



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE FÍSICA

Simulação Óptica de uma Partícula Livre Quântica Relativística

Thais de Lima Silva

Goiânia
Março de 2016

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1 **1. Identificação do material bibliográfico:** **Dissertação** **Tese**

1 **2. Identificação da Tese ou Dissertação**

2


Nome completo do autor: Thais de Lima Silva

Título do trabalho: Simulação Óptica de uma Partícula Livre Quântica Relativística

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF da tese ou dissertação.



Assinatura do (a) autor (a)

Data: 11 / 08 / 2016

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE FÍSICA

Simulação Óptica de uma Partícula Livre Quântica Relativística

Thais de Lima Silva

ORIENTADOR: Ardiley Torres Avelar

*Dissertação apresentada como parte dos requisitos
para obtenção do título de mestre em Física pelo
programa de pós-graduação do Instituto de Física
da Universidade Federal de Goiás.*

Goiânia
Março de 2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Silva, Thais de Lima
Simulação Óptica de uma Partícula Livre Quântica Relativística
[manuscrito] / Thais de Lima Silva. - 2016.
vi, 92 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Ardiley Torres Avelar.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Física (IF), Programa de Pós-Graduação em Física, Goiânia, 2016.
Bibliografia. Apêndice.

1. Zitterbewegung. 2. Óptica paraxial. 3. Simulação Clássica. I. Avelar, Ardiley Torres, orient. II. Título.

CDU 535



Universidade Federal de Goiás
Instituto de Física
Programa de Pós-Graduação em Física

Ata N^o 163 de defesa de dissertação
de Thaís de Lima Silva para obtenção
do título de Mestre em Física.

Aos 22 dias do mês de março de 2016, às 14h00min, no Miniauditório do Instituto de Física, reuniu-se a Banca Examinadora indicada pela Coordenadoria do Programa de Pós-Graduação, aprovada pelo Conselho Diretor e designada pela Diretoria do Instituto de Física da Universidade Federal de Goiás, composta pelo **Prof. Dr. Ardiley Torres Avelar** (orientador – IF/UFG), **Prof. Dr. Fabricio Toscano** (IF/UFRJ) e **Prof. Dr. Stephen Patrick Walborn** (IF/UFRJ), para julgar a dissertação de mestrado de **Thaís de Lima Silva**, intitulada: “**Simulação óptica de uma partícula livre quântica relativística**”. O Presidente abriu os trabalhos agradecendo a presença dos membros da Banca Examinadora e concedeu a palavra a Thaís de Lima Silva, que expôs detalhadamente seu trabalho. Em seguida, os membros da Banca fizeram suas considerações e procederam à arguição da candidata. Concluída essa etapa, a Banca, em sessão fechada, deu prosseguimento ao julgamento do trabalho, atribuindo os seguintes conceitos:

Prof. Dr. Ardiley Torres Avelar (orientador)

APROVADA

Prof. Dr. Fabricio Toscano (IF/UFRJ)

Aprovada

Prof. Dr. Stephen Patrick Walborn (IF/UFRJ)

Aprovada

Novamente em sessão aberta, o presidente da Banca anunciou o resultado final do julgamento, declarando a candidata Thaís de Lima Silva APROVADA pela Banca Examinadora. Nada mais havendo a tratar, a sessão foi encerrada e lavrou-se a presente ata que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora.

Goiânia, 22 de março de 2016.

Prof. Dr. Ardiley Torres Avelar (Orientador)

Prof. Dr. Fabricio Toscano (IF/UFRJ)

Prof. Dr. Stephen Patrick Walborn (IF/UFRJ)

Depois de estar cansado de procurar

Aprendi a encontrar.

Depois que um vento se opôs a mim

Navego com todos os ventos.

Friedrich Nietzsche, “A gaia ciência”

AGRADECIMENTOS

É chegado o fim de mais uma etapa de minha vida e muitos contribuíram para o sucesso ou insucesso dessa investida. Primeiramente, gostaria de agradecer a meus familiares, principalmente a meus pais por terem desempenhado tão bem a difícil tarefa de minha criação. Agradeço ao meu querido amigo e esposo Jônatas por tantos motivos que sequer cabe citá-los, logo, obrigada por existir a meu lado.

Agradeço também a todos os professores do Instituto de Física da UFG que participaram direta ou indiretamente da minha formação desde a graduação. Foram seis anos andando pelo corredor de piso verde do IF... Vocês, professores e colegas, muito contribuíram não só para minha formação profissional, mas também para a pessoa que me tornei. Agradeço especialmente ao professor Caparica, que foi determinante mesmo para minha escolha profissional, ao meu orientador, professor Ardiley, sempre tão empolgado e animador, e ao professor Wesley, pela ajuda com os problemas computacionais.

Certamente, não fosse o momento do cafezinho, não haveria trabalho algum, por isso, muito obrigada aos colegas Vanuildo, Hugo, Thiago e Idney. Devo agradecer também ao inquilino de minha sala, Emile, pela ajuda e discussões e a meus dois grandes amigos Play Mobil e Leandro, em especial ao Leandro pela paciência e disposição em revisar este texto, suas sugestões foram valiosas.

Por fim, agradeço à CAPES e ao CNPq pelo financiamento.

RESUMO

Dentre as primeiras tentativas de unificação da teoria quântica com a teoria de relatividade especial aquela que se destacou foi a teoria do elétron de Dirac. Entre seus sucessos está o cálculo com grande acurácia do espectro do átomo de hidrogênio e a predição da existência da antipartícula do elétron. Porém, apesar de seus bons resultados, alguns problemas surgem nessa teoria. A existência de estados com energia cinética negativa, ao mesmo tempo que permite a descoberta de antipartículas, leva a problemas como o movimento trêmulo *zitterbewegung* de um elétron livre. Não se sabe se esse movimento é real ou apenas uma inexatidão da teoria em descrever a realidade. Neste trabalho apresentamos uma proposta de emulação da dinâmica de um elétron de Dirac e, portanto, de *zitterbewegung*, por meio da transformação de um feixe luminoso paraxial. A mesma transformação efetuada pelo operador de evolução temporal de Dirac é implementada sobre o perfil transversal do feixe fazendo-o passar por placas de onda e imprimindo fases com um modulador espacial de luz. A proposta inclui os casos de uma e duas dimensões espaciais e, por emular a posição da partícula na posição sobre o plano transversal ao feixe, dispomos somente de dois graus de liberdade, dificultando a simulação no caso de o espaço ser tridimensional. Entretanto, mostramos que ainda assim é possível simular um caso particular nessa situação. Nossa simulação apresenta algumas vantagens sobre simulações implementadas anteriormente, são elas: não requer a construção de dispositivos para esse fim específico; os parâmetros ajustáveis estão presentes nas fases do modulador e podem ser variados arbitrariamente; permite a comparação entre o operador posição padrão e o operador posição média; permite a simulação nos casos de espaço bi e tridimensional.

Palavras-chave: Zitterbewegung; óptica paraxial; simulação clássica.

ABSTRACT

Among the first attempts towards the unification of quantum and special relativity theories that which more highlighted was the Dirac's electron theory. Amongst its achievements is the accurated calculation of the hydrogen spectrum and the antiparticles prediction. Even though it provides good results, some difficulties arise in this theory such as the existence of negative energy states for free particles. At the same time that it allows for the antiparticle discovery, it leads to questions like the trembling motion of a free electron (*zitterbewegung*). It is not a consensus whether this motion is real or just a theoretical failure in describing the reality. In this work we present a proposal to simulate the Dirac electron dynamics and, therefore, *zitterbewegung*, by means of a transformation of a paraxial light beam. The same transformation as is carried out on the vector state by the Dirac's evolution operator is implemented in the transverse beam profile using wave plates and spatial light modulator. The proposal includes the cases of one and two spatial dimensions by simulating the spatial degrees of freedom into the transverse coordinates of the light beam, which offers a difficulty in simulating the three dimensional dynamics in general case. However, we show that it is possible for particular initial states. Our simulation presents some advantages over previously ones, namely: it does not require the construction of specifically designed devices; the adjustable parameters are present on phases printed by the modulator and can be arbitrarily changed; it permits the measurement of the mean as well as the standard position operators; it permits the simulation in two and three spatial dimensions.

Keywords: Zitterbewegung; paraxial optics; classical simulation.

SUMÁRIO

Introdução	1
1. Equação de Dirac e Zitterbewegung	6
1.1. Relatividade Especial	7
1.2. Mecânica Quântica não Relativística	11
1.3. A equação de Dirac	12
1.3.1. Equação de continuidade	16
1.3.2. Autovalores de energia	16
1.3.3. Representação de momento	18
1.4. Valores médios e <i>zitterbewegung</i>	21
1.4.1. Representação de Heisenberg	21
1.4.2. Evolução temporal do operador posição	23
1.5. Transformação de Foldy-Wouthuysen	26
1.6. Partícula restrita a uma dimensão espacial	32
1.7. Partícula restrita a duas dimensões espaciais	34
1.8. Discussões acerca de <i>zitterbewegung</i>	35
2. Óptica paraxial e dispositivos ópticos	39
2.1. Aproximação paraxial	40
2.2. Transformada de Fourier óptica	42
2.3. Placas de onda	46
2.4. Modulador espacial de luz	50

3. Simulação óptica de partícula quântica relativística	54
3.1. Partícula em espaço unidimensional	55
3.1.1. Evolução temporal do estado de uma partícula em $(\mathbf{1} + \mathbf{1})$ dimensões	55
3.1.2. Analogia óptica	57
3.1.3. Simulação numérica	61
3.2. Partícula em espaço bidimensional	64
3.2.1. Evolução temporal do estado de uma partícula em $(\mathbf{1} + \mathbf{2})$ dimensões	65
3.2.2. Analogia óptica	67
3.3. Partícula em espaço tridimensional: um caso particular	72
Considerações finais	76
A. Matrizes de Dirac	79
B. Operador posição na representação de FW	82
B.1. Comutador do operador posição média com o hamiltoniano de Dirac .	85
Referências Bibliográficas	87

INTRODUÇÃO

As primeiras tentativas de unificação da teoria quântica com a teoria especial da relatividade datam do final da década de 1920 [1]. Mais recentemente, com o advento da teoria de informação quântica relativística, no fim da década de 1990, as investigações teóricas acerca de influências da relatividade tanto especial quanto geral na teoria quântica se intensificaram [2]. Nesse contexto, um dos problemas teóricos recorrentes é o da localização e definição de spin, que até o momento não encontraram consenso. A pergunta pode ser colocada como: sendo o qubit o objeto básico da teoria de informação, como definir de forma consistente sua localização no espaço [3]? A resposta a essa pergunta passa pela definição de um operador posição, uma vez que, conforme mencionaremos, o operador posição convencional apresenta um comportamento inesperado chamado *zitterbewegung*.

A mecânica quântica estabelecida em 1925 com o formalismo matricial de Jordan, Born e Heisenberg [4] e em 1926 com a mecânica ondulatória de Schrödinger [5] foi capaz de descrever com boa concordância diversos fenômenos não explicados pela chamada física clássica, como o espectro de emissão dos elementos. No entanto, foi preciso postular a existência de uma propriedade adicional das partículas, a saber, o spin, para dar conta da duplicidade dos estados eletrônicos. Essa é apenas uma das motivações de Dirac para a criação de sua teoria. Sobre isso Dirac escreveu “*The question remains as to why Nature should have chosen this particular model for the electron instead of being satisfied with the point-charge*” [6].

Para além da dificuldade em lidar com o spin das partículas de maneira natural, está o fato de que a equação básica da mecânica quântica, a equação de Schrödinger, não está em concordância com a relatividade de Einstein. Isto é, a equação de Schrödinger não é covariante sob transformações de Lorentz. Isso foi percebido por Schrödinger que, independentemente de Klein e Gordon, ainda em

1926, formulou uma teoria quântica relativística baseada na equação Klein-Gordon [7]. Entretanto, essa teoria ainda não abrigava um tratamento natural do spin, além de não permitir a definição de uma densidade de probabilidade positiva definida [1].

Pensando em sanar essas dificuldades e ainda manter o formato da equação de Schrödinger, Dirac construiu em 1928 a equação para a partícula livre que leva seu nome [6]. A equação de Dirac: satisfaz a relação energia-momento relativística; é linear no tempo e no espaço; permite a definição de uma densidade de probabilidade positiva definida; e por requerer que o vetor de estado possua ao menos quatro componentes, incorpora o spin de maneira natural. O primeiro problema que surge nessa teoria é que o hamiltoniano de Dirac possui autoenergias negativas que não podem simplesmente ser ignoradas. Fato esse que é contornado por uma interpretação inusitada, que deu origem a uma nova e vasta área da Física, nomeadamente, a física de partículas: os estados de energia negativa representam antipartículas. Ademais, a equação de Dirac prevê efeitos inesperados como o paradoxo de Klein [8] e o *zitterbewegung* [9]. O paradoxo de Klein diz respeito a um súbito renascimento da probabilidade de transmissão de uma partícula através de uma barreira de potencial, quando o potencial é aumentado para além de um valor crítico.

A palavra *zitterbewegung* (ZB) tem origem alemã e significa movimento trêmulo. O termo foi inicialmente utilizado por Schrödinger e refere-se ao movimento oscilatório de um elétron livre. Ao calcular a evolução temporal do operador posição de um elétron livre, além dos termos previstos para uma partícula livre (um termo constante e outro linear no tempo), surge um termo de ZB que oscila temporalmente. Esse termo contraintuitivo é resultado da interferência entre estados com energia positiva e negativa e, dada a interpretação dos estados com energia negativa como estados de antipartículas, é controverso se é possível interpretar o ZB como movimento real do elétron, tendo em conta que esse efeito aparece como uma interferência multipartícula em um problema que inicialmente trata de uma única partícula [1]. Dentre os vários pontos de vista sobre o assunto, é defendido que esse movimento não teria lugar se uma teoria quântica de campos empregando as soluções da equação de Dirac como base fosse utilizada [10] ou, ainda, que o efeito mencionado decorre de uma má definição dos operadores posição e velocidade [11]. A perspectiva de redefinição do operador posição, traz consigo questões profundas sobre a possibilidade de existência de estados localizados espacialmente e sobre a violação de causalidade, no sentido de que pacotes de onda localizados poderiam se propagar com velocidades superluminais [12, 13]. Apesar de controverso, o ZB che-

gou a ser utilizado por Czachor na explicação de resultados relativos ao experimento de Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm com partículas relativísticas [14].

De todo modo, as discussões acerca da realidade do *ZB* não podem ser testadas diretamente em elétrons, já que a amplitude prevista desse movimento oscilatório é da ordem de $10^{-12}m$ e sua frequência da ordem de $10^{21}Hz$. Como forma de contornar essa dificuldade tem-se recorrido a simulações por meio de outros sistemas físicos. Vários protocolos foram apresentados nos últimos anos utilizando, por exemplo, grafeno e outros sistemas bidimensionais [15, 16], semicondutores [17], condensados de Bose-Einstein [18], íons armadilhados [19], sistemas fotônicos [20, 21], etc. Todos esses esforços culminaram em uma realização experimental de *ZB* utilizando como simulador um íon armadilhado [22], seguida de outras duas realizações utilizando redes fotônicas [23] e condensados de Bose-Einstein [24]. Entretanto, as três realizações foram capazes de simular a equação de Dirac e, portanto, *ZB*, de uma partícula restrita a somente uma dimensão espacial. Em todos os casos, a simulação se baseou na construção de circunstâncias muito especiais em que a função de onda (ou análogo à função de onda em [23]) obedece a uma equação formalmente idêntica à equação de Dirac do elétron livre. Nos referidos trabalhos, os sistemas empregados possuem parâmetros ajustáveis que foram regulados de maneira a tornar a escala de *ZB* mensurável, possibilitando a análise de como o *ZB* se manifesta nos diversos regimes de velocidades: não relativístico, relativístico e ultrarrelativístico. As simulações supõem de antemão que o elétron seja descrito corretamente pela equação de Dirac e nada dizem, portanto, sobre a existência ou não de *ZB*. Contudo, são úteis para que possamos inferir, caso o elétron seja bem descrito pela referida teoria, quais os efeitos ocorreriam e como ocorreriam. Além dessa motivação, os protocolos de informação quântica relativística, em geral, esbarram na impossibilidade de se atingir velocidades próximas à da luz e, logo, a única maneira que foi encontrada para que eles sejam implementados é através de simulação em outros sistemas que obedeçam à mesma dinâmica [25, 26, 27].

Por outro lado, é fato bem estabelecido que a aproximação paraxial da equação de Helmholtz é análoga à equação de Schrödinger não relativística para potencial nulo [28, 29] ou, sob outra perspectiva, para o potencial do oscilador harmônico [30]. A parte espacial da solução da equação de onda, a qual é satisfeita pelos campos de uma onda eletromagnética no espaço livre, satisfaz a equação de Helmholtz. Logo, a propagação de um feixe eletromagnético paraxial é análoga à evolução temporal de um estado pela equação de Schrödinger. Essa analogia entre óptica e mecânica

quântica foi bastante explorada, levando ao desenvolvimento de métodos matemáticos comuns às duas áreas de conhecimento [31]. Se ao invés de propagação no vácuo, for considerada propagação em um meio inhomogêneo, a analogia se mantém e um potencial é inserido na equação de Schrödinger [32]. Uma ampla abordagem das diversas analogias entre óptica e mecânica quântica é encontrada em [33]. A importância da aproximação paraxial em óptica vai muito além da analogia com a mecânica quântica não relativística. O feixe produzido por um laser é descrito nessa aproximação [34], bem como muito da teoria quântica relativa à produção de pares de fótons gêmeos [35], somente para citar dois exemplos. Afora da analogia direta entre as equações concernentes à óptica paraxial e a mecânica quântica não relativística, utilizando a aproximação paraxial, Lemos *et al.* [36] implementaram um oscilador harmônico quântico quicado, no regime caótico. Nesse trabalho, o operador de evolução temporal é mapeado em operadores que atuam sobre os graus de liberdade espaciais do feixe.

Nesta dissertação, mostraremos que é possível mapear o operador de evolução de uma partícula livre associado à equação de Dirac em operadores que atuam sobre os graus de liberdade espaciais de um feixe luminoso paraxial, mapeando a função de onda da partícula de Dirac na amplitude do campo elétrico do feixe. Utilizaremos para tanto a chamada transformação de Foldy-Wouthuysen (TFW), uma transformação unitária que diagonaliza o hamiltoniano de Dirac para o caso de partícula livre. A evolução temporal será realizada em três etapas: o estado inicial é transformado para a representação de FW, o estado passa pela evolução temporal nesta representação e, por último, a TFW inversa leva o estado de volta a representação convencional, sendo cada etapa mapeada na atuação de um conjunto de dispositivos ópticos sobre o feixe. Os dispositivos necessários à implementação da proposta são: laser de pulso contínuo, placas de meia onda e de um quarto de onda, moduladores espaciais de luz com modulação apenas de fase, divisor de feixe por polarização e detectores de intensidade capazes de medir a intensidade como função da posição transversal a um feixe. Mostraremos, ainda, que nosso protocolo pode ser aplicado tanto para partículas restritas a uma dimensão espacial, quanto a duas, tal como a um caso particular em que o estado é tridimensional.

Esta dissertação está organizada como segue: o Capítulo 1 traz a construção da equação de Dirac para partículas livres em três dimensões espaciais e, a partir dela, a dedução de ZB. No Capítulo 2, descrevemos a aplicação dos principais dispositivos necessários à implementação de nosso protocolo de simulação, a saber,

transformada de Fourier óptica, placas de onda e modulador espacial de luz. O Capítulo 3 traz a proposta de simulação para as três possibilidades de dimensão espacial: uma, duas ou três dimensões. Por fim, apresentamos nossas considerações finais.

EQUAÇÃO DE DIRAC E ZITTERBEWEGUNG

Neste capítulo mostramos as motivações e a construção da equação quântica relativística de uma partícula livre de spin $1/2$, conhecida como equação de Dirac. Visando contextualizar a teoria de Dirac com as duas teorias que a originam, nas Seções 1.1 e 1.2 fazemos uma breve introdução à teoria da relatividade especial e à mecânica quântica não relativística, respectivamente, nos atentando somente aos principais pontos necessários à construção e compreensão da equação de Dirac, a qual é apresentada na Seção 1.3. Calculamos a evolução temporal do operador posição na Seção 1.4 e encontramos o termo oscilatório chamado *zitterbewegung*.

Na Seção 1.5, tratamos da chamada transformação de Foldy-Wouthuysen, uma transformação canônica do hamiltoniano de Dirac que, para partícula livre, o diagonaliza. Descrevemos também como tal transformação leva à definição de um operador posição diferente do padrão e que não apresenta ZB.

Nas Seções 1.6 e 1.7 tratamos de como seria a equação de Dirac caso o espaço fosse uni e bidimensional, respectivamente, uma vez que a proposta de simulação que apresentaremos no Capítulo 3 se aplica a esses casos.

A natureza e mesmo a existência da rápida tremulação do elétron são questionadas sob vários pontos de vista. Alguns deles serão brevemente mencionados na Seção 1.8, encerrando este capítulo.

1.1. Relatividade Especial

Um evento é uma ocorrência que se dá em um ponto específico do espaço-tempo, que no sistema de referência de certo observador tem coordenadas¹

$$(ct, x, y, z) \equiv (x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3).$$

A velocidade da luz c é multiplicada à componente temporal para que todas as coordenadas tenham a mesma dimensão.

Um observador é dito inercial se, para ele, na ausência de forças, uma partícula se move uniformemente, ou seja, descreve uma reta. O próprio observador, se visto por um segundo observador inercial, descreverá uma reta caracterizada pela velocidade relativa dos dois.

Deste modo, se uma partícula livre descreve uma reta em um sistema de referência I , também descreverá uma reta em um segundo sistema I' , se ambos são inerciais. Como consequência a transformação de coordenadas de um sistema para outro deverá ser linear, para que mapeie uma reta em outra, ou seja,

$$x' = \Lambda x + a, \tag{1.1}$$

em que x e x' são os vetores posição quadridimensionais nos sistemas I e I' , respectivamente. Λ é a matriz de transformação 4×4 entre os dois sistemas e a é um vetor constante. Em termos das componentes a transformação se escreve²

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu.$$

A teoria de relatividade especial, isto é, a descrição do espaço-tempo e dos processos físicos que nele ocorrem na ausência (ou negligência) de gravidade, é baseada em dois princípios básicos. O primeiro, o princípio de relatividade, estabelece que quaisquer observadores inerciais são equivalentes e, portanto, a todos os observadores inerciais são válidas as mesmas leis físicas. Dito em outras palavras, se dois observadores inerciais realizam uma mesma experiência, sob as mesmas condições, então deverão obter sempre os mesmos resultados.

¹Índices superiores serão usados para designar as componentes de um vetor. Índices gregos variam de 0 a 4, enquanto índices latinos variam de 1 a 3, como convencionalmente utilizado.

²Soma sobre índices repetidos, sendo um deles superior e outro inferior, deve ser entendida ao longo de todo o texto.

O segundo princípio é a constância da velocidade da luz no vácuo, c , para todos os observadores. A consideração desses dois princípios para dois sistemas de referência I e I' , cujas origens coincidam no instante inicial, com o último se movendo em relação ao primeiro com velocidade v ao longo do eixo x_1 , leva à seguinte transformação de coordenadas:

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma \left(x^0 - \frac{v}{c} x^1 \right) & x'^1 &= \gamma \left(x^1 - \frac{v}{c} x^0 \right) \\ x'^2 &= x^2 & x'^3 &= x^3 \end{aligned}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (1.2)$$

denominada transformação de Lorentz pura.

Considere que a origem de dois referenciais I e I' coincida no instante inicial em que seus relógios foram sincronizados em $t = t' = 0$. Se nesse instante um fóton for emitido na origem dos sistemas de coordenadas e, posteriormente, detectado em um ponto do espaço-tempo, então, por causa da invariância da velocidade da luz, ambos observadores concordarão que as coordenadas do ponto de detecção satisfazem

$$x^2 + y^2 + z^2 - ct = x'^2 + y'^2 + z'^2 - ct' = 0,$$

ou seja, a quantidade $x^2 + y^2 + z^2 - ct$ é um invariante por mudança de referencial. Tal resultado é, na verdade, somente um caso particular da invariância do produto escalar no espaço-tempo quadridimensional definido como

$$(x, y) = x^0 y^0 - \sum_{k=1}^3 x^k y^k = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu, \quad (1.3)$$

em que $g_{\mu\nu}$ são os elementos do chamado tensor métrica

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

De fato, aplicando a transformação de Lorentz ao produto escalar estabelecido em (1.3) notamos que este é invariante. Ademais, tal produto escalar é utilizado para definir uma transformação de Lorentz geral como qualquer transformação que o deixa invariante, isto é,

$$g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = g_{\alpha\lambda} x'^\alpha y'^\lambda = g_{\alpha\lambda} \Lambda^\alpha_\mu x^\mu \Lambda^\lambda_\nu y^\nu.$$

Assim, da arbitrariedade de x^μ e y^ν , uma transformação de Lorentz é uma transformação linear que satisfaz

$$\Lambda^\alpha{}_\mu g_{\alpha\lambda} \Lambda^\lambda{}_\nu = g_{\mu\nu}. \quad (1.4)$$

As transformações de Lorentz formam um grupo com relação à multiplicação convencional de matrizes. As transformações mais gerais (1.1), em que Λ é uma transformação de Lorentz, formam o chamado grupo de Poincaré. Uma vez conhecida a transformação geral entre referenciais, podemos reenunciar o princípio de relatividade, no contexto da teoria especial, como segue: *Todas as leis físicas válidas em referenciais inerciais são covariantes por transformações de Poincaré, isto é, mantêm sua forma sob esse tipo de transformação.* Qualquer teoria física a ser construída em conformidade com a relatividade especial, deverá exigir a covariância de suas equações.

Qualquer quantidade de quatro componentes que se transforme por mudança de referencial como o vetor posição quadridimensional é chamada quadrivetor. Todos os quadrivetores determinam um invariante (escalar) sob transformação de Lorentz através do produto escalar (1.3).

Quadrivetores podem ser construídos a partir do quadrivetor posição utilizando o fato de que, sendo a transformação de Lorentz linear, a soma de quadrivetores, bem como o produto de um quadrivetor por um escalar, se transforma como quadrivetor. Assim, o intervalo entre dois eventos $x_{(1)}$ e $x_{(2)}$, dado por $\Delta x = x_{(2)} - x_{(1)}$, é um quadrivetor. E a quantidade $\frac{\Delta x}{(\Delta x, \Delta x)}$ também o é, dada a invariância do produto escalar. Suponhamos que $x_{(1)}$ e $x_{(2)}$ sejam duas quadriposições ocupadas por uma partícula que é vista movendo-se com velocidade instantânea \mathbf{v} com relação a um referencial inercial I . Em um referencial I' que se mova à mesma velocidade da partícula, somente haverá um deslocamento temporal $\Delta\tau$, já que nesse referencial a partícula ocupa sempre a mesma posição espacial. $\Delta\tau$ é chamado intervalo de tempo próprio da partícula e está relacionado à norma do quadrivetor deslocamento por

$$(\Delta x, \Delta x) = (\Delta x', \Delta x') = (c\Delta\tau)^2.$$

Pelo que foi dito, a quantidade $\frac{\Delta x}{\Delta\tau} = \left(\frac{\Delta x^0}{\Delta\tau}, \frac{\Delta x^1}{\Delta\tau}, \frac{\Delta x^2}{\Delta\tau}, \frac{\Delta x^3}{\Delta\tau} \right)$ é um quadrivetor. No limite de um deslocamento infinitesimal esse quadrivetor define a quadri-velocidade da partícula, cujas componentes são $U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$. No sistema I , o deslocamento tridimensional se relaciona com o deslocamento temporal através da velocidade da partícula por $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$. Em termos das coordenadas neste sistema a norma do

deslocamento se escreve

$$(dx, dx) = (c dt)^2 - d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = c^2 dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = c^2 d\tau^2 \quad \Rightarrow \quad d\tau = \frac{dt}{\gamma},$$

com γ definido em (1.2). As componentes da quadrivelocidade no sistema I podem ser reescritas com a utilização da relação anterior, vindo a ser

$$U = \gamma \left(c \frac{dt}{dt}, \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = (\gamma c, \gamma \mathbf{v}).$$

A quadrivelocidade pode ser interpretada como segue. A sequência de eventos que uma partícula pontual ocupa no espaço-tempo é chamada linha de mundo da partícula. A linha de mundo pode ser parametrizada, em certo sistema de coordenadas, pelo tempo próprio da partícula³. A quadrivelocidade é, então, a derivada da curva de eventos ocupados pela partícula em relação ao parâmetro, ou seja, é o vetor tangente à linha de mundo [37]. No referencial da partícula, a quadrivelocidade aponta na direção do eixo temporal.

Se a massa da partícula é multiplicada por sua quadrivelocidade obtemos o seu quadrimomento

$$\mathcal{P} = (\gamma mc, \gamma m\mathbf{v}). \tag{1.5}$$

É possível mostrar que o quadrimomento total é uma quantidade que se conserva quadrivetorialmente em colisões, isto é, cada componente é conservada em todos os referenciais inerciais. O momento linear tridimensional relativístico da partícula é então definido como $\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}$. Tal definição é, ainda, motivada pelo fato de que o momento relativístico tem por limite, a baixas velocidades, o momento linear newtoniano.

A componente temporal do quadrimomento, também uma quantidade conservada, está relacionada à energia relativística \mathcal{E} por $\mathcal{P}^0 = \gamma mc = \mathcal{E}/c$. A motivação para tal definição tem lugar na identificação da variação temporal do termo \mathcal{P}^0 com a potência fornecida à partícula por uma força [38]. Além de que, no limite de baixas velocidades, a energia relativística coincide com a energia cinética newtoniana acrescida de um termo constante chamado energia de repouso $\mathcal{E}_0 = mc^2$.

Das definições de energia relativística e de momento relativístico, observa-

³Essa parametrização é análoga à parametrização por comprimento de arco.

mos que é possível escrever a velocidade de uma partícula como

$$\mathbf{v} = \frac{c^2 \mathbf{p}}{\mathcal{E}}. \quad (1.6)$$

O quadrimomento define, por meio do produto escalar, o invariante

$$(\mathcal{P}, \mathcal{P}) = \mathcal{P}^\mu \mathcal{P}_\mu = m^2 c^2. \quad (1.7)$$

Por outro lado, a substituição das definições de momento tridimensional e de energia permitem escrever a relação energia-momento relativística

$$\mathcal{P}^\mu \mathcal{P}_\mu = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}\right)^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}^2 = c^2 \mathbf{p}^2 + m^2 c^4, \quad (1.8)$$

a qual se mostra fundamental na construção de uma mecânica quântica relativística. Como $\mathcal{E} \geq c|\mathbf{p}|$, logo o módulo da velocidade de uma partícula está limitado à velocidade da luz, sendo igual a este valor somente se $m = 0$.

1.2. Mecânica Quântica não Relativística

Sucintamente, a mecânica quântica não relativística é obtida atribuindo operadores a grandezas físicas e postulando propriedades do espaço de estados de uma partícula, assim como o significado probabilístico de um estado. Os operadores atuam sobre um espaço linear de estados, ou funções de onda. Às grandezas energia e momento linear de uma partícula são atribuídos, respectivamente, os operadores⁴

$$E = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{e} \quad \mathbf{p} = -i\hbar \nabla. \quad (1.9)$$

A equação de Schrödinger de evolução temporal do estado $\psi(t, \mathbf{x})$ de uma partícula livre de massa m é obtida ao substituir tais operadores na expressão de energia não relativística

$$\mathcal{E} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \quad \rightarrow \quad i\hbar \frac{\partial \psi(t, \mathbf{x})}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(t, \mathbf{x}), \quad (1.10)$$

sendo ψ uma função escalar complexa de quadrado integrável, para que o quadrado

⁴Distinguiremos entre a grandeza física e o respectivo operador utilizando letras caligráficas para o primeiro, por exemplo, \mathbf{p} representa o valor do momento enquanto \mathbf{p} representa o operador momento.

de seu módulo possa ser apropriadamente interpretado como densidade de probabilidade. Analogamente, se a partícula está sujeita a forças tais que sua hamiltoniana seja $\mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{x})$, sendo esta equivalente à energia da partícula, a equação de evolução temporal de seu vetor de estado se escreve como

$$\mathcal{E} = \mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \quad \rightarrow \quad i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = H|\psi\rangle, \quad (1.11)$$

em que o operador hamiltoniano H é obtido da hamiltoniana pela substituição de \mathbf{x} e \mathbf{p} pelos respectivos operadores.

A equação de Schrödinger permite encontrar uma equação de continuidade com densidade positiva definida. Para tal é necessário considerar também a equação conjugada:

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^*(t, \mathbf{x})}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi^*(t, \mathbf{x}). \quad (1.12)$$

Ao somar o produto da função de onda pela Eq. (1.12) com o produto da função de onda conjugada pela Eq. (1.10), o resultado é a equação de continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (1.13)$$

em que

$$\rho = \psi^* \psi \quad \text{e} \quad \mathbf{J} = \frac{i\hbar}{2m} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi) \quad (1.14)$$

são a densidade de probabilidade de detecção da partícula em torno do ponto em que a função de onda está avaliada e a densidade de corrente de probabilidade, respectivamente.

A teoria quântica de Schrödinger se aplica bem a diversos casos, por exemplo no cálculo de níveis de energia atômicos. No entanto, o spin das partículas precisa ser inserido de maneira *ad hoc* e a equação de evolução temporal não é covariante por transformações de Lorentz, o que é facilmente visto pela assimetria entre tempo e espaço. Uma teoria relativística se mostrou necessária já no princípio da formulação da teoria quântica.

1.3. A equação de Dirac

A transição para uma teoria quântica relativística é alcançada pela aplicação do método apresentado na seção anterior, utilizando a expressão adequada para a

energia. Não é necessário levar em conta a teoria da relatividade geral, tendo em vista que esta é imprescindível apenas na presença de efeitos gravitacionais, os quais são irrelevantes em escala atômica [39].

As primeiras tentativas para construir um teoria quântica relativística datam dos anos de 1926 e 1927 com trabalhos de E. Schrödinger, W. Gordon e O. Klein os quais resultaram na chamada equação de Klein-Gordon. A referida equação para partículas livres resulta da substituição direta dos operadores energia e momento (1.9) na relação energia-momento relativística (1.8), sendo, portanto, uma equação de segunda ordem tanto no espaço quanto no tempo. Assim como a equação de Schrödinger, a equação de Klein-Gordon permite escrever uma equação de continuidade, entretanto, a densidade encontrada não é positiva definida, não permitindo sua interpretação probabilística, bem como a utilização da função de onda em cálculos de valores esperados [7]. Além desse inoportuno, o spin das partículas ainda precisaria ser inserido de maneira *ad hoc* nessa teoria.

Foi buscando uma equação covariante de evolução temporal de estados que fosse compatível com a relação de dispersão relativística (1.8), mas que possuísse somente derivada temporal de primeira ordem, que P. Dirac obteve a equação que leva seu nome, em 1928. Uma equação de primeira ordem no tempo já havia sido escrita utilizando a relação (1.8) escrita na forma $\mathcal{E} = \sqrt{c^2\mathbf{p}^2 + m^2c^4}$. Entretanto, devido à assimetria entre a derivada temporal e as espaciais, não seria possível inserir campos eletromagnéticos de forma covariante [6]. Dirac buscava um hamiltoniano que permitisse escrever

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi, \quad (1.15)$$

mantendo assim o mesmo formato da equação de Schrödinger. O requerimento de que essa equação seja covariante por transformações de Lorentz sugere que o hamiltoniano desejado tenha somente derivadas espaciais de primeira ordem, isto é, dependência linear com o operador momento. Assim, para partículas livres, podemos escrever

$$H = c\alpha^1p_1 + c\alpha^2p_2 + c\alpha^3p_3 + \beta mc^2 = c\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} + \beta mc^2, \quad (1.16)$$

em que p_k é o operador momento linear na direção \hat{x}_k . As constantes multiplicativas c e mc^2 foram inseridas de modo a deixar os fatores $\boldsymbol{\alpha}$ e β adimensionais. Ainda por causa da simetria entre derivadas temporais e espaciais, $\boldsymbol{\alpha}$ e β não podem depender de \mathbf{p} . Estando a partícula no espaço livre, o hamiltoniano e, por conseguinte, $\boldsymbol{\alpha}$ e β , não devem depender do quadrivetor posição por causa da homogeneidade do

espaço-tempo. Deste modo, concluímos que, sejam o que forem, $\boldsymbol{\alpha}$ e β comutam com os operadores posição e momento.

Levando em conta que H é equivalente à energia, de modo a satisfazer a relação energia-momento relativística, devemos exigir que

$$H^2 = c^2 \mathbf{p}^2 + m^2 c^4,$$

o que leva às seguintes condições:

$$\beta^2 = 1 \quad (\alpha^k)^2 = 1 \quad (1.17a)$$

$$\beta\alpha^k + \alpha^k\beta = \{\beta, \alpha^k\} = 0 \quad \alpha^k\alpha^j + \alpha^j\alpha^k = \{\alpha^k, \alpha^j\} = 0, \quad k \neq j, \quad (1.17b)$$

em que $\{\cdot, \cdot\}$ denota o anticomutador de dois operadores (os detalhes foram deixados no Apêndice A). Note que, para que as condições de anticomutação sejam satisfeitas, $\boldsymbol{\alpha}$ e β não podem ser constantes numéricas simplesmente, mas precisam ser identificados com outros objetos matemáticos, naturalmente representados por matrizes quadradas (dimensão $n \times n$) hermitianas⁵ que recebem o nome de matrizes de Dirac.

É fácil ver que as condições (1.17) implicam em matrizes com traço nulo e autovalores ± 1 , o que restringe a dimensão das matrizes a números pares, uma vez que o traço é a soma dos autovalores. Para $n = 2$, só há três matrizes anticomutantes entre si, as matrizes de Pauli

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

Portanto, $n = 4$ é a menor dimensão a fornecer quatro matrizes anticomutantes. Nesse caso, as condições (1.17b) são satisfeitas pela escolha

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad \alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.19)$$

que não é única. Na expressão anterior, \mathbb{I} é a matriz identidade de dimensão 2×2 e σ^k são as matrizes de Pauli. As matrizes (1.19) são chamadas matrizes de Dirac convencionais. Uma outra possível representação, chamada de forma supersimétrica,

⁵Esta condição se justifica na exigência de que o hamiltoniano seja hermitiano.

consiste na troca da matriz β , dada em (1.19), pela matriz

$$\beta = i \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix},$$

mantendo as definições de α_k .

Tendo escolhido a representação convencional das matrizes de Dirac, podemos substituí-las no hamiltoniano relativístico (1.16), bem como podemos substituir o operador momento por sua representação em coordenadas para reescrever o hamiltoniano de Dirac como

$$H = \begin{pmatrix} mc^2\mathbb{I} & -i\hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} \\ -i\hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla} & -mc^2\mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

sendo $\boldsymbol{\sigma}$ um vetor cujas componentes são as matrizes de Pauli nas respectivas direções.

Necessariamente, a função de onda deve ser alterada, não mais podendo ser uma função escalar, mas devendo ser um vetor coluna de quatro componentes, sendo cada uma função do tempo e do espaço, caso a representação de posição seja usada

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \psi_1(t, \mathbf{x}) \\ \vdots \\ \psi_4(t, \mathbf{x}) \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

O vetor de estado (1.21) é um objeto matemático chamado *spinor*, que possui uma transformação específica sob mudanças de referencial determinada pela covariância da equação de Dirac sob transformações de Lorentz.

A Eq. (1.15), com o hamiltoniano (1.20), obedecida pelo spinor (1.21),

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (c \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2) \psi, \quad (1.22)$$

é chamada de equação de Dirac do elétron livre, já que, ao acrescentar um campo magnético, ela é capaz de descrever a interação do spin do elétron com o campo [40]. Utiliza-se também a nomenclatura equação de Dirac em $d + 1$ dimensões, para indicar que são d dimensões espaciais e uma temporal, equivalente às espaciais, sendo $d = 1, 2, 3$. Até aqui utilizamos sempre três dimensões espaciais.

1.3.1. Equação de continuidade

Da mesma maneira como foi feito para a equação de Schrödinger, podemos extrair uma equação de continuidade partindo da equação de Dirac. Para isso, multipliquemos essa equação pela esquerda pelo hermitiano conjugado de sua solução, $\psi^\dagger = (\psi_1^* \dots \psi_4^*)$, obtendo

$$i\hbar\psi^\dagger\frac{\partial\psi}{\partial t} = (-i\hbar c\psi^\dagger\alpha^k\partial_k + \psi^\dagger\beta mc^2)\psi, \quad (1.23)$$

em que substituímos $p_k = -i\hbar\partial_k = -i\hbar\partial/\partial x^k$ em (1.16). A Eq. (1.23) hermitiana conjugada é escrita como

$$-i\hbar\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial t}\psi = i\hbar c\partial_k\psi^\dagger\alpha^{k\dagger}\psi + \psi^\dagger\beta^\dagger\psi mc^2.$$

Subtraindo a Eq. (1.23) de sua conjugada, uma vez que α e β são hermitianas, temos

$$i\hbar\left(\psi^\dagger\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi^\dagger}{\partial t}\psi\right) = -i\hbar c\left(\psi^\dagger\alpha^k\partial_k\psi + \partial_k\psi^\dagger\alpha^k\psi\right),$$

cujos membros podem ambos ser identificados com derivações de produtos da seguinte maneira:

$$i\hbar\frac{\partial(\psi^\dagger\psi)}{\partial t} = -i\hbar c\partial_k(\psi^\dagger\alpha_k\psi). \quad (1.24)$$

Essa equação tem a forma de uma equação de continuidade com densidade $\rho = \psi^\dagger\psi = \sum_{k=1}^4 |\psi_k|^2$ e densidade de corrente $\mathbf{J} = c\psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\psi$. A densidade ρ obtida a partir da equação de Dirac é claramente positiva definida, o que permite sua interpretação como densidade de probabilidade.

1.3.2. Autovalores de energia

As soluções estacionárias da Eq. (1.15) para um dado vetor momento $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ são da forma

$$\psi_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{x}) = \phi(\mathbf{p})e^{i\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}{\hbar}}e^{-\frac{iEt}{\hbar}}, \quad (1.25)$$

em que $\phi(\mathbf{p})$ é uma matriz coluna de quatro componentes.

A substituição dessa solução nos permite encontrar a equação satisfeita

pelos vetores coluna $\phi(\mathbf{p})$, que nada mais é do que a equação de autovalores

$$\begin{pmatrix} mc^2\mathbb{I} & c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -mc^2\mathbb{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1(\mathbf{p}) \\ \phi_2(\mathbf{p}) \\ \phi_3(\mathbf{p}) \\ \phi_4(\mathbf{p}) \end{pmatrix} = \mathcal{E} \begin{pmatrix} \phi_1(\mathbf{p}) \\ \phi_2(\mathbf{p}) \\ \phi_3(\mathbf{p}) \\ \phi_4(\mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad (1.26)$$

a qual terá solução não trivial para $\phi(\mathbf{p})$ se

$$\begin{aligned} \det \begin{vmatrix} mc^2 - \mathcal{E} & 0 & cp_z & c(p_x - ip_y) \\ 0 & mc^2 - \mathcal{E} & c(p_x + ip_y) & -cp_z \\ cp_z & c(p_x - ip_y) & -mc^2 - \mathcal{E} & 0 \\ c(p_x + ip_y) & -cp_z & 0 & -mc^2 - \mathcal{E} \end{vmatrix} &= \\ &= \left\{ \mathcal{E}^2 - \left[(mc^2)^2 + c^2 \mathbf{p}^2 \right] \right\}^2 = 0. \end{aligned}$$

Portanto, as quatro autoenergias do hamiltoniano de uma partícula livre com momento linear \mathbf{p} são

$$\mathcal{E}_1(\mathbf{p}) = \mathcal{E}_2(\mathbf{p}) = -\mathcal{E}_3(\mathbf{p}) = -\mathcal{E}_4(\mathbf{p}) = \mathcal{E}(\mathbf{p}) = \sqrt{(mc^2)^2 + c^2 \mathbf{p}^2}, \quad (1.27)$$

as quais obedecem à relação energia-momento relativística.

A cada valor de energia $\mathcal{E}_k(\mathbf{p})$ associa-se um autovetor ortogonal aos demais. Assim sendo, os autoestados com energia positiva (dois para cada valor de momento $\phi_1^{(+)}(\mathbf{p})$ e $\phi_2^{(+)}(\mathbf{p})$) expandem um subespaço do espaço de estados composto por autoestados com energia positiva, o mesmo sendo válido para os autoestados com energia negativa (dois para cada valor de momento $\phi_1^{(-)}(\mathbf{p})$ e $\phi_2^{(-)}(\mathbf{p})$). A duplicidade de estados para cada nível de energia, com certo valor de momento, que na teoria quântica não relativística é garantida pela postulação do spin, surge na teoria de Dirac de maneira natural, sem qualquer hipótese adicional, fruto apenas da exigência de um hamiltoniano relativístico linear no momento. Devido à linearidade da equação de Dirac, o estado mais geral possível é uma superposição de todas as soluções estacionárias (1.25)

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \int d^3p \sum_{s=1}^2 \sum_{\epsilon=+,-} c_s^{(\epsilon)}(\mathbf{p}) \phi_s^{(\epsilon)}(\mathbf{p}) e^{-\frac{i\epsilon\mathcal{E}(\mathbf{p})t}{\hbar}} e^{i\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}{\hbar}}, \quad (1.28)$$

em que $c_s^{(\epsilon)}(\mathbf{p})$ são coeficientes complexos.

É notável o fato de que hajam autoenergias negativas para uma partícula livre. Dizer que esses valores são não físicos e não existem de fato, devendo ser ignorados, não é possível, já que os autoestados com energia positiva não são suficientes para expandir um vetor de estado qualquer [7]. No entanto, se existem infinitos estados com energia negativa, era esperado que não houvessem partículas com energia positiva pois elas decairiam em estados com energias cada vez mais baixas emitindo fótons. Havia, conseqüentemente, uma séria inconsistência na teoria.

Dirac contornou esse empecilho atribuindo às autoenergias negativas e aos autoestados associados uma interpretação inusitada. Ele propôs em 1930 a teoria do mar de partículas, na qual afirma que todos os estados com energia negativa estão preenchidos e, portanto, um elétron com energia positiva não poderia decair em um desses estados, pelo princípio de Pauli [41]. Todavia, a um elétron com energia negativa é permitido absorver um fóton e transicionar para um estado com energia positiva, deixando um buraco no mar de partículas, que se comportaria como uma partícula com energia positiva e carga elementar positiva. A essa partícula dá-se o nome de pósitron ou antipartícula do elétron. A confirmação da existência da nova partícula ocorreu já em 1932 por C. Anderson [42]. Chama-se criação de pares ao processo de absorção de um fóton e surgimento de um elétron e um pósitron com energias positivas.

1.3.3. Representação de momento

Até o momento, utilizamos a chamada representação de posição, na qual o operador posição é multiplicativo,

$$\mathbf{x}\psi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\psi(\mathbf{x}),$$

e o operador momento é derivativo,

$$\mathbf{p}\psi(\mathbf{x}) = -i\hbar\nabla\psi(\mathbf{x}).$$

Desejamos construir uma representação, que será chamada representação de momento, na qual o operador momento é multiplicativo

$$\mathbf{p}\tilde{\psi}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}\tilde{\psi}(\mathbf{p}).$$

Tal representação será útil se soubermos conectá-la com a representação de posição. Para alcançar essa conexão procederemos como Dirac o fez para o caso não relativístico [39]. Podemos empregar a notação de Dirac $|\psi\rangle$ para designar um vetor de estado de maneira independente da representação. Ao contrário do que ocorre em mecânica quântica não relativística, os autovalores do operador momento são degenerados uma vez que precisamos, por exemplo, especificar o sinal da energia e da helicidade⁶ para definir completamente um autoestado de momento. O mesmo é válido para os autovalores de posição. Tomemos como índices secundários que definem um estado os autovalores de um conjunto de operadores hermitianos independentes da posição e do momento⁷ de modo que possamos escrever de maneira única um autovetor do operador posição e um autovetor do operador momento, respectivamente, como $|\mathbf{x}, \alpha\rangle$ e $|\mathbf{p}, \alpha\rangle$. Ambos os conjuntos de kets podem expandir o espaço de estados devendo satisfazer relações de completeza

$$\sum_{\alpha} \int d^3x |\mathbf{x}, \alpha\rangle \langle \mathbf{x}, \alpha| = \mathbb{I} \quad (1.29)$$

$$\sum_{\alpha} \int d^3p |\mathbf{p}, \alpha\rangle \langle \mathbf{p}, \alpha| = \mathbb{I}. \quad (1.30)$$

Funções de onda na representação de posição são obtidas da projeção do vetor de estado sobre os autovetores do operador posição

$$\psi_{\alpha}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \alpha | \psi \rangle. \quad (1.31)$$

A forma como o operador momento age sobre essa projeção é derivando-a. Em particular, se $|\psi\rangle = |\mathbf{p}, \alpha\rangle$

$$\langle \mathbf{x}, \alpha' | \mathbf{p} | \mathbf{p}, \alpha \rangle = -i\nabla \langle \mathbf{x}, \alpha | \mathbf{p}, \alpha \rangle \delta_{\alpha'\alpha} = \mathbf{p} \langle \mathbf{x}, \alpha | \mathbf{p}, \alpha \rangle \delta_{\alpha'\alpha},$$

o que leva a

$$\langle \mathbf{x}, \alpha' | \mathbf{p}, \alpha \rangle = c(\mathbf{p}, \alpha) e^{i\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}{\hbar}} \delta_{\alpha'\alpha}, \quad (1.32)$$

os estados são ortogonais se $\alpha \neq \alpha'$, pois esses índices se referem aos autovalores de operadores hermitianos.

⁶A helicidade é a projeção do operador de spin $\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$ na direção do operador momento. Esse operador comuta com o momento e com o hamiltoniano, de forma que os três observáveis formam um conjunto completo de observáveis que comutam.

⁷Por exemplo, o operador S_z e a matriz de Dirac β .

Assim, utilizando a relação de completeza (1.29) juntamente com (1.32) temos

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{p}', \alpha | \mathbf{p}, \alpha \rangle &= \sum_{\alpha'} \int d^3x \langle \mathbf{p}', \alpha | \mathbf{x}, \alpha' \rangle \langle \mathbf{x}, \alpha' | \mathbf{p}, \alpha \rangle \\
 &= c^*(\mathbf{p}', \alpha) c(\mathbf{p}, \alpha) \int d^3x e^{i\frac{(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}}{\hbar}} = c^*(\mathbf{p}', \alpha) c(\mathbf{p}, \alpha) (2\pi\hbar)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \\
 &= |c(\mathbf{p}, \alpha)|^2 (2\pi\hbar)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}').
 \end{aligned} \tag{1.33}$$

Por outro lado, fazendo uso da relação de completeza (1.30) e do resultado (1.33), o mesmo produto interno é escrito

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{p}', \alpha | \mathbf{p}, \alpha \rangle &= \sum_{\alpha'} \int d^3p'' \langle \mathbf{p}', \alpha | \mathbf{p}'', \alpha' \rangle \langle \mathbf{p}'', \alpha' | \mathbf{p}, \alpha \rangle \\
 &= \int d^3p'' |c(\mathbf{p}'', \alpha)|^2 (2\pi\hbar)^3 \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}'') |c(\mathbf{p}, \alpha)|^2 (2\pi\hbar)^3 \delta(\mathbf{p}'' - \mathbf{p}) \\
 &= |c(\mathbf{p}, \alpha)|^4 (2\pi\hbar)^6 \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}).
 \end{aligned} \tag{1.34}$$

A igualdade entre (1.33) e (1.34) leva à conclusão de que os coeficientes $c(\mathbf{p}, \alpha)$ na projeção dos autovetores de momento sobre os autovetores de posição são independentes do momento e iguais a

$$c(\mathbf{p}, \alpha) = (2\pi\hbar)^{-\frac{3}{2}}. \tag{1.35}$$

Definimos, ainda, a função de onda na representação de momento como

$$\tilde{\psi}_\alpha(\mathbf{p}) = \langle \mathbf{p}, \alpha | \psi \rangle. \tag{1.36}$$

Estamos aptos a conectar as duas representações, o que é feito por meio do uso de (1.29), (1.32) e (1.35) em (1.36) levando-nos a concluir que as duas representações se conectam da maneira usual por transformada de Fourier (TF)

$$\begin{aligned}
 \tilde{\psi}_\alpha(\mathbf{p}) &= \sum_{\alpha} \int d^3x \langle \mathbf{p}, \alpha | \mathbf{x}, \alpha \rangle \langle \mathbf{x}, \alpha | \psi \rangle \\
 &= (2\pi\hbar)^{-\frac{3}{2}} \int d^3x e^{-i\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}}{\hbar}} \psi_\alpha(\mathbf{x}).
 \end{aligned} \tag{1.37}$$

Do mesmo modo, se (1.30) e (1.31) são empregadas temos a transformação inversa

$$\begin{aligned}\psi_\alpha(\mathbf{x}) &= \sum_\alpha \int d^3p \langle \mathbf{x}, \alpha | \mathbf{p}, \alpha \rangle \langle \mathbf{p}, \alpha | \psi \rangle \\ &= (2\pi\hbar)^{-\frac{3}{2}} \int d^3p e^{i\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}}{\hbar}} \tilde{\psi}_\alpha(\mathbf{p}).\end{aligned}\quad (1.38)$$

Caso α represente o par de autovalores dos operadores S_z e β , uma vez que esses operadores são diagonais na representação padrão das matrizes de Dirac, as funções $\psi_\alpha(\mathbf{x})$ representarão as componentes do spinor nessa representação. Assim, cada componente do spinor na representação de momentos é a transformada de Fourier da correspondente componente na representação de posição. Logo, visto que a TF é linear, as expressões (1.37) e (1.38) podem ser escritas para o spinor como um todo:

$$\tilde{\psi}(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \int d^3x e^{-i\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}}{\hbar}} \psi(\mathbf{x}), \quad (1.39)$$

cuja inversa é

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \int d^3p e^{i\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}}{\hbar}} \tilde{\psi}(\mathbf{p}).$$

1.4. Valores médios e *zitterbewegung*

O objetivo desta seção é calcular os valores médios de observáveis, em especial da posição. Por se tratar de uma partícula livre, esperamos que seu momento se conserve e que a média da posição obedeça à equação para partícula clássica, $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}t$. Todavia, veremos que o resultado esperado para a posição é acrescido de um termo oscilante, cujo nome, *zitterbewegung*, provém do alemão e significa movimento trêmulo. Para tanto, é conveniente mudarmos nossa descrição para a representação de Heisenberg.

1.4.1. Representação de Heisenberg

Uma vez que interpretamos o módulo quadrado da função de onda como densidade de probabilidade, estamos aptos a escrever o valor médio no instante t de um observável qualquer descrito pelo operador \hat{A} como

$$\langle \hat{A} \rangle(t) = \int d^3x \psi^\dagger(t, \mathbf{x}) \hat{A} \psi(t, \mathbf{x}). \quad (1.40)$$

Se o operador em questão for, por exemplo, o operador posição, então

$$\langle \mathbf{x} \rangle(t) = \int d^3x \psi^\dagger(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} \psi(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^4 \int d^3x \mathbf{x} |\psi_k(\mathbf{x}, t)|^2, \quad (1.41)$$

escrito em termos das componentes $\psi_k(\mathbf{x}, t)$ do spinor.

A evolução temporal da função de onda sendo dada pela Eq. (1.15), nos permite escrever

$$\psi(t, \mathbf{x}) = U(t)\psi(0, \mathbf{x}), \quad (1.42)$$

em que $\psi(0, \mathbf{x})$ é o estado inicial da partícula e $U(t)$ é um operador unitário a ser descoberto, chamado operador de evolução temporal. A substituição da solução proposta (1.42) na equação diferencial, caso o hamiltoniano não dependa explicitamente do tempo, determina o operador de evolução temporal como sendo

$$U(t) = e^{-\frac{iH}{\hbar}t}. \quad (1.43)$$

A descrição em que o vetor de estado evolui no tempo de acordo com a equação de Schrödinger é chamada representação de Schrödinger. O próximo passo é utilizar a solução obtida para calcular o valor esperado do operador \hat{A}

$$\langle \hat{A} \rangle(t) = \int d^3x \psi^\dagger(0, \mathbf{x}) U^\dagger(t) \hat{A} U(t) \psi(0, \mathbf{x}). \quad (1.44)$$

Ora, a expressão anterior seria igualmente escrita se, ao invés de atribuir a evolução temporal à função de onda, a tivéssemos atribuído ao operador. Desta maneira, se $\hat{A}_H(0)$ é o operador no instante inicial, após um tempo t ele altera-se para

$$\hat{A}_H(t) = U^\dagger(t) \hat{A}_H(0) U(t) = e^{\frac{iH}{\hbar}t} \hat{A} e^{-\frac{iH}{\hbar}t} \quad (1.45)$$

Essa descrição, na qual os operadores evoluem temporalmente, é chamada representação de Heisenberg e o subscrito H no operador identifica que ele é escrito nessa representação⁸. As representações de Heisenberg e Schrödinger coincidem, desde que $\hat{A}_H(0) = \hat{A}$ e $\psi_H(\mathbf{x}) = \psi(0, \mathbf{x})$. Derivar a expressão anterior resulta na equação de Heisenberg de evolução temporal de operadores

$$\frac{d\hat{A}_H(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} e^{\frac{iH}{\hbar}t} (H\hat{A} - \hat{A}H) e^{-\frac{iH}{\hbar}t} = \frac{i}{\hbar} e^{\frac{iH}{\hbar}t} [H, \hat{A}] e^{-\frac{iH}{\hbar}t}, \quad (1.46)$$

⁸Não usaremos subscritos para operadores na representação de Schrödinger.

supondo que \hat{A} não dependa do tempo na descrição de Schrödinger. $[\cdot, \cdot]$ denota o comutador de dois operadores.

Claramente, vemos que a energia do sistema, equivalente ao operador hamiltoniano, é uma constante de movimento, afinal qualquer operador que comute com o hamiltoniano é constante de movimento.

No problema de uma partícula livre descrita pelo hamiltoniano de Dirac, é esperado que o momento se mantenha constante, pois não há força alguma agindo sobre a partícula. De fato,

$$[H, \mathbf{p}] = [c \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2, \mathbf{p}] = 0, \quad (1.47)$$

uma vez que as componentes de \mathbf{p} comutam entre si e com as matrizes α e β . Portanto, conforme as expectativas, o momento médio de uma partícula livre não varia.

1.4.2. Evolução temporal do operador posição

Assim como para o operador momento, podemos aplicar a Eq. (1.46) para determinar a evolução temporal de qualquer observável da partícula descrita pelo hamiltoniano de Dirac. É especialmente interessante observarmos o que ocorre ao operador posição \mathbf{x} . Calculemos para tanto o comutador de uma componente genérica k de \mathbf{x} com o hamiltoniano

$$[H, x^k] = c[\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}, x^k] + mc^2[x^k, \beta] = c[\alpha^j p_j, x^k] = -i\hbar c \alpha^k, \quad (1.48)$$

levando em conta que as matrizes de Dirac comutam com as componentes do operador posição e que $[p_j, x^k] = -i\hbar \delta_j^k$, δ_j^k é a delta de Kronecker.

A equação de Heisenberg para o operador posição se torna⁹

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} e^{\frac{iH}{\hbar}t} [H, \mathbf{x}] e^{-\frac{iH}{\hbar}t} = c e^{\frac{iH}{\hbar}t} \boldsymbol{\alpha} e^{-\frac{iH}{\hbar}t} = c \boldsymbol{\alpha}(t), \quad (1.49)$$

como resultado da substituição de (1.48) em (1.46). Para determinar $\boldsymbol{\alpha}(t)$, resolvendo a equação de Heisenberg desse operador, necessitamos do cálculo do comutador com H de um operador cujas relações de anticomutação são conhecidas. Isso nos motiva a escrever o comutador de uma componente de $\boldsymbol{\alpha}$ com o hamiltoniano

⁹Por praticidade, suprimimos o subscrito H dos operadores na representação de Heisenberg, porém sempre que se tratar desta representação, a dependência temporal estará explicitada.

na forma

$$[H, \alpha^k] = H\alpha^k - \alpha^k H + (H\alpha^k - H\alpha^k) = 2H\alpha^k - \{H, \alpha^k\}.$$

Ora, sabemos que as componentes de $\boldsymbol{\alpha}$ comutam com as componentes do momento linear e as relações (1.17) são conhecidas, logo

$$\{H, \alpha^k\} = c\{p_j \alpha^j, \alpha^k\} + mc^2\{\beta, \alpha^k\} = 2cp_k(\alpha^k)^2 = 2cp_k, \quad (1.50)$$

o que nos conduz a

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} e^{\frac{iH}{\hbar}t} [H, \boldsymbol{\alpha}] e^{-\frac{iH}{\hbar}t} = \frac{2H}{i\hbar} e^{\frac{iH}{\hbar}t} (c\mathbf{p}H^{-1} - \boldsymbol{\alpha}) e^{-\frac{iH}{\hbar}t}. \quad (1.51)$$

Como H e \mathbf{p} são independentes do tempo, a integral da Eq. (1.51) nos fornece

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = c\mathbf{p}H^{-1} - e^{\frac{2iH}{\hbar}t} (c\mathbf{p}H^{-1} - \boldsymbol{\alpha}). \quad (1.52)$$

Algumas observações se fazem importantes neste momento. Por ser a derivada temporal da posição, o operador $c\boldsymbol{\alpha}(t)$ poderia ser chamado de velocidade da partícula. Espera-se que a velocidade de uma partícula livre seja constante, no entanto, encontramos que o referido operador tem um termo que oscila no tempo. Ademais, as componentes do candidato a operador velocidade não comutam entre si, não podendo ser medidas simultaneamente com precisão arbitrária. Suas componentes possuem somente dois autovalores, c e $-c$, e, por conseguinte, uma medida da velocidade em qualquer das três direções poderia resultar em somente um desses dois valores, o que é absurdo por não ser um contínuo de valores e porque não é possível a uma partícula massiva atingir a velocidade da luz. Devemos nos recordar, entretanto, que, em relatividade, a velocidade se expressa como em (1.6) e, portanto, um melhor candidato seria

$$\mathbf{v} = c^2\mathbf{p}H^{-1}. \quad (1.53)$$

De fato, além de comutar com o hamiltoniano e ser uma constante de movimento, esse operador possui, ainda, autovalores contínuos e limitados ao intervalo $[-c, c]$. Esse último operador é denominado operador velocidade clássica [43].

A derivada temporal da posição, não resultando em um operador velocidade adequado, suscita a ideia de que talvez o operador posição também não está definido adequadamente. Discutiremos um pouco mais sobre isso na Seção 1.8.

Voltemos ao objetivo inicial de determinar a evolução temporal do operador posição. A substituição de (1.52) e posterior integração de (1.49) fornecem

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x} + c^2 \mathbf{p} H^{-1} t - \frac{\hbar H^{-1}}{2i} \left(e^{\frac{2iH}{\hbar} t} - 1 \right) (c^2 \mathbf{p} H^{-1} - c\boldsymbol{\alpha}). \quad (1.54)$$

Os primeiros dois termos da solução encontrada são análogos à evolução clássica da posição de uma partícula livre com velocidade $\mathbf{v} = c^2 \mathbf{p} H^{-1}$. Entretanto, um terceiro termo inesperado (em comparação ao resultado clássico) surge nesta solução. Um termo oscilatório com amplitude da ordem do comprimento Compton $\frac{\hbar c}{\mathcal{E}} \sim \frac{\hbar}{mc} \sim 10^{-12} m$ e frequência de oscilação da ordem de $\frac{\mathcal{E}}{\hbar} \sim \frac{mc^2}{\hbar} \sim 10^{21} Hz$ que é chamado ZB. É surpreendente que a posição de uma partícula livre oscile no tempo, ainda que essa partícula não esteja sujeita a força alguma, por mais que essa oscilação possua amplitude tão pequena em relação à ordem de grandeza que se é capaz de medir.

Existe ainda a possibilidade de que o termo de ZB se anule ao calcularmos a média sobre medidas da posição e, nesse caso, ele não teria significado físico. Chequemos se essa possibilidade se verifica calculando a média (1.44) da posição com o estado inicial escrito na forma (1.28)

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x} \rangle(t) &= \int d^3x \psi^\dagger(0, \mathbf{x}) \mathbf{x}(t) \psi(0, \mathbf{x}) \\ \langle \mathbf{x} \rangle(t) &= \langle \mathbf{x}(0) \rangle + c^2 \langle \mathbf{p} H^{-1} \rangle t - z_\psi(t), \end{aligned} \quad (1.55)$$

em que

$$\begin{aligned} z_\psi(t) &= \int d^3x \int d^3p \int d^3p' \sum_{s=1}^2 \sum_{r=1}^2 \sum_{\epsilon=+,-} \sum_{\epsilon'=+,-} \left(c_s^{(\epsilon)*}(\mathbf{p}) \phi_s^{(\epsilon)\dagger}(\mathbf{p}) \right) e^{-i\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}{\hbar}} \\ &\quad \frac{\hbar H^{-1}}{2i} \left(e^{\frac{2iH}{\hbar} t} - 1 \right) (c^2 \mathbf{p} H^{-1} - c\boldsymbol{\alpha}) \left(c_r^{(\epsilon')}(\mathbf{p}') \phi_r^{(\epsilon')}(\mathbf{p}') \right) e^{i\frac{\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}}{\hbar}} \\ &= \int d^3x \int d^3p \int d^3p' \sum_{s=1}^2 \sum_{r=1}^2 \sum_{\epsilon=+,-} \sum_{\epsilon'=+,-} \frac{\hbar \epsilon \mathcal{E}(\mathbf{p})^{-1}}{2i} \left(e^{\frac{2i\epsilon \mathcal{E}(\mathbf{p})}{\hbar} t} - 1 \right) \\ &\quad c_s^{(\epsilon)*}(\mathbf{p}) c_r^{(\epsilon')}(\mathbf{p}') \phi_s^{(\epsilon)\dagger}(\mathbf{p}) e^{-i\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}{\hbar}} (c^2 \mathbf{p} H^{-1} - c\boldsymbol{\alpha}) \phi_r^{(\epsilon')}(\mathbf{p}') e^{i\frac{\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}}{\hbar}}. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Ao reescrever a igualdade atuamos $\frac{\hbar H^{-1}}{2i} \left(e^{\frac{2iH}{\hbar} t} - 1 \right)$ à esquerda, lembrando que $\phi_s^{(\epsilon)}(\mathbf{p}) e^{i\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}{\hbar}}$ é autovetor de H com autovalor $\epsilon \mathcal{E}(\mathbf{p})$, com $\mathcal{E}(\mathbf{p})$ definido em (1.27). Os elementos de matriz $\phi_s^{(\epsilon)\dagger}(\mathbf{p}) e^{-i\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}{\hbar}} (c^2 \mathbf{p} H^{-1} - c\boldsymbol{\alpha}) \phi_r^{(\epsilon')}(\mathbf{p}') e^{i\frac{\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}}{\hbar}}$ não são conhecidos até o momento. Com o propósito de calculá-los, podemos reescrever a relação

de anticomutação (1.50) como

$$2c\mathbf{p} - H\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}H = 0 \quad \rightarrow \quad (c^2\mathbf{p} - cH\boldsymbol{\alpha}) + (c^2\mathbf{p} - c\boldsymbol{\alpha}H) = 0$$

e por fim

$$H(c^2\mathbf{p}H^{-1} - c\boldsymbol{\alpha}) + (c^2\mathbf{p}H^{-1} - c\boldsymbol{\alpha})H = 0.$$

Multiplicando à esquerda por $\phi_s^{(\epsilon)\dagger}(\mathbf{p})e^{-i\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}{\hbar}}$ e à direita por $\phi_r^{(\epsilon')}(\mathbf{p}')e^{i\frac{\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}}{\hbar}}$, a equação anterior fornece uma relação para os desejados elementos de matriz

$$(\epsilon\mathcal{E}(\mathbf{p}) + \epsilon'\mathcal{E}(\mathbf{p}'))\phi_s^{(\epsilon)\dagger}(\mathbf{p})e^{-i\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}{\hbar}}(c^2\mathbf{p}H^{-1} - c\boldsymbol{\alpha})\phi_r^{(\epsilon')}(\mathbf{p}')e^{i\frac{\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}}{\hbar}} = 0,$$

ou seja, eles serão não nulos somente entre estados de energias iguais em módulo, mas com sinais contrários ($\epsilon\mathcal{E}(\mathbf{p}) = -\epsilon'\mathcal{E}(\mathbf{p}')$). Assim, se o estado inicial for uma combinação de estados com energia positiva, não haverá ZB. O mesmo vale para superposições de estados restritos ao subespaço de energia negativa. Concluimos que o ZB é o resultado da interferência entre estados com energias positivas e negativas.

Apesar de havermos tratado somente da evolução temporal do operador posição, diversos outros observáveis também apresentam termos que oscilam rapidamente no tempo, como os operadores de momento angular orbital e de spin. Devido ao termo trêmulo, nenhum desses operadores representam uma quantidade conservada, porém, quando somados de modo a obter o momento angular total, os termos oscilatórios se cancelam levando à conservação dessa última quantidade.

1.5. Transformação de Foldy-Wouthuysen

As transformações canônicas em mecânica clássica são aquelas transformações de variáveis canônicas que preservam a forma das equações de Hamilton para as novas coordenadas e momentos. Equivalentemente, podemos dizer que tais transformações são definidas como aquelas sob as quais o parêntese de Poisson de quaisquer duas variáveis dinâmicas é invariante [38]. Em mecânica quântica, similarmente, transformações canônicas são aquelas que não alteram as relações de comutação entre quaisquer dois operadores, particularmente as relações de comutação canônicas entre posição e momento linear. Em especial, transformações unitárias são exemplos

de transformações canônicas, muitas vezes confundidas como sua definição. Além de preservar relações de comutação, transformações unitárias preservam também a norma de estados transformados. Uma das grandes utilidades de transformações canônicas é que permitem encontrar representações que simplificam as equações e a solução de problemas físicos [44].

Nesse sentido, surgiu a transformação de Foldy-Wouthuysen (TFW) [45], uma transformação canônica sobre o estado de uma partícula quântica relativística de spin $1/2$ cujo objetivo inicial seria o de desacoplar as componentes do spinor, obtendo, assim, dois spinores independentes de duas componentes e que corresponderiam a estados de energia positiva e negativa, respectivamente. Um dos maiores ganhos logrados por tal transformação é permitir que o limite não relativístico da equação de Dirac seja efetuado adequadamente, provendo, assim, uma equação para o bi-spinor de energia positiva compatível com a equação de Pauli, porém com mais termos de correção relativística. O limite citado sem os termos adicionais já havia sido atingido utilizando outro método que geralmente está presente nos livros didáticos de mecânica quântica relativística [7, 40]. No entanto, problemas como a não equivalência entre o limite relativístico do operador velocidade, enquanto derivada do operador posição, e o operador velocidade da teoria de Pauli surgem nesse método, mas são removidos com a TFW. Como foge ao objetivo deste texto, não entraremos em maiores detalhes sobre o limite mencionado. Outro importante resultado concebido pela TFW é a definição de um novo operador posição, cuja derivada é o operador velocidade clássica, conforme veremos um pouco adiante.

O hamiltoniano de Dirac contém termos, chamados ímpares, que acoplam as duas componentes superiores do *spinor* com as duas componentes inferiores. Basicamente, o propósito da transformação de Foldy-Wouthuysen, que passaremos a descrever, é executar uma transformação sobre o *spinor* e sobre o hamiltoniano de maneira a que a evolução temporal das componentes seja desacoplada, ou seja, eliminando os chamados termos ímpares do hamiltoniano na nova representação, fazendo com que o hamiltoniano transformado seja bloco diagonal¹⁰.

Seja S um operador hermitiano. A transformação

$$|\psi'\rangle = e^{iS}|\psi\rangle \tag{1.57}$$

¹⁰Operadores pares não são necessariamente diagonais, mas são bloco 2×2 diagonais. Por exemplo, o operador $\Sigma_x = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{pmatrix}$ não é diagonal, porém é par, pois não acopla as duas componentes superiores com as inferiores de um spinor sobre o qual atue. O termo ímpar existente no hamiltoniano de Dirac de uma partícula livre é $\mathbf{c}\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\alpha}$.

é canônica e o estado transformado satisfaz a equação de evolução temporal de Schrödinger com o hamiltoniano transformado

$$H' = e^{iS} \left(H - i \frac{\partial}{\partial t} \right) e^{-iS}, \quad (1.58)$$

como é facilmente percebido substituindo (1.57) em (1.15).

No caso de uma partícula livre a transformação é exata, independente do tempo e dada por

$$S = -i\beta \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \theta(\mathbf{p}), \quad (1.59)$$

operador este que é hermitiano se a função do operador momento $\theta(\mathbf{p})$ for real. Para determinar completamente a transformação devemos exigir que o hamiltoniano transformado contenha somente termos pares. Para isso, escrevamos o operador de transformação como

$$e^{\pm iS} = e^{\pm i\beta \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \theta(\mathbf{p})} = \cos \theta(\mathbf{p}) \pm \beta \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \sin \theta(\mathbf{p}), \quad (1.60)$$

utilizando a série de Taylor da exponencial e

$$\left(\beta \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \right)^2 = -\mathbb{I}, \quad (1.61)$$

expressão obtida aplicando a propriedade de anticomutação das matrizes de Dirac e sua comutação com o operador momento.

Resulta de (1.60) e, novamente, da propriedade de anticomutação das matrizes de Dirac, que essas satisfazem

$$\alpha_k e^{-iS} = e^{iS} \alpha_k \quad \text{e} \quad \beta e^{-iS} = e^{iS} \beta,$$

logo,

$$H' = e^{iS} H e^{-iS} = e^{2iS} H = \left(\cos 2\theta(\mathbf{p}) + \beta \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \sin 2\theta(\mathbf{p}) \right) (c \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + mc^2 \beta), \quad (1.62)$$

em que identificamos os termos pares e ímpares

$$H' = \overbrace{\left(c \cos 2\theta(\mathbf{p}) - \frac{mc^2}{|\mathbf{p}|} \sin 2\theta(\mathbf{p}) \right)}^{\text{ímpar}} \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \overbrace{\left(mc^2 \cos 2\theta(\mathbf{p}) + c|\mathbf{p}| \sin 2\theta(\mathbf{p}) \right)}^{\text{par}} \beta. \quad (1.63)$$

Finalmente, o termo ímpar será nulo caso

$$\text{tg } 2\theta(\mathbf{p}) = \frac{|\mathbf{p}|}{mc} \quad \text{ou} \quad \theta(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \text{tg}^{-1} \frac{|\mathbf{p}|}{mc}, \quad (1.64)$$

o que permite escrever

$$\sin 2\theta(\mathbf{p}) = \frac{c|\mathbf{p}|}{\sqrt{(|\mathbf{p}|c)^2 + (mc^2)^2}} \quad \text{e} \quad \cos 2\theta(\mathbf{p}) = \frac{mc^2}{\sqrt{(|\mathbf{p}|c)^2 + (mc^2)^2}}. \quad (1.65)$$

Desta maneira, substituindo a função $\theta(\mathbf{p})$ anteriormente determinada, obtemos que o hamiltoniano transformado é diagonal, portanto não acopla as componentes do *spinor*, e se expressa por

$$H' = \beta \sqrt{(|\mathbf{p}|c)^2 + (mc^2)^2} = E(\mathbf{p})\beta, \quad (1.66)$$

sendo as duas componentes superiores (inferiores) de um spinor transformado relacionadas a energias positivas (negativas). Na equação anterior definimos o operador

$$E(\mathbf{p}) = \sqrt{(|\mathbf{p}|c)^2 + (mc^2)^2} = \sqrt{H^2}.$$

A evolução temporal do estado de uma partícula cujo estado inicial na representação convencional seja $|\psi_0\rangle$ pode ser realizada por

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iS} e^{-i\frac{H't}{\hbar}} e^{iS} |\psi_0\rangle, \quad (1.67)$$

uma vez que $e^{-iS} e^{-i\frac{H't}{\hbar}} e^{iS} = e^{-i\frac{Ht}{\hbar}}$.

A TFW é uma transformação não pontual, que leva um ponto a uma região com dimensões de um comprimento Compton no espaço transformado [46]. Isso é percebido tomando o estado transformado em representação de posição $\psi'(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} | \psi' \rangle = \langle \mathbf{x} | e^{iS} | \psi \rangle$ e utilizando as relações de completeza dos autoestados do opera-

do momento e dos autoestados do operador posição

$$\begin{aligned}
 \psi'(\mathbf{x}) &= \int d^3x' \int d^3p \int d^3p' \langle \mathbf{x} | \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{p} | e^{iS} | \mathbf{p}' \rangle \langle \mathbf{p}' | \mathbf{x}' \rangle \langle \mathbf{x}' | \psi \rangle \\
 &= \int d^3x' \int d^3p \int d^3p' \frac{e^{i\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}{\hbar}} e^{-i\frac{\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}'}{\hbar}}}{(2\pi\hbar)^3} e^{iS(\mathbf{p})} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \psi(\mathbf{x}') \\
 &= \int d^3x' \left[\int d^3p \frac{e^{i\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\cdot\mathbf{p}}{\hbar}}}{(2\pi\hbar)^3} e^{iS(\mathbf{p})} \right] \psi(\mathbf{x}').
 \end{aligned}$$

Assim, mesmo que na antiga representação $\psi(\mathbf{x})$ seja localizada em um ponto, na nova representação $\psi'(\mathbf{x})$ será não nula em uma região finita do espaço que é possível mostrar ter a dimensão de um comprimento Compton [46]. No entanto, é preciso recordar que o parâmetro \mathbf{x} não é mais o autovalor do operador posição na nova representação já que esse operador se transforma para

$$\mathbf{x}' = e^{iS} \mathbf{x} e^{-iS} = \mathbf{x} - \frac{i\hbar c\beta\boldsymbol{\alpha}}{2E(\mathbf{p})} + \frac{\hbar c^2}{2E(\mathbf{p})(E(\mathbf{p}) + mc^2)} \left(\frac{ic\beta(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p})\mathbf{p}}{E(\mathbf{p})} - \boldsymbol{\Sigma}\times\mathbf{p} \right), \quad (1.68)$$

em que $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$ é o operador de spin dividido por $\hbar/2$, assim definido por compor o gerador das rotações, momento angular total, juntamente com o operador momento angular orbital [7].

Foldy e Wouthuysen se perguntaram, então, qual seria o operador \mathbf{X} da representação antiga que transformado seria $\mathbf{X}' = \mathbf{x}$? A resposta encontrada é

$$\mathbf{X} = e^{-iS} \mathbf{x} e^{iS} = \mathbf{x} + \frac{i\hbar c\beta\boldsymbol{\alpha}}{2E(\mathbf{p})} - \frac{\hbar c^2}{2E(\mathbf{p})(E(\mathbf{p}) + mc^2)} \left(\frac{ic\beta(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p})\mathbf{p}}{E(\mathbf{p})} + \boldsymbol{\Sigma}\times\mathbf{p} \right), \quad (1.69)$$

cuja equação de evolução temporal (1.46) é, utilizando os comutadores do Apêndice B,

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} e^{\frac{iH}{\hbar}t} [H, \mathbf{X}] e^{-\frac{iH}{\hbar}t} = \frac{c^2\mathbf{p}}{E(\mathbf{p})} \frac{H}{E(\mathbf{p})} = c^2\mathbf{p}H^{-1}. \quad (1.70)$$

Notamos que a velocidade associada a esse operador, chamado operador posição média, é exatamente o operador velocidade clássica, definido em (1.53), que encontra correspondente na mecânica clássica relativística. Integrando a Eq. (1.70) obtemos a posição em função do tempo de uma partícula clássica, sem a presença de ZB.

Analogamente, na representação de FW

$$\frac{d\mathbf{X}'(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} e^{\frac{iH'}{\hbar}t} [H', \mathbf{X}'] e^{-\frac{iH'}{\hbar}t} = e^{-iS} \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} e^{iS} = \frac{c^2 \mathbf{p}}{E(\mathbf{p})} \beta, \quad (1.71)$$

assim, estados com energia positiva (somente componentes superiores não nulas na representação de FW) se movem no sentido do momento e estados com energia negativa, que representam antipartícula, possuem velocidade contrária ao momento, já que

$$\beta \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix}.$$

Vejam algumas propriedades adicionais do operador posição média:

- Suas componentes comutam entre si

$$[X^j, X^k] = e^{iS} [X'^j, X'^k] e^{-iS} = e^{iS} [x^j, x^k] e^{-iS} = 0;$$

- Mantêm relações de comutação canônicas com o operador momento

$$[X^j, p_k] = e^{iS} [X'^j, p_k] e^{-iS} = e^{iS} [x^j, p_k] e^{-iS} = i\hbar \delta^j_k,$$

uma vez que o operador momento comuta com o operador da TFW e, por isso, é o mesmo nas duas representações.

- É o único operador posição que permite uma definição consistente de localização de partículas, para o qual vale a primeira propriedade [47].

A última propriedade é, de certa forma, controversa, uma vez que muitos defendem haver sequer a possibilidade de definir um observável de posição. Em que observável de posição significa um conjunto de operadores que podem ser medidos e cujo valor esperado coincida com o valor médio das coordenadas, seja da partícula, ou do centro de massa de um sistema de partículas, etc [48].

1.6. Partícula restrita a uma dimensão espacial

Consideremos agora que uma partícula relativística exista em um espaço-tempo contendo somente uma dimensão espacial. A relação energia momento de tal partícula se mantém

$$\mathcal{E}^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4. \quad (1.72)$$

As mesmas considerações feitas no caso de espaço-tempo quadridimensional nos levam a escrever o hamiltoniano como

$$H = c\alpha p + mc^2\beta, \quad (1.73)$$

em que os coeficientes matriciais satisfazem

$$\{\alpha, \beta\} = 0 \quad \alpha^2 = \beta^2 = 1 \quad (1.74)$$

para que a relação (1.72) seja garantida. Como no caso aqui tratado somente são exigidas duas matrizes anticomutantes, é possível que elas sejam escolhidas dentre as matrizes 2×2 . Uma possível escolha, a que adotamos neste trabalho, é $\alpha = \sigma^x$ e $\beta = \sigma^z$. Desta maneira, o estado da partícula é descrito por um spinor de duas componentes

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (1.75)$$

e seu hamiltoniano se torna

$$H = \begin{pmatrix} mc^2 & cp \\ cp & -mc^2 \end{pmatrix}, \quad (1.76)$$

cujos autovalores, para um dado valor de momento, são $\mathcal{E} = \pm\sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4} = \pm\mathcal{E}(p)$. Há, portanto, apenas um autoestado para cada autovalor de energia e concluimos que o grau de liberdade de spin é perdido ao restringir as dimensões do espaço. A equação de Schrödinger com o hamiltoniano (1.73) é chamada equação de Dirac (1+1) dimensional.

A posição da partícula livre em espaço unidimensional também apresenta um termo oscilatório como é visto da escrita e solução da equação de Heisenberg

para o operador posição

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} e^{\frac{iH}{\hbar}t} [H, x] e^{-\frac{iH}{\hbar}t} = c\alpha(t). \quad (1.77)$$

De forma absolutamente análoga ao apresentado na Seção 1.4.2, obtemos que a solução de (1.77) é

$$x(t) = x + cpH^{-1}t - \frac{\hbar H^{-1}}{2i} \left(e^{\frac{2iH}{\hbar}t} - 1 \right) \left(c^2 p H^{-1} - c\alpha \right), \quad (1.78)$$

composta por uma parte análoga à uma partícula livre clássica com velocidade cpH^{-1} mais um termo oscilante. Uma vez que o termo de ZB surge por causa das relações de comutação, que se mantêm em (1+1)D, já seria esperado que, também neste caso, ele existisse e fosse resultado de interferência entre estados com energias de sinais opostos, haja vista que essa conclusão também foi extraída de relações de comutação em (3+1) dimensões.

O hamiltoniano (1.76) não é diagonal¹¹ e acopla as componentes superior e inferior do spinor. Podemos buscar uma transformação de Foldy-Wouthuysen que transforme o hamiltoniano, desacoplando-as de modo a que uma das componentes se refira a estados de energia positiva e a outra, estados de energia negativa. Novamente a analogia com o caso de espaço tridimensional é direta e o operador de transformação se escreve como

$$e^{iS} = e^{\beta \frac{\alpha p}{|p|} \theta(p)} \quad \text{com} \quad \theta(p) = \frac{1}{2} \text{tg}^{-1} \left(\frac{|p|}{mc} \right). \quad (1.79)$$

Os operadores hamiltoniano e posição transformados para a representação FW são

$$H' = \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4} \beta = E(p) \beta \quad (1.80)$$

e

$$x' = x - \frac{i\hbar mc^3}{2E(p)^2} \beta \alpha, \quad (1.81)$$

respectivamente.

Ao nos perguntarmos qual seria o operador da antiga representação que

¹¹Na circunstância aqui analisada, operadores pares e diagonais têm a mesma definição, assim como operadores ímpares e antidiagonais.

transformado é o operador $X' = x$, obtemos como resposta o operador

$$X = x + \frac{i\hbar mc^3}{2E(p)^2} \beta \alpha, \quad (1.82)$$

cuja evolução temporal é livre de ZB e dada pela equação

$$\frac{dX}{dt} = \frac{c^2 p}{E(p)} \frac{H}{E(p)} = c^2 p H^{-1}. \quad (1.83)$$

1.7. Partícula restrita a duas dimensões espaciais

Se uma partícula existe em um espaço-tempo com duas dimensões espaciais, sua energia e seu momento satisfazem a relação

$$\mathcal{E}^2 = c^2(p_x^2 + p_y^2) + m^2 c^4. \quad (1.84)$$

Se quisermos construir uma teoria quântica sob essas circunstâncias com hamiltoniano linear nas componentes do momento

$$H = c(\alpha^x p_x + \alpha^y p_y) + mc^2 \beta, \quad (1.85)$$

então, os coeficientes de tal hamiltoniano devem obedecer à seguinte álgebra:

$$\begin{aligned} \{\alpha^x, \alpha^y\} = 0 \quad \{\alpha^k, \beta\} = 0 \\ (\alpha^k)^2 = \beta^2 = 1. \end{aligned} \quad (1.86)$$

É possível satisfazer todas as condições se os objetos α^k e β forem identificados com matrizes de dimensão 2×2 , já que são três objetos anticomutantes. Em particular, neste trabalho adotamos a escolha

$$\alpha^x = \sigma^x \quad \alpha^y = \sigma^y \quad \beta = \sigma^z. \quad (1.87)$$

Tudo o que foi dito nas Seções 1.4 e 1.5 continua válido e com expressões análogas no caso (2+1)D, a saber, a expressão para o operador posição dependente do tempo e a existência de ZB, a expressão para a TFW, as expressões para o operador posição transformado por TFW e para o operador posição média. É preciso somente notar que todos os vetores presentes nas expressões citadas são agora

bidimensionais.

1.8. Discussões acerca de *zitterbewegung*

Desde que a existência de ZB foi demonstrada por Schrödinger nos primórdios na teoria quântica relativística [39], muito se tem debatido acerca de sua realidade, se esse seria somente uma propriedade matemática da equação de Dirac ou se seria um movimento fisicamente observável. Não tentaremos nesta seção defender qualquer posição, mas exporemos alguns pontos de vista sobre o assunto.

Pelas dimensões de sua amplitude e frequência, a medida de tal movimento oscilatório é inacessível. Recorre-se então a simulações deste fenômeno utilizando outros sistemas governados pela mesma dinâmica de Dirac, como feito em [23, 22, 24] e como pretendemos mostrar ser possível com manipulação de um feixe luminoso clássico. Foi demonstrado, inclusive, que qualquer sistema cujo hamiltoniano seja exclusivamente dependente do momento e tenha representação matricial com dimensão igual ou superior a 2×2 apresentará ZB, podendo ser usado em simulações desse fenômeno [49]. No entanto, simular um sistema por meio de outro não nos diz nada sobre a correção da descrição do primeiro. Ao fazer tal tipo de simulação estamos supondo que a dinâmica de um elétron relativístico é adequadamente descrita pela equação de Dirac.

Como foi visto, o termo de ZB faz com que a velocidade associada ao operador posição padrão seja igual a c . Porém, o próprio Dirac disse não haver qualquer inconsistência com a relatividade envolvendo ZB. Segundo ele, o fato de que o operador velocidade encontrado para o elétron possui autovalores cujo módulo é igual à velocidade da luz não contradiz as medidas de velocidade sempre abaixo desse valor pois, afinal, a velocidade $c\boldsymbol{\alpha}(t)$, com $\boldsymbol{\alpha}(t)$ dado pela Eq. (1.52), é a velocidade instantânea, enquanto que medidas dessa grandeza são sempre médias temporais sobre o intervalo de tempo de medição, o qual tipicamente é maior que o inverso da frequência de oscilação da velocidade [39].

Como mostrado na seção 1.4.2, o termo de ZB no operador posição somente não se anulará, ao calcularmos a média desse operador, caso o estado inicial da partícula seja uma superposição de estados com energias positivas e negativas. Mas ora, estados com energia negativa foram interpretados como pertencentes a antipartículas. Logo, a teoria de Dirac, a qual se propôs a descrever uma única partícula, não permite que tratemos deste caso, mas somente do caso de muitas partículas, ou

ao menos duas: o elétron e o pósitron. O que então significaria o operador posição da teoria de Dirac se esta não trata de uma única partícula?

Esse problema seria resolvido se pudéssemos tratar separadamente os subespaços do espaço de Hilbert associados a elétrons e a pósitrons. Entretanto, como citado anteriormente, os estados com energia positiva não formam uma base para o espaço de estados, não sendo possível ignorar os estados com energia negativa e ater-nos somente aos estados associados propriamente a elétrons [40]. Além desse inconveniente, a suposição de existência de uma função de onda com energia positiva localizada, a qual descreva o estado de uma única partícula, é incompatível com a causalidade, no sentido que a função de onda em um tempo posterior pode ocupar regiões do espaço não conectáveis à região ocupada anteriormente por um raio de luz. Esse resultado foi demonstrado primeiramente em [13] e posteriormente de maneira mais geral em [50]. Como não é possível construir uma teoria puramente de uma partícula utiliza-se os estados de Dirac como base para uma teoria quântica de campos, em que as partículas são excitações do campo que admite dois tipos de partículas: partículas propriamente e antipartículas. Mas também em teoria quântica de campos o problema de localidade sem violação de causalidade persiste, como argumentado em [51]. Com o advento da teoria de informação quântica relativística, a necessidade de um melhor tratamento da localização se torna evidente, afinal, assim como as partículas a serem medidas, também os detectores se descritos pela teoria quântica relativística não possuem definida sua localização, levando a dificuldades na interpretação da informação adquirida com a medida [2].

Apesar dos problemas interpretativos, a teoria do elétron de Dirac produz resultados em ótimo acordo com resultados experimentais para o espectro do átomo de hidrogênio, por exemplo [40]. De todo modo, se a energia não é suficientemente alta para que haja mais de uma excitação no campo, pode-se tratar o sistema como uma única partícula que pode ser detectada em alguma posição, sendo este observável associado a um operador posição, e talvez seja esse o regime de validade da teoria de Dirac [43]. Nesse caso, cabe a pergunta feita várias vezes desde a construção da teoria quântica relativística: estaria o operador posição definido de maneira adequada? Várias definições de operadores posição foram apresentadas, como o operador posição média obtido pela TFW, o qual já havia sido obtido por Newton e Wigner utilizando outros argumentos [47]. Em geral, para os novos operadores não há presença de ZB. Apesar de evitar o problema da presença de ZB, é sabido que as funções de onda na representação de FW, considerando o operador posição média

como observável, apresentam propagação superluminal, independente de conterem ou não superposição dos dois sinais de energia, além de que um estado localizado pode se tornar delocalizado sob uma transformação de referenciais [43]. Uma ampla discussão concernente à possibilidade ou não de definir localização de partículas - e um correspondente operador posição - pode ser encontrada em [12].

No contexto de teoria quântica de campos, também estão presentes controvérsias. Enquanto que na referência [10] os autores dizem haver provado que a referida teoria proíbe a existência de ZB, em [52, 53] os autores argumentam que no trabalho anterior foi negligenciada a interação entre o elétron e pares elétron-pósitron virtuais, concluindo que o ZB é resultado da aniquilação do elétron real com o pósitron de um par virtual, sendo que o elétron virtual, espacialmente separado de seu par por uma distância da ordem do comprimento Compton, se propagará como elétron real. Essa interpretação condiz com a interpretação no contexto de mecânica quântica relativística exposta em [54], em que é argumentado que pela incerteza tempo-energia um par virtual poderia existir por um tempo da ordem de $\Delta t \sim \hbar/2mc^2$, o que levaria a uma separação entre elétron e pósitron menor que $c\Delta t = c\hbar/2mc^2$, isto é, metade do comprimento Compton e da ordem da amplitude de ZB.

Por outro lado, outros autores interpretaram o movimento oscilatório como o gerador de spin mostrando que, no referencial de repouso da partícula ($\mathbf{p} = 0$), onde somente resta o movimento oscilatório, para um estado com spin definido em certa direção, o momento angular associado com tal movimento aponta na direção do spin e possui valor $\hbar/2$ [55]. Modelos clássicos de partículas em movimento elicoidal, análogo ao ZB, também associam o spin eletrônico com o momento angular orbital associado a esse movimento, mostrando que ao quantizar tal modelo obtém-se a equação de Dirac [56, 57, 58, 59]. Na mesma linha, em um modelo considerando uma escala mínima de espaço-tempo acessível, o ZB de um elétron pode ser associado a sua estrutura interna como gerador do spin eletrônico [60]. Tal associação entre um possível movimento autônomo do elétron vai além e possibilita inclusive uma nova interpretação de toda a mecânica quântica baseada em ZB que prevê resultados compatíveis com a mecânica não relativística de várias partículas com spin, que comporta correlações mais fortes que as clássicas para estados singleto, por exemplo [61, 62].

Seria, portanto, o ZB apenas uma propriedade matemática de um operador inadequadamente definido ou um movimento real associado com interações com o

vácuo? Seria ele uma espécie de estrutura interna do elétron responsável por seu spin? Tais perguntas não serão respondidas por uma simulação da dinâmica de Dirac, porém é possível que tais simulações, além de belas, possam servir como fontes de inspiração para novos trabalhos acerca do sistema real.

Capítulo 2

ÓPTICA PARAXIAL E DISPOSITIVOS ÓPTICOS

A proposta de simulação da evolução temporal do estado de uma partícula livre relativística, que será apresentada no Capítulo 3, se baseia na utilização de alguns dispositivos ópticos cuja operação descrevemos no presente capítulo. O tratamento dado aqui se baseia na premissa de que o feixe a ser utilizado satisfaz a aproximação paraxial, o que, em geral, se verifica para feixes de laser [34]. A referida aproximação é apresentada na Seção 2.1, partindo da equação de onda para o campo elétrico e considerando onda monocromática. Esse tratamento simplificado é encontrado em livros didáticos como [28] e é suficiente aos nossos propósitos. Um tratamento mais rigoroso, partindo das equações de Maxwell é mostrado em [63, 64], enquanto a aproximação paraxial para onda não monocromática é encontrada em [29].

A passagem do espaço de posições para o espaço de momentos e vice-versa se dá através de uma transformada de Fourier. Por isso, na Seção 2.2 mostramos como uma lente pode ser utilizada na realização da transformada de Fourier do perfil transversal de um feixe paraxial.

Os demais dispositivos necessários à simulação são placas de onda, tratadas na Seção 2.3, e moduladores espaciais de luz, descritos na Seção 2.4.

2.1. Aproximação paraxial

O campo elétrico de uma onda eletromagnética no vácuo satisfaz a equação de onda

$$\nabla^2 \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (2.1)$$

sendo c a velocidade da luz. A solução mais simples dessa equação é uma onda plana. Entretanto, ondas planas são delocalizadas no tempo e no espaço, não correspondendo a situações reais. Todavia, ondas planas formam um conjunto completo de soluções da equação de onda e qualquer solução pode ser escrita como superposição desse conjunto de soluções.

Uma solução paraxial da equação é uma onda que, assim como a onda plana tem uma direção bem definida de propagação, não divergindo muito dessa direção dentro de uma distância de um comprimento de onda, com um envelope localizado espacialmente nas direções transversais à direção de propagação. Consideremos uma onda paraxial monocromática se propagando na direção z cujo campo elétrico seja dado por

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) e^{i\omega t - ikz}, \quad (2.2)$$

em que a amplitude $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ varia lentamente com a coordenada z em um intervalo da ordem do comprimento de onda. A relação entre a exigência de variação lenta do envelope $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ e a condição de paraxialidade pode ser mais claramente vista expandindo o campo elétrico como superposição de ondas planas

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \int d^3k \mathbf{A}(\mathbf{k}) e^{i\omega_k t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}},$$

em que o vetor de onda e a frequência estão relacionados por $\omega_k = c|\mathbf{k}| = ck$ e $\mathbf{A}(\mathbf{k})$ é um vetor ortogonal ao vetor de onda. Considerando uma onda monocromática, de frequência ω , sua propagação será paraxial à direção z se as componentes x e y dos vetores de onda da superposição forem pequenas em relação à componente z , ou seja, $k_x, k_y \ll k$ e $k_z \sim k$. Logo, escrevendo $k_z = k + \Delta k$, na aproximação paraxial temos

$$\Delta k = \left(k^2 + k_x^2 + k_y^2\right)^{\frac{1}{2}} - k \ll k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (2.3)$$

Assim, reescrevendo o campo elétrico

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \left[\int d^2k \mathbf{A}(\mathbf{k}) e^{-i(k_x x + k_y y + \Delta k z)} \right] e^{i\omega t - ikz},$$

o termo entre colchetes é identificado como sendo $\mathbf{A}(\mathbf{x})$. Tendo em vista (2.3), para z da ordem de um comprimento de onda a solução oscilará lentamente.

A aproximação paraxial pode ser levada em conta na equação de onda levando à chamada equação de Helmholtz paraxial. Substituindo a solução (2.2) na equação de onda obtemos a equação diferencial satisfeita pela amplitude

$$\nabla_t^2 \mathbf{A}(\mathbf{x}) - 2ik \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x})}{\partial z} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{x})}{\partial z^2} = 0, \quad (2.4)$$

∇_t^2 denota o laplaciano nas componentes transversais x e y . Uma expansão em série de Taylor da amplitude, considerando variação lenta em um intervalo da ordem de um comprimento de onda,

$$\mathbf{A}(x, y, z + \Delta z) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x})}{\partial z} \Delta z + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{x})}{\partial z^2} \Delta z^2 + \dots,$$

poderá ser truncada até primeira ordem, considerando $\Delta z \sim \lambda$, desde que

$$\frac{1}{2} \left| \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{x})}{\partial z^2} \right| \lambda^2 \ll \left| \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x})}{\partial z} \right| \lambda,$$

ou de outra maneira

$$\left| \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{x})}{\partial z^2} \right| \ll 2k \left| \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x})}{\partial z} \right|.$$

Levando essa aproximação a cabo em (2.4) chegamos à equação de onda paraxial

$$\nabla_t^2 \mathbf{A}(\mathbf{x}) - 2ik \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x})}{\partial z} = 0. \quad (2.5)$$

São soluções da equação paraxial para cada uma das componentes de \mathbf{A} as funções de Hermite-Gauss as quais formam um conjunto completo de soluções e são os modos normais de um laser. A função de Hermite-Gauss de ordem 0,0 se expressa por

$$A_{0,0}(x, y, z) = A_0 \frac{w_0}{w(z)} \exp \left[\frac{-\rho^2}{w^2(z)} \right] \exp \left[-ik \frac{\rho^2}{2R(z)} + i\zeta(z) \right],$$

em que:

- $w(z) = w_0 \left[1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right]^{1/2}$ é o raio do feixe, com $z_0 = \frac{w_0^2 \pi}{\lambda}$;
- $R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_0}{z} \right)^2 \right]$ é o raio de curvatura das frentes de onda;

- $\zeta(z) = \text{tg}^{-1} \left(\frac{z}{z_0} \right)$;
- w_0 é a largura do feixe em $z = 0$, A_0 é uma constante complexa e $\rho^2 = x^2 + y^2$.

A amplitude do campo elétrico em função das variáveis espaciais transversais à direção de propagação é chamada perfil transversal do feixe.

2.2. Transformada de Fourier óptica

Desejamos descrever a propagação de um feixe luminoso através da configuração mostrada na Fig. 2.1, desde o plano A , definido por $z = 0$, até o plano B , definido por $z = 2f + \Delta$ e chamado plano focal. Entre os planos A e B há vácuo (ou ar) e uma lente esférica, biconvexa, de distância focal f , posicionada tal que sua distância ao plano A é igual a f , bem como sua distância ao plano B . A lente é delgada no sentido de que sua espessura Δ é muito menor que sua distância focal.

Consideremos uma onda eletromagnética monocromática com comprimento de onda λ_0 no vácuo, caracterizada pela função amplitude $U(x, y, z)$, a qual pode representar tanto o campo elétrico quanto o magnético, propagando-se entre os planos A e B no sentido de z positivo. Uma vez que a lente e o espaço livre são lineares e isotrópicos, não é preciso levar em conta o caráter vetorial da onda [65].

O problema a ser solucionado pode ser enunciado como: dado que no plano A a amplitude da onda seja expressa pela função $f(x, y) = U(x, y, 0)$, qual será a função $g(x, y) = U(x, y, 2f + \Delta)$ que expressa a amplitude da onda no plano B ? Objetivamos ao fim desta seção concluir que $g(x, y)$ é proporcional à transformada de Fourier (TF) de $f(x, y)$ e que, portanto, tal configuração pode ser usada na realização de TF de funções de duas variáveis.

Escrevamos a função amplitude da onda, antes de atingir a lente, como uma superposição de ondas planas com vetor de onda \mathbf{k} amplitude $\tilde{U}(\mathbf{k})/(2\pi)^3$

$$U(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \tilde{U}(k_x, k_y, k_z) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (2.6)$$

Como supusemos inicialmente que a onda fosse monocromática e no espaço livre seu comprimento de onda é λ_0 , somente contribuirão para a superposição aquelas ondas planas cujo vetor de onda satisfaça

$$\mathbf{k}^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \right)^2, \quad (2.7)$$

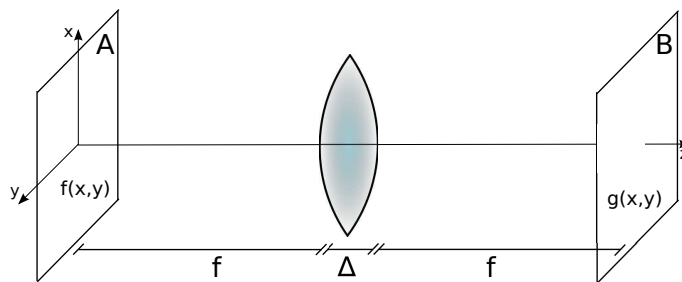


Figura 2.1.: Configuração utilizando uma lente esférica biconvexa com distância focal f e espessura Δ , posicionada no espaço livre, que leva da função do perfil transversal de uma onda eletromagnética no plano A , $f(x, y)$, à função $g(x, y)$ no plano B .

ou, de maneira mais conveniente, somente contribuirão aqueles vetores de onda cuja componente z satisfaça

$$k_z = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 - k_x^2 - k_y^2}, \quad (2.8)$$

em que foi levado em conta que a onda se propaga para a direita, devendo k_z ser positivo.

Definindo a função $F(k_x, k_y)$ por

$$\tilde{U}(k_x, k_y, k_z) = 2\pi F(k_x, k_y) \delta\left(k_z - \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 - k_x^2 - k_y^2}\right),$$

temos

$$U(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dk_x \int dk_y F(k_x, k_y) e^{-iz\sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 - k_x^2 - k_y^2}} e^{-ik_x x - ik_y y}. \quad (2.9)$$

Assim, em $z = 0$

$$U(x, y, 0) = f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dk_x \int dk_y F(k_x, k_y) e^{-ik_x x - ik_y y} \quad (2.10)$$

e identificamos $F(k_x, k_y)$ com a TF do perfil transversal do feixe no plano A ¹.

Admitiremos ainda que entre o plano A e a lente o feixe é paraxial, ou seja, diverge pouco de sua direção de propagação. Isso é possível se as componentes x

¹Adotaremos a transformada de Fourier de uma função de duas variáveis definida por

$$F(k_x, k_y) = \int dx \int dy f(x, y) e^{ik_x x + ik_y y}.$$

e y dos vetores de onda que compõem a superposição forem muito menores que a componente na direção de propagação z . Na verdade, esse é somente um caso particular da aproximação paraxial mais geral, conhecido como aproximação de Fresnel [28]. Sob essa consideração, a expansão em série de (2.8) permite escrever

$$k_z \approx \frac{2\pi}{\lambda_0} - \frac{\lambda_0}{4\pi} (k_x^2 + k_y^2) = k_0 - \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k_0}, \quad (2.11)$$

onde $k_0 = \frac{\lambda_0}{2\pi}$ é o módulo do vetor de onda no vácuo. Logo, utilizando (2.11) em (2.9), na iminência de penetrar a lente ($z = f$), o perfil transversal do feixe será

$$U(x, y, f) = \frac{e^{-ik_0 f}}{(2\pi)^2} \int dk_x \int dk_y F(k_x, k_y) e^{if \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k_0}} e^{-ik_x x - ik_y y}. \quad (2.12)$$

Na aproximação paraxial, imediatamente após a passagem por uma lente esférica biconvexa, uma onda adquire a fase dependente da posição dada por [28]

$$e^{-ik_0 \Delta} e^{ik_0 \frac{x^2 + y^2}{2f}}, \quad (2.13)$$

em que Δ é a espessura da lente, f é sua distância focal e (x, y) é a posição sobre o plano da lente, com origem no centro desta. Desta forma, no plano $z = f + \Delta$ o perfil transversal da onda é dado por

$$\begin{aligned} U(x, y, f + \Delta) &= e^{-ik_0 \Delta} e^{ik_0 \frac{x^2 + y^2}{2f}} U(x, y, f) \\ &= \frac{e^{-ik_0(f + \Delta)}}{(2\pi)^2} e^{ik_0 \frac{x^2 + y^2}{2f}} \int dk_x \int dk_y F(k_x, k_y) e^{if \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k_0}} e^{-ik_x x - ik_y y}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Para saber como a onda gerada após a lente se propagará, poderíamos escrever o perfil transversal (2.14), resultante da passagem pela lente, como superposição de ondas planas projetadas no plano xy , pois, dados k_x e k_y , o valor de k_z é determinado para cada onda plana da superposição a partir da informação de que a onda é monocromática. No entanto, é conhecido que, dado o perfil transversal de um feixe paraxial em certo plano, digamos $U(x, y, f + \Delta)$, podemos calcular o perfil transversal do feixe em um plano paralelo, separado uma distância f , após propagação no

A transformada inversa se expressa por

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dk_x \int dk_y F(k_x, k_y) e^{-ik_x x - ik_y y}.$$

espaço livre, pela expressão [66]

$$g(x, y) = \int dx' \int dy' h(x - x', y - y') U(x', y', f + \Delta), \quad (2.15)$$

em que $h(x, y)$ é a função resposta do espaço livre dada por

$$h(x, y) = \frac{i}{\lambda_0 f} e^{-ik_0 f} e^{-ik_0 \frac{x^2 + y^2}{2f}}. \quad (2.16)$$

Substituindo (2.14) e (2.16) em (2.15), obtemos o resultado desejado²

$$g(x, y) = \frac{ie^{-2ik_0 f}}{\lambda_0 f} F\left(\frac{k_0 x}{f}, \frac{k_0 y}{f}\right) \quad (2.17)$$

e concluímos que a amplitude da onda no ponto (x, y) sobre o plano B é proporcional à transformada de Fourier da amplitude no plano A avaliada no ponto $(k_x = \frac{k_0 x}{f}, k_y = \frac{k_0 y}{f})$ do espaço recíproco.

Caso a distância do plano A à lente não fosse igual à distância focal, ainda assim a amplitude da onda em B seria proporcional à TF de $f(x, y)$. Nesta configuração, porém, o fator de proporcionalidade conteria uma fase dependente da posição.

Determinemos também o perfil transversal no caso de replicarmos o sistema da maneira como é mostrado na Fig. 2.2. Podemos utilizar o resultado (2.17) para obter a amplitude de saída $l(x, y)$, tomando como amplitude de entrada $g(x, y)$.

²A substituição resulta em

$$g(x, y) = \frac{i}{\lambda_0 f} \frac{e^{-ik_0(2f+\Delta)}}{(2\pi)^2} \int dx' \int dy' \int dk_x \int dk_y e^{-\frac{ik_0}{2f}((x-x')^2+(y-y')^2)} e^{\frac{ik_0}{2f}(x'^2+y'^2)} e^{\frac{if}{2k_0}(k_x^2+k_y^2)} e^{-i(k_x x' + k_y y')} F(k_x, k_y)$$

$$g(x, y) = \frac{i}{\lambda_0 f} \frac{e^{-ik(2f+\Delta)}}{(2\pi)^2} e^{-\frac{ik_0}{2f}(x^2+y^2)} \int dk_x \int dk_y \left[\int dx' e^{i\left(\frac{k_0 x}{f} - k_x\right)x'} \right] \left[\int dy' e^{i\left(\frac{k_0 y}{f} - k_y\right)y'} \right] e^{\frac{if}{2k_0}(k_x^2+k_y^2)} F(k_x, k_y).$$

Utilizando que a função delta de Dirac pode ser escrita como $\delta(k) = \frac{1}{2\pi} \int dx e^{ikx}$ e desprezando a espessura da lente, chegamos a

$$g(x, y) = \frac{i}{\lambda_0 f} e^{-ik_0 2f} e^{-\frac{ik_0}{2f}(x^2+y^2)} \int dk_x \int dk_y \delta\left(\frac{k_0 x}{f} - k_x\right) \delta\left(\frac{k_0 y}{f} - k_y\right) e^{\frac{if}{2k_0}(k_x^2+k_y^2)} F(k_x, k_y),$$

que leva ao resultado (2.17) após solução das integrais, que são triviais devido à presença das funções delta.

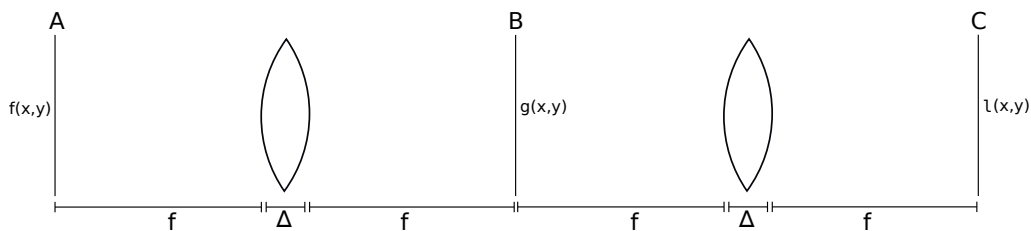


Figura 2.2.: Esquema para realização de TF duplicado: realização de TF inversa.

Com esse fim, calculemos a TF de $g(x, y)$

$$\begin{aligned}
 G(k_x, k_y) &= \int dx \int dy g(x, y) e^{ik_x x + ik_y y} \\
 &= \frac{i e^{-2ik_0 f}}{\lambda_0 f} \int dx \int dy F\left(\frac{k_0 x}{f}, \frac{k_0 y}{f}\right) e^{ik_x x + ik_y y} \\
 &= \frac{i e^{-2ik_0 f} \lambda_0}{(2\pi)^2} \int dx' \int dy' F(x', y') e^{i\frac{f}{k_0} k_x x' + i\frac{f}{k_0} k_y y'} \\
 &= i e^{-2ik_0 f} \lambda_0 f \left(-\frac{f}{k_0} k_x, -\frac{f}{k_0} k_y\right), \tag{2.18}
 \end{aligned}$$

sendo a última linha obtida da penúltima por comparação com (2.10). Então, de (2.17) obtemos que a amplitude da onda no plano C é dada por

$$l(x, y) = e^{-2ik_0 f} f(-x, -y), \tag{2.19}$$

isto é, a utilização da segunda lente realiza a TF inversa porém com eixos x e y invertidos.

2.3. Placas de onda

Consideremos a propagação de uma onda eletromagnética monocromática em um meio homogêneo, linear, não magnético e eletricamente anisotrópico. Nesse meio o deslocamento elétrico \mathbf{D} é escrito em termos do campo elétrico \mathbf{E} por

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{E}, \tag{2.20}$$

em que $\boldsymbol{\epsilon}$ é o tensor dielétrico, representado por uma matriz 3×3 . Em geral, as componentes do tensor dielétrico dependem da frequência de oscilação do campo elétrico. O campo magnético \mathbf{B} se relaciona linearmente com a intensidade magnética

\mathbf{H} através da permeabilidade magnética μ_0 , $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$.

Caso o meio seja não dissipativo, é sempre possível escolher uma orientação dos eixos de coordenadas em que o tensor dielétrico é diagonal [67]. Se duas das constantes dielétricas restantes forem iguais, o meio é dito uniaxial, sendo seu eixo óptico ao longo da direção cuja constante dielétrica é distinta. Essa propriedade é comum entre os cristais aplicados em óptica, como quartzo e calcita.

Em um sistema de coordenadas com eixo x coincidente com o eixo óptico de um cristal uniaxial, o tensor dielétrico no interior do cristal se escreve como

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2 \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Suponhamos que as equações de Maxwell possuam ondas planas como solução para todos os campos no interior de um cristal uniaxial, isto é, que os vetores \mathbf{E} , \mathbf{D} e \mathbf{H} possam ser escritos como vetores constantes multiplicados por $\exp(i\omega_0 t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$, sendo ω_0 a frequência e \mathbf{k} o vetor de onda. A substituição desta solução nas equações de Maxwell nos fornece a seguinte relação

$$\mathbf{D} = \frac{1}{\mu_0 \omega_0^2} [\mathbf{k}^2 \mathbf{E} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{k}]. \quad (2.22)$$

Considerando o caso particular de o vetor de onda ser paralelo ao eixo z do sistema de coordenadas em que $\boldsymbol{\epsilon}$ é expresso por (2.21), a comparação componente a componente das equações (2.20) e (2.22) leva às condições

$$\epsilon_1 E_x = \frac{\mathbf{k}^2}{\mu_0 \omega_0^2} E_x \quad \epsilon_2 E_y = \frac{\mathbf{k}^2}{\mu_0 \omega_0^2} E_y \quad \epsilon_2 E_z = 0, \quad (2.23)$$

satisfeitas por uma onda transversal ($E_z = 0$) com uma das componentes perpendiculares ao vetor de onda nula. Se $E_y = 0$ ($E_x = 0$), então $\mathbf{k} = \sqrt{\epsilon_1 \mu_0} \omega_0 \hat{\mathbf{z}} = 2\pi \frac{n_1}{\lambda_0} \hat{\mathbf{z}}$ ($\mathbf{k} = \sqrt{\epsilon_2 \mu_0} \omega_0 \hat{\mathbf{z}} = 2\pi \frac{n_2}{\lambda_0} \hat{\mathbf{z}}$), sendo λ_0 o comprimento de onda no vácuo e $n_1 = \sqrt{\epsilon_1 / \epsilon_0}$ ($n_2 = \sqrt{\epsilon_2 / \epsilon_0}$) o índice de refração para campo elétrico com polarização $\hat{\mathbf{x}}$ ($\hat{\mathbf{y}}$ ou $\hat{\mathbf{z}}$), ϵ_0 é a permissividade elétrica do vácuo. Por possuir dois valores de índice de refração, um cristal uniaxial é também chamado birrefringente. Pela linearidade das equações de Maxwell, a solução de onda plana com frequência ω_0 com propagação

ao longo da direção \hat{z} é

$$\mathbf{E}(z, t) = \left(E_x e^{i\omega_0 t - i2\pi \frac{n_1}{\lambda_0} z} \hat{\mathbf{x}} + E_y e^{i\omega_0 t - i2\pi \frac{n_2}{\lambda_0} z} \hat{\mathbf{y}} \right) = e^{i\omega_0 t - i2\pi \frac{n_1}{\lambda_0} z} \left(E_x \hat{\mathbf{x}} + E_y e^{-i2\pi \frac{n_2 - n_1}{\lambda_0} z} \hat{\mathbf{y}} \right). \quad (2.24)$$

Mesmo se o perfil da onda no plano perpendicular à direção de propagação (E_x e E_y) não for constante por todo o plano, ainda assim a expressão (2.24) será válida na aproximação paraxial desde que a distância de propagação no interior do material não seja suficiente para que haja dispersão.

Uma placa de onda é uma lâmina de material birrefringente cortada paralelamente ao eixo óptico do material. Consideremos uma placa cujo material birrefringente é positivo³ e cuja espessura é d , como na Fig. 2.3. Definiremos eixos x e y contidos no plano da lâmina, sendo o primeiro coincidente com o eixo óptico. Chamamos de V (vertical) e H (horizontal) os eixos de um sistema de coordenadas rotacionado de 45° em relação ao sistema xy . Os versores dos dois sistemas de coordenadas são relacionados por

$$\hat{\mathbf{H}} = \frac{\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{2}} \quad \hat{\mathbf{V}} = \frac{\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{2}}. \quad (2.25)$$

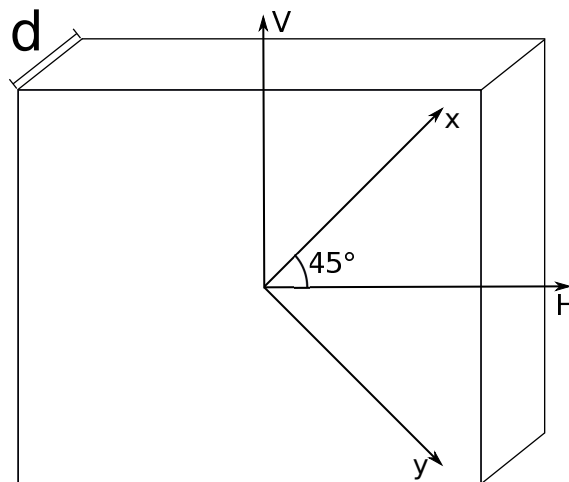


Figura 2.3.: Placa de onda cujo eixo óptico coincide com o eixo x , novos eixos, vertical V e horizontal H , foram convenientemente definidos. O eixo z entra na página e tem sua origem na face dianteira da placa.

Uma onda eletromagnética com comprimento de onda λ_0 se propaga no sentido de z positivo e incide perpendicularmente à placa. A amplitude de campo

³Se $\epsilon_1 > \epsilon_2$ ($n_1 > n_2$) o cristal é dito positivo, como é o caso do quartzo.

elétrico na iminência de penetrar a placa é dada por

$$\mathbf{E}(x, y, 0) = E_x(x, y)\hat{\mathbf{x}} + E_y(x, y)\hat{\mathbf{y}}. \quad (2.26)$$

Ao emergir da placa em $z = d$, o campo elétrico será, de acordo com (2.24),

$$\mathbf{E}(x, y, d) = e^{-i2\pi\frac{n_1}{\lambda_0}d} \left(E_x(x, y)\hat{\mathbf{x}} + E_y(x, y)e^{-i2\pi\frac{n_2-n_1}{\lambda_0}d}\hat{\mathbf{y}} \right). \quad (2.27)$$

Se a espessura da placa é tal que $d = \lambda_0/2(n_1 - n_2)$, essa placa é denominada placa de meia onda (*half wave plate*, HWP). A diferença de fase das duas componentes perpendiculares de polarização após atravessar a HWP é $e^{-i2\pi\frac{n_2-n_1}{\lambda_0}d} = -1$. Seu efeito sobre uma onda com polarização horizontal na entrada $\mathbf{E}(x, y, 0) = E(x, y)(\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}})/\sqrt{2}$ é transformá-la em uma onda com polarização vertical na saída $\mathbf{E}(x, y, d) = E(x, y)(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}})/\sqrt{2}$. Analogamente, se na entrada a polarização da onda é vertical, após atravessar a placa de meia onda a polarização será horizontal.

Outro caso importante é o de placa com espessura $d = \lambda_0/4(n_1 - n_2)$, que é chamada placa de quarto de onda (*quarter wave plate*, QWP). Uma onda com polarização horizontal antes de passar pela QWP, após atravessá-la terá campo elétrico $\mathbf{E}(x, y, d) = E(x, y)(\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}})/\sqrt{2}$, que após algumas manipulações se escreve como $\mathbf{E}(x, y, d) = E(x, y)e^{i\frac{\pi}{4}}(\hat{\mathbf{H}} - i\hat{\mathbf{V}})/\sqrt{2}$. Analogamente, se a polarização antes de atravessar a placa é vertical, após atravessá-la o campo será $\mathbf{E}(x, y, d) = E(x, y)e^{-i\frac{\pi}{4}}(\hat{\mathbf{H}} + i\hat{\mathbf{V}})/\sqrt{2}$. A placa de quarto de onda é utilizada para gerar ondas circularmente polarizadas a partir de ondas linearmente polarizadas. O resultado da passagem de uma onda com polarização linear horizontal pela QWP é uma onda circularmente polarizada à esquerda, enquanto que, se inicialmente a onda possui polarização linear vertical, após a QWP sua polarização será circular à direita.

Podemos sintetizar os efeitos das placas de meia onda e um quarto de onda sobre as polarizações horizontal e vertical por

$$\hat{\mathbf{H}} \xrightarrow{\text{HWP}} \hat{\mathbf{V}} \quad \hat{\mathbf{V}} \xrightarrow{\text{HWP}} \hat{\mathbf{H}} \quad (2.28)$$

$$\hat{\mathbf{H}} \xrightarrow{\text{QWP}} e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{(\hat{\mathbf{H}} - i\hat{\mathbf{V}})}{\sqrt{2}} \quad \hat{\mathbf{V}} \xrightarrow{\text{QWP}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{(\hat{\mathbf{H}} + i\hat{\mathbf{V}})}{\sqrt{2}}. \quad (2.29)$$

Podemos, ainda, escrever a transformação efetuada pela QWP sobre uma

onda que tenha ambas as componentes de polarização

$$\mathbf{E}(x, y, 0) = E_1 \hat{\mathbf{H}} + E_2 \hat{\mathbf{V}} \xrightarrow{QWP} e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{((E_1 - iE_2)\hat{\mathbf{H}} - i(E_1 + iE_2)\hat{\mathbf{V}})}{\sqrt{2}}, \quad (2.30)$$

em que E_1 e E_2 são as amplitudes de cada polarização do campo e dependem da posição no plano HV .

Como tratamos incidência normal à superfície do cristal, em momento algum falamos sobre refração. No entanto, se a incidência é oblíqua, o feixe se refrata com ângulos de refração distintos para polarização perpendicular ou paralela ao eixo óptico do cristal. Assim, emergirão dois feixes separados espacialmente, cada qual com polarização linear em uma direção, paralela ou perpendicular ao eixo óptico. Um tal dispositivo que separa um feixe em dois devido à polarização é chamado divisor de feixe por polarização (*polarizing beam splitter*, PBS).

2.4. Modulador espacial de luz

Modulador espacial de luz (*Spatial light modulator*, SLM) é um termo geral utilizado para dispositivos que aplicam princípios variados como efeitos acustico-ópticos, eletro-ópticos e anisotropia de cristais líquidos para modular a fase, a amplitude ou a polarização de um feixe luminoso. Nesta seção, descreveremos de maneira bastante simples o funcionamento de um SLM que utilize cristal líquido.

Basicamente, cristais líquidos (CLs) são materiais que estão em uma fase tal que fluem como líquidos e se adaptam ao recipiente a que estão contidos, apresentando, no entanto, propriedades anisotrópicas típicas de cristais. Tipicamente, materiais que possuem fase de cristal líquido são formados por moléculas longas. A anisotropia se deve ao alinhamento preferencial do eixo maior das moléculas. Cristais líquidos podem ser classificados em três tipos principais: esméticos, nemáticos e colestéricos, sendo que os nemáticos são os que possuem maior gama de aplicações. As moléculas de CL nemáticos estão, na média, alinhadas a uma direção preferencial, porém a posição de seus centros é distribuída aleatoriamente. Assim, a anisotropia ocorre somente ao longo de um eixo e esse tipo de material tem comportamento semelhante ao de cristais uniaxiais cujo eixo coincide com a orientação do eixo maior das moléculas.

Consideremos uma porção de espessura d de CL nemático positivo ($\epsilon_1 > \epsilon_2$), à qual chamaremos célula, envolvida por duas placas de vidro que forçam as

moléculas a se orientarem na vertical, como mostrado na Fig. 2.4(a). Uma diferença de potencial V pode ser aplicada entre as duas placas (Fig. 2.4(b)). A densidade de energia eletrostática no interior do CL é dada por $-\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = -(\epsilon_1 E_1^2 + \epsilon_2 E_2^2 + \epsilon_2 E_3^2)$, com $\mathbf{E} = V/d\hat{z}$, que é minimizada se as moléculas se alinham à direção do campo, uma vez que $\epsilon_1 > \epsilon_2$ e ϵ_1 é a permissividade elétrica na direção do eixo maior das moléculas.

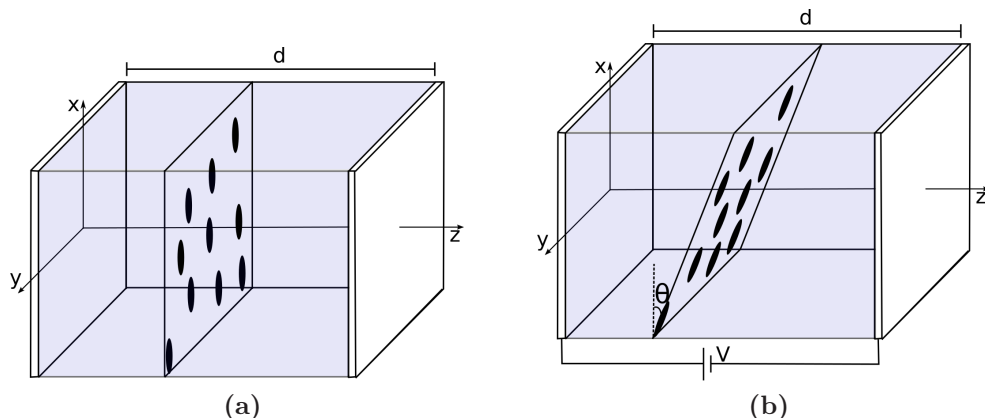


Figura 2.4.: (a) Célula de cristal líquido nemático de espessura d encerrada por duas placas de vidro que mantém o alinhamento das moléculas na direção x . (b) Se uma diferença de potencial V for aplicada entre as placas as moléculas tenderão a se alinhar com o campo e, no equilíbrio, formarão ângulo θ com o eixo x .

Ao aplicar campo elétrico à célula, Fig. 2.4(b), as moléculas tenderão a se alinhar ao campo, porém encontrarão resistência devido à força exercida sobre elas pelas placas de vidro no sentido de manter sua orientação na vertical. A inclinação das moléculas em relação ao eixo x será dada como função do potencial aplicado por [28]

$$\theta = \begin{cases} 0, & V < V_c \\ \frac{\pi}{2} - 2\text{tg}^{-1} \left[\exp \left(-\frac{V-V_c}{V_0} \right) \right], & V > V_c \end{cases}, \quad (2.31)$$

em que V_0 é uma constante e V_c é o potencial crítico a partir do qual as moléculas começam a se inclinar. Ao considerarmos a incidência de uma onda eletromagnética perpendicular às placas de vidro, devemos nos atentar ao fato de que o plano das placas não contém o eixo cristalino e que, portanto, o tratamento dado na Seção 2.3 não é válido aqui. Entretanto, as Eqs. (2.20) e (2.22) continuam válidas. É possível mostrar que a exigência de que as equações mencionadas sejam iguais leva a dois valores de índice de refração. O índice de refração será n_2 para polarização

perpendicular ao eixo óptico (direção y) e satisfará [68]

$$\frac{1}{n(\theta)^2} = \frac{\cos^2 \theta}{n_1^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_2^2} \quad (2.32)$$

para polarização perpendicular ao vetor de onda, porém com componente na direção do eixo óptico (direção x).

Analogamente à Eq. (2.27), após atravessar a célula as duas componentes de campo elétrico terão diferença de fase dada por

$$\phi(\theta) = 2\pi \frac{n_2 - n(\theta)}{\lambda_0} d, \quad (2.33)$$

havendo, por conseguinte, modulação de fase controlada pela diferença de potencial aplicada.

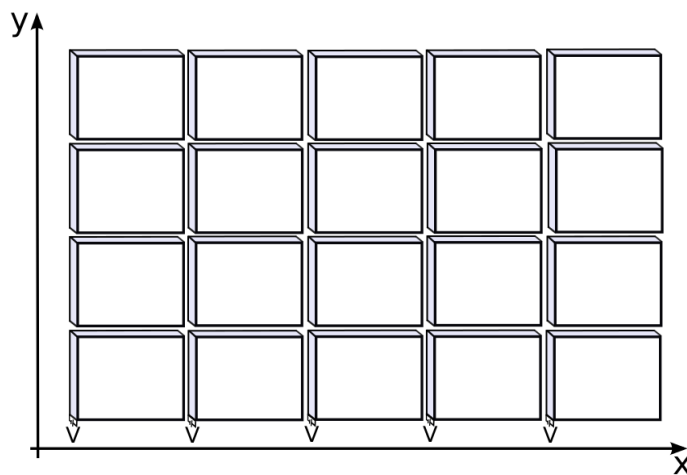


Figura 2.5.: Várias células de cristal líquido, dispostas lado a lado formando um modulador. A diferença de potencial aplicada a cada célula é controlada individualmente de forma que a fase impressa em uma frente de onda que atravesse o dispositivo dependerá da posição no plano xy .

Um modulador espacial de luz é composto por várias células, como a que acabamos de descrever, com dimensões microscópicas, dispostas lado a lado sobre um plano, como representado na Fig. 2.5. A diferença de potencial é controlada individualmente em cada célula por meios eletrônicos, de modo que a fase aplicada a uma frente de onda que atravesse o modulador dependerá da posição sobre o plano do modulador. Ao desejar imprimir uma fase que dependa da posição sobre o plano,

a diferença de potencial deverá ser ajustada de maneira que

$$e^{if(x,y)} = e^{i2\pi \frac{n_2 - n(\theta(x,y))}{\lambda_0} d}, \quad (2.34)$$

onde $\theta(x, y)$ é a inclinação das moléculas na célula cuja posição é (x, y) .

Notemos que o modulador somente imprime a fase em uma das componentes de polarização, a saber aquela que possua componente na direção do eixo óptico das células. Da maneira como foram definidos os eixos do modulador, a fase será impressa sobre a polarização x . O dispositivo que acabamos de descrever opera por transmissão do feixe, isto é, a fase é impressa após a travessia do modulador pelo feixe. Outros SLM são construídos sobre uma matriz de silício e operam por reflexão, sendo sua descrição análoga à apresentada aqui, porém levando em conta que o feixe passa duas vezes pelo cristal líquido [69]. Nas representações do capítulo seguinte consideraremos moduladores por reflexão.

SIMULAÇÃO ÓPTICA DE PARTÍCULA QUÂNTICA RELATIVÍSTICA

No Cap. 1 apresentamos a descrição de Dirac de uma partícula livre relativística, o movimento de *zitterbewegung* foi definido e a representação de Foldy-Wouthuysen foi mostrada. No Cap. 2 tratamos das transformações causadas por certos dispositivos sobre um feixe luminoso. No presente capítulo mostraremos de que modo o último pode ser usado como ferramenta na simulação do primeiro.

Apesar de vivermos em um espaço tridimensional, imaginar como seria a física de algo que exista restrito a uma ou duas dimensões espaciais e uma temporal pode ser útil para visualização do caso real. Assim, uma partícula em uma dimensão espacial apresentaria ZB e o menor número de graus de liberdade facilitaria a análise, por exemplo, dos regimes não relativístico, relativístico e ultrarrelativístico de velocidades. Além disso, existem sistemas reais que obedecem equações formalmente iguais à equação de Dirac com dimensão reduzida, como é o caso do grafeno [70].

Com essa motivação, trataremos primeiramente do caso de uma partícula quântica relativística, descrita pela equação de Dirac, restrita a um espaço unidimensional. Deixamos para este capítulo as expressões explícitas da TFW e da evolução temporal de um estado. O objetivo é que se torne mais direta a associação dessas transformações com as transformações sobre a onda eletromagnética que serão mostradas em seguida.

Nas Seções 3.2 e 3.3 trataremos, respectivamente, das simulações da dinâmica de partículas que existam em espaço bidimensional e um caso particular em que o espaço é tridimensional.

3.1. Partícula em espaço unidimensional

Nesta seção, consideraremos a dinâmica de uma partícula que obedeça à equação de Dirac 1 + 1 dimensional. Primeiramente, utilizaremos as expressões do Cap. 1 para obter expressões explícitas para um estado transformado por TFW em representação de momento, evoluído após um tempo t e, finalmente, sua expressão na representação convencional. Em seguida, mostraremos como tal evolução temporal pode ser impressa a um feixe luminoso.

3.1.1. Evolução temporal do estado de uma partícula em (1 + 1) dimensões

O vetor de estado de uma partícula em um instante de tempo t é obtido atuando o operador $e^{-iS} e^{-i\frac{H't}{\hbar}} e^{iS}$ sobre seu vetor de estado no instante $t = 0$. Tanto o operador de transformação de Foldy-Wouthuysen e^{iS} (Eq. (1.79)) quanto o operador de evolução temporal $e^{-i\frac{H't}{\hbar}}$ (Eq. (1.42) com H' dado por (1.80)) dependem somente do operador momento. Assim sendo, é mais adequado que adotemos a representação na qual esse operador é multiplicativo.

Dado o estado inicial de uma partícula livre restrita a apenas uma dimensão espacial, cuja coordenada seja x ,

$$\tilde{\psi}(0, x) = \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_1(x) \\ \tilde{\phi}_2(x) \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

obtemos o estado inicial na representação de momento realizando uma transformada de Fourier

$$\psi(0, p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{1}{2}}} \int dx \tilde{\psi}(0, x) e^{-i\frac{px}{\hbar}} = \begin{pmatrix} \phi_1(p) \\ \phi_2(p) \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

em que as funções $\phi_1(p)$ e $\phi_2(p)$ são as transformadas de Fourier de $\tilde{\phi}_1(x)$ e $\tilde{\phi}_2(x)$, respectivamente.

A escolha $\alpha = \sigma^x$ e $\beta = \sigma^z$ para as matrizes de Dirac resulta em $\beta\alpha = i\sigma^y$. Além disso, redefiniremos a função $\theta(p)$ da TFW (1.79) como $\theta(p) = \frac{p}{2|p|} \text{tg}^{-1} \left(\frac{|p|}{mc} \right)$, ou ainda

$$\theta(p) = \frac{1}{2} \text{tg}^{-1} \left(\frac{p}{mc} \right). \quad (3.3)$$

Sob essas considerações o operador de TFW se torna $e^{iS} = e^{i\sigma_y \theta(p)}$.

É conveniente que escrevamos o estado inicial como combinação dos auto-

vetores de σ_y , a saber

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix},$$

com autovalores 1 e -1 , respectivamente. Dessa maneira,

$$\psi(0, p) = \frac{\phi_1 - i\phi_2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \frac{\phi_1 + i\phi_2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

em que omitimos a dependência em p das componentes do spinor. Feito isso, calculamos facilmente a representação de FW desse estado

$$\begin{aligned} \psi'(0, p) &= e^{i\sigma_y\theta(p)}\psi(0, p) = e^{i\theta(p)}\frac{\phi_1 - i\phi_2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + e^{-i\theta(p)}\frac{\phi_1 + i\phi_2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \\ &= e^{i\theta(p)} \begin{pmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

em que definimos

$$\phi'_1 = \frac{\phi_1 - i\phi_2}{2} + e^{-2i\theta(p)}\frac{\phi_1 + i\phi_2}{2} \quad \text{e} \quad \phi'_2 = i\frac{\phi_1 - i\phi_2}{2} - ie^{-2i\theta(p)}\frac{\phi_1 + i\phi_2}{2}. \quad (3.6)$$

Note que, em geral, o operador da TFW é muito complicado. Em representação de posição, em que o momento é derivativo, temos $e^{i\theta(p)} = e^{i\theta(-i\partial/\partial x)}$. Porém, em representação de momento, $e^{i\theta(p)}$ é simplesmente um operador multiplicativo.

A evolução temporal do estado na nova representação é realizada pela atuação do operador de evolução $e^{-iH't/\hbar}$ sobre o estado inicial, em que H' é dado pela Eq. (1.80). Assim,

$$\psi'(t, p) = e^{-i\sigma_z E(p)t/\hbar}\psi'(0, p) = e^{i\theta(p)} \begin{pmatrix} e^{-i\mathcal{E}(p)t/\hbar}\phi'_1 \\ e^{i\mathcal{E}(p)t/\hbar}\phi'_2 \end{pmatrix} = e^{i\theta(p)} \begin{pmatrix} \phi''_1 \\ \phi''_2 \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

em que definimos

$$\phi''_1 = e^{-i\mathcal{E}(p)t/\hbar}\phi'_1 \quad \text{e} \quad \phi''_2 = e^{i\mathcal{E}(p)t/\hbar}\phi'_2 \quad (3.8)$$

e $\mathcal{E}(p) = c\sqrt{p^2 + (mc)^2}$ é o autovalor do operador $E(p)$ associado à autofunção $\psi'(0, p)$.

Finalmente, podemos retornar à representação convencional aplicando a

TFW inversa

$$\begin{aligned}
 \psi(t, p) &= e^{-i\sigma_y \theta(p)} \psi'(t, p) \\
 &= e^{i\theta(p)} \left\{ e^{-i\theta(p)} \frac{\phi_1'' - i\phi_2''}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + e^{i\theta(p)} \frac{\phi_1'' + i\phi_2''}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\} \\
 &= \frac{\phi_1'' - i\phi_2''}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + e^{2i\theta(p)} \frac{\phi_1'' + i\phi_2''}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Se, no entanto, desejarmos obter a função de onda no instante t como função da posição, basta realizarmos a transformada de Fourier inversa sobre a função dependente do momento

$$\tilde{\psi}(t, x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{1}{2}}} \int dp \psi(t, p) e^{i\frac{px}{\hbar}} = \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_1(t, x) \\ \tilde{\phi}_2(t, x) \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

e assim podemos calcular a média da posição por

$$\langle \mathbf{x} \rangle(t) = \sum_{i=1,2} \int dx x |\tilde{\phi}_i(t, x)|^2. \tag{3.11}$$

3.1.2. Analogia óptica

Os termos presentes na Eq. (3.4) são notadamente semelhantes ao resultado mostrado em (2.30) da transformação das componentes de polarização de uma onda eletromagnética ao atravessar uma placa de quarto de onda. Aliado a isso, o fato descrito na Seção 2.4, de que é possível imprimir fases dependentes da posição em uma das polarizações da onda, induz à ideia de que a evolução temporal do estado de uma partícula livre em uma dimensão possa ser emulada como uma transformação de um feixe luminoso monocromático paraxial.

Nessa analogia, identificamos a primeira componente do spinor com a amplitude do campo elétrico com polarização horizontal. De forma semelhante, a segunda componente é identificada com a amplitude da polarização vertical. As direções que estamos chamando horizontal e vertical são quaisquer duas direções perpendiculares entre si e ao vetor de onda. A posição x da partícula é então identificada com a coordenada em uma das dimensões sobre o plano transversal à direção de propagação do feixe. A menos que se deseje um estado inicial específico, nenhuma preparação inicial do feixe é necessária, sendo o estado inicial da partícula emulada igual ao

perfil produzido pelo laser.

Para que as impressões de fase sejam efetuadas no espaço de momentos, o feixe luminoso deve passar por uma TF óptica e tais impressões devem ter lugar no plano focal. Nesse plano, as fases dependentes de p são fases dependentes da posição sobre o plano e podem ser impressas sobre uma das polarizações por um SLM. Iremos supor que as fases são impressas na polarização vertical.

Suponhamos que o campo elétrico seja dado por

$$\tilde{\mathbf{E}}(x) = \tilde{\phi}_1(x)\hat{\mathbf{H}} + \tilde{\phi}_2(x)\hat{\mathbf{V}} \quad (3.12)$$

em certo plano transversal à direção de propagação. Não levaremos em conta a dependência com a posição na direção perpendicular ao eixo que definimos como x , o que significa que avaliaremos o campo elétrico sempre para o mesmo valor dessa coordenada. Os versores ortonormais $\hat{\mathbf{H}}$ e $\hat{\mathbf{V}}$ não têm qualquer relação com a direção definida como \hat{x} e, uma vez escolhidos, os referidos versores determinam a direção em que devem estar posicionados os eixos das placas de onda que serão empregadas.

Após passar por uma TF óptica o perfil transversal desse feixe no plano focal se torna

$$\mathbf{E}(p) = \phi_1(p)\hat{\mathbf{H}} + \phi_2(p)\hat{\mathbf{V}}, \quad (3.13)$$

em que $p = \hbar \frac{k_0 X}{f}$, sendo X a posição sobre o plano focal, conforme a Eq. (2.17) com $p = \hbar k$. Exceto por uma fase global, $\phi_1(p)$ e $\phi_2(p)$ são as transformadas de Fourier de $\tilde{\phi}_1(x)$ e $\tilde{\phi}_2(x)$, respectivamente.

A seguir, vamos esquematizar todas as fases do processo de transformação do feixe utilizando (2.28) e (2.30). Uma ilustração da transformação completa é mostrada na Fig. 3.1. O estado inicial é a amplitude do campo elétrico imediatamente após a emissão pelo laser, no plano do espelho. Obviamente, como não se pode manter o feixe no espaço de momentos até que todas as operações sejam realizadas, é necessário que se façam TFs e TFs inversas, tomando cuidado para que as fases, as quais dependem do momento, sejam aplicadas sempre no espaço de momentos. Na figura, todas as lentes são idênticas com distância focal f , de maneira que o plano do espelho é o espaço de coordenadas e o plano do modulador é o espaço de momentos.

- **Obtenção de $\psi'(0, p)$ a partir de $\psi(0, p)$.** Nesta etapa, dado que o perfil inicial do campo seja (3.13), é preciso misturar as componentes de polarização

e aplicar a fase da TFW como segue:

$$\begin{aligned}
 \phi_1 \hat{\mathbf{H}} + \phi_2 \hat{\mathbf{V}} &\xrightarrow{QWP1} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \left[(\phi_1 - i\phi_2) \hat{\mathbf{H}} - i(\phi_1 + i\phi_2) \hat{\mathbf{V}} \right] \\
 &\xrightarrow{SLM1} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \left[\overbrace{(\phi_1 - i\phi_2)}^{\phi_H} \hat{\mathbf{H}} - i \overbrace{e^{-2i\theta(p)}(\phi_1 + i\phi_2)}^{\phi_V} \hat{\mathbf{V}} \right] \\
 &\xrightarrow{QWP2} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{\pi}{4}}}{2} \left[(\phi_H - i\phi_V) \hat{\mathbf{H}} - i(\phi_H + i\phi_V) \hat{\mathbf{V}} \right] = \\
 &= \frac{i}{2} \overbrace{\left[(\phi_1 - i\phi_2) - e^{-2i\theta(p)}(\phi_1 + i\phi_2) \right]}^{\phi'_2} \hat{\mathbf{H}} + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \overbrace{\left[(\phi_1 - i\phi_2) + e^{-2i\theta(p)}(\phi_1 + i\phi_2) \right]}^{\phi'_1} \hat{\mathbf{V}} \\
 &\xrightarrow{HWP1} \phi'_1 \hat{\mathbf{H}} + \phi'_2 \hat{\mathbf{V}},
 \end{aligned}$$

Identificamos ϕ'_i com as definições da Eq.(3.6). Desta maneira, aplicamos sobre o campo elétrico uma transformação que levou de $\psi(0, p) = \phi_1(p) \hat{\mathbf{H}} + \phi_2(p) \hat{\mathbf{V}}$ ao estado $\psi'(0, p)$ (Eq. (3.5)), a menos da fase $e^{i\theta(p)}$. Na Fig. 3.1 a *HWP1* foi omitida, bem como a *HWP2* da próxima etapa. Isso se justifica no fato de que a segunda HWP apenas anula o efeito da primeira.

- **Obtenção de $\psi'(t, p)$ a partir de $\psi'(0, p)$.** Esta etapa consiste somente na aplicação da fase de evolução temporal em cada componente. Como a fase é impressa em apenas uma componente, a onda deverá bater duas vezes no modulador:

$$\begin{aligned}
 \phi'_1 \hat{\mathbf{H}} + \phi'_2 \hat{\mathbf{V}} &\xrightarrow{HWP2} \phi'_2 \hat{\mathbf{H}} + \phi'_1 \hat{\mathbf{V}} \\
 &\xrightarrow{SLM2} \phi'_2 \hat{\mathbf{H}} + e^{-i\mathcal{E}(p)t/\hbar} \phi'_1 \hat{\mathbf{V}} \\
 &\xrightarrow{HWP3} e^{-i\mathcal{E}(p)t/\hbar} \phi'_1 \hat{\mathbf{H}} + \phi'_2 \hat{\mathbf{V}} \\
 &\xrightarrow{SLM3} e^{-i\mathcal{E}(p)t/\hbar} \phi'_1 \hat{\mathbf{H}} + e^{i\mathcal{E}(p)t/\hbar} \phi'_2 \hat{\mathbf{V}} = \phi''_1 \hat{\mathbf{H}} + \phi''_2 \hat{\mathbf{V}},
 \end{aligned}$$

em que ϕ''_i são equivalentes às definições em (3.8).

- **Obtenção de $\psi(t, p)$ a partir de $\psi'(t, p)$.** Esta etapa é completamente análoga à primeira: as componentes de polarização são misturadas por uma

QWP e a fase da TFW inversa é aplicada por um SLM.

$$\begin{aligned}
 \phi_1'' \hat{\mathbf{H}} + \phi_2'' \hat{\mathbf{V}} &\xrightarrow{QWP3} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \left[(\phi_1'' - i\phi_2'') \hat{\mathbf{H}} - i(\phi_1'' + i\phi_2'') \hat{\mathbf{V}} \right] \\
 &\xrightarrow{SLM4} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \left[\overbrace{(\phi_1'' - i\phi_2'')}^{\phi'_H} \hat{\mathbf{H}} - i e^{2i\theta(p)} \overbrace{(\phi_1'' + i\phi_2'')}^{\phi'_V} \hat{\mathbf{V}} \right] \\
 &\xrightarrow{QWP4} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{\pi}{4}}}{2} \left[(\phi'_H - i\phi'_V) \hat{\mathbf{H}} - i(\phi'_H + i\phi'_V) \hat{\mathbf{V}} \right] \\
 &\xrightarrow{HWP4} \frac{(\phi'_H + i\phi'_V)}{2} \hat{\mathbf{H}} + \frac{i(\phi'_H - i\phi'_V)}{2} \hat{\mathbf{V}} = \\
 &= \frac{1}{2} \left[(\phi_1'' - i\phi_2'') + e^{2i\theta(p)} (\phi_1'' + i\phi_2'') \right] \hat{\mathbf{H}} + \\
 &\quad + \frac{i}{2} \left[(\phi_1'' - i\phi_2'') - e^{2i\theta(p)} (\phi_1'' + i\phi_2'') \right] \hat{\mathbf{V}}.
 \end{aligned}$$

Percebemos que o resultado final é análogo ao estado da expressão (3.9).

Por fim, o feixe passa por uma transformada de Fourier inversa e antes da medida de intensidade como função da posição no plano, deve passar por um PBS para que sejam medidas separadamente as intensidades de polarização horizontal e vertical.

Vale notar que todas as quantidades que determinam se o termo de *zitterbewegung* será mensurável, isto é, c , \hbar e m aparecem em nossa analogia como parâmetros a serem ajustados nas fases impressas pelos SLMs. O mesmo é válido para o tempo. Assim, se desejamos a média da posição em função do tempo, o procedimento descrito deve ser aplicado várias vezes variando o valor do parâmetro t na fase $e^{\pm i\mathcal{E}(p)t/\hbar}$. Para um dado parâmetro t a média da posição pode ser calculada utilizando as intensidades medidas da seguinte forma

$$\langle x \rangle(t) = \frac{\sum_{i=H,V} \int x I_i(x) dx}{\sum_{i=H,V} \int I_i(x) dx}, \quad (3.14)$$

em analogia com (3.11), já que $I_H(x) \propto |\phi_H(x)|^2 = |\tilde{\phi}_1(t, x)|^2$ e $I_V(x) \propto |\phi_V(x)|^2 = |\tilde{\phi}_2(t, x)|^2$.

Nossa simulação permite também que não retornemos à representação convencional e meçamos $I_i(x)$ ainda na representação de FW. Nesse caso, (3.14) representa a média do operador posição média (1.82) que, conforme mencionado no Cap. 1, não deve exibir ZB.

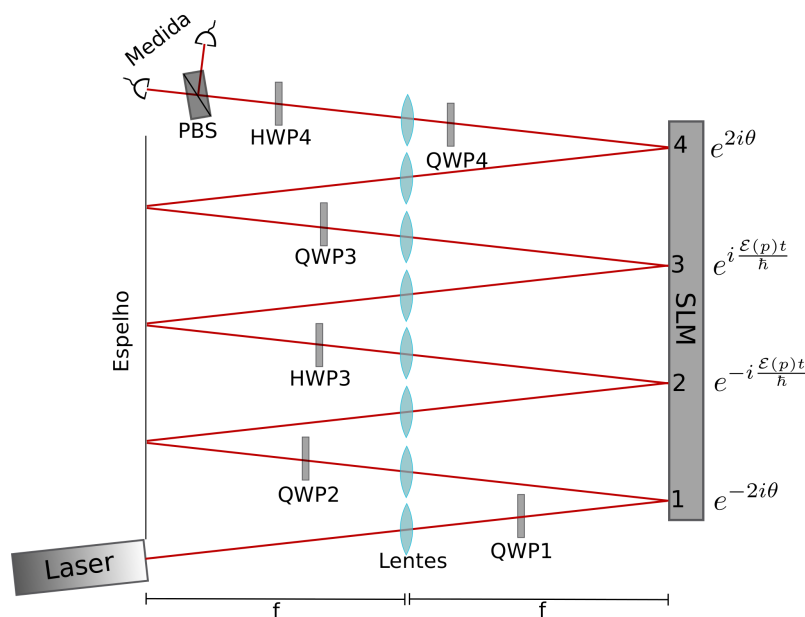


Figura 3.1.: Esquema para realização da simulação da evolução temporal de uma partícula livre utilizando um feixe luminoso. Ao lado do modulador, são indicadas as fases aplicadas em cada batida da onda nesse dispositivo. As HWP de número 1 e 2 foram omitidas, uma vez que uma apenas anula o efeito da outra.

3.1.3. Simulação numérica

Visando prever os resultados da simulação física, realizamos uma simulação numérica da equação de Dirac (1 + 1)dimensional. Antes de nos concentrarmos na simulação numérica, faremos apenas alguns comentários acerca das dimensões previstas para a simulação física.

A largura espacial do estado inicial é determinada pela cintura w_0 do feixe gaussiano emitido pelo laser, tipicamente da ordem de milímetros. Assim, se a origem do sistema de coordenadas é colocada no centro do feixe, temos que sua intensidade será não nula na região $-w_0 < x < w_0$. A largura da TF do perfil transversal é o inverso da largura da função que foi transformada e a região do espaço recíproco em que a intensidade é não nula é $-\frac{1}{w_0} < k < \frac{1}{w_0}$. No entanto, a TF óptica é avaliada no ponto do espaço recíproco $k = \frac{k_0 X}{f} = \frac{2\pi X}{\lambda_0 f}$. Logo o feixe ocupará a região $-\frac{\lambda_0 f}{2\pi w_0} < X < \frac{\lambda_0 f}{2\pi w_0}$ do plano focal. Considerando que a distância focal da lente seja $f = 30cm$ e que o comprimento de onda seja $\lambda_0 = 630nm$, a largura do feixe no plano focal será da ordem de $3.5 \times 10^{-2}mm$ e essa é a região aproximada em que as fases do modulador deverão ser aplicadas. Considerando que tipicamente os pixels de um modulador, e portanto, sua precisão, são da ordem de

alguns micrômetros, ainda assim estariam contidos na região do feixe uma dezena de pixels, porém é necessário que se amplie tal região, recorrendo, por exemplo, a uma lente com distância focal maior.

Analisemos as fases que deverão ser impressas pelo modulador. A fase da TFW pode ser escrita como função da posição sobre o plano focal, substituindo $p = h \frac{X}{\lambda_0 f}$ em (3.3), como

$$2\theta(p) = tg^{-1} \left(\frac{h}{mc} \frac{X}{\lambda_0 f} \right).$$

De maneira semelhante, a fase relativa à evolução temporal pode ser escrita como

$$\frac{t\mathcal{E}(p)}{\hbar} = 2\pi tc \sqrt{\left(\frac{X}{\lambda_0 f} \right)^2 + \left(\frac{mc}{h} \right)^2}.$$

Percebemos com isso que não é necessário definir três parâmetros (c , m e \hbar), mas somente dois: a velocidade da luz c e o comprimento Compton $\lambda_c = \frac{h}{mc}$. Podemos escolher um comprimento de referência Δ que terá o tamanho típico das dimensões do sistema de simulação, escrevendo $\lambda_c = d\Delta$. Se o parâmetro adimensional d é da ordem de uma unidade, então a amplitude de ZB, a qual é da ordem de λ_c , é mensurável. Esse comprimento típico pode ser tomado, por exemplo, como a cintura do feixe gaussiano.

Da mesma forma, a velocidade da luz pode ser escrita em unidade de distância típica Δ dividida por unidade de tempo típica \mathcal{T} , isto é, $c = \tilde{c} \frac{\Delta}{\mathcal{T}}$ em que \tilde{c} é um parâmetro adimensional. Como o tempo não tem qualquer significado físico na simulação, a unidade \mathcal{T} adotada não é relevante. O valor de \tilde{c} , bem como o intervalo de tempo utilizado, devem ser escolhidos visando tornar a frequência de ZB mensurável. Uma vez que a frequência é da ordem de $\frac{mc^2}{h} = \frac{c}{\lambda_c}$, utilizando as expressões com as unidades típicas, temos que a frequência é da ordem de $\frac{\tilde{c}}{d} \mathcal{T}^{-1}$.

Para prever os resultados da simulação física, resolvemos numericamente a equação de Dirac (1 + 1) dimensional utilizando dois métodos, a saber, o esquema Lax de diferenças finitas [71] e o método pseudo-espectral [72], ambos fornecendo os mesmos resultados. O estado inicial foi tomado como

$$\tilde{\psi}(0, x) = \frac{1}{(2\Delta\sqrt{2\pi})^{\frac{1}{2}}} e^{-\left(\frac{x}{2\Delta}\right)^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

uma superposição de estados com energias positivas e negativas. Fixamos o valor

da velocidade da luz em $c = 0.052 \frac{\Delta}{T}$ e a simulação foi realizada para cinco valores de comprimento Compton: $\lambda_c = 5.4\Delta$, 2.5Δ , 1.2Δ , 0.6Δ e $\lambda_c = \infty$, o último caso corresponde ao de partícula de massa nula. A motivação para a escolha de tais valores é que são os valores adotados na simulação de Gerritsma *et al.* [22], permitindo, portanto, a comparação de nossos resultados com os presentes no trabalho citado.

O resultado da média do operador posição calculada utilizando a solução numérica da equação de Dirac sob as condições descritas é mostrada na Fig. 3.2 (a). A Fig. 3.2 (b) mostra o resultado se um estado inicial com metade da largura do primeiro é utilizado, isto é, um estado inicialmente mais localizado. A diferença do estado mais localizado para o menos localizado é uma atenuação das oscilações. Podemos notar claramente que o movimento é composto por um termo linear acrescido de um termo oscilatório devido ao ZB. Uma partícula sem massa se moveria à velocidade da luz, sem a presença de ZB. À medida que o valor da massa aumenta e o comprimento Compton diminui, a amplitude de oscilação parece diminuir, enquanto a frequência aumenta.

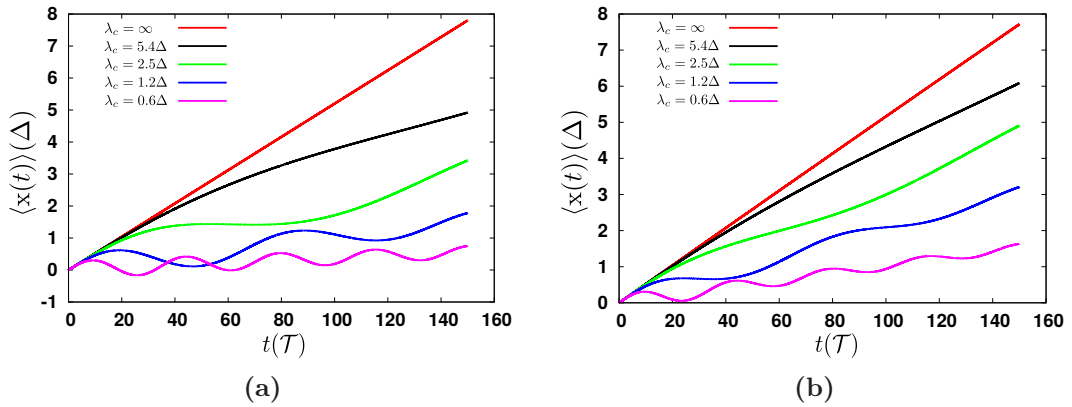


Figura 3.2.: Média do operador posição em função do tempo para partículas cuja dinâmica seja dada pela equação de Dirac $(1 + 1)$ dimensional. O valor da velocidade da luz é fixo em $c = 0.052 \frac{\Delta}{T}$, enquanto o comprimento Compton assume os valores $\lambda_c = 5.4\Delta$, 2.5Δ , 1.2Δ , 0.6Δ e $\lambda_c = \infty$. A largura do estado inicial é (a) Δ e (b) $\Delta/2$.

Como o estado inicial é o mesmo em todos os casos, isto significa que a distribuição de momentos é a mesma e, portanto, variar o valor da massa implica em alterar a distribuição de velocidades. Podemos dizer, então, que estamos observando diferentes regimes de velocidade. Em representação de momento, o estado (3.15) se

expressa por

$$\psi(p) = \left(\frac{\Delta}{\sqrt{2\pi\hbar}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{\Delta p}{\hbar}\right)^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

uma distribuição de momentos com valor relevante para $p \sim \frac{\hbar}{\Delta}$. A condição de regime não relativístico $p \ll mc$ pode ser expressa como $\frac{\hbar}{\Delta} \ll mc$, ou ainda, $\lambda_c \ll \Delta$, o que corresponde à curva rosa na Fig. 3.2. Da mesma maneira, se $p \gg mc$, trata-se do regime relativístico de velocidades, o que também pode ser expresso por $\frac{\hbar}{\Delta} \gg mc$ ou $\lambda_c \gg \Delta$, o que corresponde à curva em preto na Fig. 3.2.

É interessante notar que a média do momento sobre o estado inicial escolhido é nula. Não obstante, a média do operador velocidade clássica cpH^{-1} não é nula, conferindo o caráter crescente à média da posição (Eq. (1.78)). Essa aparente inconsistência é imediatamente entendida se nos recordarmos que estados com energia negativa têm velocidade de sinal oposto ao momento. Podemos escrever o vetor de estado (3.16) como combinação dos autovetores do hamiltoniano com energia positiva $u(p) = \begin{pmatrix} E + mc^2 & pc \end{pmatrix}^T$ e com energia negativa $v(p) = \begin{pmatrix} -pc & E + mc^2 \end{pmatrix}^T$ como

$$\psi(p) = \left(\frac{\Delta}{\sqrt{2\pi\hbar}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\left(\frac{\Delta p}{\hbar}\right)^2} \left[\frac{cp + mc^2 + E}{2E(E + mc^2)} u(p) + \frac{mc^2 + E - cp}{2E(E + mc^2)} v(p) \right].$$

Assim, quando o momento é positivo, o primeiro termo contribui com velocidade positiva, enquanto o segundo contribui com velocidade negativa, porém como o coeficiente que acompanha $v(p)$ é menor que o que acompanha $u(p)$, a soma das contribuições resultará positiva. O mesmo ocorre se o momento é negativo.

3.2. Partícula em espaço bidimensional

Analogamente à seção anterior, primeiramente escreveremos expressões explícitas para a transformação sofrida por um estado pela evolução temporal e posteriormente mostraremos como essa transformação pode ser emulada pela transformação de um feixe luminoso monocromático paraxial.

3.2.1. Evolução temporal do estado de uma partícula em $(1 + 2)$ dimensões

Dado o estado inicial de uma partícula livre restrita a duas dimensões espaciais, cujas coordenadas chamaremos (x, y) ,

$$\tilde{\psi}(t = 0, x, y) = \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_1(x, y) \\ \tilde{\phi}_2(x, y) \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

obtemos o estado inicial na representação de momento realizando uma transformada de Fourier com relação às duas coordenadas

$$\psi(t = 0, p_x, p_y) = \frac{1}{(2\pi\hbar)} \int d^2x \tilde{\psi}(t = 0, x, y) e^{-\frac{i}{\hbar}(p_x x + p_y y)} = \begin{pmatrix} \phi_1(p_x, p_y) \\ \phi_2(p_x, p_y) \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

A aplicação da TFW bidimensional é menos direta que no caso anterior. Utilizaremos a expressão (1.60) para o operador de transformação, lembrando da escolha feita para as matrizes de Dirac (1.87), temos

$$e^{\pm iS} = \cos \theta \pm i \frac{\sigma^y p_x - \sigma^x p_y}{|\mathbf{p}|} \text{sen} \theta, \quad (3.19)$$

haja vista que $\sigma^z \sigma^x = i\sigma^y$ e $\sigma^z \sigma^y = -i\sigma^x$. Explicitamente, pela substituição das matrizes de Pauli, o operador de transformação e seu inverso se expressam como

$$e^{\pm iS} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \pm \frac{p_x - ip_y}{|\mathbf{p}|} \text{sen} \theta \\ \pm \frac{-p_x - ip_y}{|\mathbf{p}|} \text{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

A substituição das funções seno e cosseno por suas expressões com exponenciais complexas e o uso da forma polar $p_x - ip_y = |\mathbf{p}|e^{-i\theta'}$, com

$$\theta' = \begin{cases} \text{tg}^{-1}(p_y/p_x), & p_y > 0 \text{ ou } p_y = 0, p_x > 0 \\ \pi + \text{tg}^{-1}(p_y/p_x), & p_y < 0 \text{ ou } p_y = 0, p_x < 0, \end{cases} \quad (3.21)$$

nos permitem escrever uma forma ainda mais conveniente

$$e^{\pm iS} = \begin{pmatrix} \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} & \pm \left(-ie^{-i\theta'} \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} \right) \\ \pm ie^{i\theta'} \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} & \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Isto posto, obtemos o estado inicial na representação de Foldy-Wouthuysen da maneira como segue

$$\begin{aligned}
 \psi'(t=0, p_x, p_y) &= e^{iS} \psi(t=0, p_x, p_y) = \frac{e^{i\theta}}{2} \begin{pmatrix} \phi_1 - ie^{-i\theta'} \phi_2 \\ ie^{i\theta'} \phi_1 + \phi_2 \end{pmatrix} + \frac{e^{-i\theta}}{2} \begin{pmatrix} \phi_1 + ie^{-i\theta'} \phi_2 \\ -ie^{i\theta'} \phi_1 + \phi_2 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{e^{i\theta}}{2} \begin{pmatrix} \phi_1 - ie^{-i\theta'} \phi_2 + e^{-2i\theta} (\phi_1 + ie^{-i\theta'} \phi_2) \\ ie^{i\theta'} (\phi_1 - ie^{-i\theta'} \phi_2 - e^{-2i\theta} (\phi_1 + ie^{-i\theta'} \phi_2)) \end{pmatrix} \\
 &= \frac{e^{i\theta}}{2} \begin{pmatrix} \bar{\phi}_1 + \bar{\phi}_2 \\ ie^{i\theta'} (\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_2) \end{pmatrix} = e^{i\theta} \begin{pmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

em que, por praticidade, definimos

$$\begin{aligned}
 \bar{\phi}_1 &= \phi_1 - ie^{-i\theta'} \phi_2, & \bar{\phi}_2 &= e^{-2i\theta} (\phi_1 + ie^{-i\theta'} \phi_2), \\
 \phi'_1 &= \frac{1}{2}(\bar{\phi}_1 + \bar{\phi}_2) & \text{e} & \phi'_2 = \frac{ie^{i\theta'}}{2} (\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_2).
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

A evolução temporal do estado na nova representação é realizada pela atuação do operador de evolução $e^{-iH't/\hbar}$ sobre o estado inicial, em que H' é dado pela Eq. (1.66). Assim,

$$\begin{aligned}
 \psi'(t, p_x, p_y) &= e^{-i\sigma_z \sqrt{(|\mathbf{p}|c)^2 + (mc^2)^2} t/\hbar} \psi'(t=0, p_x, p_y) \\
 &= e^{i\theta} \begin{pmatrix} e^{-i\mathcal{E}(\mathbf{p})t/\hbar} \phi'_1 \\ e^{i\mathcal{E}(\mathbf{p})t/\hbar} \phi'_2 \end{pmatrix} = e^{i\theta} \begin{pmatrix} \phi''_1 \\ \phi''_2 \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

com

$$\mathcal{E}(\mathbf{p}) = c\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + (mc)^2} \tag{3.26}$$

e as definições

$$\phi''_1 = e^{-i\mathcal{E}(\mathbf{p})t/\hbar} \phi'_1 \quad \text{e} \quad \phi''_2 = e^{i\mathcal{E}(\mathbf{p})t/\hbar} \phi'_2. \tag{3.27}$$

Finalmente, podemos retornar à representação convencional aplicando a

TFW inversa. Utilizando novamente (3.22) temos

$$\begin{aligned}
 \psi(t, p_x, p_y) &= e^{-iS} \psi'(t, p_x, p_y) = \frac{e^{2i\theta}}{2} \begin{pmatrix} \phi_1'' + ie^{-i\theta'} \phi_2'' \\ -ie^{i\theta'} \phi_1'' + \phi_2'' \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \phi_1'' - ie^{-i\theta'} \phi_2'' \\ ie^{i\theta'} \phi_1'' + \phi_2'' \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{2i\theta} (\phi_1'' + ie^{-i\theta'} \phi_2'') + (\phi_1'' - ie^{-i\theta'} \phi_2'') \\ -ie^{i\theta'} (e^{2i\theta} (\phi_1'' + ie^{-i\theta'} \phi_2'') - (\phi_1'' - ie^{-i\theta'} \phi_2'')) \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \check{\phi}_1 + \check{\phi}_2 \\ -ie^{i\theta'} (\check{\phi}_1 - \check{\phi}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1''' \\ \phi_2''' \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

onde

$$\begin{aligned}
 \check{\phi}_1 &= e^{2i\theta} (\phi_1'' + ie^{-i\theta'} \phi_2''), & \check{\phi}_2 &= \phi_1'' - ie^{-i\theta'} \phi_2'', \\
 \phi_1''' &= \frac{1}{2} (\check{\phi}_1 + \check{\phi}_2) & \text{e} & \phi_2''' = \frac{-ie^{i\theta'}}{2} (\check{\phi}_1 - \check{\phi}_2).
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Se, no entanto, desejarmos obter a função de onda no instante t como função da posição, basta realizarmos a transformada de Fourier inversa sobre o spinor dependente do momento

$$\tilde{\psi}(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi\hbar)} \int dp_x \int dp_y \psi(t, p_x, p_y) e^{\frac{i}{\hbar}(p_x x + p_y y)} = \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_1(t, x, y) \\ \tilde{\phi}_2(t, x, y) \end{pmatrix} \tag{3.30}$$

e assim podemos calcular a média da posição por

$$\langle \mathbf{x} \rangle(t) = \sum_{i=1,2} \int dx \int dy \mathbf{x} |\tilde{\phi}_i(t, x, y)|^2, \tag{3.31}$$

sendo \mathbf{x} o vetor posição bidimensional.

3.2.2. Analogia óptica

Consideremos novamente uma onda eletromagnética monocromática paraxial para que valham as expressões do Cap. 2. Mais uma vez, cada componente do spinor pode ser identificada com uma das componentes de polarização da onda. De forma mais específica, cada componente será mimetizada pela amplitude do campo elétrico com a polarização correspondente no plano normal ao feixe.

As coordenadas (x, y) do espaço em que existe a partícula são identificadas com as coordenadas sobre o plano transversal ao feixe. Como no caso anterior, a

menos que se queira simular a evolução temporal de um estado inicial específico, não é necessária qualquer preparação do feixe, sendo o estado inicial igual ao perfil transversal produzido pelo laser.

Inicialmente o feixe, cujo perfil transversal é

$$\tilde{\mathbf{E}}(x, y) = \tilde{\phi}_1(x, y)\hat{\mathbf{H}} + \tilde{\phi}_2(x, y)\hat{\mathbf{V}}, \quad (3.32)$$

deve passar por uma transformada de Fourier óptica, sendo sua amplitude no plano focal dada por

$$\mathbf{E}(p_x, p_y) = \phi_1(p_x, p_y)\hat{\mathbf{H}} + \phi_2(p_x, p_y)\hat{\mathbf{V}}, \quad (3.33)$$

em que $p_x = \hbar \frac{k_0 X}{f}$ e $p_y = \hbar \frac{k_0 Y}{f}$, sendo (X, Y) a posição sobre o plano focal, conforme a Eq. (2.17) com $p_k = \hbar k_k$. As observações feitas para $\hat{\mathbf{H}}$ e $\hat{\mathbf{V}}$ no caso unidimensional continuam válidas.

A seguir, vamos esquematizar todas as fases do processo de transformação do feixe utilizando (2.28) e (2.30) para as transformações efetuadas pela HWP e pela QWP. Os moduladores utilizados na impressão das fases dependentes das componentes de momento devem ser posicionados sobre o plano focal da TF. Por simplicidade omitiremos a dependência em (p_x, p_y) das componentes do campo elétrico. Um ilustração mostrando todas as etapas da transformação é exibido na Fig. 3.3.

- **Obtenção de $\psi'(t = 0, p_x, p_y)$ a partir de $\psi(t = 0, p_x, p_y)$.** Nesta etapa são necessários três moduladores que denotaremos por *SLM1*, *SLM2* e *SLM3* imprimindo as fases $e^{-i\theta'(p_x, p_y)}$, $e^{-2i\theta(p_x, p_y)}$ e $e^{i\theta'(p_x, p_y)}$, respectivamente. As funções $\theta(p_x, p_y)$ e $\theta'(p_x, p_y)$ são expressas nesta ordem por (1.64) e (3.21). A

transformação do feixe inicial (3.33) segue os passos abaixo:

$$\begin{aligned}
 \phi_1 \hat{\mathbf{H}} + \phi_2 \hat{\mathbf{V}} &\xrightarrow{SLM1} \phi_1 \hat{\mathbf{H}} + e^{-i\theta'} \phi_2 \hat{\mathbf{V}} \\
 &\xrightarrow{QWP1} e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{(\phi_1 - ie^{-i\theta'} \phi_2) \hat{\mathbf{H}} - i(\phi_1 + ie^{-i\theta'} \phi_2) \hat{\mathbf{V}}}{\sqrt{2}} \\
 &\xrightarrow{SLM2} e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\overbrace{(\phi_1 - ie^{-i\theta'} \phi_2)}^{\bar{\phi}_1} \hat{\mathbf{H}} - i \overbrace{e^{-2i\theta} (\phi_1 + ie^{-i\theta'} \phi_2)}^{\bar{\phi}_2} \hat{\mathbf{V}}}{\sqrt{2}} \\
 &\xrightarrow{QWP2} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{(\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_2) \hat{\mathbf{H}} - i(\bar{\phi}_1 + \bar{\phi}_2) \hat{\mathbf{V}}}{2} \\
 &\xrightarrow{HWP1} \frac{(\bar{\phi}_1 + \bar{\phi}_2) \hat{\mathbf{H}} + i(\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_2) \hat{\mathbf{V}}}{2} \\
 &\xrightarrow{SLM3} \frac{(\bar{\phi}_1 + \bar{\phi}_2) \hat{\mathbf{H}} + ie^{i\theta'} (\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_2) \hat{\mathbf{V}}}{2} = \phi'_1 \hat{\mathbf{H}} + \phi'_2 \hat{\mathbf{V}}.
 \end{aligned}$$

$\bar{\phi}_k$ e ϕ'_k são identificados com as definições da Eq.(3.24). O perfil transversal final do feixe é correspondente ao estado $\psi'(t = 0, p_x, p_y)$ (Eq. (3.23)), a menos da fase $e^{i\theta}$.

- **Obtenção de $\psi'(t, p_x, p_y)$ a partir de $\psi'(t = 0, p_x, p_y)$.** Esta etapa consiste na aplicação da fase de evolução temporal em cada componente. Como o modulador somente imprime fase em uma componente, a onda deverá bater duas vezes no modulador. Denotamos por *SLM4* a aplicação da fase $e^{-i\mathcal{E}(\mathbf{p})t/\hbar}$ e por *SLM5* a aplicação de $e^{i\mathcal{E}(\mathbf{p})t/\hbar}$, lembrando que $\mathcal{E}(\mathbf{p}) = c\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + (mc)^2}$.

$$\begin{aligned}
 \phi'_1 \hat{\mathbf{H}} + \phi'_2 \hat{\mathbf{V}} &\xrightarrow{HWP2} \phi'_2 \hat{\mathbf{H}} + \phi'_1 \hat{\mathbf{V}} \\
 &\xrightarrow{SLM4} \phi'_2 \hat{\mathbf{H}} + e^{-i\mathcal{E}(\mathbf{p})t/\hbar} \phi'_1 \hat{\mathbf{V}} \\
 &\xrightarrow{HWP3} e^{-i\mathcal{E}(\mathbf{p})t/\hbar} \phi'_1 \hat{\mathbf{H}} + \phi'_2 \hat{\mathbf{V}} \\
 &\xrightarrow{SLM5} e^{-i\mathcal{E}(\mathbf{p})t/\hbar} \phi'_1 \hat{\mathbf{H}} + e^{i\mathcal{E}(\mathbf{p})t/\hbar} \phi'_2 \hat{\mathbf{V}} = \phi''_1 \hat{\mathbf{H}} + \phi''_2 \hat{\mathbf{V}},
 \end{aligned}$$

notamos que ϕ''_i são equivalentes às definições em (3.27).

- **Obtenção de $\psi(t, p_x, p_y)$ a partir de $\psi'(t, p_x, p_y)$.** A TFW inversa se dá por

processos análogos à TFW.

$$\begin{aligned}
 \phi_1'' \hat{\mathbf{H}} + \phi_2'' \hat{\mathbf{V}} &\xrightarrow{SLM6} \phi_1'' \hat{\mathbf{H}} + e^{-i\theta'} \phi_2'' \hat{\mathbf{V}} \\
 &\xrightarrow{QWP3} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}} (\phi_1'' - ie^{-i\theta'} \phi_2'') \hat{\mathbf{H}} - i(\phi_1'' + ie^{-i\theta'} \phi_2'') \hat{\mathbf{V}}}{\sqrt{2}} \\
 &\xrightarrow{SLM7} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}} \overbrace{(\phi_1'' - ie^{-i\theta'} \phi_2'')}^{\check{\phi}_1} \hat{\mathbf{H}} - i \overbrace{(\phi_1'' + ie^{-i\theta'} \phi_2'')}^{\check{\phi}_2} \hat{\mathbf{V}}}{\sqrt{2}} \\
 &\xrightarrow{QWP4} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{\pi}{4}} (\check{\phi}_2 - \check{\phi}_1) \hat{\mathbf{H}} - i(\check{\phi}_2 + \check{\phi}_1) \hat{\mathbf{V}}}{2} \\
 &\xrightarrow{HWP4} \frac{(\check{\phi}_2 + \check{\phi}_1) \hat{\mathbf{H}} + i(\check{\phi}_2 - \check{\phi}_1) \hat{\mathbf{V}}}{2} \\
 &\xrightarrow{SLM8} \frac{(\check{\phi}_2 + \check{\phi}_1) \hat{\mathbf{V}} - ie^{i\theta'} (\check{\phi}_1 - \check{\phi}_2) \hat{\mathbf{V}}}{2} = \phi_1''' \hat{\mathbf{H}} + \phi_2''' \hat{\mathbf{V}},
 \end{aligned}$$

que percebemos ser equivalente ao estado da expressão (3.28).

Na Fig. 3.3, o plano do espelho é o espaço de posições e o plano do SLM é o espaço de momentos, desde que todas as lentes tenham a mesma distância focal. Todas as fases são aplicadas no espaço de momentos. A cada vez que o feixe atravessa a lente indo para o espaço de posições a transformada inversa é realizada, porém é necessário notar que as coordenadas são invertidas, como observado ao fim da Seção 2.2. Por envolverem apenas misturas de polarização, as placas de onda podem ser posicionadas em qualquer ponto entre o espaço de posições e de momentos. Ao fim da transformação as duas componentes de polarização devem ser separadas por um PBS, por exemplo, e a intensidade de cada polarização em função da posição deve ser medida no espaço de posições.

A forma como a simulação foi apresentada visa deixar claras todas as suas etapas em analogia com os operadores que atuam na função de onda inicial da partícula simulada (Eq. (1.67)). No entanto, os passos desde a *HWP1* até o *SLM6*

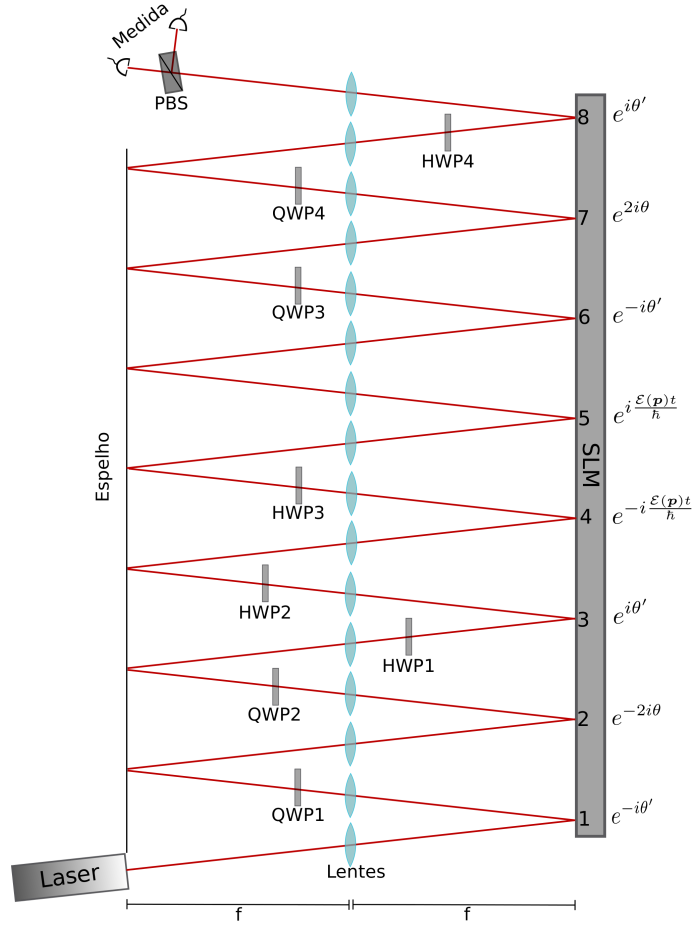


Figura 3.3.: Esquema de simulação de uma partícula livre restrita a duas dimensões espaciais utilizando um feixe monocromático paraxial de luz produzido por um laser. As fases aplicadas pelo modulador (SLM) em cada batida do feixe sobre esse dispositivo são indicadas à direita, sendo θ , θ' e $\mathcal{E}(\mathbf{p})$ dadas, respectivamente, por (1.64), (3.21) e (3.26).

poderiam ser simplificados se trocados por

$$\begin{aligned}
 \frac{i(\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_2)\hat{\mathbf{H}} + (\bar{\phi}_1 + \bar{\phi}_2)\hat{\mathbf{V}}}{2} &\xrightarrow{SLM} \frac{i(\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_2)\hat{\mathbf{H}} + e^{-i\mathcal{E}(\mathbf{p})t/\hbar}(\bar{\phi}_1 + \bar{\phi}_2)\hat{\mathbf{V}}}{2} \\
 &\xrightarrow{HWP} \frac{e^{-i\mathcal{E}(\mathbf{p})t/\hbar}(\bar{\phi}_1 + \bar{\phi}_2)\hat{\mathbf{H}} + i(\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_2)\hat{\mathbf{V}}}{2} \\
 &\xrightarrow{SLM} \frac{e^{-i\mathcal{E}(\mathbf{p})t/\hbar}(\bar{\phi}_1 + \bar{\phi}_2)\hat{\mathbf{H}} + ie^{i\mathcal{E}(\mathbf{p})t/\hbar}(\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_2)\hat{\mathbf{V}}}{2} = \\
 &= \phi_1''\hat{\mathbf{H}} + e^{-i\theta'}\phi_2''\hat{\mathbf{V}},
 \end{aligned}$$

que leva ao mesmo resultado que o processo anterior, porém evitando o uso de duas

HWPs e dois SLMs.

Uma vez medida a intensidade do feixe ao fim da transformação como função das coordenadas sobre o plano transversal, a posição média é calculada por

$$\langle \mathbf{x} \rangle(t) = \frac{\sum_{i=H,V} \int dx \int dy \mathbf{x} I_i(x, y)}{\sum_{i=H,V} \int dx \int dy I_i(x, y)}, \quad (3.34)$$

em que \mathbf{x} é o vetor posição sobre o plano transversal ao feixe, $I_i(x, y)$ é a intensidade da polarização i , a qual é proporcional ao módulo do campo elétrico final nessa direção, isto é, $I_i(x, y) \propto |\phi_i''''|^2$. Conforme comentado anteriormente, o valor da massa m da partícula simulada, bem como da velocidade da luz c e da constante de Planck h são parâmetros ajustados nas fases aplicadas pelo SLM e podem ser controlados de maneira a permitir que o ZB nas duas coordenadas tenha dimensões observáveis. Variando o valor do tempo t , o qual também aparece como parâmetro em uma fase, obtemos a média da posição em função do tempo e esperamos que ela oscile com frequência da ordem da frequência de ZB $\left(\frac{mc^2}{h}\right)$ e amplitude da ordem da amplitude de ZB $\left(\frac{h}{mc}\right)$, para os valores dos parâmetros escolhidos.

A observação acerca da possibilidade de determinar a média do operador posição de FW é pertinente também neste caso.

3.3. Partícula em espaço tridimensional: um caso particular

Como na analogia apresentada as coordenadas espaciais são mimetizadas pela posição sobre o plano normal a um feixe luminoso, somente dispomos de dois graus de liberdade, não sendo possível incluir um terceiro grau de liberdade necessário à simulação de uma partícula que exista no espaço real tridimensional. Entretanto, consideremos o caso particular em que o estado inicial da partícula seja da forma

$$\tilde{\psi}(t=0, \mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{L}} \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_1(x, y) \\ \vdots \\ \tilde{\phi}_4(x, y) \end{pmatrix} & -\frac{L}{2} < z < \frac{L}{2} \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}. \quad (3.35)$$

No espaço de momentos esse estado é representado por

$$\psi(t=0, \mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \int d^3x e^{-i\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}}{\hbar}} \psi(t=0, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \phi_1(p_x, p_y) \\ \vdots \\ \phi_4(p_x, p_y) \end{pmatrix} \sqrt{\frac{L}{2\pi\hbar}} \left(\frac{\text{sen } \frac{p_z L}{2\hbar}}{\frac{p_z L}{2\hbar}} \right), \quad (3.36)$$

cuja dependência em p_z tende a $\delta(p_z)$ para valores grandes de L . A função $\phi_k(p_x, p_y)$ é a transformada de Fourier de $\tilde{\phi}_k(x, y)$.

Ao atuar o operador da TFW (1.60) sobre o spinor (3.36) obtemos

$$\begin{aligned} \psi'(t=0, \mathbf{p}) &= \left(\cos \theta(\mathbf{p}) \pm \beta \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \text{sen } \theta(\mathbf{p}) \right) \psi(t=0, \mathbf{p}) \\ &= \left(\cos \theta(\mathbf{p}) \pm \beta \frac{\alpha_x p_x + \alpha_y p_y}{|\mathbf{p}|} \text{sen } \theta(\mathbf{p}) \right) \psi(t=0, \mathbf{p}), \end{aligned} \quad (3.37)$$

um vez que $\psi(t=0, \mathbf{p})$ se anula para todo $p_z \neq 0$. Logo, lembrando que, para a escolha padrão das matrizes de Dirac,

$$\beta \alpha^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix},$$

podemos escrever de forma explícita

$$\begin{aligned} \psi'(t=0, \mathbf{p}) &= \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & 0 & \frac{p_x - ip_y}{|\mathbf{p}|} \text{sen } \theta \\ 0 & \cos \theta & \frac{p_x + ip_y}{|\mathbf{p}|} \text{sen } \theta & 0 \\ 0 & \frac{-p_x + ip_y}{|\mathbf{p}|} \text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ \frac{-p_x - ip_y}{|\mathbf{p}|} \text{sen } \theta & 0 & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{e^{i\theta}}{2} \left\{ \begin{pmatrix} \phi_1 - ie^{-i\theta'} \phi_4 \\ 0 \\ 0 \\ ie^{i\theta'} (\phi_1 - ie^{-i\theta'} \phi_4) \end{pmatrix} + e^{-2i\theta} \begin{pmatrix} \phi_1 + ie^{-i\theta'} \phi_4 \\ 0 \\ 0 \\ -ie^{i\theta'} (\phi_1 + ie^{-i\theta'} \phi_4) \end{pmatrix} \right\} \\ &\quad + \frac{e^{i\theta}}{2} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_2 - ie^{i\theta'} \phi_3 \\ ie^{-i\theta'} (\phi_2 - ie^{i\theta'} \phi_3) \\ 0 \end{pmatrix} + e^{-2i\theta} \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_2 + ie^{i\theta'} \phi_3 \\ -ie^{-i\theta'} (\phi_2 + ie^{i\theta'} \phi_3) \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \end{aligned}$$

com θ' definido por (3.21). A forma como a última igualdade foi escrita deixa claro

que as componentes ϕ_1 e ϕ_4 não se misturam às componentes ϕ_2 e ϕ_3 . Cada par de componentes se transforma da maneira como se transforma o bispinor no caso de a partícula existir em um espaço bidimensional (Eq. (3.23)), excetuando que para o par ϕ_2, ϕ_3 a fase θ' tem sinal contrário.

Definindo

$$\psi'(t = 0, \mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \\ \phi'_3 \\ \phi'_4 \end{pmatrix},$$

a evolução temporal na representação de FW se escreve como

$$\psi'(t, \mathbf{p}) = e^{-i\frac{H't}{\hbar}} \psi'(t = 0, \mathbf{p}) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\mathcal{E}(\mathbf{p})t}{\hbar}} \phi'_1 \\ e^{-i\frac{\mathcal{E}(\mathbf{p})t}{\hbar}} \phi'_2 \\ e^{i\frac{\mathcal{E}(\mathbf{p})t}{\hbar}} \phi'_3 \\ e^{i\frac{\mathcal{E}(\mathbf{p})t}{\hbar}} \phi'_4 \end{pmatrix}.$$

Novamente não há mistura do par de componentes 1 e 4 com o par 2 e 3. Considerando cada par de componentes como um spinor com duas componentes, percebemos que as fases de evolução temporal são as mesmas aplicadas no spinor do caso de espaço bidimensional.

Por fim, o retorno à representação convencional se dá pela aplicação sobre $\psi'(t, \mathbf{p})$ do operador

$$e^{-iS} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & 0 & -\frac{p_x - ip_y}{|\mathbf{p}|} \sin \theta \\ 0 & \cos \theta & -\frac{p_x + ip_y}{|\mathbf{p}|} \sin \theta & 0 \\ 0 & -\frac{-p_x + ip_y}{|\mathbf{p}|} \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\frac{-p_x - ip_y}{|\mathbf{p}|} \sin \theta & 0 & 0 & \cos \theta \end{pmatrix},$$

o qual produz efeito semelhante a seu inverso e não mistura as componente 1 e 4 com as componentes 2 e 3.

Ora, a evolução temporal desse caso particular pode ser emulada se dois feixes forem utilizados, ao invés de somente um, e se sobre cada feixe for aplicada a transformação efetuada no caso bidimensional, observados os sinais das fases. Como antes, as coordenadas x e y da partícula são identificadas com a posição sobre o plano transversal aos feixes e a coordenada z não se faz necessária, uma vez que a evolução temporal não afetará a dependência do spinor nessa coordenada.

A vantagem de simular um espaço tridimensional é que nessa circunstância a partícula possui grau de liberdade de spin, ao contrário do que ocorre se a dimensão do espaço é reduzida, e talvez seja possível observar ZB também sobre essa quantidade.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta dissertação, apresentamos uma proposta de simulação de um elétron de Dirac livre e, portanto, de *zitterbewegung*, utilizando um feixe de luz clássico. Conforme mencionado três propostas de simulação do elétron de Dirac foram implementadas experimentalmente [23, 22, 24], todas elas simulando a dinâmica de uma partícula em uma dimensão espacial. As simulações foram obtidas impondo a seus sistemas condições específicas em que seus estados evoluíam de acordo com a equação de Dirac 1 + 1 dimensional. Os parâmetros ajustáveis em todos os três casos são grandezas físicas associadas ao sistema de simulação.

A proposta de Dreisow *et al.*, assim como a nossa, utiliza luz clássica, porém de maneira bem distinta da forma como propomos [23]. Naquele trabalho, a luz se propaga em um arranjo de guias de onda constituído por dois tipos de guias, construído de forma que o acoplamento entre guias de tipos distintos produza a equação de Dirac para a amplitude do campo elétrico dentro do arranjo. Diferentemente das propostas citadas, não construímos um sistema cujo hamiltoniano fosse análogo ao de Dirac, mas olhamos diretamente para a transformação efetuada sobre um estado pelo operador de evolução temporal associado a esse hamiltoniano, inspirados pela emulação de um sistema caótico mostrada em [36].

Ao contrário das demais simulações implementadas, propusemos simulações supondo uma, duas e três dimensões espaciais, sendo que o aumento de dimensões espaciais não implica no aumento da complexidade da simulação. Os dispositivos necessários à implementação da proposta são: laser de pulso contínuo, placas de meia onda e de um quarto de onda, moduladores espaciais de luz com modulação apenas de fase, divisor de feixe por polarização e detectores de intensidade capazes de medir a intensidade como função da posição transversal a um feixe. A implementação do protocolo não exige, portanto, qualquer dispositivo especialmente construído para

este fim.

Em nosso protocolo, as componentes do spinor são identificadas com as amplitudes do campo elétrico de um feixe de luz nas duas polarizações. Tanto a fase da TFW quanto a fase de evolução temporal não dependem da posição, mas somente do momento, sendo necessário que sejam aplicadas no espaço em que o último é um operador multiplicativo. Nesta simulação, o plano de entrada da TF óptica imita o espaço de posições e o plano de Fourier imita o espaço de momentos do elétron emulado. Mostramos que, estabelecidas essas analogias, o perfil transversal inicial do feixe se transformará em um perfil transversal final que é equivalente ao estado da partícula em um instante t para o mesmo estado inicial. Isso é possível desde que placas de onda estejam adequadamente posicionadas ao longo da propagação do feixe, intercaladas com aplicações apropriadas de fases por moduladores posicionados sobre o plano de momentos.

Foi mostrada a montagem da simulação para os caso de uma e de duas dimensões espaciais e discutimos como seria possível que também fosse simulado um caso em que o estado inicial tem uma forma particular quando o espaço tem três dimensões. Este último caso permitiria também a medida de oscilação do spin, o que não ocorre nos casos de dimensão reduzida, pois nesses casos a partícula não possui esse grau de liberdade adicional.

Os parâmetros da teoria de Dirac e até mesmo o tempo aparecem em nosso protocolo como valores ajustáveis nas fases aplicadas e são altamente manipuláveis, uma vez que as fases impressas por moduladores são programáveis. Esse fato confere uma vantagem à nossa proposta em relação às demais, nas quais os parâmetros ajustáveis são relacionados a quantidades físicas não podendo ser variados arbitrariamente.

Como nossa proposta envolve a aplicação de TFW, é possível ao invés de medirmos a média da posição padrão, não realizar a TFW inversa e então determinar a média do operador posição de FW, concluindo que, de fato, ele não apresenta ZB e permitindo a comparação dos dois operadores posição.

Como para cada valor de t o módulo quadrado das componentes do spinor é medido, é possível ainda que observemos a possibilidade de propagação superluminal do pacote de onda para o caso de haver ou não superposição de estados com sinais diferentes de energia.

Uma vez proposto o protocolo de simulação, esperamos futuramente implementá-lo. Pretendemos investigar, ainda, como extrair informações de spin no caso tridi-

mensional e se seria possível simular partículas sob ação de potenciais de maneira análoga a que apresentamos aqui.

MATRIZES DE DIRAC

O objetivo deste apêndice é encontrar as relações que definem as matrizes de Dirac (Eq. (1.17)), bem como algumas de suas propriedades. Como dito no Capítulo 1, o hamiltoniano de Dirac precisa obedecer à relação energia momento

$$E^2 \equiv H^2 = c^2 \mathbf{p}^2 + m^2 c^4. \quad (\text{A.1})$$

Substituindo o hamiltoniano de Dirac (1.16) na expressão anterior vem que as constantes α e β devem ser tais que a seguinte igualdade valha

$$c^2(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})^2 + mc^3(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}\beta + \beta\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}) + \beta^2 m^2 c^4 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (\text{A.2})$$

para qualquer que seja o momento \mathbf{p} . A primeira conclusão a que se chega é que

$$\beta^2 = 1,$$

já que esse é o único termo constante no lado esquerdo da Eq. (A.2). Poderíamos dizer que β é simplesmente um número ($\beta = \pm 1$ satisfazem essa condição), todavia o termo linear no momento também precisa anular-se, isto é,

$$\sum_{i=1}^3 (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) p_i = 0,$$

de onde vem a condição de anticomutação das componentes de α e β

$$\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = \{\alpha_i, \beta\} = 0.$$

É natural atribuir às constantes almejadas objetos matriciais, pois possuem um produto não comutativo e permitem que relações de anticomutação sejam satisfeitas por soluções não triviais.

Temos ainda os termos quadráticos de (A.2) para comparar. O termo da esquerda se reescreve como

$$c^2(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})^2 = c^2 \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 p_i^2 + \frac{c^2}{2} \sum_{i,j=1}^3 (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) p_i p_j.$$

Enquanto o termo quadrático da direita é escrito como

$$\mathbf{p}^2 c^2 = c^2 \sum_{i=1}^3 p_i^2.$$

A igualdade só é possível se as matrizes α_i satisfizerem as condições

$$\alpha_i^2 = 1 \quad \text{e} \quad (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) = \{\alpha_i, \alpha_j\} = 0.$$

Em suma, concluímos que as Equações 1.17 devem ser satisfeitas pelas matrizes de Dirac para que a relação energia momento seja respeitada. Dessas relações podemos extrair algumas propriedades, uma delas é de que as matrizes somente podem ter autovalores ± 1 . Vejamos, se ϕ_a é autovetor da matriz α_i , com autovalor a , então

$$\alpha_i \alpha_i \phi_a = a^2 \phi_a = \mathbb{I} \phi_a,$$

logo a afirmação se verifica. Analogamente, a mesma propriedade vale para β .

O traço das matrizes é nulo, o que leva por sua vez a uma restrição em sua dimensão. Já que os autovalores são ± 1 , para que o traço seja nulo a dimensão das matrizes deve ser par. Verifiquemos a afirmação inicial de que o traço é nulo, primeiramente notando que

$$Tr(\alpha_i) = Tr(\beta^2 \alpha_i),$$

afinal $\beta^2 = 1$. Basta agora reescrever a expressão anterior e utilizar a anticomutação de α_i e β para concluir o que foi dito

$$Tr(\alpha_i) = Tr(\beta \beta \alpha_i) = -Tr(\beta \alpha_i \beta) = -Tr(\alpha_i \beta^2) = -Tr(\alpha_i).$$

Para chegar a esse resultado utilizamos também uma propriedade do traço de matrizes, a saber $Tr(AB) = Tr(BA)$. Analogamente, obtém-se o mesmo resultado para β .

OPERADOR POSIÇÃO NA REPRESENTAÇÃO DE FW

O objetivo deste apêndice é mostrar como é obtido o operador posição transformado pela TFW, bem como o operador posição média na representação convencional. Por fim, calculamos também os comutadores necessários à escrita da equação de Heisenberg do operador posição média.

Primeiramente, precisamos reescrever o operador de transformação (1.60) utilizando as equações (1.65). Assim, temos

$$\begin{aligned}\cos \theta(\mathbf{p}) &= \left(\frac{1 + \cos 2\theta(\mathbf{p})}{2} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{E(\mathbf{p}) + mc^2}{2E(\mathbf{p})} \right)^{\frac{1}{2}} \\ \text{sen } \theta(\mathbf{p}) &= \left(\frac{1 - \cos 2\theta(\mathbf{p})}{2} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{E(\mathbf{p}) - mc^2}{2E(\mathbf{p})} \right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}\tag{B.1}$$

logo,

$$e^{\pm iS} = \left(\frac{E(\mathbf{p}) + mc^2}{2E(\mathbf{p})} \right)^{\frac{1}{2}} \pm \beta \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \left(\frac{E(\mathbf{p}) - mc^2}{2E(\mathbf{p})} \right)^{\frac{1}{2}} = A \pm B,\tag{B.2}$$

em que definimos os operadores

$$A = \left(\frac{E(\mathbf{p}) + mc^2}{2E(\mathbf{p})} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad B = \beta \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \left(\frac{E(\mathbf{p}) - mc^2}{2E(\mathbf{p})} \right)^{\frac{1}{2}}$$

para facilitar a escrita de expressões futuras. As duas propriedades a seguir serão de grande utilidade:

- $[A, B] = 0$, pois as matrizes de Dirac comutam com o operador momento;

- $A^2 - B^2 = 1$, como é facilmente percebido ao substituir os operadores e utilizar (1.61).

Começemos por calcular o operador posição convencional transformado

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}' &= e^{iS} \mathbf{x} e^{-iS} = (A + B) \mathbf{x} (A - B) \\
 &= A\mathbf{x}A - A\mathbf{x}B + B\mathbf{x}A - B\mathbf{x}B \\
 &= (A^2 - B^2) \mathbf{x} + (A + B) ([\mathbf{x}, A] - [\mathbf{x}, B]) - [A, B]\mathbf{x}, \quad (\text{B.3})
 \end{aligned}$$

a última linha é visualizada ao somar termos como $A^2\mathbf{x} - A\mathbf{x}A$. Para o cálculo dos comutadores em (B.3) faremos uso de $[\mathbf{x}^j, F(\mathbf{p})] = [\mathbf{x}^j, p_j] \frac{dF(\mathbf{p})}{dp_j} = i\hbar \frac{dF(\mathbf{p})}{dp_j}$.

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{x}^j, A] &= i\hbar \frac{dA}{dp_j} = \frac{-i\hbar mc^4}{4E(\mathbf{p})^3} A^{-1} p_j \\
 [\mathbf{x}^j, B] &= \beta \left\{ \left[\mathbf{x}^j, \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \right] \left(\frac{E(\mathbf{p}) - mc^2}{2E(\mathbf{p})} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \left[\mathbf{x}^j, \left(\frac{E(\mathbf{p}) - mc^2}{2E(\mathbf{p})} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\} \\
 \left[\mathbf{x}^j, \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \right] &= \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} \left[\mathbf{x}^j, \frac{1}{|\mathbf{p}|} \right] + [\mathbf{x}^j, \alpha^k p_k] \frac{1}{|\mathbf{p}|} \\
 &= \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} i\hbar \frac{d}{dp_i} \left(\frac{1}{|\mathbf{p}|} \right) + i\hbar \frac{\alpha^j}{|\mathbf{p}|} \\
 &= \frac{i\hbar}{|\mathbf{p}|} \left(\alpha^j - \frac{p_j}{|\mathbf{p}|^2} \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} \right) \\
 \left[\mathbf{x}^j, \left(\frac{E(\mathbf{p}) - mc^2}{2E(\mathbf{p})} \right)^{\frac{1}{2}} \right] &= \frac{i\hbar mc^4}{4E(\mathbf{p})^3} \left(\frac{E(\mathbf{p}) - mc^2}{2E(\mathbf{p})} \right)^{-\frac{1}{2}} p_j \\
 [\mathbf{x}^j, B] &= \beta \left\{ \frac{i\hbar}{|\mathbf{p}|} \left(\alpha^j - \frac{p_j}{|\mathbf{p}|^2} \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} \right) \left(\frac{E(\mathbf{p}) - mc^2}{2E(\mathbf{p})} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \frac{i\hbar mc^4}{4E(\mathbf{p})^3} \left(\frac{E(\mathbf{p}) - mc^2}{2E(\mathbf{p})} \right)^{-\frac{1}{2}} p_j \right\} = C
 \end{aligned}$$

Substituindo todos os comutadores acima calculados, bem como utilizando as propriedades listadas dos operadores A e B chegamos a

$$\mathbf{x}'^j = \mathbf{x}^j + (A + B) \left\{ \frac{-i\hbar mc^4}{4E(\mathbf{p})^3} A^{-1} p_j - C \right\} \quad (\text{B.4})$$

$$= \mathbf{x}^j - \frac{i\hbar mc^4}{4E(\mathbf{p})^3} p_j - \frac{i\hbar mc^4}{4E(\mathbf{p})^3} B A^{-1} p_j - AC - BC. \quad (\text{B.5})$$

Calculemos os produtos de operadores presentes em (B.5), lembrando que

$E(\mathbf{p}) = \sqrt{(|\mathbf{p}|c)^2 + (mc^2)^2}$ leva a $|\mathbf{p}| = \sqrt{E(\mathbf{p})^2 - m^2c^4}$:

$$BA^{-1} = \beta \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \left(\frac{E(\mathbf{p}) - mc^2}{2E(\mathbf{p})} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{E(\mathbf{p}) + mc^2}{2E(\mathbf{p})} \right)^{-\frac{1}{2}} = c\beta \frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}}{E(\mathbf{p}) + mc^2}$$

$$AC = \frac{i\hbar c\beta\alpha^j}{2E(\mathbf{p})} - \frac{i\hbar c^3\beta(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})p_j}{2E(\mathbf{p})(E(\mathbf{p}) - mc^2)} \frac{2E(\mathbf{p})^2 - mc^2(E(\mathbf{p}) + mc^2)}{2E(\mathbf{p})^2(E(\mathbf{p}) + mc^2)}$$

$$BC = \frac{-i\hbar}{|\mathbf{p}|^2} \left\{ [(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})\alpha^j - p_j] \frac{E(\mathbf{p}) - mc^2}{2E(\mathbf{p})} + |\mathbf{p}|^2 \frac{mc^4}{4E(\mathbf{p})^3} p_j \right\}$$

Antes de prosseguirmos à substituição dos produtos recém calculados na expressão do operador posição transformado, olhemos com mais detalhes para o primeiro termo do produto BC , substituindo nele a definição dada em (1.19)

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})\alpha^j &= \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^k \sigma^j p_k & 0 \\ 0 & \sigma^k \sigma^j p_k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p_j + i\epsilon_l^{kj} \sigma^l p_k & 0 \\ 0 & p_j + i\epsilon_l^{kj} \sigma^l p_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_j + i(\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{p})_j & 0 \\ 0 & p_j + i(\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{p})_j \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

soma sobre índices repetidos são entendidas e foi utilizado que para as matrizes de Pauli vale $\sigma^k \sigma^j = \delta_j^k + i\epsilon_l^{kj} \sigma^l$ e que a componente j de um produto vetorial pode ser expressa por $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_j = \epsilon_l^{jk} a_k b_l = \epsilon_l^{lj} a_k b_l$, sendo ϵ_l^{jk} o tensor antissimétrico de Levi-Civita. Aqui definimos o operador

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix},$$

de forma a escrever

$$(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})\alpha^j = p_j + i(\boldsymbol{\Sigma} \times \mathbf{p})_j. \quad (\text{B.6})$$

Finalmente, da substituição dos termos calculados separadamente em (B.5), não mais escrito em componentes, resulta no operador posição mostrado na Eq. (1.68).

Similarmente, podemos calcular o operador posição média na representação

convencional a partir da TFW inversa do operador $\mathbf{X}' = \mathbf{x}$

$$\begin{aligned}\mathbf{X} &= e^{-iS} \mathbf{x} e^{iS} = (A - B) \mathbf{x} (A + B) \\ &= A \mathbf{x} A + A \mathbf{x} B - B \mathbf{x} A - B \mathbf{x} B \\ &= (A^2 - B^2) \mathbf{x} + (A - B) ([\mathbf{x}, A] + [\mathbf{x}, B]) + [A, B] \mathbf{x},\end{aligned}$$

a substituição dos comutadores e produtos previamente calculados levando ao operador posição média da Eq. (1.69).

B.1. Comutador do operador posição média com o hamiltoniano de Dirac

Para escrever a equação de Heisenberg para o operador posição média, Eq. (1.70), utilizamos o comutador desse operador com o hamiltoniano de Dirac (1.16), cujo cálculo exibiremos nesta seção.

O comutador almejado se expressa por

$$[H, \mathbf{X}] = [H, \mathbf{x}] + \frac{i\hbar c}{2E(\mathbf{p})} [H, \beta \boldsymbol{\alpha}] - \frac{\hbar c^2}{2E(\mathbf{p})(E(\mathbf{p}) + mc^2)} \left\{ \frac{ic}{E(\mathbf{p})} [H, \beta(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})] \mathbf{p} + [H, \boldsymbol{\Sigma} \times \mathbf{p}] \right\}, \quad (\text{B.7})$$

levando em conta que o operador momento, bem como qualquer função dele, comuta com o hamiltoniano. O primeiro comutador do lado direito da equação já foi calculado no Capítulo 2 (Eq. (1.48)). Calculemos separadamente cada um dos demais comutadores, utilizando as propriedades das matrizes de Dirac (1.17):

$$\begin{aligned}[H, \beta \alpha^j] &= c [\alpha^k p_k, \beta \alpha^j] + mc^2 [\beta, \beta \alpha^j] \\ &= cp_k \left\{ [\alpha^k, \beta] \alpha^j + \beta [\alpha^k, \alpha^j] \right\} + mc^2 \beta [\beta, \alpha^j] \\ &= cp_k \left\{ -2\beta \alpha^k \alpha^j + 2(1 - \delta^{kj}) \beta \alpha^k \alpha^j \right\} + 2mc^2 \beta^2 \alpha^j \\ &= -2c\beta p_k + 2mc^2 \alpha^k\end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{aligned}[H, \beta(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})] &= c [\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}, \beta] \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + mc^2 \beta [\beta, \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}] \\ &= -2c\beta (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p})^2 + 2mc^2 \beta^2 \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} \\ &= -2c|\mathbf{p}|^2 \beta + 2mc^2 \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}\end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned}
 [H, (\boldsymbol{\Sigma} \times \mathbf{p})_j] &= -i [H, (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}) \alpha^j - p_j] \\
 &= 2ic [(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}) p_j - |\mathbf{p}|^2 \alpha^j], \tag{B.10}
 \end{aligned}$$

na última expressão foi empregada também (B.6). A substituição de (B.8), (B.9) e (B.10) em (B.7) leva diretamente a (1.70).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] GREINER, W.: *Relativistic Quantum Mechanics: Wave Equations*. Springer, New York, 3^aed. (2000).
- [2] PERES, A. e TERNO, D.R.: *Quantum information and relativity theory*. Rev. Mod. Phys. **76**: 93 (2004).
- [3] PALMER, M.C.: *Relativistic quantum information theory and quantum reference frames*. Tese de Doutorado (2013).
- [4] HEISENBERG, W.: *Quantum-theoretical re-interpretation of kinematic and mechanical relations*. Zs. Phys. **33**: 879 (1925).
BORN, M. e JORDAN, P.: *On Quantum Mechanics* . Zs. F. Phys. **34**: 858 (1925).
BORN, M.; HEISENBERG, W.; e JORDAN, P.: *On Quantum Mechanics II*. Z. Phys. **35**: 557 (1926).
- [5] SCHRÖDINGER, E.: *An Undulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules*. Phys. Rev. **28**: 1049 (1926).
- [6] DIRAC, P.A.M.: *The Quantum Theory of the Electron*. Proc. Royal Soc. Lond. **117**(778): 610 (1928).
- [7] SCHWABL, F.: *Advanced Quantum Mechanics*. Springer, 4^aed. (2008).
- [8] KLEIN, O.: *Die Reflexion von Elektronen an einem Potentialsprung nach der relativistischen Dynamik von Dirac*. Zeitschrift für Physik **53**: 157 (1929).
- [9] Sitz. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl. **24**: 418 (1930).

- [10] KREKORA, P.; SU, Q.; e GROBE, R.: *Relativistic electron localization and the lack of zitterbewegung*. Phys. Rev. Lett. **93**: 043004 (2004).
- [11] O'CONNELL, R.F.: *Zitterbewegung is not an observable*. Mod. Phys. Lett. A **26**(7): 469 (2011).
- [12] FLEMING, G.N. e BUTTERFIELD, J.: *Strange positions*. In J. Butterfield e C. Pagonis, editors, *From Physics to Philosophy*. Cambridge University Press (1999).
- [13] HEGERFELDT, G.C.: *Remark on causality and particle localization*. Phys. Rev. D **100**: 3320 (1974).
- [14] CZACHOR, M.: *Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm experiment with relativistic massive particles*. Phys. Rev. A **55**(1): 72 (1997).
- [15] GARCÍA, T.; CORDERO, N.A.; e ROMERA, E.: *Zitterbewegung and quantum revivals in monolayer graphene quantum dots in magnetic fields*. Phys. Rev. B **89**: 075416 (2014).
- [16] ROMERA, E.; ROLDÁN, J.B.; e DE LOS SANTOS, F.: *Zitterbewegung in a monolayer silicene in a magnetic field*. Phys. Lett. A **378**: 2582 (2014).
- [17] SCHLIEMANN, J.; LOSS, D.; e WESTERVELT, R.M.: *Zitterbewegung of electronic wave packets in III-V zinc-blend semiconductor quantum wells*. Phys. Rev. Lett. **94**: 206801 (2005).
- [18] QU, C.; HAMNER, C.; GONG, M.; ZHANG, C.; e ENGELS, P.: *Observation of Zitterbewegung in a spin-orbit-coupled Bose-Einstein condensate*. Phys. Rev. A **88**: 021604 (2013).
- [19] LAMATA, L.; LEÓN, J.; SCHÄTZ, T.; e SOLANO, E.: *Dirac Equation and Quantum Relativistic Effects in a Single Trapped Ion*. Phys. Rev. Lett. **98**: 253005 (2007).
- [20] ZHANG, X.: *Observing Zitterbewegung for photons near the Dirac point of a two-dimensional photonic crystal*. Phys. Rev. Lett. **100**: 113903 (2008).
- [21] LONGHI, S.: *Zitterbewegung of optical pulses in nonlinear frequency conversion*. J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **43**: 205402 (2010).

- [22] GERRITSMAN, R.; KIRCHMAIR, G.; ZÄHRINGER, F.; SOLANO, E.; BLATT, R.; e ROOS, C.F.: *Quantum Simulation of the Dirac Equation*. Nat. **463**: 68 (2010).
- [23] DREISOW, F.; HEINRICH, M.; KEIL, R.; TÜNNERMANN, A.; NOLTE, S.; LONGHI, S.; e SZAMEIT, A.: *Classical simulation of relativistic Zitterbewegung in photonic lattices*. Phys. Rev. Lett. **105**: 143902 (2010).
- [24] LEBLANC, L.J.; BEELER, M.C.; JIMÓNEZ-GARCÍA, K.; PERRY, A.R.; SUGAWA, S.; WILLIAMS, R.A.; e SPIELMAN, I.: *Direct observation of zitterbewegung in a Bose-Einstein condensate*. New J. Phys. **15**: 073011 (2013).
- [25] FRIIS, N.; LEE, A.R.; TRUONG, K.; SABÍN, C.; SOLANO, E.; JOHANSSON, G.; e FUENTES, I.: *Relativistic quantum teleportation with superconducting circuits*. Phys. review letters **110**(11): 113602 (2013).
- [26] FELICETTI, S.; SABÍN, C.; FUENTES, I.; LAMATA, L.; ROMERO, G.; e SOLANO, E.: *Relativistic motion with superconducting qubits*. Phys. Rev. B **92**(6): 064501 (2015).
- [27] BRUSCHI DAVID EDWARD; SABÍN CARLOS; KOK PIETER; JOHANSSON GÖRAN; DELSING PER; e FUENTES IVETTE: *Towards universal quantum computation through relativistic motion*. Sci. Reports **6**: 18349 (2016).
- [28] SALEH, B.E.A. e TEICH, M.C.: *Fundamentals of Photonics*. John Wiley and Sons (1991).
- [29] BACRY, H. e CADILHAC, M.: *Metaplectic group and Fourier optics*. Phys. Rev. A **23**(5): 2533 (1981).
- [30] NIENHUIS, G. e ALLEN, L.: *Paraxial wave optics and harmonic oscillators*. Phys. Rev. A **48**(1): 656 (1993).
- [31] STOLER, D.: *Operator methods in physical optics*. J. Opt. Soc. Am. **71**(3): 334 (1981).
- [32] MARTE, M.A. e STENHOLM, S.: *Paraxial light and atom optics: the optical Schrödinger equation and beyond*. Phys. Rev. A **56**(4): 2940 (1997).
- [33] DRAGOMAN, D. e DRAGOMAN, M.: *Quantum-classical analogies*. Springer (2013).

- [34] VAVELIUK, P.; RUIZ, B.; e LENCINA, A.: *Limits of the paraxial approximation in laser beams*. Opt. letters **32**(8): 927 (2007).
- [35] WALBORN, S.P.; MONKEN, C.H.; PÀDUA, S.; e RIBEIRO, P.H.S.: *Spatial correlations in parametric down-conversion*. Phys. Reports **495**: 87 (2010).
- [36] LEMOS, G.B.; GOMES, R.M.; WALBORN, S.P.; SOUTO RIBEIRO, P.H.; e TOSCANO, F.: *Experimental observation of quantum chaos in a beam of light*. Nat. Commun. **3**: 1211 (2012).
- [37] LUDVIGSEN, M.: *General Relativity: a geometrical approach*. Cambridge University Press (2004).
- [38] LEMOS, N.: *Mecânica analítica*. Editora Livraria da Física, São Paulo, 2^aed. (2007).
- [39] DIRAC, P.: *The principles of Quantum Mechanics*. Oxford University Press, Londres, 4^aed. (1958).
- [40] SAKURAI, J.J.: *Advanced Quantum Mechanics*. Addison-Wesley (1967).
- [41] DIRAC, P.: *A theory of electrons and protons*. Proc. R. Soc. Lond. A **126**: 360 (1930).
- [42] ANDERSON, C.D.: *The positive electron*. Phys. Rev. **43**: 491 (1933).
- [43] THALLER, B.: *The Dirac Equation*. Springer, New York (1992).
- [44] ANDERSON, A.: *Canonical transformations in Quantum Mechanics*. Annals Phys. **232**: 292 (1994).
- [45] FOLDY, L.L. e WOUTHUYSEN, S.A.: *On the Dirac theory of spin 1/2 particles and its non-relativistic limit*. Phys. Rev. **78**: 29 (1950).
- [46] RUSIN, T.M. e ZAWADZKI, W.: *Nonlocality of Foldy-Wouthuysen and related transformations for the Dirac equation*. Phys. Rev. A **84**: 062124 (2011).
- [47] NEWTON, T.D. e WIGNER, E.P.: *Localized states for elementary systems*. Rev. Mod. Phys. **21**(3): 400 (1949).
- [48] FLEMING, G.N.: *Covariant position operators, spin, and locality*. Phys. Rev. **137**: B188 (1965).

- [49] DÁVID, G. e CSERTI, J.: *General theory of zitterbewegung*. Phys. Rev. B **81**: 121417(R) (2010).
- [50] PEREZ, J.F. e WILDE, I.F.: *Localization and causality in relativistic quantum mechanics*. Phys. Rev. D **16**: 315 (1977).
- [51] HEGERFELDT, G.C.: *Causality, particle localization and positivity of the energy*. In *Irreversibility and Causality Semigroups and Rigged Hilbert Spaces*. Springer, 238–245 (1998).
- [52] WANG, Z.Y. e XIONG, C.D.: *Zitterbewegung in quantum field theory*. Chin. Phys. B **17**: 4170 (2008).
- [53] WANG, Z.Y. e XIONG, C.D.: *Zitterbewegung by quantum field-theory considerations*. Phys. Rev. A **77**: 045402 (2008).
- [54] MILONNI, P.W.: *The quantum vacuum*. Academic Press (1994).
- [55] BARUT, A.O. e BRACKEN, A.J.: *Zitterbewegung and the internal geometry of the electron*. Phys. Rev. D **232**: 2454 (1981).
- [56] JR, W.A.R.; JR, J.V.; RECAMI, E.; e SALESI, G.: *About zitterbewegung and electron structure*. Phys. Lett. B **318**: 623 (1993).
- [57] DERIGLAZOV, A.A.: *Classical-mechanical models without observable trajectories and the Dirac electron*. Phys. Lett. A **377**(1): 13 (2012).
- [58] RIZZUTI, B.F.; ABREU, E.M.; e ALVES, P.V.: *Electron structure through a classical description of the Zitterbewegung*. Phys. Rev. D **90**(2): 027502 (2014).
- [59] BARUT, A. e ZANGHI, N.: *Classical model of the Dirac electron*. Phys. review letters **52**(23): 2009 (1984).
- [60] SIDHARTH, B.G.: *Revisiting zitterbewegung*. Int. J. Theor. Phys. **48**: 497 (2009).
- [61] HESTENES, D.: *The zitterbewegung interpretation of quantum mechanics*. Foundations Phys. **20**(10): 1213 (1990).
- [62] NIEHAUS, A.: *A Probabilistic Model of Spin and Spin Measurements*. Foundations Phys. **46**(1): 3 (2016).

- [63] LAX, M.; LOUISELL, W.H.; e MCKNIGHT, W.B.: *From Maxwell to paraxial wave optics*. *Phys. Rev. A* **11**: 1365 (1975).
- [64] DAVIS, L.W.: *Theory of electromagnetic beams*. *Phys. Rev. A* **19**: 1177 (1979).
- [65] MARCUSE, D.: *Light transmission optics*. Van Nostrand Reinhold, 2 ed. (1972).
- [66] GOODMAN, J.W.: *Introduction to Fourier optics*. McGraw-Hill, 2^aed. (1996).
- [67] BANERJEE, P. e POON, T.: *Principles of Applied Optics*. Aksen Associates series in electrical and computer engineering. Aksen Associates (1991).
- [68] YARIV, A. e YEH, P.: *Optical waves in crystals*. Wiley (1984).
- [69] JOHNSON, K.M.; MCKNIGHT, D.J.; e UNDERWOOD, I.: *Smart spatial light modulators using liquid crystals on silicon*. *Quantum Electron. IEEE J.* **29**(2): 699 (1993).
- [70] CASTRO NETO, A.H.; GUINEA, F.; PERES, N.M.R.; NOVOSELOV, K.S.; e GEIM, A.K.: *The electronic properties of graphene*. *Rev. Mod. Phys.* **81**: 109 (2009).
- [71] VESELY, F.J.: *Computational Physics*. Springer (1994).
- [72] YANG, J.: *Nonlinear waves in integrable and nonintegrable systems*. SIAM (2010).