

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

BENEDITO LEANDRO NETO

**Sólitons de Ricci Shrinking em
Variedades Riemannianas Completas**

Goiânia
2011

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

11. Identificação do material bibliográfico: ☒ **Dissertação** ☐ **Tese**

1

22. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):	Benedito Leandro Neto		
E-mail:	benedito.leandro@hotmail.com		
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? ☒ Sim ☐ Não			
Vínculo empregatício do autor			
Agência de fomento:	Programa de apoio a Planos de Reestruturação e Expansão das Universidades Federais	Sigla:	REUNI
País:	Brasil	UF:GO	País: Brasil
Título:	Solitons de Ricci Shrinking em variedades Riemannianas completas.		
Palavras-chave: Variedade Riemanniana, Ricci Sóliton, Shrinking.			
Título em outra língua: Complete Gradient Shrinking Ricci Soliton.			
Palavras-chave em outra língua: Riemannian Manifold, Ricci Soliton, Shrinking .			
Área de concentração:	Geometria		
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	02/09/2011		
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado em Matemática		
Orientador (a):	Prof. Dr. Romildo da Silva Pina		
E-mail:	romildo@mat.ufg.br		
Co-orientador (a):*			
E-mail:			

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Liberação para disponibilização?¹ ☒ **total** ☐ **parcial**

Em caso de disponibilização parcial, assinale as permissões:

☐ Capítulos. Especifique: _____

☐ Outras restrições: _____

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O Sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Benedito Leandro Neto
Assinatura do (a) autor (a)

Data: 14 / 12 / 2011

¹ Em caso de restrição, esta poderá ser mantida por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Todo resumo e metadados ficarão sempre disponibilizados.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)
GPT/BC/UFG

L437s Leandro Neto, Benedito.
Sólitos de Ricci Shrinking em variedades Riemannianas completas [manuscrito] / Benedito Leandro Neto. – 2011.
xv, 86 f. : il., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Romildo da Silva Pina.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, 2011.
Bibliografia.
Inclui lista de figuras, abreviaturas, siglas e tabelas.
Apêndices.

1. Matemática-Geometria 2. Variedade Riemanniana 3. Ricci Sóliton 4. Shrinking I. Título.

CDU: 514.7

BENEDITO LEANDRO NETO

Sólitons de Ricci Shrinking em Variedades Riemannianas Completas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria.

Orientador: Prof. Romildo da Silva Pina

Goiânia
2011

BENEDITO LEANDRO NETO

SOLITONS DE RICCI SHRINKING EM VARIEDADES RIEMANNIANAS COMPLETAS

Dissertação defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada no dia 02 de setembro de 2011, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



Prof. Dr. Romildo da Silva Pina
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca



Prof. Dr. Ezequiel Rodrigues Barbosa
Departamento de Matemática-UFG



Prof. Dr. Armando Mauro Vasquez Corro
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Benedito Leandro Neto

(Graduou-se em Matemática na UFG - Universidade Federal de Goiás. Durante sua graduação, foi monitor no departamento de Matemática da UFG. Durante o Mestrado, na UFG - Universidade Federal de Goiás, foi bolsista do REUNI e desenvolveu um trabalho teórico sobre Sólitons de Ricci Shrinking em Variedades Riemannianas Completas.)

Dedico este trabalho aos meus pais.

Agradecimentos

À Deus, em primeiro lugar.

Ao meu sobrinho Nicolau, que ilumina a vida de todas as pessoas a sua volta. Aos meus pais, Teresinha e Alvimar, e aos meus irmãos, Djeffersson e Pollyana, por sempre terem me incentivado e apoiado. À minha namorada, Nagi. Ao meu orientador Romildo pela valiosa ajuda, imensa paciência e por ter acreditado em mim.

Aos meus grandes amigos: Samantha, Marcos, Joana, Thayná, Rafael (filósofo), Thiago Rocha, Tereza, companheiros inestimáveis, de valiosas conversas.

Aos amigos de faculdade e mestrado Emerson, Mayer, Bruno, Edivaldo, Douglas, Danilo e Carlos que, muito mais que bons amigos, são grandes mestres.

Quero agradecer em especial aos meus amigos Caíke e Agenor por terem me ajudado a digitar o trabalho.

À todos vocês, muito obrigado.

Se as portas da percepção estivessem limpas, tudo se mostraria ao homem tal como é: infinito.

William Blake,
O matrimônio do céu e do inferno.

Resumo

Neto, Benedito Leandro. **Sólitos de Ricci Shrinking em Variedades Riemannianas Completas**. Goiânia, 2011. 86p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Nesse trabalho, nós começamos com um levantamento histórico sobre os Ricci Sólitos, mostrando que, muitas vezes, eles surgem como solução auto-similar do fluxo de Ricci. Em seguida, introduzimos alguns conceitos básicos de geometria Riemanniana e definimos formalmente um Ricci Sólito. Concluimos o trabalho com um estudo aprofundado do artigo [6], do qual mostramos, dentre outros resultados, dois teoremas: uma estimativa para a função potencial de um Ricci Sólito Gradiente Shrinking, completo e não-compacto e uma estimativa superior para o volume de um Ricci Sólito Gradiente Shrinking, completo e não-compacto.

Palavras-chave

Variedade Riemanniana, Ricci Sólito, Shrinking.

Abstract

Neto, Benedito Leandro. **Complete Gradient Shrinking Ricci Soliton**. Goiânia, 2011. 86p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

In this work, we started with an historical study of Ricci Solitons showing that they, often, arise as a auto-similar solution for the Ricci flow. It was demonstrated, then, some basic concepts of Riemannian Geometry and a formal definition of a Ricci Solitons. To conclude the work, it was presented a study analysis of the [6] article, establishing , among other results, two theorems: the first one, an estimation for the potential function of a Gradient Shrinking Ricci Solitons, complete non-compact, and, the second one, an estimation for the volume of a Gradient Shrinking Ricci Solitons, complete non-compact.

Keywords

Riemannian Manifold, Ricci Soliton, Shrinking.

Sumário

Introdução	10
1 Geometria Riemanniana	16
1.1 Variedades Diferenciáveis	16
1.2 Métricas Riemannianas	20
1.3 Geodésicas	25
1.4 Tensores em variedades Riemannianas	27
1.5 Formas	29
1.6 Curvaturas	30
2 Diferenciação e Integração em Variedades	36
2.1 Notação de Einstein	36
2.2 Segunda Identidade de Bianchi e Contrações	38
2.3 Gradiente, Laplaciano e Hessiana	39
2.4 Teorema da Divergência e Teorema de Stokes	46
2.5 Variação do Comprimento de Arco	47
2.6 Fórmula da Co-Área	52
2.7 Coordenadas Polares Geodésicas e Jacobiano	52
3 Ricci Soliton Gradiente Shrinking Completo	55
3.1 Comportamento Assintótico da Função Potencial	58
3.2 Crescimento do Volume do Ricci Sóliton Gradiente Shrinking Completo	70
Referências Bibliográficas	84

Introdução

O estudo de fluxos geométricos iniciou-se em 1956 no artigo de Mullins [21].

Em 1964, Eells e Sampson [13] introduziram a aplicação de fluxo de calor harmônico e a usaram para provar a existência de aplicações harmônicas que tinham curvatura seccional não positiva. Esse artigo é dedicado a um estudo mais geral de um funcional E , de interesse geométrico e físico, análogo ao funcional energia.

Em 1974, Firey [14], propôs o fluxo da curvatura Gaussiana para modelar as formas das pedras desgastadas e considerar o caso onde a superfície é invariante com exceção da identidade. Ele começa com uma idealização do processo de uso de materiais isotrópicos com relação ao desgaste, em seguida, desenvolve uma equação que rege o processo e passa a mostrar que uma pedra, que inicialmente é conexa e centralmente simétrica, tende a assumir uma forma esférica como consequência de uma equação governante.

Em 1975, Hamilton [16] continuou o estudo das aplicações de fluxo de calor harmônico considerando variedades com fronteira. E em 1982, Hamilton [17], em seu artigo pioneiro, definiu o fluxo de Ricci como sendo uma equação de evolução no espaço de métricas Riemannianas que sob vários aspectos se comporta como uma equação do calor não-linear. Nesse mesmo artigo ele mostrou que o fluxo de Ricci pode ser usado para classificar as variedades compactas de dimensão três que admitem métrica com curvatura de Ricci positiva. Duas linhas de pesquisa derivaram do artigo de Hamilton de 1982. A primeira tem como objetivo entender o comportamento geral do fluxo de Ricci em dimensão três, sem assumir hipóteses de curvatura sobre a condição inicial. Esta direção levou o próprio Hamilton a várias idéias fundamentais, como a definição de um fluxo de Ricci com cirurgias, e convergiu aos trabalhos de G. Perelman, os quais provam a conjectura de Poincaré e a conjectura da geometrização de Thurston. A segunda consiste na tentativa de encontrar condições sobre a curvatura que, em dimensões maiores que três, impliquem em resultados de convergência do fluxo de Ricci.

Um importante problema em geometria diferencial é encontrar uma métrica canônica (**uma métrica de curvatura constante**) em uma dada variedade. Por sua vez, a existência de uma métrica canônica muitas vezes tem profundas implicações topológicas. Um bom exemplo é o clássico Teorema de Uniformização em duas dimensões, o qual, por

um lado, prova uma completa classificação topológica para superfícies compactas e, por outro lado, mostra que toda superfície compacta tem uma estrutura geométrica canônica.

Como formular e generalizar esses resultados bidimensionais para tridimensionais, ou dimensões ainda maiores de variedades, tem sido um dos mais importantes e desafiadores tópicos na matemática moderna. Em 1977, W. Thurston [29], baseado nas idéias sobre superfícies de Riemann, trabalhos de Haken no Teorema Inflexível de Mostow, etc, formulou a conjectura da geometrização para variedades tridimensionais a qual, de uma maneira informal, afirma que **toda variedade tridimensional compacta e orientável tem uma decomposição canônica em pedaços, cada qual admite uma estrutura geométrica canônica**. Em particular, a conjectura de Thurston contém, como um caso especial, a conjectura de Poincaré: **Toda variedade fechada simplesmente conexa de dimensão 3 é homeomorfa à esfera 3-dimensional, $\mathbb{S}^3$** . Nos últimos 30 anos, muitos matemáticos tem contribuído na compreensão da conjectura de Thurston. A teoria de Thurston é baseada numa bela combinação de técnicas da geometria e da topologia. Um desenvolvimento poderoso da análise geométrica nos últimos 30 anos tem ocorrido, conduzido por S.-T. Yau, R. Schoen, C. Taubes, K. Uhlenbeck e S. Donaldson, na construção de estruturas geométricas canônicas baseadas em equações diferenciais parciais não-lineares. Tais estruturas geométricas canônicas incluem, métricas de Kahler- Einstein, curvaturas escalares métricas constantes, entre outras. Entretanto, a contribuição mais importante para a análise geométrica em variedades tridimensionais é devido a Hamilton.

Em 1982, Hamilton [17] introduziu o fluxo de Ricci

$$\frac{dg_{ij}}{dt} = -2R_{ij} \quad (0-1)$$

para estudar variedades tridimensionais compactas com curvatura de Ricci positiva. O fluxo de Ricci, é naturalmente análogo a equação do calor para métricas. Como uma consequência, o tensor curvatura evolui de um sistema de equações de difusão que tende a distribuir a curvatura uniformemente sobre toda a variedade. Portanto, é esperado que a métrica inicial deveria melhorar e evoluir para uma métrica canônica, conduzindo a uma melhor compreensão da topologia da variedade. Em um célebre artigo [17], Hamilton mostrou que em uma variedade tridimensional compacta com métrica inicial tendo curvatura de Ricci positiva, o fluxo de Ricci converge para uma métrica de curvatura seccional constante positiva, provando que a variedade é difeomorfa a esfera $\mathbb{S}^3$ ou a um quociente da esfera por um grupo linear de isometrias. Pouco depois, Yau sugeriu que o fluxo de Ricci era o melhor caminho para provar a estrutura do teorema para generalizar as variedades tridimensionais. Nas últimas décadas, Hamilton provou vários teoremas importantes sobre fluxo de Ricci, e lançou os fundamentos para o método de abordagem da conjectura de Poincaré e a conjectura de geometrização de Thurston via fluxo de Ricci.

A idéia básica do método de Hamilton era estudar o comportamento das soluções do fluxo de Ricci em uma variedade tridimensional compacta dotada de uma métrica Riemanniana arbitrária. Se o fluxo de Ricci desenvolver singularidades, então tenta-se descobrir a estrutura da singularidade tal que se possa realizar a cirurgia, removendo a singularidade, e em seguida continuar o fluxo de Ricci. Se o fluxo de Ricci desenvolver singularidades novamente, repete-se o processo de cirurgia. Se for provado que existe apenas um número finito de cirurgias em um intervalo de tempo finito e se o comportamento a longo prazo da solução do fluxo de Ricci com cirurgia for bem compreendido, então pode-se identificar a estrutura da topologia da variedade inicial.

Assim, o método de Hamilton, quando realizado com sucesso, demonstra a conjectura de Poincaré e a conjectura de geometrização de Thurston. Entretanto, haviam obstáculos, os chamados "Little Loop Lemma", ver [4] página 11, conjecturados por Hamilton.

No estudo das singularidades existem nas equações diferenciais parciais, incluindo na geometria, um conceito fundamental que é o de reescalonar e aplicar a fórmula da monotonicidade para obter soluções auto- similares. O nome destas soluções, auto-similares, vem do fato de que a distribuição espacial das características do movimento mantém-se idênticas em todos os momentos. Tais soluções auto- similares modelam as soluções da equação próximo as singularidades. Essa técnica vem sendo aplicada com sucesso no estudo de superfícies mínimas, aplicações harmônicas, soluções do calor não-linear entre outras situações. No campo das equações de evolução da geometria, os modelos de singularidade que surgem são soluções $g_{ij}(t)$, completas, para o fluxo de Ricci (0-1), definidas para todo instante t , tal que $-\infty < t < T$, onde a solução do fluxo existe. Ao longo de toda a existência das soluções das equações diferenciais parciais existem soluções auto- similares, no fluxo de Ricci são chamados de Ricci sólitons. Ricci sólitons gradientes encolhidos surgem, muitas vezes, como modelos de singularidade do tipo I do fluxo de Ricci. Por isso é importante entender o comportamento dos Ricci sólitons para se estudar as singularidades do fluxo de Ricci.

Os sólitons são um tipo específico de ondas solitárias (solitary waves) [25]. Ambos obtiveram muita atenção nos últimos trinta anos e aparecem em diversas áreas, tais como ondas em águas rasas e profundas, comunicações ópticas, condensadores de Bose-Einstein e modelos biológicos. As ondas solitárias são ondas que mantêm a sua forma quase inalterada a medida que se propagam (ou seja, a característica do movimento se preserva ao longo do tempo), devido a baixa atenuação e dispersão que sofrem. Tipicamente surgem de alguns tipos de equações de propagação que aparecem em várias áreas da física. Normalmente na física de partículas, na física dos plasmas, em especial para a pesquisa de certos eventos ionosféricos, na mecânica dos fluidos, na óptica, entre outros campos da ondulatória. Os sólitons, mais especificamente, são ondas solitárias que

interagem inelásticamente, ou seja, preservam a sua forma em colisões.

Dizemos que a métrica g_0 é um Ricci sólito em M (variedade Riemanniana diferenciável completa n - dimensional) se existem $\rho \in \mathbb{R}$ e um campo de vetores $X \in \chi(M)$ tais que

$$Ric_{g_0} + \frac{1}{2} \mathcal{L}_X g_0 = \rho g_0 \quad (0-2)$$

onde $\mathcal{L}_X g_0$ é a derivada de Lie da métrica com respeito ao campo X . Ricci sólitons surgem, muitas vezes, como limite, superior ou inferior, de singularidades no fluxo de Ricci.

Escalonando a métrica podemos normalizar $\rho = \frac{1}{2}$ e tomar o campo como sendo um campo gradiente, daí teremos um **Ricci Sólito Gradiente Encolhido** e a equação assumirá a forma

$$R_{ij} + \nabla_i \nabla_j f = \frac{1}{2} g_{ij}. \quad (0-3)$$

Observe que, se o campo vetorial for nulo (no caso do campo ser gradiente significa que a função é constante) temos uma métrica de Einstein (ou Kahler-Einstein). Assim, Ricci Sólitos são extensões naturais das métricas de Einstein.

Ricci Sólitos Gradientes Encolhidos e Completos satisfazendo (0-3), onde $V = \nabla_g f$, são soluções $g_{ij}(t)$ auto- similares para o fluxo de Ricci da forma

$$g_{ij}(t) := (1-t)\phi_t^* g_{ij}, \quad t < 1,$$

onde ϕ_t é o difeomorfismo gerado por $V/(1-t)$. Assim, um Ricci Sólito com respeito a algum campo vetorial, completo, corresponde a solução auto- similar do fluxo de Ricci.

Entretanto, exibir soluções explícitas para os Ricci Sólitos não é uma tarefa simples. Alguns exemplos de soluções podem ser encontradas na literatura. Hamilton [18] descobriu o primeiro exemplo de sólito steady completo e não- compacto em $\mathbb{R}^2$, chamado sólito Cigarro, onde a métrica é dada por

$$\partial s^2 = \frac{\partial x^2 + \partial y^2}{1 + x^2 + y^2}$$

com função potencial

$$f = -\log(1 + x^2 + y^2).$$

O Cigarro tem curvatura (Gaussiana) positiva e crescimento linear do volume.

O sólito Gaussiano $(\mathbb{R}^n, g_0)$ com métrica euclidiana flat (ou seja, o tensor curvatura é igual a zero em todo ponto) pode ser equipado com Ricci sólito gradiente shrinking ou expanding, chamado sólito Gaussiano shrinking, ou expanding.

1. $(\mathbb{R}^n, g_0, |x|^2/4)$ é um Ricci sóliton gradiente shrinking com função potencial $f = |x|^2/4$:

$$Rc + \nabla^2 f = \frac{1}{2}g_0.$$

2. $(\mathbb{R}^n, g_0, -|x|^2/4)$ é um Ricci sóliton gradiente expanding com função potencial $f = -|x|^2/4$:

$$Rc + \nabla^2 f = -\frac{1}{2}g_0.$$

H-D. Cao e D. Zhou [6] obtêm estimativas, inferiores e superiores, da função potencial em um Ricci sóliton gradiente shrinking, completo e não-compacto. Por isso esse artigo é de fundamental importância, já que encontrar soluções explícitas para a equação dos Ricci sólitons (0-3) não é fácil. Com as estimativas para a função potencial o trabalho de Cao e Zhou [6] culmina em estimativas para o volume, superior e inferior.

Nossa dissertação está dividida em três capítulos.

No capítulo 1, apresentamos os conceitos básicos sobre geometria Riemanniana necessários para demonstrar os resultados dos capítulos subsequentes.

O segundo capítulo começa com um estudo sobre a notação Einstein para índices sobre somatórios. Depois desenvolve a segunda identidade de Bianchi e suas contrações, essencialmente utilizadas para demonstrar o Lema (3.7).

No capítulo 2, temos também vários teoremas e lemas importantes para trabalharmos os Ricci Sólitos shrinkings completos e não-compactos. No Lema (3.7), é necessário entender os conceitos de hessiana, gradiente e laplaciano da função potencial f e por isso nós definimos tais objetos (também em coordenadas locais).

O Teorema da Divergência é utilizado no Lema (3.14). Como, para falar do Teorema da Divergência, não podemos deixar de citar o Teorema de Stokes, nós também o enunciamos no capítulo 2.

Para tratarmos do Teorema principal da dissertação (3.2), precisamos de um estudo mais detalhado sobre variação do comprimento de arco. Usamos a expressão local da segunda variação do comprimento de arco para demonstrar o Teorema principal (sobre estimativas para a função potencial).

Por fim, os dois últimos tópicos do capítulo 2 (fórmula da co-área e coordenadas polares geodésicas) são utilizados para demonstrar os resultados sobre volume.

O capítulo 3 está dividido em dois tópicos principais: O primeiro sobre comportamento assintótico da função potencial e o segundo sobre o crescimento do volume do Ricci Sólito Gradiente Shrinking Completo. Nós começamos esse capítulo com uma introdução sobre os Ricci Sólitos e mostramos como a equação de um Ricci Sólito toma a forma (0-3).

Na primeira parte do capítulo 3, sobre comportamento assintótico da função potencial, o Lema (3.7) nos dá a expressão

$$R + |\nabla f|^2 - f = 0,$$

obtida a partir da equação do Ricci Sóliton Gradiente, que será extremamente útil para demonstrar a estimativa superior da função potencial. Para ser mais preciso, com o Lema (3.8) e o Lema (3.7), conseguimos mostrar a estimativa superior. A estimativa inferior exige um pouco mais de trabalho. Textos anteriores ao de H-D. Cao e D. Zhou [6] demonstram uma estimativa inferior para a função potencial sob certas condições de curvatura mais forte (estamos nos referindo aos trabalhos [26] e [7]). No artigo [6] eles demonstraram que não precisamos da hipótese do tensor curvatura de Ricci ser limitado para se encontrar uma estimativa inferior da função. Abrindo um universo maior de possibilidades. Vale também notar que as estimativas para a função potencial dadas em [6] são ótimas.

Tendo em vista o encolhedor de Gauss, ou seja, o espaço euclidiano flat $(\mathbb{R}^n, g_0)$ com a função potencial $|x|^2/4$, o termo dominante $\frac{1}{4}r^2(x)$ para os limites superiores e inferiores de f é ótimo.

Na segunda parte trataremos do volume e começaremos definindo uma região $D(r)$ da variedade para então trabalharmos sob seu volume $V(r)$. É importante ressaltar a contração feita da equação do Ricci Sóliton Gradiente Shrinking e a desigualdade observada por Ovidiu Munteanu (essa desigualdade mostrou que era desnecessário supor a curvatura escalar limitada). O Lema (3.14) traz uma relação sobre o volume $V(r)$, da região $D(r)$, e sua derivada $V'(r)$. Com esses resultados provamos o Teorema (3.15) que nos dá uma estimativa superior para o volume de uma bola geodésica, com raio suficientemente grande, da variedade M . Em seguida, com uma hipótese adicional sobre a curvatura escalar, fazemos uma estimativa inferior para a bola. E o último resultado explorado na dissertação é o Corolário (3.6), que é uma combinação do Teorema (3.2) e do Teorema (3.4). Esse corolário fala que o volume ponderado de M é finito.

Geometria Riemanniana

1.1 Variedades Diferenciáveis

Nesse capítulo preliminar, mostraremos algumas definições e fatos básicos sobre geometria riemanniana que serão amplamente explorados na dissertação. Começaremos definindo uma variedade topológica (para o conceito de variedade diferenciável consultamos [19]). Assumindo que o leitor esteja familiarizado com os conceitos de espaço topológico.

Definição 1.1 *Suponha que M seja um espaço topológico. Dizemos que M é uma variedade topológica de dimensão n se ela tem as seguintes propriedades*

1. *M é um espaço de Hausdorff: Para cada par de pontos $p, q \in M$ existem subconjuntos disjuntos e abertos $U, V \subset M$ tais que $p \in U$ e $q \in V$.*
2. *M é um espaço topológico com base enumerável. Ou seja, toda cobertura aberta de M admite uma subcobertura enumerável.*
3. *M é localmente euclidiano de dimensão n : Todo ponto $p \in M$ tem uma vizinhança $V \subset M$ que é homeomorfa a um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$.*

A propriedade de M ser localmente euclidiano significa que, para cada ponto $p \in M$, podemos encontrar o seguinte:

1. *Um aberto $V \subset M$ de p .*
2. *Um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$; e*
3. *Um homeomorfismo $\gamma: V \rightarrow U$ (isto é, uma aplicação bijetiva, contínua e com inversa também contínua).*

Para fazer sentido derivar funções, aplicações ou curvas, precisaremos introduzir um novo tipo de variedade, chamadas de variedades diferenciáveis. Para começar, vamos dar uma idéia do que vem a ser as *cartas coordenadas*.

Definição 1.2 (Cartas Coordenadas) *Seja M uma variedade topológica de dimensão n . Uma carta coordenada em M é o par (V, γ) , onde V é um subconjunto aberto de M e $\gamma: V \rightarrow U$ é um homeomorfismo de V em um aberto de $\gamma(V) = U \subset \mathbb{R}^n$.*

Seja M uma variedade topológica de dimensão n . Se (U, β) e (W, γ) são duas cartas tais que $U \cap W \neq \emptyset$, então a composição $\gamma \circ \beta^{-1} : \beta(U \cap W) \rightarrow \gamma(U \cap W)$ é um homeomorfismo. Duas cartas são ditas diferenciavelmente compatíveis se, ou $U \cap W = \emptyset$ ou $\gamma \circ \beta^{-1}$ é um difeomorfismo. Definimos um Atlas para M como sendo a coleção de cartas compatíveis cujo domínio cobre M . Um atlas A é chamado atlas diferenciável se quaisquer duas cartas em A são diferenciavelmente compatíveis. Um atlas diferenciável $A \subset M$ é maximal se não está contido em nenhum atlas diferenciável estritamente maior. Isso quer dizer que toda carta que é diferenciavelmente compatível com as cartas de A já está em A .

Definição 1.3 *Uma estrutura diferenciável sobre uma variedade topológica M , de dimensão n , é um atlas diferenciável máximo.*

Agora podemos definir uma variedade diferenciável M de dimensão n .

Definição 1.4 *Uma variedade diferenciável é um par (M, A) , onde M é uma variedade topológica e A é uma estrutura diferenciável sobre M .*

Definição 1.5 *Se M é uma variedade diferenciável, uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é dita diferenciável se, para toda carta diferenciável (V, γ) sobre M , a composição $f \circ \gamma^{-1}$ for diferenciável num subconjunto aberto $\gamma(V) \subset \mathbb{R}^n$.*

Definição 1.6 *Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ é chamada uma curva (diferenciável) em M . Suponha que $\alpha(0) = p \in M$, e seja D o conjunto das funções de M diferenciáveis em p . O vetor tangente à curva α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : D \rightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{\partial(f \circ \alpha)}{\partial t} \right|_{t=0}, f \in D.$$

Observação 1.7 *No decorrer de toda o texto diferenciável significará C^∞ .*

Definição 1.8 *O conjunto dos vetores tangentes a uma variedade diferenciável, M , em p será indicado por $T_p M$. Indicaremos por $\chi(M)$ o conjunto dos campos de vetores tangentes de classe C^∞ em M e por $D(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M .*

Observação 1.9 *É importante ressaltar a diferença entre carta coordenada e parametrização. A diferença é o sentido em que o homeomorfismo é tomado. Quando saímos da variedade para o $\mathbb{R}^n$ falamos carta. Se o sentido é o contrário dizemos parametrização.*

Agora, vamos mostrar que a escolha de uma parametrização $x : U \rightarrow M^n$ (repare o sentido do homeomorfismo) determina uma base associada em $T_p M$. De fato, Seja $x : U \rightarrow M^n$ uma parametrização em $p = x(0)$, podemos exprimir a função $f \in D(M)$ e a curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M^n$ por

$$f \circ x(q) = f(x_1, \dots, x_n), \quad q = (x_1, \dots, x_n) \in U,$$

e

$$x^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

respectivamente. Portanto, restringindo f a α , obteremos $\alpha'(0)f = \frac{\partial}{\partial t}(f \circ \alpha)|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t}f(x_1, \dots, x_n)|_{t=0} = \sum_{i=1}^n x'_i(0) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_0 = \left(\sum_i x'_i(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0 \right) f$. Assim, $\alpha'(0)$ pode ser escrito, na parametrização x , como

$$\alpha'(0) = \left(\sum_i x'_i(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0 \right).$$

$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_0$ é o vetor tangente em p à:

$$x_i \rightarrow x(0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0).$$

A expressão de $\alpha'(0)$ mostra que o vetor tangente a uma curva α em p depende apenas das derivadas de α em um sistema de coordenadas (ou parametrização). Logo, $x : U \rightarrow M^n$ determina uma base associada $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_0, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_0 \right\}$ em $T_p M$.

Definição 1.10 (*O fibrado tangente*). Seja M^n uma variedade diferenciável de dimensão n , o conjunto $T(M) = \bigcup_{p \in M} T_p M$ que consiste de todos os vetores tangentes em todos os pontos de M é chamado de fibrado tangente (ver [3] página 335).

Definição 1.11 Um campo de vetores X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto p pertencente a M associa um vetor $X(p) \in T_p M$. Em termos de aplicações, X é uma aplicação de M no fibrado tangente TM . O campo é diferenciável se a aplicação $X : M \rightarrow TM$ é diferenciável.

Podemos, agora, estender às variedades diferenciáveis a noção de diferencial de uma aplicação diferenciável. Nosso estudo de variedades diferenciáveis será baseado no cálculo de aplicações diferenciáveis entre espaços euclidianos.

Definição 1.12 Se U e V são abertos de espaços euclidianos $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, respectivamente, uma aplicação $\gamma: U \rightarrow V$ é dita diferenciável se cada uma das funções componentes de γ tem derivadas parciais contínuas em todas as ordens. Se γ é bijetiva e tem inversa diferenciável, ela é um difeomorfismo. Um difeomorfismo é, em particular, um homeomorfismo.

Teorema 1.13 Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis e seja $\gamma: M_1 \rightarrow M_2$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in M_1$ e cada $v \in T_p M_1$, escolha uma curva diferenciável $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M_1$ com $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$. Faça $\beta = \gamma \circ \alpha$. A aplicação $d\gamma_p: T_p M_1 \rightarrow T_{\gamma(p)} M_2$ dada por $d\gamma_p(v) = \beta'(0)$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de α .

Agora vamos definir algo que será extremamente importante no capítulo 3. Começaremos com a definição de conjunto convexo em uma variedade.

Definição 1.14 Um conjunto $\Omega \subset M$ é um conjunto convexo sobre a variedade M se dados dois pontos quaisquer em Ω existir uma única geodésica ligando tais pontos, inteiramente contida em Ω .

Definição 1.15 ([2]) Seja $\Omega \subset M$ um conjunto aberto e convexo. Uma função $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser Lipschitz em Ω se existe uma constante $L = L(\Omega) \geq 0$ tal que

$$|f(p) - f(q)| \leq Ld(x, y), \quad \text{com } p, q \in M. \quad (1-1)$$

Além disso, se é estabelecido que para todo $p_0 \in M$ existe $L(p_0) \geq 0$ e $\delta = \delta(p_0) > 0$ tal que a desigualdade (1-1) ocorre com $L = L(p_0)$ para todo p e $q \in B_\delta(p_0) = \{p \in \Omega : d(p, p_0) \leq \delta\}$, então f é chamada localmente lipschitz em Ω .

Considerando uma parametrização $x: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M^n$ é possível escrever

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde cada $a_i: U \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função em U e $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$ é uma base associada a x . Claramente, X é diferenciável se, e só se, as funções a_i são diferenciáveis para alguma parametrização.

Lema 1.16 Sejam X e Y campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável M . Então existe um único campo vetorial Z tal que, para todo $f \in D(M)$, $Zf = (XY - YX)f$.

O campo vetorial Z dado no Lema (1.16) é chamado o **colchete** $[X, Y] = XY - YX$ de X e Y . O colchete $[X, Y]$ pode também ser interpretado como uma derivação de Y ao longo das "trajetórias" de X .

Proposição 1.17 *Sejam X, Y e Z campos diferenciáveis em M . a, b são números reais, e f, g são funções diferenciáveis, então:*

1. $[X, Y] = -[Y, X]$ (Anticomutatividade).
2. $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ (Linearidade).
3. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (Identidade de Jacobi).
4. $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

1.2 Métricas Riemannianas

Definição 1.18 *Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno (uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente T_pM , que varia diferencialmente no seguinte sentido: Se $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p , com $x(x_1, \dots, x_n) = q \in x(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = \partial x(0, \dots, 1, \dots, 0)$, então $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \rangle = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ é uma função diferenciável em U .*

Exemplo 1.1 *Um exemplo simples de métrica Riemanniana é a métrica Euclidiana $\bar{g}$ em $\mathbb{R}^n$, definida em coordenadas locais por*

$$\bar{g} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \delta_{ij}.$$

Aplicado a vetores $v, w \in T_p\mathbb{R}^n$ segue que

$$\bar{g}_p(v, w) = \delta_{ij}v^i w^j = \sum_{i=1}^n v^i w^i = v \cdot w.$$

Podemos encontrar mais alguns exemplos em [19] página 185.

Em seguida vamos estabelecer uma relação de equivalência entre duas variedades Riemannianas através da seguinte definição:

Definição 1.19 *Sejam M e N variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \rightarrow N$ é chamado uma isometria se:*

1. $\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, \forall p \in M, u, v \in T_pM$

A próxima proposição garante a existência de uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável. Precisamente,

Proposição 1.20 *Uma variedade diferenciável M (de Hausdorff e com base enumerável) possui uma métrica Riemanniana.*

Prova. Basta aplicar o Teorema de Whitney (ver [19] página 135). $\square$

Definição 1.21 Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

que se indica por $(X, Y) \rightarrow \nabla_X Y$, através da aplicação ∇ , e que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,
2. $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,
3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

onde $X, Y, Z \in \chi(M)$ e $f, g \in D(M)$.

A proposição que vamos enunciar agora nos dá uma maneira de derivar campos de vetores ao longo de curvas diferenciáveis de uma variedade diferenciável.

Proposição 1.22 Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Então existe uma *única* correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo da curva diferenciável $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ (ou seja, $\frac{dc(t)}{dt} = V(c(t))$) $c'(t)$ é a derivada da curva na direção do campo) um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c , denominado *derivada covariante* de V ao longo de c , tal que:

1. $\frac{D}{dt}(V+W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$.
2. $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, onde V é um campo de vetores ao longo da curva c e f é uma função diferenciável em I .
3. Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \chi(M)$, isto é, $V(t) = Y(c(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y$.

Conexão afim é, de fato, uma noção local. Escolhendo um sistema de coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$ em torno de $p \in M^n$ e escrevendo

$$X = \sum_i x_i X_i, \quad Y = \sum_j y_j X_j,$$

onde $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, teremos

$$\nabla_X Y = \nabla_{\sum_i x_i X_i} \left(\sum_j y_j X_j \right),$$

pelo item (1) da definição (1.21) temos que

$$\nabla_{\sum_i x_i X_i} \left(\sum_j y_j X_j \right) = \sum_i x_i \nabla_{X_i} \left(\sum_j y_j X_j \right),$$

agora pelo item (3) da definição (1.21)

$$\sum_i x_i \nabla_{X_i} \left(\sum_j y_j X_j \right) = \sum_{ij} x_i x_j \nabla_{X_i} X_j + \sum_{ij} x_i X_i (y_j) X_j.$$

Fazendo $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$, concluímos que $\Gamma_{ij}^k X_k$ são funções diferenciáveis e que

$$\nabla_X Y = \sum_{ij} x_i x_j \nabla_{X_i} X_j + \sum_{ij} x_i X_i (y_j) X_j = \sum_k \left(\sum_{ij} x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k) \right) X_k,$$

isso mostra que $\nabla_X Y(p)$ depende de $x_i(p), y_k(p)$ e das derivadas $X(y_k)(p)$ de y_k segundo X . A noção de conexão fornece, portanto, uma maneira de derivar vetores ao longo de curvas em particular, é possível falar em aceleração de uma curva em M . Retomaremos essa idéia quando tratarmos das geodésicas.

Desses resultados pode-se determinar uma fórmula para se calcular a derivada covariante de um campo V ao longo de uma curva c pertencente a variedade M , veja: Seja $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ um sistema de coordenadas com $c(I) \cap x(U) \neq \emptyset$ e seja $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ a expressão local de $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$. Seja $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Então podemos expressar o campo V localmente como $V = \sum_j v^j X_j$, $j = 1, \dots, n$ onde $v^j = v^j(t)$ e $X_j = X_j(c(t))$. Pelos itens 1 e 2 da proposição (1.22), tem-se

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt} X_j + \sum_j v^j \frac{DX_j}{dt}.$$

Agora, pelo item (3) da proposição (1.22) e pelo item 1 da definição (1.21),

$$\frac{DX_j}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} X_j = \nabla \left(\sum_i \frac{dx_i}{dt} \right) X_j = \sum_i \frac{dx_i}{dt} \nabla_{X_i} X_j, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Assim,

$$\frac{DV}{dt} = \sum_j \frac{dv^j}{dt} X_j + \sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt} v^j \nabla_{X_i} X_j = \sum_k \left\{ \frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt} v^j \Gamma_{ij}^k \right\} X_k.$$

Com esses resultados podemos demonstrar sem maiores dificuldades a proposição (1.22). Adiante, mostraremos a expressão clássica dos símbolos de Christoffel da conexão Riemanniana em termos dos g_{ij} .

Definição 1.23 *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ é chamado paralelo quando $\frac{DV}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.*

Agora, vamos enunciar o resultado de existência e unicidade do campo paralelo transportado ao longo de uma curva da variedade. A proposição surge do teorema de existência e unicidade de equações diferenciáveis ordinárias.

Proposição 1.24 *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Seja $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ uma curva diferenciável em M e V_0 um vetor tangente a M em $c(t_0)$, $t_0 \in I$ (isto é, $V_0 \in T_{c(t_0)}M$). Então existe um único campo de vetores paralelo V ao longo de c , tal que $V(t_0) = V_0$, ($V(t)$ é chamado o transporte paralelo de $V(t_0)$ ao longo de c).*

Definição 1.25 *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$. A conexão é dita compatível com a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$, quando para toda curva diferenciável c e quaisquer pares de campos de vetores paralelos P e P' ao longo de c , tivermos $\langle P, P' \rangle = \text{constante}$.*

Mostrado como derivar um campo de vetores ao longo de uma curva, é natural nos questionarmos se certos resultados sobre derivada de funções, como a regra do produto, se aplicam quando tratamos de derivar produto de campos vetoriais. A resposta é dada pela seguinte proposição.

Proposição 1.26 *Seja M uma variedade Riemanniana. Uma conexão ∇ em M é compatível com a métrica se, e só se, para todo par V e W de campos de vetores ao longo da curva diferenciável $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ tem-se*

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, \quad t \in I.$$

Corolário 1.27 *Uma conexão ∇ em uma variedade Riemanniana M é compatível com a métrica se, e só se,*

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad X, Y, Z \in \chi(M).$$

Prova.

Suponhamos que ∇ é compatível com a métrica. Seja $p \in M$ e sejam $c : I \rightarrow M$ uma curva diferenciável com $c(t_0) = p$, $t_0 \in I$, e com $\frac{dc}{dt}|_{t=t_0} = X(p)$. Então

$$X(p) \langle Y, Z \rangle = \frac{d}{dt} \langle Y, Z \rangle|_{t=t_0}$$

Pela Proposição (1.22) item (3) e pelo Proposição (1.26) temos que

$$\begin{aligned} X(p) \langle Y, Z \rangle &= \frac{d}{dt} \langle Y, Z \rangle|_{t=t_0} = \left\langle \frac{DY}{dt}, Z \right\rangle_p + \left\langle Y, \frac{DZ}{dt} \right\rangle_p = \left\langle \nabla_{\frac{dc}{dt}|_{t=t_0}} Y, Z \right\rangle_p + \left\langle Y, \nabla_{\frac{dc}{dt}|_{t=t_0}} Z \right\rangle_p = \\ &= \langle \nabla_{X(p)} Y, Z \rangle_p + \langle Y, \nabla_{X(p)} Z \rangle_p. \end{aligned}$$

Como p é qualquer temos o resultado. Pela Proposição (1.26) a recíproca fica fácil de demonstrar. $\square$

Definição 1.28 *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é dita simétrica quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \text{ para todo } X, Y \in \chi(M).$$

Enunciaremos o teorema de Levi-Civita. Esse teorema é um resultado de grande importância na geometria Riemanniana, e garante a existência de uma conexão afim, simétrica e compatível com a métrica Riemanniana da variedade diferenciável.

Teorema 1.29 (Levi-Civita) *Dada uma variedade Riemanniana M , existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições:*

1. ∇ é simétrica.
2. ∇ é compatível com a métrica Riemanniana.

Tendo como ferramenta o teorema de Levi-Civita, podemos encontrar a expressão clássica dos símbolos de Christoffel mencionada acima. Os símbolos de Christoffel são definidos por $\nabla_{X_j} X_i$, e podem ser calculados a partir da métrica. Pelo teorema de Levi-Civita temos

$$\langle Z, \nabla_Y X \rangle = \frac{1}{2} \{ X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle \}.$$

Tomando $X = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x_j}$ e $Z = \frac{\partial}{\partial x_k}$ e pelo teorema de Levi-Civita temos uma conexão afim simétrica ∇ isso nos dá que $[X_i, X_j] = 0$ temos

$$\langle \frac{\partial}{\partial x_k}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} \rangle = \frac{1}{2} \{ \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k} \rangle + \frac{\partial}{\partial x_j} \langle \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_i} \rangle - \frac{\partial}{\partial x_k} \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle \},$$

mas por definição temos que $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle = g_{ij}$. Temos também que $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_l \Gamma_{ij}^l \frac{\partial}{\partial x_l}$, então

$$\langle \frac{\partial}{\partial x_k}, \sum_l \Gamma_{ij}^l \frac{\partial}{\partial x_l} \rangle = \sum_l \Gamma_{ij}^l \langle \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_l} \rangle = \sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk} = \frac{1}{2} \{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \}.$$

Como $g_{km}(=g_{mk})$ é uma métrica (ou seja, $\langle, \rangle_p$ é uma forma bilinear simétrica, positiva definida) temos sua inversa g^{km} bem definida. Então,

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \} g^{km}.$$

Esta é a expressão clássica dos símbolos de Christoffel da conexão Riemanniana em termos dos g_{ij} .

1.3 Geodésicas

Estudamos os conceitos básicos sobre derivada covariante e transporte paralelo. O ponto fundamental é que a derivada covariante é um conceito que pode ser considerado em Geometria Riemanniana, ou seja, a derivada covariante só depende da primeira forma fundamental. Como foi considerado, a noção de derivada covariante permite-nos dar um sentido à derivada do vetor velocidade de uma curva c de uma variedade M . As curvas de aceleração nula são precisamente as geodésicas de M . A noção de derivada covariante tem várias consequências importantes. Ela tornou claro que as idéias básicas de geodésicas e curvatura poderiam ser definidas em situações mais gerais que as variedades Riemannianas.

Definição 1.30 Uma curva parametrizada $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ é uma geodésica em $t_0 \in I$ se $\frac{D}{dt}(\frac{d\gamma}{dt}) = 0$ no ponto t_0 ; se γ é uma geodésica em t , para todo t pertencente a I , dizemos que γ é uma geodésica. Se $[a, b] \in I$ e $\gamma: I \rightarrow M$ é uma geodésica, a restrição de γ a $[a, b]$ é chamado de segmento de geodésica, ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$.

Alguns exemplos simples podem ser encontrados na literatura, tais como:

1. Os grandes círculos da esfera tridimensional são geodésicas.
2. No plano as retas são geodésicas.
3. As hélices são geodésicas do cilindro no espaço euclidiano.

Se $\gamma: I \rightarrow M$ é uma geodésica, então, pela Proposição (1.26), $\frac{d}{dt} \langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \rangle = 2 \langle \frac{D}{dt} \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \rangle = 0$, isto é, o comprimento do vetor tangente $\frac{d\gamma}{dt}$ é constante. Consideraremos, agora, que $|\frac{d\gamma}{dt}| = c \neq 0$, constante, excluindo as geodésicas que se reduzem a pontos. Se $c = 1$, diremos que a geodésica γ está normalizada. Da expressão de derivada covariante vista acima temos que γ será uma geodésica se, e só se,

$$\frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = \sum_k \left(\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x^k} = 0$$

se, e somente se,

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

onde $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$.

Ou seja, se γ é uma geodésica então ela satisfaz o sistema

$$\begin{cases} \frac{dx_k}{dt} = y_k \\ \frac{dy_k}{dt} = - \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k y_i y_j, \quad k = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Um conceito que será muito explorado na dissertação é a noção de geodésica minimizante que, quando definida na variedade M , é o instrumento usado para calcular a distância entre dois pontos quaisquer de M .

Definição 1.31 *Um segmento de geodésica $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ é chamado minimizante se $\ell(\gamma) \leq \ell(c)$, onde $\ell(\cdot)$ indica o comprimento de uma curva e c é qualquer curva diferenciável por partes ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$.*

Definição 1.32 *A distância $d(p, q)$ é definida por $d(p, q) = \text{ínfimo dos comprimentos de todas as curvas } f_{p,q}$, onde $f_{p,q}$ é uma curva diferenciável por partes ligando p e q .*

Observe que se existe uma geodésica minimizante γ ligando p a q então $d(p, q) = \text{comprimento de } \gamma$.

Proposição 1.33 *Com a distância d , M é um espaço métrico, isto é:*

1. $d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$,
2. $d(p, q) = d(q, p)$,
3. $d(p, q) \geq 0$, e $d(p, q) = 0$ se, e somente se, $p = q$

Definição 1.34 *Uma variedade Riemanniana M é (geodesicamente) completa se as geodésicas $\gamma(t)$ que partem de p estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$.*

Isso nos garante que dados dois pontos quaisquer de uma variedade completa existe uma geodésica minimizante ligando estes dois pontos. Precisamente, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.35 (Hopf e Rinow) *Seja M uma variedade Riemanniana e seja $p \in M$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *A $\exp_p$ está definida em todo o $T_p M$.*
2. *Os limitados e fechados de M são compactos.*
3. *M é completa como espaço métrico.*
4. *M é geodesicamente completa.*
5. *Existe uma sucessão de compactos $K_n \subset M$, $K_n \subset \text{int} K_{n+1}$ e $\bigcup_n K_n = M$, tais que se q_n não pertence a K_n então $d(p, q_n) \rightarrow \infty$.*
Além disso, cada uma das afirmações acima implica que
6. *para todo q em M existe uma geodésica γ ligando p a q com $\ell(\gamma) = d(p, q)$.*

É importante saber como funciona a aplicação exponencial. E para isso podemos consultar [11]. Traremos uma noção básica para podermos definir o que é bola geodésica.

A aplicação exponencial é diferenciável. Na maior parte das aplicações utilizaremos a restrição de $\exp$ a um aberto do espaço tangente $T_q M$, isto é, definiremos

$$\exp_q : B_\varepsilon(0) \subset T_q M \rightarrow M$$

por $\exp_q(v) = \exp(q, v)$.

Geometricamente, $\exp_q(v)$ é o ponto de M obtido percorrendo um comprimento igual a $|v|$, a partir de q , sobre a geodésica que passa por q com velocidade igual a $\frac{v}{|v|}$.

Se a exponencial é um difeomorfismo em uma vizinhança V da origem em $T_p M$, $\exp_p V = U$ é chamada vizinhança normal de p . Se $B_\varepsilon(0)$ é tal que $\overline{B_\varepsilon(0)} \subset V$, chamamos $\exp_p B_\varepsilon(0) = B_\varepsilon(p)$ a bola normal de centro $\exp_p(0) = p$ e raio ε .

1.4 Tensores em variedades Riemannianas

Vamos fazer um estudo sobre tensores já que a idéia de curvatura é um caso particular de tensor. Convém observar que $\chi(M)$ é um módulo sobre $D(M)$, isto é, $\chi(M)$ tem uma estrutura linear quando tomamos como "escalares" os elementos de $D(M)$.

Definição 1.36 Um tensor T de ordem r em uma variedade Riemanniana é uma aplicação multilinear diferenciável

$$T : \underbrace{\chi(M) \times \cdots \times \chi(M)}_{r \text{ fatores}} \rightarrow D(M).$$

Isto quer dizer que, dados $Y_1, \dots, Y_r \in \chi(M)$, $T(Y_1, Y_2, \dots, Y_r)$, é uma função diferenciável em M , e que T é linear em cada argumento, isto é,

$$T(Y_1, \dots, fX + gY, \dots, Y_r) = fT(Y_1, \dots, X, \dots, Y_r) + gT(Y_1, \dots, Y, \dots, Y_r),$$

para todo $X, Y \in \chi(M)$, $f, g \in D(M)$.

Fixe um ponto $q \in M$ e seja U uma vizinhança de q em M onde é possível definir campos $E_1, \dots, E_n \in \chi(M^n)$, de modo que em cada $q \in U$, os vetores $\{E_i(q)\}$, $i = 1, \dots, n$, formam uma base de $T_q M$; $\{E_i\}$ é um referencial móvel em U . Sejam

$$Y_1 = \sum_{i_1} y_{i_1} E_{i_1}, \dots, Y_r = \sum_{i_r} y_{i_r} E_{i_r}, \quad i_1, \dots, i_r = 1, \dots, n,$$

as restrições a U dos campos $Y_1, \dots, Y_r$, expressas no referencial móvel $\{E_i\}$. Sendo T um tensor, por linearidade,

$$T(Y_1, \dots, Y_r) = \sum_{i_1, \dots, i_r} y_{i_1} \cdots y_{i_r} T(E_{i_1}, \dots, E_{i_r}).$$

As funções $T(E_{i_1}, \dots, E_{i_r}) = T_{i_1 \dots i_r}$ em U são chamadas as componentes de T no referencial $\{E_i\}$. Da expressão acima decorre que o valor de $T(Y_1, \dots, Y_r)$ em um ponto q em M depende apenas dos valores em q das componentes de T , e dos valores de $Y_1, \dots, Y_r$ em q . Nesse sentido dizemos que T é pontual.

Um tensor T de ordem k , diz-se ser ele alternado quando

$$T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -T(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k)$$

para todo $v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k \in M$. Denominamos $\Omega^k(M)$ o conjunto de todos os tensores alternados.

Definição 1.37 *Seja T um tensor de ordem r . A diferencial covariante ∇T de T é um tensor de ordem $(r+1)$ dada por*

$$\nabla T(Y_1, \dots, Y_r, Z) = Z(T(Y_1, \dots, Y_r)) - T(\nabla_Z Y_1, \dots, Y_r) - \dots - T(Y_1, \dots, Y_{r-1}, \nabla_Z Y_r).$$

Para cada $Z \in \chi(M)$, a derivada covariante $\nabla_Z T$ de T em relação a Z é um tensor de ordem r dado por

$$\nabla_Z T(Y_1, \dots, Y_r) = \nabla T(Y_1, \dots, Y_r, Z).$$

Definição 1.38 *O tensor métrico $G : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow D(M)$ é definido por $G(X, Y) = \langle X, Y \rangle \in \chi(M)$. G é um tensor de ordem 2 e suas componentes no referencial $\{X_i\}$ são os coeficientes g_{ij} da métrica Riemanniana no sistema de coordenadas dado.*

Exemplo 1.2 *A diferencial covariante do tensor métrico é o tensor identicamente nulo. Com efeito, para todo $X, Y, Z \in \chi(M)$,*

$$\nabla_Z g(X, Y) = \nabla g(X, Y, Z) = Z\langle X, Y \rangle - \langle \nabla_Z X, Y \rangle - \langle X, \nabla_Z Y \rangle = 0,$$

pois ∇ é a conexão Riemanniana.

Seja A uma função $D(M)$ -linear

$$A : \chi^*(M)^r \times \chi(M)^s \rightarrow D(M).$$

A é uma aplicação multilinear que quando alimentado por r 1-formas $\theta^1, \dots, \theta^r$ e s campos vetoriais $X_1, \dots, X_s$ produz uma função real

$$f = A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) \in D(M).$$

O conjunto $\Upsilon_s^r(M)$ de todos os campos tensoriais sobre M do tipo (r, s) é, então, um módulo sobre $D(M)$.

No caso especial em que $r=s=0$, o campo tensorial sobre M do tipo $(0, 0)$ é apenas uma função $f \in D(M)$; isto é, $\Upsilon_0^0(M) = D(M)$.

Há uma notável operação chamada contração que reduz um tensor (r, s) a um tensor $(r - 1, s - 1)$. A definição geral deriva do caso a seguir.

Lema 1.39 *Existe uma única função $D(M)$ -linear $C : \Upsilon_1^1(M) \rightarrow D(M)$, chamada contração $(1, 1)$, tal que $C(X \otimes \theta) = \theta X$ para todo $X \in \chi(M)$ e $\theta \in \chi^*(M)$.*

Evidentemente a contração $(1, 1)$ está intimamente relacionada com a noção de traço. Interprete $A \in \Upsilon_1^1$ como uma função diferenciável que atribui para cada ponto p de M um operador linear A_p sobre $T_p M$. Então temos que $(CA)(p) = \text{traço} A_p$.

1.5 Formas

Uma função T que, a cada $x \in M$ associa $T(x) \in \Omega^p(M_x)$ (M_x é denominado o espaço tangente de M em x) é denominada uma p -forma em M . Sendo $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ um sistema de coordenadas, tem-se que f^*T é uma p -forma em W ; definimos, então, ser T diferenciável se f^*T o for.

Assim, θ é uma 1-forma sobre M e X é o campo de vetores sobre M , designa-se por θX a função real sobre M cujo valor em cada ponto p é o valor de θ_p sobre X_p . Uma 1-forma θ é diferenciável desde que θX seja diferenciável para todo $X \in \chi(M)$.

Seja $\chi^*(M)$ o conjunto de todas as 1-formas diferenciáveis sobre M . Assim como no caso dual de campos de vetores, as 1-formas admitem certas propriedades de soma e multiplicação, por uma função real. Explicitamente,

$$(\theta + \omega)_p = \theta_p + \omega_p, \quad (f\theta)_p = f(p)\theta_p$$

para todo p pertencente a M .

Definição 1.40 *A diferencial de $f \in D(M)$ é a 1-forma df tal que $(df)(v) = v(f)$ para todo vetor tangente v de M .*

Claramente, df é uma 1-forma já que em cada ponto p a função $(df)_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ é linear, e se $V \in \chi(M)$ a função $(df)(V) = Vf$ é diferenciável.

Se $x^1, \dots, x^n$ é o sistema de coordenadas em $U \subset M$, assim, nós temos as 1-formas coordenadas $dx^1, \dots, dx^n$ sobre U . Em cada ponto de U temos uma base dual para o campo de vetores coordenados $\partial_1, \dots, \partial_n$ já que $dx^i(\partial_j) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_i^j$. Segue que para qualquer 1-forma θ ,

$$\theta = \sum_i \theta(\partial_i) dx^i \quad \text{sobre } U.$$

Esta fórmula corresponde ao teorema de base para campos de vetores. Em particular, se $f \in D(M)$, então, sendo $df(\partial_i) = \frac{\partial f}{\partial x^i}$,

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \quad \text{sobre, } U$$

Lema 1.41 *A diferencial tem as seguintes propriedades:*

1. $d : D(M) \rightarrow \chi^*(M)$ é $\mathbb{R}$ -linear.
2. *Regra do produto:* Se $f, g \in D(M)$, então $d(fg) = gdf + fdg$.
3. Se $f \in D(M)$ e $h \in D(\mathbb{R}^1)$, então $d(h(f)) = h'(f)df$.

1.6 Curvaturas

Definição 1.42 *A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \chi(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ dada por*

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \chi(M),$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M .

Um tensor muito popular é o tensor curvatura de Ricci, que será definido a seguir:

Definição 1.43 *Para um $p \in M$, nós definimos o tensor curvatura de Ricci como $Rc : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ por*

$$Rc(X, Y) = \text{traço}(Z \mapsto R(X, Z)Y).$$

E a curvatura escalar R é o traço do tensor Rc com respeito a métrica Riemanniana.

Em coordenadas locais, $Rc = R_{ij}$.

Note que se $M = \mathbb{R}^n$, então $R(X, Y)Z = 0$ para todo $X, Y, Z \in \chi(\mathbb{R}^n)$. De fato, se indicarmos por $Z = (z_1, \dots, z_n)$ as componentes do campo Z nas coordenadas naturais do $\mathbb{R}^n$, obteremos que

$$\nabla_X Z = (Xz_1, \dots, Xz_n),$$

Observe que para o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, temos que $\Gamma_{ij}^k = 0$. Daí, como $\nabla_X Y = \sum_k \left(\sum_{ij} x_{ij} \Gamma_{ij}^k + X(y_k) \right) X_k$ então $\nabla_X Z = (Xz_1, \dots, Xz_n)$ nas coordenadas naturais. Onde,

$$\nabla_Y \nabla_X Z = (YXz_1, \dots, YXz_n),$$

o que implica que

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{XY - YX} Z = \\ &= \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{XY} Z - \nabla_{YX} Z = (YX(z_1), \dots, YX(z_n)) - (XY(z_1), \dots, XY(z_n)) + \\ &\quad (XY(z_1), \dots, XY(z_n)) - (YX(z_1), \dots, YX(z_n)) = 0. \end{aligned}$$

Considerando um sistema de coordenadas $\{x_i\}$ em torno de $p \in M$, como $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$, teremos

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_k} = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\right) \frac{\partial}{\partial x_k},$$

isto é, a curvatura mede a não-comutatividade da derivada covariante. Podemos pensar na curvatura como uma maneira de medir o quanto uma variedade M deixa de ser euclidiana.

Proposição 1.44 *A curvatura R de uma variedade Riemanniana possui as seguintes propriedades:*

(i) *R é bilinear em $\chi(M) \times \chi(M)$, isto é,*

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1),$$

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2),$$

$f, g \in D(M)$ e $X_i, Y_j \in \chi(M)$.

(ii) *Para todo par $X, Y \in \chi(M)$ o operador curvatura $R(X, Y) : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ é linear, ou seja,*

$$R(X, Y)(Z + W) = R(X, Y)Z + R(X, Y)W,$$

$$R(X, Y)fZ = fR(X, Y)Z,$$

$f \in D(M)$, $Z, W \in \chi(M)$.

Proposição 1.45 *(Primeira Identidade de Bianchi)*

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0.$$

Prova.

Pela simetria da conexão Riemanniana, temos,

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y &= \\ \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z + \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[Y, Z]} X + \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_Z \nabla_X Y + \nabla_{[Z, X]} Y, \end{aligned}$$

como $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ para todo $X, Y \in \chi(M)$ e $\nabla_{[Z, Y]} X = -\nabla_{[Y, Z]} X$, segue que

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y &= \\ \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z + \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[Y, Z]} X + \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_Z \nabla_X Y + \nabla_{[Z, X]} Y &= \\ \nabla_Y [X, Z] + \nabla_Z [Y, X] + \nabla_X [Z, Y] - \nabla_{[X, Z]} Y - \nabla_{[Y, X]} Z - \nabla_{[Z, Y]} X, \end{aligned}$$

Pela identidade de Jacobi,

$$\begin{aligned} \nabla_Y[X, Z] + \nabla_Z[Y, X] + \nabla_X[Z, Y] - \nabla_{[X, Z]}Y - \nabla_{[Y, X]}Z - \nabla_{[Z, Y]}X = \\ [Y, [X, Z]] + [Z, [Y, X]] + [X, [Z, Y]] = 0. \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned} [Y, [X, Z]] &= [Y, \nabla_X Z - \nabla_Z X] = [Y, \nabla_X Z] - [Y, \nabla_Z X] = \\ \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{\nabla_X Z} Y - \nabla_Y \nabla_Z X + \nabla_{\nabla_Z X} Y &= \nabla_Y[X, Z] + \nabla_{[Z, X]}Y = \nabla_Y[X, Z] - \nabla_{[X, Z]}Y. \end{aligned}$$

Fazendo o mesmo para os outros casos temos a igualdade acima, concluindo a demonstração. $\square$

Escreveremos, por simplicidade, $\langle R(X, Y)Z, T \rangle = (X, Y, Z, T)$. Utilizando essa nova notação, vamos introduzir a Proposição (1.46):

Proposição 1.46 (a) $(X, Y, Z, T) + (Y, Z, X, T) + (Z, X, Y, T) = 0$

(b) $(X, Y, Z, T) = -(Y, X, Z, T)$

(c) $(X, Y, Z, T) = -(X, Y, T, Z)$

(d) $(X, Y, Z, T) = (Z, T, X, Y)$.

Convém escrever o que foi apresentado acima em um sistema de coordenadas $(U, \mathbf{x})$ em torno de um ponto p de uma variedade M . Sendo $\frac{\partial}{\partial x_i} = X_i$, temos que

$$R(X_i, X_j)X_k = \sum_l R_{ijk}^l X_l,$$

e

$$R(X_i, X_j)X_k = \nabla_{X_j} \nabla_{X_i} X_k - \nabla_{X_i} \nabla_{X_j} X_k + \nabla_{[X_i, X_j]} X_k$$

lembrando que $[X_i, X_j] = 0$. Então,

$$R(X_i, X_j)X_k = \nabla_{X_j} \nabla_{X_i} X_k - \nabla_{X_i} \nabla_{X_j} X_k = \nabla_{X_j} \left(\sum_l \Gamma_{ik}^l X_l \right) - \nabla_{X_i} \left(\sum_l \Gamma_{jk}^l X_l \right),$$

daí,

$$\begin{aligned} R(X_i, X_j)X_k &= \sum_l R_{ijk}^l X_l = \nabla_{X_j} \left(\sum_l \Gamma_{ik}^l X_l \right) - \nabla_{X_i} \left(\sum_l \Gamma_{jk}^l X_l \right) \\ &= \sum_l \frac{d\Gamma_{ik}^l}{dx_j} X_l + \sum_l \Gamma_{ik}^l \left(\sum_p \Gamma_{jl}^p X_p \right) - \sum_l \frac{d\Gamma_{jk}^l}{dx_i} X_l - \sum_l \Gamma_{jk}^l \left(\sum_p \Gamma_{il}^p X_p \right), \end{aligned}$$

fixando o índice teremos

$$R_{ijk}^s X_s = \frac{d\Gamma_{ik}^s}{dx_j} X_s + \sum_l \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^s X_s - \frac{d\Gamma_{jk}^s}{dx_i} X_s - \sum_l \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^s X_s.$$

Assim,

$$R_{ijk}^s = \frac{d\Gamma_{ik}^s}{dx_j} + \sum_l \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^s - \frac{\partial \Gamma_{jk}^s}{\partial x_i} - \sum_l \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^s.$$

Como tomamos $R(X_i, X_j)X_k = \sum_l R_{ijk}^l X_l$, fazendo

$$\langle R(X_i, X_j)X_k, X_s \rangle = \sum_l R_{ijk}^l g_{ls} = R_{ijkl},$$

onde $g_{ls} = \langle \frac{\partial}{\partial x_l}, \frac{\partial}{\partial x_s} \rangle$. Portanto, a Proposição (1.45) pode ser reescrita como:

$$R_{ijks} + R_{jkis} + R_{kjis} = 0$$

e, mais ainda,

$$R_{ijks} = -R_{jiks}$$

$$R_{ijks} = -R_{ijks}$$

$$R_{ijks} = R_{ksij}.$$

Agora vamos apresentar uma idéia intimamente ligada com o operador curvatura. A curvatura seccional (ou Riemanniana), que definiremos a seguir.

Definição 1.47 A área do paralelogramo bi-dimensional determinado pelo par de vetores $x, y \in V$, onde V é um espaço vetorial, tem a expressão

$$|x \wedge y| = \sqrt{|x|^2 |y|^2 - \langle x, y \rangle^2}.$$

Proposição 1.48 Seja $\sigma \subset T_p M$ um subespaço bi-dimensional do espaço tangente $T_p M$ e sejam $x, y \in \sigma$ dois vetores linearmente independentes. Então

$$K(x, y) = \frac{\langle x \wedge y, x \wedge y \rangle}{|x \wedge y|^2}$$

não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$.

Definição 1.49 Dado um ponto p pertencente a uma variedade M e um subespaço bi-dimensional $\sigma \subset T_p M$ o número real $K(x, y) = K(\sigma)$, onde $\{x, y\}$ é uma base qualquer de σ , é chamado curvatura seccional de σ em p .

Lema 1.50 Seja V um espaço vetorial de dimensão ≥ 2 , munido de um produto interno $\langle, \rangle$. Sejam $R : V \times V \times V \rightarrow V$ e $R' : V \times V \times V \rightarrow V$ aplicações trilineares tais que as condições da proposição 1.25 sejam satisfeitas para

$$(x, y, z, t) = \langle R(x, y)z, t \rangle, \quad (x, y, z, t)' = \langle R'(x, y)z, t \rangle.$$

Se x, y são dois vetores linearmente independentes, escrevamos,

$$K(\sigma) = \frac{(x, y, x, y)}{|x \wedge y|^2}, \quad K'(\sigma) = \frac{(x, y, x, y)'}{|x \wedge y|^2},$$

onde σ é o espaço bi-dimensional gerado por x e y . Se para todo $\sigma \in V$, $K(\sigma) = K'(\sigma)$, então $R = R'$.

Variedades que possuem curvatura seccional constante desempenham um papel fundamental no desenvolvimento da Geometria Riemanniana. Vamos mostrar que o lema anterior nos permite caracterizar tais variedades por meio das componentes R_{ijkl} da curvatura em uma base ortonormal. Isso decorre do lema seguinte.

Lema 1.51 *Sejam M uma variedade Riemanniana e p um ponto de M . Defina uma aplicação trilinear $R' : T_p M \times T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M$ por*

$$\langle R'(X, Y, W), Z \rangle = \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle Y, W \rangle \langle X, Z \rangle,$$

para todo $X, Y, W, Z \in T_p M$. Então M tem curvatura seccional constante igual a K_0 se, e somente se, $R = K_0 R'$, onde R é a curvatura de M .

Vamos tratar de algumas combinações importantes das curvaturas seccionais. A saber, a curvatura de Ricci e a curvatura escalar. Seja $x = z_n$ um vetor unitário em $T_p M$; tomemos uma base ortonormal $\{z_1, \dots, z_{n-1}\}$ do hiperplano de $T_p M$ ortogonal a x e consideremos as seguintes médias:

$$Ric_p(x) = \frac{1}{n-1} \sum_i \langle R(x, z_i)x, z_i \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$R(p) = \frac{1}{n} \sum_j Ric_p(z_j) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j} \langle R(z_i, z_j)z_i, z_j \rangle, \quad j = 1, \dots, n.$$

Essas são, respectivamente, a curvatura de Ricci, na direção X , e a curvatura escalar. Elas não dependem da escolha das correspondentes bases ortonormais. Para mostrar isso, primeiramente vamos definir uma forma bilinear em $T_p M$ como se segue: sejam $x, y \in T_p M$ e

$$Q(x, y) = \text{traço da aplicação} \quad z \mapsto R(x, z)y.$$

Claramente Q é bilinear. Escolhendo x unitário e uma base ortonormal $\{z_1, \dots, z_{n-1}, z_n = x\}$ para $T_p M$ temos

$$Q(x, y) = \sum_i \langle R(x, z_i)y, z_i \rangle \text{ e } Q(y, x) = \sum_i \langle R(y, z_i)x, z_i \rangle,$$

então pela Proposição (1.46) item (d) $Q(x, y) = Q(y, x)$, ou seja,

$$Q(x, y) = \sum_i \langle R(x, z_i) y, z_i \rangle = \sum_i \langle R(y, z_i) x, z_i \rangle = Q(y, x),$$

isto é, Q é simétrica e $Q(x, x) = (n-1)Ric_p(x)$, isso mostra que $Ric_p(x)$ está bem definida. À forma Q em $T_p M$ corresponde uma aplicação linear auto-adjunta K , dada por

$$\langle K(x), y \rangle = Q(x, y).$$

Tomando uma base ortonormal $\{z_1, \dots, z_n\}$, temos

$$\text{Traço de } K = \sum_j \langle K(z_j), z_j \rangle = \sum_j Q(z_j, z_j) = (n-1) \sum_j Ric_p(z_j) = n(n-1)R(p),$$

como queríamos.

Diferenciação e Integração em Variedades

2.1 Notação de Einstein

A partir desse capítulo, seguiremos a convenção de Einstein para somatórios. A convenção de Einstein para somatório é conveniente quando manipula-se expressões envolvendo vetores, matrizes ou tensores em geral (Um tensor é uma coleção de números rotulados por índices. A classificação de um tensor é o número de índices necessários para especificar uma entrada do tensor).

A notação de Einstein consiste em omitir o símbolo de somatório e interpretar índices repetidos no mesmo termo como indicador desse somatório (em certos contextos pode ser exigido que estes índices apareçam uma vez em cima e uma vez em baixo). A convenção somatório de Einstein é uma convenção que simplifica o tratamento de fórmulas com vetores e tensores introduzida por Albert Einstein em 1916 (Em "The Foundation of the General Theory of Relativity") . De acordo com esta convenção, quando uma variável de índice aparece duas vezes em um único termo, uma vez em um (sobrescrita) superior e uma vez em uma posição inferior (subscrito), isso implica que estamos somando sobre todos os seus possíveis valores.

Pela convenção de Einstein, vamos rever algumas expressões, agora "simplificadas", que serão usadas durante o texto.

Seja M uma variedade n -dimensional Riemanniana completa com métrica Riemanniana g_{ij} . A conexão de Levi-Civita é dada pelos símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right)$$

onde g^{ij} é a inversa de g_{ij} . O tensor curvatura Riemanniana, como já visto, é dado por

$$R_{ijl}^k = \frac{\partial \Gamma_{jl}^k}{\partial x_i} - \frac{\partial \Gamma_{il}^k}{\partial x_j} + \Gamma_{ip}^k \Gamma_{jl}^p - \Gamma_{jp}^k \Gamma_{il}^p.$$

Baixamos o índice para a terceira posição, de modo que

$$R_{ijkl} = g_{kp} R_{ijl}^p.$$

O tensor curvatura é anti-simétrico com relação aos pares i, j e k, l e simétricos com dupla mudança, isto é,

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{jilk}.$$

Também temos a primeira identidade de Bianchi

$$R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0.$$

O tensor de Ricci é a contração

$$R_{ik} = g^{jl} R_{ijkl}, \quad (2-1)$$

e a curvatura escalar é dada por

$$R = g^{ij} R_{ij}. \quad (2-2)$$

Nós denotamos a derivada covariante de um campo de vetores $v = v^j \frac{\partial}{\partial x_j}$ por

$$\nabla_i v^j = \frac{\partial v^j}{\partial x_i} + \Gamma_{ik}^j v^k$$

e a derivada covariante de uma 1-forma por

$$\nabla_i v_j = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \Gamma_{ij}^k v_k.$$

Estas definições estendem-se unicamente aos tensores de forma a preservar a regra do produto e contrações. Temos que

$$\nabla_i \nabla_j v^l - \nabla_j \nabla_i v^l = R_{ijk}^l v^k$$

e

$$\nabla_i \nabla_j v_k - \nabla_j \nabla_i v_k = R_{ijkl} g^{lm} v_m. \quad (2-3)$$

Lema 2.1 ([28]) (*Lema de Ricci*) g_{ij} e g^{ij} comportam-se como constantes na diferenciação covariante, isto é:

$$\nabla_k g_{ij} = 0, \quad \nabla_k g^{ij} = 0.$$

Daí, temos que

$$\nabla_i g_{jl} R_{ik} = R_{ik} \nabla_i g_{jl} + g_{jl} \nabla_i R_{ik} = g_{jl} \nabla_i R_{ik} \quad (2-4)$$

pois $\nabla_i g_{jl} = 0$ por (1.2). Da mesma forma

$$\nabla_i g^{jl} R_{ik} = R_{ik} \nabla_i g^{jl} + g^{jl} \nabla_i R_{ik} = g^{jl} \nabla_i R_{ik}. \quad (2-5)$$

2.2 Segunda Identidade de Bianchi e Contrações

Agora, usando a notação $\langle R(X_i, X_j)X_k, X_s \rangle = R_{ijks}$, vamos tratar da segunda identidade de Bianchi e de suas contrações.

Proposição 2.2 (Segunda identidade de Bianchi) *Considerando R_{ijkl} o tensor curvatura de ordem 4, temos que:*

$$\nabla_i R_{jklm} + \nabla_j R_{kilm} + \nabla_k R_{ijlm} = 0.$$

Vamos fazer a primeira contração da segunda identidade de Bianchi. Multiplicando g^{im} pela segunda identidade temos

$$g^{im} \nabla_i R_{jklm} + g^{im} \nabla_j R_{kilm} + g^{im} \nabla_k R_{ijlm} = 0,$$

como

$$R_{ijlm} = -R_{jilm}, \quad \nabla_i g^{jl} R_{ijkl} = g^{jl} \nabla_i R_{ijkl}$$

e

$$R_{ik} = g^{jl} R_{ijkl},$$

obtemos

$$g^{im} \nabla_i R_{jklm} + g^{im} \nabla_j R_{kilm} + g^{im} \nabla_k R_{ijlm} = g^{im} \nabla_i R_{jklm} + \nabla_j R_{kl} - \nabla_k R_{jl} = 0,$$

que é equivalente a

$$g^{im} \nabla_i R_{jklm} + \nabla_j R_{kl} - \nabla_k R_{jl} = 0. \quad (2-6)$$

Temos, assim, a contração da segunda identidade de Bianchi. Agora faremos a dupla contração da segunda identidade de Bianchi multiplicando-a por $g^{im} g^{jl}$

$$\nabla_i R_{jklm} + \nabla_j R_{kilm} + \nabla_k R_{ijlm} = 0$$

teremos

$$g^{im}g^{jl}\nabla_i R_{jklm} + g^{im}g^{jl}\nabla_j R_{kilm} + g^{im}g^{jl}\nabla_k R_{ijlm} = 0.$$

Sendo $R_{ik} = g^{jl}R_{ijkl}$, $R_{ijlm} = -R_{ijml}$ e $\nabla_i g^{jl}R_{jklm} = g^{jl}\nabla_i R_{jklm}$ (2-4). Obtemos que

$$g^{im}g^{jl}\nabla_i R_{jklm} + g^{im}g^{jl}\nabla_j R_{kilm} + g^{im}g^{jl}\nabla_k R_{ijlm} = 0,$$

isso implica em

$$g^{im}\nabla_i R_{km} + g^{jl}g^{im}\nabla_j R_{kilm} - g^{im}\nabla_k R_{im} = 0.$$

Como $R = g^{im}R_{im}$,

$$g^{im}\nabla_i R_{km} + g^{jl}\nabla_j R_{kl} - \nabla_k R = 0.$$

Note que temos uma soma em i, m e outra em j, l na equação acima. Portanto, os índices podem ser nomeados igualmente, ou seja,

$$g^{ij}\nabla_i R_{kj} + g^{ij}\nabla_i R_{kj} - \nabla_k R = 0,$$

que resulta em

$$2g^{ij}\nabla_i R_{kj} = \nabla_k R. \quad (2-7)$$

2.3 Gradiente, Laplaciano e Hessiana

Agora considerando f uma função diferenciável em M , vamos introduzir os conceitos de gradiente, laplaciano e hessiana, que serão extremamente úteis para o entendimento posterior do texto. Considere $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \in D(M)$ e uma variedade semi-Riemanniana (M^n, g) . Uma variedade semi-Riemanniana é uma variedade diferenciável M com a escolha, para cada ponto p de M , de uma forma bilinear simétrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ em $T_p M$ e que varia diferenciavelmente com p , no seguinte sentido: para todo par X, Y de campo de vetores diferenciáveis em uma vizinhança V_p de M , a função $\langle X, Y \rangle_p$ é diferenciável em V_p .

Definição 2.3 ([28]) *Seja uma função $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos, simplismente, que*

$$\nabla_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad (2-8)$$

de modo que, neste caso, pelo menos sabemos que o campo tensorial

$$\sum_{i=1}^n \nabla_i f dx_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

é, na verdade, apenas df .

Vamos introduzir os conceitos de laplaciano, hessiana e gradiente [15] e calculá-los em um sistema de coordenadas.

Definição 2.4 *O gradiente de uma função $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ em um ponto p de uma variedade semi-Riemanniana M , denotado por ∇f , é o vetor de $T_p M$ tal que*

$$\langle \nabla f, v \rangle = df_p(v), \quad (2-9)$$

para todo $v \in T_p M$.

Definição 2.5 *A hessiana de f , denotada por $Hess f$, é a forma bilinear simétrica dada por*

$$Hess f(X, Y) = \langle \nabla_X (\nabla f), Y \rangle, \quad (2-10)$$

para todo $X, Y \in \chi(M)$.

Definição 2.6 *O laplaciano de f é definido por*

$$\Delta f = \text{div}(\nabla f), \quad (2-11)$$

onde $\text{div}X : M \rightarrow \mathbb{R}$ é dado por

$$\text{div}X(p) = \text{traço da aplicação linear } \{Y(p) \mapsto \nabla_Y X(p)\}, \text{ para todo } p \text{ em } M. \quad (2-12)$$

Lema 2.7 *Sejam (M^n, g) uma variedade semi-Riemanniana e $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Dado um sistema de coordenadas locais (U, x) em p pertencente a M , temos:*

$$|\nabla f|^2 = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad (2-13)$$

$$(Hess f)_{ij} = \nabla_i \nabla_j f = \nabla \nabla f \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad (2-14)$$

$$\Delta_g f = g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k} \right). \quad (2-15)$$

Prova. Vamos mostrar (2-13). Representando o gradiente como combinação linear da base, temos

$$\nabla f = a^i \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (2-16)$$

Substituindo (2-16) na definição (2-9)

$$\left\langle a^k \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = df_p \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right).$$

Segue que

$$a^k g_{kj} = \frac{\partial f}{\partial x_j}. \quad (2-17)$$

Multiplicando os dois lados de (2-17) por g^{ij} , e somando em j , obtemos

$$g^{ij} a^k g_{kj} = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Substituindo

$$g^{ij} g_{jk} = \delta_i^k,$$

segue-se que

$$a^k \delta_i^k = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Obtemos assim os coeficientes do vetor gradiente

$$a^i = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}. \quad (2-18)$$

Substituindo (2-18) em (2-16) temos

$$\nabla f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (2-19)$$

Daí,

$$\begin{aligned} |\nabla f|^2 &= \langle \nabla f, \nabla f \rangle \\ &= \left\langle g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}, g^{ps} \frac{\partial f}{\partial x_p} \frac{\partial}{\partial x_s} \right\rangle \\ &= g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_p} g^{ps} g_{is} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_p} g^{ij} \delta_i^p. \end{aligned}$$

Como

$$g_{is}g^{ps} = \delta_i^p = \begin{cases} 1, & \text{se } p = i \\ 0, & \text{se } p \neq i \end{cases}$$

temos, enfim, que

$$|\nabla f|^2 = \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} g^{ij}.$$

Trataremos agora de (2-14). Pela definição temos

$$\text{Hess}f\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}(\nabla f), \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle.$$

Substituindo

$$\nabla f = a^i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

tem-se

$$\begin{aligned} \text{Hess}f\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) &= \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left(a^k \frac{\partial}{\partial x_k} \right), \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= \left\langle \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} a^k \right) \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= \left\langle \left(a^k \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{\partial a^k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} \right), \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle. \end{aligned}$$

Mas, como

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_k} = \Gamma_{ik}^s \frac{\partial}{\partial x_s}$$

então

$$\begin{aligned} \text{Hess}f\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) &= \left\langle \left(a^k \Gamma_{ik}^s \frac{\partial}{\partial x_s} + \frac{\partial a^k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} \right), \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle \\ &= a^k \Gamma_{ik}^s \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_s} \right\rangle + \frac{\partial a^k}{\partial x_i} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k} \right\rangle \\ &= a^k \Gamma_{ik}^s g_{js} + \frac{\partial a^k}{\partial x_i} g_{jk}. \end{aligned} \tag{2-20}$$

Por (2-18) temos

$$a^k = g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x_l}.$$

Derivando a^k com relação a x_i obtemos

$$\frac{\partial a^k}{\partial x_i} = \frac{\partial g^{kl}}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_l} + g^{kl} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_l} \tag{2-21}$$

Agora, sendo

$$g^{ml} g_{jm} = \delta_l^j$$

derivando com relação a x_i

$$\frac{\partial g^{ml}}{\partial x_i} g_{jm} + g^{ml} \frac{\partial g_{jm}}{\partial x_i} = 0,$$

o que nos dá

$$\frac{\partial g^{ml}}{\partial x_i} g_{jm} = -g^{ml} \frac{\partial g_{jm}}{\partial x_i}.$$

Multiplicando por g^{kj} e somando em j ,

$$\frac{\partial g^{ml}}{\partial x_i} g_{jm} g^{kj} = -g^{ml} g^{kj} \frac{\partial g_{jm}}{\partial x_i}.$$

Como

$$g_{mj} g^{jk} = \delta_k^m = \begin{cases} 1, & \text{se } k = m \\ 0, & \text{se } k \neq m \end{cases}$$

$$\frac{\partial g^{kl}}{\partial x_i} = -g^{ml} g^{kj} \frac{\partial g_{jm}}{\partial x_i}. \quad (2-22)$$

Por outro lado, como nosso tratamento é sobre variedades semi-Riemannianas, ou seja, a métrica não é necessariamente Riemanniana, não temos o apoio do Teorema de Levi-Civita. O que nos dá

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{jm}}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_m} \right\rangle \\ &= \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_m} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_m} \right\rangle \\ &= \left\langle \Gamma_{ij}^r \frac{\partial}{\partial x_r}, \frac{\partial}{\partial x_m} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j}, \Gamma_{im}^s \frac{\partial}{\partial x_s} \right\rangle \\ &= \Gamma_{ij}^r g_{rm} + \Gamma_{im}^s g_{js}. \end{aligned}$$

Substituindo em (2-22) tem-se

$$\frac{\partial g^{kl}}{\partial x_i} = -g^{ml} g^{kj} (\Gamma_{ij}^r g_{rm} + \Gamma_{im}^s g_{js}) \quad (2-23)$$

$$= -\Gamma_{ij}^r g_{rm} g^{ml} g^{kj} - \Gamma_{im}^s g_{js} g^{ml} g^{kj} \quad (2-24)$$

$$= -\Gamma_{ij}^r g^{kj} \delta_r^l - \Gamma_{im}^s g^{ml} \delta_k^s \quad (2-25)$$

Mas, $\delta_r^l \neq 0$ se $l = r$ e $\delta_k^s \neq 0$ se $k = s$. Então

$$\frac{\partial g^{kl}}{\partial x_i} = -\Gamma_{ij}^l g^{kj} - \Gamma_{im}^k g^{ml}. \quad (2-26)$$

Substituindo (2-26) em (2-21)

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_k}{\partial x_i} &= \left(-\Gamma_{ij}^l g^{kj} - \Gamma_{im}^k g^{ml} \right) \frac{\partial f}{\partial x_l} + g^{kl} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_l} \\ &= -\Gamma_{ij}^l g^{kj} \frac{\partial f}{\partial x_l} - \Gamma_{im}^k g^{ml} \frac{\partial f}{\partial x_l} + g^{kl} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_l} \end{aligned} \quad (2-27)$$

Agora, substituindo (2-27) em (2-20) tem-se

$$\begin{aligned} Hess f\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) &= a^k \Gamma_{ik}^s g_{js} + \left(-\Gamma_{ij}^l g^{kj} \frac{\partial f}{\partial x_l} - \Gamma_{im}^k g^{ml} \frac{\partial f}{\partial x_l} + g^{kl} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_l} \right) g_{jk} \\ &= a^k \Gamma_{ik}^s g_{js} + \left(-\Gamma_{ij}^l g^{kj} g_{jk} \frac{\partial f}{\partial x_l} - \Gamma_{im}^k g^{ml} g_{jk} \frac{\partial f}{\partial x_l} + g^{kl} g_{jk} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_l} \right) \\ &= a^k \Gamma_{ik}^s g_{js} + \left(-\Gamma_{ij}^l g^{kj} g_{jk} \frac{\partial f}{\partial x_l} - \Gamma_{im}^k g^{ml} g_{jk} \frac{\partial f}{\partial x_l} + g^{kl} g_{jk} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_l} \right) \\ &= a^k \Gamma_{ik}^s g_{js} + \left(-\Gamma_{ij}^l \delta_j^k \frac{\partial f}{\partial x_l} - \Gamma_{im}^k g^{ml} g_{jk} \frac{\partial f}{\partial x_l} + \delta_j^l \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_l} \right) \\ &= a^k \Gamma_{ik}^s g_{js} + \left(-\Gamma_{ij}^l \frac{\partial f}{\partial x_l} - \Gamma_{im}^k g^{ml} g_{jk} \frac{\partial f}{\partial x_l} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right). \end{aligned}$$

Agora usando (2-18) temos que

$$g^{ml} \frac{\partial f}{\partial x_l} = a^m.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} Hess f\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) &= a^k \Gamma_{ik}^s g_{js} + \left(-\Gamma_{ij}^l \frac{\partial f}{\partial x_l} - \Gamma_{im}^k g^{ml} g_{jk} \frac{\partial f}{\partial x_l} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \\ &= a^k \Gamma_{ik}^s g_{js} + \left(-\Gamma_{ij}^l \frac{\partial f}{\partial x_l} - \Gamma_{im}^k a^m g_{jk} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma_{ij}^l \frac{\partial f}{\partial x_l}, \end{aligned}$$

como queríamos.

Resta demonstrar o último resultado,

$$\Delta_g f = g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k} \right).$$

Pela definição de laplaciano (2-11) temos

$$\Delta_g f = \text{div}(\nabla f).$$

Usando (2-12) e (2-19) tem-se que o laplaciano de f é o traço da aplicação linear T , tal que,

$$T\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} g^{lj} \frac{\partial f}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Assim,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left(g^{lj} \frac{\partial f}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \left[g^{lj} \frac{\partial f}{\partial x_l} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} + \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left(g^{lj} \frac{\partial f}{\partial x_l} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \right].$$

Substituindo j por s e utilizando

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_s} = \Gamma_{is}^j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad (2-28)$$

tem-se

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left(g^{lj} \frac{\partial f}{\partial x_l} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) &= \left[g^{ls} \frac{\partial f}{\partial x_l} \Gamma_{is}^j \frac{\partial}{\partial x_j} + \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left(g^{lj} \frac{\partial f}{\partial x_l} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \\ &= \left[g^{ls} \frac{\partial f}{\partial x_l} \Gamma_{is}^j + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g^{lj} \frac{\partial f}{\partial x_l} \right) \right] \frac{\partial}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (2-29)$$

Observe que os coeficientes dos elementos da base na expressão acima representam as n entradas da i -ésima coluna da matriz (a^{ij}) associada à aplicação T . Somando os n elementos tais que $j = i$ obtemos

$$\begin{aligned} \Delta f &= \left[g^{ls} \frac{\partial f}{\partial x_l} \Gamma_{is}^i + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g^{li} \frac{\partial f}{\partial x_l} \right) \right] \\ &= \left[g^{ls} \frac{\partial f}{\partial x_l} \Gamma_{is}^i + \left(g^{li} \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_i} + \frac{\partial g^{li}}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_l} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2-30)$$

Substituindo

$$\frac{\partial g^{li}}{\partial x_i} = -\Gamma_{ip}^l g^{pi} - \Gamma_{im}^i g^{ml}$$

em (2-30) consegue-se

$$\begin{aligned} \Delta f &= \left\{ g^{ls} \frac{\partial f}{\partial x_l} \Gamma_{is}^i + \left[g^{li} \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_l} \left(-\Gamma_{ip}^l g^{pi} - \Gamma_{im}^i g^{ml} \right) \right] \right\} \\ &= \left\{ g^{ls} \frac{\partial f}{\partial x_l} \Gamma_{is}^i + g^{li} \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_i} - \Gamma_{ip}^l \frac{\partial f}{\partial x_l} g^{pi} - \Gamma_{im}^i \frac{\partial f}{\partial x_l} g^{ml} \right\} \\ &= g^{li} \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_i} - \Gamma_{ip}^l \frac{\partial f}{\partial x_l} g^{pi} \end{aligned}$$

Renomeando os índices

$$\Delta f = g^{ji} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} - \Gamma_{ij}^l \frac{\partial f}{\partial x_l} \right).$$

Como

$$(Hess f)_{ij} = \nabla_i \nabla_j f = \nabla \nabla f \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad (2-31)$$

e

$$\Delta f = g^{ji} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} - \Gamma_{ij}^l \frac{\partial f}{\partial x_l} \right).$$

Assim,

$$\Delta f = g^{ij} (Hess f)_{ij} = g^{ij} \nabla_i \nabla_j f. \quad (2-32)$$

□

Definição 2.8 *Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável, então, lembrando de (2-8),*

$$\nabla^j f = g^{ij} \nabla_i f. \quad (2-33)$$

Isso nos dá que $g_{ij} \nabla^j f = \nabla_i f$.

Essa definição relacionada a noção de gradiente euclidiano de uma função diferenciável $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ com a definição local do gradiente sobre uma variedade Riemanniana de uma função diferenciável (2-19).

2.4 Teorema da Divergência e Teorema de Stokes

Vamos enunciar um Teorema fundamental para a demonstração de alguns resultados que vamos estudar. Mas primeiro precisamos definir o que é uma variedade com fronteira.

Definição 2.9 *Uma variedade topológica n -dimensional com fronteira é um espaço de Hausdorff com base enumerável no qual todo ponto tem uma vizinhança homeomorfa a um subconjunto aberto do espaço superior fechado n -dimensional $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_n \geq 0\}$. (ver [19] página 19)*

Teorema 2.10 (Teorema de Stokes) *Se α é uma $(n-1)$ - forma sobre uma variedade diferenciável compacta M^n com (possível vazia) fronteira ∂M , então*

$$\int_M d\alpha = \int_{\partial M} \alpha.$$

Como consequência do Teorema de Stokes, temos o

Teorema 2.11 (Teorema da Divergência) *Seja (M, g) uma variedade diferenciável compacta. Se X é uma 1-forma, então*

$$\int_M \operatorname{div}(X) d\mu = \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle d\sigma. \quad (2-34)$$

Onde ν é o vetor exterior unitário e normal, $d\mu$ representa a forma volume de g , e $d\sigma$ é a forma de volume da fronteira ∂M com respeito a métrica induzida.

2.5 Variação do Comprimento de Arco

A variação do comprimento de arco [10] e [27] é um fato essencial na demonstração do Teorema (3.2) e por isso faremos uma análise mais detalhada sobre o assunto.

Dado um caminho $\gamma: [a, b] \rightarrow M^n$, e seu comprimento é definido por

$$L(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

A função distância é definida por

$$d_p = d(x, p) = \inf_{\gamma} L(\gamma),$$

onde o ínfimo é tomado sobre todos os caminhos $\gamma: [a, b] \rightarrow M^n$ com $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = x$. Um segmento de geodésica é minimal se seu comprimento é igual a distância entre os dois extremos.

Seja $\gamma_s: [a, b] \rightarrow M^n$, $s \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$, uma família de caminhos. A partir disso nós definimos a aplicação $\alpha: [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M^n$ por

$$\alpha(t, s) = \gamma_s(t), \quad \text{tal que} \quad \alpha(t, 0) = \gamma_0(t), \quad t \in [a, b].$$

Se

$$\alpha(a, s) = \gamma_s(a), \quad \alpha(b, s) = \gamma_s(b), \quad s \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

então a variação é chamada de *variação própria*. Temos que

$$L(\gamma_s) = \int_a^b \left| \frac{d}{dt} \gamma_s(t) \right| dt,$$

derivando com relação ao parâmetro s

$$\frac{d}{ds} L(\gamma_s) = \int_a^b \frac{d}{ds} \left\langle \frac{d}{dt} \gamma_s(t), \frac{d}{dt} \gamma_s(t) \right\rangle^{\frac{1}{2}} dt$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}L(\gamma_s) &= \int_a^b \frac{2\langle \frac{D}{ds}\frac{d}{dt}\gamma_s(t), \frac{d}{dt}\gamma_s(t) \rangle}{2\left|\frac{d}{dt}\gamma_s(t)\right|} dt \\ \frac{d}{ds}L(\gamma_s) &= \int_a^b \frac{\langle \frac{D}{ds}\frac{d}{dt}\gamma_s(t), \frac{d}{dt}\gamma_s(t) \rangle}{\left|\frac{d}{dt}\gamma_s(t)\right|} dt = \int_a^b \frac{\langle \frac{D}{dt}\frac{d}{ds}\gamma_s(t), \frac{d}{dt}\gamma_s(t) \rangle}{\left|\frac{d}{dt}\gamma_s(t)\right|} dt.\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle \frac{d}{ds}\gamma_s(t), \frac{d}{dt}\gamma_s(t) \rangle &= \langle \frac{D}{dt}\frac{d}{ds}\gamma_s(t), \frac{d}{dt}\gamma_s(t) \rangle + \langle \frac{d}{ds}\gamma_s(t), \frac{D}{dt}\frac{d}{dt}\gamma_s(t) \rangle, \\ \frac{d}{ds}L(\gamma_s) &= \int_a^b \frac{\frac{d}{dt}\langle \frac{d}{ds}\gamma_s(t), \frac{d}{dt}\gamma_s(t) \rangle}{\left|\frac{d}{dt}\gamma_s(t)\right|} dt - \int_a^b \frac{\langle \frac{d}{ds}\gamma_s(t), \frac{D}{dt}\frac{d}{dt}\gamma_s(t) \rangle}{\left|\frac{d}{dt}\gamma_s(t)\right|} dt.\end{aligned}$$

Sendo a variação própria $\frac{d}{ds}\gamma_0(a) = \frac{d}{ds}\gamma_0(b) = 0$ e considerando $\left|\frac{d}{dt}\gamma_0(t)\right| = 1$, temos,

$$\frac{d}{ds}L(\gamma_0) = - \int_a^b \langle \frac{d}{ds}\gamma_0(t), \frac{D}{dt}\frac{d}{dt}\gamma_0(t) \rangle dt. \quad (2-35)$$

Uma consequência importante é que as geodésicas são soluções do "problema variacional", já que $\frac{D}{dt}\frac{d}{dt}\gamma_0(t) = 0$ implica em $\frac{d}{ds}L(\gamma_0) = 0$, se γ_0 for uma geodésica.

Definiremos o campo vetorial T e V ao longo de γ_s por

$$T = \alpha_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \quad e \quad V = \alpha_* \left(\frac{\partial}{\partial s} \right).$$

V é chamado de variação do campo vetorial e T como o campo vetorial tangente. O comprimento de γ_s é dado por

$$L(\gamma) = \int_a^b |T(\gamma_s(t))| dt. \quad (2-36)$$

Lema 2.12 (Primeira variação do comprimento de arco) Se γ_s está parametrizado pelo comprimento de arco, isto é $|T(\gamma_s)| = 1$, então

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L(\gamma_s) = \langle V, T \rangle \Big|_a^b - \int_a^b \langle V, \nabla_T T \rangle dt.$$

Prova. Diferenciando (2-36)

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L(\gamma_s) &= \frac{1}{2} \int_a^b |T|^{-1} V \langle T, T \rangle dt = \frac{1}{2} \int_a^b |T|^{-1} (\langle \nabla_V T, T \rangle + \langle \nabla_V T, T \rangle) dt \\ &= \int_a^b |T|^{-1} \langle T, \nabla_V T \rangle dt = \int_a^b |T|^{-1} \langle T, \nabla_T V \rangle dt\end{aligned} \quad (2-37)$$

usando o fato de que $\nabla_T V - \nabla_V T = [T, V] = \alpha_* \left[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s} \right] = [\alpha_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right), \alpha_* \left(\frac{\partial}{\partial s} \right)] = 0$ (ver Proposição 13.3 em [19]) e $|T| = 1$. Para ter a igualdade, agora basta integrar por partes. $\square$

Agora suponha que temos uma família de caminhos com 2-parâmetros $\gamma_{v,w} : [a, b] \rightarrow M^n$, $v \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ e $w \in (-\delta, \delta) \subset \mathbb{R}$. Definindo $\alpha : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\delta, \delta) \rightarrow M^n$ por

$$\alpha(t, v, w) = \gamma_{v,w}(t)$$

e $T = \alpha_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)$, $V = \alpha_* \left(\frac{\partial}{\partial v} \right)$ e $W = \alpha_* \left(\frac{\partial}{\partial w} \right)$. A segunda variação do comprimento de arco é dado por

Lema 2.13 (Segunda variação do comprimento de arco) *Se $\gamma_{(0,0)}$ é parametrizado pelo comprimento de arco, então*

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dv dw} \Big|_{(v,w)=(0,0)} L(\gamma_{(v,w)}) &= \int_a^b (\langle \nabla_T V, \nabla_T W \rangle - \langle \nabla_T V, T \rangle \langle \nabla_T W, T \rangle - \langle R(T, W) V, T \rangle) dt \\ &\quad - \int_a^b \langle \nabla_V W, \nabla_T T \rangle dt + \langle \nabla_V W, T \rangle \Big|_a^b. \end{aligned}$$

Prova. Diferenciando (2-37)

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dv dw} \Big|_{(v,w)=(0,0)} L(\gamma_{(v,w)}) &= \frac{d}{dw} \Big|_{(v,w)=(0,0)} \int_a^b |T|^{-1} \langle T, \nabla_T V \rangle dt \\ &= \int_a^b W \left\langle \frac{T}{|T|}, \nabla_T V \right\rangle dt \\ &= \int_a^b \left(\left\langle \nabla_W \frac{T}{|T|}, \nabla_T V \right\rangle + \left\langle \frac{T}{|T|}, \nabla_W \nabla_T V \right\rangle \right) dt. \end{aligned}$$

Agora, simplesmente para utilizar a mesma notação do artigo que nos referimos, vamos definir a curvatura Riemanniana da seguinte forma (ver [8]).

Definição 2.14 *A curvatura $(3, 1)$ -tensor R é definida por*

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

para todo X, Y e $Z \in \chi(M)$.

Assim, $R(W, T)V = \nabla_W \nabla_T V - \nabla_T \nabla_W V - \nabla_{[W, T]} V$ e, temos que $R(W, T)V + \nabla_T \nabla_W V = \nabla_W \nabla_T V$ usando $\nabla_T W - \nabla_W T = [T, W] = \alpha_* \left[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial w} \right] = [\alpha_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right), \alpha_* \left(\frac{\partial}{\partial w} \right)] = 0$ (Proposição 13.3 em [19]). Calculando

$$\begin{aligned} \nabla_W \left(\frac{T}{|T|} \right) &= \nabla_W \langle T, \langle T, T \rangle^{-\frac{1}{2}} \rangle = \langle \nabla_W T, \langle T, T \rangle^{-\frac{1}{2}} \rangle + \langle T, \nabla_W \langle T, T \rangle^{-\frac{1}{2}} \rangle \\ &= |T|^{-1} \nabla_W T - \langle \frac{1}{2} \langle T, T \rangle^{-\frac{3}{2}} 2 \langle \nabla_W T, T \rangle, T \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |T|^{-1} \nabla_W T - \frac{\langle \nabla_W T, T \rangle T}{\left(\sqrt{\langle T, T \rangle} \right)^3} \\
&= |T|^{-1} \nabla_W T - \frac{\langle \nabla_W T, T \rangle T}{|T|^3}
\end{aligned}$$

onde $|T| = \sqrt{\langle T, T \rangle}$. Obtemos enfim,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dv dw} \Big|_{(v,w)=(0,0)} L(\gamma_{v,w}) &= \int_a^b \left(\langle \nabla_W \frac{T}{|T|}, \nabla_T V \rangle + \langle \frac{T}{|T|}, \nabla_W \nabla_T V \rangle \right) dt \\
&= \int_a^b \left(\langle |T|^{-1} \nabla_W T - \frac{\langle \nabla_W T, T \rangle T}{|T|^3}, \nabla_T V \rangle + \langle \frac{T}{|T|}, \nabla_W \nabla_T V \rangle \right) dt \\
&= \int_a^b \left(\langle |T|^{-1} \nabla_W T, \nabla_T V \rangle - \frac{\langle \nabla_W T, T \rangle \langle T, \nabla_T V \rangle}{|T|^3} + \langle \frac{T}{|T|}, \nabla_W \nabla_T V \rangle \right) dt \\
&= \int_a^b \left(\langle R(W, T) V, \frac{T}{|T|} \rangle + \langle \nabla_T \nabla_W V, \frac{T}{|T|} \rangle \right) dt + \int_a^b |T|^{-1} \langle \nabla_W T, \nabla_T V \rangle dt \\
&\quad - \int_a^b \langle \nabla_W T, T \rangle \langle T, \nabla_T V \rangle |T|^{-3} dt \\
&= \int_a^b \left(\langle R(W, T) V, \frac{T}{|T|} \rangle + \langle \nabla_T \nabla_W V, \frac{T}{|T|} \rangle \right) dt + \int_a^b |T|^{-1} \langle \nabla_W T, \nabla_T V \rangle dt \\
&\quad - \int_a^b \langle \nabla_T W, T \rangle \langle T, \nabla_T V \rangle |T|^{-3} dt
\end{aligned}$$

pois, como vimos, $\nabla_T W = \nabla_W T$. Integrando por partes

$$\int_a^b \langle \nabla_T \nabla_W V, T \rangle = \langle \nabla_V W, T \rangle \Big|_a^b - \int_a^b \langle \nabla_V W, \nabla_T T \rangle dt$$

usando o fato de que $|T| = 1$ e $\langle R(W, T) V, T \rangle = -\langle R(T, W) V, T \rangle$, conclui-se a demonstração. $\square$

Os cálculos da demonstração desse lema estão em [27] e [10].

Corolário 2.15 *Se γ_s é uma família de caminhos 1-parâmetro seccionalmente diferenciáveis com pontos extremos fixos e tal que γ_0 é uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco, então*

$$\frac{d^2}{ds^2} \Big|_{s=0} L(\gamma_s) = \int_a^b \left(\left| (\nabla_T W)^* \right|^2 - \langle R(W, T) T, W \rangle \right) dt, \quad (2-38)$$

onde $(\nabla_T W)^* = \nabla_T W - \langle \nabla_T W, T \rangle T$.

Uma geodésica é estável se a segunda variação do comprimento de arco, com relação a variação de campos de vetores que se anulam nas extremidades, é não-negativo.

Uma geodésica fechada é uma aplicação diferenciável $\gamma: S^1 \rightarrow M$ que também é uma geodésica.

Seja $\gamma : [0, \tau] \rightarrow M^n$ uma geodésica estável unitária em uma variedade Riemanniana M^n . Seja $\{E_i\}_{i=1}^{n-1}$ um sistema ortonormal paralelo ao longo de γ perpendicular à $\dot{\gamma}$. Pela fórmula da segunda variação do arco (2-38), tomando o campo $W = \sum_{i=1}^{n-1} \phi E_i$ e o campo $T = \dot{\gamma}$, temos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^\tau \left(\left| (\nabla_{\dot{\gamma}}(\phi E_i))^* \right|^2 - \langle R(\dot{\gamma}, \phi E_i) \phi E_i, \dot{\gamma} \rangle \right) dt \\ &= \int_0^\tau \left((n-1) \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 - \phi^2 R_c(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \right) dt. \end{aligned}$$

De fato,

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \phi E_i = \frac{d\phi}{dt} E_i + \phi \frac{DE_i}{dt}$$

mas, como $\{E_i\}_{i=1}^{n-1}$ é paralelo ao longo da geodésica γ isso implica que $\frac{DE_i}{dt} = 0$ e então

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \phi E_i = \frac{d\phi}{dt} E_i + \phi \frac{DE_i}{dt} = \frac{d\phi}{dt} E_i.$$

Sendo

$$|(\nabla_T W)^*|^2 = \langle \nabla_T W, \nabla_T W \rangle - \langle \nabla_T W, T \rangle^2$$

temos que

$$\begin{aligned} |(\nabla_{\dot{\gamma}} \phi E_i)^*|^2 &= \langle \nabla_{\dot{\gamma}} \phi E_i, \nabla_{\dot{\gamma}} \phi E_i \rangle - \langle \nabla_{\dot{\gamma}} \phi E_i, \dot{\gamma} \rangle^2 \\ &= \left\langle \frac{d\phi}{dt} E_i, \frac{d\phi}{dt} E_i \right\rangle - \left\langle \frac{d\phi}{dt} E_i, \dot{\gamma} \right\rangle^2. \end{aligned}$$

Já que $\{E_i\}$ são ortogonais a $\dot{\gamma}$ então $\langle \frac{d\phi}{dt} E_i, \dot{\gamma} \rangle^2 = 0$, e por isso

$$|(\nabla_{\dot{\gamma}} \phi E_i)^*|^2 = \left\langle \frac{d\phi}{dt} E_i, \frac{d\phi}{dt} E_i \right\rangle = \frac{d\phi^2}{dt},$$

para $\langle E_i, E_i \rangle = 1$. Ou seja,

$$\int_0^\tau (n-1) \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 dt \geq \int_0^\tau \phi^2 R_c(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) dt \quad (2-39)$$

para qualquer função $\phi : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}$.

2.6 Fórmula da Co-Área

Aqui, vamos introduzir um teorema que será de grande ajuda na demonstração do segundo teorema do artigo principal. Nessa seção M e N são variedades diferenciáveis e $F : M \rightarrow N$ é uma aplicação diferenciável. A referência para essa seção foi retirada de [12].

Definição 2.16 *Uma aplicação $F : M \rightarrow N$ é uma submersão se $F_{*p}(T_p M) = T_{F(p)} N$ para todo $p \in M$.*

Teorema 2.17 ([12]) *Sejam M e N variedades Riemannianas, λ_M e λ_N são as medidas de volume Riemannianas sobre M e N respectivamente, $d\lambda = g d\lambda_M$ para alguma função $g : M \rightarrow [0, \infty)$ e $F : M \rightarrow N$ é uma submersão diferenciável. Além disso, para cada $q \in N$, σ_q será o volume Riemanniano de $M_q = F^{-1}(\{q\})$ determinado pela indução da métrica Riemanniana sobre M_q e para $p \in M$ seja*

$$J(p) = \sqrt{\det(F_{*p} F_{*p}^{tr})}, \quad \text{onde } F_{*p}^{tr} = \text{transposta}(F_{*p}). \quad (2-40)$$

Então, se $f : N \rightarrow [0, \infty)$ é uma função mensurável,

$$\int_M (f \circ F) d\lambda = \int_M (f \circ F) g d\lambda_M = \int_N d\lambda_N(q) f(q) \int_{M_q} \frac{g(p)}{J(p)} d\sigma_q(p).$$

Uma vez que podemos absorver $f \circ F$ na função g , a fórmula da co-área é equivalente à

$$\int_M d\lambda = \int_M g d\lambda_M = \int_N d\lambda_N(q) \int_{M_q} \frac{g(p)}{J(p)} d\sigma_q(p). \quad (2-41)$$

Em geometria Riemanniana a fórmula da co-área relaciona integrais sobre o domínio de certas aplicações com integrais sobre o seu codomínio. Vamos dar um outro enunciado para a fórmula da co-área.

2.7 Coordenadas Polares Geodésicas e Jacobiano

Dado um ponto $p \in M^n$, seja $\{x^i\}_{i=1}^n$ as coordenadas polares locais em $T_p M^n - \{p\}$. Isto é, $x^n = r(v) = |v|$, e $x^i(v) = \theta^i\left(\frac{v}{|v|}\right)$ para $1 \leq i \leq n-1$, onde $\{\theta^i\}_{i=1}^{n-1}$ são coordenadas locais sobre $S_p^{n-1} = \{v \in T_p M : |v| = 1\}$. Seja $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ a aplicação exponencial. Nós chamamos o sistema de coordenadas

$$x = \{x^i \circ \exp_p^{-1}\} : B(p, \text{inj}(p)) - \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

de sistema de coordenadas polares geodésico.

Observação 2.18 Consulte raio de injetividade em [10] página 31.

Abusando da notação nós temos $r = x^n \circ \exp_p^{-1}$, e $\theta^i = x^i \circ \exp_p^{-1}$ para $i = 1, \dots, n-1$, tal que

$$\frac{\partial}{\partial r} = (x^{-1})_* \frac{\partial}{\partial x^n},$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \theta^i} = (x^{-1})_* \frac{\partial}{\partial x^i},$$

formam uma base para o campo de vetores sobre $B(p, \text{inj}(p)) - \{p\}$. O lema de Gauss (consulte [8] página 21) diz que

$$\text{grad}(r) = \frac{\partial}{\partial r}$$

em todos os pontos fora "cut locus" ($C_p = M - B(p, \text{inj}(p))$) de p , tal que

$$|\text{grad}(r)|^2 = \left| \frac{\partial}{\partial r} \right|^2 = \left\langle \text{grad}r, \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle = \frac{\partial r}{\partial r} = 1$$

e

$$g_{in} = g\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta^i}\right) = \frac{\partial r}{\partial \theta^i} = 0$$

para $i = 1, \dots, n-1$. Então nós podemos escrever a métrica como

$$g = dr \otimes dr + g_{ij} d\theta^i \otimes d\theta^j,$$

onde $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial \theta^i}, \frac{\partial}{\partial \theta^j}\right)$. Através de cada raio geodésico que saí de p ,

$$\frac{\partial}{\partial \theta^i}$$

é um campo de jacobi para cada $i \leq n-1$. Nós chamamos

$$J = \sqrt{\det g_{ij}} = \sqrt{\det \left\langle \frac{\partial}{\partial \theta^i}, \frac{\partial}{\partial \theta^j} \right\rangle_g}$$

o Jacobiano da aplicação exponencial. O jacobiano da aplicação exponencial é a densidade de volume em coordenadas polares. A forma de volume de g é:

$$d\mu = \sqrt{\det g_{ij}} d\theta^1 \wedge d\theta^2 \wedge \dots \wedge d\theta^{n-1} \wedge dr = J d\Theta \wedge dr$$

em um sistema de coordenadas polares orientado positivamente, onde

$$d\Theta = d\theta^1 \wedge d\theta^2 \wedge \dots \wedge d\theta^{n-1}.$$

Com essas preliminares sobre o jacobiano e a aplicação exponencial podemos tratar do volume da bola geodésica, dado por:

$$Vol(B_p(r)) = \int_0^r \left(\int_{S^{n-1}} J(\theta, r) d\Theta(\theta) \right) dr. \quad (2-42)$$

Ricci Soliton Gradiente Shrinking Completo

Dizemos que a métrica g_0 é um Ricci sóliton em M (variedade Riemanniana diferenciável completa n -dimensional) se existem $\rho \in \mathbb{R}$ e um campo de vetores $X \in \chi(M)$ tais que

$$Rc_{g_0} + \frac{1}{2} \mathfrak{L}_X g_0 = \rho g_0 \quad (3-1)$$

onde $\mathfrak{L}_X g_0$ é a derivada de Lie da métrica com respeito ao campo X . Ricci sólitons surgem, muitas vezes, como limite, superior ou inferior, de singularidades no fluxo de Ricci. Em alguns momentos colocamos g_0 como sub-índice no tensor curvatura de Ricci (Rc) apenas para deixar claro sobre qual métrica estamos nos referindo.

Definição 3.1 (A derivada de Lie) *Sejam $X, Y_1, Y_2 \in \chi(M)$, e seja g a métrica sobre uma variedade diferenciável M . Então a derivada de Lie da métrica é dada por*

$$(\mathfrak{L}_X g)(Y_1, Y_2) = g(\nabla_{Y_1} X, Y_2) + g(Y_1, \nabla_{Y_2} X). \quad (3-2)$$

Em coordenadas locais temos que

$$(\mathfrak{L}_X g)_{ij} = \nabla_i X_j + \nabla_j X_i. \quad (3-3)$$

Se tomarmos o campo X como o gradiente de uma função diferenciável, $X = \nabla f$, onde $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável. Ou seja, se o campo é um campo gradiente, temos que

$$(\mathfrak{L}_{\nabla f} g)_{ij} = g(\nabla_i \nabla f, \frac{\partial}{\partial x_j}) + g(\nabla_j \nabla f, \frac{\partial}{\partial x_i})$$

podemos assim considerar $i = j$ no caso dessa igualdade, de modo que

$$(\mathfrak{L}_{\nabla f} g)_{ij} = 2g(\nabla_i \nabla f, \frac{\partial}{\partial x_j}).$$

Agora, por (2-10), sendo $X, Y \in \chi(M)$, a hessiana da função f é dada por

$$Hessf(X, Y) = g(\nabla_X(\nabla f), Y).$$

Portanto, temos

$$\nabla_i \nabla_j f = (Hessf)_{ij} = g\left(\nabla_i(\nabla f), \frac{\partial}{\partial x_j}\right). \quad (3-4)$$

Então se o campo é gradiente, temos, em coordenadas locais,

$$\begin{aligned} Ric\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \frac{1}{2}(\mathcal{L}_{\nabla f}g)_{ij} &= R_{ij} + \frac{1}{2}[2g\left(\nabla_i \nabla f, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)] \\ &= R_{ij} + \frac{1}{2}[2(Hessf)_{ij}] \\ &= R_{ij} + \nabla_i \nabla_j f = \rho g_{ij}. \end{aligned}$$

Se $\rho = 0$: dizemos que o Ricci Sóliton é steady; $\rho > 0$: Ricci Sóliton shrinking; $\rho < 0$: Ricci Sóliton expanding; Quando f é constante temos uma métrica de Einstein. Normalizando $\rho = \frac{1}{2}$ (fazendo uma homotetia da métrica) teremos um **Ricci Sóliton Gradiente Shrinking** e a equação assumirá a forma

$$R_{ij} + \nabla_i \nabla_j f = \frac{1}{2}g_{ij}.$$

A razão de tomarmos a constante ρ igual a $\frac{1}{2}$ é otimizar o Teorema (3.2) com o exemplo (3.3).

Alguns Fatos Básicos Sobre Ricci Sólitons

Ricci Sólitons são:

- extensões naturais da variedade de Einstein;
- Soluções auto-similares para o fluxo de Ricci;
- modelos de possíveis singularidades do fluxo de Ricci;
- pontos críticos da λ -entropia e da μ -entropia de Perelman.

Outros aspectos importantes sobre Ricci Sólitons são: Sólitons steady ou expanding, compactos, são "Einstein" em todas as dimensões; Sólitons compactos shrinking em dimensão 2 ou 3 precisam ter curvatura constante positiva; Não existe Sólitons shrinking completos, não-compactos e não-flat em dimensão $n = 2$; Os únicos Ricci Sólitons Gradientes Shrinking tridimensionais completos, não-compactos, não-flat são quocientes do cilindro rodado $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

Ricci Sóliton Gradiente Shrinking desempenha um papel importante no fluxo de Ricci de Hamilton uma vez que corresponde a uma solução auto-similar, e muitas vezes surgem como modelo de singularidade do TIPO I (ver [4]). O artigo [6], que vamos explorar, investiga o comportamento assintótico das funções potenciais e as taxas de crescimento do volume do Ricci Sóliton Gradiente Shrinking completo e não-compacto. O principal resultado do nosso trabalho é o seguinte.

Teorema 3.2 *Seja (M^n, g_{ij}, f) um Ricci Sóliton Gradiente Shrinking completo e não-compacto satisfazendo (0-3). Então, a função potencial f satisfaz a seguinte estimativa*

$$\frac{1}{4}(r(x) - c_1)^2 \leq f(x) \leq \frac{1}{4}(r(x) + c_2)^2,$$

onde $r(x) = d(x_0, x)$ é a função distância de algum ponto fixado $x_0 \in M$, c_1 e c_2 são constantes positivas que dependem apenas de n e da geometria de g_{ij} na bola unitária $B_{x_0}(1)$.

A demonstração desse teorema é resultado direto do Lema (3.9) e da Proposição (3.11) que serão demonstrados adiante.

Observação 3.3 *O sóliton Gaussiano $(\mathbb{R}^n, g_0)$ com métrica euclidiana flat (ou seja, o tensor curvatura é igual a zero em todo ponto) chamado sóliton Gaussiano shrinking $(\mathbb{R}^n, g_0, |x|^2/4)$ é um Ricci sóliton gradiente shrinking com função potencial $f(x) = |x|^2/4$. Esse é um exemplo que otimiza o teorema (3.2).*

O teorema seguinte nos dá uma limitação superior para o volume da bola geodésica.

Teorema 3.4 *Seja (M^n, g_{ij}, f) um Ricci Sóliton Gradiente Shrinking, completo e não-compacto. Então, existe uma constante $C_1 > 0$ tal que*

$$\text{Vol}(B_{x_0}(r)) \leq C_1 r^n,$$

para $r > 0$ suficientemente grande.

Para a demonstração desse teorema precisamos de alguns resultados preliminares que discutiremos adiante.

Observação 3.5 *Feldman- Ilmanen- Knopf [20] construíram um exemplo em que a taxa de crescimento de volume no Teorema (3.15) é ótima.*

Uma combinação dos Teoremas (3.2) e (3.4) nos dá o seguinte resultado:

Corolário 3.6 *Seja (M^n, g_{ij}, f) um Ricci Sóliton Gradiente Shrinking completo e não-compacto. Então temos que*

$$\int_M |u| e^{-f} dV < +\infty$$

para qualquer função u em M com $|u(x)| \leq A e^{\alpha r^2(x)}$, $0 \leq \alpha < \frac{1}{4}$ e $A > 0$. Em particular, o volume ponderado de M é finito,

$$\int_M e^{-f} dV < +\infty.$$

3.1 Comportamento Assintótico da Função Potencial

Nesta seção, nós vamos investigar o comportamento assintótico da função potencial de um Ricci Sóliton Gradiente Shrinking completo, não-compacto e provar o Teorema (3.2).

Primeiramente, vamos estudar alguns resultados essenciais sobre os gradientes Ricci Sólitons Shrinking completos.

Lema 3.7 *Seja (M^n, g_{ij}, f) um Ricci Sóliton Gradiente Shrinking completo satisfazendo*

$$R_{ij} + \nabla_i \nabla_j f = \frac{1}{2} g_{ij}.$$

Então temos que

$$\nabla_i R = 2R_{ij} \nabla^j f,$$

e

$$R + |\nabla f|^2 - f = C_0$$

para alguma constante C_0 , onde R representa a curvatura escalar. Como consequência desse resultado, podemos assumir que

$$R + |\nabla f|^2 - f = 0. \tag{3-5}$$

Prova. Por (0-3)

$$R_{ik} + \nabla_i \nabla_k f = \frac{1}{2} g_{ik}$$

Daí, por (1.2), temos $\nabla_j [g_{ik}] = 0$. Logo

$$\nabla_j R_{ik} + \nabla_j \nabla_i \nabla_k f = \frac{1}{2} \nabla_j [g_{ik}] = 0.$$

Da mesma forma

$$\nabla_i R_{jk} + \nabla_i \nabla_j \nabla_k f = \frac{1}{2} \nabla_i [g_{jk}] = 0,$$

e então, subtraindo uma expressão da outra,

$$\nabla_j R_{ik} - \nabla_i R_{jk} = \nabla_i \nabla_j \nabla_k f - \nabla_j \nabla_i \nabla_k f.$$

Como $\nabla_k f$ é uma 1-forma e portanto, pela comutatividade da derivada covariante (2-3) e pela definição (2.8),

$$\nabla_i \nabla_j \nabla_k f - \nabla_j \nabla_i \nabla_k f = R_{ijkl} g^{lm} \nabla_m f = R_{ijkl} \nabla^l f$$

isso implica que

$$\nabla_j R_{ik} - \nabla_i R_{jk} = R_{ijkl} \nabla^l f$$

logo

$$\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} + R_{ijkl} \nabla^l f = 0.$$

Contraindo sobre j e k, e usando a dupla contração da segunda identidade de Bianchi (2-7),

$$\frac{1}{2} \nabla_k R = g^{ij} \nabla_i R_{kj},$$

obtemos que

$$g^{jk} (\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} + R_{ijkl} \nabla^l f) = 0$$

e então

$$g^{jk} \nabla_i R_{jk} - g^{jk} \nabla_j R_{ik} - g^{jk} R_{ijlk} \nabla^l f = 0.$$

Por (2-7), (2-5), (2-2) e (2-1) temos a igualdade

$$g^{jk} \nabla_i R_{jk} - g^{jk} \nabla_j R_{ik} - g^{jk} R_{ijlk} \nabla^l f = \nabla_i R - \frac{1}{2} \nabla_i R - R_{il} \nabla^l f = 0,$$

isso implica que,

$$\frac{1}{2} \nabla_i R - R_{il} \nabla^l f = 0$$

e, portanto,

$$\nabla_i R = 2R_{il} \nabla^l f.$$

Como

$$\nabla_i R = 2R_{ij} \nabla^j f, \quad R_{ij} + \nabla_i \nabla_j f - \frac{1}{2} g_{ij} = 0$$

e, por (2.8),

$$\nabla^i f = g^{ij} \nabla_j f.$$

Usando (2-19),

$$\nabla_i |\nabla f|^2 = 2 \langle \nabla_i \nabla f, \nabla f \rangle = 2 \langle \nabla_i \nabla f, g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \rangle = 2 g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \langle \nabla_i \nabla f, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle = 2 \nabla^j f \nabla_i \nabla_j f.$$

Teremos

$$\nabla_i (R + |\nabla f|^2 - f) = 2R_{ij} \nabla^j f + 2 \nabla^j f \nabla_i \nabla_j f - g_{ij} \nabla^j f = 2(R_{ij} + \nabla_i \nabla_j f - \frac{1}{2} g_{ij}) \nabla^j f = 0.$$

Logo,

$$\nabla_i (R + |\nabla f|^2 - f) = 0$$

implica em

$$R + |\nabla f|^2 - f = C$$

onde C é uma constante. Então em particular, adicionando C a função f , isto é, $f = f + C$ temos

$$R + |\nabla f|^2 - f = 0.$$

□

Lema 3.8 *Seja (M^n, g_{ij}, f) um Ricci Sóliton Gradiente Shrinking Completo. Então g_{ij} tem curvatura escalar não-negativa, $R \geq 0$.*

Este lema é um caso especial da Proposição 5.5, encontrada em [4].

Com as ferramentas que já temos, podemos demonstrar a estimativa superior da função potencial.

Lema 3.9 *Seja (M^n, g_{ij}, f) um Ricci Sóliton Gradiente Shrinking Completo satisfazendo*

$$R_{ij} + \nabla_i \nabla_j f = \frac{1}{2} g_{ij}$$

$$R + |\nabla f|^2 - f = 0.$$

Então

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \frac{1}{4} (r(x) + 2\sqrt{f(x_0)})^2, \\ |\nabla f|(x) &\leq \frac{1}{2} r(x) + \sqrt{f(x_0)}, \\ e \quad R(x) &\leq \frac{1}{4} (r(x) + 2\sqrt{f(x_0)})^2. \end{aligned}$$

Aqui, $r(x) = d(x_0, x)$ é a função distância de algum ponto fixo $x_0 \in M$.

Prova. Pelo Lema (3.8) $R \geq 0$ e por hipótese $f > 0$. Então, por (3-5) temos que

$$R + |\nabla f|^2 - f = 0$$

e, então,

$$R + |\nabla f|^2 = f.$$

Daí temos que

$$0 \leq |\nabla f|^2 \leq f. \quad (3-6)$$

Podemos também ver a desigualdade de outra maneira. Temos por (2-19) que

$$\nabla f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \nabla \sqrt{f} &= g^{ij} \frac{\partial \sqrt{f}}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{1}{2\sqrt{f}} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{f}} \nabla f. \end{aligned}$$

Logo,

$$\nabla \sqrt{f} = \frac{1}{2\sqrt{f}} \nabla f. \quad (3-7)$$

Portanto,

$$|\nabla \sqrt{f}| = \left| \frac{1}{2\sqrt{f}} \nabla f \right| = \frac{1}{2\sqrt{f}} |\nabla f|.$$

Sendo $0 \leq |\nabla f|^2 \leq f$, temos que $|\nabla f| \leq \sqrt{f}$ e então

$$|\nabla \sqrt{f}| = \frac{1}{2\sqrt{f}} |\nabla f| \leq \frac{1}{2\sqrt{f}} \sqrt{f} = \frac{1}{2}.$$

Enfim,

$$|\nabla \sqrt{f}| \leq \frac{1}{2} \quad (3-8)$$

Considere $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \sqrt{f(x)}$, lembrando que $f > 0$ para todo $x \in M$. Sendo M uma variedade completa, dados dois pontos $x, y \in M$ existe uma

geodésica minimizante ligando x a y , e seja $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ essa geodésica, com $\alpha(0) = x$ e $\alpha(1) = y$. Então tomando a composição $g \circ \alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos

$$g(y) - g(x) = g(\alpha(1)) - g(\alpha(0)) = \int_0^1 \frac{d}{dt} g(\alpha(t)) dt = \int_0^1 \langle \nabla g, \alpha'(t) \rangle dt.$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$|g(y) - g(x)| = \left| \int_0^1 \langle \nabla g, \alpha'(t) \rangle dt \right| \leq \int_0^1 |\langle \nabla g, \alpha'(t) \rangle| dt \leq \int_0^1 |\nabla g| |\alpha'(t)| dt.$$

Por (3-8)

$$|g(y) - g(x)| \leq \int_0^1 |\nabla g| |\alpha'(t)| dt \leq \frac{1}{2} \int_0^1 |\alpha'(t)| dt.$$

O comprimento de arco da curva α é dado por

$$\ell(t) = \int_0^t |\alpha'(t)| dt.$$

Sendo α uma geodésica minimizante esse comprimento é o menor possível, então

$$d(y, x) = \int_0^1 |\alpha'(t)| dt.$$

Logo,

$$|g(y) - g(x)| \leq \frac{1}{2} d(y, x). \quad (3-9)$$

E, portanto, g é lipschitz (veja (1.15)).

Daí,

$$\begin{aligned} \sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x_0)} &\leq \left| \sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x_0)} \right| \leq \frac{1}{2} r(x) \\ \sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x_0)} &\leq \frac{1}{2} r(x) \\ \sqrt{f(x)} &\leq \frac{1}{2} r(x) + \sqrt{f(x_0)} \\ f(x) &\leq \frac{1}{4} \left(r(x) + 2\sqrt{f(x_0)} \right)^2. \end{aligned}$$

Sendo $R(x) + \left| \nabla f(x) \right|^2 - f(x) = 0$

$$R(x) = f(x) - \left| \nabla f(x) \right|^2 \leq f(x) \leq \frac{1}{4} \left(r(x) + 2\sqrt{f(x_0)} \right)^2$$

$$R(x) \leq \frac{1}{4} \left(r(x) + 2\sqrt{f(x_0)} \right)^2.$$

Como $0 \leq |\nabla f|^2 \leq f$ e $f > 0$ obtemos

$$|\nabla f(x)|^2 \leq f \leq \frac{1}{4} \left(r(x) + 2\sqrt{f(x_0)} \right)^2$$

e, como mostramos,

$$\sqrt{f(x)} \leq \frac{1}{2}r(x) + \sqrt{f(x_0)}.$$

Então

$$\begin{aligned} \sqrt{|\nabla f(x)|^2} &\leq \sqrt{f(x)} \leq \frac{1}{2}r(x) + \sqrt{f(x_0)} \\ |\nabla f(x)| &\leq \sqrt{f(x)} \leq \frac{1}{2}r(x) + \sqrt{f(x_0)} \\ |\nabla f(x)| &\leq \frac{1}{2}r(x) + \sqrt{f(x_0)}. \end{aligned}$$

□

Agora temos uma estimativa superior para a função f do Teorema (3.2). Entretanto, provar uma estimativa inferior para a função f é muito mais sutil.

Observação 3.10 *Em (3-9) mostramos que*

$$|\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x_0)}| \leq r(x).$$

Considerando que M é uma variedade diferenciável completa, pelo Teorema de Hopf-Rinow temos uma geodésica $\gamma(s)$ minimizante sobre M , onde $0 \leq s \leq s_0$. Tome tal $\gamma(s)$ normalizada, ou seja, $|\dot{\gamma}(s)| = 1$, e com $\gamma(0) = x_0$ temos que

$$d(x, x_0) = r(x) = \int_0^s |\dot{\gamma}(t)| dt = s.$$

Proposição 3.11 *Seja (M^n, g_{ij}, f) um Ricci Sóliton Gradiente Shrinking Completo e não-compacto satisfazendo as condições de normalização*

$$R_{ij} + \nabla_i \nabla_j = \frac{1}{2} g_{ij}$$

$$R + |\nabla f|^2 - f = 0.$$

Então, f satisfaz a estimativa

$$f(x) \geq \frac{1}{4} (r(x) - c_1)^2,$$

onde c_1 é uma constante positiva que depende somente de n e da geometria de g_{ij} na bola unitária $B_{x_0}(1)$.

Prova. Considere a geodésica minimizante normal $\gamma(s)$, $0 \leq s \leq s_0$ para algum $s_0 > 0$ arbitrário suficientemente grande, começando de $x_0 = \gamma(0)$, e uma variação própria para tal geodésica. Então por (2-35) a geodésica é solução do problema variacional, ou seja, $\frac{d}{ds}L(\gamma) = 0$. Denote por $X(s) = \dot{\gamma}(s)$ o vetor tangente unitário ao longo de γ . Sendo γ uma geodésica minimizante $\frac{d^2}{ds^2}L(\gamma) \geq 0$. Então, pela segunda variação do comprimento do arco (2-39), tem-se

$$\int_0^{s_0} \phi^2(s) Rc(X, X) ds \leq (n-1) \int_0^{s_0} |\dot{\phi}(s)|^2 ds$$

para toda função $\phi(s)$ definida no intervalo $[0, s_0]$. Agora, escolha

$$\phi(s) = \begin{cases} s, & \text{se } s \in [0, 1], \\ 1, & \text{se } s \in [1, s_0 - 1] \\ s_0 - s, & \text{se } s \in [s_0 - 1, s_0]. \end{cases}$$

Então

$$\begin{aligned} \int_0^{s_0} Rc(X, X) ds &= \int_0^{s_0} \phi^2 Rc(X, X) ds + \int_0^{s_0} (1 - \phi^2) Rc(X, X) ds \\ &\leq (n-1) \int_0^{s_0} |\dot{\phi}(s)|^2 ds + \int_0^{s_0} (1 - \phi^2(s)) Rc(X, X) ds \\ &= (n-1) \left[\int_0^1 |\dot{\phi}(s)|^2 ds + \int_1^{s_0-1} |\dot{\phi}(s)|^2 ds + \int_{s_0-1}^{s_0} |\dot{\phi}(s)|^2 ds \right] \\ &\quad + \int_0^{s_0} (1 - \phi^2(s)) Rc(X, X) ds \\ &= (n-1) \left[\int_0^1 |1|^2 ds + \int_1^{s_0-1} |0|^2 ds + \int_{s_0-1}^{s_0} |-1|^2 ds \right] \tag{3-10} \\ &\quad + \int_0^{s_0} (1 - \phi^2(s)) Rc(X, X) ds \\ &= 2(n-1) + \int_0^{s_0} (1 - \phi^2(s)) Rc(X, X) ds \\ &= 2(n-1) + \int_0^1 (1 - \phi^2(s)) Rc(X, X) ds + \int_1^{s_0-1} (1 - \phi^2(s)) Rc(X, X) ds \\ &\quad + \int_{s_0-1}^{s_0} (1 - \phi^2(s)) Rc(X, X) ds. \end{aligned}$$

Lembrando que $\phi(s) = 1$, no intervalo de $[1, s_0 - 1]$, $\int_1^{s_0-1} (1 - \phi^2(s)) Rc(X, X) ds = 0$. Admitindo que $|Rc| \leq C$, para alguma constante $C > 0$, e usando o fato de que $0 \leq$

$$(1 - \phi^2(s)) \leq 1 \text{ em } [0, s_0]$$

$$\begin{aligned} 2(n-1) &+ \int_0^1 (1 - \phi^2(s)) Rc(X, X) ds + \int_{s_0-1}^{s_0} (1 - \phi^2(s)) Rc(X, X) ds \\ &\leq 2(n-1) + \int_0^1 (1 - \phi^2(s)) |Rc(X, X)| ds + \int_{s_0-1}^{s_0} (1 - \phi^2(s)) |Rc(X, X)| ds \\ &\leq 2(n-1) + C \int_0^1 ds + C \int_{s_0-1}^{s_0} ds \leq 2(n-1) + C + C[s_0 - (s_0 - 1)] = 2(n-1) + 2C. \end{aligned}$$

Portanto

$$\int_0^{s_0} Rc(X, X) ds \leq 2(n-1) + 2C. \quad (3-11)$$

Por outro lado, por (0-3), temos que

$$\begin{aligned} Rc(X, X) + \nabla_X \nabla_X f &= \frac{1}{2} \langle X, X \rangle. \quad \text{Como } X \text{ é unitário } \langle X, X \rangle = 1 \\ \text{isso implica em } Rc(X, X) + \nabla_X \nabla_X f &= \frac{1}{2}. \quad \text{Portanto,} \\ \nabla_X \nabla_X f &= \frac{1}{2} - Rc(X, X). \end{aligned}$$

Pela definição de hessiana dada em (2-10) tem-se que $Hessf(X, X) = \langle \nabla_X \nabla f, X \rangle$. Como

$$X \langle \nabla f, X \rangle = \langle \nabla_X \nabla f, X \rangle + \langle \nabla f, \nabla_X X \rangle.$$

e $\nabla_X X = 0$, por ser γ uma geodésica, temos

$$X \langle \nabla f, X \rangle = \langle \nabla_X \nabla f, X \rangle.$$

Sendo

$$\nabla_X f = \frac{df}{dX} = \frac{df}{d\dot{\gamma}} = \langle \nabla f, \dot{\gamma} \rangle = \frac{df}{ds} \quad (3-12)$$

então

$$\frac{d^2 f}{dX^2} = \frac{d^2 f}{d\dot{\gamma}^2} = X \langle \nabla f, X \rangle = \langle \nabla_X \nabla f, X \rangle = Hessf(X, X),$$

resultando em

$$\frac{d^2 f}{d\dot{\gamma}^2} = \nabla_X \nabla_X f = \frac{1}{2} - Rc(X, X). \quad (3-13)$$

Integrando ao longo de γ de 0 a s_0 e usando (3-11)

$$\begin{aligned}\int_0^{s_0} \nabla_X \dot{f} ds &= \int_0^{s_0} \left[\frac{1}{2} - Rc(X, X) \right] ds. \quad \text{Nesse caso} \quad \dot{f}(\gamma(s_0)) - \dot{f}(\gamma(0)) \\ &= \frac{1}{2}s_0 - \int_0^{s_0} Rc(X, X) ds \geq \frac{1}{2}s_0 - 2(n-1) - 2C.\end{aligned}$$

No caso de g_{ij} ter curvatura de Ricci limitada, isto é, $|Rc| \leq C$ para alguma constante $C > 0$, segue que

$$\dot{f}(\gamma(s_0)) - \dot{f}(\gamma(0)) \geq \frac{1}{2}s_0 - 2(n-1) - 2C.$$

Então,

$$\dot{f}(\gamma(s_0)) \geq \frac{1}{2}s_0 + \dot{f}(\gamma(0)) - 2(n-1) - 2C.$$

Considerando

$$\frac{c}{2} = 2(n-1) + 2C - \dot{f}(\gamma(0)),$$

então teremos que

$$\dot{f}(\gamma(s_0)) \geq \frac{1}{2}(s_0 - c).$$

Logo, para $s \in [0, s_0]$, temos que

$$\int_0^{s_0} \dot{f}(\gamma(s)) ds \geq \int_0^{s_0} \frac{1}{2}(s - c) ds$$

e pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$f(\gamma(s_0)) - f(\gamma(0)) \geq \frac{1}{4}(s_0 - c)^2 - \frac{c^2}{4}.$$

Entretanto, $f > 0$ (3.13) e isso implica que

$$f(\gamma(s_0)) \geq f(\gamma(s_0)) - f(\gamma(0)) \geq \frac{1}{4}(s_0 - c)^2 - \frac{c^2}{4} \geq \frac{1}{4}(s_0 - c)^2 - \frac{c^2}{4} - f(\gamma(0)),$$

sendo $x_0 = \gamma(0)$, por (3.10) segue que

$$f(\gamma(s_0)) \geq \frac{1}{4}(s_0 - c)^2 - \frac{c^2}{4} - f(x_0).$$

Como no Teorema (3.2) não assumimos que a curvatura era limitada, nós temos que modificar o argumento acima.

Observação 3.12 Repare que $\phi = s$ no intervalo $[0, 1]$. Isso implica que $\phi^2 = 1$ é o

máximo da função ϕ , para $s = 1$. Observe também que o tensor de Ricci Rc é uma função contínua. Sendo então γ normalizada, tome $B_1(\gamma(0))$. E pelo teorema de Weiestrass Rc terá um valor máximo nesse compacto, ou seja, temos $\max_{B_1(\gamma(0))} |Rc(X, X)|$. Sendo assim,

$$-\int_0^1 \phi^2 Rc(X, X) ds \leq \int_0^1 \phi^2 |Rc(X, X)| ds \leq \int_0^1 |Rc(X, X)| ds \leq \max_{B_1(\gamma(0))} |Rc(X, X)|.$$

Mas como

$$-\int_0^1 \phi^2 Rc(X, X) ds \leq \int_0^1 |Rc(X, X)| ds \leq \max_{B_1(\gamma(0))} |Rc(X, X)|$$

temos que

$$-\int_0^1 \phi^2 Rc(X, X) ds \leq \max_{B_1(\gamma(0))} |Rc(X, X)|,$$

ou seja,

$$\int_0^1 \phi^2 Rc(X, X) ds \geq -\max_{B_1(\gamma(0))} |Rc(X, X)|.$$

Agora, integrando (3-13) ao longo de γ de $s = 1$ a $s = s_0 - 1$ e lembrando que em $[1, s_0 - 1]$, $\phi = 1$ teremos

$$\begin{aligned} \dot{f}(\gamma(s_0 - 1)) - \dot{f}(\gamma(1)) &= \int_1^{s_0-1} \nabla_X \dot{f}(\gamma(s)) ds = \int_1^{s_0-1} \left(\frac{1}{2} - Rc(X, X)\right) ds \\ &= \frac{1}{2}(s_0 - 2) - \int_1^{s_0-1} Rc(X, X) ds \\ &= \frac{1}{2}(s_0 - 2) - \int_1^{s_0-1} \phi^2 Rc(X, X) ds. \end{aligned}$$

Como

$$\int_0^{s_0} \phi^2(s) Rc(X, X) ds \leq (n-1) \int_0^{s_0} |\dot{\phi}(s)|^2 ds,$$

lembrando-se de (3-10)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \phi^2(s) Rc(X, X) ds + \int_1^{s_0-1} \phi^2(s) Rc(X, X) ds + \int_{s_0-1}^{s_0} \phi^2(s) Rc(X, X) ds \\ \leq (n-1) \int_0^{s_0} |\dot{\phi}(s)|^2 ds = 2(n-1). \end{aligned}$$

Segue que

$$\int_1^{s_0-1} \phi^2(s) Rc(X, X) ds \leq 2(n-1) - \int_0^1 \phi^2(s) Rc(X, X) ds - \int_{s_0-1}^{s_0} \phi^2(s) Rc(X, X) ds,$$

e

$$\begin{aligned}
\dot{f}(\gamma(s_0 - 1)) - \dot{f}(\gamma(1)) &= \frac{1}{2}(s_0 - 2) - \int_1^{s_0-1} Rc(X, X)ds = \frac{1}{2}(s_0 - 2) - \int_1^{s_0-1} \phi^2 Rc(X, X)ds \\
&\geq \frac{1}{2}(s_0 - 2) - 2(n - 1) + \int_0^1 \phi^2(s) Rc(X, X)ds + \int_{s_0-1}^{s_0} \phi^2(s) Rc(X, X)ds \\
&= \frac{1}{2}s_0 - 2n + 1 + \int_0^1 \phi^2(s) Rc(X, X)ds + \int_{s_0-1}^{s_0} \phi^2(s) Rc(X, X)ds \\
&\geq \frac{1}{2}s_0 - 2n + 1 + \int_{s_0-1}^{s_0} \phi^2(s) Rc(X, X)ds - \max_{B_{x_0}(1)} |Rc|.
\end{aligned}$$

Vimos que

$$Rc(X, X) = \frac{1}{2} - \nabla_X \dot{f},$$

e daí

$$\begin{aligned}
\int_{s_0-1}^{s_0} \phi^2(s) Rc(X, X)ds &= \int_{s_0-1}^{s_0} \phi^2(s) \left(\frac{1}{2} - \nabla_X \dot{f}(\gamma(s)) \right) ds \\
&= \frac{1}{2} \int_{s_0-1}^{s_0} \phi^2(s) ds - \int_{s_0-1}^{s_0} \phi^2(s) \nabla_X \dot{f}(\gamma(s)) ds \\
&= \frac{1}{2} \int_{s_0-1}^{s_0} (s_0 - s)^2 ds - \int_{s_0-1}^{s_0} \phi^2(s) \nabla_X \dot{f}(\gamma(s)) ds \\
&= \frac{1}{6} - \int_{s_0-1}^{s_0} \phi^2(s) \nabla_X \dot{f}(\gamma(s)) ds.
\end{aligned}$$

Integrando por partes

$$\begin{aligned}
\int_{s_0-1}^{s_0} \phi^2(s) \nabla_X \dot{f}(\gamma(s)) ds &= \phi^2(s) \dot{f}(\gamma(s)) \Big|_{s_0-1}^{s_0} - 2 \int_{s_0-1}^{s_0} \phi \dot{f}(\gamma(s)) ds \\
&= (s_0 - s)^2 \dot{f}(\gamma(s)) \Big|_{s_0-1}^{s_0} - 2 \int_{s_0-1}^{s_0} \phi \dot{f}(\gamma(s)) ds,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
\int_{s_0-1}^{s_0} \phi^2(s) Rc(X, X)ds &= \frac{1}{6} + (s_0 - s)^2 \dot{f}(\gamma(s)) \Big|_{s_0-1}^{s_0} - 2 \int_{s_0-1}^{s_0} \phi \dot{f}(\gamma(s)) ds \\
&= \frac{1}{6} + \dot{f}(\gamma(s_0 - 1)) - 2 \int_{s_0-1}^{s_0} \phi(s) \dot{f}(\gamma(s)) ds \quad (3-14)
\end{aligned}$$

recorde que em $[s_0 - 1, s_0]$ a função $\phi(s) = s_0 - s$. Visto que

$$\dot{f}(\gamma(s_0 - 1)) - \dot{f}(\gamma(1)) \geq \frac{1}{2}s_0 - 2n + 1 + \int_{s_0-1}^{s_0} \phi^2(s) Rc(X, X)ds - \max_{B_{x_0}(1)} |Rc|.$$

Por (3-14) implica que

$$\dot{f}(\gamma(s_0 - 1)) - \dot{f}(\gamma(1)) \geq \frac{1}{2}s_0 - 2n + 1 - \max_{B_{x_0}(1)} |Rc| + \frac{1}{6} + \dot{f}(\gamma(s_0 - 1)) - 2 \int_{s_0-1}^{s_0} \phi(s) \dot{f}(\gamma(s)) ds.$$

Portanto,

$$2 \int_{s_0-1}^{s_0} \phi(s) \dot{f}(\gamma(s)) ds \geq \frac{1}{2}s_0 - 2n + \frac{7}{6} - \max_{B_{x_0}(1)} |Rc| + \dot{f}(\gamma(1)). \quad (3-15)$$

Mais ainda, por (3-6) e (3-12) temos que

$$|\nabla f(\gamma(s))| \leq \sqrt{f(\gamma(s))}$$

e, então,

$$|\dot{f}(\gamma(s))| \leq \sqrt{f(\gamma(s))}.$$

Como f é derivável e contínua, f tem um máximo no intervalo $[s_0 - 1, s_0]$. Ou seja,

$$\max_{s_0-1 \leq s \leq s_0} |\dot{f}(\gamma(s))| \leq \max_{s_0-1 \leq s \leq s_0} \sqrt{f(\gamma(s))}. \quad (3-16)$$

Por um lado,

$$|\sqrt{f(\gamma(s))} - \sqrt{f(\gamma(s_0))}| \leq \frac{1}{2}(s_0 - s) \leq \frac{1}{2},$$

sempre que $s_0 - 1 \leq s \leq s_0$. Assim, por (3-9) e sendo $f > 0$ (3.13),

$$\sqrt{f(\gamma(s))} - \sqrt{f(\gamma(s_0))} \leq |\sqrt{f(\gamma(s))} - \sqrt{f(\gamma(s_0))}| \leq \frac{1}{2},$$

implica em

$$\sqrt{f(\gamma(s))} \leq \frac{1}{2} + \sqrt{f(\gamma(s_0))}.$$

Agora, por (3-16)

$$\max_{s_0-1 \leq s \leq s_0} |\dot{f}(\gamma(s))| \leq \max_{s_0-1 \leq s \leq s_0} \sqrt{f(\gamma(s))} \leq \frac{1}{2} + \sqrt{f(\gamma(s_0))}.$$

Logo,

$$\max_{s_0-1 \leq s \leq s_0} |\dot{f}(\gamma(s))| \leq \frac{1}{2} + \sqrt{f(\gamma(s_0))}. \quad (3-17)$$

Como

$$\dot{f}(\gamma(s)) \leq |\dot{f}(\gamma(s))| \leq \max_{s_0-1 \leq s \leq s_0} |\dot{f}(\gamma(s))| \leq \sqrt{f(\gamma(s_0))} + \frac{1}{2}$$

temos

$$\dot{f}(\gamma(s)) \leq \sqrt{f(\gamma(s_0))} + \frac{1}{2},$$

por (3-17) , (3-15) e pelo fato de que

$$2 \int_{s_0-1}^{s_0} \phi(s) ds = 2 \int_{s_0-1}^{s_0} (s_0 - s) ds = 1$$

conclui-se que

$$\sqrt{f(\gamma(s_0))} \geq \frac{1}{2}(s_0 - c_1)$$

para alguma constante c_1 dependendo apenas de n e da geometria de g_{ij} na bola unitária $B_{x_0}(1)$. De fato, de (3-15) temos que

$$\begin{aligned} (\sqrt{f(\gamma(s_0))} + \frac{1}{2}) &= (\sqrt{f(\gamma(s_0))} + \frac{1}{2}) \left(2 \int_{s_0-1}^{s_0} \phi(s) ds \right) \\ &\geq 2 \int_{s_0-1}^{s_0} \phi(s) (\sqrt{f(\gamma(s_0))} + \frac{1}{2}) ds \geq 2 \int_{s_0-1}^{s_0} \phi(s) \dot{f}(\gamma(s)) ds \\ &\geq \frac{s_0}{2} - 2n + \frac{7}{6} - \max_{B_{x_0}(1)} |Rc| + \dot{f}(\gamma(1)). \end{aligned}$$

Logo,

$$\sqrt{f(\gamma(s_0))} \geq \frac{s_0}{2} - 2n + \frac{7}{6} - \frac{1}{2} - \max_{B_{x_0}(1)} |Rc| + \dot{f}(\gamma(1)).$$

Tomando

$$\frac{c_1}{2} = 2n - \frac{7}{6} + \frac{1}{2} + \max_{B_{x_0}(1)} |Rc| - \dot{f}(\gamma(1))$$

temos

$$\sqrt{f(\gamma(s_0))} \geq \frac{1}{2}(s_0 - c_1).$$

Considerando a observação (3.10) demonstramos, portanto, a proposição (3.11), e como consequência temos o Teorema (3.2). $\square$

3.2 Crescimento do Volume do Ricci Sóliton Gradiente Shrinking Completo

Nessa seção, nós vamos examinar o crescimento do volume da bola geodésica de um Ricci Sóliton Gradiente Completo e não-Compacto.

Vamos definir

$$\rho(x) = 2\sqrt{f(x)}.$$

Então, pelo Teorema (3.2), temos

$$\frac{1}{4}(r(x) - c_1)^2 \leq f(x) \leq \frac{1}{4}(r(x) + c_2)^2.$$

Daí,

$$\sqrt{\frac{1}{4}(r(x) - c_1)^2} \leq \sqrt{f(x)} \leq \sqrt{\frac{1}{4}(r(x) + c_2)^2}$$

nos dá

$$(r(x) - c_1) \leq 2\sqrt{f(x)} \leq (r(x) + c_2)$$

e, portanto,

$$(r(x) - c_1) \leq \rho(x) \leq (r(x) + c_2).$$

Considerando $c = \max\{c_1, c_2\} > 0$ temos

$$(r(x) - c) \leq \rho(x) \leq (r(x) + c). \quad (3-18)$$

Temos também, por (3-7),

$$\nabla \rho(x) = \nabla(2\sqrt{f(x)}) = 2\nabla(\sqrt{f(x)}) = 2\frac{1}{2\sqrt{f(x)}}\nabla f(x) = \frac{\nabla f(x)}{\sqrt{f(x)}} \quad (3-19)$$

e, por (3-6),

$$0 \leq |\nabla f|^2 \leq f$$

implica em

$$|\nabla f| \leq \sqrt{f},$$

ou seja,

$$|\nabla \rho(x)| = \frac{|\nabla f|}{\sqrt{f}} \leq 1.$$

Observação 3.13 Se considerarmos f não-constante, como $0 \leq |\nabla f|^2 \leq f$ isso implica que será $f > 0$. Como f é função potencial, na região $D(r)$ que definiremos logo a baixo, o campo gradiente ∇f não se anulará na fronteira $(\partial D(r))$.

Denote por

$$D(r) = \{x \in M : \rho(x) < r\} \quad e \quad V(r) = \int_{D(r)} dV.$$

Segue que $\rho : D(r) \rightarrow (0, r)$ é uma função diferenciável, já que $\rho(x) = 2\sqrt{f(x)}$ e $f(x) > 0$ para todo x em M . Por (2-40)

$$J(x) = \sqrt{\det(\rho_{*x} \rho_{*x}^{tr})},$$

e por (2.16)

$$\rho_{*x} : T_x D(r) \rightarrow T_{\rho(x)}(0, r).$$

Então $\rho_{*x} = \nabla \rho$, olhando o gradiente como uma matriz $1 \times n$, sendo a variedade M de dimensão n , e isso implica em

$$J(x) = \sqrt{\det(\rho_{*x} \rho_{*x}^{tr})} = \sqrt{\det[\nabla \rho (\nabla \rho)^{tr}]} = \sqrt{\langle \nabla \rho, \nabla \rho \rangle} = |\nabla \rho|$$

Então, pela fórmula da co-Área (2-41),

$$V(r) = \int_0^r ds \int_{\partial D(r)} \frac{1}{|\nabla \rho|} dA.$$

Portanto, pelo Teorema fundamental do cálculo, temos

$$V'(r) = \int_{\partial D(r)} \frac{1}{|\nabla \rho|} dA.$$

Como vimos em (3-19), temos que

$$\frac{\sqrt{f}}{|\nabla f|} = \frac{1}{|\nabla \rho|}, \quad (3-20)$$

na fronteira

$$\rho(x) = 2\sqrt{f(x)} = r,$$

logo

$$\sqrt{f(x)} = \frac{r}{2}. \quad (3-21)$$

Donde temos que por (3-20) e (3-21)

$$V'(r) = \int_{\partial D(r)} \frac{1}{|\nabla \rho|} dA = \int_{\partial D(r)} \frac{\sqrt{f}}{|\nabla f|} dA = \int_{\partial D(r)} \frac{\frac{r}{2}}{|\nabla f|} dA = \frac{r}{2} \int_{\partial D(r)} \frac{1}{|\nabla f|} dA.$$

Utilizando esses resultados, provaremos o seguinte lema:

Lema 3.14 *Seja (M^n, g_{ij}, f) um Ricci Sóliton Gradiente Shrinking completo e não-compacto onde $\rho(x) = 2\sqrt{f(x)}$ e $D(r) = \{x \in M : \rho(x) < r\}$. Então*

$$nV(r) - rV'(r) = 2 \int_{D(r)} R dV - 2 \int_{\partial D(r)} \frac{R}{|\nabla f|} dA.$$

Prova. Considere

$$R_{ij} + \nabla_i \nabla_j f = \frac{1}{2} g_{ij}$$

Multiplicando ambos os lados pela métrica inversa g^{ij} e somando em i, j temos

$$g^{ij}R_{ij} + g^{ij}\nabla_i\nabla_j f = \frac{1}{2}g_{ij}g^{ij}.$$

Vimos que somando em i e j , por (2-2) e (2-32), respectivamente, tem-se

$$R = g^{ij}R_{ij} \quad e \quad \Delta f = g^{ij}\nabla_i\nabla_j f.$$

Portanto,

$$g^{ij}R_{ij} + g^{ij}\nabla_i\nabla_j f = \frac{1}{2}g_{ij}g^{ij}$$

implica em

$$R + \Delta f = \frac{n}{2}.$$

Daí,

$$2R + 2\Delta f = n,$$

ou seja,

$$n - 2R = 2\Delta f.$$

Integrando temos

$$\int_{D(r)} n dV - \int_{D(r)} 2R dV = \int_{D(r)} 2\Delta f dV,$$

donde

$$n \int_{D(r)} dV - 2 \int_{D(r)} R dV = 2 \int_{D(r)} \Delta f dV.$$

Logo,

$$nV(r) - 2 \int_{D(r)} R dV = 2 \int_{D(r)} \Delta f dV;$$

onde $V(r) = \int_{D(r)} dV$. Como

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f),$$

pelo Teorema da divergência (2-34)

$$\int_{D(r)} \Delta f dV = \int_{\partial D(r)} \nabla f \frac{\nabla \rho}{|\nabla \rho|} dA;$$

onde $\frac{\nabla \rho}{|\nabla \rho|}$ é o vetor normal exterior, unitário, a $\partial D(r)$. Agora, como

$$\nabla \rho(x) = \frac{\nabla f(x)}{\sqrt{f(x)}} \quad e \quad |\nabla \rho(x)| = \frac{|\nabla f(x)|}{\sqrt{f(x)}},$$

$$\frac{\nabla \rho}{|\nabla \rho|} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}.$$

Teremos então

$$\begin{aligned}\int_{D(r)} \Delta f dV &= \int_{\partial D(r)} \nabla f \frac{\nabla \rho}{|\nabla \rho|} dA = \int_{\partial D(r)} \nabla f \frac{\nabla f}{|\nabla f|} dA \\ &= \int_{\partial D(r)} \frac{|\nabla f|^2}{|\nabla f|} dA = \int_{\partial D(r)} |\nabla f| dA.\end{aligned}$$

Por (3-5)

$$R + |\nabla f|^2 - f = 0,$$

que nos dá

$$f - R = |\nabla f|^2$$

e daí,

$$\frac{f - R}{|\nabla f|} = |\nabla f|. \quad (3-22)$$

Logo

$$\begin{aligned}nV(r) - 2 \int_{D(r)} R dV &= 2 \int_{D(r)} \Delta f dV = 2 \int_{\partial D(r)} |\nabla f| dA = 2 \int_{\partial D(r)} \frac{f - R}{|\nabla f|} dA \\ &= 2 \int_{\partial D(r)} \frac{f}{|\nabla f|} dA - 2 \int_{\partial D(r)} \frac{R}{|\nabla f|} dA.\end{aligned}$$

Como $\rho(x) = 2\sqrt{f(x)}$ e $D(r) = \{x \in M : \rho(x) < r\}$, na fronteira $(\partial D(r))$ temos $\rho(x) = 2\sqrt{f(x)} = r$ implicando em

$$\sqrt{f(x)} = \frac{r}{2},$$

ou seja,

$$f(x) = \frac{r^2}{4}.$$

Por fim,

$$\begin{aligned}nV(r) - 2 \int_{D(r)} R dV &= 2 \int_{\partial D(r)} \frac{f}{|\nabla f|} dA - 2 \int_{\partial D(r)} \frac{R}{|\nabla f|} dA \\ &= 2 \int_{\partial D(r)} \frac{r^2}{4} \frac{1}{|\nabla f|} dA - 2 \int_{\partial D(r)} \frac{R}{|\nabla f|} dA \\ &= \frac{r^2}{2} \int_{\partial D(r)} \frac{1}{|\nabla f|} dA - 2 \int_{\partial D(r)} \frac{R}{|\nabla f|} dA = rV'(r) - 2 \int_{\partial D(r)} \frac{R}{|\nabla f|} dA.\end{aligned}$$

Portanto,

$$nV(r) - rV'(r) = 2 \int_{D(r)} R dV - 2 \int_{\partial D(r)} \frac{R}{|\nabla f|} dA.$$

□

Como observado por Ovidiu Munteanu, temos a relação

$$\int_{D(r)} R dV \leq \frac{n}{2} V(r). \quad (3-23)$$

De fato, tomando o traço em (0-3) temos

$$R + \Delta f = \frac{n}{2}.$$

Então, integrando, tem-se

$$\int_{D(r)} R dV + \int_{D(r)} \Delta f dV = \frac{n}{2} \int_{D(r)} dV.$$

Como já observado no lema (3.14), pelo Teorema da divergência, temos que

$$\begin{aligned} \int_{D(r)} \Delta f dV &= \int_{\partial D(r)} \nabla f \frac{\nabla \rho}{|\nabla \rho|} dA = \int_{\partial D(r)} \nabla f \frac{\nabla f}{|\nabla f|} dA \\ &= \int_{\partial D(r)} \frac{|\nabla f|^2}{|\nabla f|} dA = \int_{\partial D(r)} |\nabla f| dA. \end{aligned}$$

Como

$$|\nabla f| > 0,$$

isso implica que

$$\int_{\partial D(r)} |\nabla f| dA \geq 0.$$

Segue que

$$\int_{D(r)} R dV \leq \int_{D(r)} R dV + \int_{\partial D(r)} |\nabla f| dA = \int_{D(r)} R dV + \int_{D(r)} \Delta f dV = \frac{n}{2} \int_{D(r)} dV,$$

ou seja,

$$\int_{D(r)} R dV \leq \frac{n}{2} \int_{D(r)} dV.$$

Agora estamos prontos para demonstrar o Teorema (3.15).

Teorema 3.15 *Seja (M^n, g_{ij}, f) um Ricci Sóliton Gradiente Shrinking, Completo e não-Compacto. Então, existe uma constante $C_1 > 0$ tal que*

$$\text{Vol}(B_{x_0}(r)) \leq C_1 r^n$$

para $r > 0$ suficientemente grande.

Prova. Denote

$$\chi(r) = \int_{D(r)} R dV. \quad (3-24)$$

Pela fórmula da co- área e por (3-20) e (3-21), nós temos

$$\begin{aligned}\chi(r) &= \int_0^r \left(\int_{\partial D(r)} \frac{R}{|\nabla \rho(x)|} dA \right) ds = \int_0^r \left(\int_{\partial D(r)} \frac{R\sqrt{f(x)}}{|\nabla f(x)|} dA \right) ds \\ &= \int_0^r \left(\int_{\partial D(r)} \frac{s}{2} \frac{R}{|\nabla f(x)|} dA \right) ds = \frac{1}{2} \int_0^r s ds \int_{\partial D(r)} \frac{R}{|\nabla f(x)|} dA.\end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema fundamental do cálculo

$$\chi'(r) = \frac{r}{2} \int_{\partial D(r)} \frac{R}{|\nabla f|} dA. \quad (3-25)$$

Do lema (3.14), segue que

$$nV(r) - rV'(r) = 2 \int_{D(r)} R dV - 2 \int_{\partial D(r)} \frac{R}{|\nabla f|} dA = 2\chi(r) - \frac{4}{r}\chi'(r).$$

Isso nos dá que,

$$\begin{aligned}(r^{-n}V(r))' &= r^{-n}V'(r) - nr^{-n-1}V(r) = -(nr^{-n-1}V(r) - r^{-n}V'(r)) \\ &= -r^{-n-1}(nV(r) - rV'(r)) = -r^{-n-1}(2\chi(r) - \frac{4}{r}\chi'(r)) \\ &= 4r^{-n-2}\chi'(r) - 2r^{-n-1}\chi(r).\end{aligned}$$

Agora, integrando a equação acima de r_0 à r , tem-se

$$\int_{r_0}^r (s^{-n}V(s))' ds = \int_{r_0}^r [4s^{-n-2}\chi'(s) - 2s^{-n-1}\chi(s)] ds.$$

Como

$$\int_{r_0}^r (s^{-n}V(s))' ds = r^{-n}V(r) - r_0^{-n}V(r_0)$$

e

$$\int_{r_0}^r 4s^{-n-2}\chi'(s) ds = 4s^{-n-2}\chi(s) \Big|_{r_0}^r + 4(n+2) \int_{r_0}^r s^{-n-3}\chi(s) ds.$$

Isso implica que

$$\begin{aligned}\int_{r_0}^r (s^{-n}V(s))' ds &= r^{-n}V(r) - r_0^{-n}V(r_0) = \\ &= 4s^{-n-2}\chi(s) \Big|_{r_0}^r + 4(n+2) \int_{r_0}^r s^{-n-3}\chi(s) ds - 2 \int_{r_0}^r s^{-n-1}\chi(s) ds = \\ &= 4r^{-n-2}\chi(r) - 4r_0^{-n-2}\chi(r_0) + \int_{r_0}^r [4(n+2)s^{-n-3}\chi(s) - 2s^{-n-1}\chi(s)] ds = \\ &= 4r^{-n-2}\chi(r) - 4r_0^{-n-2}\chi(r_0) + 2 \int_{r_0}^r \chi(s) s^{-n-3} [2(n+2) - s^2] ds.\end{aligned}$$

Repare que $\chi(r)$ positiva, crescente em r , isto é, $\chi(r_0) \leq \chi(r)$, para $r_0 = \sqrt{2(n+2)}$ tome $r \geq r_0 > 0$; definindo $h(s) = s^{-n-3}(2(n+2) - s^2)$ temos que se $s \geq r_0 > 0$, $h(s) \leq 0$. Então para $r \geq r_0 = \sqrt{2(n+2)}$

$$r^{-n-3}[2(n+2) - r^2] \leq 0,$$

e como

$$0 \leq \chi(r_0) \leq \chi(r), \quad \text{pois } R \geq 0,$$

temos que

$$\chi(r_0)r^{-n-3}[2(n+2) - r^2] \geq \chi(r)r^{-n-3}[2(n+2) - r^2].$$

Daí,

$$\begin{aligned} \int_{r_0}^r \chi(s)s^{-n-3} [2(n+2) - s^2] ds &\leq \chi(r_0) \int_{r_0}^r s^{-n-3} [2(n+2) - s^2] ds \\ &= \chi(r_0) \left[-2s^{-n-2} + \frac{1}{n}s^{-n} \right] \Big|_{r_0}^r \\ &= \chi(r_0) \left(-2r^{-n-2} + \frac{1}{n}r^{-n} + 2r_0^{-n-2} - \frac{1}{n}r_0^{-n} \right). \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} r^{-n}V(r) - r_0^{-n}V(r_0) &= 4r^{-n-2}\chi(r) - 4r_0^{-n-2}\chi(r_0) + 2 \int_{r_0}^r \chi(s)s^{-n-3} [2(n+2) - s^2] ds \\ &\leq 4r^{-n-2}\chi(r) - 4r_0^{-n-2}\chi(r_0) + 2 \left\{ \chi(r_0) \int_{r_0}^r s^{-n-3} [2(n+2) - s^2] ds \right\} \\ &= 4r^{-n-2}\chi(r) - 4r_0^{-n-2}\chi(r_0) + 2 \left\{ \chi(r_0) \left[-2s^{-n-2} + \frac{1}{n}s^{-n} \right] \Big|_{r_0}^r \right\} \\ &= 4r^{-n-2}\chi(r) - 4r_0^{-n-2}\chi(r_0) + 2 \left\{ \chi(r_0) \left(-2r^{-n-2} + \frac{1}{n}r^{-n} + 2r_0^{-n-2} - \frac{1}{n}r_0^{-n} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} r^{-n}V(r) - r_0^{-n}V(r_0) &\leq 4r^{-n-2}\chi(r) - 4r_0^{-n-2}\chi(r_0) - 4r^{-n-2}\chi(r_0) + 2\frac{\chi(r_0)r^{-n}}{n} + 4r_0^{-n-2}\chi(r_0) \\ &\quad - 2\frac{\chi(r_0)r_0^{-n}}{n} = 4r^{-n-2}(\chi(r) - \chi(r_0)) + 2\frac{\chi(r_0)}{n}(r^{-n} - r_0^{-n}). \end{aligned}$$

Segue que,

$$r^{-n}V(r) - r_0^{-n}V(r_0) \leq 4r^{-n-2}(\chi(r) - \chi(r_0)) + 2\frac{\chi(r_0)}{n}(r^{-n} - r_0^{-n})$$

e isso implica que

$$r^{-n}V(r) \leq r_0^{-n}V(r_0) + 4r^{-n-2}(\chi(r) - \chi(r_0)) + 2\frac{\chi(r_0)}{n}(r^{-n} - r_0^{-n}).$$

Observe que $2\frac{\chi(r_0)}{n}(r^{-n} - r_0^{-n}) \leq 0$, pois $r \geq r_0$ e $\chi(r_0) \geq 0$, e $4r^{-2}\chi(r_0) \geq 0$ então,

$$V(r) \leq r^n r_0^{-n} V(r_0) + 4r^{-2}(\chi(r) - \chi(r_0)),$$

mais ainda,

$$V(r) \leq r^n r_0^{-n} V(r_0) + 4r^{-2}\chi(r).$$

Por outro lado, temos por (3-23)

$$\int_{D(r)} R dV \leq \frac{n}{2} V(r).$$

Definimos no começo do Teorema que

$$\chi(r) = \int_{D(r)} R dV.$$

Então,

$$\int_{D(r)} R dV \leq \frac{n}{2} V(r)$$

nos dá que

$$\chi(r) \leq \frac{n}{2} V(r)$$

e multiplicando essa desigualdade por $4r^{-2}$ obtemos

$$4r^{-2}\chi(r) \leq 2nr^{-2}V(r).$$

Logo,

$$V(r) \leq r^n r_0^{-n} V(r_0) + 4r^{-2}\chi(r) \leq r^n r_0^{-n} V(r_0) + 2nr^{-2}V(r),$$

tome r suficientemente grande, tal que

$$\frac{2n}{r^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Então

$$V(r) \leq r^n r_0^{-n} V(r_0) + 4r^{-2}\chi(r) \leq r^n r_0^{-n} V(r_0) + 2nr^{-2}V(r) \leq r^n r_0^{-n} V(r_0) + \frac{1}{2}V(r),$$

logo

$$V(r) \leq r_0^{-n} V(r_0) r^n + \frac{1}{2}V(r)$$

e isso nos dá

$$\frac{1}{2}V(r) \leq r^n(r_0^{-n}V(r_0)).$$

Então

$$V(r) \leq 2r_0^{-n}V(r_0)r^n.$$

Como $r \geq r_0 = \sqrt{2(n+2)}$ temos que $r_0 \geq 2$, e então $1 \geq \frac{2}{r_0} \geq \frac{2}{r_0^n}$. Segue que

$$V(r) \leq 2r_0^{-n}V(r_0)r^n \leq V(r_0)r^n.$$

Por fim, tome $x \in B_{x_0}(r)$. Isso nos dá que

$$d(x, x_0) < r$$

mas, por (3-18), temos

$$\rho(x) = 2\sqrt{f(x)} < d(x, x_0) + c < r + c.$$

Ou seja, $x \in D(r+c) = \{x \in M : \rho(x) < r+c\}$ e, portanto,

$$B_{x_0}(r) \subset D(r+c).$$

Logo,

$$\text{Vol}(B_{x_0}(r)) \leq V(r+c) < V(r_0)r^n$$

para r suficientemente grande. □

Agora faremos uma estimativa inferior para o volume

Proposição 3.16 *Seja (M^n, g_{ij}, f) um gradiente Ricci Sóliton Gradiente Shrinking Completo e não-Compacto. Suponha que a curvatura escalar média satisfaz o limite superior*

$$\frac{1}{V(r)} \int_{D(r)} R dV \leq \delta,$$

para alguma constante $\delta < \frac{n}{2}$ e todo r suficientemente grande. Então, existe uma constante $C_2 > 0$ tal que

$$\text{Vol}(B_{x_0}(r)) \geq C_2 r^{n-2\delta}$$

para r suficientemente grande.

Prova. Temos por Ovidiu Munteanu e por (3-24), respectivamente, que

$$\int_{D(r)} R dV \leq \frac{n}{2} V(r)$$

e

$$\chi(r) = \int_{D(r)} R dV.$$

Pelo lema (3.14) e por (3-25)

$$nV(r) - rV'(r) = 2 \int_{D(r)} R dV - 2 \int_{\partial D(r)} \frac{R}{|\nabla f|} dA = 2\chi(r) - \frac{4}{r}\chi'(r) \leq 2\chi(r)$$

isso implica que

$$nV(r) - rV'(r) \leq 2\chi(r). \quad (3-26)$$

Pois, sendo $R \geq 0$ e $|\nabla f| > 0$

$$\chi'(r) = \frac{r}{2} \int_{\partial D(r)} \frac{R}{|\nabla f(x)|} dA \geq 0.$$

Por hipótese nós temos

$$\delta < \frac{n}{2} \quad e \quad \frac{1}{V(r)} \int_{D(r)} R dV \leq \delta.$$

E usando (3-24)

$$\frac{2}{V(r)} \int_{D(r)} R dV \leq 2\delta$$

pode ser escrito como

$$\frac{2\chi(r)}{V(r)} \leq 2\delta.$$

Daí

$$2\chi(r) \leq 2\delta V(r)$$

e por(3-26)

$$nV(r) - rV'(r) \leq 2\chi(r) \leq 2\delta V(r).$$

Logo

$$nV(r) - rV'(r) \leq 2\delta V(r)$$

nos dá

$$(n - 2\delta)V(r) \leq rV'(r),$$

e portanto

$$\frac{(n - 2\delta)}{r} \leq \frac{V'(r)}{V(r)}.$$

Integrando de 1 à r

$$\int_1^r \frac{(n - 2\delta)}{s} ds \leq \int_1^r \frac{V'(s)}{V(s)} ds$$

temos

$$(n - 2\delta) \int_1^r \frac{1}{s} ds \leq \int_1^r \frac{V'(s)}{V(s)} ds$$

pelo Teorema Fundamental do Cálculo

$$(n - 2\delta)(\ln r - \ln 1) \leq (\ln V(r) - \ln V(1))$$

que podemos escrever da seguinte maneira

$$(n - 2\delta) \ln r \leq \ln \frac{V(r)}{V(1)}$$

que equivale a

$$\ln r^{(n-2\delta)} \leq \ln \frac{V(r)}{V(1)}$$

e então

$$V(1)r^{(n-2\delta)} \leq V(r).$$

Claramente, $D(r - c) \subset B_{x_0}(r)$ pois tomando $x \in D(r - c)$ temos que

$$\rho(x) < r - c.$$

Mas por (3-18)

$$r(x) - c \leq \rho(x).$$

Então

$$r(x) - c \leq \rho(x) < r - c$$

implica que

$$r(x) - c < r - c,$$

isto é,

$$r(x) = d(x, x_0) < r.$$

Ou seja, $x \in B_{x_0}(r)$. Conclui-se que

$$\text{Vol}(B_{x_0}(r)) \geq V(r - c) \geq V(1)r^{(n-2\delta)}$$

para r suficientemente grande. □

Provados os dois Teoremas principais do artigo, podemos concluir o corolário:

Corolário 3.17 *Seja (M^n, g_{ij}, f) um Ricci Sóliton Gradiente Shrinking Completo e não-Compacto. Então temos que*

$$\int_M |u(x)| e^{-f} dV < +\infty$$

para qualquer função u em M com $|u(x)| \leq A e^{\alpha r^2(x)}$, $0 \leq \alpha < \frac{1}{4}$ e $A > 0$. Em particular, o

volume ponderado de M é finito,

$$\int_M e^{-f} dV < +\infty.$$

Prova. Por hipótese

$$\int_M |u(x)| e^{-f(x)} dV \leq \int_M A e^{cr^2(x)-f(x)} dV < A \int_M e^{\frac{r^2(x)}{4}-f(x)} dV.$$

Pelo Teorema (3.2) temos que

$$\frac{(r(x)-c)^2}{4} \leq f(x),$$

nos dando que

$$-f(x) \leq \frac{cr(x)}{2} - \frac{r^2(x)}{4} - \frac{c^2}{4} < \frac{cr(x)}{2} - \frac{r^2(x)}{4},$$

lembrando que $c > 0$ é uma constante positiva. Ou seja,

$$-f(x) < \frac{cr(x)}{2} - \frac{r^2(x)}{4}. \quad (3-27)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_M |u(x)| e^{-f(x)} dV &< A \int_M e^{\frac{r^2(x)}{4}-f(x)} dV < A \int_M e^{\frac{r^2(x)}{4} + \frac{cr(x)}{2} - \frac{r^2(x)}{4}} dV \\ &= A \int_M e^{\frac{cr(x)}{2}} dV < A \int_M e^{cr(x)} dV. \end{aligned}$$

Por [7], página 5, temos

$$\int_M (.) dV = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} (.) J(r, \theta) dr d\Theta(\theta), \quad (3-28)$$

onde

$$d\Theta(\theta) = d\theta^1 \wedge d\theta^2 \wedge \dots \wedge d\theta^{n-1}.$$

Denominando $Area(\partial B_{x_0}(r)) = \int_{S^{n-1}} J(r, \theta) d\Theta(\theta)$, onde $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ é a esfera n -dimensional unitária. Daí,

$$\int_M |u(x)| e^{-f(x)} dV < A \int_M e^{cr(x)} dV = A \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} e^{cr} J(r, \theta) dr d\Theta(\theta) = A \frac{c}{c} \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} e^{cr} J(r, \theta) dr d\Theta(\theta).$$

Agora, faça a mudança

$$z = e^{cr},$$

que nos dá

$$dz = ce^{cr} dr.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} A \frac{c}{c} \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} e^{cr} J(r, \theta) dr d\Theta(\theta) &= A \frac{1}{c} \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} c e^{cr} J(r, \theta) dr d\Theta(\theta) \\ &= A \frac{1}{c} \int_1^\infty \int_{S^{n-1}} \bar{J}(z, \theta) dz d\Theta(\theta). \end{aligned}$$

Para um valor do raio suficientemente grande nós temos, pelo Teorema (3.4) e por (2-42), que

$$\int_M |u(x)| e^{-f(x)} dV < A \frac{1}{c} \int_1^\infty \int_{S^{n-1}} \bar{J}(z, \theta) dz d\Theta(\theta) = A \frac{1}{c} \text{Vol}(B_{x_0}(z)) < A \frac{1}{c} C z^n.$$

Daí,

$$\int_M |u(x)| e^{-f(x)} dV < A \frac{1}{c} C z^n. \quad (3-29)$$

Para mostrarmos que

$$\int_M e^{-f} dV < +\infty$$

basta observar que, por (3-27) e (3-29)

$$\begin{aligned} \int_M e^{-f} dV &\leq \int_M e^{\frac{cr(x)}{2} - \frac{r^2(x)}{4}} dV \leq \int_M e^{cr(x)} dV < A \frac{c}{c} \int_M e^{cr(x)} dV \\ &= A \frac{c}{c} \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} e^{cr} J(r, \theta) dr d\Theta(\theta) = A \frac{1}{c} \int_1^\infty \int_{S^{n-1}} \bar{J}(z, \theta) dz d\Theta(\theta) < A \frac{1}{c} C z^n \end{aligned}$$

temos

$$\int_M e^{-f} dV < A \frac{1}{c} C z^n,$$

para um raio suficientemente grande. □

Referências Bibliográficas

- [1] ANDRADE, L. N. D. **Breve Introdução Ao Latex**, volume 2.1. Universidade Federal Da Paraíba- Departamento De Matemática, 2000.
- [2] BENTO, G. D. C. **Gradiente para funções vetoriais e proximal local para funções reais**. COPPE/UFRJ, 2009.
- [3] BOOTHBY, W. M. **An Introduction to Differentiable Manifolds an Geometry Riemannian**. Academic Press, Inc, 2 edition, 1986.
- [4] CAO, H. D. **Recent progress on ricci solitons, to appear in proceedings of 2007 international conference on geometric analysis**. *Taipei 2007*.
- [5] CAO, H. D.; ZHU, X. P. **A complete proof of the poincaré and geometrization conjectures – application of the hamilton-perelman theory of the ricci flow**. *Asian J. Math*, 10:266–287, 2006.
- [6] CAO, H.-D.; ZHOU, D. **On complete gradient shrinking ricci solitons**. *J. Differential Geom*, 85(2):175–186, 2009.
- [7] CARRILLO, J. A.; NI, L. **Sharp logarithmic sobolev inequalities on gradients solitons and applications**. 2009.
- [8] CHAVEL, I. **Riemannian Geometry, A Modern Introduction**. Cambridge University Press, New York, 2 edition, 2006.
- [9] CHEN, B. L. **Strong uniqueness of the ricci flow**. *J. Differential Geom*, 82:363–382, 2009.
- [10] CHOW, B.; LU, P.; NI, L. **Hamilton’s Ricci Flow**. Science Press, China, 2005.
- [11] DO CARMO, M. P. **Geometria Riemanniana**. Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 4 edition, 2008.
- [12] DRIVER, B. K. **Analysis Tools with Applications**. SPIN Springer’s Internal Project Number, 2003.

- [13] EELLS, J. J.; SAMPSON, J. H. **Harmonic mappings of riemannian manifolds.** *Amer. J. Math.*, 86:109–160, 1964.
- [14] FIREY, W. J. **Shapes of worn stones.** *Mathematika*, 21:1–11, 1974.
- [15] FREITAS, B. P. **Métricas conformes e tensores de schouten em espaços de curvatura constante.** *Universidade Federal de Goiás*, 2006.
- [16] HAMILTON, R. S. **Harmonic Maps of Manifolds With Boundary**, volume 471. *Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975.
- [17] HAMILTON, R. S. **Three manifolds with positive ricci curvature.** *J. Differential Geom.*, 17:255–306, 1982.
- [18] HAMILTON, R. S. **The ricci flow on surfaces.** *Contemporary Mathematics*, 71:237–261, 1988.
- [19] LEE, J. M. **Introduction to Smooth Manifolds.** University of Washington, Department of Mathematics, Seattle, WA 98195-4350, 3 edition, 2000.
- [20] MIKHAIL FELDMAN, T. I.; KNOFF, D. **Rotationally symmetric shrinking and expanding gradient kahler-ricci solitons.** *j. Differential Geometry*, 65:169–209, 2003.
- [21] MULLINS, W. W. **Two-dimensional motion of idealized grain boundaries.** *J. Appl. Phys.*, 27:900–904, 1956.
- [22] MUNTEANU, O.; SESUM, N. **On gradient ricci solitons.** *arXiv:0910.1105v1 [math.DG]*, 2009.
- [23] NABER, A. **Noncompact shrinking 4-solitons with nonnegative curvature.** *Crelles Journal*, 2010(645):125–153, 2010.
- [24] O'NEILL, B. **Semi-Riemannian Geometry, With Applications To Relativity.** Academic Press, Inc, Ill Fifth Avenue, New York, New York 10003, 1983.
- [25] PARREIRA, G.; ARAUJO, L. **Sólitos em comunicações Ópticas.** *UFMG — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brazil*, 2004.
- [26] PERELMANN, G. **Ricci flow with surgery on three manifolds.** 2008.
- [27] SHENG, W. **Variation of Arc Length, Energy and Area.** 2000.
- [28] SPIVAK, M. **Comprehensive Introduction to Differential Geometry**, volume 2. Inc, Houston, Texas (U.S.A.), 2000.

- [29] THURSTON, W. P. **Three-dimensional manifolds, kleinian groups and hyperbolic geometry.** *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, p. 357–381, 1982.
- [30] VIANA, E. C. **Superfícies regradas mínimas no espaço euclidiano e no espaço de minkowski.** *Universidade Federal da Bahia*, 2005.
- [31] WEI, G.; WYLIE, W. **Comparison geometry for the bakry-emery ricci tensor.** *J. Differential Geom*, 83:337–405, 2009.