas. Argumentamos que a noção de abstração aparece tanto como parte das posições filosóficas de Frege – como, por exemplo, a idéia de que a quantificação é uma predicação de segunda ordem – como, também, de sua prática lógica.

Palavras chave: Frege, *Begriffsschrift*, Abstração e Teoria dos Tipos.

Abstract

Our dissertation's theme is the Idea that, buried in Frege's unfriendly Logical notation, one finds the notion of abstraction as a key ingredient of his *Begriffsschrift*. This runs contrary to the ordinary appraisal, such as the one found in Van Heijenoort's introduction to that article. It runs also contrary to Frege's refusal of the possibility of referring to unsaturated entities. Still, we argue that the notion seems to be part both of Frege's philosophical positions – such as the idea of quantification as second order predication – and of Frege's logical practices.

Keywords: Frege, *Begriffsschrift*, Abstraction and Type theory.

Sumário

Introdução

Gottlob Frege foi um matemático desconhecido em sua época que desenvolveu um trabalho de pouco interesse à maior parte de seus contemporâneos. Podemos dizer que a pergunta fundamental feita por ele foi aquela acerca do estatuto da aritmética e, conseqüentemente, sobre a natureza de seus objetos mais fundamentais, os números.

Frege, assim como Bertrand Russell, acreditava que a aritmética fosse um desenvolvimento da lógica, mas para que fosse possível sustentar tal tese, que ficaria ulteriormente conhecida como "logicismo", seria necessário desenvolver um aparato teórico mais sofisticado do que aquele apresentado por Aristóteles. É com esse propósito que em 1879 é publicada a *Begriffsschrift*, um livro com um pouco mais de oitenta páginas que traria em seu conteúdo o que ficaria posteriormente conhecido pelo nome genérico de "lógica matemática".

Na *Begriffsschrift*, Frege pretende apresentar uma linguagem que seja capaz de exprimir os conteúdos aritméticos livre de ambigüidades, o que não poderia ser levado a cabo através de nenhuma linguagem até então disponível. Daí a necessidade da sua "escrita conceitual" ou "ideografia", uma linguagem que considera apenas os "pensamentos", independentes das nuanças retóricas presentes nas sentenças que os exprimem. Por "pensamentos" devemos entender não um evento mental, subjetivo; mas sim o conteúdo subjacente aos enunciados ou às sentenças. Em outros termos, os pensamentos são equivalentes às proposições, que seriam, por exemplo, o conteúdo comum às expressões: "Sócrates era um filósofo", "*Socrates fue un filosofo*" e *"Socrates was a philosopher"*, independentes dos objetos lingüísticos que as exprimem.

É verdade que Frege reconhece a incapacidade das linguagens ordinárias de levar a cabo o seu projeto. No entanto, é importante salientar que a linguagem apresentada na *Begriffsschrift* não foi desenvolvida com a pretensão de substituir as linguagens ordinárias em sua amplitude, mas sim apenas para os fins científicos, onde uma maior precisão ao explicitar os conteúdos semânticos é requerida. Em um trecho, o filósofo compara a relação existente entre a sua linguagem e a linguagem ordinária, à relação existente entre o microscópio e o olho, respectivamente:

> O campo de usos possíveis e a versatilidade com que pode se adaptar às mais diversas circunstâncias, o olho é bem superior ao microscópio. Considerado como um instrumento ótico, certamente, ele exibe muitas imperfeições... (FREGE, 1967, p. 06)

Nossa dissertação tratará exatamente da obra supramencionada, a *Begriffsschrift*. De fato, nosso maior interesse por ela consiste em um trabalho de caráter lógico-filosófico, onde, à luz do Cálculo Lambda proposto por Alonzo Church, desenvolveremos uma análise da estrutura de tipos presente na terceira seção daquela obra. Certamente esse não será o único assunto abordado por nosso trabalho, visto que outros aspectos deverão ser considerados mesmo no tocante à condição de possibilidade de nossa proposta.

Inicialmente, no capítulo I, faremos uma breve introdução à *Begriffsschrift*, bem como à problemática à qual nos dedicaremos.

Apresentaremos, primeiramente, as mudanças que foram consideradas tão substanciais nessa obra de Frege. Dentre elas, as que mais nos interessarão será a substituição da análise clássica aristotélica desenvolvida em termos de *sujeito* e *predicado*, pela análise funcional, feita em termos de *"argumento"* e *"função"*; e a introdução dos quantificadores, que possibilitaria pela primeira vez na história da lógica um tratamento adequado às múltiplas generalidades.

Tentaremos argumentar em favor de uma interpretação não muito usual de que há, de fato, a substituição dos termos "sujeito" e "predicado" pelos termos "argumento" e "função", entretanto, a dupla sujeito/predicado deve se manter em alguma medida para que haja a manutenção da noção de verdade utilizada por Frege. Para isso, exporemos a análise aristotélica considerada clássica e desenvolveremos alguns argumentos a fim de mostrar porque essa análise não nos parece adequada. Tais argumentos consistem fundamentalmente em enfatizar as ambigüidades presentes na abordagem clássica de se analisar as proposições e, também, na distinção inadequada feita entre sujeito e predicado lógico, em oposição ao sujeito e predicado gramatical, o que acarreta em um mau funcionamento da noção de verdade.

Sempre contraporemos a abordagem clássica com a nova análise proposta por Frege. A importância que atribuímos à interpretação fregeana se dá pelo fato dela clarificar o ponto que consideramos fundamental das mudanças introduzidas: a operação de *"abstração".* Essa operação será de suma importância em nosso trabalho, pois, de acordo com o nosso entendimento, ela é o núcleo subjacente ao enorme desenvolvimento lógico proporcionado pela obra de Frege. Também apresentaremos as soluções propostas por Frege aos problemas até então existentes na lógica clássica aristotélica. Expostos nossos argumentos acerca da concepção padrão de algumas das principais novidades apresentadas na *Begriffsschrift* e introduzida a nossa problemática, daremos por findado o capítulo I.

O capítulo II será de extrema importância, pois nele trataremos da condição de possibilidade do nosso trabalho. Lá a discussão sairá um pouco do âmbito da *Begriffsschrift,* pois apresentaremos, primeiramente, o Cálculo Lambda através da apresentação de alguns aspectos históricos relativos à obra de Church, bem como as ferramentas lógicas que serão de fundamental importância para nós. Em seguida direcionaremos nossa atenção a um problema apresentado por Frege em um de seus artigos intermediários mais conhecidos, *Sobre o Conceito e o Objeto*, em que o filósofo levantará a questão acerca da impossibilidade de referência a conteúdos intensionais, ou seja, às entidades insaturadas. Frege explica que quando utilizamos o artigo definido diante de uma determinada expressão, isso faz com que lhe seja garantida unicidade e existência, essa expressão passa então a denotar um objeto, mesmo que anteriormente ao uso do artigo ela pudesse denotar um determinado conceito. Assim, como exemplifica o filósofo, "o conceito cavalo" não se referiria a um conceito, mas sim a um objeto. Ou seja, não podemos nos referir diretamente às propriedades, pois sempre precisaríamos como recurso lingüístico da utilização do artigo definido que "objetuaria" o que, a primeira vista, pareceria um conceito.

É importante considerar que optamos pela utilização do Cálculo Lambda em nosso trabalho justamente pelo fato dele ser capaz de se referir a conteúdos intensionais e por distingui-los claramente de suas respectivas extensões, porém, facilmente notamos uma tensão nesse ponto. Por um lado, o sucesso de nossa proposta de clarificação da estrutura de tipos da *Begriffsschrift* depende da referência a conteúdos intensionais, por outro, o próprio Frege alerta-nos acerca da impossibilidade de tal referência. Podemos assim dizer que o Capítulo II desta dissertação consistirá, em parte, na tentativa de argumentar a favor da viabilidade de nossa proposta e, em parte, na a apresentação do Cálculo Lambda.

Todavia, esses não serão os únicos pontos por nós desenvolvidos naquele capítulo. Na sua primeira metade, conforme o caro leitor poderá observar, será apresentado o problema que iremos enfrentar e a ferramenta que utilizaremos para tal. Assim, podemos dizer que essa parte será caracterizada pela apresentação da problemática. Entretanto, apresentaremos ainda algumas conclusões, sendo assim, a segunda metade do capítulo terá um caráter mais conclusivo do que a primeira. Apresentaremos lá uma proposta interpretativa das expressões de generalidade como sendo predicados aplicados em sua maioria a propriedades compostas. Que, como faremos notar, será uma das concepções fundamentais de nosso trabalho, no qual também tentaremos conciliar dentro da proposta fregeana duas teorias distintas: uma *extensional*, que o filósofo se manifesta abertamente a favor, e outra *intensional*, a qual Frege veementemente se opõe.

No capítulo III veremos que Frege discorda de uma das teses Kantianas fundamentais acerca do caráter dos juízos presentes em aritmética. Segundo o filósofo de Königsberg, tais juízos seriam produzidos através de uma síntese de conceitos, por isso seriam sintéticos, mas, também, por serem baseados na intuição pura de tempo, seriam *a priori* e, portanto, sintéticos *a priori*.

Frege objeta essa posição alegando que os juízos presentes em aritmética não são sintéticos *a priori* como queria Kant:

> ...nós veremos como o pensamento puro, independentemente de qualquer conteúdo dado aos sentidos ou intuição a priori, pode somente do conteúdo que resulta da sua própria constituição, trazer juízos adicionais que a primeira vista parece ser possível somente baseado em alguma intuição. (FREGE, 1967, p. 55)

É verdade que Kant acreditava que os juízos analíticos são aqueles em que o termo predicado nada acrescenta ao termo sujeito, pois todo o seu conteúdo já estaria de certa forma lá contido. E, por isso, tais juízos seriam conceitualmente estéreis, e uma ciência como aritmética não poderia ser, obviamente, fundada nesse tipo de juízo.

Tendo em vista esse aspecto comentaremos rapidamente a noção de analiticidade presente em Kant e em Frege para tentar justificar a razão de Frege tomar como analíticos e não sintéticos os juízos constituintes da aritmética. É importante salientar que o nosso interesse pelo assunto será propedêutico, vislumbrando uma discussão acerca de certas proposições introduzidas na terceira seção da *Begriffsschrift*, a saber, as *"definições"*.

Após apresentadas as "definições", retomaremos a algumas concepções apresentadas no segundo capítulo para que sejamos capazes de elaborar alguns comentários sobre a criatividade lógica e, conseqüentemente, do papel do lógico. Assim, nos esforçaremos para caracterizar alguns aspectos da natureza do papel criativo do lógico tomando por base esse tipo especial de proposição introduzido por Frege na terceira seção da *Begriffsschrift*; visto que toda a terceira seção daquela obra se funda nessas definições e elas, também, fundam a concepção fregeana do estatuto dos juízos presentes em aritmética.

Por fim, ainda no Capítulo III, apresentaremos, como mencionamos anteriormente, uma avaliação da estrutura de tipos presente na terceira seção da *Begriffsschrift,* à luz do Cálculo Lambda. Tentaremos expor as vantagens conceituais existentes na interpretação de Frege através desse cálculo. Para isso, exporemos como funcionam as derivações de Frege em sua linguagem original e esclareceremos os recursos utilizados lá, para em seguida introduzirmos o cálculo Lambda como alternativo. Acreditamos que essa será a maior contribuição de nosso trabalho, tanto do ponto de vista do esclarecimento conceitual, como até mesmo do ponto de vista didático.

Comumente a terceira seção da *Begriffsschrift* é bastante explorada pela construção dos números naturais que ali é apresentada. É importante notar que esse não será o nosso foco interesse, não estaremos preocupados com questões acerca da construção dos números naturais. Nesse sentido, não proporemos nenhum sistema alternativo ao lá presente. Tentaremos, contudo, esclarecer certos aspectos que não ficam tão claros dados os recursos lingüísticos utilizados por Frege.

Podemos, dessa maneira, sintetizar que o principal propósito da nossa dissertação será a tentativa de clarificação da estrutura de tipos presente na terceira seção da *Begriffsschrift* através da utilização do Cálculo Lambda, bem como investigar a sua condição de possibilidade.

1 – Capítulo I

Em 1879 Frege publicou a sua *Begriffsschrift,* considerado, amiúde, o maior compêndio de lógica posterior ao *Organon* de Aristóteles. Comumente tamanha relevância é atribuída à obra do matemático principalmente por haver uma mudança radical na maneira de se analisar as sentenças, por utilizar novos instrumentos notacionais que permitiriam exprimir mais adequadamente generalidades e por apresentar pela primeira vez em toda a história da lógica uma formulação puramente formal da noção de “prova matemática”. Tal opinião, que exprime a posição padrão a respeito da obra de Frege, pode ser observada na introdução à *Begriffsschrift* escrita por Van Heijenoort:

> As contribuições fundamentais, entre outros pontos, são o cálculo proposicional vero-funcional, a análise da proposição em termos de função e argumento, ao invés de sujeito e predicado, a teoria da quantificação, um sistema de lógica no qual as derivações são levadas a cabo exclusivamente pela forma das expressões e uma definição lógica da noção de seqüência matemática. (FREGE, 1967, p 01.)

Como vimos brevemente, nessa obra Frege desenvolvera, de acordo com Van Heijenoort, nada menos do que hoje conhecemos por cálculo proposicional e cálculo de predicados de primeira ordem, além de apresentar uma teoria das seqüências relevante à construção dos números naturais.

Não trataremos da definição de seqüência matemática apresentada por Frege na *Begriffsschrift*, entretanto, Ocuparemo-nos aqui de dois aspectos anteriormente mencionados, a saber, a análise das proposições desenvolvida em termos de “função” e “argumento” e a teoria da quantificação. Isto é, nos interessaremos primordialmente pela ordem da tomada de generalidade das proposições e, por outro lado, pela ordem dos argumentos presentes nas funções.

Reconhecemos, de acordo com Van Heijenoort e em concordância com a posição padrão, que há de fato uma grande mudança no modo fregeano de se conceber a analise das proposições, bem como um tratamento realmente original ao lidar com generalidades. No entanto, advogaremos a favor de uma outra interpretação das novidades trazidas por Frege. Admitimos que há em verdade uma mudança substancial na maneira de se analisar as proposições, mas discordamos que o ponto fundamental de tal mudança seja a mera substituição dos termos “sujeito” e “predicado” por “argumento” e “função”, respectivamente. Também tentaremos mostrar que não é somente pelo fato de se introduzir os quantificadores que a tomada de generalidade das proposições se torna adequada, veremos, nos capítulo II e III, que o que nos parece fundamental ali é a operação de *“abstração”.*

O propósito deste capítulo, portanto, será avaliar alguns itens presentes na lista apresentada por Van Heijenoort na introdução da tradução inglesa da *Begriffsschrift*, de modo a esclarecer os pontos em que concordamos com a opinião que se tornara padrão a respeito daquela obra e, nos pontos de divergência, tentaremos argumentar em favor da interpretação que julgarmos mais adequada.

Como estratégia argumentativa, optamos por expor a maneira clássica de analisar as proposições, bem como o tratamento clássico dado às generalidades. Posteriormente apresentaremos algumas mudanças introduzidas por Frege e sua interpretação padrão e a contraporemos com o nosso ponto de vista acerca daquelas mudanças trazidas pelo matemático.

1.1 - A análise proposicional clássica e a nossa interpretação da proposta fregeana.

Há uma distinção clássica atribuída a Aristóteles entre sentenças singulares e gerais. As primeiras seriam aquelas cujos sujeitos se refeririam a um indivíduo como, por exemplo, "Platão" em "Platão é barbudo". O segundo tipo de sentenças, das gerais, seria aquele no qual o sujeito da sentença se referiria a um gênero e seria subdividido em "universais" e "particulares". Exemplos de sentenças particulares e universais, respectivamente, seriam: "algum homem é mortal" e "todos os homens são mortais".

Aristóteles, assim como a gramática ordinária, analisa os enunciados, tanto os singulares quanto os gerais, em termos de *sujeito* e *predicado*. Dessa maneira, duas perguntas fundamentais devem ser respondidas para que o processo de análise seja bem sucedido. São elas, (1) "Do que se trata o enunciado?", que funciona como identificadora do termo sujeito e (2) "O que é declarado a respeito desse sujeito?". É a partir da resposta da primeira questão, que identifica o termo sujeito, que somos capazes de reconhecer o termo predicado. Assim, em um enunciado como (a) *"Sócrates instruiu Platão."*, ao respondermos às duas perguntas, temos como sujeito do enunciado *“Sócrates”* e como predicado *“instruiu Platão”*. Transpondo o enunciado anterior (a) à sua agente da passiva, extrairemos (b) *“Platão foi instruído por Sócrates”*, onde *“Platão”* apareceria como termo sujeito e *“foi instruído por Sócrates”* como termo predicado. Todavia, concluímos que em um dado enunciado, como é o caso de (b), o resultado da análise clássica de sua voz passiva divergirá de sua voz ativa, já que, como vimos, o sujeito e o núcleo do predicado são permutados.

De acordo com Frege, uma determinada oração e sua agente da passiva coincidem no que diz respeito ao seu “conteúdo conceitual”. Apesar de não definir “conteúdo conceitual”, Frege estabelece que o critério de identidade entre conteúdos é dado a partir do seu potencial inferencial, ou seja, se há uma equivalência lógica entre os dois enunciados. Dessa maneira, se as condições de verdade se mantêm em um contexto de substituição entre as duas sentenças, podemos certamente inferir que ambas são idênticas quanto ao seu *conteúdo*. Todavia, por serem intercambiáveis e preservar as condições de verdade das possíveis derivações, tanto a voz ativa, quanto a voz passiva de uma determinada sentença, são consideradas por Frege como dotadas de mesmo conteúdo conceitual. Notamos, assim, que a ênfase retórica existente em *“Sócrates”* no enunciado *“Sócrates instruiu Platão”* e em *“Platão”* no enunciado *“Platão foi instruído por Sócrates”* é relegada a segundo plano. A esse respeito Frege diz:

> Agora eu chamo aquela parte do conteúdo que é a mesma em ambas (as sentenças) de conteúdo conceitual. Uma vez que apenas ele é relevante para a nossa ideografia, não precisamos introduzir qualquer distinção entre as proposições tendo o mesmo conteúdo conceitual. (...) Eu somente considero como influente as conseqüências possíveis. Qualquer coisa necessária para a inferência correta é expressa em sua totalidade, mas o que não é necessário não é geralmente indicado. (FREGE, 1967, p. 12)

Notamos claramente nessa passagem quais são os conteúdos que realmente importam para o lógico. É certo que toda a ênfase dada aos sujeitos das frases nas linguagens ordinárias, bem como as nuanças retóricas presentes no discurso, são deixadas de lado no projeto de Frege. Para ele o que se figura de suma importância são apenas aqueles conteúdos capazes de interferir nas condições de verdade das proposições. Sob essa perspectiva, é de extrema importância observar que a palavra "conceitual" presente na expressão "conteúdo conceitual" não deve ser entendida em sentido psicológico. O conteúdo ao qual Frege se refere é o conteúdo intersubjetivo expresso pela sentença, isto é, a proposição subjacente às diversas expressões; portanto, não é um evento na mente de ninguém. Uma expressão como "2+2=4" não diz respeito à representação que qualquer pessoa específica possa ter dessa sentença. O que importa nesse caso são as condições de verdade e não a ocorrência desse pensamento na mente de um certo indivíduo.

No prefácio da *Begriffsschrift* podemos perceber a preocupação do matemático com essa possível introdução de elementos psicologistas em sua cadeia inferencial. Há ainda uma argumentação extensa presente em seu livro de 1884, *Os Fundamentos da Aritmética,* em que Frege esforça-se para rechaçar as possibilidades de interpretações psicologistas da aritmética, mas que não será de nosso interesse aqui.

Feitos tais esclarecimentos, podemos retornar à nossa investigação a respeito das concepções de análise apresentadas acima, a de Frege e a clássica. É bastante plausível supor que se a análise lógica das sentenças se contrapõe à análise gramatical das mesmas justamente por explicitar o papel lógico dos constituintes do enunciado e por não se limitar às regras de formação dadas em uma gramática específica. Devemos admitir que há, de fato, um problema com a análise clássica dos enunciados, como, por exemplo, em “Sócrates instruiu Platão” e “Platão foi instruído por Sócrates”, onde duas expressões com o mesmo conteúdo conceitual divergem ao serem analisadas.

Para Frege, a lógica trata das condições de verdade, assim, se as condições de verdade de duas sentenças, como as apresentadas anteriormente, são as mesmas, então o resultado do processo analítico deverá, outrossim, ser o mesmo.

Tendo em vista o problema existente no resultado do processo da análise clássica ao tratar de duas sentenças com o mesmo conteúdo, Frege não admite o modo analítico clássico como adequado e o substitui pela análise funcional desenvolvida em termos de *função* e *argumento*.

> Eu acredito que a substituição dos conceitos sujeito e predicado por argumento e função, respectivamente, resistirá ao teste do tempo (FREGE, 1967, p.07)

> Uma distinção entre sujeito e predicado não ocorre na minha maneira de representar um juízo. (FREGE,1967, p.12)

Como observamos anteriormente, para Frege as expressões (a) *“Sócrates instruiu Platão”* e (b) *“Platão foi instruído por Sócrates”*, por serem providas de mesmo conteúdo conceitual, deveriam oferecer o mesmo resultado ao findar-se o processo analítico. O que não ocorre na maneira clássica de se analisar as proposições, pois o resultado do processo de análise de ambas seria distinto.

Levando em conta a proposta fregeana, introduzimos para os enunciados (a) e (b) a expressão funcional “$\text{instruiu } <x,y>$” que denotaremos por I e duas constantes individuais s para o argumento “Sócrates” e p para o argumento “Platão”. E finalmente obteríamos “$I<s,p>$” como resultado da análise de ambos enunciados: *“Sócrates instruiu Platão”* e *“Platão foi instruído por Sócrates”*. Percebemos aqui claramente a introdução de uma terminologia típica à matemática, de fato, é de lá que Frege a extrai. Inclusive a noção de “função” apresentada por ele é semelhante à noção contemporânea que dispomos via teoria dos conjuntos e que estava em construção na época, graças aos trabalhos de Dedekind, Cantor e do próprio Frege. Também, como veremos, outra semelhança com a linguagem matemática (mais especificamente, com a álgebra) será o emprego de certas letras a fim de expressar generalidades.

Só por eliminar a interferência das nuanças retóricas ao processo de análise já notamos um ganho conceitual na análise de Frege, pois nela não mais nos limitamos apenas aos constituintes gramaticais das sentenças. Por isso, parece-nos justo afirmar como uma das principais contribuições do matemático a introdução da análise funcional, conquanto acreditamos que há outros elementos mais fundamentais responsáveis pelo sucesso de sua nova análise, vejamos quais.

A análise de Frege possibilita o que gostaríamos de chamar de “perda de prioridade lógica do sujeito gramatical”. É claro que nas gramáticas ordinárias o sujeito estabelece uma relação de prioridade retórica com os outros constituintes da sentença. Pois em um enunciado como (a) “*Sócrates instruiu Platão”* estaríamos falando primeiramente de *“Sócrates”* e, por outro lado, em (b) “*Platão foi instruído por Sócrates”* estaríamos a falar prioritariamente de *“Platão”*. Isso se dá porque as gramáticas, com sua forma predicativa unária, oculta alguns constituintes do sujeito lógico sob a forma de objeto. De fato, nessas gramáticas, o objeto direto faz parte do predicado gramatical.

> Se alguém diz do sujeito que é “o conceito sobre o qual o enunciado diz respeito”, isso é igualmente verdadeiro do objeto. Na linguagem ordinária o lugar do sujeito na seqüencia das palavras desempenha um papel significativo, onde direcionamos especialmente a atenção dos ouvintes. (FREGE, 1967, p.12)

A primeira vista, o fato de a análise clássica ser predicativa parece desbancá-la do posto de análise adequada. Mas vejamos primeiramente o que está por traz da substituição dos termos “sujeito” e “predicado” pelos termos “argumento” e “função”.

Um dos pontos importantes que queremos ressaltar é que a análise clássica das proposições, assim como a análise fregeana funciona perfeitamente nos casos onde há a presença de apenas predicados unários, vejamos um exemplo. Na sentença *“Sócrates é careca”*, podemos analisá-la classicamente e assim teremos *“Sócrates”* como sujeito gramatical e *“é careca”* como predicado. Na análise funcional *“Sócrates”* seria o argumento que satura a função *“ser careca”*. Nos dois casos supramencionados chamamos à atenção para o fato de, por se tratarem de um predicado unário, a sua forma lógica coincide com a sua forma gramatical e, assim, nesses casos específicos a análise fregeana e a aristotélica se comportam da mesma maneira, não havendo inclusive nenhuma vantagem de uma sobre a outra. Nesse sentido poderíamos interpretar a análise clássica como sendo funcional em um modelo no qual existam apenas funções unárias. Contudo, passamos a notar a maior riqueza presente na abordagem fregeana ao depararmos com situações onde expressões relacionais são introduzidas.

Já mesmo a partir dos predicados binários podemos notar a maior capacidade de refinamento lógico presente na abordagem de Frege. Enquanto, como vimos no exemplo das sentenças (a) e (b), a gramática analisaria de modos distintos expressões com o mesmo conteúdo conceitual que, no entanto, deveriam ser analisadas de modos idênticos. A análise fregeana faz uma clara distinção entre o sujeito *lógico* e o sujeito *gramatical*. Uma vez que em uma expressão como *"Sócrates instruiu Platão"* diríamos, do ponto de vista de uma abordagem predicativa da nova análise, que o "sujeito" seria o par ordenado <*"Sócrates", "Platão"*>, enquanto o predicado seria apenas *"instruiu"*. Isso faz com que o grau de abstração seja maior, já que, como observamos, não há mais um indivíduo exercendo o papel de sujeito lógico, mas sim um objeto abstrato, a saber, uma n-upla ordenada. Isso faz com que, mesmo mantendo a velha estrutura predicativa, obtemos um tratamento adequado ao lidar com expressões relacionais. Observem que conseguimos exprimir uma relação binária, sem que fossem utilizadas as "funções" e os "argumentos". O que nos leva a crer que a mudança realmente importante introduzida por Frege se dá no âmbito das entidades saturadas, ou seja, no sujeito das sentenças, visto que as funções e as relações se comportam de maneira semelhante não havendo nada além de uma mudança terminológica.

Daí pode-se concluir que enquanto a análise tradicional conseguia lidar apenas com os predicados monádicos, a lógica de Frege é capaz de tratar adequadamente os predicados poliádicos. Podemos notar, dessa maneira, que

Frege introduz uma mudança na noção clássica de sujeito, de modo a incorporar o que comumente aparecia sob a forma de objeto direto das gramáticas naturais ao sujeito lógico. Portanto, o sujeito lógico seria tudo aquilo que respondesse exatamente a questão *“sobre o que estamos falando?”*. Sem que haja uma pressuposição do domínio de discurso.

É como se por séculos nos tivesse passado despercebido que estávamos respondendo a questão *“sobre o que estamos prioritariamente falando?”* em vez de *“sobre o que estamos falando”*, que realmente identificaria o sujeito lógico. Tendo isso em vista, em uma sentença como *“João está entre Paulo e Maria”*, podemos seguramente inferir que, do ponto de vista fregeano, o sujeito lógico será a n-upla <*João, Paulo, Maria*>. O que faz com que não seja necessária nesse nível do discurso a introdução de “funções” e “argumentos” para que sejam adequadamente tratadas as expressões relacionais.

Queremos propor a idéia segundo a qual a principal distinção entre a análise clássica e a análise fregeana é a sutileza de Frege ao tratar o sujeito lógico das proposições como uma n-upla ordenada e não, como comumente é aceito, a introdução das funções e dos argumentos. A esse respeito concordamos com a opinião de Oswaldo Chateaubriand apresentada em seu livro *Logical Forms*.

> Frege é amplamente responsabilizado por desbancar a concepção tradicional de que as sentenças são da forma sujeito-predicado. Parcialmente por causa da sua análise relacional das sentenças e, mais ainda, pela sua análise da quantificação. A combinação dos quantificadores e conectivos não é tratada como uma combinação entre sujeito e predicado. Embora seja verdade que Frege explicitamente rejeita a distinção tradicional entre sujeito e predicado na *Begriffsschrift* e não separa notacionalmente os predicados de sujeitos não lógicos, sua análise lógica realmente aprofunda a análise tradicional em termos de sujeito e predicado. (CHATEAUBRIAND, 2001, p. 261)

Conforme buscamos argumentar, a grande revolução existente por trás da substituição dos termos “sujeito” e “predicado” pelos termos “argumento” e “função” se encontra em uma concepção mais sutil, mais abstrata, da noção de “sujeito”, pois, como tentamos expor, as novas funções se comportam semelhantemente aos velhos predicados. Concluímos, contudo, que não importa se desenvolvemos a análise em termos de “sujeito” e “predicado” ou em termos de “argumento” e “função”, o que realmente importa é que as análises sejam poliádicas, isto é, sejam capazes de exprimir predicados relacionais n-ários. Qualquer distinção adicional seria, portanto, meramente terminológica, não influindo substancialmente na opção analítica.

1.2 - A estrutura predicativa das proposições e a noção de verdade

Se a lógica lida com as condições de verdade e esta, por sua vez, depende das coisas sobre as quais versa o discurso. Então, em qualquer tipo de análise proposicional, devemos ser cautelosos quanto à referência dos constituintes do enunciado. Isso fica claro, se estivermos realmente interessados, como ocorre em ciência e em filosofia, com os valores de verdade ali presentes. De fato, é correto fazer uma associação entre a lógica e as condições de verdade. Poderíamos até mesmo dizer, grosso modo, que os elementos “lógicos” presentes nas sentenças são aqueles capazes de interferir em suas condições de verdade.

Percebemos que no decorrer de sua obra Frege lidou com pelo menos duas noções de sentido, uma, apresentada em seu artigo *Sobre o Sentido e a Referência*, que estabelece que o sentido é dado através do modo de apresentação do objeto e uma outra presente já mesmo na *Begriffsschrift*, segundo a qual o sentido seria dado pelas condições de verdade da sentença. Assim, para sabermos se um determinado enunciado é significativo ou não devemos ser capazes de responder a questão acerca de seu valor de verdade, visto que a verdade é anterior ao sentido. Frege, dessa maneira, traça uma equivalência entre as noções de “sentido” e de “condições de verdade”, a qual seria mais radicalmente formulada em 1921 no *Tractatus lógico-philosophicus* por Ludwig Wittgenstein.

É correto afirmar que na análise proposicional clássica os sucedâneos ontológicos dos termos lingüísticos “sujeito” e “predicado” são, respectivamente, objetos e propriedades. Por objetos, como observamos, devemos entender não apenas os ordinários, concretos, mas, também, os abstratos como, por exemplo, os números e os conjuntos. Mesmo em um enunciado singular como *“Paulo é alto”* precisamos dos correlatos ontológicos de seus termos para que possamos inferir com precisão o seu valor de verdade e, conseqüentemente, reconhecer o seu sentido. Nesse caso devemos ser capazes de estabelecer quem é *“Paulo”* e, mais tarde, saber se *“Paulo”* satisfaz a propriedade *“ser alto”* ou não. Supondo que haja tal indivíduo e que este satisfaça o critério referido, então podemos afirmar com segurança que o enunciado é verdadeiro. Ou seja, para sabermos se uma frase é verdadeira, devemos saber se um determinado objeto ou objetos detém certas propriedades. Esse seria o tratamento da noção de verdade que Frege herda de Platão e Aristóteles. Isto é, a verdade entendida como a combinação de um objeto com uma propriedade. Ou, nas palavras do próprio Frege, se um objeto *cai sob* essa propriedade. Esse seria um motivo adicional para acreditarmos que a análise fregeana mantém uma estrutura predicativa.

Concordamos com a idéia segundo a qual a verdade é dada por esse tipo de estrutura. Ou melhor, deve haver uma relação específica entre um sujeito (lingüístico) e um predicado para que possamos responder a questão: *"é verdadeiro?"*. Em outros termos, Frege acredita que deva haver em alguma medida uma estrutura predicativa para que se possa perguntar coerentemente acerca da verdade. Saber quem é o sujeito de uma determinada proposição se resume em saber sobre o quê estamos afirmando as propriedades expressas pelo predicado. Isto se mostra de suma importância, pois a verdade de um enunciado e, também o seu sentido, dependerá do objeto ou objetos denotados pelo termo sujeito.

Sob essa perspectiva podemos talvez criticar as gramáticas ordinárias por conceberem como adequada a noção de "sujeito indeterminado". Isto seria uma extravagância lógica, pois, como apresentamos, ser determinado é uma característica intrínseca ao sujeito, já que é a sua determinação que garante a verdade e, conseqüentemente, a significatividade dos enunciados. Em uma afirmação como "Chove!" não estamos certamente afirmando que uma entidade obscura ou desconhecida, o tal "sujeito indeterminado", satisfaz a propriedade *"ser chuva"*. Estamos afirmando que uma determinada porção da realidade está molhada porque certas gotas caíram das nuvens existentes no céu (ou algo semelhante). Mesmo em um idioma como o inglês, onde teríamos supostamente um sujeito para exprimir o agente de tal fenômeno, não conseguimos encontrar, apenas recorrendo ao enunciado, o objeto específico correspondente ao "*it*" na sentença "*it´s raining*". E, assim, não somos capazes de determinar as condições de verdade desse enunciado.

Quando alguém, perto de uma janela que dê para um jardim, digamos, profere *“Chove!”*, parece muito claro qual é o objeto de qual se predica a queda de chuva: é daquele jardim que estamos falando. Não haveria, assim, nenhum motivo para se introduzir uma suposta “indeterminabilidade” ao sujeito. E, na verdade, devemos eliminar tais noções quando tratamos de lógica. Pois, conforme argumentamos, a identificação do termo sujeito é fundamental à constituição da verdade dos enunciados.

1.3 O tratamento dado à tomada de generalidade nas linguagens naturais e as vozes verbais.

Como é bastante difundido, Frege apresenta uma enorme contribuição à lógica em sua *Begriffsschrift,* a saber*,* a nova maneira de lidarmos com a generalidade. Os trabalhos de Frege e Aristóteles distam cerca de 2000 anos, isso significa que Frege lida adequadamente com um assunto que não havia sido corretamente tratado por todo esse período.

Aristóteles, assim como os estóicos, também se ocupou com as sentenças gerais, como podemos observar, por exemplo, nos famosos silogismos categóricos. Na construção de seus silogismos, Aristóteles certamente se deu conta de que havia um maior grau de complexidade presente nas frases declarativas gerais. Tanto é verdade que o filósofo distingue as frases declarativas em "universais" e "particulares" e em "afirmativas" e "negativas". Produzindo através da combinação dessas frases quatro tipos distintos de sentenças, que ficaram conhecidos posteriormente por quadrado de oposição.

Mesmo com a introdução do quadro de oposição, notamos que a análise das proposições continua sendo unária, já que os exemplos dados por Aristóteles são sempre dessa natureza. Segundo Dummett, os Estóicos desenvolveram uma lógica inferencial concorrente à silogística aristotélica que, no entanto, também não foi bem sucedida ao tratar de generalidades múltiplas. Diferentemente, os escolásticos deram um passo além dos helênicos e introduziram expressões relacionais, sem que, entretanto, qualquer resultado satisfatório fosse apresentado.

> Aristóteles e os Estóicos investigaram somente as inferências envolvendo essencialmente não mais do que uma expressão de generalidade. A lógica escolástica arrancou os problemas apresentados por inferências envolvendo múltiplas generalidades (...) eles desenvolveram teorias cada vez mais complexas com diferentes tipos de *suppositio* (diferentes maneiras nas quais uma expressão poderia ser aplicada a um objeto), mas essas teorias, enquanto sutis e complexas, nunca foram de validade universalmente aplicável, tanto do ponto de vista sintático, quanto do semântico. (DUMMETT, 1981, p. 08)

Daí podemos entender perfeitamente a imensa contribuição trazida pela *Begriffsschrift*. Somente no século dezenove é que Frege apresentou uma abordagem realmente fértil ao interpretar sentenças gerais. Não apenas por tratar de expressões que fossem relacionais e gerais, pois isso, como foi dito, os escolásticos outrora o fizera, mas sim por tratá-las de um modo a serem capazes de exprimir inúmeras generalidades sem que confusões conceituais fossem engendradas. Veremos, a seguir, os aspectos por meio dos quais podemos inferir seguramente que a análise fregeana foi incomparavelmente superior à gramatical, de tradição aristotélica. Visando isso, apresentaremos algumas dificuldades da análise clássica ao lidar com a generalidade.

Apresentaremos um argumento que parte de uma expressão singular e através de certas substituições chegamos à expressão geral de nosso interesse. Esse argumento foi originalmente apresentado por Michael Dummett em seu livro *Frege Philosophy of Language* (Dummett, 1981, p. 11) e que nos parece extremamente esclarecedor, pois explicita, através de etapas, a maneira em que as expressões gerais estão sendo ordinariamente tratadas.

Voltemos às linguagens naturais e tomemos o enunciado *"Paulo ama Maria"*. Certamente se trata de uma expressão bem formada da língua portuguesa. Podemos, entretanto, retirar o nome Paulo da sentença e assim obteríamos *"x ama Maria"*. Podemos, outrossim, substituir o *"x"* por uma expressão de generalidade como, por exemplo, *"todos"* e, assim, teríamos como resultado de tal substituição a nova expressão *"todos amam Maria"*. De fato, é assim que nas linguagens ordinárias são produzidas as expressões gerais. Ou seja, pela simples substituição de um termo singular por um geral. Nesse caso, a expressão de generalidade ocupa exatamente o lugar dos nomes singulares. Desse modo, em nosso exemplo: "Todos amam Maria", obtivemos pela substituição referida uma nova expressão bem formada que exprimiria que todas as coisas que têm a capacidade de amar, amam a Maria. Podemos, agora, realizar com o nome "Maria" o mesmo procedimento que fizemos com "Paulo" no enunciado "Paulo ama Maria". Seguindo o mesmo padrão extrairemos "Maria" e introduziremos desta vez a expressão existencial "alguém" e obteríamos novamente outro enunciado bem formado, a saber, "Paulo ama alguém" que exprimiria o fato de Paulo amar alguma coisa.

Também se levarmos em consideração a agente da passiva das sentenças “todos amam Maria” e “Paulo ama alguém” obteremos “Maria é amada por todos” e “alguém é amado por Paulo”, respectivamente. O que nos leva a crer que tanto a voz passiva, quanto a voz ativa dessas sentenças também são construídas pela mera substituição de um nome próprio por uma expressão de generalidade.

Seguindo aquela mesma regra de substituição a pouco utilizada, substituiremos na sentença “Paulo ama alguém” o nome “Paulo” pela expressão de generalidade “todo” e obtemos, dessa maneira, “*todos amam alguém*”. Mas o que pretendemos dizer quando proferimos tal sentença? De fato, parece haver ordinariamente ai pelo menos duas interpretações. A primeira opção afirmaria que cada ser que é capaz de amar possui um amante. Entretanto, a segunda opção, afirmaria, por sua vez, que há um determinado ser privilegiado que é amado por todos aqueles que são capazes de amar, ou vice-versa. Parece que usualmente nas linguagens naturais a sentença *“todos amam alguém”* pretende exprimir a primeira das duas possibilidade, enquanto, por outro lado, a sua voz verbal passiva “*alguém é amado por todos*”, onde o sujeito sofreria a ação, parece ser uma tentativa de exprimir a segunda opção acima referida. Claramente as duas sentenças são distintas, pois se tratam de expressões onde a ordem de tomada de generalidade é distinta. Assim, a voz passiva parece funcionar como um recurso das linguagens naturais na tentativa de inverter a ordem da tomada de generalidade das expressões universais e particulares. Mas obviamente tal recurso só se mostra bem sucedido no caso de expressões relacionais binárias, pois, a partir delas, não é mais possível tratar adequadamente a generalidade através da alteração da voz verbal.

Como poderíamos, por exemplo, inverter a ordem da tomada de generalidade da sentença “todos amam alguém, o qual ama outro alguém”? Claramente existem mais possibilidades de permutas do que aquelas representadas pelas vozes verbais: ativa e passiva. Desse modo, podemos notar que a regra de formação que dispomos ordinariamente para a construção de sentenças gerais é barrada já mesmo a partir de sentenças binárias, o que nos leva a crer que essa maneira de se construir sentenças gerais é inadequada. Certamente, na linguagem corrente, não precisamos com freqüência exprimir múltiplas generalidade, isso, à primeira vista, nos faz acreditar que a substituição de um termo singular por um geral é adequada à formação de sentenças gerais, o que não é correto.

A maneira de se construir sentenças apresentada acima é a clássica, ela não é adequada, pois confunde a ordem de tomada de generalidade com a ordem dos argumentos da sentença. Isso em termos contemporâneo seria um caso óbvio de uma sentença mal formada, visto que os quantificadores ocupariam os lugares típicos dos termos singulares. Em uma sentença como "todos amam alguém" a lógica de Frege a interpretaria como $\forall x \exists y A x,y$ onde os quantificadores "$\forall$" e "$\exists$" representam as expressões de generalidade "todos" e "alguém" e $A(x,y)$ a relação "x ama y". Como podemos observar é feita nitidamente a distinção entre a ordem de tomada de generalidade dos quantificadores e a ordem dos argumentos da função "x ama y". É verdade que nas linguagens naturais não utilizamos mais do que as formas "x ama y" e "y é amado por x", entretanto é importante notar que a estrutura lógica subjacente a uma expressão como *“todos amam alguém”* apresenta uma multiplicidade lógica mais rica do que aquelas duas formas *“todos amam alguém”* e *“alguém é amado por todos”.* Podemos observá-la através das seguintes permutas possíveis na abordagem de Frege:

(1) $\forall x \exists y A x,y$;

(2) $\forall x \exists y A y,x$;

(3) $\exists y \forall x A x,y$;

(4) $\exists y \forall x A y,x$.

(5)

(6) É claro que em alguns casos a interpretação será a mesma, entretanto é importante ressaltar que as permutas possíveis são quatro e não apenas duas como previam as linguagens naturais. Isso serve para enfatizar a enorme importância da distinção anteriormente referida entre a ordem da

tomada de generalidade e a ordem dos argumentos presentes nas funções. Essa nova maneira fregeana de se tratar as sentenças contendo generalidade possibilitou a realização daquela antiga ambição de se exprimir adequadamente inúmeras generalidades.

(7)

(8) O argumento acima apresentado nos mostra que as expressões de generalidade “todos” e “alguém” não podem ser as substitutas adequadas de termos singulares como “Paulo” e “Maria” no caso de expressões relacionais. O que nos leva a crer que a construção de expressões de generalidade através da simples substituição do termo singular por um termo geral apresenta dificuldades mesmo no tocante às sentenças binárias.

(9)

(10) Além disso, há um problema relativo às condições de verdade, que é o fato da sentença “todos amam alguém” não exprimir o mesmo conteúdo de “alguém é amado por todos”, que seria a sua agente de passiva e, no entanto, deveria ser dotada de mesmo conteúdo conceitual, conforme a exigência fregeana. Claramente a voz ativa e a voz passiva desse tipo de afirmação divergirão em seu modo de serem analisadas, independentemente da análise escolhida.

(11)

(12) Enquanto nas expressões singulares, tanto a sua voz ativa, quanto a sua voz passiva, preservam as mesmas condições de verdade, visto que podemos derivar as mesmas sentenças de, por exemplo, *“Paulo ama Maria”* e *“Maria é amada por Paulo”*. Como vimos, o mesmo não ocorrerá no caso de sentenças gerais. É verdade, que por haver uma prioridade retórica do sujeito nas linguagens naturais, a voz passiva de uma determinada oração funciona como um recurso útil à permuta da ênfase entre o sujeito e o objeto direto. O que, todavia, não ocorre caso o sujeito e o objeto sejam expressões gerais como “todos” e “alguém”.

(13)

(14)

(15)

(16)

(17)

(18)

(19)

(20)

(21)

(22)

(23)

a. *1.4 As ambigüidades presentes na análise clássica das proposições.*

(24)

(25) Apresentaremos nesta seção alguns problemas adicionais presentes na análise clássica das proposições e que atingem até mesmo as sentenças unárias.

(26)

(27) Uma expressão como, por exemplo, (3) *"os homens têm dois braços"*, por se referir como sujeito ao gênero *"os homens"*, seria um exemplo de uma expressão unária contendo generalidade. Nesse caso, a antiga abordagem a analisaria como constituída do sujeito *"os homens"* e do predicado "têm dois braços". Podemos, através desse tipo de análise, notar uma clara ambigüidade existente na sentença referida. Quando proferimos *"os homens têm dois braços"* estaríamos exprimindo o quê? Se formos utilizar o esquema clássico singular, que explica as condições de verdade, isto é, o sentido. Teríamos inicialmente de identificar um objeto, o objeto sobre o qual

estamos falando. Mas, em nosso caso, que objeto seria esse? Dispomos de várias opções:

(28)

(29) (1a) que o conjunto dos homens tem dois braços;

(30) (2a) que a reunião material de todos os homens, o agregado, tem dois braços;

(31) (3a) que cada homem tomado particularmente possui dois braços.

(32)

(33) Se formos utilizar o esquema clássico, singular, teríamos inicialmente de identificar um objeto, ou seja, aquele sobre o qual estamos falando. Mas, em nosso caso, que objeto seria esse?

(34)

(35) Como vimos, incorremos em uma ambigüidade ao tentar determinar que tipo de objeto se referiria ao termo sujeito da expressão (3). Deparamos, assim, com um problema importante, pois, como observamos na seção 1.2 a determinação do sujeito de certo enunciado influi diretamente na atribuição de suas condições de verdade, bem como em sua significatividade. Como sabemos é extremamente inadequado do ponto de vista lógico a necessidade da introdução de elementos externos para que a constituição semântica de um determinado enunciado seja completamente dada. Por esse motivo, parece haver um problema com a análise clássica ao lidar com certas sentenças contendo generalidade como, por exemplo, é o caso da sentença (3).

(36)

(37) Voltemos à questão (3) *"Os homens têm dois braços"* e façamos uma avaliação sobre quais possíveis objetos corresponderiam ao sujeito lógico das interpretações (1a), (2a) e (3a); acima apresentadas. Levando em consideração aquela noção predicativa de verdade, onde para que o enunciado

como um todo tenha um valor de verdade é necessário que os seus termos constituintes tenham correlatos ontológicos. Avaliemos as três afirmações (1a), (2a) e (3a).

(38)

(39) Classicamente analisada, a primeira sentença (1a) *"o conjunto dos homens tem dois braços"* teríamos como sujeito "o conjunto dos homens" e como predicado *"tem dois braços"*. Essa parece ser, inicialmente, uma boa escolha. No entanto, se perguntássemos acerca do valor de verdade de tal enunciado, então, entraríamos em aporia. Sendo o conjunto {x:x é homem} o sujeito da sentença 3, poderíamos atribuir algum valor de verdade à afirmação (1a)? Levando em consideração que um conjunto é um objeto abstrato, poderia um objeto dessa natureza satisfazer a propriedade *"ter dois braços"*? Parece que se considerarmos "{x:x é homem}" como o sujeito da expressão (1a) perdemos o conteúdo informativo pretendido pela frase (3). Atribuir o estado semântico verdadeiro ao enunciado (1a) seria, de fato, contra-intuitivo. Assim, devemos considerá-la falsa, pois essas condições de verdade não são aquelas da frase original. Houve a troca do valor de verdade! Portanto, nossa análise do sentido dessa frase estaria errada.

(40)

(41) Voltemos às duas outras propostas de possíveis interpretações da sentença *"os homens tem dois braços"*. Na afirmação (2a) *"o agregado dos homens tem dois braços"* temos um caso ainda mais esdrúxulo do que o (1a) apresentado acima. Analisando-o, as expressões *"o agregado dos homens"* e *"tem dois braços"* seriam seus respectivos sujeito e predicado. Por agregado dos homens devemos entender a reunião material dos homens? Parece ser "sim" a resposta mais adequada. Dessa maneira, supondo que haja no mundo 6 milhões de homens, deveríamos, portanto, concluir que a sentença (2a) seria equivalente a dizer que o sujeito da expressão possui 12 bilhões de braços! Assim poderíamos reformulá-la por "os homens têm 12 bilhões de braços"! Mas, nesse caso, a sentença "os homens têm 12 bilhões de braços" seria verdadeira, enquanto a sentença "os homens têm dois braços" seria falsa! Tudo

isso parece-nos no mínimo bastante confuso, pois a teoria predicativa da verdade, a qual nos propusemos a utilizar até agora, parece não funcionar bem aqui.

(42)

(43) Por fim, nos resta a afirmação (3a) *“cada homem tomado particularmente tem dois braços”*, que é a que utilizamos comumente para interpretar o enunciado (3). Entretanto, se a avaliarmos mais criticamente do que o de costume, notaremos que o sujeito, *“cada homem tomado particularmente”* é problemático, pois o que seria o objeto “cada homem tomado particularmente”? Ele seria equivalente a um objeto específico? Seria um homem? Qualquer homem ou determinado homem específico? Uma alternativa plausível e comumente adotada seria interpretar a expressão “cada homem tomado particularmente” como uma conjunção de todos os elementos do conjunto dos homens. Mas, nesse caso, abrimos mão da forma sujeito/predicado, visto que a expressão “os homens” não é o sujeito dessa frase, ela é uma conjunção de afirmações singulares, onde cada uma tem o seu próprio sujeito. Avaliemos tal alternativa.

(44)

(45) Se, como propusemos, interpretarmos a expressão (3a) como uma conjunção teríamos (João tem dois braços ∧ Pedro tem dois braços ∧,..., José tem dois braços), mas essa conjunção não seria o sujeito da sentença (3a). Na verdade o que ocorreria nessa proposta é que as sentenças gerais seriam, de fato, diversas sentenças singulares camufladas por uma expressão de generalidade. Apesar dessa alternativa aparentemente ser satisfatória, incorremos em dificuldades ao tratarmos de domínios infinitos, como rotineiramente ocorre em matemática. Dado um enunciado como *“os números naturais são inteiros”* teríamos como o sujeito da frase a expressão *“os*

números naturais”. Mas nesse caso teríamos que dispor de uma conjunção infinita, já que o domínio o qual o sujeito da sentença diz respeito é infinito. Assim, o suposto sujeito *“os números naturais”* seria o substituto de outras infinitas sentenças: “1 é inteiro”, “2 é inteiro”, “3 é inteiro” ... Mas como essa lista jamais se finda, não teríamos um conteúdo definido, poderíamos sob essa circunstância atribuir corretamente um valor de verdade à sentença *“os números naturais são inteiros”*? Aqui cairíamos diretamente no espinhoso problema da infinitude e o de se devemos ou não aceitar classes infinitas como sendo “completas” (se não pudermos completar a classe, não teríamos um sentido definido). Essa situação se mostra no mínimo embaraçosa.

(46)

(47) Até aqui procuramos “testar” uma possível interpretação que amiúde é considerada a mais plausível entre todas anteriormente apresentadas. Vimos que apesar dessa alternativa ser tentadora ao lidarmos com domínios finitos, percebemos que a mesma já não se mostra tão eficaz quando tratamos de domínios de natureza infinita. É claro que se nos propusermos a encontrar uma teoria adequada à interpretação do termo sujeito nas sentenças envolvendo generalidades, não devemos nos ocupar somente das sentenças chamadas por Aristóteles de universais afirmativas, devemos, obviamente, tratar também das negativas e das singulares, tanto as afirmativas, quanto as negativas.

(48)

(49) Certamente se aceitarmos a interpretação de que o termo sujeito das sentenças universais são conjunções, devemos, outrossim, aceitar que o mesmo termo nas sentenças singulares será uma disjunção. Nesse caso em uma sentença como “algum homem tem dois braços” teríamos algo semelhante a: (Paulo tem dois braços V Pedro tem dois braços V,..., José tem dois braços). A negativa poderia ser construída de mesma forma *mutatis mutandis*. Mas como interpretar uma sentença universal negativa como, por exemplo, “nenhum argentino é vegetariano”?

(50)

(51) Veremos através de alguns exemplos que a situação se complica e muito. O caso das expressões *“nenhum argentino é vegetariano”* e *“nenhum brasileiro é argentino”* seria um deles. Ao analisá-las teríamos como sujeito da primeira *“nenhum argentino”* e como sujeito da segunda *“nenhum brasileiro”*. Mas quais seriam os objetos que corresponderiam na realidade tais expressões. O que seria o objeto *“nenhum argentino”*? Se optarmos por interpretar o sujeito das expressões universais como conjunções, que tipo de conjunções seria adequado ao caso de *“nenhum argentino”* e *“nenhum brasileiro”*? Uma solução possível, bem intuitiva e plausível seria dizer que tais expressões não correspondem a coisa alguma, a nada. Entretanto seríamos barrados ao tentar atribuir critérios de identidade e diferença às expressões *“nenhum argentino”* e *“nenhum brasileiro”.*

(52)

(53) Se por um lado podemos dizer daqueles sujeitos que eles seriam equivalentes a coisa nenhuma, a nada, então eles próprios seriam equivalentes entre si. E dessa maneira poderíamos substituí-los respeitando o princípio *salva veritate*, isto é, mantendo as condições de verdade da frase em que esses termos ocorressem. Mas assim, a partir dos enunciados *“nenhum brasileiro é argentino”* e *“nenhum argentino é vegetariano”*, extrairíamos surpreendentemente como verdadeiras as seguintes sentenças: *“nenhum brasileiro é vegetariano”* ou, pior ainda, “*nenhum argentino é argentino”*! Tais conclusões parecem levantar um obstáculo intransponível àquela proposta interpretativa que visava considerar os sujeitos das expressões universais e particulares como conjunções e disjunções, respectivamente.

(54)

(55) Em uma sentença como *“os homens são mortais*” o erro consistiria em tratar *“os homens”* como o sujeito de uma sentença logicamente menos complexa como, por exemplo, o de *“Paulo”* em *“Paulo é alto”*, na qual afirmamos de um objeto (Paulo) que ele satisfaz a propriedade de *“ser alto”*. Assim, a tradição teria tratado do ponto de vista lógico uma “entidade” como *“os homens”*, igualmente a um objeto ordinário como, por exemplo, José.

Utilizando a terminologia própria de Aristóteles, a tradição teria atribuído o mesmo estatuto lógico às substâncias primeira e segunda. Onde observamos que de alguma maneira as expressões de generalidade estariam preenchendo o lugar de um argumento de primeiro nível, como detalharemos nas seções posteriores.

(56)

(57) Após avaliar pelo menos três possibilidades interpretativas da sentença *"os homens têm dois braços"*, chegamos à conclusão que há uma clara ambigüidade ao tentar-se delimitar o sujeito lógico daquela expressão. Além disso, mesmo tentando encontrar o correlato ontológico de tal termo, conforme fizemos em (1a), (2a) e (3a); somos enredados por diversas dificuldades, algumas realmente insolúveis.

(58)

(59) Apesar de não haver em nosso exemplo nenhum problema em relação ao termo *"tem dois braços"* que é o predicado comum às expressões (1a), (2a) e (3a), vimos que somos impossibilitados de atribuir univocamente e sem confusões o valor de verdade das expressões acima. Como já apresentamos, tal confusão se dá pelo fato de não estar bem delimitado que tipo de objeto seria o sujeito das afirmações (1a), (2a) e (3a). Ainda, ao tentarmos delimitar tais objetos, não obtivemos alguma interpretação que fosse satisfatória.

(60)

(61) Nos diálogos cotidianos não notamos com tanta freqüência esse tipo problemas, pois há a presença do contexto que, amiúde, elucida certas sentenças ambíguas. Ou até mesmo porque já "traduzimos" as expressões por outras mais adequadas de acordo com as circunstâncias. Entretanto, em lógica, não contamos com a presença do contexto, e, por isso, as sentenças devem ser desde o início formadas livres de ambigüidades. Assim, é bem fácil notar a situação desagradável na qual somos colocados ao tentar analisar classicamente uma sentença como aquela "os homens têm dois braços", onde

não somos capazes de delimitar univocamente o sujeito da expressão e, conseqüentemente, o seu valor de verdade. O que compromete a significatividade de todo o enunciado.

(62)

(63)

(64)

(65)

(66)

(67)

(68)

(69)

(70)

(71)

a. 1.5 - A análise clássica das proposições e a negação.

(72)

(73) Podemos concluir através de nossa explanação que a análise clássica é ambígua ao tratar de certas expressões como, por exemplo, no caso da sentença: “os homens têm dois braços”. Vimos também que mesmo as tentativas a fim de solucionar as ambigüidades não são satisfatórias e enredam-se facilmente em problemas acerca de que tipo de objeto devemos considerar como o sujeito das afirmações.

(74)

(75) Veremos adiante que além de todos aqueles problemas apresentados relativos ao termo sujeito das sentenças referidas, há ainda um argumento apresentado por Frege em que a noção de predicado lógico apresentada pela análise clássica também é problematizada.

(76)

(77) Em seu artigo *Sobre o Conceito e O Objeto*, Frege apresenta tal argumento adicional contra a análise clássica. O matemático utiliza a própria noção de negação apresentada por Aristóteles a fim de refutar a sua maneira de conceber a análise das proposições. Interpretando a negação classicamente, como um operador que aplicado a uma determinada proposição sempre altera o seu valor de verdade, a maneira usual de se negar uma proposição é negando-lhe o seu predicado. Podemos observar isso mais nitidamente no caso de proposições singulares como, por exemplo, em "Paulo é alto", onde caso queiramos obter a contraditória da proposição basta antepor ao seu predicado a partícula que exprime a negação e teremos nesse caso "Paulo não é alto" que seria a negativa daquela proposição.

(78)

(79) Já em uma proposição categórica típica como "Os mamíferos são terrestres" a sua negação forte, ou seja, a sua proposição contraditória que sempre apresentará uma assimetria em relação ao valor de verdade da sentença original. Seria uma da forma "O" do quadro aristotélico, a saber, "alguns mamíferos são não terrestres" ou "não é o caso que os mamíferos sejam terrestres". E não, como poderia parecer à primeira vista, o enunciado "os homens não são mortais" que, como vimos, seria a proposição contrária, podendo, portanto, serem ambas falsas.

(80)

(81) Se sustentarmos a tese intuitiva segundo a qual a negação de um enunciado é dada pela negação de seu predicado, podemos seguramente inferir que "são terrestres" não pode ser o predicado lógico de "os homens são mortais". Nesse caso podemos parafrasear "os homens são mortais" por "todos

os homens são mortais” e, assim, a partícula de negação deveria vir antes do pronome relativo “todo”.

(82)

> (83) Se na sentença “todos os mamíferos são terrestres” a combinação de palavras “todos os mamíferos” exprimisse o sujeito lógico do predicado são terrestres, então para negar o todo teríamos de negar o predicado: “não são terrestres”. Em vez disto devemos pôr o “não” em frente de “todos”, do que decorre que “todos” pertence logicamente ao predicado. (FREGE, 1978a, p. 96)

(84)

(85) Podemos afirmar que a explicitação fregeana da forma lógica das proposições é uma espécie de mapeamento da gramática profunda da linguagem, onde realmente ficam explícitas as relações lógicas existentes entre os constituintes das proposições, o que nem sempre ocorre na gramática superficial das línguas naturais.

(86)

(87) Também seria correto inferir que em alguns casos a gramática profunda (dada pelas condições de verdade) que preserva as relações lógicas subjacentes às sentenças, corresponde à gramática superficial, como pudemos notar, por exemplo, no caso da negação. Pois ser um predicado envolve a propriedade semântica de que, negando-se essa expressão, deve se obter a sua contraditória. E, nesse caso, tanto a gramática profunda, quanto a superficial se comportam semelhantemente, como pudemos observar no exemplo das sentenças gerais apresentado por Frege.

(88)

(89)

(90)

(91)

(92)

(93)

(94)

(95)

(96)

(97)

(98)

(99)

a. 1.6 – A Resposta Fregeana à Análise Clássica.

(100)

(101) Vimos nas duas seções precedentes que as propostas clássicas de sujeito e predicado lógico nas sentenças gerais foram problematizadas por Frege. Podemos, contudo, sintetizar que a noção clássica de sujeito é inadequada por não ser capaz de delimitar univocamente, sem ambigüidades, qual seria o objeto sobre o qual diz respeito o enunciado. Outrossim, a noção clássica de predicado também não seria adequada por não ser possível se obter a sentença contraditória de uma sentença geral qualquer através apenas da negação do que aquela análise considerava como o predicado lógico da sentença.

(102)

(103) Podemos dizer que Frege resolve os problemas relativos à análise clássica através da distinção existente entre “tipos lógicos”, o que faz com que nem todas as entidades da teoria possam corretamente ser predicadas umas das outras, conforme detalharemos adiante, e a criação dos “quantificadores” que permitiu a adequada expressão das generalidades.

(104)

(105) Conforme observamos, Frege marca o tipo lógico dos constituintes das proposições, dessa maneira, em um enunciado como “Paulo é alto” o formalizaríamos através de “A(p)”, onde “p”, por denotar Paulo, pertenceria ao tipo lógico dos objetos que chamaremos aqui de nível 0. Por outro lado, “A”, por se referir à propriedade “ser alto”, pertenceria ao tipo lógico das propriedades de primeira ordem e pertenceriam ao nível 1 da hierarquia de tipos. Frege distingue, assim, as propriedades através de suas respectivas ordens. Uma propriedade de primeira ordem, por exemplo, seria aquela que é predicada diretamente de objetos, os quais pertencem ao nível 0, entretanto, há propriedades de ordens superiores. Por exemplo, uma propriedade que seja predicada de outra propriedade que seja de primeira ordem, seria, por esse motivo, de segunda ordem e assim por diante.

(106)

(107) Uma expressão geral como “os homens são mortais” seria

formalizada por Frege através de $\forall x Hx \rightarrow Mx$ e lida da seguinte maneira: “para

todo x, se x é homem, então x é mortal”. É importante ressaltar que ao contrário da análise clássica, que tratava qualquer espécie de sentença como sendo do mesmo tipo lógico, Frege, como no caso de “os homens são mortais”, separa, nesse caso, três tipos lógicos distintos. Onde o “x” denotaria um indivíduo qualquer do nível 0, dos objetos, as propriedades “H” e “M”, por predicarem dos objetos representados por “x”, pertenceriam ao nível 1, das

propriedades de primeira ordem. E, finalmente, o quantificador “∀x” que

formaliza a expressão “para todo” aparece como sendo uma propriedade de segunda ordem, por afirmar a universalidade da propriedade composta

“Hx→M(x)”. Dessa maneira, uma sentença geral como “os homens são

mortais” seria interpretada como uma relação de subsunção entre os conceitos “ser homem” e “ser mortal”, onde o que quer que seja um homem será também um mortal e esse conceito composto cairia sob um de nível superior, a saber, a

universalidade representada por “∀x”.

(108)

(109) Notamos na abordagem fregeana uma nítida distinção entre os tipos lógicos dos constituintes das proposições, conforme explicamos no caso do enunciado *Todo homem é mortal*. Observamos que, a expressão *todos*, na abordagem de Frege, não faz parte do sujeito lógico como era entendida pela análise clássica, mas aparece sob a forma de uma predicação de ordem

superior. É importante notar que o quantificador “∀x” não possui o mesmo estatuto lógico de uma propriedade de primeira ordem como, por exemplo, a da propriedade *ser alto*. Nesse caso, os quantificadores pertenceriam ao tipo lógico das propriedades de segunda ordem, pois predicam universalidade de relações existentes entre propriedades de primeira ordem, como vimos no exemplo anterior. É nesse sentido que a expressão “os homens são mortais” não trata dos homens enquanto objetos, daí a celebre afirmação de Frege:

(110)

> (111) “Todas as baleias são mamíferos” pareça tratar de animais; mas se perguntamos de que animais se está falando, não se pode indicar nenhum em particular. Posta uma baleia diante de nós, nossa proposição não afirmará nada a seu respeito. (FREGE, 1989, p. 245.)

(112)

(113) Retomando àquela sentença ambígua *Os homens têm dois braços,* apresentada na seção 1.4, notamos facilmente que se a analisarmos sob a perspectiva fregeana somos capazes de desfazer aquelas confusões conceituais relativas à caracterização do termo sujeito da sentença. A sentença *Os homens têm dois braços* é equivalente à sentença *Todos os homens têm dois braços*, como nos referimos anteriormente, a análise de Frege deixa explícito que as expressões de generalidade não fazem parte do sujeito lógico das sentenças, assim, formalizando por etapas aquele enunciado, temos que primeiramente formalizar a propriedade composta lá presente, inicialmente sem a expressão de generalidade, *homens tem dois braços*, através de $Hx \rightarrow 2B(x)$ e, posteriormente, afirmar dessa relação que ela é universal pela da introdução do quantificador, assim chegamos a $\forall x Hx \rightarrow 2Bx$, que exprime que qualquer objeto que seja um homem terá dois braços.

(114)

(115) Como apresentamos na seção 1.4, acreditamos que os problemas encontrados no tocante à determinação do objeto denotado pelo termo sujeito das sentenças gerais se davam pelo fato de não haver uma clara distinção entre os tipos lógicos existentes nas sentenças gerais, o que acarretava na errônea interpretação de que a generalidade deveria ser constituinte do sujeito lógico de tais sentenças. Por outro lado, o problema relativo à negação de sentenças gerais também é resolvido pela anteposição da partícula de negação ao quantificador, como detalhamos na seção 1.5. Além desses dois problemas solucionados por Frege, há aquele relativo à ordem de tomada de generalidade que apresentamos na seção 1.3 e desenvolvemos lá mesmo a solução fregeana que possibilita a correta de expressões envolvendo duas expressões de generalidade como no caso das sentenças *Todos amam*

alguém $\forall x \exists y\, Ax,y$ e alguém é amado por todos $\exists x \forall y Ay,x$.

(116)

(117) Além de solucionar esses problemas apresentados pela análise clássica das proposições, a lógica de Frege possibilita como nos referimos anteriormente, a correta expressão de inúmeras generalidades através da introdução de quantificadores sob o escopo de outros, o que representou um enorme desenvolvimento à formalização em matemática, visto que, amiúde, se faz mister a utilização de tal recurso.

(118)

a.

(119)

(120)

(121)

(122)

(123)

(124)

(125)

(126)

(127)

(128)

(129)

a.

(130) *2 - Capítulo II*

(131)

(132) No primeiro capítulo desenvolvemos uma argumentação norteada pela lista criada por Van Heijenoort na introdução da *Begriffsschrift,* onde são apresentadas as que seriam as principais contribuições de Frege em sua obra de 1879. Nessa lista, são elencados como colaborações da obra de Frege, grosso modo, o cálculo proposicional de primeira e segunda ordem, a análise funcional das proposições e outros pontos que, embora importantes, já observamos que não nos ateremos a eles em nosso texto. Em geral, concordamos com os pontos citados por Van Heijenoort, entretanto advogamos em favor da idéia de que é possível se interpretar predicativamente a análise

de Frege e que sua contribuição fundamental em relação à análise das proposições seria uma maior sutiliza ao considerar o sujeito lógico das proposições, como n-uplas ordenadas. Visto que as noções de “predicado” e “função” se comportam semelhantemente, ou seja, não há mudanças significativas entre a análise clássica e a análise fregeana no tocante à parte insaturada das sentenças.

(133)

(134) Introduzimos, também, a idéia de que a verdade necessita em alguma medida de uma estrutura predicativa, pois é da conexão entre um determinado sujeito e um predicado que é satisfeita a condição de possibilidade das condições de verdade e, conseqüentemente, do sentido. Assim, para se delimitar as condições de verdade de uma sentença qualquer, necessitamos previamente de reconhecer sem ambigüidades os correlatos, sejam eles quais forem, dos termos sujeito e predicado das sentenças. Salientamos que a análise clássica não é bem sucedida ao tentar determinar as condições de verdade das sentenças gerais, pois aquele método analítico não satisfaz o critério de delimitação do sujeito e do predicado lógico das sentenças. O que causou por séculos inúmeras confusões conceituais, conforme expusemos detalhadamente na seção 1.4.

(135)

(136) Por fim, na seção 1.6, apresentamos como as dificuldades engendradas pela análise proposicional clássica são dissolvidas sob a perspectiva da análise fregeana, onde nos é apresentada uma nova distinção entre sujeito e predicado lógicos, viabilizada pela introdução da noção de “tipos lógicos” e, também, dos quantificadores que solucionaram os problemas relativos à análise proposicional das sentenças gerais.

(137)

(138) No presente capítulo apresentaremos o Cálculo Lambda de Alonzo Church o qual nos possibilitará a execução de nosso projeto de avaliação da estrutura de tipos presente na terceira seção de *Begriffsschrift*.

Embora já tenhamos apresentado brevemente no capítulo I a noção de tipos utilizada por Frege, a retomaremos neste capítulo com um grau maior de detalhamento e, também, tentaremos argumentar que os pontos elencados por Van Heijenoort em sua lista orbitam em torno de duas noções elementares que lá não se encontram listadas, a saber, a de “tipo lógico” e a de “abstração”. Queremos de fato mostrar que o sucesso da investida fregeana só foi possível graças essas duas noções. Na verdade, a própria noção de tipo lógico é dada em decorrência da “operação de abstração”, por isso dedicaremos uma parte significativa deste capítulo, a primeira parte, a fim de apresentar tal operação que merecerá uma atenção especial.

(139)

(140) Em seguida veremos que Frege, em seu artigo *Sobre o Conceito e o Objeto*, nos alerta para o problema da impossibilidade de se referir predicativamente a conteúdos intensionais como as propriedades, o que, à primeira vista, pareceria inviabilizar a proposta de nossa dissertação. Assim, após apresentarmos as ferramentas necessárias ao nosso projeto, a saber, a operação de abstração e a estrutura de tipos por ela produzida. Nos ocuparemos daquele problema enfatizado por Frege, em que uma sentença como *“o conceito cavalo não é um conceito”* seria verdadeira, pois a expressão *“o conceito cavalo”* denotaria um objeto e não um conceito como a princípio pareceria.

(141)

(142) Tentaremos, também, mostrar que deve haver algum tipo de predicação sobre propriedades para que se tenha uma teoria dos tipos. Claramente na obra de Frege há esse tipo de teoria, visto que, sem ela, nem mesmo seria possível formular algumas das definições centrais em sua filosofia como, por exemplo, a de número e a de existência, ambas definidas como propriedades de propriedades, ou seja, de segunda ordem.

(143)

(144) Se por um lado há, de fato, propriedades de segunda ordem, então isso sugere que há algum tipo de predicação sobre uma propriedade de primeira ordem. Por outro lado, sempre que tentamos tratar um conceito como o sujeito de uma determinada predicação, utilizamos o artigo definido como recurso lingüístico a tal expressão, o que, segundo Frege, "objetuaria" tal conceito, impossibilitando, portanto, as tais "predicações de segunda ordem"; o que acarretaria no fracasso de sua definição de número, por exemplo. Dessa maneira, avaliaremos se há realmente uma tensão nesse ponto que enfatizamos. Caso haja tal incômodo, tentaremos argumentar que ele encontra sua gênese na própria filosofia de Frege e não, como poderia parecer, em nossa proposta interpretativa.

(145)

(146)

(147)

(148)

(149)

(150)

(151)

(152)

a. 2.1 – O Cálculo Lambda de Alonzo Church.

(153)

(154) Antes de entrarmos na discussão sobre a operação de abstração em Frege, faremos uma digressão sobre Church a fim de apresentarmos alguns aspectos históricos e lógicos que justificam a relevância do Cálculo Lambda à nossa dissertação. Veremos, também, que algumas idéias fundamentais presentes em tal linguagem já subsistiam desde o final do século XIX, já mesmo na obra do próprio Frege.

(155)

i. 2.1.1 – Um breve apanhado Histórico acerca do Cálculo Lambda.

(156)

(157) O Cálculo Lambda é uma linguagem que prioriza a noção de *função* ao invés da noção de *conjunto*, que era a comum nos trabalhos relativos aos fundamentos da lógica surgidos no início do século XX, como é o caso, por exemplo, da teoria dos conjuntos axiomatizada por Zermelo. Podemos dizer que Church aceita a subordinação das propriedades e das relações às funções proposicionais. Por volta de 1928, Church inicia sua investida a fim de desenvolver um sistema concorrente aos criados por Zermelo e por Russell e que fosse capaz de oferecer um fundamento mais intuitivo à lógica e sem a utilização de variáveis livres. É com tal propósito que em 1932 Church publica o artigo intitulado *A Set of Postulates for the Foundations of Logic* que pode ser considerado de certa forma como um resgate ao projeto logicista fregeano, na medida em que Church vislumbrava a explicitação total dos conteúdos aritméticos.

(158)

(159) Apesar de enfatizar a noção de “função”, ordinária e proposicional, como fundamental, bem como a idéia de “abstração de uma função”, pode-se dizer que o principal mérito do trabalho de Church, além disso, consiste em uma definição formal das noções lógicas de “substituição” e de “conversão”. De fato, se reconstruirmos a história da noção de “abstração”, notaremos que já mesmo nos trabalhos de Giuseppe Peano, que datavam cerca de 1879, é encontrada uma notação com a finalidade de exprimir a “abstração de uma propriedade”. Posteriormente, em 1891, Frege em seu artigo *Função e Conceito* introduz a noção de “curso de valores de uma função” o que poderia ser caracterizado como o estágio embrionário do projeto que culminaria com a criação do Cálculo Lambda por Church.

(160)

(161) Dois anos após, em 1893, Frege, nos seus *Grundgesetze der arithmetik*, utiliza também uma notação específica para distinguir entre o grafo

de uma função Φ denotado por $\varepsilon\acute{}\Phi(\varepsilon)$ e o resultado da aplicação de uma

função a um argumento Δ, expresso por $\Delta\varepsilon\acute{}\Phi(\varepsilon)$. Burali-forti, Russell e Alfred

Whitehead, utilizaram, também, notações específicas com aquela mesma finalidade de exprimir a abstração de uma função.

(162)

(163) Conforme apresentamos, Frege já havia introduzido a distinção entre uma função e o seu curso de valores, o que vem ao encontro com a proposta de nossa dissertação. Ou seja, apesar de o Cálculo Lambda não ter sido desenvolvido por Frege, uma das idéias centrais apresentadas por esse cálculo já se encontrara em sua obra, o que torna a nossa investida mais natural do que poderia parecer à primeira vista.

(164)

(165) Houve na história da lógica algumas concepções teóricas anteriores ao Cálculo Lambda que se assemelhavam com este em algum ponto. Tendo isso em vista, é importante salientar que pouco antes da criação da Linguagem Lambda, o matemático Ucraniano Moses Shönfinkel desenvolvera, na década de 1920, a Lógica de Combinadores que seria posteriormente aprimorada por Haskell Curry, e que, como sabemos atualmente, essa lógica é equivalente ao cálculo de Church em diversos aspectos. Sendo que a Linguagem Lambda privilegia a noção de “função” ou “operação” como fundamental e a linguagem de Shönfinkel enfatiza os “combinadores”.

(166)

(167) Podemos dizer que o principal propósito do trabalho de Church ao desenvolver o Cálculo Lambda, foi a tentativa de compreender melhor o projeto logicista inicialmente empreendido por Frege. Entretanto a retomada de tal projeto estaria fundada sobre novas bases profundamente formalistas, com algumas conexões com o intuicionismo que acarretariam em certas restrições à própria capacidade de expressão de sua linguagem. Além disso, Church é amplamente conhecido pelo seu trabalho desenvolvido na área de computabilidade, onde ao descrever as propriedades mais fundamentais das "abstrações de funções" tornou-se possível dar uma resposta adequada ao "problema da decisão" (*entscheidungsproblem)*.

(168)

(169) Na mesma época em que Church desenvolvia o seu trabalho visando uma solução àquele problema, Alan Turing independentemente desenvolveu outro modelo, também satisfatório por definir precisamente a noção até então intuitiva de "decidibilidade" ou "computabilidade", tal modelo consistia em uma classe de máquinas que ficaram posteriormente conhecidas por "Máquinas de Turing". Embora Turing houvesse provado que surpreendentemente ambos os modelos, tanto o Cálculo Lambda, quanto as Máquinas de Turing, definem as mesmas classes de funções ordinárias computáveis, foi através do Cálculo Lambda que surgiram os primeiros problemas de incomputabilidade.

(170)

(171) Como referimos anteriormente, é comum se fazer uma relação entre o Cálculo Lambda e outras linguagens existentes como, em nosso caso, com a Lógica de Combinadores e as Máquinas de Turing. De fato, nos manuais contemporâneos de introdução ao Cálculo Lambda encontramos freqüentemente uma ênfase na estreita relação que haveria entre essa linguagem e a Lógica Combinatória de Shönfinkel e Curry, como podemos observar numa das principais obras sobre o assunto: a *Introduction to Lambda Calculus,* de Hindley e Seldin (cf. Hindley & Seldin, 2008).

(172)

(173) Gostaríamos de salientar, todavia, que os aspectos computacionais que são tomados como equivalentes pelos sistemas referidos não nos interessarão em nosso trabalho. Na verdade, apesar de tais sistemas apresentarem diversas equivalências sob a perspectiva computacional, queremos nos manifestar a favor da idéia de que do ponto de vista filosófico eles são completamente diferentes, por apresentarem intuições filosóficas iniciais bem distintas entre si. Após apresentarmos algumas das disparidades que consideramos fundamentais entre aqueles sistemas, ficará bem claro ao leitor o porquê de nossa escolha pela linguagem de Church.

(174)

(175) Primeiramente, a Lógica de Combinadores concebe a existência apenas de objetos, de fato, nessa teoria há um único domínio de entidades todas elas de caráter funcional que dispensam a existência de um tipo específico de relação para que elas possam se combinar umas às outras. Dessa maneira, em tal linguagem não há noções intensionais, pois tudo que temos são objetos que operam, uns sobre os outros, não havendo nem mesmo propriedades nesse sistema. Obviamente, não existe assim a distinção clássica introduzida por Platão entre *"sobre o quê estamos afirmando o predicado"* e *"aquilo que está sendo afirmado pelo predicado"*. Em uma ontologia assim, certamente, não seriam concebidos conceitos, pois as únicas entidades que dispomos em tal abordagem são os objetos. Sendo assim, podemos associar a Lógica Combinatória ao *monismo*, por conceber um único tipo de entidade com certa característica funcional.

(176)

(177) Por outro lado, as Máquinas de Turing, estão bem mais associadas a uma concepção dualista, onde encontramos um operador que seria equivalente a uma *"mente"*, e um operando, o *"mundo"*. Podemos afirmar que Turing estava fundamentalmente preocupado com a possibilidade de expressão matemática, ou como ele próprio se refere, analisar as possibilidades de expressão de um sujeito frente a um papel em branco (cf.

Turing, 1936). Isso no período em que estavam acesas as discussões acerca da natureza da consciência e da possibilidade de desenvolvimento do “cérebro eletrônico”, ou melhor, a possibilidade de se representar por meios computacionais a “consciência”, visão segundo a qual, grosso modo, a “mente” e o “computador” funcionariam de maneiras semelhantes.

(178)

(179) E por fim, em dissonância com as Máquinas de Turing e a Lógica de Combinadores, o Cálculo Lambda se mostra como uma linguagem de caráter primordialmente semântico que ambiciona a referência a entidades intensionais insaturadas, como, por exemplo, as propriedades. Ou seja, é possível se predicar algo de uma entidade que não seja um objeto, e essa é a idéia que funciona como o fulcro de qualquer teoria dos tipos. Pois, caso não fosse possível se predicar algo de uma determinada propriedade, como seria possível a existência das propriedades de ordem superior? Nesse sentido podemos inferir seguramente que o Cálculo Lambda lida primordialmente com noções semânticas, o que o distingue fortemente das outras linguagens aqui referidas. E é justamente por ter esse caráter fortemente semântico que escolhemos o Cálculo Lambda como a linguagem adequada ao nosso propósito de explicitação da estrutura de tipos da *Begriffsschrift*. Nas próximas seções nos esforçaremos em apresentar as vantagens daquela linguagem à nossa finalidade.

(180)

(181)

(182)

(183)

(184)

i. *2.1.2 – Algumas Operações Fundamentais do Cálculo Lambda.*

(185)

(186) Na subseção anterior nos ocupamos com alguns aspectos históricos do Cálculo Lambda, bem como enfatizamos que a sua importância maior para a nossa dissertação não são propriamente os seus aspectos que chamamos de computacionais, mas, sim, aqueles de cunho filosófico.

(187)

(188) Nesta seção apresentaremos os principais aspectos sintáticos, operacionais da Linguagem Lambda que serão essenciais às conclusões de nosso trabalho que serão apresentadas no próximo capítulo.

(189)

(190) Uma das vantagens do Cálculo Lambda é enfatizar qual variável

está sendo abstraída, através da anteposição da letra grega λ, daí o nome da

linguagem. Por exemplo, duas funções como $fx=x-y$ e $gy=x-y$ seriam notadas

em Linguagem Lambda por $\lambda x.x-y$ e $\lambda y.x-y$, onde no primeiro caso seria

enfatizado que a variável a ser abstraída seria o x, enquanto o y permaneceria livre e no segundo caso, contrariamente, o y seria abstraído e o x ficaria livre.

Gostaríamos, entretanto, de chamar a atenção aqui a um ponto de extrema importância que não fica explícito nesse tipo de exposição que normalmente é apresentada nos livros de introdução ao Cálculo Lambda.

(191)

(192) Tanto a função $f(x)$ e $g(y)$ são funções ordinárias, não

proposicionais, isto é, quando elas forem saturadas produzirão o nome de um objeto e não, como queremos, um valor de verdade. Tal observação se mostra de enorme importância, pois se exemplificarmos o Cálculo Lambda através de funções ordinárias, corremos o risco que negligenciar o seu aspecto mais importante, que é o seu caráter *predicativo*; e que é a condição de possibilidade de qualquer teoria dos tipos. Por esse motivo, de agora em diante não utilizaremos mais funções ordinárias, e sim apenas as proposicionais, pois são essas que interessam às teorias dos tipos e, conseqüentemente, à nossa

proposta interpretativa. Assim substituiremos as expressões $\lambda x.x\text{-}y$ e $\lambda y.x\text{-}y$, que

são partes de sentenças, pelas funções proposicionais $\lambda x.x\text{-}y=0$ e $\lambda y.x\text{-}y=2$

(193)

(194) Rapidamente notaremos ao apresentar a Linguagem Lambda uma terminologia típica do Cálculo Proposicional e de Predicados, de fato, o λ que chamaremos de "abstrator" liga as variáveis que o acompanham, como é o caso do x em $\lambda x.x\text{-}y=0$ e do y em $\lambda y.x\text{-}y=2$. As variáveis que não são ligadas pelo abstrator λ são comumente chamadas de abstrações vácuas. Para exemplificar como funciona o processo de abstração, utilizaremos o argumento 1 nas duas proposições e faremos algumas reduções. Assim teremos $\lambda x.x\text{-}y=0(1)$ e $\lambda y.x\text{-}y=2(1)$, onde (1) exprime qual será o valor a entrar no lugar da variável abstraída, no primeiro caso como sucedâneo de x e no segundo de y.

Feitas as reduções, obtemos $1\text{-}y=0$, no primeiro caso, e $x\text{-}1=2$, no segundo caso, onde os argumentos substituíram as variáveis ligadas ao abstrator.

(195)

(196) Como expusemos, uma característica da Linguagem Lambda que será muito importante em nosso trabalho será a explicitação dos argumentos que, por redução, entram no lugar das variáveis abstraídas e, também, a ênfase dada à proposição a ser abstraída. Veremos mais adiante, no capítulo III, que o fato da Linguagem Lambda explicitar qual é a proposição sobre a qual estão sendo feitas as abstrações será de extrema importância ao esclarecimento conceitual das derivações feitas por Frege.

(197)

(198) Uma proposição como *"Paulo ama Maria"* pode ser interpretada logicamente de diversas maneiras dependendo, é claro, da perspectiva lógica de quem a interpreta. Se dispusermos das ferramentas do Cálculo Proposicional, então não teremos nada além de uma variável proposicional, digamos A, para os fins da formalização. Entretanto, sob o crivo do Cálculo de Predicados, outros aspectos lógicos viriam à tona, pois tal linguagem é mais refinada logicamente do que o Cálculo Proposicional e, assim, seria possível atribuir uma variável de predicado à expressão *"ama"*, e outras duas variáveis com o objetivo de se exprimir os conteúdos dos nomes *"Paulo"* e *"Maria"* e, assim, obteríamos $A(p,m)$ como resultado do processo de formalização. É claro

que nesse caso temos um termo binário, por se tratar de uma relação com dois argumentos, mas que poderiam em outras circunstâncias ser inúmeros. Todavia, nada nos impede de interpretá-la como uma relação unária, a saber, interpretando o sujeito *“Paulo”* como dotado da propriedade de *“amar Maria”*. Informalmente é nisso que consiste o procedimento conhecido como *currying*, que é utilizado, tanto na Lógica de Combinadores, quanto no Cálculo Lambda, ou seja, a capacidade de tornar uma propriedade n-ária em uma propriedade unária, isto é, de apenas um argumento (cf. Chateaubriand, 2001).

(199)

(200) Mais formalmente, o que o método desenvolvido por Curry faz é sempre que quando houver mais de um argumento em uma função, essa função é definida de tal maneira a obter uma função unária, como veremos a seguir. Uma expressão como $x\text{-}y=0$ define duas funções por haver duas possíveis maneiras de abstrair os seus termos, uma abstraindo-se primeiramente o x e outra abstraindo-se primeiramente o y, assim temos $H=\lambda xy.x\text{-}y=0$ e $K=\lambda yx.x\text{-}y=0$. Nitidamente ambas as expressões são binárias, mas nada nos impede de as interpretarmos unariamente, como vimos em

nosso exemplo informal. Voltando à função H, ao invés de a interpretarmos como ela é originariamente, ou seja, uma função binária, podemos definir uma função $H^*=\lambda x.[\lambda y.x-y=0](a)$ que seria, do ponto de vista lógico, equivalente àquela H, só que, claramente, unária, pois há a internalização do abstrator que liga a variável y.

(201)

(202) O leitor poderá facilmente observar no próximo capítulo que não optamos em nossa exposição pela utilização de *currying* ao traduzirmos a notação fregeana à Linguagem Lambda. Contudo, julgamos importantes tais observações, não apenas por ser freqüentemente utilizada em Cálculo Lambda, mas também por ser uma idéia já presente na obra de Frege (cf. Frege, 1964).

(203)

(204) Para o desenvolvimento posterior de nosso trabalho, duas serão as noções mais importantes presentes no Cálculo Lambda, a saber, a de

substituição e a de β-*redução*, na verdade veremos que ambas as noções são logicamente equivalentes e são elas que definem sintaticamente a abstração[1].

(205)

(206) No início desta seção já apresentamos algumas abstrações e até mesmo utilizamos o termo *“redução”* quando distinguíamos duas abstrações que foram apresentadas como exemplos. Também fizemos referências às abstrações para explicar em que consistia o método conhecido na literatura por *currying*. Entretanto, voltaremos agora um pouco mais detidamente com a finalidade de esclarecer as duas noções presentes na linguagem Lambda que afirmamos de fundamental importância ao nosso trabalho.

(207)

(208) Primeiramente definiremos os termos λ com os quais trabalharemos:

(i) Quaisquer expressões bem formadas do cálculo de predicados clássico serão λ-termos;

1 Nós não definiremos aqui formalmente todos os λ-termos, para isso cf. (Hindley & Seldin, 2008).

(209)

(ii) Se L é um λ-termo qualquer e x uma variável qualquer do

cálculo de predicados, então $\lambda x.L$ será um termo λ.

i.

ii. ***Rapidamente definidos os termos de nossa linguagem, podemos agora introduzir a primeira noção que nos interessa, a***

substituição. Tomando x,N ***e*** M ***como*** λ***-termos, uma substituição, que***

também será um λ***-termo, é comumente representada por*** $[N/x]M$ ***e***

entendida como a substituição por N ***de todas as ocorrências livres de*** x

em M. Assim, em uma expressão como $\lambda x.x\text{-}y=0$, aplicando-a a substituição [1/x], obteremos:

(210)

i. $\lambda x.1\text{-}y=0$

Ou seja, obtemos a expressão onde todas as ocorrências livres de x foram substituídas por 1. Na verdade, podemos inferir a seguinte equivalência:

$$S[1/x](\lambda x.x\text{-}y=0)\equiv\lambda x.1\text{-}y=0$$

Isto é, as substituições são úteis para se definir a noção de β-redução,

que na verdade são inversas umas das outras. Na expressão apresentada acima, o lado esquerdo da equivalência é uma *substituição* e o lado direito do

sinal de equivalência é uma β-*redução*, a saber, a β-redução correspondente

ao termo $[1/x](\lambda x.x\text{-}y=0)$ que é a forma contracta. Em outros termos, executar

uma β-redução é proceder com as substituições que são apresentadas entre os

colchetes. Sintaticamente, o que caracteriza uma abstração é o processo de se

executar as β-reduções a partir das substituições.

Veremos mais adiante que a β-redução é uma poderosa ferramenta do Cálculo Lambda e que graças a ela será possível a realização de nossa proposta principal a ser apresentada no terceiro capítulo desta dissertação. De agora em diante exprimiremos as β-reduções através da pós-posição do sinal "■" às proposições a serem reduzidas.

Apresentadas as noções de substituição e β-redução que caracterizam sintaticamente a operação de abstração, iniciaremos a seguinte seção, onde serão dados diversos exemplos de β-reduções.

2.2 – A Abstração de Propriedades e a Hierarquia de Tipos.

Após as considerações apresentadas na seção precedente acerca de alguns aspectos históricos e lógicos do Cálculo Lambda, podemos, neste tópico, nos ocupar com o ponto que realmente nos interessa que é a operação de abstração considerada sob uma perspectiva filosófica.

A operação de abstração a qual nos referimos, pode ser interpretada filosoficamente como a operação que nos possibilita referir-nos a propriedades na medida em que tais entidades, as propriedades, passam a ser tratadas logicamente da maneira que comumente os nomes são tratados. Isto é, podemos caracterizar a abstração como uma operação semântica que habilita-nos de alguma maneira a nos "referir" a propriedades, permitindo-nos a *falar sobre* entidades, entidades que não sejam objetos.

Uma boa maneira de se compreender a abstração por nós utilizada é como uma operação que aplicada a um predicado produz um *"designador"* de uma propriedade. Optamos aqui pela utilização da palavra "designador", com objetivo de não se confundir o resultado da aplicação da operação de abstração a uma propriedade, com os nomes de objetos. Nessa linha de raciocínio, o que a operação de abstração produz é uma maneira de nos referirmos a uma propriedade que chamaremos doravante de *"designação"*. Dessa maneira podemos fazer o seguinte esquema:

Predicado operação de abstração Designador da propriedade

Observando o esquema acima, podemos entender comparativamente que os designadores estariam para as propriedades, assim como os nomes estão para os objetos. O que é uma grande vantagem, pois através de uma simples operação somos habilitados a *"nomear"* propriedades.

Além disso, como veremos, outro grande benefício dessa operação é a sua capacidade de marcar logicamente as entidades em questão, os objetos e as propriedades, através da atribuição de tipos lógicos a elas; vejamos adiante alguns exemplos.

Utilizando o cálculo de predicados de primeira ordem, um enunciado como *"Paulo é bom"* seria formalizado através da utilização de duas constantes proposicionais, uma, que representaria naquela linguagem o objeto *"Paulo"* e outra que seria o sucedâneo lingüístico da propriedade *"ser bom",* e, dessa maneira, obtemos em nosso exemplo $B(p)$ como a formalização do enunciado *"Paulo é bom"*. É importante notar que em *"Paulo é bom"* é atribuída "bondade" a *"Paulo"*, não obstante, poderíamos identificar certas características da *"bondade"*, um exemplo disso pode ser facilmente encontrado no enunciado *"a bondade é uma virtude"*, que poderia ser formalizado por $V(b)$.

Notamos claramente em nossos dois exemplos algo em comum entre eles, a saber, a presença da *"bondade"*, hora sob forma predicativa, o que corresponderia a uma propriedade no caso do exemplo *"Paulo é bom"*, hora, em forma de nome, como no caso de *"A bondade é uma virtude"*. No entanto, notamos que a linguagem do cálculo de predicados não nos permite captar as distinções entre as nuanças lógicas presentes entre Bp e $V(b)$, inclusive seria correto, nessa linguagem, formalizar *“Paulo é bom”* por $V(b)$ ou *“A bondade é uma virtude”* por Bp.

Já no Cálculo Lambda desenvolvido por Church, as distinções presentes em ambos os casos ficam explícitas, pois o operador λ nos permite exprimir as distintas relações lógicas existentes, no caso de nosso exemplo, entre a *“bondade”* e os outros constituintes das proposições. Assim, utilizando a Linguagem Lambda, referimos à *“bondade”* ou à propriedade *“ser bom”*, através da expressão $[\lambda x.\ Bomx]$. E obteríamos, pela formalização de *“Paulo é bom”,* a seguinte expressão: $[\lambda x.Bomx(p)$, onde $[\lambda x.\ Bomx]$ que, conforme já mencionamos, exprime a propriedade *"ser bom"* e (p) indica que tal propriedade se aplica a Paulo. Desse modo, torna-se fácil de notar que se for feita a β-redução a partir de $[\lambda x.\mathrm{Bomx}(p)$■ chegaremos exatamente a $\mathrm{Bom}(p)$ (Paulo é bom). Por outro lado, para exprimirmos o nosso segundo exemplo: *"A bondade é uma virtude"*, basta nos referimos novamente à *"bondade"* através de $[\lambda x.\ \mathrm{Bomx}]$ e afirmamos dela a propriedade de *"ser uma virtude"* e assim obteremos $V([\lambda x.\ \mathrm{Bomx}])$.

Quando nos propusemos a caracterizar a operação de abstração no início do presente capítulo, afirmamos que, para nossa proposta, duas eram as principais características da linguagem de Church: (i) A capacidade de operar sobre propriedades e (ii) A atribuição de tipos lógicos às entidades em questão. Até o instante, nos ocupamos apenas com o tópico (i), iniciemos, portanto, o tópico (ii).

Fica nítido que no caso de $V(\lambda y.\text{bondade}y)$ há uma predicação sobre uma entidade que pode ser predicada de outra entidade, nesse caso a *"virtude"* que foi predicada da *"bondade"* que, por sua vez, pode ser predicada de um objeto como, digamos, Paulo. Nas linguagens naturais utilizamos freqüentemente esse recurso, apesar dele não estar disponível em várias das linguagens formais, como é o caso do cálculo de predicados de primeira ordem. Entretanto, conforme exemplificamos, a Linguagem Lambda permite-nos *falar sobre* propriedades, sem que haja um limite máximo a tais predicações.

Podemos até mesmo formular o Paradoxo de Russell nessa linguagem, o que seria a versão intensional da antinomia, vejamos:

Como expusemos, a notação Lambda nos permite *designar* propriedades, assim, podemos designar, também, a propriedade utilizada por Russell na apresentação do paradoxo homônimo. Chamaremos tal propriedade de *"auto-participação"*, que será certamente uma propriedade reflexiva.

Designaremos a propriedade de auto-participação através de $\lambda x.AP(x)$ e a sua negação através de $\lambda x.{\sim}AP(x)$. Um exemplo de uma propriedade auto-participante seria $\lambda x.Propx\lambda x.Propx$, ou seja, a propriedade de “ser uma propriedade” é auto-participante, visto que ela mesma participa daquela propriedade. Entretanto, teremos diversas propriedades não auto-participante, como é o caso, por exemplo, das propriedades “ser cavalo”, “ser mamífero” e “ser homem”, visto que tais propriedades não são cavalos, mamíferos e nem homens, respectivamente.

Da mesma maneira que perscrutamos se a propriedade “ser uma propriedade” era auto-participante, podemos investigar da propriedade “não ser auto participante” se ela é, ou não, auto-participante. Assim teremos nossa pergunta formulada em Cálculo Lambda: $\lambda x.\sim APx\lambda x.\sim APx$? Se $\lambda x.\sim APx\lambda x.\sim APx$, então $AP\ \lambda x.\sim APx$. Por outro lado, se $AP\ \lambda x.\sim APx$, então $\sim AP\ \lambda x.\sim APx$, o que é nitidamente uma contradição. A saber, uma versão intensional do paradoxo de Russell.

É notável que o Paradoxo de Russell possa ser naturalmente formulado mesmo em uma linguagem intensional como Lambda. Assim, para nos livrarmos dessa antinomia, será necessária a utilização de alguns recursos adicionais, os tipos. É essa antinomia que determina que, no contexto da operação de abstração, tenhamos de distinguir os objetos originários dos objetos intensionais produzidos pela abstração.

Se formos cautelosos ao avaliar aquela capacidade referida de se fazer inúmeras predicações sobre predicações, notaremos que há uma estrutura lógica hierárquica subjacente a essas operações. Por exemplo, podemos predicar a *"bondade"* de Paulo, contudo não podemos predicá-la corretamente de outra propriedade qualquer, como, por exemplo, *"ser belo"* ou até mesmo de *"ser uma virtude"*. Isso ocorre pelo fato de existirem tipos lógicos distintos e, como apontamos, ser tipado é uma das vantagens a ser considerada no Cálculo Lambda.

A estrutura hierárquica a qual nos referimos inicia-se a partir do domínio dos objetos, o nível 0 da hierarquia. Já as propriedades que são predicadas desses objetos são, por essa razão, chamadas de propriedades de primeira ordem. Desse modo, a propriedade *"ser bom"*, por exemplo, é uma propriedade de primeira ordem, pois é predicada diretamente de objetos como, por exemplo, *"Paulo"* e faz parte do nível 1 da hierarquia. Conforme observamos, há também propriedades que podem ser predicadas das propriedades de primeira ordem, a elas é dado o nome de propriedades de segunda ordem e pertencem ao nível 2 daquela hierarquia, como é o caso da propriedade dada em nosso exemplo: *"ser uma virtude"*. Dessa maneira, se é produzida a seguinte estrutura:

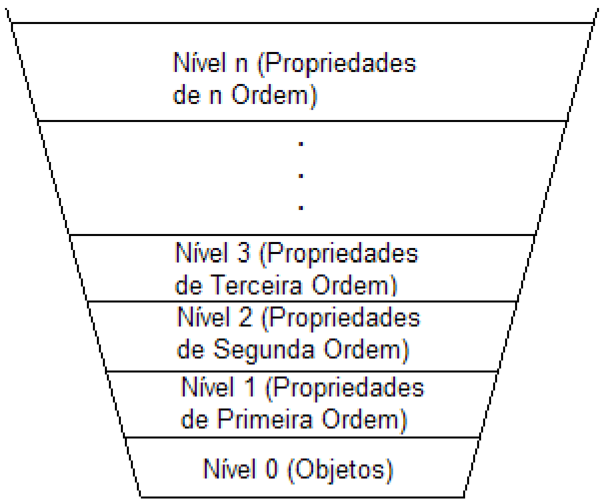


Fig. 1.1

É verdade que cada vez se torna mais difícil encontrar nas linguagens naturais exemplos de ordens elevadas, notamos já mesmo uma dificuldade em encontrar exemplos de propriedades de terceira ordem, mas isso não nos impede de pensarmos em uma hierarquia com um número bem elevado de tipos e, conseqüentemente, de ordens.

De agora em diante utilizaremos índices para marcar o tipo ao qual pertencem as entidades tratadas, assim os nossos exemplos apresentados anteriormente serão reescritos da seguinte maneira: $[\lambda x.\mathrm{Bom}x]1(\mathrm{p})0$ e $\mathrm{V}2([\lambda y.\mathrm{bom}(y)]1)$, onde os índices indicam que (p) é um objeto, $\mathrm{bom}y$ é uma propriedade de primeira ordem e $\mathrm{virtude}x$ é uma propriedade de segunda ordem.

Uma observação importante é a de que na obra de Frege, como estamos apresentando, há uma estrutura de tipos anterior ao Paradoxo de Russell. Ou seja, o filósofo pensava nesse tipo de estrutura como fundamental ao seu trabalho e não como um recurso profilático ao paradoxo, como, por exemplo, o fizeram Russell e Whitehead na teoria dos tipos apresentada nos *Principia Mathematica* e que visava, fundamentalmente, através do princípio do círculo vicioso, eliminar a auto-referência e, conseqüentemente, evitar o indesejável paradoxo. A estrutura de tipos presente na obra de Frege fora concebida cerca de 24 anos antes ao paradoxo de Russell que é de 1903, assim, quando os livros de história da lógica associam a teoria dos tipos à figura de Russell, como na maioria das vezes é o caso, notamos que não é feita a devida justiça à concepção lógica de Frege.

2.3 – O Problema do "Conceito Cavalo".

Retornando aos exemplos dados na seção precedente: *"Paulo é bom"* $(\lambda x.[Bomx]1(p)0)$ e *"a bondade é uma virtude"* $(V2(\lambda y.bomy]1))$, é fácil, como salientamos outrora, fazer-se notar que há uma conexão entre aquilo que desempenha a função predicativa da primeira sentença, no caso *"ser bom"*, e o que desempenha a função de sujeito da segunda sentença, *"a bondade"*. Como exploramos na seção anterior, ao abstrairmos a propriedade *"ser bom"* obtemos *"a bondade"* e, a partir daí, torna-se possível predicar dessa abstração outras propriedades de ordem superior. Ou seja, é possível a "referência" ao abstrato da propriedade *"ser bom"*, fazendo com que assim seja produzida uma hierarquia de tipos através de inúmeras abstrações.

É importante notar que esse tipo de referência presente na sentença *"A bondade é uma virtude"* é comumente feito no caso das entidades saturadas, não no das propriedades, pois estas, como insiste Frege, possuem natureza insaturada. Eis ai uma grande vantagem da Linguagem Lambda, a saber, viabilizar a referência a entidades não apenas por meio de suas extensões permitindo, portanto, nos referirmos nominalmente a propriedades. Além, é claro, de clarificar a hierarquia das predicações que são divididas em vários tipos lógicos.

Entretanto, encontramos justamente nesse ponto uma tensão, como nos alerta Frege:

> As três palavras "o conceito cavalo" designam um objeto, mas, por isso mesmo, elas não designam um conceito, na acepção em que uso esta palavra. Isto está inteiramente de acordo com o critério que dei de que o artigo definido singular sempre indica um objeto enquanto que o artigo indefinido acompanha um termo conceitual.(FREGE, 1978a, p. 92)

Se, como explica Frege, *"o conceito cavalo"* é um objeto por vir acompanhado do artigo definido e não uma propriedade como poderia parecer à primeira vista, então o nosso exemplo dado acerca da abstração: *"a bondade é uma virtude"* não pode ser um exemplo adequado de uma predicação de segunda ordem. Pois a expressão *"é uma virtude"* seria predicada de um objeto e não de uma propriedade de primeira ordem como queríamos, o que acarretaria em um problema a ser enfrentado por nossa proposta.

Na verdade, se avaliarmos tal aspecto cautelosamente, verificaremos que qualquer tentativa com o propósito de se fornecer um exemplo de predicação de segunda ordem, ou de ordens superiores, não seria bem sucedida. Pois sempre necessitaríamos, como recurso lingüístico, da anteposição do artigo definido ao que pareceria um termo conceitual como a *"bondade"* no caso de *"a bondade é uma virtude"*. ´

Na próxima seção investigaremos o problema referido e tentaremos introduzir algumas distinções utilizadas em alguma medida pelo próprio frege relativas à maneira de tratar as entidades intensionais. De modo a tentar justificar a viabilidade de nosso trabalho, que tem como ponto fundamental a ênfase na operação de abstração, ou seja, a capacidade de se referir de alguma maneira às entidades intensionais.

2.4 – Uma tentativa de Superar a Dificuldade da Impossibilidade de Referência a Conteúdos Intensionais.

Embora o problema apresentado no final da seção anterior possa parecer à primeira vista intransponível à nossa proposta, tentaremos argumentar em favor da plausibilidade de nossa investida. Como comentamos no início deste capítulo, se por um lado só podemos nos referir aos conceitos por meio de suas extensões, por outro, necessitamos de uma hierarquia de tipos que justifique noções fundamentais da filosofia de Frege como, por exemplo, a quantificação, a existência e, mais ainda, a sua definição de "número". Como sabemos, todas essas noções são formuladas em segunda ordem, o que, por sua vez, necessitam de predicações sobre predicações para que sejam adequadamente tratadas. Vejamos o que Frege diz a respeito da natureza predicativa dos números e da existência:

> Outra corroboração da idéia de que o número é *atribuído a conceitos* pode ser encontrada no uso da língua alemã,

> no fato de se dizer: zehn Mann, vier Mark, drei Fass.[2] (...) Por ser a *existência propriedade de conceito*, a prova ontológica da existência de Deus não atinge seu objetivo.(FREGE, 1989, p. 247-248)

Nesse trecho Frege explicitamente afirma que *"o número é atribuído a conceitos"* e que a *"existência é uma propriedade de conceito"*, disso se segue que há obviamente aqui alguma espécie de caracterização que incide sobre conteúdos intensionais, pois não há a presença do artigo definido. Em outras palavras, temos exemplos de referência a conceitos (propriedades) sem que para isso seja necessária a utilização do artigo definido, o qual faria com que esses conceitos não fossem mais tomados como tais, e sim como objetos. Gostaríamos, portanto, de distinguir entre duas maneiras de se expressar que julgamos ser esclarecedoras ao ponto em que desejamos atingir, seriam elas: a capacidade de "*se referir"* a uma propriedade e a capacidade de *"falar sobre"* uma propriedade. Até aqui não consideramos fortemente tal distinção, contudo queremos chamar o leitor à atenção para o fato de que de agora em diante utilizaremos a expressão "*se referir"* a uma propriedade para exprimirmos aquela concepção segundo a qual Frege se coloca explicitamente contra. A saber, a idéia que assevera que *"o conceito cavalo não é um conceito"*, onde somente seria possível se referir aos conceitos por meio de suas extensões. Em outra acepção utilizaremos a expressão *"falar sobre",* que será reservada ao nosso propósito de *designar* uma propriedade da maneira com que é feita pelo Cálculo Lambda, ou seja, aquilo que Frege chama de *"cair sob"*.

É verdade que Frege enfatiza que os conceito não podem ser definidos por partilharem de uma natureza de simplicidade lógica e, também, possuem natureza predicativa e, todavia, não são passíveis de exercerem a função de objeto de predicação:

> O conceito – tal como entendo esta palavra – é predicativo. Por outro lado, um nome de objeto, um nome próprio, não pode absolutamente ser usado como um predicado gramatical. (FREGE, 1978a, p.90)

---

2 Literalmente: dez homem, quatro marco, três barril.

Entretanto, em outro trecho do mesmo artigo, e em diversos outros trechos de outros artigos, é reconhecido que, assim como um objeto *cai sob* um conceito, um conceito, por sua vez, pode *cair sob* outro desde que este seja de ordem superior:

> Pode-se pois fazer um conceito cair sob outro superior ou, por assim dizer, sob um conceito de segunda ordem.(FREGE, 1989, nota §66)

E mais adiante continua que "não se deve confundir esta relação com a de subordinação". Em outro artigo posterior, Frege novamente retoma enfaticamente a esse ponto por meio de uma nota:

> Deve ser criticado o fato de não se distinguir duas relações fundamentalmente diferentes, a de cair um objeto sob um conceito e a de estar um conceito subordinado a outro conceito.(FREGE, 1989, p. 91)

Se repararmos bem em seus escritos, Frege lida com duas relações entre conceitos distintas, uma que é a que ele chama de subordinação entre conceitos e seria o caso da expressão *"As baleias são mamíferos"* $x{:}Bx \subset \{x{:}Mx\}$, onde o conceito ou a propriedade *"ser baleia"* está subordinada à propriedade *"ser mamífero".* A outra é a relação de *cair sob* ou de *subsunção*, a qual pode existir entre um objeto e um conceito, como no caso de *“Paulo é bom”*, onde o objeto *“Paulo”* cai sob o conceito *“ser bom”*. E também, a que será de principal interesse a nós, aquela existente entre dois conceitos, desde que, obviamente, um dos quais seja de ordem superior ao outro.

É importante enfatizar que a relação de subordinação é dada entre entidades do mesmo tipo lógico, como podemos reparar no caso de *“as baleias são mamíferos”*, onde tanto a extensão da propriedade *“ser baleia”*, quanto a extensão da propriedade de *“ser mamífero”*, compartilham de mesmo nível na hierarquia de tipos. Nesse caso ambas de nível 0, por se tratarem de dois objetos (os conjuntos).

Esse ponto deve ser tratado com bastante cautela, por isso, de agora em diante, discorreremos atentamente sobre o assunto das diferentes relações existentes entre conceitos, bem como a relação existente entre conceitos e objetos.

Parece haver na filosofia de Frege duas teorias paralelas: uma *extensional* e outra *intensional*. Uma sentença como *“os homens são mortais”* $\forall x Hx \rightarrow Mx$ Interpretada extensionalmente seria o mesmo que a relação entre conjuntos: $x{:}Hx \subset x{:}Mx$. Contudo, acreditamos que essa não é a interpretação que Frege dá às sentenças universais. Tal opinião se funda no fato de as afirmações extensionais serem sempre singulares, ou seja, quando afirmamos relações entre conjuntos e, conseqüentemente, entre extensões, somente somos capazes de expressar singularidades. Vejamos que se atribuirmos tipos à concepção extensional do quantificador teremos como resultado: $x{:}Hx0 \subset 1x{:}Mx0$. Ou seja, afirmamos que dois objetos, a saber, o conjunto dos homens e o conjunto dos seres mortais, estão se relacionando através da relação de subordinação "$\subset$". Desse modo temos que o conjunto dos homens está contido no conjunto dos mortais $\subset(H,M)$.

Podemos, ainda, comparar esta firmação com uma sentença ordinária como *“Paulo ama Maria”*. Se o fizermos, veremos que não é correto atribuir universalidade à expressão $\subset(H,M)$, pois se trata genuinamente de uma sentença singular. Sob essa perspectiva, não seria adequado interpretar $\forall x Hx \rightarrow Mx$ como sendo equivalente a $x{:}Hx \subset x{:}Mx$, pois, nesse caso, estar-se-ia omitindo o caráter de generalidade.

Mas onde se enquadraria a universalidade? Como interpretar uma sentença universal como *“Os homens são mortais”*? Comumente a formalização de uma sentença desse tipo seria dada por: $\forall x Hx \rightarrow Mx$. Gostaríamos de insistir que a universalidade só pode ser corretamente atribuída no âmbito intensional, pois necessitamos de predicar sobre entidades insaturadas para que ela seja adequadamente tratada. Para Frege, $\forall x Hx \rightarrow Mx$, seria um exemplo de uma predicação de segunda ordem, pois o quantificador exprime a universalidade que é predicada da relação *“o que quer que seja homem será mortal”,* isto é, da expressão condicional $Hx \rightarrow Mx$. Aqui ainda temos um caso de uma predicação sobre predicações, sem que haja a presença de qualquer artigo definido. Em outros termos, está

sendo predicado $\forall$ de $Hx \rightarrow Mx$, mas $Hx \rightarrow Mx$ é uma relação que se refere a conceitos sem a utilização do artigo definido, ou seja, os

designa. O que é claramente uma predicação sobre entidades insaturadas.

Certamente podemos interpretar tais relações entre conceitos como propriedades compostas. Por exemplo, a relação *"x é irmão da mãe e y"* como sendo uma propriedade composta que exprime a relação de *"ser tio materno de*". Podemos, de maneira semelhante, pensar as mais diversas relações; mesmo que para algumas não encontremos, na linguagem ordinária, maneiras precisas para designá-las.

Lembrando a argumentação que apresentamos na seção 1.5 do capítulo I, podemos observar que as expressões de generalidade pertencem ao predicado lógico das sentenças. Tanto é verdade que é uma característica intrínseca ao predicado lógico produzir uma expressão contraditória à originalmente dada quando for negado. E é, de fato, o que ocorre em um enunciado da forma *"Todo S é P"*, em que para o negarmos adequadamente é necessária a anteposição da partícula de negação à expressão *"todo"*. Assim, de acordo com a interpretação que propomos das relações n-árias serem tratadas como predicados compostos, uma sentença como *"os homens são mortais"* seria formalizada em Lambda por:

$\forall[\lambda x.Hx \rightarrow Mx]$

isto é, da propriedade composta *“se x é homem, então x será mortal”* designada por $[\lambda x.Hx \rightarrow Mx]$ está sendo predicada a universalidade expressa pelo quantificador "∀". Por outro lado, a sua negativa seria expressa por:

$\sim\forall[\lambda x.Hx \rightarrow Mx]$

Gostaríamos, assim, de propor a interpretação de $Hx \rightarrow M(x)$ como uma propriedade composta, ou seja, aquela que será falsa no caso em que $Hx=V$ e $Mx=F$, e verdadeira nas demais situações. Dessa maneira, o quantificador é interpretado como um predicado de ordem superior aplicado às propriedades compostas. Na verdade podemos considerar as propriedades independentemente do fato delas serem compostas ou não. Tomemos como exemplo uma propriedade simples como *"ser azul"* $A(x)$, apesar de pouco usual, podemos predicar dela a universalidade e obteremos $\forall x A(x)$ que é lida como *"tudo é azul".* Notadamente esse tipo de predicação não será, na maioria dos casos, de muito interesse para nós, pois quase sempre que predicarmos universalidade de uma propriedade simples extrairemos como resultado desse procedimento sentenças falsas, mas nada nos impede que façamos tais predicações. Inclusive em alguns casos esse tipo de predicação será útil para se exprimir certos conteúdos como, por exemplo, a auto-identidade: $\forall\lambda x.x=x$.

Um fato importante que mencionamos e que devemos ressaltar é o de que o quantificador sempre será de ordem superior às propriedades as quais ele está sendo predicado, desse modo, se a universalidade for predicada de uma propriedade de primeira ordem, então ela estará em segunda ordem. Se, por outro lado, a propriedade ou as propriedades das quais se predica a universalidade forem de segunda ordem, o quantificador será de terceira ordem e assim por diante, sempre respeitando o seguinte esquema $Pn\rightarrow\forall n+1$, em que a ordem do quantificador será de um nível acima das propriedades sobre as quais ele está sendo predicado.

Consideramos, dessa maneira, que para utilizarmos corretamente a generalidade é necessária a recorrência a uma teoria *intensional*. Pois, as teorias dos tipos se fundam em estruturas predicativas dadas a partir de entidades insaturadas, pois caso contrário, como apresentamos, não haveria os diversos tipos de predicações que são centrais a essas teorias. Por isso julgamos correta a interpretação intensional de uma sentença como *“os homens são mortais”*. Por outro lado, consideramos que a preocupação de Frege ao chamar à atenção para o fato de que o sujeito de uma sentença como *“o conceito cavalo não é um cavalo”* se referir a um objeto e não a um conceito, funda-se, tanto na necessidade da existência de objetos que sejam a referência das sentenças e garantam algum critério de identidade entre conceitos, quanto na ênfase do caráter predicativo dos conceitos.

Isto é, os conceitos supostamente perderiam esse caráter predicativo caso fossem interpretados como sujeito de predicação. No entanto acreditamos que seja possível um conceito ocupar a função nominal e *cair sob* outro de ordem superior, isto é, é possível, sim, *designar* ou *falar sobre* conceitos sem que para isso seja preciso nos *referir* aos conceitos. Ora, a própria hierarquia de tipos é uma maneira de *falar sobre* tais conceitos de modo que eles exerçam a função nominal, pois haveria a predicação de um conceito de ordem superior, e, por outro lado, sem que haja a perda do caráter predicativo daquele conceito. De fato, o próprio Frege admite que na prática lógica somos obrigados a conceber predicações sobre entidades insaturadas:

> Nas investigações lógicas, necessita-se freqüentemente predicar algo de um conceito, e assim, revestir o conceito da forma lingüística usual para tais enunciados, de modo que o que é dito do conceito torne-se o conteúdo do predicado gramatical. (FREGE, 1978a. P. 94)

Nesse trecho fica ainda mais claro que em alguma medida necessitamos de predicações sobre predicações para exprimirmos determinados conteúdos lógicos. Apesar de, como apresentamos, na seção anterior através da sentença *“a bondade é uma virtude”* parecer impossível fornecer um exemplo de predicação sobre conceitos. Queremos sugerir a idéia segundo a qual tal impedimento só seria plausível se estivéssemos em mente a tentativa de *nos referir* a um conceito. E, não, se estivermos tentando *designar* ou *falar* *sobre*, o que o próprio Frege reconhece fazer em sua prática lógica, como apresentamos previamente no caso de suas definições de *número*, *existência* e *quantificação*.

Sob esse aspecto, julgamos o Cálculo Lambda como sendo de extrema relevância, pois ele é uma ferramenta muito útil à possibilidade de se *falar sobre* propriedades, isto é, sem que elas percam o seu caráter predicativo. Além do quê, essa linguagem nos fornece ferramentas notacionais para designar adequadamente os conceitos que nos interessam.

Caso não tenhamos razão acerca da preservação do caráter predicativo dos conceitos quando *falamos sobre* eles através da utilização do Cálculo Lambda, então toda a referência a uma entidade dessa natureza deveria ser dada em primeira ordem. Não havendo, portanto, propriedades de ordem superior e, para o desespero de Frege, haveria conseqüências desastrosas como, por exemplo, os números serem interpretados por propriedades de objetos assim como as cores!

3 – Capítulo III

O capítulo II desta dissertação teve um papel fundamental à nossa proposta, tanto por introduzir a Linguagem Lambda, que, como observamos amiúde, é de extrema importância ao nosso projeto, quanto por ali termos tentado justificar a condição de possibilidade de se interpretar a prática lógica fregeana através daquela linguagem. Propusemos lá, também, a interpretação das relações lógicas como sendo predicados compostos e, coerentemente com Frege, tratamos os quantificadores como exercendo o papel de predicações de ordem superior a partir de tais propriedades compostas.

Observamos, ainda, uma diferenciação terminológica de enorme importância que diz respeito às distintas maneiras de nos referirmos a conceitos, uma para qual utilizamos exatamente a expressão *"se referir"* (a conceitos), e é a utilizada para se interpretar como verdadeira uma sentença como: *"o conceito cavalo não é um conceito".* E outra, que chamamos de *"designar"* ou *"falar sobre"* (conceitos) que, como observamos, seria a interpretação que funda as teorias dos tipos por viabilizar predicações sobre entidades insaturadas. Neste capítulo, entretanto, utilizaremos somente as relações dadas por *designação* de conceitos.

Abordaremos posteriormente um ponto importante, que será o debate empreendido por Frege contra Kant acerca da natureza analítica dos juízos presentes em aritmética. Apesar desse não ser o ponto central deste capítulo, algumas considerações sobre o assunto se farão importantes após se introduzir um novo tipo de proposição que não está presente nas duas primeiras seções da *Begriffsschrift* e, portanto, não as investigamos ainda, são elas, as *"definições"*. Como investigaremos estas definições, veremos que é inevitável, para tal, comentar alguns aspectos da natureza dessas novas proposições que desempenham um papel fundamental não só na *Begriffsschrift*, mas em toda a obra de Frege.

Em seguida recorreremos novamente à proposta do capítulo anterior de se interpretar as relações lógicas como propriedades compostas, para que possamos, a partir daí, tecer algumas opiniões tocantes à fertilidade lógica de determinados conceitos, bem como a possibilidade de “criação” de tais conceitos. O que acarretará em conclusões importantes à concepção fregeana do estatuto dos juízos da aritmética.

Por fim, apresentaremos os resultados de nosso trabalho, que são os exemplos de aplicações da Linguagem Lambda à obra de Frege, contrapondo-o com a maneira que nos é originalmente fornecida. Outro ponto fundamental deste capítulo será a tentativa de demonstrar que a linguagem de Church nos proporciona ferramentas notacionais para expressar certas etapas lógicas que não ficam tão explicitas inicialmente na obra de Frege. Ou melhor, argumentaremos que a linguagem desenvolvida por Church nos trás certos recursos lógicos que proporcionam um maior esclarecimento conceitual em relação à *Begriffsschrift*.

3.1 – Um Novo Tipo de Proposição: As Definições

Apesar de contar com 133 proposições e diversas derivações, é correto dizer que toda a *Begriffsschrift* é constituída por apenas dois tipos distintos de proposições: os *juízos* e as *definições*.

As proposições presentes nas duas primeiras seções são do primeiro tipo, que Frege denomina de "juízo"; fundamentalmente um juízo é a afirmação de um conteúdo composto. Chamamos de conteúdo composto aqueles conteúdos que podem ser afirmados ou negados denotando, assim, um valor de verdade. Dessa maneira, uma sentença como *"Paulo ama Maria"* seria um exemplo de juízo.

Frege utiliza o sinal ⊢, que doravante nos referiremos por "martelo de Frege", anteposto a um conteúdo proposicional para exprimir que

este se trata, de fato, de um juízo. É importante comentar que esse sinal é constituído por duas partes, a horizontal "-" chamada de traço de conteúdo e que, como seu nome sugere, tem o papel de exprimir o conteúdo do juízo, ou seja, a idéia de amor existente entre Paulo e Maria. E a vertical "|" chamada de traço de asserção, que indica que aquele conteúdo está sendo afirmado (Frege, 1967, p.11).

Apesar da maioria das proposições presentes na *Begriffsschrift* compartilharem dessa natureza judicativa e desempenharem um papel importante no contexto geral da obra, não nos ateremos inicialmente a investigá-las aqui. Ocupar-nos-emos, entretanto, com o outro tipo de proposições: as *"definições";* e, principalmente, da relação existente entre elas e a sua posterior produção de juízos férteis à aritmética.

Em comparação com a grande quantidade de juízos existentes na obra de Frege, as definições somam apenas quatro proposições, a (69), a (76), a (99) e a (115), que a despeito de sua pequena quantidade, serão de enorme interesse a nós.

As definições marcam uma profunda mudança que é muito clara dentro da *Begriffsschrift*, mesmo porque a partir de sua introdução na terceira seção, derivações mais complexas de ordem superior começam a surgir. O que segundo Frege faz com que, dado o nível crescente de complexidade das abstrações, fique ainda mais clara a utilidade de sua linguagem formal. Certamente o formalismo facilita em muito a manipulação dos conteúdos proposicionais subjacentes às sentenças, em alguns casos, como é o que abordaremos aqui, podemos dizer que ele até mesmo possibilita determinados procedimentos outrora inviáveis, se considerarmos outras linguagens como, por exemplo, as naturais.

> Eu descobri a incapacidade da linguagem (natural) como sendo um obstáculo, não importa quão difícil fosse de manusear as expressões que eu estava disposto a aceitar, eu estava cada ver menos apto, quando as relações se tornavam mais e mais complexas, a alcançar a precisão que o meu propósito requeria. Com essa deficiência ocorreu-me a idéia da presente ideografia. (FREGE, 1967, p. 06)

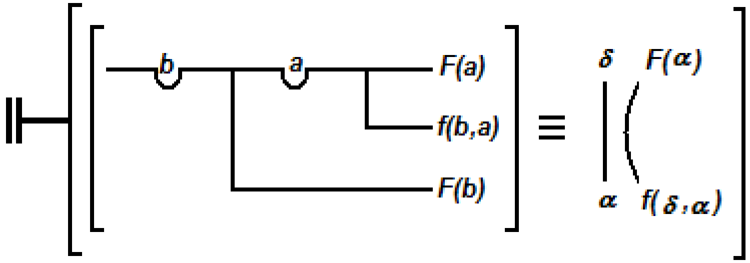
Além de em certa medida as definições contribuírem à necessidade da utilização de uma linguagem formal, elas são de enorme importância ao projeto de Frege, pois a partir delas é que se inicia mais detidamente a discussão que realmente lhe interessa, isto é, aquela relativa aos fundamentos da aritmética. Certamente a linguagem desenvolvida por Frege e publicada em 1879, vêm no bojo de um projeto maior de fundamentação. Portanto, o aparato lógico desenvolvido por ele naquela época deve ser entendido como um instrumento útil que viabiliza aquele projeto de fundamentação da aritmética, e não como o propósito final do matemático. Com isso podemos enfatizar ainda mais a importância da terceira seção da *Begriffsschrift*, pois é lá, principalmente com o advento das definições, que começa obstinadamente a discussão acerca da fundamentação da aritmética.

Apesar de apresentar férteis conteúdos tanto de ordem lógica, quanto filosófica, a terceira seção da *Begriffsschrift* (que abordaremos aqui), talvez não seja investigada o quanto mereceria o seu profícuo conteúdo. Acreditamos que em parte a sua pouca exploração é dada graças às dificuldades em se ler a idiossincrática “escrita” fregeana. Tanto isso é verdade que alguns de seus intérpretes dedicaram partes de suas obras à publicação de “traduções” da notação originalmente apresentada por Frege para a sintaxe contemporânea do cálculo de predicados (cf. Mendelsohn, 2005 /Boolos,1995).

Queremos com isso insistir na idéia de que sem a noção de *abstração* de propriedades se torna muito difícil, quiçá impossível, a compreensão dos procedimentos lógicos desenvolvidos na terceira seção da *Begriffsschrift*, o que não ocorre com as duas seções precedentes. Isso se dá pelo fato de que as primeiras seções são propedêuticas ao instrumental lógico que será utilizado intensamente na terceira seção como ferramenta imprescindível. De fato, é lá que são introduzidos elementos que fazem com que seja necessária a recorrência a operações de ordem superior, visto que as abstrações sempre envolvem a elevação de um nível na hierarquia de tipos lógicos.

Recordando a lista apresentada por Van Heijenoort em sua introdução à *Begriffsschrift*, e que foi diversas vezes referida por nós aqui, é correto dizer que em relação às duas primeiras seções, os pontos considerados naquela lista estão completamente de acordo com o desenvolvimento lógico apresentado naquela obra. Inclusive se a *Begriffsschrift* acabasse ao findar-se a sua segunda seção, não haveria, em nossa opinião, nenhum ponto de desacordo entre nossa maneira de interpretá-la e a maneira adotada por Van Heijenoort. A nossa discordância com aquela lista ficará mais clara no decorrer deste capítulo, onde enfatizaremos a importância da operação de abstração, operação essa que não é elencada por Van Heijenoort e que, como acreditamos, está por trás de todo o desenvolvimento lógico apresentado por Frege em 1879. Iniciemos, portanto, a apresentação das definições que serão, como referimos outrora, as proposições que primordialmente nos interessarão nas seções que seguem.

A primeira definição introduzida por Frege é a (69), abaixo:



(69)

Se repararmos bem nessa proposição, notaremos que de início já é apresentada uma distinção notacional com os juízos. Nela o martelo de Frege é constituído por uma dupla “barra de asserção”, e notacionalmente é isso que caracterizará uma *“definição”*. Vejamos o que Frege nos diz a respeito:

> Essa proposição difere dos juízos considerados até agora no que ela contém sinais que não foram definidos anteriormente, ela traz uma definição. Não dizemos que “o lado direito da equação tem o mesmo conteúdo que o esquerdo”, mas que “é para ter o mesmo conteúdo”. Contudo, essa proposição não é um juízo e conseqüentemente não é um *juízo sintético*, utilizando a terminologia kantiana. (...) Nosso único propósito em introduzir tais definições é trazer uma simplificação extrínseca através da estipulação de uma *abreviação*. (FREGE, 1967, p.55)

Nesse trecho são enfatizados dois aspectos fundamentais que caracterizam uma definição: (i) o seu caráter abreviativo, tal qual, como veremos, acarreta numa subida de nível na hierarquia de tipos e (ii) o fato delas não serem juízos e, por conseguinte, não serem juízos sintéticos.

Abordaremos esses pontos de acordo com a ordem que aqui apresentamos, embora não seja imprescindível tal ordenação, veremos que apesar de distintos, tais pontos estão intimamente correlacionados. Exporemos adiante as definições, por meios da explanação dos tópicos (i) e (ii) apresentados, para que seja possível traçar um paralelo entre esse novo tipo de proposição apresentado por Frege e a sua concepção de que os juízos presentes em aritmética sejam *analíticos*, em termos kantianos.

Proporemos a interpretação segundo a qual há uma estreita relação entre a concepção fregeana de *criatividade lógica* e a *fertilidade dos juízos analíticos*. Na verdade, acreditamos que tanto o problema da identidade, quanto a criatividade lógica e a natureza dos juízos presentes aritmética; são questões indissociáveis na *Begriffsschrift*. E será ao tentarmos justificar o porquê de tal relação, que proporemos aquele que consideramos o principal motivo pelo qual Frege rechaça a maneira kantiana de se conceber os enunciados da aritmética.

Essa não será a nossa preocupação principal, mas a abordaremos como tentativa de se apresentar a concepção de "fertilidade lógica" tida por Frege e como ela pode ser interpretada adequadamente à nossa proposta de que as abstrações sejam, no caso das definições, ferramentas úteis à fixação de certos conceitos.

3.2 – O Caráter Estipulativo das Definições e a Importância da Operação de Abstração

Vimos que um dos principais aspectos que caracteriza uma definição é o seu caráter abreviativo. Entretanto, ao abordar tal assunto é de suma importância salientar que as abreviações enfatizam a natureza *deôntica* das definições, isto é, em uma definição sempre encontramos presente um conteúdo de caráter *estipulativo*. Utilizamos aqui a palavra “estipulativo” como significando o mesmo que Quine se refere por “postulados legislativos” (Quine, 1995, p.149) e que, segundo ele, possuiriam inicialmente um valor de verdade dado por convenção.

De fato, como veremos, o tratamento que Quine dá ao problema dos “postulados legislativos” parece guardar uma certa semelhança com aquele proposto por Frege, acerca das definições. Um ponto importante que Quine chama à atenção é que, mesmo que determinados conteúdos sejam estipulativos, isto é, sejam uma mera equivalência entre novos sinais introduzidos em uma definição e outros antigos, já existentes na teoria, depois de instaurados, esses novos conteúdos passam a ter o mesmo estatuto de verdade do que aqueles anteriores. Ou seja, após se tornar judicativo tal conteúdo, ele passa a ter a sua verdade garantida, não mais por convenção, mas normalmente, como todos os outros juízos.

Uma maneira de se entender o que Quine está dizendo é que em um contexto de uma definição estão presentes duas etapas. A primeira, estipulativa, seria aquela onde determinado conteúdo é introduzido como o que Frege chama de “abreviação”. Isto é, o primeiro instante é o de “batismo”, onde é traçada uma equivalência entre duas fórmulas distintas. A saber, uma antiga já previamente existente na teoria, e outra nova, introduzida justamente pela definição. É digno de nota que uma abreviação introduz uma noção de verdade dada por convenção, pois estamos simplesmente afirmando que, a partir do instante da definição, tais e tais signos irão significar o mesmo que tais e tais outros signos.

Entretanto, após esse instante “batismal”, o segundo momento é aquele onde a equivalência estipulada passa a ser válida na teoria em questão, por meio de juízos. Não havendo mais assim verdades “convencionadas” e “não-convencionadas”. Utilizemos um exemplo, suponha que em determinada teoria T haja apenas três sentenças verdadeiras:

(i) Alfa tem a propriedade P;

(ii) Alfa tem a propriedade P1;

(iii) Alfa tem a propriedade P2.

Suponha ainda que haja no domínio daquela teoria apenas os seguintes elementos distintos entre si: Alfa, P, P1 e P2, expressos pelas únicas 3 sentenças verdadeiras da teoria. Então, se por um motivo qualquer se é introduzida naquela teoria a seguinte definição D:

$\mathrm{Alfa} \equiv \mathrm{def} \alpha$, onde "$\alpha$" simplesmente abrevia “Alfa”. Obviamente, ao se introduzir a definição D ao domínio daquela teoria T, este, por sua vez, será expandido, pois a partir daí, haverá a presença do elemento α. Além disso, após a estipulação apresentada na definição D, extraímos como conseqüência as três seguintes sentenças adicionais como verdadeiras:

(i) α tem a propriedade P;

(ii) α tem a propriedade P1;

(iii) α tem a propriedade P2.

(iv) O que faz com que a partir de agora a teoria T tenha os seguintes enunciados verdadeiros:

(v)

(i) Alfa tem a propriedade P;

(ii) Alfa tem a propriedade P1;

(iii) Alfa tem a propriedade P2;

(iv) α tem a propriedade P;

(v) α tem a propriedade P1;

(vi) α tem a propriedade P2.

(vii) Alfa $\equiv \alpha$

(viii)

(ix) Dessa maneira, podemos notar que os enunciados de (i) a (vii) são todos verdadeiros independentemente da definição ou não. Ou seja, após a legislação, um juízo contendo tanto Alfa, quanto α, são verdadeiros de maneiras semelhantes, não havendo mais, portanto, alguma espécie de hierarquia entre ele, de “verdade por convenção”. Ou seja, com o uso, a verdade do enunciado introduzido inicialmente de maneira legislativa, passa a ser dada não mais apenas por convenção, pois já foi incorporado à teoria como sendo verdadeiro. Portanto, a convenção seria apenas aquele primeiro instante de batismo, ou de ato instaurador da definição.

(x)

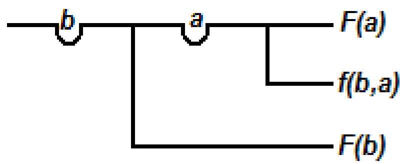
(xi) É verdade que as leis em geral possuem caráter normativo, entretanto, é fácil reparar que o mesmo enunciado pode funcionar em um contexto normativo de maneiras distintas, como é o caso de (vii). Ao legislar, instauramos uma maneira correta de como proceder, e é importante frisar que as maneiras de se proceder serão passíveis de “correção” ou “incorreção” justamente pela norma expressa naquele juízo inicial, a saber, a lei ou a regra. E esta seria uma das maneiras que um juízo pode se comportar em um contexto normativo. A segunda seria aquela após a determinação da “regra de correção”, dada por aquela lei. Nesta maneira, não mais nos importa o estatuto da lei, ou seja, se ela seria uma lei boa ou ruim, pois a mesma já fora incorporada como um juízo verdadeiro da teoria competindo, assim, ser executada ou não. Não obstante, o estatuto de uma verdade dada por convenção seria naquele segundo momento, como vimos, o mesmo de qualquer outra verdade dada de outra forma.

(xii)

(xiii) Esse caráter deôntico das definições fica claramente expresso no trecho em que apresentamos na seção precedente (cf. p. 86), onde Frege explica que cada lado (do sinal ≡) de uma definição: “não tem, mas *é para ter* o mesmo conteúdo”; em outros termos, ambos *devem ter* o mesmo conteúdo. Dessa maneira, em uma proposição como a (69), estabelece-se que a fórmula:

(xiv)

(xv)

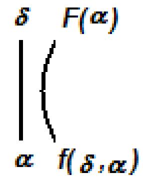


(xvi)

(xvii) E a fórmula:

(xviii)

(xix)



(xx)

(xxi) *deverão ter* o mesmo conteúdo! Portanto, claramente em uma definição há a tentativa de se estabelecer uma identidade de conteúdo entre duas fórmulas distintas, apelando-se a um juízo normativo, e esse é o ponto onde a *identidade* entra na discussão.

(xxii)

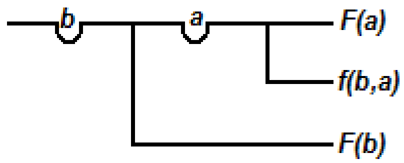
(xxiii) Certamente a investigação acerca do estabelecimento de um critério adequado de identidade intensional se mostra de extrema complexidade, mas acreditamos que não seja necessário adentrar profundamente àquele assunto para se ter uma interpretação satisfatória do estatuto das definições, que é o que fundamentalmente nos importa aqui. Embora possamos perceber que Frege já nota as dificuldades envolvidas pelo assunto, seja pela própria introdução das definições, seja por considerar (na *Begriffsschrift*) a identidade como uma relação entre *sinais* e não entre *conteúdos* (Frege, 1967, p.20). As definições, portanto, são uma tentativa de se estabelecer a identidade entre duas fórmulas distintas; no contexto da *Begriffsschrift*, entre *sinais* distintos.

(xxiv)

(xxv) Analisemos agora, com cuidado, cada parte daquela expressão definicional. Se observarmos bem, notaremos que a fórmula

(xxvi)

(xxvii)



(xxviii)

(xxix) exprime o conteúdo da hereditariedade de uma relação. Nos referimos aqui por *"relação de hereditariedade"* e não por *"propriedade hereditária",* pois na *Begriffsschrift* a hereditariedade é interpretada como uma relação existente entre uma certa relação de sucessão e um conteúdo de um domínio que é determinado pela propriedade F, como segue: *"a circunstância que a propriedade F é hereditária na f-seqüência."* (Frege, 1967,p.57).

(xxx)

(xxxi) Em notação contemporânea, o lado esquerdo do sinal de identidade da sentença (69), apresentado acima, seria equivalente à fórmula:

(xxxii)

(xxxiii) $\forall bFb \rightarrow \forall a(fb,a \rightarrow F(a))$

(xxxiv)

(xxxv) que pode ser lida da seguinte maneira: *se para todo b, se b tem uma certa propriedade F e para todo a, se a é o resultado da aplicação do procedimento f a b, então a tem a propriedade F.*

(xxxvi)

(xxxvii) A abreviação presente no lado direito do sinal de identidade, por outro lado, ao invés de aludir a todos aqueles constituintes lógicos que apresentamos acima em $\forall bFb \rightarrow \forall a(fb,a \rightarrow F(a)$, ela simplesmente enfatiza a relação lógica fundamental entre dois elementos da expressão, a propriedade F e a relação f subjacente à definição (69), que é a *"relação de hereditariedade"*. Assim temos $FH(f)$ que utilizaremos para notar a abreviação presente na proposição (69) e que, como já apresentamos, também pode ser lida como *“a circunstância em que a propriedade F é hereditária na f-seqüência.*”.

(xxxviii)

(xxxix) Ou seja, tanto $\forall b Fb \rightarrow \forall a (fb{,}a \rightarrow F(a))$, quanto $FH(f)$, exprimem o mesmo conteúdo lógico, que é o que a definição (69) exprime. Entretanto a abreviação $FH(f)$ salienta o conteúdo lógico fundamental a ser fixo, isto é, a *hereditariedade* como uma relação entre um domínio F e uma relação f presente naquele domínio F.

(xl)

(xli) Um ponto importante que poderíamos já antecipar é o de que as abreviações presentes nas definições funcionam assim como nomes de determinadas relações lógicas frutíferas. Em outros termos, designamos, por meio das abreviações, o conteúdo lógico que estamos interessados. Como veremos mais adiante, ao apresentarmos algumas derivações, o ponto fundamental é essa operação capaz de designar propriedades, a *abstração*. Esta se mostra como uma faceta muito importante, pois nos possibilita *falar sobre* as propriedades, o que viabiliza diversas operações lógicas tão relevantes à obra de Frege. Ao designar as propriedades em uma definição, as abstrações nos apontam para um foco de interesse em certos elementos da fórmula, como vimos no caso expresso pela proposição

(69), onde a atenção é voltada para o domínio F e a relação f.

(xlii)

(xliii) Veremos que as abstrações também produzem diversas ordens lógicas distintas, visto que a sua utilização sempre envolve uma ordem superior aos conceitos tratados previamente. Assim, teríamos, pela utilização da Linguagem Lambda a fórmula

(xliv)

(xlv) $[\lambda.f.F.\forall bFb\rightarrow\forall a(fb,a\rightarrow Fa]$

(xlvi)

(xlvii) como meio de *designar*, ou *falar sobre* a relação hereditariedade entre F e f. Podemos notar que a operação lambda enfatiza que as abstrações devem ocorrer em F e f, e esta é certamente uma das vantagens da utilização dessa linguagem, pois o operador λ ligando f e F marca exatamente essa operação de escolha de alguns componentes e a abstração de todos os outros. Assim, em

$[\lambda.f.F.\forall bFb \to \forall a(fb,a \to Fa]$ focamos nossa atenção somente em F e f, e todo o resto do maquinário lógico será abreviado, como veremos

adiante, em uma nova relação composta H.

(xlviii) Outro ponto importante que referimos outrora é que as abstrações sempre envolvem uma elevação de nível na hierarquia lógica. Retornando àquela fórmula presente no lado esquerdo da definição (69), marcamos os objetos presentes através do índice 0, ou seja, o "primeiro andar" da hierarquia de tipos lógicos:

(xlix)

(l) $[\lambda.f.F.\forall b0Fb0 \to \forall a0fb0,a0 \to Fa0$

(li)

(lii) Dessa maneira, podemos claramente observar que a e b estão no primeiro nível da hierarquia. Em seguida, atribuímos os

índices restantes e obtemos:

(liii)

(liv) [λ.f1.F1.∀b0F1b0→∀a0f1b0,a0→F1a0

(lv)

(lvi) Que marca que f e F pertencem ao segundo nível da hierarquia, aquele onde se encontram as propriedades de primeira ordem.

Por não haver na fórmula anterior índices superiores a “1”, temos lá um exemplo de uma fórmula em primeira ordem, pois o maior índice de uma determinada fórmula corresponde à sua respectiva ordem.

(lvii)

(lviii) Até agora nos ocupamos com a fórmula presente no lado esquerdo do sinal ≡ presente nas definições, o *definiendum*.

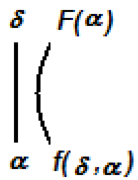
Voltemos doravante a atenção ao lado esquerdo, o *definiens*. Como já observamos enfaticamente, em uma definição são fixados conteúdos que sejam relevantes logicamente. Em nosso exemplo específico, a proposição (69), vimos que a hereditariedade é fixada por

meio das abstrações presentes em [λ.f1.F1.∀b0F1b0→∀a0f1b0,a0→F1a0

(lix) Entretanto, Frege não dispunha dos recursos do Cálculo Lambda e para fixar tais conteúdos, ele utilizava a abstração por meio de abreviações, o lado direito das definições. Já afirmamos acima que Frege utiliza

(lx)

(lxi)



(lxii)

(lxiii) como abreviação da relação de hereditariedade. Podemos notar nessa abreviação a tentativa de enfatizar os conteúdos lógicos

expressos por f e F, já que elas são as únicas variáveis mantidas no *definiens*.

(lxiv)

(lxv) Utilizamos $\mathrm{FH(f)}$ para exprimir a hereditariedade aqui e vimos que Frege a interpreta como uma relação a ser lida da

seguinte maneira: *a circunstância que a propriedade F é hereditária na f-seqüência.* Todavia, observamos anteriormente que f e F são

entidades de primeira ordem, por isso, a hereditariedade será de ordem superior àquelas. A hereditariedade fixada pelo *definiens* pertencerá ao terceiro nível da hierarquia de tipos, sendo, por isso, de segunda ordem:

(lxvi)

(lxvii) $F1H2(f1)$

(lxviii)

(lxix) Podemos, é claro, além de introduzir os índices, introduzir também o operador lambda que enfatizará os conteúdos a serem abstraídos:

(lxx)

(lxxi) $\lambda.F1.f1.F1H2f1$

(lxxii)

(lxxiii) assim temos o designador da relação de hereditariedade expresso acima. Uma observação muito importante a ser feita é que ao

se fixar os conteúdos subjacentes a $[\lambda.f1.F1.\ \forall b0F1b0 \rightarrow \forall a0f1b0,a0 \rightarrow F1a0$ e abreviá-los por

$\lambda.F1.f1.F1H2f1$, extraímos uma entidade de ordem superior à do *definiendum*. Ou seja, chegamos à relação de hereditariedade,

formulada em segunda ordem, e será por meio de tal abreviação que essa relação será introduzida nas derivações, isto é, como uma entidade de ordem superior.

(lxxiv)

(lxxv) Até agora focamos separadamente cada lado de uma definição, ou melhor, o *definiendum* e o *definiens*. O próximo passo é imediato: nos perguntarmos por qual seria a relação de equivalência que Frege sugere existir entre os dois. Será exatamente isso o que faremos na próxima seção, deixando de lado o assunto relativo às partes das definições tomadas separadamente.

(lxxvi)

(lxxvii)

(lxxviii)

(lxxix)

(lxxx)

(lxxxi)

(lxxxii)

(lxxxiii)

(lxxxiv)

(lxxxv)

(lxxxvi)

(lxxxvii)

(lxxxviii)

(lxxxix)

a. *3.3 – A Relação de Identidade na Begriffsschrift e o Aspecto Criativo da Lógica.*

(xc)

(xci) Vimos na seção anterior que as definições são tentativas tanto de se fixar conteúdos lógicos relevantes, quanto de abreviá-los. Nesta é feita uma equivalência entre aqueles conteúdos previamente fixados. Tomemos novamente como exemplo a proposição (69)

e veremos que há uma relação expressa pelo sinal "≡" entre os seus constituintes:

(xcii)

(xciii) 69 ∀b0F1b0→∀a0(f1b0,a0→F1(a0)≡def [λ.F1.f1.F1H2f1][3]

(xciv)

---

3 Utilizamos o sinal ≡def em substituição à dupla barra de asserção introduzida por Frege para exprimir uma definição.

(xcv) Seguindo a mesma linha argumentativa que utilizamos para apresentar a seção que precede imediatamente a esta, seria bem natural se perguntar sobre que tipo de relação é expresso pelo sinal ≡, bem como em que nível ele se encontra na hierarquia de tipos lógicos. Segundo do Frege, na *Begriffsschrift*, esse sinal se refere à identidade (cf. Frege, 1967, §8) e é utilizado em todas as definições presentes na terceira seção.

(xcvi)

(xcvii) Uma de nossas propostas fundamentais é aquela segundo a qual as abstrações são capazes de designar entidades insaturadas, permitindo, portanto um clareamento lógico à obra de Frege de 1879. Dessa maneira, em uma definição haveria, aparentemente, certa identificação entre duas entidades insaturadas, isto é, $[\lambda.f1.F1.\ \forall b0F1b0 \rightarrow \forall a0f1b0,a0 \rightarrow F1a0$ e $[\lambda.F.f.F1H2f1]$. No contexto da *Begriffsschrift* poderíamos sem sombra de dúvidas afirmar que o sinal ≡ se trata, de fato, da identidade.

(xcviii)

(xcix) Naquela época Frege não fazia nenhuma distinção entre a identidade utilizada em um contexto de definição (aquele em que os conteúdos lógicos são fixados) e em um contexto posterior de asserção (onde aqueles conteúdos são afirmados e passam a se comportar como juízos). Como sabemos, posteriormente, no *Grundgezetse*, Frege introduz a teoria das extensões, o que o permitiria reduzir todas as entidades de ordem superior ao primeiro nível lógico, dos objetos.

(c)

> (ci) Tendo todas as classes no nível 0 (Frege) foi capaz de evitar o uso de atributos de nível superior, e foi isso o que ele fez. Frege regularmente evitou o crescimento de sua hierarquia de tipos habitando o nível 0 adequadamente com o uso de classes no lugar das propriedades. (QUINE, 1995, p.149)

(cii)

(ciii) Assim as entidades expressas em uma proposição como a (69) passam a ser interpretadas como de nível 0 (dos objetos), o que faz com que a identidade seja interpretada como uma relação de primeira ordem por relacionar entidades do primeiro nível. Observando as definições fica claro que Frege precisava poder estipular equivalências intensionais entre propriedades e relações de ordem superior; o que, como sabemos, é uma tarefa deveras árdua

(civ)

(cv) Por isso é introduzido no *Grundgezetse* a famosa lei V o que lhe permitia manter a identidade no segundo nível, em primeira ordem e, assim, reduzir o problema das equivalências intensionais ao seguro critério de identidade extensional. Inclusive é feita uma distinção notacional e a identidade passa a ser expressa pelo sinal contemporaneamente mais comum “=”. É claro que, como sabemos, essa “solução” de Frege se mostrou particularmente insatisfatória, quando da descoberta do Paradoxo de Russell.

(cvi)

(cvii) Entretanto todo desenvolvimento é posterior à Begriffsschrift, onde a identidade era interpretada como uma relação existente entre nomes de objetos. Tais comentários se fazem importantes para mostrar que o problema da identidade não era claro para Frege em 1879. Portanto não entraremos em maiores detalhes de possíveis interpretações da relação de identidade como, por exemplo, em um caso como o da proposição (69).

(cviii)

(cix) A nós basta o fato de que a identidade está sendo realmente interpretada, na *Begriffsschrift*, como uma equivalência entre sinais e, portanto, entre conteúdos intensionais, o que, como sabemos, envolve diversas dificuldades. Deixaremos assim em aberto a discussão pormenorizada acerca do problema geral da identidade na *Begriffsschrift*. A nós interessa mais a questão específica do aparecimento da relação de identidade nas definições. Estas, como sabemos, estão inerentemente ligadas ao estatuto dos juízos da aritmética, visto que é a partir delas que tais juízos são produzidos, vejamos.

(cx)

(cxi) Retomando a nossa atenção à proposição (69) e recapitulando o que apresentamos na seção 3.2, pudemos observar que a abstração da relação de *hereditariedade*, que se encontra do lado direito de ≡, é de ordem superior àquela do lado esquerdo de ≡. Portanto, ao traçar a identidade entre ambos os conteúdos, temos como conseqüência uma entidade de ordem superior, a saber, a abstração $[\lambda.F.f.F1H2f1]$ que "abrevia" $[\lambda.f1.F1.\ \forall b0F1b0 \rightarrow \forall a0f1b0,a0 \rightarrow F1a0$, no sentido em que ela fixa o conteúdo lógico de fundamental interesse, a *hereditariedade*.

(cxii)

(cxiii) Como observamos anteriormente, esse caráter "abreviativo" é um dos aspectos que caracteriza uma definição e é primariamente de ordem lógica, visto que abreviar um conteúdo (abstraí-lo) é a maneira que Frege encontra para fixar também na notação o conteúdo lógico relevante subjacente a uma expressão complexa. Ou seja, o chamamos de primariamente lógico, pois a partir das abreviações tem-se uma conseqüência que viabiliza uma ferramenta útil ao instrumental lógico, mesmo tomando "lógico" estritamente em sentido sintático, notacional. Embora, certamente, essa não seja a única função das abreviações, pois como mencionamos elas são de fundamental importância à fixação dos conteúdos lógicos que serão relevantes a certo fim.

(cxiv)

(cxv) Podemos até mesmo dizer que, nesse sentido, a criatividade consiste no exercício do lógico em fixar, como veremos, aqueles conteúdos férteis ao seu próprio propósito, no nosso caso específico há a fixação da hereditariedade, por meio da abreviação presente na proposição (69) e que seria um conteúdo lógico fértil ao propósito de se derivar a aritmética. Isto é, a tarefa fundamental do lógico poderia ser interpretada principalmente como a de abstrair e fixar conteúdos férteis ao seu propósito inicial.

(cxvi)

(cxvii) Dessa maneira gostaríamos de propor, com Ruffino (Ruffino,1991), que muito da certeza que Frege tinha acerca do caráter criativo da lógica é devida ao fato dele já ter disponível a operação de abstração como ferramenta lógica àquela fixação de conceitos que aqui explanamos. Na próxima seção apresentaremos aquela segunda característica fundamental das definições, ou seja, o fato delas não serem propriamente *juízos*. Também exporemos mais algumas considerações sobre o caráter criativo da lógica que seria, de acordo com o proposto, a principal função do lógico sob essa perspectiva fregeana.

(cxviii)

(cxix)

(cxx)

(cxxi)

(cxxii)

a. 3.4 – As Definições e a Natureza Analítica dos Juízos Presentes em Aritmética.

(cxxiii)

(cxxiv) Conforme nos propusemos anteriormente, abordaremos nesta subseção o segundo aspecto que caracteriza uma definição, isto é, o fato delas não serem juízos e, portanto, não serem juízos sintéticos. Mais ainda, utilizaremos esse assunto como uma preleção à famosa discussão da natureza dos juízos presentes em aritmética, em relação a qual teceremos alguns comentários.

(cxxv)

(cxxvi) A afirmação de que as definições não são juízos sintéticos certamente não causaria surpresa se, de fato, como inicialmente propõe Frege, elas nem sequer juízos fossem. Parece claro que as definições não são juízos, por serem de natureza estipulativa, e, portanto, não assertórica, judicativa. Até ai não encontramos nenhum tipo de desacordo com a concepção padrão, comum na época de Frege. Entretanto, logo após discorrer acerca do seu caráter abreviativo, Frege pondera que as definições apresentadas, apesar de não serem inicialmente juízos (pois são estipulativas), *se transformam imediatamente em tais*, embora, contrariamente à concepção kantiana, juízos *analíticos* e não *sintéticos*, como poderia parecer a princípio.

(cxxvii)

> (cxxviii) Embora originalmente (69) não seja um juízo, ela imediatamente é transformada em um. Uma vez que o significado dos novos signos é especificado, eles devem permanecer fixos, e conseqüentemente a fórmula (69) também afirma um juízo, mas um juízo analítico... (FREGE, 1967, p.55)

(cxxix)

(cxxx) Frege neste ponto se manifesta abertamente acerca da analiticidade dos juízos presentes em aritmética, embora concorde com Kant que os enunciados típicos da geometria sejam, realmente, sintéticos.

(cxxxi)

(cxxxii) O leitor atento terá observado que ambos os aspectos caracterizadores de uma definição, a saber, (i) o caráter abreviativo e (ii) o fato das definições não serem juízos. Ambos se fundam na idéia segundo a qual elas possuem natureza estipulativa. Todavia, julgamos por bem dividir o assunto em dois tópicos, pois acreditamos que embora apresentem semelhanças, tais aspectos (i) e (ii) são distintos. O que apresentamos como o primeiro aspecto caracterizador de uma definição (i), seria o correlato lógico do segundo aspecto (ii), de ordem primordialmente filosófica.

(cxxxiii)

(cxxxiv) Queremos com isso salientar que o caráter abreviativo seria útil principalmente ao propósito lógico, propósito este que só é possível de ser desenvolvido graças às abreviações, que são exatamente as abstrações (que fixam os conteúdos) que apresentamos outrora. As abstrações viabilizam a designação de conceitos e, portanto, a designação de conceitos logicamente relevantes; como vimos no caso da hereditariedade presente na proposição (69). Por outro lado, em (ii), há uma característica de ordem filosófica por excelência, que assegura que as definições não são *juízos sintéticos*. O que culminará na defesa da opinião de que os juízos da aritmética podem, sim, ser férteis, no sentido de não serem triviais como queria Kant, e analíticos, ao mesmo tempo.

(cxxxv)

(cxxxvi) Veremos que tanto a ferramenta lógica de Frege, quanto a concepção filosófica fundamental à sua tese da analiticidade dos enunciados da aritmética, se dão pela sua concepção da noção de “conceito de formação” (cf. Ruffino, 1991). Segundo Ruffino, o fato de Frege acreditar na possibilidade do caráter *criativo* da lógica, isto é, a possibilidade de se derivar juízos completamente novos a partir das definições, se dá pela função epistemológica exercida na *Begriffsschrift* do princípio do contexto (tese da prioridade).

(cxxxvii)

(cxxxviii)

(cxxxix) De acordo Ruffino, Frege inverte a ordem de análise clássica de tradição aristotélica, utilizada por Boole, Kant e pelo próprio Aristóteles; e prioriza os juízos em vez dos conceitos, o contrário do que aqueles fizeram.

(cxl)

> (cxli) Em Aristóteles, como em Boole, a atividade logicamente primitiva é a formação de conceitos por abstração, e os juízos e as inferências entram através de uma imediata ou indireta comparação de conceitos via suas extensões. (FREGE apud RUFFINO, 1991, p. 187)

(cxlii)

(cxliii) Essa maneira clássica de abordar a lógica teria considerado-a estéril, no sentido em que todos os possíveis resultados das derivações estariam previamente dados pela extensão de conceitos anteriores (primazia dos conceitos). Frege, por outro lado, acreditava que haveria diversas maneiras de se compor um conceito e esse era o ponto fundamental de sua discordância com Kant, ou seja a discordância acerca da noção do “conceito de formação”. Frege considerava a noção de analiticidade kantiana estreita, pois, segundo ele, o filósofo de Königsberg, concebera os conceitos como sendo formados por uma lista de características sem uma ordem específica, o que para Frege seria certamente um erro.

(cxliv)

(cxlv) Assim, na concepção fregeana, o lógico deveria compor conceitos e fixá-los através de uma lista específica de características que fosse capaz de derivar a maior quantidade de enunciados férteis ao seu propósito científico; no caso de Frege: o propósito de fundamentação da aritmética. Nesse sentido, a lógica deveria ser entendida como uma língua característica e não como um simples calculo. O exercício lógico, de acordo com essa opinião, não seria estritamente a mera manipulação de signos, haveria, também, envolvida no exercício do lógico uma atividade essencialmente heurística.

(cxlvi)

(cxlvii) Kant entendia os juízos analíticos como sendo estéreis, na medida em que todo o conteúdo expresso pelo termo predicado de uma sentença estaria, de alguma forma, *contida* no termo sujeito da mesma, não acrescentando, portanto, nenhum conteúdo àquele sujeito. Para Frege, essa maneira de se formar um conceito, dentre todas, seria a menos frutífera à composição de conceitos e o rebate tenazmente ponderando que tal concepção só se aplicaria a juízos universais, isto é, aqueles os quais seus termos sujeito e predicado remeteriam a conceitos e não a objetos. Isso já que, obviamente, um objeto não poderia *"estar contido"* em outro(Frege, 1989, §88).

(cxlviii)

(cxlix) Além disso, como já observamos, o que será de maior interesse em nossa argumentação, Frege discorda fundamentalmente de Kant sobre a maneira que este compõe os conceitos que seriam fundamentais em aritmética, sendo, desse modo, obrigado a considerá-los sintéticos.

(cl)

> (cli) Kant subestimou o valor dos juízos analíticos – como conseqüência de uma determinação demasiadamente estreita de seu conceito – embora pareça ter pressentido o conceito mais amplo aqui utilizado. Na base de sua definição, a divisão em juízos analíticos e sintéticos não é exaustiva. (...) Não pretendo ter tornado mais do que verossímil a natureza analítica das proposições aritméticas. (FREGE,1989, p.271-272)

(clii)

(cliii) Portanto, podemos dizer que Frege discorda com Kant em relação à natureza dos enunciados presentes em aritmética, pois há uma concepção distinta acerca da formação de conceitos, e, conseqüentemente, uma divergência sobre a própria capacidade criativa da lógica. Para Ruffino, essa capacidade da "lógica de Frege" de introduzir novos conceitos ao propósito científico é tão importante que superaria, em certo sentido, até mesmo a introdução dos quantificadores (cf. Ruffino, 1991, p. 187).

(cliv)

(clv) Assim podemos sintetizar que a concepção Fregeana criativa da lógica viabiliza, por meio das definições, a criação de conceitos cujas extensões não são meramente resultados de operações sobre extensões de conceitos previamente dados. O que, como vimos, culmina na consideração de que os juízos da aritmética são, de fato, *analíticos*, no sentido que eles podem ser derivados a partir das definições, por meio de regras de substituições. E, mais ainda, essa concepção funda a tese logicista fundamental de que a aritmética seria um desenvolvimento da lógica. Fazendo um paralelo com a nossa proposta, poderíamos parafrasear a tese da seguinte maneira: há uma operação fundamental encoberta nas definições que é a responsável fundamental por viabilizar, ao mesmo tempo, o caráter criativo da lógica, e analítico da aritmética.

(clvi)

(clvii)

(clviii)

(clix)

(clx)

(clxi)

(clxii)

(clxiii)

(clxiv)

(clxv)

(clxvi)

(clxvii)

(clxviii)

a. 3.5 – A estrutura das derivações presentes na Begriffsschrift.

(clxix)

(clxx) As derivações desenvolvidas no decorrer de toda a *Begriffsschrift* apresentam a mesma estrutura formal. São utilizados lá nove axiomas que fundamentalmente envolvem a implicação, a negação e a identidade. Tais axiomas são expressos pelas seguintes proposições:

(clxxi)

(clxxii) $1 \vdash a \rightarrow (b \rightarrow a)$

(clxxiii) $2 \vdash c \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow c \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$

(clxxiv) $8 \vdash d \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow d \rightarrow a$

(clxxv) $28 \vdash b \rightarrow a \rightarrow \sim a \rightarrow \sim b$

(clxxvi) $31 \vdash \sim\sim a \rightarrow a$

(clxxvii) $41 \vdash a \rightarrow \sim\sim a$

(clxxviii) $52 \vdash c \equiv d \rightarrow fc \rightarrow fd$

(clxxix) 54 $\vdash c \equiv c$

(clxxx) 58 $\vdash \forall a f(a) \rightarrow f(c)$

(clxxxi)

(clxxxii) Ainda alguns deles podem ser redutíveis a outros, como é o caso do terceiro axioma (8) que pode ser derivado a partir dos dois primeiros (1) e (2), o que sugere que o sistema lá apresentado poderia ainda ser mais simples (cf. Kneale. p.435) Frege utiliza também em suas derivações uma regra de inferência, o *modus ponens,* e uma regra de substituição que não é formulada explicitamente.

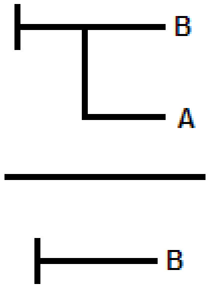
(clxxxiii)

(clxxxiv) De modo geral as derivações seguem o seguinte esquema:

(clxxxv)

(clxxxvi)

(XX):



(clxxxvii)

(clxxxviii) Onde B é inferido por *modus ponens* de A→B, através das devidas substituições, que, como veremos, podem ser apresentadas como uma espécie de tabela, feitas na fórmula de número (XX). Vejamos um exemplo dado pelo próprio Frege, onde será derivada a fórmula de número (3) a partir da fórmula (2) por recorrência às substituições na fórmula (1) (cf. Frege, p.31).

(clxxxix)

(cxc) Inicialmente é feita uma referência explícita à sentença da qual partirão as derivações que nesse caso específico será o segundo axioma:

(cxci)

(cxcii) $2 \vdash c \to b \to a \to c \to b \to c \to a$

(cxciii)

(cxciv) posteriormente é apresentada a lista de substituições a serem feitas na proposição de número $1 \vdash a \to (b \to a)$, o primeiro axioma.

Assim onde em (1) houver a letra a devemos substituir por $c \to b \to a \to c \to b \to c \to a$ e onde ocorrer em (1) a letra b, esta será substituída por

$b \to a$, assim obtemos a seguinte tabela:

(cxcv)

(cxcvi) **Onde em (1) for:**	(cxcvii) **Substituir por:**
(cxcviii) a	(cxcix) $c \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow c \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow a$
(cc) b	(cci) $b \rightarrow a$

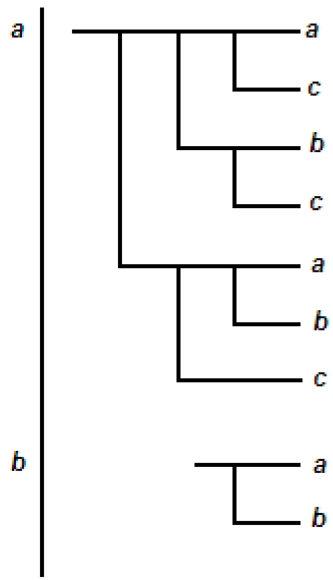
(ccii)

(cciii) O que equivale originalmente na peculiar notação fregeana a:

(cciv)

(ccv)

(1) :



(ccvi)

(ccvii) Assim, como resultado das substituições explicitadas pela tabela em (1) a→(b→a), extrairemos como resultado R:

(ccviii)

(ccix) R=c→b→a→c→b→c→a→ b→a→c→b→a→c→b→c→a

(ccx)

(ccxi) Por *modus ponens* em R e (2), que é a fórmula da qual partimos, chegamos exatamente onde queríamos, na sentença (3):

(ccxii)

(ccxiii) 3 b→a→c→b→a→c→b→c→a

(ccxiv)

(ccxv) De modo geral, todas as derivações da *Begriffsschrift* seguem essa estrutura formal, entretanto esse método que parece ser eficaz às derivações, já não se mostra fácil de ser manipulado quando adentramos a terceira seção, onde muitas das substituições são dadas em ordem superior.

(ccxvi)

(ccxvii) A derivação que exemplificamos há pouco é a primeira feita por Frege na *Begriffsschrift* e se mostra de baixo grau de complexidade. Isso se dá, em parte, pelo fato de haver ali apenas variáveis livres, por outro lado também não são introduzidas fórmulas em ordem superior. De fato, a grande parte das derivações das duas primeiras seções da *Begriffsschrift* será constituída por fórmulas com variáveis livres, e mesmo quando envolverem variáveis ligadas, o grau de complexidade não se alterará significativamente, pois, naquelas duas primeiras seções, só há quantificações sobre variáveis de primeiro nível. Isto é, elas são desenvolvidas em lógica de primeira ordem.

(ccxviii)

(ccxix) Entretanto, após a introdução das definições nas cadeias de derivações, a complexidade das substituições se eleva a ponto de, por vezes, nos dar a impressão de que algumas etapas lógicas não parecem completamente explicitadas nas substituições que Frege apresenta. Vejamos um exemplo, utilizando a mesma definição 69:

(ccxx)

(ccxxi) (69)⊢∀b´Fb´→∀afb´,a´→Fa ´≡F1H2F1 (ccxxii) Novamente obtemos uma versão da lista de substituições por intermédio da tabela abaixo:

(ccxxiii)

(ccxxiv) Substituições em 68:∀a´fa´≡b→b→fc

(ccxxv)

(ccxxvi) **Onde em (68) for:**	(ccxxvii) **Substituir por:**
(ccxxviii) a´	(ccxxix) b´
(ccxxx) f(Γ)	(ccxxxi) FΓ→∀a(fΓ,a→Fa
(ccxxxii) b	(ccxxxiii) F1H2F1

(ccxxxiv) c (ccxxxv) x

(ccxxxvi)

(ccxxxvii)

(ccxxxviii) E finalmente, por *modus ponens*, se chega a:

(ccxxxix)

(ccxl) (70)⊢F1H2F1→(Fx→∀a´(fx,a´→F(a´)

(ccxli)

(ccxlii) Como podemos notar, o grau de dificuldade nesse exemplo é bem superior do que aquele que mostramos primeiramente. Nele são introduzidas substituições funcionais e de ordem superior, onde a relação de hereditariedade, que fora introduzida pela definição (69), passa a ser um dos conteúdos a ser utilizados nas substituições. Apresentamos na seção 3.2 a maneira como se comportam as definições, de um lado (no lado esquerdo do sinal ≡) há o *definiens* e do outro lado (no lado direito do sinal ≡) há o

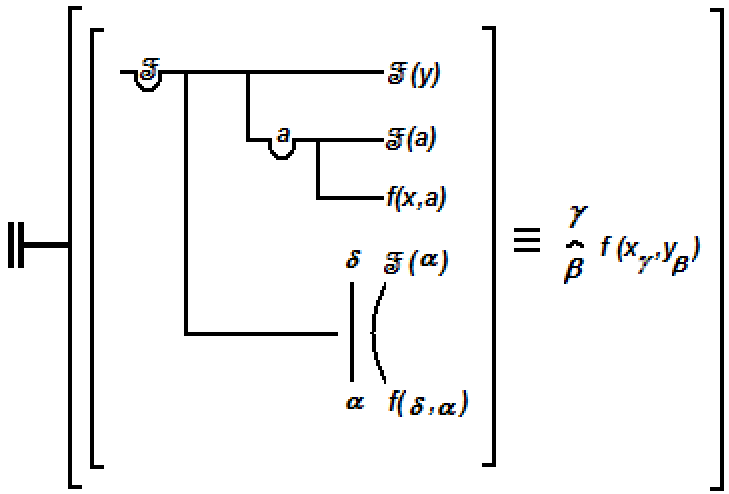
definiendum. Nas definições apresentadas na terceira seção da *Begriffsschrift*, a ordem do *definiendum* sempre será superior à do *definiens*, como observamos, por exemplo, no caso da proposição 69. Onde a hereditariedade abreviada pelo *definiendum* está formulada em segunda ordem. De fato, se repararmos bem na prática lógica, são as abreviações, expressas pelo definiendum, que são introduzidas nas substituições. Isto é, exatamente após uma definição, entidades de ordem superior são introduzidas ao maquinário lógico. O que faz com que o grau de complexidade das derivações aumente naturalmente.

(ccxliii)

(ccxliv) Tal dificuldade ainda se torna maior dado o instrumental lógico utilizado na *Begriffsschrift*. Nessas substituições mais complexas, como veremos, o problema da distinção entre o vários níveis lógicos das expressões que sofrerão substituição se torna agudo. Na tentativa de distinguir entre as diversas ordens, Frege introduz alfabetos distintos, pois em sua linguagem não havia disponível um operador de abstração, como há no caso do Cálculo Lambda, nem os índices que indicassem precisamente os tipos, vejamos:

(ccxlv)

(ccxlvi)



(76)

(ccxlvii)

(ccxlviii)

(ccxlix) neste exemplo Frege utiliza o “f” gótico maiúsculo na concavidade para indicar que não se trata mais de uma quantificação sobre objetos, mas sim sobre propriedades, ou seja, uma ordem acima à quantificação apresentada em (69), vejamos esse problema mais detalhadamente.

(ccl)

(ccli) Vimos que nessa notação de Frege o fato de as substituições não ficarem explícitas na própria notação fazem com que seja preciso a introdução das “tabelas de substituições”. Ainda quando há uma substituição funcional, não fica bem claro, apenas recorrendo à sintaxe utilizada, qual é a ocorrência da função referida a ser substituída. Isso faz com que seja pressuposta uma ordem das substituições, sem a qual as derivações não alcançam o seu objetivo. Assim, o uso das complexas tabelas de substituição, por Frege, se dá na tentativa de especificar como exatamente deverão ser feitas essas substituições, vejamos um exemplo.

(cclii)

(ccliii) Voltemos novamente à derivação da proposição (70) (Frege, 1967, p.57), que já apresentamos nesta seção. Vimos que Frege parte da proposição (69), faz as substituições na proposição (68) e, finalmente, chega por *modus ponens* à (70). Para isso as

substituições devem ser feitas na ordem apresentada pelo quadro abaixo, a ser seguida de a´ em direção a c:

(ccliv)

(cclv) **Onde em (68) for:**	(cclvi) **Substituir por:**
(cclvii) a´	(cclviii) b´

(cclix) $f(\Gamma)$ (cclx) $F\Gamma \rightarrow \forall a'(f\Gamma, a' \rightarrow Fa'$

(cclxi) b (cclxii) $F1H2F1$

(cclxiii) c (cclxiv) x

(cclxv)

(cclxvi)

(cclxvii) Vejamos o que ocorre se, digamos, alterarmos aquela ordem. Permutemos, portanto, a primeira e a segunda substituições:

(cclxviii)

(cclxix) $68 \vdash \forall a' fa' \equiv b \rightarrow b \rightarrow fc$

(cclxx)

(cclxxi) Assim, devemos substituir em (68) primeiro as ocorrências de $f(\Gamma)$ por $F\Gamma \rightarrow \forall a f \Gamma, a' \rightarrow Fa'$ e obteremos:

(cclxxii)

(cclxxiii) $\forall a' Fa' \rightarrow \forall a fa', a' \rightarrow Fa' \equiv b \rightarrow b \rightarrow Fc \rightarrow \forall a' fc, a' \rightarrow Fa'$

(cclxxiv)

(cclxxv) E depois, as ocorrências de a' por b':

(cclxxvi)

(cclxxvii) $\forall b' Fb' \to \forall b' fb', b' \to Fb' \equiv b \to b \to Fc \to \forall b' fc, b' \to Fb'$

(cclxxviii)

(cclxxix)Após fazer as outras substituições presentes na terceira e quarta linhas da tabela, chegamos a:

(cclxxx)

(cclxxxi)$\forall b' Fb' \to \forall b' fb', b' \to Fb' \equiv F1H2F1 \to F1H2F1 \to Fx \to \forall b' fx, b' \to Fb'$

(cclxxxii)

(cclxxxiii) uma fórmula completamente distinta da que pretendíamos! E assim não atingimos o objetivo de se chegar, por *modus ponens* em (69), à fórmula (70)!

(cclxxxiv)

(cclxxxv) Isso ocorre, como veremos claramente pela utilização do Cálculo Lambda, porque há ordens distintas em jogo. Ou

seja, uma abstração entra como uma β-redução de outra abstração. O que nos exige, na notação de Frege, a utilização de uma ordem

específica ao se fazer as substituições. Dessa maneira fica claro que há mais etapas lógicas presentes nas “substituições” da terceira seção da *Begriffsschrift* do que a sua linguagem pôde explicitar.

(cclxxxvi)

(cclxxxvii) Como temos argumentado, por trás dessas definições parece haver a idéia de uma operação de abstração. Contudo, na falta de um operador como o operador Lambda, essas definições e as substituições que elas engendram ficam progressivamente mais complexas e, poderíamos até dizer, um tanto “imprecisas”. É difícil de não se lembrar daquele trecho que citamos no início desse capítulo, onde Frege explica o motivo que o levou à formulação de sua conceitografia:

(cclxxxviii)

> (cclxxxix) ...não importa quão difícil fosse de manusear as expressões que eu estava disposto a aceitar, eu estava cada vez menos apto, quando as relações se tornavam mais e mais complexas, a alcançar a precisão que o meu propósito requeria. Com essa deficiência ocorreu-me a idéia da presente ideografia. (FREGE, 1879, p. 06)

(ccxc)

(ccxci) Portanto, gostaríamos ainda acrescentar que a própria ideografia requer uma operação adicional, a abstração, para que, com o auxílio dela, a terceira seção seja mais adequadamente tratada. As dificuldades envolvidas nas derivações da terceira seção da

Begriffsschrift chegam a tal ponto, que parece que aqui seria o caso de se explicitar à própria linguagem de Frege uma operação implicitamente já utilizada.

(ccxcii)

(ccxciii) Isto é, além de uma justificativa filosófica, apresentada no segundo capítulo, necessitamos de uma operação lógica para que a *Begriffsschrift* atinja o seu propósito de explicitação dos conteúdos lógicos. Não queremos com isso nos insinuar contra a capacidade da linguagem de Frege em executar o seu projeto proposto na *Begriffsschrift*. Gostaríamos, entretanto, de propor que, com a utilização do operador de abstração utilizado pela linguagem Lambda, certas etapas lógicas vêm à tona, o que não ocorre tão claramente sem a utilização dessa operação. Ou seja, parece-nos correto ao nosso propósito de esclarecimento conceitual da *Begriffsschrift* a introdução de uma operação que seja capaz de fixar conteúdos lógicos, bem como tornar explícitas as etapas das substituições.

(ccxciv)

(ccxcv) Há ainda outro inconveniente com relação à notação original daquela obra. Trata-se do fato de termos sempre que nos referir, extrinsecamente ao cálculo, à qual proposição ocorrerá as substituições, como vimos nos exemplo das derivações anteriormente apresentadas. Precisamos, assim, enfatizar, por meio da utilização de recursos externos ao próprio cálculo, que a proposição a receber as substituições será a de número (68), por exemplo, (cf. apêndice p. 133).

(ccxcvi)

(ccxcvii)Tentaremos, portanto, na próxima seção, mostrar algumas vantagens da utilização do Cálculo Lambda ao tratar dessas derivações. E mostrar alguns aspectos que não ficam tão claros no maquinário lógico apresentado por Frege, aspectos esses que ficam nitidamente expressos pela utilização da Linguagem Lambda.

(ccxcviii)

(ccxcix)

(ccc)

(ccci)

a. *3.6 – Derivações da Begriffsschrift notadas em Linguagem Lambda.*

(cccii)

(ccciii) Na seção precedente nos referimos a algumas desvantagens apresentadas pela linguagem proposta na *Begriffsschrift* ao lidar com derivações que envolvam ordem superior. Embora não tenhamos ainda apresentado todas essas dificuldades, como, por exemplo, a que veremos adiante: a das etapas lógicas que não parecem ficar explícitas.

(ccciv)

(cccv) Vimos que Frege enfrenta o problema de se distinguir as diversas ordens lógicas presentes nas derivações através da introdução de alfabetos distintos. Também afirmamos que a as regras de substituições não ficam tão explicitas na notação original, e que é preciso se fazer uma referência adicional a qual proposição estão sendo feitas as substituições. Veremos que tais incômodos são solucionados pela simples introdução da sintaxe do Cálculo Lambda. Na verdade tentamos apresentar, a partir do segundo capítulo, as vantagens filosóficas em se utilizar a linguagem de Church. Tentamos, no capítulo II, argumentar que é, de fato, plausível designar entidades intensionais, e que isso não entraria de modo algum em dissonância com a proposta fregeana de se distinguir entre *conceitos* e *objetos*. Toda essa argumentação foi dada a fim de se defender a plausibilidade filosófica de nossa tentativa de interpretação.

(cccvi)

(cccvii) Nesta seção tentaremos, finalmente, explanar algumas vantagens lógicas da utilização do Cálculo Lambda, embora não seja apresentado um trabalho exaustivo de toda a terceira seção. Notaremos que as regras de substituições ficarão claras, pois as substituições interpretadas como abstrações explicitam as operações lógicas executadas. Assim, será dispensável a utilização daquela que nos referimos por “tabela de substituições”, bem como a introdução de recursos externos que indiquem onde ocorrerão as abstrações. Outro ponto que ainda consideramos de maior importância, será o fato da formalização em Lambda ser completa, no sentido

em que todas as etapas lógicas ficam explícitas, através das β-reduções.

(cccviii)

(cccix)

(cccx)

(cccxi)

(cccxii)

(cccxiii)

(cccxiv)

(cccxv)

(cccxvi)

(cccxvii)

(cccxviii)

(cccxix)

(cccxx)

(cccxxi) Apresentaremos a seguir alguns exemplos de derivações presentes na terceira seção da *Begriffsschrift* notados com a linguagem Lambda, para que seja possível compreender melhor aquelas vantagens referidas por nós. Como vimos, consideramos como uma das grandes vantagens dessa linguagem a possibilidade de *designação* direta às propriedades, e não apenas por meio de suas extensões. Veremos que ela também é mais detalhada do que a linguagem utilizada originalmente por Frege, pois explicita todas as etapas das operações lógicas que estão sendo executadas, o que não ocorre tão claramente na *Begriffsschrift*. Outra vantagem é o fato de não ser preciso introduzir referências adicionais para identificar em qual proposição estão sendo feitas as abstrações. O Cálculo Lambda deixa explícito qual é a proposição por meio da qual estão ocorrendo as derivações.

(cccxxii)

(cccxxiii) Exporemos um exemplo de uma derivação notada na linguagem de Church e detalharemos as etapas da derivação, posteriormente haverá outras derivações no apêndice deste texto. Entretanto, escolhemos a mesma derivação que apresentamos na seção 3.5 (cf. apêndice p. 133-134), por se tratar de um bom exemplo, pois envolve ordem superior, abstrações compostas, além de exemplificar os outros pontos que julgamos relevantes na seção anterior e que os retomaremos novamente abaixo.

(cccxxiv)

(cccxxv)Como nos propusemos, partiremos da proposição (69), com a finalidade de se derivar a proposição (70). Voltemos, novamente, à proposição (69):

(cccxxvi)

(cccxxvii) (cf. Frege, 1967, § 25)

(cccxxviii)

(cccxxix) *69.⊢∀b'(Fb'→∀a'(fb',a'→F(a')≡F2H1(f2)*

(cccxxx)

(cccxxxi) Afirmamos que, na linguagem de Frege, são utilizadas “tabelas” como recurso para se exprimir as substituições nas derivações. Como poderemos notar abaixo, com a utilização da Linguagem Lambda podemos dispensar essa referência adicional, tanto às substituições, quanto a que proposição elas ocorrerão. Se observarmos bem, notaremos que o próprio Cálculo Lambda incorpora a

proposição (68) ∀a'fa'≡b→b→fc, onde ocorrerão as abstrações. De acordo com a nossa proposta, apresentada no capítulo II, ela seria

exatamente a propriedade composta que receberia as substituições (abstrações), enfatizadas pelo operador lambda que liga as variáveis que serão posteriormente abstraídas. Ou seja, a designação de qual será a propriedade composta na qual ocorrerão as abstrações faz com que se torne dispensável se acrescentar, extrinsecamente ao cálculo, qual é a proposição que será utilizada nas derivações. Por outro lado, a utilização do operador lambda, que liga as variáveis a serem abstraídas, dispensa a utilização daquela que chamados de “tabela de substituições” (cf. apêndice p.133-134).

(cccxxxii)

(cccxxxiii) Se observarmos ainda, notaremos que uma derivação, como é o caso da (69) - (70), é composta de diversas etapas. Se não for omitida ou abreviada nenhuma delas, a derivação referida conta com 8 etapas lógicas. Isto é, 7 abstrações e a utilização do *modus ponens* entre o resultado das derivações e a proposição da qual partimos (69). Vejamos abaixo:

(cccxxxiv)

(cccxxxv) ***Abstrações sobre a proposição (68):***

(cccxxxvi)

(cccxxxvii) $\vdash \lambda.a'.b.c.fb'.fx.\forall a'fa' \equiv b \rightarrow b \rightarrow fcb',\ F1H2f1,x,\lambda.\Gamma.F\Gamma \rightarrow \forall a'f\Gamma,a' \rightarrow Fa'b',\lambda.\Gamma.F\Gamma \rightarrow \forall a'f\Gamma,a' \rightarrow Fa'x$

(cccxxxviii) Como salientamos, a fórmula ***λ.a'.b.c.fb'.fx.∀a'fa'≡b→b→fc*** designa a propriedade de nosso interesse e, ainda, as variáveis que estão ligadas ao Operador Lambda (a'.b.c.fb'.fx) indicam quais são as entidades que deverão ser abstraídas. Como observamos no capítulo II, as entidades que serão sucedâneas daquelas que estão ligadas ao operador são aquelas que vêm imediatamente à direita da propriedade (68): b', F1H2f1,x,λ.Γ.FΓ→∀a'fΓ,a'→Fa'b',λ.Γ.FΓ→∀a'fΓ,a'→Fa'x. É fácil de se observar que já nessa primeira linha da derivação em questão já conseguimos: (i) ordenar as abstrações e (ii) eliminar o uso da “tabela de substituições”. Feito isso, basta se proceder com as β-reduções que se comportarão semelhantemente às antigas substituições:

(cccxxxix)

(cccxl) $\vdash\lambda.b.c.fb'.fx.\forall b'fb'\equiv b\to b\to fcF1H2f1,x,\lambda.\Gamma.F\Gamma\to\forall a'f\Gamma,a'\to Fa'b',\lambda.\Gamma.F\Gamma\to\forall a'f\Gamma,a'\to Fa'x$

(cccxli)

(cccxlii) Na próxima etapa, a fórmula “F1H2f1”, que foi introduzida como o *definiens* na definição (69), entra agora na derivação sob a forma de um conteúdo judicativo, a saber, a “hereditariedade”, formulada em segunda ordem, o que exprimimos através dos índices. Assim,

“F1H2f1” entra no lugar de “b”:

(cccxliii) $\vdash\lambda.c.fb'.fx.\forall b'fb'\equiv F1H2f1\to F1H2f1\to fcx,\lambda.\Gamma.F\Gamma\to\forall a'f\Gamma,a'\to Fa'b',\lambda.\Gamma.F\Gamma\to\forall a'f\Gamma,a'\to Fa'x$

(cccxliv)

(cccxlv) As próximas β-reduções despertam particular interesse em nós, pois podemos observar que há nelas substituições funcionais (abstrações compostas), e esse foi um dos principais motivos de termos escolhido essa derivação “(69)-(70)”. Nessas etapas que seguem, as propriedades compostas: $\lambda.\Gamma.F\Gamma\rightarrow\forall a'f\Gamma,a'\rightarrow Fa'$ e $\lambda.\Gamma.F\Gamma\rightarrow\forall a'f\Gamma,a'\rightarrow Fa'$, receberão os argumentos de nível 0 b' e x, respectivamente. E em seguida, após saturadas, serão as sucedâneas das respectivas propriedades de nível 1: fb' e fx. Como poderemos notar a seguir, nas próximas linhas:

(cccxlvi)

(cccxlvii) $\vdash\lambda.fb'.fx.\forall b'fb'\equiv F1H2f1\rightarrow F1H2f1\rightarrow fx\lambda.\Gamma.F\Gamma\rightarrow\forall a'f\Gamma,a'\rightarrow Fa'b',\lambda.\Gamma.F\Gamma\rightarrow\forall a'f\Gamma,a'\rightarrow Fa'x$

(cccxlviii) $\vdash \lambda.fx.\forall b'\lambda.\Gamma.F\Gamma \to \forall a'f\Gamma,a' \to Fa'b' \equiv F1H2f1 \to F1H2f1 \to fx\lambda.\Gamma.F\Gamma \to \forall a'f\Gamma,a' \to Fa'x$

(cccxlix) $\vdash \forall b'\lambda.\Gamma.F\Gamma \to \forall a'f\Gamma,a' \to Fa'b' \equiv F1H2f1 \to F1H2f1 \to \lambda.\Gamma.F\Gamma \to \forall a'f\Gamma,a' \to Fa'x$

(cccl) $\vdash \forall b'Fb' \to \forall a'fb',a' \to Fa' \equiv F1H2f1 \to F1H2f1 \to \lambda.\Gamma.F\Gamma \to \forall a'f\Gamma,a' \to Fa'x$

(cccli)

(ccclii) Outro ponto importante de se observar é que nessas abstrações acima é onde o problema das ordens fica extremamente agudo. Estamos substituindo entidades de nível 1, não de nível 0, que designam objetos. Por isso a ordem das substituições torna-se fundamental. E o recurso aos vários alfabetos não parece fornecer uma adequada solução ao problema notacional que Frege enfrenta. Pois, como vimos, se não for dada aquela ordenação específica, não conseguimos atingir o nosso objetivo de se derivar a proposição (70) (cf. apêndice p.134). Entretanto, como a Linguagem Lambda nos possibilita explicitar a ordem das abstrações, chegamos facilmente a:

(cccliii)

(cccliv) $\vdash\forall b'Fb'\rightarrow\forall a'fb',a'\rightarrow Fa'\equiv F1H2f1\rightarrow F1H2f1\rightarrow Fx\rightarrow\forall a'fx,a'\rightarrow Fa'$

(ccclv)

(ccclvi) E, finalmente, utilizamos a proposição (69) para se chegar, por *modus ponens*, à proposição que gostaríamos, a (70):

(ccclvii) $69.\vdash\forall b'(Fb'\rightarrow\forall a'(fb',a'\rightarrow F(a')\equiv F1H2(f1)$ *Modus Ponens*

(ccclviii)

(ccclix) $70\vdash F1H2f1\rightarrow Fx\rightarrow\forall a'fx,a'\rightarrow Fa'$

(ccclx)

(ccclxi) Que pode ser lida como segue: *“Se uma propriedade F é hereditária no domínio f e se x tem a propriedade F, então*

qualquer a’ que seja o resultado da aplicação do procedimento f a x, terá a propriedade F.”

(ccclxii)

(ccclxiii) Frege em sua “tabela de substituições”, de fato, introduz a ordem correta a serem executadas as substituições, não há ambigüidade quanto a isso. Entretanto, não fica claro se a ordem pode ser permutada (o que vimos que não é possível), se poderíamos seguir outra seqüência de substituições, influindo, assim, no resultado final. Ou seja, não há nada de errado com as substituições de Frege, queremos apenas com o nosso trabalho mostrar que os resultados por ele apresentados podem ser melhor expressos pela utilização de uma linguagem mais sofisticada, como a Lambda, que não estava disponível na época do desenvolvimento da *Begriffsschrift*. E essa seria a principal contribuição da noção de “abstração” ao maquinário lógico da *Begriffsschrift*, o que, como apresentamos, não é a única, pois a abstração desempenha fundamental importância a concepção Fregeana acerca do caráter criativo da lógica.

(ccclxiv)

(ccclxv) Ao longo dessa dissertação, procuramos argumentar à favor da operação de abstração como uma operação lógica explícita. No segundo capítulo fornecemos alguns argumentos de caráter filosófico para a introdução dessa operação. Nesse terceiro capítulo procuramos mostrar como essa operação está ubiquamente envolvida em toda a parte mais audaciosa do projeto de Frege, a sua seção III da *Begriffsschrift,* sobre a fundamentação da aritmética.

(ccclxvi)

(ccclxvii)

(ccclxviii)

(ccclxix)

(ccclxx)

(ccclxxi)

(ccclxxii)

(ccclxxiii)

(ccclxxiv)

(ccclxxv)

(ccclxxvi) ## *4 – Conclusão*

(ccclxxvii) Na *Begriffsschrift,* Frege elaborou a sua escrita conceitual a fim de fundamentar a aritmética, onde se pretendia demonstrar que ela seria um desenvolvimento da lógica. Como sabemos, esse programa ficou conhecido na história da lógica como "logicismo" e contou com Russell e Frege como figuras principais.

(ccclxxviii)

(ccclxxix) Nesta dissertação abordamos especificamente a obra de Frege em que ele inaugura o seu trabalho de fundamentação, a *Begriffsschrift*, e que seria posteriormente concluído em 1903 com o *Grundgesetze der Arithmetik*. Antes mesmo da conclusão desta obra, como é conhecido, Frege recebe uma carta de Russell informando-lhe que um dos axiomas fundamentais daquele sistema apresentado era inconsistente (a lei V), o que faria com que Frege abandonasse de uma vez por todas o projeto de redução da aritmética à lógica. Entretanto, mesmo se tratando do esboço de um sistema inconsistente, a *Begriffsschrift* apresenta um conteúdo, de qualidade lógica e filosófica, dificilmente igualado. Os conteúdos de natureza filosófica seriam, posteriormente, melhor desenvolvidos em 1894, no *Grundlagen der Arithmetik*. Já os conteúdos de ordem lógica apresentados na *Begriffsschrift* são comumente expressos por opiniões semelhantes àquela que Van Heijenoort apresenta em sua introdução à *Begriffsschrift*:

(ccclxxx)

> (ccclxxxi) As contribuições fundamentais, entre outros pontos, são o cálculo proposicional vero-funcional, a análise da proposição em termos de função e argumento, ao invés de sujeito e predicado, a teoria da quantificação, um sistema de lógica no qual as derivações são levadas a cabo exclusivamente pela forma das expressões e uma definição lógica da noção de seqüência matemática. (Frege, 1967, p 01.)

(ccclxxxii)

(ccclxxxiii) Podemos dizer que a argumentação de nossa dissertação girou em torno dessa concepção padrão apresentada por Van Heijenoort.

Inicialmente, no capítulo I, fizemos uma breve introdução à *Begriffsschrift* e comentamos os pontos que mais

(ccclxxxiv)

(ccclxxxv) nos interessaram na referida lista. Tentamos fundamentalmente enfatizar os principais pontos em que Frege se distancia da tradição aristotélica e apresenta pela primeira vez na história da lógica um tratamento adequado às sentenças contendo múltiplas generalidades.

(ccclxxxvi)

(ccclxxxvii) Argumentamos que a “nova” distinção introduzida por Frege para se analisar as proposições em termos de função e argumento não é tão diferente da análise predicativa clássica. Pois, como vimos, essa nova análise apresentada pode ser interpretada como uma análise predicativa com uma concepção mais sutil de sujeito lógico, o qual seria interpretado como n-úplas ordenadas, o que viabilizaria uma análise proposicional adequada mesmo com a manutenção dos termos “sujeito” e “predicado”. Expusemos ainda no capítulo I a maneira como Frege trata as sentenças contendo generalidade e contrariamente do que ocorria em lógica, a expressão de generalidade passa a ser incorporada ao predicado lógico e não mais ao sujeito lógico das sentenças. Para isso Frege usa um notável argumentação fundada na idéia de que é a negação do predicado das sentenças é que produz a sua sentença contraditória, o que faria com que uma expressão como “todo” fosse, de fato, componente do predicado lógico das enunciados gerais.

(ccclxxxviii)

(ccclxxxix) O capítulo II funcionou como uma espécie de link entre filosofia e lógica, pois nele tentamos justificar a plausibilidade de nossa investida, ou seja, a de se interpretar o trabalho de Frege pela utilização do Cálculo Lambda de Alonzo Church. Para nós, a principal vantagem da utilização do Cálculo Lambda à nossa proposta interpretativa se deu pelo fato de haver, naquela linguagem, o operador de abstração que viabiliza a designação de propriedades, fazendo com que assim seja possível estabelecer predicações sobre entidades insaturadas, as propriedades. Vimos que justamente essa que julgamos ser a principal vantagem da utilização do Cálculo Lambda gera um ponto de tensão em nossa proposta, pois Frege se manifesta abertamente contra a possibilidade de referência a entidades intensionais em seu artigo *Sobre o Conceito e o Objeto*.

(cccxc)

(cccxci) Tentamos replicar que, apesar de concordamos com Frege de que a sentença *"o conceito cavalo não é um conceito"* seja verdadeira, deve haver, em alguma medida, predicações sobre predicações, pois, caso contrário, perderíamos noções fundamentais da filosofia de Frege, como a de *"número"* e a de *"existência",* por exemplo, visto que ambas são formuladas em segunda ordem e, portanto, necessitam de predicações sobre predicações para que possam ser estabelecidas. Para isso introduzimos uma distinção entre *se referir a* propriedades e *falar sobre* propriedades. Assim, o operador de abstração nos possibilitaria *falar sobre* ou *designar* propriedades, o que viria ao encontro de nossa proposta argumentativa, sem que fosse preciso para isso contrariar a própria perspectiva filosófica de Frege.

(cccxcii)

(cccxciii) Por fim, no capítulo III, introduzimos um tipo distinto de proposição do até então abordado, as *definições*. Para Frege estas definições não são juízos e, conseqüentemente, não são juízos sintéticos, contudo se transformam imediatamente em juízos, mas, analíticos, e não sintéticos, como queria Kant. Argumentamos que o principal ponto de discordância entre os dois filósofos se dá pela noção distinta que ambos tinham acerca da noção de "conceito de formação". Na opinião de Frege a lógica poderia, de fato, ser criativa no sentido em que ela seria capaz de desenvolver conseqüências completamente novas a partir das *definições*. Pois os resultados das derivações nem sempre diriam respeito a extensões de conceitos previamente dados, como acreditavam os lógicos de tradição aristotélica. Tentamos mostrar, assim, que o caráter criativo da lógica está intimamente associado à natureza analítica dos enunciados presentes em aritmética.

(cccxciv)

(cccxcv) Expusemos também, no capítulo III a maneira como são feitas as derivações na *Begriffsschrift*, apresentamos a estrutura geral das derivações com a finalidade de se apresentar as derivações originalmente feitas por Frege e, posteriormente, contrapô-las com aquelas notadas em Linguagem Lambda. Feito isso, finalmente apresentamos o resultado lógico mais importante de nosso trabalho, que foi a interpretação de algumas derivações da Begriffsschrift através da utilização Cálculo Lambda. Quisemos com isso mostrar que o operador de abstração proporciona uma maior explicitação dos conteúdos lógicos envolvidos nas derivações de Frege e, também, como sua utilização torna mais clara a fixação de conteúdos lógicos relevantes como, por exemplo, em um contexto de definição.

(cccxcvi)

(cccxcvii)

(cccxcviii)

(cccxcix)

(cd)

(cdi)

(cdii)

(cdiii)

(cdiv) 5 – Apêndice

(cdv)

(cdvi) Derivações notadas em Cálculo Lambda da proposição (70) à (74).

(cdvii)

(cdviii) *70. ⊢F1H2(f1)→(Fx→∀áfx,á→Fá*

(cdix)

(cdx)

(cdxi) ***Abstrações sobre a proposição (19):***

(cdxii)

(cdxiii) $\vdash \lambda.b.c.d.a.d \to c \to b \to b \to a \to d \to c \to a(\forall áfx,á \to Fá,Fx,F1H2(f1),fx,y \to Fy)$

(cdxiv) $\vdash \lambda.c.d.a.d \to c \to \forall áfx,á \to Fá \to \forall áfx,á \to Fá \to a \to d \to c \to a(Fx,F1H2(f1),fx,y \to Fy)$

(cdxv) $\vdash \lambda.d.a.d \to Fx \to \forall áfx,á \to Fá \to \forall áfx,á \to Fá \to a \to d \to Fx \to a(F1H2(f1),fx,y \to Fy)$

(cdxvi) $\vdash \lambda.a.F1H2(f1) \to Fx \to \forall áfx,á \to Fá \to \forall áfx,á \to Fá \to a \to F2H1(f2) \to Fx \to a(fx,y \to Fy)$

(cdxvii) $\vdash F2H1(f2) \to Fx \to \forall áfx,á \to Fá \to \forall áfx,á \to Fá \to fx,y \to Fy \to F1H2(f1) \to Fx \to fx,y \to Fy$

(cdxviii) $\vdash F1H2(f1) \to F(x) \to \forall áfx,á \to Fá \to \forall áfx,á \to Fá \to fx,y \to Fy \to F1H2(f1) \to F(x) \to fx,y \to Fy$

(cdxix)

(cdxx) ***70. F1H2(f1)→(Fx→∀áfx,á→FáModus Ponens***

(cdxxi)

(cdxxii) ***71. ⊢∀áfx,á→Fá→fx,y→Fy→F1H2(f1)→F(x)→fx,y→Fy***

(cdxxiii)

(cdxxiv) ***Abstrações sobre a proposição (58):***

(cdxxv)

(cdxxvi) *⊢[λ.c.fa.fy.∀a'fa→fc] (y,λ.Γ.fx,Γ→FΓ](a',λ.Γ.fx,Γ→FΓ](y* (cdxxvii) $\vdash[\lambda.fa.fy.\forall a'fa\rightarrow fy]\ (\lambda.\Gamma.fx,\Gamma\rightarrow F\Gamma](a',\lambda.\Gamma.fx,\Gamma\rightarrow F\Gamma](y$

(cdxxviii) $\vdash[\lambda.fy.\forall a'\lambda.\Gamma.fx,\Gamma\rightarrow F\Gamma](a'\rightarrow fy]\ (\lambda.\Gamma.fx,\Gamma\rightarrow F\Gamma](y$

(cdxxix) $\vdash\forall a'\lambda.\Gamma.fx,\Gamma\rightarrow F\Gamma](a'\rightarrow\lambda.\Gamma.fx,\Gamma\rightarrow F\Gamma](y$

(cdxxx) $\vdash\forall a'fx,a'\rightarrow Fa'\rightarrow\lambda.\Gamma.fx,\Gamma\rightarrow F\Gamma](y$

(cdxxxi) $\vdash\forall a'fx,a'\rightarrow Fa'\rightarrow fx,y\rightarrow Fy$

(cdxxxii)

(cdxxxiii) ***71.*** *$\vdash$∀áfx,á→Fá→fx,y→Fy→F1H2(f1)→Fx→fx,y→Fy Modus Ponens*

(cdxxxiv)

(cdxxxv) *72. $\vdash$F1H2(f1)→Fx→fx,y→Fy*

(cdxxxvi)

(cdxxxvii) *Se a propriedade F é hereditária na f-seqüência e se x tem a propriedade F e y é um resultado de uma aplicação do procedimento F a x, então y tem a propriedade F.*

(cdxxxviii)

(cdxxxix) *72.* $\vdash F1H2(f1)\rightarrow Fx\rightarrow fx,y\rightarrow Fy$

(cdxl)

(cdxli) ***Abstrações sobre a proposição (02):***

(cdxlii)

(cdxliii) $\vdash\lambda.a.b.c.c\rightarrow b\rightarrow a\rightarrow c\rightarrow b\rightarrow c\rightarrow a(fx,y\rightarrow Fy,Fx,F1H2(f1))$

(cdxliv) $\vdash\lambda.b.c.c\rightarrow b\rightarrow(fx,y\rightarrow Fy\rightarrow c\rightarrow b\rightarrow c\rightarrow(fx,y\rightarrow Fy(Fx,F1H2(f1))$

(cdxlv) $\vdash \lambda.c.c \to Fx \to (fx,y \to Fy \to c \to Fx \to c \to (fx,y \to Fy(F1H2(f1))$

(cdxlvi) $\vdash F1H2(f1) \to Fx \to (fx,y \to Fy \to F1H2(f1) \to Fx \to c \to (fx,y \to Fy$

(cdxlvii)

(cdxlviii) ***72. $\vdash F1H2(f1) \to Fx \to fx,y \to Fy$ Modus Ponens***

(cdxlix)

(cdl) ***73. $\vdash F1H2(f1) \to Fx \to F1H2(f1) \to fx,y \to Fy$***

(cdli)

(cdlii) ***72. ⊢F1H2(f1)→Fx→fx,y→Fy***

(cdliii)

(cdliv) ***Abstrações sobre a proposição (08):***

(cdlv)

(cdlvi) *⊢λ.a.b.d.d→b→a→b→d→a(fx,y→Fy,Fx,F1H2(f1))*

(cdlvii) *⊢λ.b.d.d→b→fx,y→Fy→b→d→fx,y→Fy(Fx,F1H2(f1))* (cdlviii) $\vdash \lambda.d.d \to Fx \to fx,y \to Fy \to Fx \to d \to fx,y \to Fy(F1H2(f1))$

(cdlix) $\vdash F1H2(f1) \to Fx \to fx,y \to Fy \to Fx \to F1H2(f1) \to fx,y \to Fy$

(cdlx)

(cdlxi) ***72. $\vdash F1H2(f1) \to Fx \to fx,y \to Fy$ Modus Ponens***

(cdlxii)

(cdlxiii) ***74.$\vdash Fx \to F1H2(f1) \to fx,y \to Fy$***

(cdlxiv)

(cdlxv) *Se x tem uma propriedade F que é hereditária na f-seqüência, então qualquer resultado de uma aplicação do procedimento f a x*

tem a propriedade

(cdlxvi) Proposições utilizadas por Frege na terceira seção da *Begriffsschrift* (a partir do §69) para derivar novas proposições:

(cdlxvii)

(cdlxviii) Proposição 02: c→b→a→c→b→c→a

(cdlxix) Proposição 05: b→a→c→b→c→a

(cdlxx) Proposição 07: b→a→d→c→b→d→c→a

(cdlxxi) Proposição 08: d→b→a→b→d→a

(cdlxxii) Proposição 12: d→c→b→a→d→b→c→a

(cdlxxiii) Proposição 15: e→d→c→b→a→b→e→d→c→a

(cdlxxiv) Proposição 17:d→c→b→a→c→b→d→a

(cdlxxv) Proposição 18: c→b→a→d→c→b→d→a

(cdlxxvi) Proposição 19: d →c→b→b→a→d→c→a

(cdlxxvii) Proposição 36: a→(∼a→b)

(cdlxxviii) Proposição 52: c≡d→fc→fd

(cdlxxix) Proposição 58: ∀a(fa→fc)

(cdlxxx) Proposição 68: $\forall a f a \equiv b \rightarrow (b \rightarrow f c)$

(cdlxxxi) Proposição 73: $F1H2(f1) \rightarrow Fx \rightarrow F1H2(f1) \rightarrow fx,y \rightarrow Fy$

(cdlxxxii) Proposição 74: $Fx \rightarrow F1H2(f1) \rightarrow fx,y \rightarrow Fy$

(cdlxxxiii) Proposição 75: $(\forall b F b \rightarrow \forall a f b,a \rightarrow Fa) \rightarrow F1H2(f1)$

(cdlxxxiv) Proposição 84: F1H2(f1)→Fx→A<x,y>→Fy

(cdlxxxv) Proposição 88: fy,z→(A<x,y>→∀afx,a→Fa→F1H2(f1)→Fz

(cdlxxxvi) Proposição 90: c→(∀F((F1H2(f1)→∀afx,a→Fa→Fy→c→A<x,y>

(cdlxxxvii)

(cdlxxxviii)

(cdlxxxix)

(cdxc)

(cdxci) **Proposição 69: ⊢∀b'(Fb'→∀a'(fb',a'→F(a')≡F2H1(f2) (Ordenada)**

(cdxcii) Substituições em (68) ∀a'fa'≡b→b→fc:

(cdxciii)

(cdx

civ) (cdx (cdxcvi) b'

1

a'

(cdx

cvii) (cdx (cdxcix) FΓ→∀a'fΓ,a'→Fa'

2

cviii

) f

(

Γ

)

(d)

3 (di) b (dii)F1H2(f1)

(diii)

4 (div (dv)x

) c

(dvi)

(dvii) 1) ⊢∀b'fb'≡b→b→fc

(dviii) 2) ⊢∀b'Fb'→∀a'fb',a'→Fa'≡b→b→Fc→∀a'fc,a'→Fa' (dix) 3) $\vdash \forall b'Fb' \rightarrow \forall a'fb',a' \rightarrow Fa' \equiv F1H2(f1) \rightarrow F1H2(f1) \rightarrow Fc \rightarrow \forall a'fc,a' \rightarrow Fa'$

(dx) 4) $\vdash \forall b'Fb' \rightarrow \forall a'fb',a' \rightarrow Fa' \equiv F1H2(f1) \rightarrow F1H2(f1) \rightarrow Fx \rightarrow \forall a'fx,a' \rightarrow Fa'$

(dxi) 5) (69) $\vdash \forall b'(Fb' \rightarrow \forall a'(fb',a' \rightarrow F(a') \equiv F1H2(f1)$ *modus ponens* (dxii) 6) (70) $\vdash F1H2(f1) \rightarrow Fx \rightarrow \forall a' fx,a' \rightarrow Fa'$

(dxiii)

(dxiv) **Proposição 69: $\vdash \forall b'(Fb' \rightarrow \forall a'(fb',a' \rightarrow F(a') \equiv F2H1(f2)$ (Desordenada)**

(dxv) Substituições em (68) $\forall a' fa' \equiv b \rightarrow b \rightarrow fc$:

(dxvi)

(dxv

ii) (dx (dxix) FΓ→∀a'fΓ,a'→Fa'

1

viii) f

(

Γ

)

(dxx

) (dx (dxxii) b'

2

xi) a

'

(dxx

iii) (dx (dxxv) F1H2(f1)

3

xiv) b

(dxx

vi) (dx (dxxviii) x

4

c

(dxxix)

(dxxx) 1) $\vdash \forall a' Fa' \rightarrow \forall a' fa', a' \rightarrow Fa' \equiv b \rightarrow b \rightarrow Fc \rightarrow \forall a' fc, a' \rightarrow Fa'$

(dxxxi) 2) $\vdash \forall b' Fb' \rightarrow \forall b fb', b' \rightarrow Fb' \equiv b \rightarrow b \rightarrow Fc \rightarrow \forall b' fc, b' \rightarrow Fb'$

(dxxxii) 3) $\vdash \forall b' Fb' \rightarrow \forall b' fb', b' \rightarrow Fb' \equiv F1H2(f1) \rightarrow FH(f) \rightarrow Fc \rightarrow \forall b' fc, b' \rightarrow Fb'$

(dxxxiii) *4)* $\vdash \forall b' Fb' \rightarrow \forall b' fb',b' \rightarrow Fb' \equiv F1H2(f1) \rightarrow F1H2(f1) \rightarrow Fx \rightarrow \forall b' fx,b' \rightarrow Fb'$

(dxxxiv)

(dxxxv)

(dxxxvi)

(dxxxvii)

(dxxxviii)

(dxxxix)

(dxl) Bibliografia

(dxli)

(dxlii) **Biraben, Rodolfo C. Ertola. 1996.** *Tese de Church - Algumas Questões Histórico-Conceituais.* Campinas : Editora do CLE, 1996.

(dxliii) **Boolos, George. 1995.** Reading the Begriffsschrift. [A. do livro] William Demopoulos. *Frege's Philosophy of Mathematics.* Cambridge : Harvard University Press, 1995.

(dxliv) **Carnielli, Walter e Epstein, Richard. 2005.** *Computabilidade Funções Computáveis e Os Fundamentos da Matemática.* São Paulo : Editora da Unesp, 2005.

(dxlv) **Chateaubriand, Oswaldo. 2001.** *Logical Forms Part I.* Campinas : Editora do CLE, 2001.

(dxlvi) **Church, Alonzo. 1932.** A Set of Postulates for the Foundation of Logic. *The Annals of Mathematics.* 1932, Vol. 33.

(dxlvii) **—. 1976.** Comparison of Russell's Resolution of the Semantical Antinomies With That of Tarski. *The Journal of Symbolic Logic.* 1976, Vol. 41.

(dxlviii) **—. 1956.** *Introduction Mathematical Logic.* Princeton : Princeton University Press, 1956.

(dxlix) **—. 1951.** The Need for Abstract Entities. *American Academy of Arts and Sciences Proceedings.* 1951.

(dl) **Dummett, Michael. 1981.** *Frege Philosophy of Language.* Cambridge : Harvard Univerty Press, 1981.

(dli) **—. 1993.** *Origins of Analytical Philosophy.* Cambridge : Harvard Universit Press, 1993.

(dlii) **Frege, Gottlob. 1964.** *Basic Laws of Arithmetic.* Los Angeles : University of California Press, 1964.

(dliii) **—. 1967.** Begriffsschrift. [A. do livro] Van Heijenoort. *From Frege to Gödel.* Cambridge : Harvard Universit Press, 1967.

(dliv) **—. 1979.** Comments on Sense and Meaning. *Frege: Posthumous Writings.* Chicago : Chicago University Press, 1979.

(dlv) **—. 1978.** Função e Conceito. [A. do livro] Paulo Alcoforado. *Lógica e Filosofia da Linguagem.* Rio de Janeiro : Editora Cultrix, 1978.

(dlvi) **—. 2002.** O Pensamento. *Investigações Lógicas.* Porto Alegre : EDIPUCRS, 2002.

(dlvii) **—. 2007.** On the Purpose of the Begriffsschrift. *Australasian Journal of Philosophy.* 2007, Vol. 46.

(dlviii) **—. 1989.** Os Fundamentos da Aritmética. [A. do livro] Luiz Henrique dos Santos. *Os Pensadores - Volume Pierce e Frege.* São Paulo : Editora Nova Cultural, 1989.

(dlix) **—. 1978.** Sobre o Conceito e o Objeto. [A. do livro] Paulo Alcoforado. *Lógica e Filosofia da Linguagem.* Rio de Janeiro : Editora Cultrix, 1978.

(dlx) **—. 1978.** Sobre o Sentido e a Referência. [A. do livro] Paulo Alcoforado. *Lógica e Filosofia da Linguagem.* Rio de Janeiro : Editora Cultrix, 1978.

(dlxi) **Haack, Susan. 1998.** *Filosofia das Lógicas.* São Paulo : Editora da Unesp, 1998.

(dlxii) **Hindley, Felice Cardone and Roger. 2006.** History of Lambda-calculus and. *Handbook of the History of Logic.* s.l. : Elsevier, 2006.

(dlxiii) **Kant, Immanuel. 2001.** *Crítica da Razão Pura.* Lisboa : Editora da Fundação Calouste Gulbenkian, 2001.

(dlxiv) **Kneale, William e Kneale, Martha.** *O Desenvolvimento da Lógica.* Lisboa : Editora da Fundação Calouste Gulbenkian.

(dlxv) **Mendelsohn, Richard L. 2005.** *The Philosophy of Frege.* Nova York : Cambridge University Press, 2005.

(dlxvi) **Quine, Willard Van Orman. 1995.** *Selected Logic Papers.* Cambridge : Harvard Universit Press, 1995.

(dlxvii) **Rosser, J. Barkley. 1982.** Highlights of the History of the Lambda-Calculus. *Annals of the History of Computing.* 1982.

(dlxviii) **Ruffino, Marco. 2000.** Extensions as Representative Objectis in Frege's. *Erkenntnis.* 2000, Vol. 52.

(dlxix) **Sommaruga, Giovanni. 2000.** *History an Philosophy of Constructive Type Theory.* Norwell : Kluwer Academic Publisher, 2000.

(dlxx) **Turing, Alan. 1936.** On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. *Proceedings of the London Mathematical Society.* 1936, Vol. 42.

(dlxxi)

(dlxxii)

(dlxxiii)

(dlxxiv)

(dlxxv)

(dlxxvi)

(dlxxvii)

(dlxxviii)

(dlxxix)

(dlxxx)

(dlxxxi)

(dlxxxii)

(dlxxxiii)

(dlxxxiv)

(dlxxxv)

(dlxxxvi)

(dlxxxvii)

(dlxxxviii)

(dlxxxix)

(dxc)

(dxci)

(dxcii)

(dxciii)

(dxciv)

(dxcv)

(dxcvi)

(dxcvii)

(dxcviii)

(dxcix)