



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MARCOS GOMES DA SILVA

**Classificação e Construção de  
Superfícies Mínimas de Translação em  
Formas Espaciais**

Goiânia  
2022



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

## TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

### E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

#### 1. Identificação do material bibliográfico

Dissertação     Tese     Outro\*: \_\_\_\_\_

\*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

**Exemplos:** Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

#### 2. Nome completo do autor

Marcos Gomes da Silva

#### 3. Título do trabalho

Classificação e Construção de Superfícies Mínimas de Translação em Formas Espaciais

#### 4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento  SIM     NÃO<sup>1</sup>

**[1]** Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

**a)** consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);

**b)** novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.

O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

**Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.**



Documento assinado eletronicamente por **Levi Rosa Adriano, Professor do Magistério Superior**, em 16/11/2022, às 14:12, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **MARCOS GOMES DA SILVA, Discente**, em 16/11/2022, às 14:15, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **3297152** e o código CRC **2AF4263E**.

---

MARCOS GOMES DA SILVA

# **Classificação e Construção de Superfícies Mínimas de Translação em Formas Espaciais**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Programa de Pós-Graduação em Matemática.

**Área de concentração:** Geometria.

**Orientador:** Prof. Dr. Levi Rosa Adriano

Goiânia  
2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Silva, Marcos Gomes da  
Classificação e Construção de Superfícies Mínimas de Translação em Formas Espaciais [manuscrito] / Marcos Gomes da Silva. - 2022.  
CVII, 107 f.

Orientador: Prof. Dr. Levi Rosa Adriano.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em Matemática, Goiânia, 2022.  
Bibliografia. Apêndice.

1. Superfície de translação. 2. Superfícies mínimas. 3. Espaço Euclidiano. 4. Classificação. 5. Construção. 6. Espaço Hiperbólico. I. Adriano, Levi Rosa, orient. II. Título.

CDU 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

### ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº 08 da sessão de Defesa de Dissertação de **Marcos Gomes da Silva**, que confere o título de Mestre em Matemática, **na área de Geometria**.

Ao vigésimo sétimo dia do mês de outubro do ano de dois mil e vinte e dois, a partir das dez horas, através de Web Videoconferência, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada "**Classificação e Construção de Superfícies Mínimas de Translação no Espaço Euclidiano**." Os trabalhos foram instalados pelo presidente da banca, Professor Doutor **Levi Rosa Adriano - IME/UFG** com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor **Armando Mauro Vasquez Corro - IME/UFG**, membro titular interno, Professor Doutor **Willian Isao Tokura - DME/UFAC**, membro titular externo e o Professor Doutor **Ronaldo Freire de Lima - DMAT/UFRN**, membro titular externo. Durante a arguição os membros da banca **fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido o candidato **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor **Levi Rosa Adriano - IME/UFG**, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, ao vigésimo sétimo dia do mês de outubro do ano de dois mil e vinte e dois.

#### TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

#### Classificação e Construção de Superfícies Mínimas de Translação em Formas Espaciais



Documento assinado eletronicamente por **Levi Rosa Adriano, Professor do Magistério Superior**, em 27/10/2022, às 17:07, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Willian Isao Tokura, Usuário Externo**, em 27/10/2022, às 17:17, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Armando Mauro Vasquez Corro, Professor do Magistério Superior**, em 31/10/2022, às 10:19, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ronaldo Freire de Lima, Usuário Externo**, em 16/11/2022, às 23:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **3207992** e o código CRC **6A97907E**.

---

**Referência:** Processo nº 23070.051913/2022-80

SEI nº 3207992

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

**Marcos Gomes da Silva**

Graduou-se em matemática na UFG - Universidade Federal de Goiás, em 2012. Durante sua graduação foi monitor no Instituto de Matemática e Estatística, da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Coursou Especialização em Matemática pelo Instituto Federal de Goiás em 2018.

A minha esposa Joyce e meu filho Noah.

---

## Agradecimentos

---

Agradeço a Deus imensamente por ter me concedido saúde, força e sabedoria. Obrigado Senhor por esta grande oportunidade e por ter me guiado até aqui, a qual culminou na elaboração dessa dissertação.

A minha imensa gratidão aos meus pais, Sra. Antônia e Sr. Fidelcino, pelo apoio e incentivo que serviram de alicerce para as minhas realizações.

A minha esposa Joyce, que pelo carinho e pela sua compreensão na minha dedicação a esse projeto. Ao meu filho, Noah, que nasceu durante a realização do curso de mestrado, trazendo muita alegria e sendo minha motivação para elaboração desse trabalho.

Ao professor Dr. Levi Rosa Adriano, obrigado por aceitar a orientação da minha dissertação, pela dedicação, pela disponibilidade e por sempre indicar a direção certa a ser tomada nos momentos de maior dificuldade. Além disso, ter exigido de mim mais do que eu imaginava fazer. Manifesto aqui minha gratidão por compartilhar sua sabedoria, o seu tempo e sua experiência.

À todos os professores, funcionários do IME-UFG e aos amigos do curso de mestrado. Em particular agradeço ao meu amigo Cid Dias pelo apoio e pela parceria de sempre.

Em especial agradeço ao Professor Dr. Rafael López, da Universidade de Granada pelo auxílio com a parte computacional do programa Wolfram Mathematica.

Os únicos princípios que eu aceito, ou necessito, na Física são os da Geometria e da Matemática pura; estes princípios explicam todos os fenômenos naturais, e nos permitirem fazer demonstrações bastante acertadas a respeito deles.

*René Descartes.*

---

## Resumo

---

Silva, Marcos Gomes. **Classificação e Construção de Superfícies Mínimas de Translação em Formas Espaciais**. Goiânia, 2022. 107p. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Matemática, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Uma superfície de translação no espaço Euclidiano é uma superfície gerada pela soma de duas curvas, chamadas geratrizes. Neste trabalho, classificamos as superfícies mínimas de translação de  $\mathbb{R}^3$  e apresentamos um método de construção de exemplos explícitos. Além do plano e da superfície mínima de Scherk, a menos de reparametrizações das curvas geratrizes, as superfícies mínimas de translação são parametrizadas por  $\Psi(s, t) = \alpha(s) + \alpha(t)$  onde  $\alpha$  é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ , sua curvatura  $\kappa$  é uma solução positiva da equação diferencial ordinária  $(y')^2 + y^4 + c_3y^2 + c_1^2y^{-2} + c_1c_2 = 0$  e sua torção é  $\tau(s) = c_1/\kappa(s)^2$ , onde  $c_1 \neq 0$ ,  $c_2$  e  $c_3$  são constantes tais que a equação cúbica  $-\lambda^3 + c_2\lambda^2 - c_3\lambda + c_1 = 0$  possui três raízes reais  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$ . Além disso, no modelo do semiespaço do espaço hiperbólico, isto é,  $\mathbb{R}_+^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z > 0\}$  com a métrica hiperbólica, uma superfície de translação parametrizada por  $z = f(x) + g(y)$  ou  $y = f(x) + g(z)$ , em que  $f$  e  $g$  são funções suaves, provamos que as únicas superfícies mínimas de translação são os planos totalmente geodésicos.

### Palavras-chave

Superfície de translação, superfícies mínimas, espaço Euclidiano, classificação, construção, espaço hiperbólico.

---

## Abstract

---

Silva, Marcos Gomes. **Classification and Construction of Minimal Surfaces of Translation in Space Forms**. Goiânia, 2022. 107p. MSc. Dissertation. Programa de Pós-Graduação em Matemática, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

A translation surface of Euclidean space  $\mathbb{R}^3$  is the sum of two regular curves  $\alpha$  and  $\beta$ , called the generating curves. In this paper we classify the minimal translation surfaces of  $\mathbb{R}^3$  and we give a method of construction of explicit examples. Besides the plane and the minimal surfaces of Scherk type, it is proved that up to reparameterizations of the generating curves, any minimal translation surface is described as  $\Psi(s, t) = \alpha(s) + \alpha(t)$ , where  $\alpha$  is a curve parameterized by arc length  $s$ , its curvature  $\kappa$  is a positive solution of the autonomous ODE  $(y')^2 + y^4 + c_3y^2 + c_1^2y^{-2} + c_1c_2 = 0$  and its torsion is  $\tau(s) = c_1/\kappa(s)^2$ . Here  $c_1 \neq 0$ ,  $c_2$  and  $c_3$  are constants such that the cubic equation  $-\lambda^3 + c_2\lambda^2 - c_3\lambda + c_1 = 0$  has three real roots  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  and  $\lambda_3$ . Furthermore in the half-space model of hyperbolic space, that is,  $\mathbb{R}_+^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z > 0\}$  with the hyperbolic metric, a translation surface that writes as  $z = f(x) + g(y)$  or  $y = f(x) + g(z)$ , where  $f$  and  $g$  are smooth functions, we prove that the only minimal translation surfaces are totally geodesic planes.

### Keywords

Translation surface, minimal surface, Euclidean space, classification, construction, space hyperbolic.

---

# Sumário

---

Lista de Figuras	<b>14</b>
Introdução	<b>15</b>
1 Curvas e Superfícies no $\mathbb{R}^3$	<b>19</b>
1.1 Curvas no Espaço	19
1.2 Superfícies Regulares	21
1.3 Superfícies Mínimas	27
2 Superfícies de Translação	<b>31</b>
2.1 Superfícies Mínimas de Translação	34
2.2 Resultados Auxiliares	37
3 Classificação e Construção de Superfícies Mínimas de Translação	<b>54</b>
4 Superfícies Mínimas de Translação no Espaço Hiperbólico	<b>66</b>
4.1 Noções Básicas de Geometria Riemanniana	66
4.2 Superfícies em espaços localmente flat	72
4.3 Superfície de translação no Espaço Hiperbólico	76
4.3.1 Prova dos Resultados	77
4.3.2 Superfícies do Tipo I	78
4.3.3 Superfícies do tipo II	81
Referências Bibliográficas	<b>85</b>
A Apêndice A	<b>88</b>
A.0.1 Demonstrações e resultados do capítulo 2	88
A.0.2 Demonstrações e resultados do capítulo 3	92
B Resultados Computacionais	<b>97</b>

---

## Lista de Figuras

---

1	Superfície de translação	15
1.1	Catenoide	30
2.1	helicoides	32
2.2	Superfície de Scherk	34
3.1	O Helicoides	65
3.2	Caso $\lambda_1 = -4$ e $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 1$ .	65
3.3	Caso $\lambda_1 = -2$ , $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 1$ .	65
4.1	Variedades diferenciáveis	67

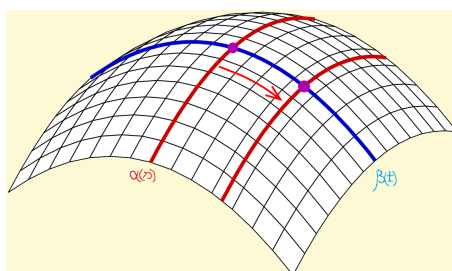
---

## Introdução

---

As superfícies de translação possuem origem no texto clássico de Darboux: [5], onde as chamadas "surface définies pour des propriétés cinématiques" foram estudadas e anos depois na literatura ficaram conhecidas como superfícies de Darboux. Uma superfície de Darboux é definida cinematicamente como o movimento de uma curva por uma família a 1- parâmetro de movimentos rígidos de  $\mathbb{R}^3$ . Desse modo, uma parametrização para tal superfície é dada por  $\Psi(s, t) = A(t)\alpha(s) + \beta(t)$ , em que  $\alpha$  e  $\beta$  são curvas espaciais e  $A(t)$  é uma matriz ortogonal. O caso que estamos investigando aqui é quando  $A(t) = Id$ . De forma mais precisa apresentamos a seguinte definição:

**Definição 0.1** Uma superfície  $S \subset \mathbb{R}^3$  é chamada superfície de translação se  $S$  pode ser parametrizada localmente como soma  $\Psi(s, t) = \alpha(s) + \beta(t)$  de duas curvas espaciais  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $\beta : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ . As curvas  $\alpha$  e  $\beta$  são chamadas de curvas geratrizes de  $S$ . Se  $\alpha$  e  $\beta$  são curvas planas, a superfície é chamada de superfície de translação do tipo planar.



**Figura 1:** Superfície de translação

Darboux lidou com as superfícies de translação nas seções 81 – 84 [5, pp 137 - 142], e esse nome se deve ao fato de que a superfície  $S$  é obtida pela translação da curva  $\alpha$  ao longo da curva  $\beta$  (ou vice - versa, uma vez que os papéis de  $\alpha$  e  $\beta$  podem ser trocados). Em particular, todas as curvas coordenadas  $s = cte$  são congruentes por translação (de maneira análoga para  $t = cte$ ). É natural questionar-se sobre a classificação da superfície de translação de  $\mathbb{R}^3$  sob alguma condição em sua curvatura, seja ela Gaussiana ou média. Recentemente, os autores Thomas Hasanis e Rafael López apresentaram uma classificação completa de todas as superfícies de translação com curvatura Gaussiana  $K$  constante, provando que as únicas superfícies desse tipo são as superfícies cilíndricas e

portanto  $K = 0$ . Para mais detalhes ver [11]. No presente trabalho estamos interessados em classificar todas as superfícies mínimas de translação em  $\mathbb{R}^3$ .

Uma superfície parametrizada regular é chamada mínima se a sua curvatura média é identicamente nula. Naturalmente, o exemplo trivial de superfície mínima de translação é o plano. Uma abordagem para o problema consiste em supor que as curvas geratrizes são curvas planares contidas em planos ortogonais. Nesse caso, após uma escolha apropriada do sistema de coordenadas, a superfície  $S$  é parametrizada localmente por:

$$\Psi(s, t) = (s, 0, f(s)) + (0, t, g(t)) = (s, t, f(s) + g(t)),$$

onde  $f$  e  $g$  são funções suaves. Assim, o problema se transforma em encontrar uma superfície representada pelo gráfico de uma função  $z = f(x) + g(y)$  com curvatura média igual a zero. (Não é difícil perceber que além do plano e um movimento rígido, a solução é conhecida como superfície de Scherk),

$$z = \frac{1}{c} \log \frac{\cos(cy)}{\cos(cx)}, \quad x, y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad (0-1)$$

onde  $c$  é uma constante positiva. Esta superfície foi obtida por Scherk resolvendo a equação mínima por separação de variáveis, ou seja  $z = f(x) + g(y)$  [25]. Na verdade, essa superfície pertence a uma família a 1-parâmetro de superfícies mínimas descobertas por Scherk e dada por

$$S_\theta(x, y) = \left( x + y \cos(\theta), y \sin(\theta), \frac{1}{c} \log \frac{\cos(cy)}{\cos(cx)} \right),$$

onde  $\theta \in \mathbb{R}$  [25], ver também [22, §88]. Para  $\theta = 0$  a superfície  $S_\theta$  é o plano e se  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $S_{\frac{\pi}{2}}$  é a superfície de Scherk. Vale observar que  $S_\theta$  é uma superfície de translação onde as curvas geratrizes são planas, mas não necessariamente contidas em planos ortogonais. Na verdade,  $S_\theta$  pode ser expressa como

$$S_\theta(s, t) = \left( s, 0, -\frac{1}{c} \log(\cos(cs)) \right) + \left( t \cos(\theta), t \sin(\theta), \frac{1}{c} \log(\cos(ct)) \right).$$

A curva  $\alpha$  está contida no plano  $xz$  e a curva  $\beta$  está no plano de equação  $\sin \theta - \cos \theta = 0$  fazendo um ângulo  $\theta$  com o plano  $xz$ .

Outra superfície mínima de translação que já era conhecida pelo matemático Lie é o helicóide, cuja parametrização é dada por  $X(u, v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, u)$ , [22, §77]. Essa superfície pode ser obtida pela soma de uma hélice circular consigo mesma, parametrizada por  $\alpha(s) = \frac{1}{2}(\cos s, \sin s, s)$ . Fazendo uma mudança de coordenada  $s = u + v$  e  $t = u - v$  encontramos  $\Psi(s, t) = \alpha(s) + \alpha(t)$ . De fato, o helicóide pode ser gerado de infinitas maneiras como uma superfície de translação da hélice conforme uma escolha

para sua posição.

Na literatura surgiram diversos trabalhos sobre o estudo de superfícies de translação com curvatura média constante em diversos espaços ambientes. Mais detalhes podem ser consultados em [7, 11, 16, 19, 21] sem ser uma lista completa. Porém, em todas essas obras, a superfície de translação é do tipo planar, assim o problema para encontrar tais superfícies se reduz a resolver uma equação diferencial ordinária por separação de variáveis. Vale ressaltar que foi provado em [7] que se uma curva geratriz é plana, então a outra curva também é plana e a superfície pertence à família de superfície Scherk. A pergunta que cabe fazer agora é: além do plano, o helicóide e a superfície de Scherk existem outras superfícies mínimas de translação no  $\mathbb{R}^3$ ?

Rafael López e Oscar Perdomo consideraram o problema de classificação em toda sua generalidade, ou seja, supondo que as curvas geratrizes são curvas espaciais [17]. Eles provaram que uma curva geratriz é o movimento rígido da outra curva. Nesse caso a superfície pode ser parametrizada por  $\Psi(s, t) = \alpha(s) + \alpha(t)$  e, além disso, eles mostraram que se  $\kappa$  e  $\tau$  são a curvatura e a torção de  $\alpha$  respectivamente, então  $\kappa^2\tau$  é diferente de zero. No entanto, os vetores velocidade  $\alpha'(s)$  devem estar em um cone da forma  $\{x \in \mathbb{R}^3; \langle Ax, x \rangle = 0\}$  onde  $A$  é uma matriz simétrica. Para mais detalhes ver [17].

A primeira parte do nosso trabalho é baseada no artigo de Rafael Lopez e Thomas Hasanis [10], onde os autores apresentaram uma abordagem alternativa para o estudo das superfícies mínimas de translação. Além de obter resultados semelhantes aos obtidos em [17], mostraremos um novo método de construção de superfície mínimas de translação com base na resolução de uma equação diferencial ordinária, que é bem mais simples do que os métodos utilizados em [17]. A vantagem está no fato de fornecer uma técnica por meio de uma fórmula que permite obter uma infinidade de exemplos. A seguir está o principal resultado desse trabalho.

**Teorema 0.2** (*Classificação e Construção*) *Seja  $\Psi(s, t) = \alpha(s) + \beta(t)$  uma superfície mínima de translação em que  $\alpha$  e  $\beta$  são curvas parametrizadas pelo comprimento de arco. Suponha que as curvaturas  $\kappa_\alpha$  e  $\kappa_\beta$  são positivas e as torções  $\tau_\alpha$  e  $\tau_\beta$  são não nulas em toda superfície, então a menos de um movimento rígido, a curva  $\beta$  coincide com a curva  $\alpha$  e*

$$\kappa_\alpha^2 \tau_\alpha = c_1; \quad \frac{1}{\tau_\alpha} \left( \frac{\kappa'_\alpha}{\kappa_\alpha} \right)' + \frac{\kappa_\alpha^2}{\tau_\alpha} - 2\tau_\alpha = c_2, \quad (0-2)$$

em que  $c_1 \neq 0$ , e  $c_2$  são constantes. Além disso  $\kappa_\alpha$  é uma solução positiva da equação diferencial ordinária autônoma

$$y^2 + y^4 + c_3 y^2 + \frac{c_1^2}{y^2} + c_1 \cdot c_2 = 0, \quad (0-3)$$

para alguma constante  $c_3$ , e a curva  $\alpha$  pode ser expressa como

$$\alpha(s) = \left( A \int^s \cos w(s), B \int^s \sin w(s), \int^s \sqrt{1 - A^2 \cos^2 w(s) - B^2 \sin^2 w(s)} \right). \quad (0-4)$$

Aqui  $A = \sqrt{\frac{\lambda_3}{(\lambda_3 - \lambda_1)}}$  e  $B = \sqrt{\frac{\lambda_3}{(\lambda_3 - \lambda_2)}}$ , em que  $\lambda_i, 1 \leq i \leq 3$ , são as raízes da equação cúbica

$$-\lambda^3 + c_2 \lambda^2 - c_3 \lambda + c_1 = 0, \quad (0-5)$$

e a função  $w$  é  $w(s) = \int^s \sqrt{\kappa_\alpha(s) + \lambda_1 \lambda_2}$ .

Reciprocamente, qualquer superfície mínima de translação de  $\mathbb{R}^3$  do tipo não planar é construída por esse processo. Sejam  $c_1 \neq 0$ ,  $c_2$  e  $c_3$  constantes tais que a equação cúbica (0-5) possua três raízes reais  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Seja  $\kappa(s)$  uma solução positiva e não constante de (0-3). Se  $\alpha(s)$  é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco  $s$  com curvatura  $\kappa(s)$  e torção  $\frac{c_1}{\kappa(s)^2}$ , então a superfície de translação  $\Psi(s, t) = \alpha(s) + \alpha(t)$  é mínima.

A segunda parte do nosso trabalho, também é baseada no artigo do Rafael Lopez, onde provou-se que as únicas superfícies mínimas de translação tipo gráfico são os planos totalmente geodésicos [15]. A dissertação está organizada como segue: no primeiro capítulo introduziremos algumas definições básicas da geometria diferencial, como a teoria local das curvas e superfícies planas em  $\mathbb{R}^3$ , conceitos de superfícies mínimas e de superfícies de translação, nosso principal objeto de estudo.

No segundo capítulo provaremos, por uma questão de completude, alguns resultados conhecidos com provas alternativas. Assim, provaremos o resultado de [7] e obtaremos o helicóide quando uma curva geratriz é uma hélice circular. Também caracterizaremos qualquer superfície mínima de translação pelas relações entre a curvatura e a torção das curvas geratrizes.

No terceiro capítulo, mostraremos o principal resultado desse trabalho. Aqui será essencial a definição de um conjunto de operadores lineares auto-adjuntos em  $\mathbb{R}^3$  associados a cada ponto  $\alpha(s)$  e  $\beta(t)$ . Os dois resultados deste capítulo (Teoremas 3.2 e 3.3) classificarão e descreverão a construção de todas as superfícies mínimas de translação em  $\mathbb{R}^3$ . O capítulo termina mostrando exemplos explícitos de superfícies mínimas de translação, pelo procedimento previamente provado.

No quarto capítulo, enunciaremos alguns conceitos e resultados básicos de geometria Riemanniana. Provaremos o teorema que relaciona a curvatura extrínseca da superfície com respeito a métrica Euclidiana e a métrica conformemente flat. Por fim, provaremos que as únicas superfícies mínimas de translação no espaço hiperbólico são os planos totalmente geodésicos.

---

# Curvas e Superfícies no $\mathbb{R}^3$

---

Neste primeiro capítulo, apresentamos os conceitos de curvas e superfícies bem como os resultados que serão necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Mais detalhes poderão ser encontrados em [2].

## 1.1 Curvas no Espaço

Para caracterizarmos os subconjuntos de  $\mathbb{R}^3$  que constituem as curvas, utilizaremos funções diferenciáveis.

**Definição 1.1** Uma curva parametrizada diferenciável de  $\mathbb{R}^3$  é uma aplicação diferenciável  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , onde  $I \subset \mathbb{R}$  é um intervalo aberto.

O subconjunto de  $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^3$  representado pelos pontos da forma  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ , tais que as funções reais  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$  são diferenciáveis  $C^\infty$  e a variável  $t \in I$ , são respectivamente, o traço e o parâmetro da curva  $\alpha$ .

**Definição 1.2** O vetor  $\alpha'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \in \mathbb{R}^3$  é denominado vetor tangente (ou vetor velocidade) da curva  $\alpha(t)$  em  $t$ , onde  $x'(t)$ ,  $y'(t)$  e  $z'(t)$  denotam as derivadas primeiras das funções  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$  em um ponto  $t \in I$ .

**Definição 1.3** Uma curva parametrizada diferenciável  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  chama-se curva *regular* quando  $\alpha'(t) \neq 0$  para todo  $t \in I$ .

Sejam  $I$  e  $J$  intervalos abertos de  $\mathbb{R}$ ,  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular e  $h : J \rightarrow I$  uma função diferenciável tal que  $h'(s) \neq 0$ , para todo  $s \in J$ , e  $h(J) = I$ .

**Definição 1.4** A reparametrização de  $\alpha$  por  $h$  é uma curva regular dada pela função composta

$$\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

onde a função  $h$  é denominada mudança de parâmetro.

A aplicação  $s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt$  é denominada função comprimento de arco da curva  $\alpha$  a partir de  $t_0$ . Além disso, a aplicação  $s(t)$  é de classe  $C^\infty$ , pois  $\alpha$  é uma curva regular.

**Definição 1.5** Uma curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é dita parametrizada por comprimento de arco quando para cada  $t_0, t_1 \in I$ , com  $t_0 \leq t_1$ , o comprimento de arco da curva  $\alpha$  de  $t_0$  a  $t_1$  é igual a  $t_1 - t_0$ . Isto é,

$$\int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(t)| dt = t_1 - t_0, \quad (1-1)$$

onde  $|\alpha'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$  é o comprimento do vetor  $\alpha'(t)$ .

**Proposição 1.6** Uma curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é dita parametrizada por comprimento de arco se, e somente se, para todo  $t \in I$ , tem-se que  $|\alpha'(t)| = 1$ .

A proposição seguinte nos diz que toda curva regular pode ser reparametrizada por comprimento de arco.

**Proposição 1.7** Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular e  $s : I \rightarrow s(I) \subset \mathbb{R}$  a função comprimento de arco de  $\alpha$  a partir de  $t_0$ . Então existe a função inversa  $h$  de  $s$ , definida no intervalo aberto  $J = s(I)$  e  $\beta = \alpha \circ h$  é uma reparametrização de  $\alpha$ , onde  $\beta$  está parametrizada por comprimento de arco.

A aplicação  $\beta$ , dessa proposição, é denominada reparametrização de  $\alpha$  pelo comprimento de arco.

Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco  $s \in I$ . O número  $|\alpha''(s)| = k(s)$  denomina-se curvatura de  $\alpha$  em  $s$ . Quando  $k(s) \neq 0$ , os vetores  $n(s) = \frac{\alpha''(s)}{k(s)}$  e  $b(s) = t(s) \times n(s)$ , em que  $t(s) = \alpha'(s)$ , denominam-se normal e binormal, respectivamente, de  $\alpha$  em  $s$ . Observamos que  $b'(s)$  é paralelo a  $n(s)$ . De fato, derivando  $b(s) = t(s) \times n(s)$ , obtemos

$$\begin{aligned} b'(s) &= t'(s) \times n(s) + t(s) \times n'(s) \\ &= t(s) \times n'(s). \end{aligned}$$

Portanto,  $b'(s)$  é ortogonal a  $t(s)$ . Como  $|b(s)| = 1$ , temos que  $b'(s)$  é ortogonal a  $b(s)$ . Donde concluímos que  $b'(s)$  é paralelo a  $n(s)$ , isto é,  $b'(s)$  é igual ao produto de  $n(s)$  por um número real.

**Definição 1.8** O número real  $\tau$  definido por  $b'(s) = \tau(s)n(s)$  é denominado torção da curva  $\alpha$  em  $s$ .

Os vetores  $t(s)$ ,  $n(s)$  e  $b(s)$  constituem uma base ortonormal orientada e móvel ao longo de  $\alpha$ , chamada o *triedro de Frenet*  $\mathbb{R}^3$  e satisfazem as equações

$$\begin{cases} t'(s) = k(s)n(s) \\ n'(s) = -k(s)t(s) + \tau(s)b(s) \\ b'(s) = -\tau(s)n(s) \end{cases} \quad (1-2)$$

chamadas fórmulas de Frenet.

O teorema seguinte, também conhecido como teorema fundamental das curvas, afirma que uma curva regular em  $\mathbb{R}^3$  tem seu comportamento local completamente descrito quando conhecemos os valores de  $\tau$  e  $k$ .

**Teorema 1.9** *Dadas as funções diferenciáveis  $k(s) > 0$  e  $\tau(s)$ , com  $s \in I \subset \mathbb{R}$ , existe a menos de movimentos rígidos, uma única curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ , onde  $k(s)$  e  $\tau(s)$  são a curvatura e a torção, respectivamente, de  $\alpha$ .*

**Observação 1** Um movimento rígido em  $\mathbb{R}^3$  é o resultado da composição de uma translação com uma transformação ortogonal de determinante positivo (isso quer dizer que o movimento rígido preserva a orientação).

## 1.2 Superfícies Regulares

Nesta seção introduziremos brevemente as superfícies regulares. Para isso, adotaremos um sistema de coordenadas cartesianas  $x, y, z$  de  $\mathbb{R}^3$  e consideraremos uma aplicação  $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  nas variáveis  $u$  e  $v$  de um aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Para cada  $(u, v) \in U$ ,  $X(u, v)$  determina um ponto de  $\mathbb{R}^3$ .

**Definição 1.10** Diz-se que um subconjunto  $S$  de  $\mathbb{R}^3$  é uma superfície regular quando for possível, na vizinhança  $V$  de cada ponto  $p \in S$ , definir uma aplicação  $X : U \rightarrow V \cap S$ , onde  $U$  é um aberto de  $\mathbb{R}^2$  e  $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ , tal que

1.  $X$  é diferenciável. Isto significa que suas funções coordenadas têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens no aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$ .
2.  $X$  é um homeomorfismo. Com isso, queremos dizer que  $X$  é contínua e que sua inversa  $X^{-1} : V \cap S \rightarrow U$  é, também, contínua.
3. Para todo  $q \in U$ , a diferencial  $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é injetiva.

Nessa definição, a palavra diferenciável significa, no contexto da geometria diferencial, que a aplicação  $X$  é infinitamente diferenciável (classe  $C^\infty$ ). A aplicação  $X$  e a vizinhança  $V \cap S$  são denominadas, respectivamente, de parametrização e vizinhança coordenada.

**Definição 1.11** Seja  $S$  uma superfície regular, com parametrização  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ , e um ponto  $p \in S$ . Dizemos que um vetor  $w \in \mathbb{R}^3$  é um vetor tangente a  $S$  em  $p$ , quando  $w = \alpha'(t_0)$ , onde  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$  é uma curva sobre  $S$ , tal que  $X(u(t_0), v(t_0)) = p$ .

Sejam as coordenadas  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  e  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , dado um ponto  $q = (u_0, v_0)$ , a matriz

$$JX_q = \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix}$$

é a matriz jacobiana da aplicação  $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  em relação às bases canônicas de  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ .

Considere uma superfície regular  $S$  com parametrização dada por  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ . Para todo  $p \in S$ , a condição 3 na Definição (1.10), sugere a existência de um plano tangente às curvas coordenadas de  $S$ , que passam por  $p$ . A proposição seguinte mostra que isso de fato acontece.

**Proposição 1.12** O subespaço vetorial  $dX_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$  de dimensão dois coincide com o conjunto de vetores tangentes a  $S$  em  $X_q$  para qualquer  $q \in U$ , onde  $S$  é uma superfície regular com parametrização  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ .

Chamaremos o conjunto de vetores tangentes, determinado pela Prop. 1.12, de plano tangente a  $S$  em  $p$ , denotado por  $T_p S$ , cuja base associada em relação à parametrização  $X$  é dada por  $\{X_u, X_v\}$ .

**Definição 1.13** Seja  $S$  uma superfície regular em  $\mathbb{R}^3$ . A cada plano tangente  $T_p S$  está associado um par de vetores unitários, em  $\mathbb{R}^3$ , e normais a  $T_p S$ ; denominados de vetores normais unitários em  $p$ . A reta que passa por  $p$  na direção de um desses vetores normais unitários é chamada a reta normal em  $p$ .

Para o tratamento de problemas que envolvam noções de métrica e deslocamento sobre uma superfície regular temos as seguintes definições.

**Definição 1.14** Seja uma superfície regular  $S \subset \mathbb{R}^3$  com parametrização  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ , onde  $U$  é um aberto de  $\mathbb{R}^2$ . Denominamos a forma quadrática

$$\begin{aligned} I_p : T_p S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\longmapsto I_p(w) = \langle w, w \rangle \end{aligned} \tag{1-3}$$

de primeira forma fundamental da superfície  $S$  no ponto  $p \in S$ .

A igualdade em (1-3), da primeira forma fundamental, é a maneira pela qual o produto interno natural de  $\mathbb{R}^3$  é herdado por uma superfície regular  $S$ . Além disso, em relação à base  $\{X_u, X_v\}$  de  $T_p S$ , podemos escrever a igualdade em (1-3) como

$$I_p(w) = E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2, \quad (1-4)$$

onde as funções

$$E(u, v) = \langle X_u, X_u \rangle, F(u, v) = \langle X_u, X_v \rangle, G(u, v) = \langle X_v, X_v \rangle$$

diferenciáveis, na vizinhança coordenada correspondente à  $X(u, v)$ , são os coeficientes da primeira forma fundamental.

A fim de determinarmos vetores normais e unitários em cada ponto  $q$  de uma superfície regular  $S$ , note que  $\{X_u, X_v\}$  formam uma base para o plano tangente  $T_p S$ . Então para todo ponto  $q \in X(U) \subset S$ , podemos encontrar um vetor normal unitário a  $T_p S$ , dado por:

$$N(q) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}$$

**Definição 1.15** Seja  $V \subset S$  um aberto de  $S$ . Uma aplicação diferenciável  $N : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  a qual cumpre  $\langle N, N \rangle = 1$  é dita um campo diferenciável normal e unitário por  $V$

**Definição 1.16** Uma superfície regular  $S$  é dita orientável quando pode ser coberta por uma família de vizinhanças coordenadas, de tal forma que se um ponto  $q \in S$  pertence a duas vizinhanças dessa família, então a mudança de coordenadas tem Jacobiano positivo em  $q$ . A escolha de uma tal família é chamada uma orientação de  $S$  e, neste caso, dizemos que a superfície  $S$  é orientada.

Convém chamar de campo diferenciável de vetores normais em um aberto  $U \subset S$  a uma aplicação diferenciável  $N : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  que associa a  $q \in U$  um vetor normal e unitário  $N(q) \in \mathbb{R}^3$  a  $S$  em  $q$ .

**Proposição 1.17** Uma superfície regular  $S \subset \mathbb{R}^3$  é orientável se, e somente se, existe um campo diferenciável  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  de vetores normais em  $S$ .

Uma superfície regular  $S$  que admite um campo diferenciável de vetores normais unitários definido em sua totalidade é orientável. A escolha de um campo  $N$  determina uma orientação para  $S$ .

**Definição 1.18** Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície com uma orientação  $N$ . A aplicação  $N : S \rightarrow S^2$  é denominada aplicação de Gauss, onde

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

é a esfera unitária.

Essa definição quer dizer que a aplicação normal de Gauss é a translação da origem do campo  $N$  para a origem de  $\mathbb{R}^3$ , ou seja,  $N(q)$  é o ponto final da translação do vetor normal em  $q$ .

**Proposição 1.19** *A diferencial  $dN : T_p S \rightarrow T_p S$  da aplicação de Gauss é linear e auto-adjunta.*

**Definição 1.20** A forma quadrática  $II_p$ , definida em  $T_p S$  por

$$II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle \quad (1-5)$$

é chamada de segunda forma fundamental de  $S$  em  $p$ .

Considere uma superfície  $S$  com parametrização em  $p \in S$  dada por

$$\begin{aligned} X : U \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow S \\ (u, v) &\longmapsto X(u, v), \end{aligned} \quad (1-6)$$

e, também, defina a seguinte curva parametrizada em  $S$

$$\begin{aligned} \alpha : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow S \\ t &\longmapsto \alpha(t) = X(u(t), v(t)), \end{aligned} \quad (1-7)$$

com  $\alpha(0) = p$ . Segue que, no ponto  $p$ , a curva  $\alpha(t)$  tem vetor tangente expresso por

$$\alpha' = X_u u' + X_v v' \quad (1-8)$$

e

$$\begin{aligned} dN(\alpha') &= N'(u(t), v(t)) \\ &= N_u u' + N_v v'. \end{aligned} \quad (1-9)$$

Em relação à base  $\{X_u, X_v\}$ , escrevemos a expressão da segunda forma fundamental da seguinte maneira

$$\begin{aligned} II_p(\alpha') &= -\langle dN(\alpha'), \alpha' \rangle \\ &= -\langle N_u u' + N_v v', X_u u' + X_v v' \rangle \\ &= -\langle N_u, X_u \rangle (u')^2 - (\langle N_u, X_v \rangle + \langle N_v, X_u \rangle) u' v' - \langle N_v, X_v \rangle (v')^2, \end{aligned}$$

como,  $\langle N, X_u \rangle = \langle N, X_v \rangle = 0$ , derivando em relação a  $u$  e  $v$ , obtemos  $e = -\langle N_u, X_u \rangle$ ,  $f = \langle N_u, X_v \rangle = -\langle N_v, X_u \rangle$  e  $g = -\langle N_v, X_v \rangle$ . Então, podemos escrever

$$II_p(\alpha') = e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2,$$

onde  $e = e(u, v)$ ,  $f = f(u, v)$  e  $g = g(u, v)$  são funções diferenciáveis e chamados os coeficientes da segunda forma fundamental.

**Proposição 1.21** A matriz da aplicação  $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$  na direção de um vetor  $w \in T_pS$ , em relação à base  $\{X_u, X_v\}$  de  $T_pS$ , é dada por

$$dN = \begin{bmatrix} \frac{fF - eG}{EG - F^2} & \frac{gF - fG}{EG - F^2} \\ \frac{eF - fE}{EG - F^2} & \frac{fF - gE}{EG - F^2} \end{bmatrix},$$

onde " $E, F, G$ " e " $e, f, g$ " são, respectivamente, os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais de  $S$  em  $p$ .

Considere uma curva regular  $C$  com vetor normal  $n$ , contida na superfície regular  $S$  com vetor normal  $N$  em  $p$ , que passa pelo ponto  $p \in S$ , onde  $k$  é sua curvatura e  $\cos \theta = \langle n, N \rangle$ .

**Definição 1.22** Seja  $S$  uma superfície parametrizada regular e  $p \in S$ . A função curvatura normal em  $p$  é uma aplicação  $k_n : T_pS \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  que associa, para cada vetor  $w \in T_pS \setminus \{0\}$ , um número

$$k_n(w) = \frac{II_p(w)}{I_p(w)}.$$

Segue dessa definição que: se  $w \in T_pS \setminus \{0\}$ , então  $k_n(\lambda w) = k_n(w)$  para todo  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  em  $p$ . De fato, seja  $w = aX_u + bX_v$ , onde  $(a, b) \neq (0, 0)$ . Denotando por  $e, f, g$  os coeficientes da segunda forma fundamental em  $p \in S$ , temos

$$\begin{aligned} k_n(\lambda w) &= \frac{II_p(\lambda w)}{I_p(\lambda w)} \\ &= \frac{a^2e + 2abf + b^2g}{\langle w, w \rangle} \\ &= k_n(w). \end{aligned}$$

O fato acima nos permite falar em *curvatura normal* ao longo de uma dada direção tangente à superfície em  $p$ .

Agora, vejamos a interpretação geométrica da curvatura normal e da segunda forma quadrática. Sejam  $S$  uma superfície regular parametrizada pela aplicação  $X : U \rightarrow S$ ,

definida no aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$ ,  $w$  um vetor unitário de  $T_p S$  e  $\alpha(s) = X(u(s), v(s))$  uma curva regular em  $S$ , parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ , tal que  $N(s)$  é a restrição do vetor normal  $N$  à curva  $\alpha$  e  $\alpha'(s_0) = w$ . Se a curvatura de  $\alpha$  em  $s_0$  é não nula, então

$$\begin{aligned} k_n(w) &= II_p(w) = -\langle dN_p(w), w \rangle \\ &= -\langle N'(s_0), \alpha'(s_0) \rangle = \langle N(s_0), \alpha''(s_0) \rangle \\ &= \langle N(u(s_0), v(s_0)), \alpha''(s_0) \rangle \\ &= k(s_0) \langle N(u(s_0), v(s_0)), n(s_0) \rangle \\ &= k(s_0) \cos \theta, \end{aligned} \tag{1-10}$$

onde  $n(s_0)$  é o vetor normal a  $\alpha$  em  $s_0$ ,  $\theta$  o ângulo formado pelos vetores  $n(s_0)$  e  $N(s_0)$  e,  $k(s_0) \neq 0$  é a curvatura normal de  $\alpha$ . Isso significa que  $k_n$  é o comprimento da projeção do vetor aceleração na direção do vetor normal  $N$  em  $p$ , com um sinal dada pela orientação  $N$  de  $S$  em  $p$ .

Como  $II_p(w)$  e  $k_n(w)$  não dependem da curva  $\alpha$  escolhida, podemos aplicar a relação (1-10) para a curva mais conveniente formada pela interseção do plano normal com a superfície  $S$ . Esta curva é denominada secção normal de  $S$  em  $p$  segundo o vetor unitário  $w \in T_p S$ , que é obtida pela interseção de  $S$ , em uma vizinhança de  $p$ , com o plano contendo os vetores  $w$  e  $N(p)$ . Nestas condições, a secção normal é uma curva regular plana definida por  $\alpha(s) = X(u(s), v(s))$ , parametrizada pelo comprimento de arco, tal que  $\alpha(s_0) = p$  e  $\alpha'(s_0) = w$ . Se  $k(s_0) = 0$ , isto é,  $\alpha''(s_0) = 0$ , então  $k_n(w) = II_p(w) = 0$ . Se  $k(s_0) > 0$ , então o vetor normal  $n(s_0) = \pm N(p)$  e, portanto, segue de (1-10) que

$$k_n(w) = II_p(w) = \pm k(s_0).$$

Portanto, concluímos que, se  $w$  é um vetor unitário tangente à superfície em  $p$ , então  $|k_n(w)|$  é igual à curvatura da secção normal de  $S$  no ponto  $p$ , segundo  $w = \alpha'(s_0)$ .

**Proposição 1.23** *Sejam  $p \in S$  um ponto de uma superfície regular  $S$  e  $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ . A derivada da aplicação linear de Gauss de  $S$  em  $p$ . Então, existe uma base ortonormal  $\{e_1, e_2\}$  de  $T_p S$  tal que  $dN_p(e_1) = -k_1 e_1$  e  $dN_p(e_2) = -k_2 e_2$ . Na base  $\{e_1, e_2\}$ , a matriz de  $dN_p$  é diagonal e os termos  $k_1$  e  $k_2$  ( $k_1 \geq k_2$ ) da diagonal são, respectivamente, o máximo e o mínimo da forma quadrática  $II_p(w) : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$  quando restrita ao círculo unitário em  $T_p S$ .*

Na verdade, a Proposição 1.23 mostra que os números  $k_1$  e  $k_2$ , autovalores de  $dN_p$ , são os valores extremos da curvatura normal  $k_n$  em  $p$ . Além disso, a matriz

$$\begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{bmatrix} \tag{1-11}$$

é a matriz diagonal de  $dN_p$ .

**Definição 1.24** Sejam  $k_1$  e  $k_2 : S \rightarrow \mathbb{R}$ . as curvaturas principais de uma superfície regular  $S$ . As funções curvaturas Gaussiana e média de  $S$  em  $p$  são, respectivamente, os números

$$K = k_1 k_2 \quad \text{e} \quad H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

Já que o determinante e o traço da matriz (1-11) não dependem da base escolhida, utilizando a Prop. 1.21, para as curvaturas Gaussiana e Média, temos:

$$K = \det dN = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \frac{fF - eG}{EG - F^2} & \frac{gF - fG}{EG - F^2} \\ \frac{eF - fE}{EG - F^2} & \frac{fF - gE}{EG - F^2} \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}. \quad (1-12)$$

Assim,

$$H = -\frac{\text{traço}(dN)}{2} = -\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}).$$

Como já obtivemos os valores de  $a_{11}$  e  $a_{22}$ ,

$$H = -\frac{1}{2} \left( \frac{fF - eG}{EG - F^2} + \frac{fF - gE}{EG - F^2} \right) = -\frac{1}{2} \left( \frac{2fF - eG - gE}{EG - F^2} \right),$$

ou seja,

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}. \quad (1-13)$$

É importante ressaltar que uma superfície que é dada como gráfico de uma função,  $h = h(x, y)$ ,  $(x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2$  possui a curvatura Gaussiana e média dada respectivamente por

$$K = \frac{h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^2}, \quad (1-14)$$

$$H = \frac{1}{2} \frac{(1 + h_x^2)h_{yy} - 2h_x h_y h_{xy} + (1 + h_y^2)h_{xx}}{(1 + h_x^2 + h_y^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (1-15)$$

Para mais detalhes consultar seção 3.3 de [2].

### 1.3 Superfícies Mínimas

Uma superfície parametrizada regular é chamada mínima se a sua curvatura média é identicamente nula. Uma superfície regular  $S \subset \mathbb{R}^3$  é mínima se cada uma das

suas parametrizações é mínima.

Para explicar a razão de usarmos a palavra mínima para tais superfícies, precisamos introduzir a noção de variação. Seja  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada regular. Escolha um domínio limitado  $D \subset U$  e uma função diferenciável  $h : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $\bar{D}$  é a união do domínio  $D$  e sua fronteira  $\partial D$ . A variação normal de  $\mathbf{x}(\bar{D})$ , determinada por  $h$ , é a aplicação dada por,

$$\varphi : \bar{D} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\varphi(u, v, t) = \mathbf{x}(u, v) + th(u, v)N(u, v), \quad (u, v) \in \bar{D}, t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Para cada  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  fixado, a aplicação  $\mathbf{x}^t : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\mathbf{x}^t(u, v) = \varphi(u, v, t),$$

é uma superfície parametrizada com

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{x}^t}{\partial u} &= \mathbf{x}_u + thN_u + th_uN, \\ \frac{\partial \mathbf{x}^t}{\partial v} &= \mathbf{x}_v + thN_v + th_vN. \end{aligned}$$

Assim, denotamos por  $E^t$ ,  $F^t$ ,  $G^t$  os coeficientes da primeira forma fundamental de  $\mathbf{x}^t$ , obtemos

$$\begin{aligned} E^t &= E + th(\langle \mathbf{x}_u, N_u \rangle + \langle \mathbf{x}_u, N_u \rangle) + t^2 h^2 \langle N_u, N_u \rangle + t^2 h_u h_u, \\ F^t &= F + th(\langle \mathbf{x}_u, N_v \rangle + \langle \mathbf{x}_v, N_u \rangle) + t^2 h^2 \langle N_u, N_v \rangle + t^2 h_u h_v, \\ G^t &= G + th(\langle \mathbf{x}_v, N_v \rangle + \langle \mathbf{x}_v, N_v \rangle) + t^2 h^2 \langle N_v, N_v \rangle + t^2 h_v h_v. \end{aligned}$$

Utilizando o fato de que

$$\langle \mathbf{x}_u, N_u \rangle = -e, \quad \langle \mathbf{x}_u, N_v \rangle + \langle \mathbf{x}_v, N_u \rangle = -2f, \quad \langle \mathbf{x}_v, N_v \rangle = -g,$$

e que a curvatura média  $H$  é dada por (1-13)

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2},$$

obtemos

$$E^t G^t - (F^t)^2 = EG - F^2 - 2th(eg - 2ff + ge) + R = (EG - F^2)(1 - 4thH) + R,$$

onde  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{R}{t} = 0$ .

Segue-se que se  $\varepsilon$  é suficiente pequeno,  $\mathbf{x}^t$  é uma superfície parametrizada regular. Além disso, área  $A(t)$  de  $x^t(\bar{D})$  é

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_{\bar{D}} \sqrt{E^t G^t - (F^t)^2} du dv \\ &= \int_{\bar{D}} \sqrt{1 - 4thH + \bar{R}} \sqrt{EG - F^2} du dv, \end{aligned}$$

onde  $\bar{R} = \frac{R}{EG - F^2}$ . Assim, se  $\varepsilon$  é pequeno,  $A$  é uma função diferenciável e a sua derivada em  $t = 0$  é

$$A'(0) = - \int_{\bar{D}} 2hH \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Estamos agora preparados para justificar o uso da palavra mínima em conexão com as superfícies com curvatura média nula.

**Proposição 1.25** *Seja  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada regular e seja  $D \subset U$  um domínio limitado em  $U$ . Então  $x$  é mínima se, e somente se,  $A'(0) = 0$  para todo domínio  $D$  e toda variação normal de  $\mathbf{x}(\bar{D})$ .*

*Demonstração.* Se  $\mathbf{x}$  é mínima,  $H = 0$  e é claro que a condição é satisfeita. Reciprocamente, suponha que a condição é satisfeita e que  $H(q) \neq 0$  para algum  $q \in D$ . Escolha  $h : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $h(q) = H(q)$ ,  $hH > 0$ , e  $h$  seja identicamente nula fora de uma pequena vizinhança de  $q$ . Então  $A'(0) < 0$  para a variação determinada por essa função  $h$ , o que é uma contradição.  $\square$

Assim, qualquer região limitada  $x(\bar{D})$  de uma superfície mínima é um ponto crítico para a função área de qualquer variação normal de  $\mathbf{x}(\bar{D})$ . Deve-se notar que este ponto crítico pode não ser um mínimo e que isso faz a palavra mínima parecer um pouco estranha. No entanto, esta terminologia é consagrada pelo tempo, tendo sido introduzida por Lagrange (que foi o primeiro a definir uma superfície mínima em 1760).

As superfícies mínimas são geralmente associadas às películas de sabão, que podem ser obtidas mergulhando uma moldura formada por um arame em uma solução de sabão e retirando-a em seguida com cuidado. Se o experimento for bem executado, obtém-se uma película de sabão que tem o arame como fronteira. Pode-se mostrar, por considerações físicas, que a película assume a posição onde, em seus pontos regulares, a curvatura média é zero.

Deve-se notar que nem toda película de sabão é uma superfície mínima, de acordo com a nossa definição. Fizemos a suposição de que as superfícies mínimas são regulares (poderíamos ter admitido alguns pontos singulares isolados, mas ir além disto faria com que o tratamento ficasse muito menos elementar). Entretanto, podem-se

formar películas de sabão, por exemplo, usando um arame em forma de cubo, que tem singularidade ao longo de retas.

A conexão entre superfícies mínimas e películas de sabão motivou o famoso Problema de Plateau (Plateau foi um físico belga que realizou cuidadosos experimentos com películas de sabão por volta de 1850). O problema pode ser, a grosso modo, descrito da seguinte maneira: provar que para cada curva fechada  $C \subset \mathbb{R}^3$  existe uma superfície  $S$  de área mínima tendo  $C$  como fronteira. Tornar o problema preciso (quais curvas e superfícies são permitidas e que significa  $C$  ser a fronteira de  $S$ ) é em si uma parte não trivial do problema. Uma versão do problema de Plateau foi resolvida simultaneamente por Douglas e Radó em 1930. Outras versões (e generalizações do problema para dimensões maiores) têm inspirado a criação de entidades matemáticas que incluem objetos semelhantes as películas de sabão.

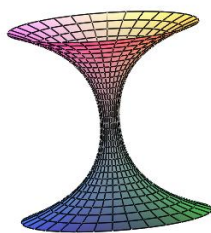
**Exemplo 1.26** Consideremos a catenária

$$\alpha(u) = \left( a \cosh \frac{u}{a}, 0, u \right), \quad u \in \mathbb{R},$$

onde  $a > 0$  é constante. A superfície

$$X(u, v) = \left( a \cosh \left( \frac{u}{a} \right) \cos v, a \cosh \left( \frac{u}{a} \right) \sin v, u \right),$$

$(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , descreve o catenoide, que é obtido pela rotação da catenária  $\alpha$  em torno do eixo  $O_z$ .



**Figura 1.1:** *Catenoide*

**Exemplo 1.27** Seja a parametrização do helicoides dada por

$$x(u, v) = (\cos(v) \cos(u), \cos(v) \sin(u), u).$$

## Superfícies de Translação

Neste capítulo mostraremos que o helicóide e a superfície de Scherk são escritos como soma de duas funções. Enunciaremos e provaremos uma proposição de rigidez que caracteriza a superfície de translação quando uma das curvas é plana, (Proposição 2.6). Provaremos outro resultado de rigidez que caracteriza a superfície quando uma das curvas geratriz é uma hélice e, portanto, a outra curva geratriz é uma hélice e a superfície de translação é o helicóide, (Teorema 2.7). Também caracterizaremos qualquer superfície mínima de translação pelas duas relações (0-2) entre a curvatura e a torção das curvas geratrizes. Além disso, mostraremos o resultado em que as curvaturas são soluções positivas de uma equação diferencial ordinária autônoma, bem como sua recíproca, (Proposição 2.9).

**Definição 2.1** Uma superfície  $S \subset \mathbb{R}^3$  é chamada superfície de translação se  $S$  pode ser parametrizada localmente como soma  $\Psi(s, t) = \alpha(s) + \beta(t)$  de duas curvas espaciais  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\beta : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ . As curvas  $\alpha$  e  $\beta$  são chamadas de curvas geratrizes de  $S$ . Se  $\alpha$  e  $\beta$  são curvas planas a superfície é chamada de superfície de translação do tipo planar.

Vejamos alguns exemplos de superfícies de translação.

**Exemplo 2.2** Seja a parametrização do helicóide dada por

$$X(u, v) = (\cos(v) \cos(u), \cos(v) \sin(u), u).$$

Vamos mostrar que essa parametrização é obtida como a soma de duas hélices circulares e, portanto é uma superfície de translação. Note que a parametrização da hélice circular é dado por

$$\alpha(s) = \frac{1}{2}(\cos(s), \sin(s), s).$$

Dessa forma, tomando um segundo parâmetro real  $t$ , podemos considerar a soma

$$\alpha(s) + \alpha(t) = \left( \frac{1}{2}(\cos(s) + \cos(t)), \frac{1}{2}(\sin(s) + \sin(t)), \frac{1}{2}(s + t) \right),$$

aplicando a mudança de coordenada  $u = \frac{1}{2}(s+t)$  e  $v = \frac{1}{2}(s-t)$ , temos que  $u+v = s$  e  $u-v = t$ , logo

$$\alpha(u+v) + \alpha(u-v) = \left( \frac{1}{2}(\cos(u+v) + \cos(u-v)), \frac{1}{2}(\sin(u+v) + \sin(u-v)), u \right).$$

Observe que

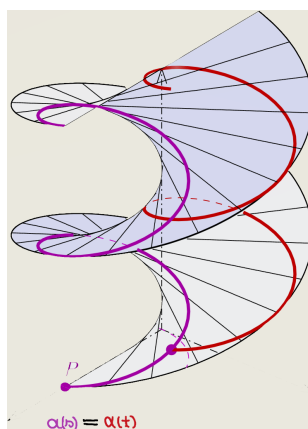
$$\begin{aligned} \cos(u+v) + \cos(u-v) &= \cos(v)\cos(u) - \sin(v)\sin(u) + \cos(u)\cos(v) + \sin(u)\sin(v) \\ &= 2\cos(u)\cos(v). \end{aligned}$$

De modo análogo, segue

$$\begin{aligned} \sin(u+v) + \sin(u-v) &= \sin(u)\cos(v) + \sin(v)\cos(u) + \sin(u)\cos(v) - \sin(v)\cos(u) \\ &= 2\sin(u)\cos(v), \end{aligned}$$

daí concluímos que

$$\alpha(u+v) + \alpha(u-v) = (\cos(u)\cos(v), \sin(u)\cos(v), u) = X(u, v).$$



**Figura 2.1:** helicóide

**Exemplo 2.3** A superfície de Scherk descoberta em 1835 é um exemplo de superfície mínima de translação e, além disso, é conhecida por ser uma superfície tipo gráfico. Para verificar esse fato, note que podemos usar a parametrização local dada por  $X(x, y) = (x, y, h(x, y))$ , vamos supor uma solução do tipo  $h(x, y) = f(x) + g(y)$  e assim decorre que

$$h_x = f'(x), \quad h_{xx} = f''(x), \quad h_y = g'(y), \quad h_{yy} = g''(y), \quad h_{xy} = 0.$$

Usando a fórmula da curvatura média descrita em (1-15) quando  $H = 0$ , resulta

$$(1 + h_x^2)h_{yy} - 2h_x h_y h_{xy} + (1 + h_y^2)h_{xx} = 0,$$

que é equivalente a

$$\frac{f''(x)}{1 + f'^2(x)} = -\frac{g''(y)}{1 + g'^2(y)}.$$

Como  $x$  e  $y$  são variáveis independentes, cada lado dessa equação é constante. Seja  $c \in \mathbb{R}$  esse valor constante, consideramos aqui o caso em que  $c \neq 0$ , pois do contrário as funções  $f$  e  $g$  seriam lineares e, portanto teríamos uma superfície plana. Logo vamos escrever

$$\frac{f''(x)}{1 + f'^2(x)} = c = -\frac{g''(y)}{1 + g'^2(y)}, \quad \text{para } c \neq 0.$$

Após resolver a integral do primeiro lado da igualdade anterior, temos

$$\arctan(f'(x)) = (cx + m_1),$$

o que implica

$$f'(x) = \tan(cx + m_1).$$

Novamente calculamos a integral, obtemos

$$f(x) = -\frac{1}{c} \log(|\cos(cx) + m_1|) + n_1,$$

observe que  $m_1$  e  $n_1$  são constantes de integrações. De maneira análoga, temos que

$$g(y) = -\frac{1}{c} \log(|\cos(cy) + m_2|) + n_2.$$

As constantes de integrações podem ser consideradas nulas a menos de translação e dessa forma temos que

$$h(x, y) = f(x) + g(y) = \frac{1}{c} (\log(\cos(cy)) - \log(\cos(cx))) = \frac{1}{c} \log \frac{\cos(cy)}{\cos(cx)}.$$

O gráfico de  $h(x, y)$  é conhecido como Superfície Mínima de Scherk como mencionado na introdução desse trabalho.

A seguir vamos definir uma classe de superfícies parametrizadas, que caracterizará as superfícies mínimas de translação, tópico principal deste trabalho.

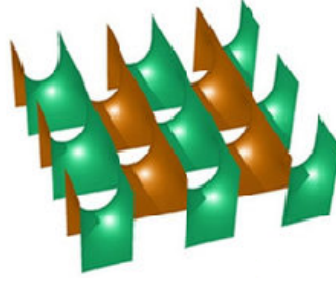


Figura 2.2: Superfície de Scherk

## 2.1 Superfícies Mínimas de Translação

Todas as curvas consideradas aqui são de classe  $C^\infty$ . Sejam  $\alpha(s)$ ,  $s \in I$  e  $\beta(t)$ ,  $t \in J$  duas curvas em  $\mathbb{R}^3$  parametrizadas pelo comprimento de arco com orientação do triedro de Frenet  $\{\mathbf{t}_\alpha(s), \mathbf{n}_\alpha(s), \mathbf{b}_\alpha(s)\}$ ,  $\{\mathbf{t}_\beta(t), \mathbf{n}_\beta(t), \mathbf{b}_\beta(t)\}$  para cada  $s \in I$ ,  $t \in J$  respectivamente. Ao longo desse trabalho  $\kappa_\alpha(s) > 0$  e  $\kappa_\beta(t) > 0$  denotarão as curvaturas de  $\alpha(s)$ , e  $\beta(t)$ , respectivamente, bem como  $\tau_\alpha(s)$  e  $\tau_\beta(t)$  as torções. Seja  $\{\alpha(s) + \beta(t) : s \in I, t \in J\} \subset \mathbb{R}^3$  o conjunto obtido pela soma das curvas  $\alpha$  e  $\beta$ , então  $S$  é uma superfície regular (translação) e  $\Psi(s, t) = \alpha(s) + \beta(t)$  é uma parametrização de  $S$ , se  $\mathbf{t}_\alpha(s) \times \mathbf{t}_\beta(t) \neq 0$  para todo  $(s, t) \in I \times J$ , onde  $\times$  representa o produto vetorial de  $\mathbb{R}^3$ . Recorde que uma curva coordenada  $t = cte$  é congruente a uma translação de  $\alpha(s)$ . Portanto, elas têm a mesma curvatura e torção em cada ponto correspondente. (De modo similar para a curva  $s = cte$ ).

A seguir, vamos calcular a curvatura Gaussiana e a curvatura média de  $S$ . Por conveniência de notação omitimos a dependência de  $s$  e  $t$  das funções que são implicitamente compreendidas. As derivadas de primeira ordem de  $\Psi$  são:  $\Psi_s = \mathbf{t}_\alpha$  e  $\Psi_t = \mathbf{t}_\beta$ , com  $\Psi_s \times \Psi_t \neq 0$ . Seja  $\phi(s, t)$ ,  $0 < \phi(s, t) < \pi$ , o ângulo que  $\mathbf{t}_\alpha(s)$  faz com  $\mathbf{t}_\beta(t)$  no ponto  $\Psi(s, t)$ , que é,  $\cos \phi(s, t) = \langle \mathbf{t}_\alpha(s), \mathbf{t}_\beta(t) \rangle$ , onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  representa o produto escalar usual de  $\mathbb{R}^3$ . Então os coeficientes da 1ª forma fundamental na base  $\{\Psi_s, \Psi_t\}$  são:

$$\begin{aligned} E &= \langle \Psi_s, \Psi_s \rangle = \langle \mathbf{t}_\alpha(s), \mathbf{t}_\alpha(s) \rangle = \|\mathbf{t}_\alpha(s)\| = 1, \\ F &= \langle \Psi_s, \Psi_t \rangle = \langle \mathbf{t}_\alpha(s), \mathbf{t}_\beta(t) \rangle = \cos \phi(s, t), \\ G &= \langle \Psi_t, \Psi_t \rangle = \langle \mathbf{t}_\beta(t), \mathbf{t}_\beta(t) \rangle = \|\mathbf{t}_\beta(t)\| = 1. \end{aligned}$$

O vetor normal e unitário  $N(s, t)$  em  $\phi(s, t)$  é dado por  $N(s, t) = \frac{\mathbf{t}_\alpha(s) \times \mathbf{t}_\beta(t)}{\|\mathbf{t}_\alpha(s) \times \mathbf{t}_\beta(t)\|}$ , mas sabemos que  $\|\mathbf{t}_\alpha(s) \times \mathbf{t}_\beta(t)\| = \|\mathbf{t}_\alpha(s)\| \|\mathbf{t}_\beta(t)\| \sin \phi$ , e uma vez que as curvas  $\alpha$  e  $\beta$  são parametrizadas pelo comprimento de arco, temos

$$N(s, t) = \frac{\mathbf{t}_\alpha(s) \times \mathbf{t}_\beta(t)}{\sin \phi(s, t)}.$$

As derivadas de segunda ordem de  $\Psi$  em relação a  $t$  e  $s$  são dadas por  $\Psi_{ss} = \mathbf{t}'_\alpha = \kappa_\alpha \mathbf{n}_\alpha$ ,  $\Psi_{st} = 0$  e  $\Psi_{tt} = \mathbf{t}'_\beta = \kappa_\beta \mathbf{n}_\beta$ . Os coeficientes da segunda forma fundamental são:

$$\begin{aligned} e &= \langle \Psi_{ss}, N(s, t) \rangle = \frac{1}{\sin \phi} \langle \kappa_\alpha \mathbf{n}_\alpha, \mathbf{t}_\alpha \times \mathbf{t}_\beta \rangle = \frac{-\kappa_\alpha}{\sin \phi} \langle \mathbf{t}_\beta, \mathbf{t}_\alpha \times \mathbf{n}_\alpha \rangle = \frac{-\kappa_\alpha}{\sin \phi} \langle \mathbf{t}_\beta, \mathbf{b}_\alpha \rangle, \\ f &= \langle \Psi_{st}, N(s, t) \rangle = \langle 0, N(s, t) \rangle = 0, \\ g &= \langle \Psi_{tt}, N(s, t) \rangle = \frac{1}{\sin \phi} \langle \kappa_\beta \mathbf{n}_\beta, \mathbf{t}_\alpha \times \mathbf{t}_\beta \rangle = \frac{\kappa_\beta}{\sin \phi} \langle \mathbf{t}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \times \mathbf{n}_\beta \rangle = \frac{\kappa_\beta}{\sin \phi} \langle \mathbf{t}_\alpha, \mathbf{b}_\beta \rangle. \end{aligned}$$

A curvatura Gaussiana  $K$  e a curvatura média  $H$  são dadas por

$$\begin{aligned} K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\frac{\kappa_\alpha \kappa_\beta}{\sin^2 \phi} \langle \mathbf{t}_\beta, \mathbf{b}_\alpha \rangle \langle \mathbf{t}_\alpha, \mathbf{b}_\beta \rangle}{1 - \cos^2 \phi} = \frac{-\kappa_\alpha \kappa_\beta}{\sin^4 \phi} \langle \mathbf{t}_\beta, \mathbf{b}_\alpha \rangle \langle \mathbf{t}_\alpha, \mathbf{b}_\beta \rangle, \\ H &= \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \frac{\frac{-\kappa_\alpha}{\sin \phi} \langle \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \rangle + \frac{\kappa_\beta}{\sin \phi} \langle \mathbf{t}_\alpha, \mathbf{b}_\beta \rangle}{1 - \cos^2 \phi} = \frac{-\kappa_\alpha \langle \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \rangle + \kappa_\beta \langle \mathbf{t}_\alpha, \mathbf{b}_\beta \rangle}{2 \sin^3 \phi}. \end{aligned}$$

Dessa forma, a superfície  $S$  é mínima se, e somente se,

$$\kappa_\alpha \langle \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \rangle = \kappa_\beta \langle \mathbf{t}_\alpha, \mathbf{b}_\beta \rangle, \quad (2-1)$$

para todo  $s \in I, t \in J$ .

**Teorema 2.4** *Se as curvas geratrizes  $\alpha$  e  $\beta$  não são parametrizadas pelo comprimento de arco, então a condição de minimalidade  $H = 0$  é equivalente a*

$$\|\beta'(t)\|^2 \langle \alpha'(s) \times \alpha''(s), \beta'(t) \rangle = \|\alpha'(s)\|^2 \langle \alpha'(s), \beta'(t) \times \beta''(t) \rangle \quad (2-2)$$

para todo  $s \in I, t \in J$ .

*Demonstração.* De fato, como  $\Psi(s, t) = \alpha(s) + \beta(t)$ , temos  $\Psi_s = \alpha'(s)$  e  $\Psi_t = \beta'(t)$ . Dessa forma, os coeficientes da primeira forma fundamental são:

$$\begin{aligned} E &= \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = \|\alpha'(s)\|^2, \\ F &= \langle \alpha'(s), \beta'(t) \rangle = \langle \alpha'(s), \beta'(t) \rangle, \\ G &= \langle \beta'(t), \beta'(t) \rangle = \|\beta'(t)\|^2. \end{aligned}$$

Como o vetor normal é dado por  $N(s, t) = \frac{\alpha'(s) \times \beta'(t)}{\|\alpha'(s) \times \beta'(t)\|}$ , os coeficientes da segunda

forma fundamental são:

$$\begin{aligned} e &= \langle N(s,t), \alpha''(s) \rangle, \\ f &= \langle N(s,t), \vec{0} \rangle = 0, \\ g &= \langle N(s,t), \beta''(t) \rangle. \end{aligned}$$

A curvatura média é nula se, e somente se,  $H = 0$ , isto é,  $2fF - eG - gE = 0$ , o que implica

$$\|\beta'(t)\|^2 \langle \alpha'(s) \times \alpha'', \beta'(t) \rangle = \|\alpha'(s)\|^2 \langle \alpha'(s), \beta'(t) \times \beta''(t) \rangle,$$

conforme queríamos demonstrar.  $\square$

A curva da proposição a seguir será útil posteriormente.

**Proposição 2.5** *Considere a seguinte curva regular*

$$\alpha(u) = \left( u, 0, -\frac{1}{c} \log(\cos(uc)) \right), \quad u \in \left( \frac{-\pi}{2c}, \frac{\pi}{2c} \right), \quad (2-3)$$

em que  $c$  é uma constante positiva, (esta curva é geratriz da superfície de Scherk  $S_{\frac{\pi}{2}}$ ). Sua curvatura, com parâmetro de arco  $s$  é dada por

$$\kappa_{\alpha}(s) = \frac{2ce^{cs}}{1 + e^{2cs}}. \quad (2-4)$$

*Demonstração.* Para verificar isso, note que

$$\begin{aligned} \alpha'(u) &= (1, 0, \tan(uc)), \\ \alpha''(u) &= (0, 0, c \sec^2(uc)). \end{aligned}$$

Observe que  $\|\alpha'(u)\|^2 \neq 1$ , pois  $\sqrt{1 + \tan^2(uc)} \neq 1$ . Sendo assim, a curva  $\alpha(u)$  não está parametrizada pelo comprimento de arco, dessa maneira vamos encontrar a função comprimento de arco  $s$

$$s = \int_0^u \|\alpha'(u)\| du = \int_0^u \sqrt{1 + \tan^2(uc)} du = \int_0^u \frac{1}{\cos(uc)} du = \frac{\log(\tan(uc) + \sec(uc))}{c}.$$

Então a função comprimento de arco é dada por

$$e^{cs} = \tan(uc) + \sec(uc).$$

Como a curva  $\alpha$  não é parametrizada pelo comprimento de arco, sua curvatura é calculada

por

$$\kappa_\alpha(s) = \frac{\|\alpha'(u) \times \alpha''(u)\|}{\|\alpha'(u)\|^3} = \frac{c \sec^2(uc)}{(1 + \tan^2(uc))^{\frac{3}{2}}} = \frac{c \sec^2(uc)}{(\sec^2(uc))^{\frac{3}{2}}} = \frac{c}{\sec(uc)}.$$

Observe que

$$\frac{c}{\sec(uc)} = \frac{2c(\tan(uc) + \sec(uc))}{2\sec(uc)(\tan(uc) + \sec(uc))} = \frac{2c(\tan(uc) + \sec(uc))}{1 + (\tan(uc) + \sec(uc))^2} = \frac{2ce^{cs}}{1 + e^{2cs}},$$

conforme queríamos demonstrar.  $\square$

## 2.2 Resultados Auxiliares

Nesta seção apresentaremos dois resultados que caracterizam as superfícies mínimas de translação. Também mostraremos as relações entre a curvatura e a torção e, além disso, veremos que as curvaturas das curvas geratrizes são soluções positivas de uma classe de equações diferenciais ordinárias.

Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície mínima de translação com parametrização  $\Psi(s, t) = \alpha(s) + \beta(t)$  onde as curvas geratrizes  $\alpha$  e  $\beta$  são parametrizadas pelo comprimento de arco  $s$  e  $t$ .

Tendo em vista as equações de Frenet e tomando a derivada com respeito a  $s$  de (2-1)

$$\begin{aligned} \langle \kappa'_\alpha \mathbf{b}_\alpha + \kappa_\alpha \mathbf{b}'_\alpha, \mathbf{t}_\beta \rangle &= \langle \mathbf{t}'_\alpha, \mathbf{b}_\beta \kappa_\beta \rangle \\ \langle -\kappa_\alpha \tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha + \kappa'_\alpha \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \rangle &= \kappa_\alpha \langle \mathbf{n}_\alpha, \kappa_\beta \mathbf{b}_\beta \rangle, \end{aligned}$$

dividindo a expressão anterior por  $\kappa_\alpha$  resulta que

$$\langle -\tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha + \frac{\kappa'_\alpha}{\kappa_\alpha} \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \rangle = \langle \mathbf{n}_\alpha, \kappa_\beta \mathbf{b}_\beta \rangle. \quad (2-5)$$

Calculando as derivadas de (2-5) com respeito a  $s$  e usando (2-2) temos que

$$\langle -\tau'_\alpha \mathbf{n}_\alpha - \tau_\alpha \mathbf{n}'_\alpha + \left( \frac{\kappa'_\alpha}{\kappa_\alpha} \right)' \mathbf{b}_\alpha + \frac{\kappa'_\alpha}{\kappa_\alpha} \mathbf{b}'_\alpha, \mathbf{t}_\beta \rangle = \langle \mathbf{n}'_\alpha, \kappa_\beta \mathbf{b}_\beta \rangle.$$

Fazendo uso das equações de Frenet na equação anterior, obtemos

$$\langle -\tau'_\alpha \mathbf{n}_\alpha - \tau_\alpha (-\kappa_\alpha \mathbf{t}_\alpha + \tau_\alpha \mathbf{b}_\alpha) + \left( \frac{\kappa'_\alpha}{\kappa_\alpha} \right)' \mathbf{b}_\alpha - \frac{\kappa'_\alpha}{\kappa_\alpha} \tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \rangle = \langle -\kappa_\alpha \mathbf{t}_\alpha + \tau_\alpha \mathbf{b}_\alpha, \kappa_\beta \mathbf{b}_\beta \rangle,$$

ou seja,

$$\langle -\tau'_\alpha \mathbf{n}_\alpha + \tau_\alpha \kappa_\alpha \mathbf{t}_\alpha - \tau_\alpha^2 \mathbf{b}_\alpha + \left( \frac{\kappa'_\alpha}{\kappa_\alpha} \right)' \mathbf{b}_\alpha - \frac{\kappa'_\alpha}{\kappa_\alpha} \tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \rangle = -\kappa_\alpha \langle \mathbf{t}_\alpha, \kappa_\beta \mathbf{b}_\beta \rangle + \tau_\alpha \langle \mathbf{b}_\alpha, \kappa_\beta \mathbf{b}_\beta \rangle.$$

Da condição de minimalidade de (2-1), temos

$$\langle -\tau'_\alpha \mathbf{n}_\alpha + \tau_\alpha \kappa_\alpha \mathbf{t}_\alpha - \tau_\alpha^2 \mathbf{b}_\alpha + \left( \frac{\kappa'_\alpha}{\kappa_\alpha} \right)' \mathbf{b}_\alpha - \frac{\kappa'_\alpha}{\kappa_\alpha} \tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \rangle = -\kappa_\alpha (\kappa_\alpha \langle \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \rangle) + \tau_\alpha \langle \mathbf{b}_\alpha, \kappa_\beta \mathbf{b}_\beta \rangle.$$

Logo,

$$\langle \tau_\alpha \kappa_\alpha \mathbf{t}_\alpha - \left( \frac{\kappa'_\alpha}{\kappa_\alpha} \tau_\alpha + \tau'_\alpha \right) \mathbf{n}_\alpha + \left( \left( \frac{\kappa'_\alpha}{\kappa_\alpha} \right)' + \kappa_\alpha^2 - \tau_\alpha^2 \right) \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \rangle = \tau_\alpha \langle \mathbf{b}_\alpha, \kappa_\beta \mathbf{b}_\beta \rangle. \quad (2-6)$$

De forma análoga, temos o seguinte resultado para a curva  $\beta$

$$\tau_\beta \langle \kappa_\alpha \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{b}_\beta \rangle = \langle \mathbf{t}_\alpha, \kappa_\beta \tau_\beta \mathbf{t}_\beta - \left( \frac{\kappa'_\beta}{\kappa_\beta} \tau_\beta + \tau'_\beta \right) \mathbf{n}_\beta + \left( \left( \frac{\kappa'_\beta}{\kappa_\beta} \right)' + \kappa_\beta^2 - \tau_\beta^2 \right) \mathbf{b}_\beta \rangle. \quad (2-7)$$

Uma vez obtidas as fórmulas acima, e para a completude deste trabalho, mencionamos nesta seção o resultado provado em [7]. Nos quais os autores Hasanis e López, apresentaram uma demonstração alternativa ao resultado provado inicialmente em 1998.

**Proposição 2.6** *Seja  $S$  uma superfície mínima de translação não planar, suponha que uma, digamos  $\alpha$ , das curvas geratrizes seja uma curva plana. Então:*

1) *A curvatura  $\kappa_\alpha$  de  $\alpha$  satisfaz a equação diferencial ordinária autônoma*

$$\left( \frac{y'}{y} \right)' + y^2 = 0. \quad (2-8)$$

2) *A curva  $\alpha$  é um movimento rígido da curva (2-3)*

3) *A outra curva geratriz  $\beta$  também é uma curva plana e  $S$  é uma superfície do Tipo Scherk.*

*Demonstração.*

1) Por hipótese a curva  $\alpha$  é plana então temos que  $\tau_\alpha = 0$ . Por (2-6) temos que  $\left( \left( \frac{\kappa'_\alpha}{\kappa_\alpha} \right)' + \kappa_\alpha^2 \right) \langle \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \rangle = 0$  para quaisquer  $s$  e  $t$ . Se  $\langle \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \rangle = 0$  sobre um conjunto aberto, de (2-1) implica que  $K = 0$ . Uma vez que  $K = H = 0$ , então  $S$  será uma superfície plana, mas isso é uma contradição, pois segue da hipótese que  $S$  é não planar, logo  $\langle \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \rangle \neq 0$ , restando apenas que  $\left( \frac{\kappa'_\alpha}{\kappa_\alpha} \right)' + \kappa_\alpha^2 = 0$ .

2) A solução geral da equação diferencial ordinária autônoma (2-8) é

$$\kappa_{\alpha} = \frac{2ce^{\pm(ct+c_1)}}{1 + e^{\pm 2(ct+c_1)}}.$$

A equação diferencial ordinária autônoma  $\left(\frac{y'}{y}\right)' + y^2 = 0$  é equivalente a

$$y'' - \frac{(y')^2}{y} + y^3 = 0. \quad (2-9)$$

Fazendo uma mudança de variável  $z(y) = (y')^2$ , temos  $\frac{dz}{dy}y' = 2y'y'$ , isto é,  $y'' = \frac{1}{2} \frac{dz}{dy}$ . Dessa forma, a equação diferencial (2-9) torna-se

$$\frac{dz}{dy} - \frac{2}{y}z + 2y^3 = 0. \quad (2-10)$$

Tome o fator integrante  $\rho(z) = e^{\int -\frac{2}{y}dy} = e^{-2\ln(y)} = \frac{1}{y^2}$ . Sendo assim, multiplicamos a equação (2-10) por  $\frac{1}{y^2}$ , isto é,

$$\frac{1}{y^2} \frac{dz}{dy} - 2 \frac{z}{y^3} = -2y,$$

ou seja,

$$\frac{d}{dy} \frac{z(y)}{y^2} = -2y.$$

A integral da equação anterior com relação a  $y$  é  $\frac{z(y)}{y^2} = -y^2 + K$ , ou ainda,

$$z = y^2(K - y^2),$$

onde  $K > 0$  é a constante de integração. Sendo assim calculamos

$$\pm \frac{dy}{dt} = \sqrt{y^2(K - y^2)},$$

como

$$\pm(t + K_1) = \int \frac{1}{\sqrt{y^2(K - y^2)}} dy = -\frac{1}{\sqrt{K}} \cosh^{-1} \left( \frac{\sqrt{K}}{y} \right).$$

Multiplicando a equação anterior por  $-\sqrt{K}$  e considere  $\sqrt{K} = c$ , donde obtemos

$$\pm(ct + c_1) = \cosh^{-1} \left( \frac{c}{y} \right),$$

ou seja,

$$\frac{c}{y} = \cosh(\pm(ct + c_1)).$$

Dessa forma, aplicando a definição de cosseno hiperbólico obtemos

$$\begin{aligned} \frac{c}{y} &= \frac{e^{\pm(ct+c_1)} + e^{\mp(ct+c_1)}}{2} \\ &= \frac{e^{\mp(ct+c_1)}(e^{2\pm(ct+c_1)} + 1)}{2} \\ &= \frac{e^{2\pm(ct+c_1)} + 1}{2e^{\pm(ct+c_1)}}, \end{aligned}$$

e portanto,

$$y = \frac{2ce^{\pm(ct+c_1)}}{1 + e^{\pm 2(ct+c_1)}}.$$

Tomando  $y = \kappa_\alpha(t)$  obtemos o resultado desejado,

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{2ce^{\pm(ct+c_1)}}{1 + e^{\pm 2(ct+c_1)}},$$

em que  $c > 0$  e  $c_1$  são constantes. Após a mudança  $s = \pm(ct + c_1)$ , vemos que a curvatura de  $\alpha$  é a mesma curva em (2-4). Pelo Teorema Fundamental das Curvas Planas, a curva  $\alpha$  é um movimento rígido da curva (2-3).

- 3) Após a ação de um movimento rígido, podemos supor que a curva  $\alpha$  é a curva em (2-3). Já sabemos que a curva  $\alpha$  possui vetor tangente,  $\alpha'(u) = (1, 0, \tan(uc))$ , segunda derivada  $\alpha''(u) = (0, 0, c \sec^2(uc))$  e produto vetorial  $\alpha'(u) \times \alpha''(u) = (0, -\sec^2(uc), 0)$ . Agora vamos considerar  $\beta(v) = (\beta_1(v), \beta_2(v), \beta_3(v))$  onde  $\beta(v)$  será uma outra curva parametrizada pelo comprimento de arco  $v$ , isto é,  $\|\beta'(v)\| = 1$ . Pela condição de minimalidade (2-2) temos que

$$\|\beta'(v)\|^2 \langle \alpha'(u) \times \alpha''(u), \beta'(v) \rangle = \|\alpha'(u)\|^2 \langle \alpha'(u), \beta'(v) \times \beta''(v) \rangle, \quad (2-11)$$

desenvolvendo o lado esquerdo de (2-11) segue que,

$$\|\beta'\|^2 \langle \alpha' \times \alpha'', \beta'(v) \rangle = \langle (0, -c \sec^2(uc), 0), (\beta'_1, \beta'_2, \beta'_3) \rangle = (-c \beta'_2 \sec^2(uc)). \quad (2-12)$$

Desenvolvendo o lado direito de (2-11), isto é,

$$\|\alpha'\|^2 \langle \alpha', \beta' \times \beta'' \rangle = \sec^2(uc) \left( \beta'_2 \beta''_3 - \beta'_3 \beta''_2 + \frac{\sin(uc)}{\cos(uc)} \right) (\beta'_1 \beta''_2 - \beta''_1 \beta'_2). \quad (2-13)$$

Fazendo a igualdade de (2-12) e (2-13) temos que

$$(-c\beta'_2 \sec^2(uc)) = \sec^2(uc) \left( \beta'_2 \beta''_3 - \beta'_3 \beta''_2 + \frac{\sin(uc)}{\cos(uc)} \right) (\beta'_1 \beta''_2 - \beta''_1 \beta'_2).$$

Ou seja,

$$\sin(uc)(\beta'_1 \beta''_2 - \beta''_1 \beta'_2) + (c\beta'_2 + \beta'_2 \beta''_3 - \beta'_3 \beta''_2) \cos(uc) = 0.$$

As funções  $\sin(uc)$  e  $\cos(uc)$  são linearmente independentes, dessa maneira, temos o sistema linear homogêneo formado pelas seguintes equações

$$\begin{cases} \beta'_1 \beta''_2 - \beta''_1 \beta'_2 & = 0 \\ c\beta'_2 + \beta'_2 \beta''_3 - \beta'_3 \beta''_2 & = 0 \end{cases} \quad (2-14)$$

Para estabelecer uma relação entre as derivadas da curva  $\beta$ , multiplicamos a segunda equação de (2-14) por  $\beta'_1$  e utilizando a primeira equação de (2-14) obtemos

$$\beta'_2(\beta''_1 \beta'_3 - c\beta_1 - \beta'_1 \beta''_3) = 0.$$

Se  $\beta'_2 = 0$  resulta que  $\beta_2 = cte$  e a curva  $\beta = (\beta_1, cte, \beta_3)$  é plana. Caso contrário, temos

$$\beta''_1 \beta'_3 = c\beta'_1 + \beta'_1 \beta''_3. \quad (2-15)$$

Agora encontraremos o determinante da matriz

$$(\beta', \beta'', \beta''') = \begin{vmatrix} \beta'_1 & \beta'_2 & \beta'_3 \\ \beta''_1 & \beta''_2 & \beta''_3 \\ \beta'''_1 & \beta'''_2 & \beta'''_3 \end{vmatrix}.$$

Para o cálculo do determinante dessa matriz usaremos a primeira equação em (2-14)

que nos fornece  $\beta'_1\beta''_2 = \beta'''_1\beta'_2$  e isso implica que

$$\begin{aligned}
(\beta', \beta'', \beta''') &= \beta'_1(\beta''_2\beta'''_3 - \beta'''_2\beta''_3) - \beta'_2(\beta'''_1\beta''_3 - \beta'''_1\beta''_3) + \beta'_3(\beta'''_1\beta''_2 - \beta'''_1\beta''_2) \\
&= \beta'_1\beta''_2\beta'''_3 - \beta'_1\beta'''_2\beta''_3 - \beta'_2\beta'''_1\beta''_3 + \beta'_2\beta'''_1\beta''_3 + \beta'_1\beta'''_2\beta''_3 - \beta'_1\beta'''_2\beta''_3 \\
&= \beta'''_1\beta'_2\beta''_3 - \beta'''_1\beta''_2\beta'_3 - \beta'''_2(\beta'_1\beta''_3 - \beta'_1\beta''_3) \\
&= \beta'''_1(\beta'_2\beta''_3 - \beta'_2\beta''_3) - \beta'''_2(\beta'_1\beta''_3 - \beta'_1\beta''_3) \\
&= -\beta'''_1c\beta'_2 - \beta'''_2(\beta'_1\beta''_3 - \beta'_1\beta''_3).
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$(\beta', \beta'', \beta''') = \beta'''_2(-c\beta'_1 + \beta'_1\beta''_3 - \beta'_1\beta''_3). \quad (2-16)$$

Substituindo (2-15) em (2-16) resulta imediatamente que  $(\beta', \beta'', \beta''') = 0$ . Por outro lado, levando em consideração as hipóteses da curva  $\beta$  ser p.c.a. e usando as equações do triedro de Frenet esse mesmo determinante também pode ser calculado da seguinte forma,

$$\begin{aligned}
(\beta', \beta'', \beta''') &= \langle \beta' \times \beta'', \beta''' \rangle \\
&= \langle \mathbf{t}_\beta \times \kappa_\beta \mathbf{n}_\beta, \kappa'_\beta \mathbf{n}_\beta + \kappa \mathbf{n}'_\beta \rangle \\
&= \kappa_\beta \langle \mathbf{b}_\beta, \kappa'_\beta \mathbf{n}_\beta + \kappa \mathbf{n}'_\beta \rangle \\
&= \kappa_\beta \langle \mathbf{b}_\beta, \kappa_\beta (-\kappa_\beta \mathbf{t}_\beta + \tau_\beta \mathbf{b}_\beta) \rangle \\
&= \kappa_\beta^2 \tau_\beta.
\end{aligned}$$

Dessa forma, resulta que  $(\beta', \beta'', \beta''') = \kappa_\beta^2 \tau_\beta = 0$ . Sendo assim, isso implica que  $\tau_\beta = 0$  e  $\beta$  é uma curva plana. Note que de acordo com o item 2 da proposição anterior  $\beta$  é a menos de movimento rígido a curva em (2-3). Agora considere  $\beta(v) = A\sigma(v)$ , em que  $A$  é uma matriz ortogonal de ordem  $3 \times 3$  e  $\sigma(v) = (v, 0, -\frac{1}{d} \log(\cos(dv)))$ , onde  $d$  é uma constante positiva. Agora encontraremos o produto de  $A \cdot \sigma(v)$ , isto é,

$$A\sigma(v) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ -\frac{1}{d} \log(\cos(dv)) \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$A\sigma(v) = \left( a_{11}v - \frac{a_{13}}{d} \log(\cos(dv)), a_{21}v - \frac{a_{23}}{d} \log(\cos(dv)), a_{31}v - \frac{a_{33}}{d} \log(\cos(dv)) \right).$$

O vetor tangente de  $A\sigma(v)$  é dado por

$$A\sigma'(v) = (a_{11} + a_{13} \tan(dv), a_{21} + a_{23} \tan(dv), a_{31} + a_{33} \tan(dv)).$$

A segunda derivada de  $A\sigma(v)$  é dada por

$$A\sigma''(v) = (a_{13}d \sec^2(dv), a_{23}d \sec^2(dv), a_{33}d \sec^2(dv)).$$

O produto vetorial de  $A\sigma'(v)$  com  $A\sigma''(v)$  é dado por

$$A\sigma'(v) \times A\sigma''(v) = -d \sec^2(dv)(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}, a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}, a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}).$$

Como  $A$  é ortogonal e  $\sigma'(v) = (1, 0, \tan(dv))$  temos

$$\|A\sigma'(v)\|^2 = \|\sigma'(v)\|^2 = \frac{1}{\cos^2(dv)}.$$

Aplicando a condição de minimalidade de (2-2) temos

$$\|A\sigma'(v)\|^2 \langle (\alpha'(u) \times \alpha''(u)), A\sigma'(v) \rangle = \|\alpha'(u)\|^2 \langle \alpha'(u), (A\sigma'(v) \times A\sigma''(v)) \rangle. \quad (2-17)$$

Dessa forma, temos que o lado esquerdo de (2-17) resulta em

$$-c \sec^2(dv) \sec^2(uc) (a_{21} + a_{23} \tan(dv)). \quad (2-18)$$

O lado direito de (2-17) resulta em

$$d \sec^2(uc) \sec^2(dv) (a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33} (a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}) \tan(uc)). \quad (2-19)$$

Dessa maneira, igualamos (2-18) e (2-19), e obtemos

$$c(a_{21} + a_{23} \tan(dv)) = d(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33} + (a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}) \tan(uc)).$$

Vale ressaltar que as funções  $\sin(uc)$ ,  $\cos(uc)$ ,  $\sin(dv)$  e  $\cos(dv)$  são linearmente independentes, sendo assim, temos

$$\begin{cases} c(a_{21} + a_{23} \tan(dv)) - d(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) = 0 \\ d(a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}) = 0 \end{cases} \quad (2-20)$$

e conseqüentemente

$$\begin{cases} ca_{23} = 0 \\ ca_{21} - d(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) = 0. \end{cases} \quad (2-21)$$

Desse sistema de equações podemos deduzir que se  $a_{23} = 0$  então segue que  $-da_{13}a_{21} = 0$  e  $ca_{21} + da_{21}a_{33} = 0$ . Usando o fato que a matriz  $A$  é ortogonal, segue que, se  $a_{22} = \pm 1$  não é difícil ver que a curva  $\beta$  está contida no plano  $xz$  o mesmo acontece para a curva  $A\sigma(v)$ . Isso implica que  $S$  é uma superfície plana, contradição. Portanto  $a_{21} \neq 0$  e  $a_{13} = 0$  e  $c = -da_{33}$ . Usando que  $A$  é ortogonal, então  $a_{31} = a_{32} = 0$  e  $a_{33} = \pm 1$ . Em particular, pelo fato de  $c$  e  $d$  serem positivos, temos que  $a_{33} = -1$ . Definitivamente, temos duas possibilidades para a matriz  $A$ , a saber,

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Em ambos os casos, a parametrização  $\Psi(s, t)$  é

$$\begin{aligned} \Psi(s, t) &= \alpha(u) + A\sigma(v) \\ &= \left( u, 0, -\frac{1}{c} \log \cos(uc) \right) + \left( v \cos \theta, v \sin \theta, \frac{1}{c} \log \cos(cv) \right) \\ &= \left( u + v \cos \theta, v \sin \theta, -\frac{1}{c} \log \frac{\cos(cv)}{\cos(uc)} \right), \end{aligned}$$

e, portanto concluímos que  $S$  é a superfície  $S_\theta$  pertencente a família Scherk. □

Recorde que o helicóide é uma superfície mínima de translação obtida como a soma de uma hélice circular consigo mesma. Provaremos que esta é uma consequência do seguinte resultado ver [17, Cor 3.4]

**Teorema 2.7** *Seja  $S$  uma superfície mínima de translação. Se uma das curvas geratrizes é uma hélice circular, então a outra curva é uma hélice circular que é congruente a ela e  $S$  é um helicóide.*

*Demonstração.* Suponha que a curva geratriz  $\alpha$  de  $S$  seja uma hélice circular parametrizada por  $\alpha(s) = (a \cos \varphi(s), a \sin \varphi(s), b\varphi(s))$  onde  $\varphi(s) = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  com  $a > 0$ ,  $b \neq 0$  em

que  $a$  e  $b$  são constantes. Temos que o triedro de Frenet é dado por

$$\begin{aligned}\mathbf{t}_\alpha &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a \sin \varphi(s), a \cos \varphi(s), b\varphi(s)), \\ \mathbf{n}_\alpha &= (-\cos \varphi(s), -\sin \varphi(s), 0), \\ \mathbf{b}_\alpha &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b \sin \varphi(s), -b \cos \varphi(s), a).\end{aligned}$$

Das equações acima obtemos

$$\begin{aligned}\mathbf{t}'_\alpha &= \frac{1}{a^2+b^2}(-a \cos \varphi(s), -a \sin \varphi(s), 0), \\ \kappa_\alpha &= \frac{a}{a^2+b^2}.\end{aligned}$$

Como

$$\mathbf{b}'_\alpha = \frac{b}{a^2+b^2}(\cos \varphi(s), \sin \varphi(s), 0),$$

a torção é dada por

$$\tau_\alpha(s) = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

Agora vamos considerar uma curva  $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t), \beta_3(t))$  parametrizada pelo comprimento de arco  $t$ , então o triedro de Frenet é dado por

$$\begin{aligned}\mathbf{t}_\beta &= \beta'(t) = (\beta'_1, \beta'_2, \beta'_3), \\ \mathbf{n}_\beta &= \frac{\beta''}{\|\beta''\|} = \frac{\beta''}{\|\beta' \times \beta''\|}, \\ \mathbf{b}_\beta &= \frac{1}{\beta' \times \beta''}(\beta' \times \beta'') = \frac{1}{\beta' \times \beta''}((\beta' \times \beta'')_1, (\beta' \times \beta'')_2, (\beta' \times \beta'')_3).\end{aligned}$$

A curvatura  $\kappa_\beta$  da curva  $\beta$  é dada por

$$\kappa_\beta = \|\beta' \times \beta''\|.$$

Aplicando a condição de minimalidade de (2-2), segue imediatamente que,

$$\begin{aligned}\frac{a}{a^2+b^2}(\beta'_1 b \sin \varphi(s) - \beta'_2 b \cos \varphi(s) + a\beta'_3) &= -a(\beta' \times \beta'')_1 \sin \varphi(s) \\ &+ a(\beta' \times \beta'')_2 \cos \varphi(s) + b(\beta' \times \beta'')_3.\end{aligned}$$

Observe que as funções  $\{1, \cos \varphi(s), \sin \varphi(s)\}$  são linearmente independentes e disso

decorre que

$$\begin{cases} \frac{b}{a^2+b^2}\beta'_1 = -(\beta' \times \beta'')_1 = -\beta'_2\beta''_3 + \beta'_3\beta''_2. \\ \frac{b}{a^2+b^2}\beta'_2 = -(\beta' \times \beta'')_2 = -\beta'_3\beta''_1 + \beta'_1\beta''_3. \\ \frac{a^2}{a^2+b^2}\beta'_3 = b(\beta' \times \beta'')_3 = b(\beta'_1\beta''_2 - \beta'_2\beta''_1). \end{cases} \quad (2-22)$$

Multiplicando a primeira linha por  $\beta'_1$  e a segunda linha por  $\beta'_2$  do sistema descrito em (2-22), e realizando a soma temos que

$$\frac{b}{a^2+b^2}(\beta_1'^2 + \beta_2'^2) = \beta_3'(\beta_1'\beta_2'' - \beta_1''\beta_2').$$

Da terceira linha de (2-22), resulta que  $\frac{a^2}{b(a^2+b^2)}\beta_3' = (\beta_1'\beta_2'' - \beta_1''\beta_2')$ , dessa forma, obtemos

$$\frac{b}{a^2+b^2}(\beta_1'^2 + \beta_2'^2) = \frac{a^2}{b(a^2+b^2)}\beta_3'^2.$$

Como  $\beta_1'^2 + \beta_2'^2 = 1 - \beta_3'^2$ , segue que

$$\frac{b}{a^2+b^2}(1 - \beta_3'^2) = \frac{a^2}{b(a^2+b^2)}\beta_3'^2,$$

sendo assim temos que  $\beta_3'^2 = \frac{b^2}{a^2+b^2}$ , assim  $(\beta_1'^2 + \beta_2'^2) = \frac{a^2}{a^2+b^2}$ . Sem perda de generalidade tomamos  $\beta_3' = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ . Então as imagens dos vetores tangentes de  $\alpha$  e  $\beta$  estão no mesmo hemisfério, então devemos ter

$$\beta_1'(t) = -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\varphi(t), \quad \beta_2'(t) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\varphi(t).$$

Dessa maneira, temos o vetor tangente a curva  $\beta$  dado por

$$\beta'(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin\varphi(t), a\cos\varphi(t), b).$$

Portanto, a menos de translação  $\beta(t) = (a\cos\varphi(t), a\sin\varphi(t), b\varphi(t))$  e  $\beta$  coincide com  $\alpha$ . No caso em que  $\beta_3' = -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ , temos um resultado análogo, para isso basta considerar uma reparametrização por  $(-t)$ .  $\square$

Como consequência da Proposição 2.6 de agora em diante vamos supor que as curvas geratrizes  $\alpha$  e  $\beta$  são não planares. Vamos introduzir as seguintes notações. Para uma curva não plana parametrizada pelo comprimento de arco com curvatura  $\kappa$  e torção

$\tau$  escrevemos

$$R = \frac{\kappa'}{\kappa} + \frac{\tau'}{\tau}, \quad \Sigma = \left( \frac{\kappa'}{\kappa} \right)' + \kappa^2 - \tau^2. \quad (2-23)$$

O subscrito  $\alpha$  ou  $\beta$  em  $R$  e  $\Sigma$  será usado para indicar a curva associada. Temos agora o seguinte resultado chave.

**Proposição 2.8** *Se  $\Psi(s, t) = \alpha(s) + \beta(t)$  é uma superfície mínima de translação, então*

$$\kappa_\alpha^2 \tau_\alpha = c_1 \neq 0, \quad \kappa_\beta^2 \tau_\beta = \bar{c}_1 \neq 0, \quad \frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} - \tau_\alpha = c_2, \quad \frac{\Sigma_\beta}{\tau_\beta} - \tau_\beta = \bar{c}_2, \quad (2-24)$$

em que  $c_1, c_2, \bar{c}_1$  e  $\bar{c}_2$  são constantes.

*Demonstração.* Dividindo a equação (2-6) por  $\tau_\alpha$ , temos

$$\left\langle \kappa_\alpha \mathbf{t}_\alpha - \left( \frac{\kappa'_\alpha}{\kappa_\alpha} + \frac{\tau'_\alpha}{\tau_\alpha} \right) \mathbf{n}_\alpha + \left( \left( \frac{\kappa'_\alpha}{\kappa_\alpha} \right)' + \kappa_\alpha^2 - \tau_\alpha^2 \right) \frac{\mathbf{b}_\alpha}{\tau_\alpha}, \mathbf{t}_\beta \right\rangle = \langle \mathbf{b}_\alpha, \kappa_\beta \mathbf{b}_\beta \rangle.$$

Fazendo uso de (2-23), a equação anterior pode ser reescrita como

$$\left\langle \kappa_\alpha \mathbf{t}_\alpha - R_\alpha \mathbf{n}_\alpha + \frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \right\rangle = \langle \mathbf{b}_\alpha, \kappa_\beta \mathbf{b}_\beta \rangle.$$

Derivando a equação anterior com respeito a  $s$ , obtemos

$$\left\langle \kappa'_\alpha \mathbf{t}_\alpha + \kappa_\alpha \mathbf{t}'_\alpha - R'_\alpha \mathbf{n}_\alpha - R_\alpha \mathbf{n}'_\alpha + \left( \frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} \right) \mathbf{b}'_\alpha + \left( \frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} \right)' \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \right\rangle = \langle \mathbf{b}'_\alpha, \kappa_\beta \mathbf{b}_\beta \rangle.$$

Das equações de Frenet e (2-5), a equação anterior resulta

$$\begin{aligned} \langle (\kappa_\alpha R_\alpha + \kappa'_\alpha) \mathbf{t}_\alpha + (\kappa_\alpha^2 - R'_\alpha - \Sigma_\alpha) \mathbf{n}_\alpha + \left( \left( \frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} \right)' - R_\alpha \tau_\alpha \right) \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \rangle \\ + \tau_\alpha \left\langle -\tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha + \frac{\kappa'_\alpha}{\kappa_\alpha} \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \right\rangle = 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\langle u, \mathbf{t}_\beta \rangle = 0, \quad (2-25)$$

onde

$$u = (\kappa_\alpha R_\alpha + \kappa'_\alpha) \mathbf{t}_\alpha + (\kappa_\alpha^2 - \tau_\alpha^2 - R'_\alpha - \Sigma_\alpha) \mathbf{n}_\alpha + \left( \left( \frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} \right)' - \tau_\alpha R_\alpha + \frac{\kappa'_\alpha}{\kappa_\alpha} \tau_\alpha \right) \mathbf{b}_\alpha. \quad (2-26)$$

Uma vez que  $\kappa_\beta > 0$  e derivando (2-25) com respeito a  $t$  resulta

$$\langle u, \mathbf{n}_\beta \rangle = 0. \quad (2-27)$$

Finalmente derivando (2-27) com respeito a  $t$  e levando em consideração que  $\langle u, \mathbf{t}_\beta \rangle = 0$  e  $\tau_\beta \neq 0$ , decorre

$$\langle u, \mathbf{b}_\beta \rangle = 0. \quad (2-28)$$

Das equações (2-25), (2-27) e (2-28) concluímos que  $u = 0$  e, portanto, deduzimos de (2-26) que

$$\begin{cases} \kappa_\alpha R_\alpha + \kappa'_\alpha & = 0 \\ \Sigma_\alpha + R'_\alpha - \kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha & = 0 \\ \left(\frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha}\right)' - \tau_\alpha R_\alpha + \frac{\kappa'_\alpha}{\kappa_\alpha} \tau_\alpha & = 0. \end{cases} \quad (2-29)$$

A primeira equação de (2-29), implica que

$$R_\alpha = -\frac{\kappa'_\alpha}{\kappa_\alpha}. \quad (2-30)$$

De (2-23) e (2-30), obtemos

$$\frac{\kappa'_\alpha}{\kappa_\alpha} + \frac{\tau'_\alpha}{\tau_\alpha} = -\frac{\kappa'_\alpha}{\kappa_\alpha}, \quad (2-31)$$

ou seja,

$$2\kappa'_\alpha \tau_\alpha + \tau'_\alpha \kappa_\alpha = 0. \quad (2-32)$$

Multiplicando a equação anterior por  $\kappa_\alpha$ , tem se

$$0 = 2\kappa'_\alpha \kappa_\alpha \tau_\alpha + \tau'_\alpha \kappa_\alpha^2 = \frac{d}{ds}(\kappa_\alpha^2 \tau_\alpha) \quad (2-33)$$

e, portanto  $\kappa_\alpha^2 \tau_\alpha = c_1$ . Da definição de  $\Sigma_\alpha$  em (2-23) e a segunda equação de (2-29) temos

$$\left(\frac{\kappa'_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)' + \kappa_\alpha^2 - \tau_\alpha^2 = -R'_\alpha + \kappa_\alpha^2 - \tau_\alpha^2,$$

ou seja,

$$\left(\frac{\kappa'_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)' + R'_\alpha = 0,$$

esse resultado é válido por causa de (2-30). A terceira equação de (2-29) e a definição de  $R_\alpha$  nos dá

$$\left(\frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha}\right)' - \tau_\alpha \left(\frac{\kappa'_\alpha}{\kappa_\alpha} + \frac{\tau'_\alpha}{\tau_\alpha}\right) + \frac{\kappa'_\alpha}{\kappa_\alpha} \tau_\alpha = 0,$$

ou seja,

$$\left(\frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha}\right)' - \tau'_\alpha = 0.$$

Portanto,

$$\left(\frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha}\right) - \tau_\alpha = c_2,$$

para alguma constante  $c_2$ . De maneira similar podemos deduzir os resultados correspondentes para a curva  $\beta$  usando a Proposição 2.8.  $\square$

**Observação 2** Em conclusão, com sucessivas derivadas de (2-1) com respeito  $s, ss, t, tt, ts, sst, tts$ , e  $ttss$  respectivamente encontramos.

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle -\tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha - R_\alpha \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \rangle = \langle \mathbf{n}_\alpha, \kappa_\beta \mathbf{t}_\beta \rangle \\ \langle \kappa_\alpha \mathbf{t}_\alpha - R_\alpha \mathbf{n}_\alpha + \frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \rangle = \langle \mathbf{b}_\alpha, \kappa_\beta \mathbf{b}_\beta \rangle \\ \langle \kappa_\alpha \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{n}_\beta \rangle = \langle \mathbf{t}_\alpha, \tau_\beta \mathbf{n}_\beta - R_\beta \mathbf{b}_\beta \rangle \\ \langle \kappa_\alpha \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{b}_\beta \rangle = \langle \mathbf{t}_\alpha, \kappa_\beta \mathbf{t}_\beta - R_\beta \mathbf{n}_\beta + \frac{\Sigma_\beta}{\tau_\beta} \mathbf{b}_\beta \rangle \\ \langle -\tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha - R_\alpha \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{n}_\beta \rangle = \langle \mathbf{n}_\alpha, -\tau_\beta \mathbf{n}_\beta - R_\beta \mathbf{b}_\beta \rangle \\ \langle \kappa_\alpha \mathbf{t}_\alpha - R_\alpha \mathbf{n}_\alpha + \frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{n}_\beta \rangle = \langle \mathbf{b}_\alpha, -\tau_\beta \mathbf{n}_\beta - R_\beta \mathbf{b}_\beta \rangle \\ \langle -\tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha - R_\alpha \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{b}_\beta \rangle = \langle \mathbf{n}_\alpha, \kappa_\beta \mathbf{t}_\beta - R_\beta \mathbf{n}_\beta + \frac{\Sigma_\beta}{\tau_\beta} \mathbf{b}_\beta \rangle \\ \langle \kappa_\alpha \mathbf{t}_\alpha - R_\alpha \mathbf{n}_\alpha + \frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{b}_\beta \rangle = \langle \mathbf{b}_\alpha, \kappa_\beta \mathbf{t}_\beta - R_\beta \mathbf{n}_\beta + \frac{\Sigma_\beta}{\tau_\beta} \mathbf{b}_\beta \rangle. \end{array} \right. \quad (2-34)$$

Os cálculos dessas derivações poderão ser encontrados no apêndice (A).

O próximo resultado será útil posteriormente.

**Proposição 2.9** *Seja  $\alpha$  uma curva em  $\mathbb{R}^3$  p.c.a com curvatura  $\kappa_\alpha > 0$  e torção  $\tau_\alpha \neq 0$ . Se  $\sigma_1 \neq 0$  e  $\sigma_2$  são constantes tais que*

$$\kappa_\alpha^2 \tau_\alpha = \sigma_1 \neq 0 \quad e \quad \frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} - \tau_\alpha = \sigma_2, \quad (2-35)$$

então  $\kappa_\alpha$  é uma solução positiva da equação diferencial autônoma

$$y'^2 + y^4 + \sigma_3 y^2 + \frac{\sigma_1}{y^2} + \sigma_1 \sigma_2 = 0, \quad (2-36)$$

para alguma constante  $\sigma_3$ . Reciprocamente, sejam  $\sigma_1 \neq 0$  e  $\sigma_2$  constantes, então para qualquer solução positiva e não constante  $\kappa(s)$  de (2-36) e escrevendo  $\tau(s) = \frac{\sigma_1}{\kappa(s)^2}$ , a curva  $\alpha$  parametrizada pelo comprimento de arco  $s$  com curvatura e torção  $\kappa$  e  $\tau$ , respectivamente satisfazem

$$\frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} - \tau_\alpha = \sigma_2 \quad e \quad \Sigma_\alpha + R_\alpha^2 + \kappa_\alpha^2 = -\sigma_3, \quad (2-37)$$

para alguma constante  $\sigma_3$ .

*Demonstração.* Levando em consideração a segunda equação em (2-35), temos que

$$\Sigma_{\alpha} - \tau_{\alpha}^2 = \tau_{\alpha}\sigma_2,$$

ou seja,

$$\left(\frac{\kappa'_{\alpha}}{\kappa_{\alpha}}\right)' + \kappa_{\alpha}^2 - 2\tau_{\alpha}^2 = \tau_{\alpha}\sigma_2.$$

Da primeira equação de (2-35), obtemos

$$\left(\frac{\kappa'_{\alpha}}{\kappa_{\alpha}}\right)' + \kappa_{\alpha}^2 - \frac{2\sigma_1}{\kappa_{\alpha}^4} - \frac{\sigma_2\sigma_1}{\kappa_{\alpha}^2} = 0. \quad (2-38)$$

A fim de integrarmos a equação anterior, vamos escrever  $w = \log(\kappa)$ , isto é,  $e^w = \kappa$ , assim, temos que

$$\left(\frac{(e^w)'}{e^w}\right)' + e^{2w} - \frac{2\sigma_1^2}{e^{4w}} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{e^{2w}} = 0,$$

donde encontramos

$$w'' + e^{2w} - 2\sigma_1^2 e^{-4w} - \sigma_1\sigma_2 e^{-2w} = 0.$$

Para resolver essa equação diferencial ordinária, faça  $z = w'$  e considere  $z = z(w)$ . Como  $w'' = \frac{1}{2} \frac{d}{dw}(z^2)$ , temos que

$$\frac{d}{dw}(z^2) + 2e^{2w} - 4\sigma_1^2 e^{-4w} - 2\sigma_1\sigma_2 e^{-2w} = 0.$$

Integrando a equação anterior com respeito a  $w$  obtemos

$$z^2 + e^{2w} + \sigma_1^2 e^{-4w} + \sigma_1\sigma_2 e^{-2w} + \sigma_3 = 0,$$

para alguma constante  $\sigma_3$ . Uma vez que  $w = \log \kappa$  e  $z^2 = (w')^2$ ,

$$\left(\frac{\kappa'}{\kappa}\right)^2 + \kappa^2 + \sigma_1^2 \kappa^{-4} + \sigma_1\sigma_2 \kappa^{-2} + \sigma_3 = 0,$$

ou equivalentemente

$$\kappa'^2 + \kappa^4 + \sigma_3 \kappa^2 + \sigma_1^2 \kappa^{-2} + \sigma_1\sigma_2 = 0.$$

Dessa forma, provamos (2-36). Reciprocamente, seja  $\kappa(s)$  uma solução positiva e não constante de (2-35) e escreva  $\tau(s) = \frac{\sigma_1}{\kappa^2(s)}$ . Considere  $\alpha$  a curva parametrizada pelo comprimento de arco com curvatura  $\kappa$  e torção  $\tau$ . De (2-36) segue que

$$\left(\frac{\kappa'_{\alpha}}{\kappa_{\alpha}}\right)^2 + \kappa_{\alpha}^2 + \sigma_1^2 \kappa_{\alpha}^{-4} + \sigma_1\sigma_2 \kappa_{\alpha}^{-2} + \sigma_3 = 0. \quad (2-39)$$

Derivando a equação anterior com respeito a  $s$  e levando em conta que  $\kappa'_\alpha \neq 0$  obtemos

$$\left(\frac{\kappa'_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)' + \kappa_\alpha^2 - 2\sigma_1^2 \kappa_\alpha^{-4} - \sigma_1 \sigma_2 \kappa_\alpha^{-2} = 0. \quad (2-40)$$

Por hipótese temos que  $\tau(s) = \frac{\sigma_1}{\kappa(s)^2}$ , então

$$\left(\frac{\kappa'_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)' + \kappa_\alpha^2 - 2(\kappa_\alpha^2 \tau_\alpha)^2 \kappa_\alpha^{-4} - \kappa_\alpha^2 \tau_\alpha \sigma_2 \kappa_\alpha^{-2} = 0,$$

ou seja,

$$\left(\frac{\kappa'_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)' + \kappa_\alpha^2 - 2\tau_\alpha^2 - \tau_\alpha \sigma_2 = 0,$$

donde

$$\Sigma_\alpha - \tau_\alpha^2 - \tau_\alpha \sigma_2 = 0,$$

o que implica

$$\frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} - \tau_\alpha = \sigma_2, \quad (2-41)$$

e assim, provamos a primeira parte de (2-37). Substituindo  $\sigma_1 = \tau_\alpha \kappa_\alpha^2$  em (2-39), temos

$$R_\alpha^2 + \kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2 + \sigma_2 \tau_\alpha = -\sigma_3.$$

Usando (2-41) na equação anterior, obtemos

$$\left(\frac{\kappa'_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)^2 + \kappa_\alpha^2 + \Sigma_\alpha = -\sigma_3.$$

Por fim, note que, (2-30) é equivalente a  $R_\alpha^2 = \left(\frac{\kappa'_\alpha}{\kappa_\alpha}\right)^2$  e, portanto, a equação anterior resulta

$$\Sigma_\alpha + R_\alpha^2 + \kappa_\alpha^2 = -\sigma_3.$$

Dessa forma, provamos a segunda parte. □

**Observação 3** Com a notação da Proposição (2.8), as curvas geratrizes  $\alpha, \beta$  de uma superfície mínima de translação  $\Psi(s, t) = \alpha(s) + \beta(t)$  satisfazem as condições da proposição (2.9) com  $\sigma_1 = c_1$ ,  $\sigma_2 = c_2$ ,  $\sigma_1 = \bar{c}_1$  e  $\sigma_2 = \bar{c}_2$  respectivamente. Então encontramos

$$R_\alpha^2 + \kappa_\alpha^2 + \tau_\alpha^2 + c_2 \tau_\alpha + c_3 = 0, \quad R_\beta^2 + \kappa_\beta^2 + \tau_\beta^2 + c_2 \tau_\beta + c_3 = 0.$$

para algumas constantes  $c_3$  e  $\bar{c}_3$ .

Motivado pelas equações em (2-2) e o conjunto de identidades obtido na observação (2), definiremos as funções  $V_i = V_i(s)$ ,  $W_i = W_i(t)$ ,  $1 \leq i \leq 3$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 = \kappa_\alpha \mathbf{b}_\alpha \\ V_2 = -\tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha - R_\alpha \mathbf{b}_\alpha \\ V_3 = \kappa_\alpha \mathbf{t}_\alpha - R_\alpha \mathbf{n}_\alpha + \frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} \mathbf{b}_\alpha \end{array} \right. \quad e \quad \left\{ \begin{array}{l} W_1 = \kappa_\beta \mathbf{b}_\beta \\ W_2 = -\tau_\beta \mathbf{n}_\beta - R_\beta \mathbf{b}_\beta \\ W_3 = \kappa_\beta \mathbf{t}_\beta - R_\beta \mathbf{n}_\beta + \frac{\Sigma_\beta}{\tau_\beta} \mathbf{b}_\beta. \end{array} \right. \quad (2-42)$$

Ou seja,  $V_i$  e  $W_i$  satisfazem as seguintes equações do tipo Frenet:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1' = \kappa_\alpha V_2 \\ V_2' = -\kappa_\alpha V_1 + \tau_\alpha V_3 \\ V_3' = -\tau_\alpha V_2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} W_1' = \kappa_\beta W_2 \\ W_2' = -\kappa_\beta W_1 + \tau_\beta W_3 \\ W_3' = -\tau_\beta W_2. \end{array} \right.$$

Segue de (2-42) que os produtos mistos satisfazem

$$(V_1, V_2, V_3) = \kappa_\alpha^2 \tau_\alpha = c_1 \quad e \quad (W_1, W_2, W_3) = \kappa_\beta^2 \tau_\beta = \bar{c}_1.$$

De fato, temos que  $(V_1, V_2, V_3) = \langle V_1, V_2 \times V_3 \rangle$  e, portanto,

$$\begin{aligned} \langle V_1, V_2 \times V_3 \rangle &= \langle \kappa_\alpha \mathbf{b}_\alpha, (-\tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha - R_\alpha \mathbf{b}_\alpha) \times (\kappa_\alpha \mathbf{t}_\alpha - R_\alpha \mathbf{n}_\alpha + \frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} \mathbf{b}_\alpha) \rangle \\ &= \langle \kappa_\alpha \mathbf{b}_\alpha, (-\tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha \times \kappa_\alpha \mathbf{t}_\alpha) + (\tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha \times R_\alpha \mathbf{n}_\alpha) + (\tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha \times \frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} \mathbf{b}_\alpha) \\ &\quad + (-R_\alpha \mathbf{b}_\alpha \times \kappa_\alpha \mathbf{t}_\alpha) + (R_\alpha \mathbf{b}_\alpha \times R_\alpha \mathbf{n}_\alpha) + (-R_\alpha \mathbf{b}_\alpha \times \frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} \mathbf{b}_\alpha) \rangle \\ &= \langle \kappa_\alpha \mathbf{b}_\alpha, \tau_\alpha \kappa_\alpha \mathbf{b}_\alpha + \Sigma_\alpha \mathbf{t}_\alpha + R_\alpha \kappa_\alpha \mathbf{n}_\alpha - R_\alpha^2 \mathbf{t}_\alpha \rangle \\ &= \kappa_\alpha^2 \tau_\alpha. \end{aligned}$$

Pela Proposição 2.9 temos que  $(V_1, V_2, V_3) = \kappa_\alpha^2 \tau_\alpha = c_1$ . De forma análoga, temos o mesmo resultado para  $(W_1, W_2, W_3) = \kappa_\beta^2 \tau_\beta = \bar{c}_1$ .

Com as notações acima e a identidade de (2-2), e as relações da observação (2)

podem ser escrita como

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle V_1, \mathbf{t}_\beta \rangle = \langle \mathbf{t}_\alpha, W_1 \rangle \\ \langle V_2, \mathbf{t}_\beta \rangle = \langle \mathbf{n}_\alpha, W_1 \rangle \\ \langle V_3, \mathbf{t}_\beta \rangle = \langle \mathbf{b}_\alpha, W_1 \rangle \\ \langle V_1, \mathbf{n}_\beta \rangle = \langle \mathbf{t}_\alpha, W_2 \rangle \\ \langle V_1, \mathbf{b}_\beta \rangle = \langle \mathbf{t}_\alpha, W_3 \rangle \\ \langle V_2, \mathbf{n}_\beta \rangle = \langle \mathbf{n}_\alpha, W_2 \rangle \\ \langle V_3, \mathbf{n}_\beta \rangle = \langle \mathbf{b}_\alpha, W_2 \rangle \\ \langle V_2, \mathbf{b}_\beta \rangle = \langle \mathbf{n}_\alpha, W_3 \rangle \\ \langle V_3, \mathbf{b}_\beta \rangle = \langle \mathbf{b}_\alpha, W_3 \rangle. \end{array} \right. \quad (2-43)$$

Todos esses fatos e fórmulas acima são necessários para provar os principais resultados do próximo capítulo.

## Classificação e Construção de Superfícies Mínimas de Translação

Neste capítulo, mostraremos os principais resultados deste trabalho, será essencial a definição de um conjunto de operadores auto-adjuntos associados a cada ponto  $\alpha(s)$  e  $\beta(t)$ , nos quais provaremos que de fato eles coincidem para quaisquer  $s$  e  $t$ . Classificaremos e construiremos superfícies mínimas de translação em  $\mathbb{R}^3$ . Apresentaremos também, exemplos explícitos de superfícies mínimas de translação obtidos por meio de um algoritmo.

Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície mínima de translação com parametrização  $\Psi(s, t) = \alpha(s) + \beta(t)$ , onde supomos que as curvas  $\alpha$  e  $\beta$  são parametrizadas pelo comprimento de arco. Motivado pelas relações (2-42), para cada ponto  $\alpha(s)$  e  $\beta(t)$ , definimos um conjunto de transformações lineares  $L_{\alpha(s)}, L_{\beta(t)} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  com matrizes

$$L_{\alpha(s)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \kappa_{\alpha}(s) \\ 0 & -\tau_{\alpha}(s) & -R_{\alpha}(s) \\ \kappa_{\alpha}(s) & -R_{\alpha}(s) & \frac{\Sigma_{\alpha}}{\tau_{\alpha}}(s) \end{pmatrix}, \quad L_{\beta(t)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \kappa_{\beta}(t) \\ 0 & -\tau_{\beta}(t) & -R_{\beta}(t) \\ \kappa_{\beta}(t) & -R_{\beta}(t) & \frac{\Sigma_{\beta}}{\tau_{\beta}}(t) \end{pmatrix},$$

com respeito as bases  $\{\mathbf{t}_{\alpha}(s), \mathbf{n}_{\alpha}(s), \mathbf{b}_{\alpha}(s)\}$  e  $\{\mathbf{t}_{\beta}(t), \mathbf{n}_{\beta}(t), \mathbf{b}_{\beta}(t)\}$  respectivamente. Uma vez que as matrizes  $L_{\alpha(s)}$  e  $L_{\beta(s)}$  são simétricas com respeito a uma base ortonormal, resultam que as aplicações lineares  $L_{\alpha(s)}$  e  $L_{\beta(s)}$  são auto-adjuntas para todo  $s$  e  $t$ . Por simplicidade utilizaremos a aplicação linear  $L_{\alpha(s)}$ . Sendo assim, a equação característica da matriz  $L_{\alpha(s)}$  é dada por

$$\begin{aligned} 0 &= (-\lambda)(-\tau_{\alpha} - \lambda) \left( \frac{\Sigma_{\alpha}}{\tau_{\alpha}} - \lambda - \kappa_{\alpha}^2 \right) (-\tau_{\alpha} - \lambda) + \lambda R_{\alpha}^2 \\ &= -\lambda^3 + \frac{\lambda^2 \Sigma_{\alpha}}{\tau_{\alpha}} + \lambda \Sigma_{\alpha} - \lambda^2 \tau_{\alpha} + \lambda^2 \tau_{\alpha} + \kappa_{\alpha}^2 \tau_{\alpha} + \lambda \kappa_{\alpha}^2 + \lambda R_{\alpha}^2 \\ &= -\lambda^3 + \left( \frac{\Sigma_{\alpha}}{\tau_{\alpha}} - \tau_{\alpha} \right) \lambda^2 + (\Sigma_{\alpha} + R_{\alpha}^2 + \kappa_{\alpha}^2) \lambda + \kappa_{\alpha}^2 \tau_{\alpha}. \end{aligned}$$

Devido a (2-24) e (2-37), a equação anterior torna-se

$$-\lambda^3 + c_2\lambda^2 - c_3\lambda + c_1 = 0.$$

Assim os autovalores reais  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  são constantes e independentes de  $s$  e satisfazem

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = c_2 \\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 & = c_3 \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 & = c_1. \end{cases} \quad (3-1)$$

Analogamente os autovalores reais  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  e  $\mu_3$  da aplicação linear  $L_{\beta(t)}$  são constantes e satisfazem

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 & = \bar{c}_2 \\ \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3 & = \bar{c}_3 \\ \mu_1\mu_2\mu_3 & = \bar{c}_1. \end{cases} \quad (3-2)$$

Agora provaremos a principal propriedade de que todas as transformações  $L_{\alpha(s)}$  e  $L_{\beta(t)}$  coincidem para quaisquer  $s \in I$  e  $t \in J$ .

**Proposição 3.1** *Seja  $\Psi(s, t) = \alpha(s) + \beta(t)$  uma superfície mínima de translação. Então  $L_{\alpha(s)} = L_{\beta(t)}$  para todo  $s \in I$  e  $t \in J$ .*

*Demonstração.* Vamos mostrar que  $L_{\beta(t)}$  é a matriz adjunta de  $L_{\alpha(s)}$  para quaisquer  $s$  e  $t$ , e uma vez que  $L_{\alpha(s)}$  é auto-adjunta, podemos concluir que  $L_{\alpha(s)} = L_{\beta(t)}$ . Assim precisamos mostrar que  $\langle L_{\alpha(s)}(v), w \rangle = \langle v, L_{\beta(t)}(w) \rangle$  para todo  $v, w \in \mathbb{R}^3$ . Sejam

$$\begin{aligned} v &= a_1 \mathbf{t}_\alpha(s) + a_2 \mathbf{n}_\alpha(s) + a_3 \mathbf{b}_\alpha(s), \\ w &= b_1 \mathbf{t}_\beta(t) + b_2 \mathbf{n}_\beta(t) + b_3 \mathbf{b}_\beta(t), \end{aligned}$$

em que  $a_i = a_i(s)$ ,  $b_i = b_i(t) \in \mathbb{R}$ . Então

$$\begin{aligned} \langle L_{\alpha(s)}(v), w \rangle &= \langle a_1 L_\alpha(\mathbf{t}_\alpha) + a_2 L_\alpha(\mathbf{n}_\alpha) + a_3 L_\alpha(\mathbf{b}_\alpha), b_1 \mathbf{t}_\beta + b_2 \mathbf{n}_\beta + b_3 \mathbf{b}_\beta \rangle \\ &= a_1 b_1 \langle L_\alpha(\mathbf{t}_\alpha), \mathbf{t}_\beta \rangle + a_1 b_2 \langle L_\alpha(\mathbf{t}_\alpha), \mathbf{n}_\beta \rangle + a_1 b_3 \langle L_\alpha(\mathbf{t}_\alpha), \mathbf{b}_\beta \rangle \\ &+ a_2 b_1 \langle L_\alpha(\mathbf{n}_\alpha), \mathbf{t}_\beta \rangle + a_2 b_2 \langle L_\alpha(\mathbf{n}_\alpha), \mathbf{n}_\beta \rangle + a_2 b_3 \langle L_\alpha(\mathbf{n}_\alpha), \mathbf{b}_\beta \rangle \\ &+ a_3 b_1 \langle L_\alpha(\mathbf{b}_\alpha), \mathbf{t}_\beta \rangle + a_3 b_2 \langle L_\alpha(\mathbf{b}_\alpha), \mathbf{n}_\beta \rangle + a_3 b_3 \langle L_\alpha(\mathbf{b}_\alpha), \mathbf{b}_\beta \rangle, \end{aligned}$$

onde omitimos os parâmetros  $s$  e  $t$ . Observe que temos a soma de nove parcelas e para cada uma delas vamos usar a definição de  $L_{\alpha(s)}$  e as relações em (2-43). Por exemplo, encontramos para a primeira parcela que

$$\langle L_\alpha(\mathbf{t}_\alpha), \mathbf{t}_\beta \rangle = \langle \kappa_\alpha \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \rangle = \langle V_1, \mathbf{t}_\beta \rangle = \langle \mathbf{t}_\alpha, W_1 \rangle = \langle \mathbf{t}_\alpha, \kappa_\beta \mathbf{b}_\beta \rangle = \langle \mathbf{t}_\alpha, L_\beta(\mathbf{t}_\beta) \rangle.$$

Para segunda parcela encontramos

$$\langle L_\alpha(\mathbf{t}_\alpha), \mathbf{n}_\beta \rangle = \langle \kappa_\alpha \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{n}_\beta \rangle = \langle V_1, \mathbf{n}_\beta \rangle = \langle \mathbf{t}_\alpha, W_2 \rangle = \langle \mathbf{t}_\alpha, -\tau_\beta \mathbf{n}_\beta - R_\beta \mathbf{b}_\beta \rangle = \langle \mathbf{t}_\alpha, L_\beta(\mathbf{n}_\beta) \rangle.$$

Utilizando o mesmo argumento para as sete parcelas restantes, obtemos que

$$\begin{aligned} \langle L_{\alpha(s)}(v), w \rangle &= a_1 b_1 \langle \mathbf{t}_\alpha, L_\beta(\mathbf{t}_\beta) \rangle + a_1 b_2 \langle \mathbf{t}_\alpha, L_\beta(\mathbf{n}_\beta) \rangle + a_1 b_3 \langle \mathbf{t}_\alpha, L_\beta(\mathbf{b}_\beta) \rangle \\ &+ a_2 b_1 \langle \mathbf{n}_\alpha, L_\beta(\mathbf{t}_\beta) \rangle + a_2 b_2 \langle \mathbf{n}_\alpha, L_\beta(\mathbf{n}_\beta) \rangle + a_2 b_3 \langle \mathbf{n}_\alpha, L_\beta(\mathbf{b}_\beta) \rangle \\ &+ a_3 b_1 \langle \mathbf{b}_\alpha, L_\beta(\mathbf{t}_\beta) \rangle + a_3 b_2 \langle \mathbf{b}_\alpha, L_\beta(\mathbf{n}_\beta) \rangle + a_3 b_3 \langle \mathbf{b}_\alpha, L_\beta(\mathbf{b}_\beta) \rangle \\ &= \langle a_1 \mathbf{t}_\alpha(s) + a_2 \mathbf{n}_\alpha(s) + a_3 \mathbf{b}_\alpha(s), b_1 L_\beta(\mathbf{t}_\beta) + b_2 L_\beta(\mathbf{n}_\beta) + b_3 L_\beta(\mathbf{b}_\beta) \rangle \\ &= \langle v, L_{\beta(t)}(w) \rangle, \end{aligned}$$

conforme queríamos demonstrar.  $\square$

Como  $L_{\alpha(s)} = L_{\beta(t)}$  para todo  $s$  e  $t$ , concluímos que os autovalores de  $L_{\alpha(s)}$  e  $L_{\beta(t)}$  coincidem. Sejam  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$  os três autovalores, segue de (3-1) e (3-2) que  $c_i = \bar{c}_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ . Além disso,  $L_{\alpha(s)}$  e  $L_{\beta(t)}$  possuem um auto sistema independente de  $s$  e  $t$ , para todo  $s \in I$  e  $t \in J$ . Considere agora o auto sistema comum de  $L_{\alpha(s)}$  e  $L_{\beta(t)}$  como um sistema ortonormal referencial. Com respeito a este sistema, o escrevemos  $\alpha$  em coordenadas, digamos,  $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))$ , sendo  $s$  o comprimento de arco. Então

$$\mathbf{t}_\alpha(s) = (\alpha'_1(s), \alpha'_2(s), \alpha'_3(s))$$

e

$$\kappa_\alpha(s) \mathbf{b}_\alpha(s) = L_{\alpha(s)}(\mathbf{t}_\alpha(s)) = (\lambda_1 \alpha'_1(s), \lambda_2 \alpha'_2(s), \lambda_3 \alpha'_3(s)).$$

As identidades  $\langle \mathbf{t}_\alpha, \mathbf{t}_\alpha \rangle = 1$  e  $\langle \mathbf{t}_\alpha, \kappa_\alpha \mathbf{b}_\alpha \rangle = 0$  ficam

$$\alpha'_1(s)^2 + \alpha'_2(s)^2 + \alpha'_3(s)^2 = 1 \tag{3-3}$$

e

$$\lambda_1 \alpha'_1(s)^2 + \lambda_2 \alpha'_2(s)^2 + \lambda_3 \alpha'_3(s)^2 = 0, \tag{3-4}$$

respectivamente. Fazendo uso da terceira equação de (3-1) e a equação (3-4), concluímos que todos os  $\lambda_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$  são não nulos e sem o mesmo sinal. No caso em que  $c_1 > 0$ , reenumerando os eixos, se necessário, podemos escolher  $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0 < \lambda_3$ . De forma análoga, se  $c_1 < 0$  podemos escolher  $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0 > \lambda_3$ . Multiplicamos a equação (3-3) por  $\lambda_3$  e subtraindo a equação (3-4) obtemos

$$(\lambda_3 - \lambda_1) \alpha'_1(s)^2 + (\lambda_3 - \lambda_2) \alpha'_2(s)^2 = \lambda_3,$$

ou ainda,

$$\left(\frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3}\right) \alpha'_1(s)^2 + \left(\frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\lambda_3}\right) \alpha'_3(s)^2 = 1. \quad (3-5)$$

Como  $(\lambda_3 - \lambda_1) > 0$  e  $(\lambda_3 - \lambda_2) > 0$ , vamos definir

$$A = \sqrt{\frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_1}}, \quad B = \sqrt{\frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2}}.$$

Levando em conta (3-3) e (3-4), podemos supor que

$$\begin{aligned} \alpha'_1(s) &= A \cos w(s) \\ \alpha'_2(s) &= B \sin w(s) \\ \alpha'_3(s) &= \sqrt{1 - A^2 \cos^2 w(s) - B^2 \sin^2 w(s)}, \end{aligned}$$

obviamente, temos que  $\alpha'_3(s) \neq 0$  em todos os pontos. Vamos escrever

$$\alpha'(s) = (A \cos w(s), B \sin w(s), \alpha'_3(s)).$$

Para encontrarmos a curvatura  $\kappa_\alpha$  e a torção  $\tau_\alpha$ , precisamos calcular  $\alpha''$  e  $\alpha'''$ . Temos que

$$\alpha''(s) = w' \left( -A \sin w(s), B \cos w(s), \frac{(A^2 - B^2) \cos(w) \sin(w)}{\alpha'_3(s)} \right)$$

e

$$\begin{aligned} \alpha''' &= w'' \left( -A \sin w, B \cos w, \frac{(A^2 - B^2) \cos w \sin w}{\alpha'_3} \right) \\ &+ w'^2 \left( \begin{array}{c} -A \cos w \\ -B \sin w \\ \frac{(A^2 - B^2)((1 - A^2 \cos^2 w) \cos^2 w - (1 - B^2 \sin^2 w) \sin^2 w)}{(\alpha'_3)^3} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\alpha'(s) \times \alpha''(s) = \frac{w'(s)}{\alpha'_3(s)} (B(A^2 - 1) \cos w(s), A(B^2 - 1) \sin w(s), AB\alpha'_3(s)), \quad (3-6)$$

e

$$(\alpha', \alpha'', \alpha''') = AB(1 + A^2 B^2 - A^2 - B^2) \left( \frac{w'(s)}{\alpha'_3} \right)^3. \quad (3-7)$$

Uma vez que a torção é calculada por

$$\tau_\alpha = \frac{(\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s))}{\kappa_\alpha^2},$$

segue imediatamente de (2-35) que  $(\alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s)) = c_1$ . Um cálculo do lado direito de (3-7) e usando a terceira equação de (3-1) temos que

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_1}} \sqrt{\frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2}} \left( 1 + \frac{\lambda_3^2}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} - \frac{\lambda_3}{(\lambda_3 - \lambda_1)} - \frac{\lambda_3}{(\lambda_3 - \lambda_2)} \right) \left( \frac{w'(s)}{\alpha'_3(s)} \right)^3,$$

ou seja,

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \frac{\lambda_3}{\sqrt{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}} \left( \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} \right) \left( \frac{w'(s)}{\alpha'_3(s)} \right)^3,$$

ou ainda,

$$\left( \frac{w'(s)}{\alpha'_3(s)} \right)^3 = [(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)]^{\frac{3}{2}}.$$

Portanto,

$$\frac{w'(s)}{\alpha'_3(s)} = \sqrt{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}. \quad (3-8)$$

A curvatura da curva  $\alpha$  é dada a seguir, os detalhes dos cálculos podem ser consultados em (A.0.2).

$$\kappa_\alpha^2(s) = \left( \frac{w'(s)}{\alpha'_3(s)} \right)^2 (A^2 + B^2 - A^2 B^2 - 1 + (\alpha'_3)^2). \quad (3-9)$$

Essa igualdade pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\kappa_\alpha^2(s) - w'(s)^2 = \left( \frac{w'(s)}{\alpha'_3(s)} \right)^2 (A^2 + B^2 - A^2 B^2 - 1). \quad (3-10)$$

Usando as expressões de  $A$  e  $B$  e (3-8) a equação acima fica

$$\kappa_\alpha(s)^2 - w'(s)^2 = (\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2) \frac{-\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} = -\lambda_1 \lambda_2,$$

ou seja,

$$w'(s) = \sqrt{\kappa_\alpha(s)^2 + \lambda_1 \lambda_2}. \quad (3-11)$$

De modo similar, os mesmos argumentos se aplicam à curva  $\beta$ . Enquanto isso as curvaturas  $\kappa_\alpha(s)$  e  $\kappa_\beta(t)$  são soluções positivas da equação diferencial ordinária autônoma vista em (2-36)

$$y'^2 + y^4 + c_3 y^2 + \frac{c_1^2}{y^2} + c_1 c_2 = 0. \quad (3-12)$$

Fazendo uso dos valores de  $c_i$  em (3-1) a equação anterior é equivalente a

$$y'^2 + y^4 + (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3) y^2 + \frac{\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2}{y^2} + (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = 0.$$

Ou seja,

$$y'^2 + \frac{1}{y^2}P(y) = 0.$$

Onde  $P(y) = y^6 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)y^4 + (\lambda_1\lambda_2\lambda_3)(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)y^2 + \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2$ . Escreveremos  $P(y)$  na sua forma fatorada, para isso considere a seguinte mudança de variável  $y^2 = t$ , sendo assim temos

$$P(y) = t^3 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)t^2 + (\lambda_1^2\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2^2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3^2)t + \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2.$$

Fazendo  $\eta_1 = -\lambda_1\lambda_2$ ,  $\eta_2 = -\lambda_1\lambda_3$  e  $\eta_3 = -\lambda_2\lambda_3$  a equação acima, resulta

$$P(y) = t^3 + (\eta_1 + \eta_2 + \eta_3)t^2 + (\eta_1\eta_2 + \eta_1\eta_3 + \eta_2\eta_3)t - \eta_1\eta_2\eta_3,$$

ou na forma fatorada (Girard)

$$P(y) = (t - \eta_1)(t - \eta_2)(t - \eta_3),$$

ou seja,

$$P(y) = (y^2 + \lambda_1\lambda_2)(y^2 + \lambda_1\lambda_3)(y^2 + \lambda_2\lambda_3).$$

Portanto, a equação (3-12) tem a forma

$$y'^2 + \frac{1}{y^2}(y^2 + \lambda_1\lambda_2)(y^2 + \lambda_1\lambda_3)(y^2 + \lambda_2\lambda_3) = 0. \quad (3-13)$$

As soluções positivas de equilíbrio são  $y_1 = \sqrt{-\lambda_1\lambda_3}$  e  $y_2 = \sqrt{-\lambda_2\lambda_3}$ , as quais fornecem soluções estacionárias de (3-13). Disso decorre que as soluções positivas  $\kappa_\alpha(s)$  e  $\kappa_\beta(t)$  estão incluídas na faixa limitada pelos valores  $y_1$  e  $y_2$  e  $\kappa_\beta(t) = \kappa_\alpha(\pm t + c_0)$ ,  $c_0 \in \mathbb{R}$ . Por uma reparametrização de  $\beta$ , concluímos que  $\kappa_\beta(t) = \kappa_\alpha(t)$  e assim,  $\tau_\beta(t) = \tau_\alpha(t)$  de (2-24). Portanto as curvas geratrizes  $\alpha$  e  $\beta$  são congruentes. Dessa forma, acabamos de provar o seguinte resultado de classificação.

**Teorema 3.2** *Seja  $\Psi(s, t) = \alpha(s) + \beta(t)$  uma superfície mínima de translação com  $\alpha$  e  $\beta$  parametrizadas pelo comprimento de arco. Suponha que as curvaturas  $\kappa_\alpha$  e  $\kappa_\beta$  são positivas e as torções  $\tau_\alpha$  e  $\tau_\beta$  são não nulas em toda superfície. Então:*

1. *Existem duas constantes  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ,  $c_1 \neq 0$ , tais que*

$$\kappa_\alpha^2 \tau_\alpha = \kappa_\beta^2 \tau_\beta = c_1, \quad \frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} - \tau_\alpha = \frac{\Sigma_\beta}{\tau_\beta} - \tau_\beta = c_2. \quad (3-14)$$

2. As curvaturas  $\kappa_\alpha$ ,  $\kappa_\beta$  são soluções positivas da equação diferencial ordinária

$$y'^2 + y^4 + c_3 y^2 + \frac{c_1^2}{y^2} + c_1 \cdot c_2 = 0, \quad (3-15)$$

para alguma constante  $c_3$ , e as curvas  $\alpha$  e  $\beta$  possuem a mesma órbita.

3. A menos de um movimento rígido temos

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \left( A \int^s \cos w(s), B \int^s \sin w(s), \int^s \sqrt{1 - A^2 \cos^2 w(s) - B^2 \sin^2 w(s)} \right), \\ \beta(t) &= \left( A \int^t \cos w(t), B \int^t \sin w(t), \int^t \sqrt{1 - A^2 \cos^2 w(t) - B^2 \sin^2 w(t)} \right). \end{aligned}$$

onde

$$A = \sqrt{\frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_1}} \quad B = \sqrt{\frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2}} \quad (3-16)$$

e  $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0 < \lambda_3$  (resp.  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0 > \lambda_3$ ) são as raízes da equação cúbica  $-\lambda^3 + c_2 \lambda^2 - c_3 \lambda + c_1 = 0$  e

$$w(s) = \int^s \sqrt{\kappa_\alpha(s)^2 + \lambda_1 \lambda_2}. \quad (3-17)$$

Na sequência iremos provar mais um resultado que é a recíproca do Teorema 3.2 e a propósito, ele fornece uma ferramenta útil para construir superfícies mínimas de translação.

**Teorema 3.3** *Suponha que  $c_1 \neq 0$ ,  $c_2$  e  $c_3$  sejam constantes tais que a equação cúbica*

$$-\lambda^3 + c_2 \lambda^2 - c_3 \lambda + c_1 = 0 \quad (3-18)$$

*possua três raízes reais  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Considere a equação diferencial ordinária autônoma*

$$y'^2 + y^4 + c_3 y^2 + \frac{c_1^2}{y^2} + c_1 \cdot c_2 = 0, \quad (3-19)$$

*e seja  $\kappa_\alpha(s) = \kappa_\alpha(s; c_1, c_2, c_3)$ , uma solução positiva e não constante de (3-19). Denote por  $\alpha(s)$  a curva parametrizada pelo comprimento de arco  $s$  com curvatura  $\kappa_\alpha(s)$  e torção  $\tau_\alpha(s) = \frac{c_1}{\kappa_\alpha(s)^2}$ . Então a superfície de translação  $\Psi(s, t) = \alpha(s) + \beta(t)$  é mínima.*

*Demonstração.* A equação diferencial autônoma (3-19) tem a forma (3-13). Portanto,  $\lambda_i \neq 0$  e sem o mesmo sinal. No caso em que  $c_1 > 0$ , podemos escolher  $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0 < \lambda_3$ . (De modo análogo se  $c_1 < 0$ , escolhemos  $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0 > \lambda_3$ ). Pela recíproca da Proposição

2.9, deduzimos para a curva  $\alpha$  que

$$\kappa_\alpha^2 \tau_\alpha = c_1, \quad \frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} - \tau_\alpha = c_2, \quad \Sigma_\alpha + R_\alpha^2 + \kappa_\alpha^2 = -c_3.$$

No ponto  $\alpha(s)$ , definimos a transformação linear  $L_{\alpha(s)}$  pelas seguintes relações

$$\begin{cases} L_{\alpha(s)}(\mathbf{t}_\alpha(s)) = \kappa_\alpha(s) \mathbf{b}_\alpha(s) \\ L_{\alpha(s)}(\mathbf{n}_\alpha(s)) = -\tau_\alpha(s) \mathbf{n}_\alpha(s) - R_\alpha(s) \mathbf{b}_\alpha(s) \\ L_{\alpha(s)}(\mathbf{b}_\alpha(s)) = \kappa_\alpha(s) \mathbf{t}_\alpha(s) - R_\alpha(s) \mathbf{n}_\alpha(s) + \frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha}(s) \mathbf{b}_\alpha(s). \end{cases} \quad (3-20)$$

A matriz dessa transformação linear com respeito à base  $\{\mathbf{t}_\alpha(s), \mathbf{n}_\alpha(s), \mathbf{b}_\alpha(s)\}$  é simétrica e, portanto,  $L_{\alpha(s)}$  é auto-adjunta. A equação característica de  $L_{\alpha(s)}$  é (3-18) para qualquer  $s$ . Além disso, pela derivação de (3-20) com respeito a  $s$  e, considerando as equações de Frenet encontramos

$$L'_{\alpha(s)}(\mathbf{t}_\alpha(s)) = 0, \quad L'_{\alpha(s)}(\mathbf{n}_\alpha(s)) = 0, \quad L'_{\alpha(s)}(\mathbf{b}_\alpha(s)) = 0. \quad (3-21)$$

De fato, derivando a primeira equação de (3-20) com respeito a  $s$ , obtemos

$$L'_\alpha(\mathbf{t}_\alpha) + L_\alpha(\mathbf{t}'_\alpha) = \kappa'_\alpha \mathbf{b}_\alpha + \kappa_\alpha \mathbf{b}'_\alpha,$$

ou seja,

$$L'_\alpha(\mathbf{t}_\alpha) = -L_\alpha(\kappa_\alpha \mathbf{n}_\alpha) + \kappa'_\alpha \mathbf{b}_\alpha - \kappa_\alpha \tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha.$$

Da segunda equação de (3-20) temos

$$\begin{aligned} L'_{\alpha(s)}(\mathbf{t}_\alpha) &= -\kappa_\alpha(-\tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha - R_\alpha \mathbf{b}_\alpha) + \kappa'_\alpha \mathbf{b}_\alpha - \kappa_\alpha \tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha \\ &= +\kappa_\alpha \tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha - \frac{\kappa_\alpha \kappa'_\alpha}{\kappa_\alpha} \mathbf{b}_\alpha + \kappa'_\alpha \mathbf{b}_\alpha - \kappa_\alpha \tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha, \end{aligned}$$

e, portanto, temos que

$$L'_{\alpha(s)}(\mathbf{t}_\alpha(s)) = 0.$$

De modo análogo, obtemos  $L'_{\alpha(s)}(\mathbf{n}_\alpha(s)) = 0$  e  $L'_{\alpha(s)}(\mathbf{b}_\alpha(s)) = 0$ , para maiores detalhes ver apêndice (A).

Assim,  $L_\alpha = L_{\alpha(s)}$  é uma transformação linear constante e possui um auto-sistema constante para todo  $s$ . Tomando este auto-sistema como sistema referencial, assim como no Teorema 3-3, encontramos  $\alpha'(s) = (A \cos w(s), B \sin w(s), \alpha'_3(s))$ , em que

$$\alpha'_3(s) = \sqrt{1 - A^2 \cos^2 w(s) - B^2 \sin^2 w(s)},$$

e  $A = \sqrt{\lambda_3/(\lambda_3 - \lambda_1)}$  e  $B = \sqrt{\lambda_3/(\lambda_3 - \lambda_2)}$ . Além disso,

$$\langle \alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s) \rangle = \kappa_\alpha^2 \tau_\alpha = c_1 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = AB(1 + A^2 B^2 - A^2 - B^2) \left( \frac{w'(s)}{\alpha'_3(s)} \right)^3,$$

assim

$$\kappa_\alpha(s)^2 - w'(s)^2 = -\lambda_1 \lambda_2.$$

Provaremos agora que a superfície  $\Psi(s, t) = \alpha(s) + \alpha(t)$  é mínima. A condição  $H = 0$  em (2-2) é dada por  $\langle \alpha'(s) \times \alpha''(s), \alpha'(t) \rangle = \langle \alpha'(s), \alpha'(t) \times \alpha''(t) \rangle$ . De (3-6) segue que

$$\begin{aligned} \langle \alpha'(s) \times \alpha''(s), \alpha'(t) \rangle &= \\ \frac{ABw'(s)}{\alpha'_3(s)} &((A^2 - 1) \cos w(s) \cos w(t) + (B^2 - 1) \sin w(s) \sin w(t) + \alpha'_3(s) \alpha'_3(t)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \alpha'(s), \alpha'(t) \times \alpha''(t) \rangle &= \\ \frac{ABw'(t)}{\alpha'_3(t)} &((A^2 - 1) \cos w(s) \cos w(t) + (B^2 - 1) \sin w(s) \sin w(t) + \alpha'_3(s) \alpha'_3(t)). \end{aligned}$$

Portanto, a superfície é mínima se, e somente se, provarmos que  $\frac{w'(s)}{\alpha'_3(s)} = \frac{w'(t)}{\alpha'_3(t)}$  para todo  $s$  e  $t$ . No entanto, isso é válido porque de (3-8) deduzimos que

$$\frac{w'(s)}{\alpha'_3(s)} = \sqrt{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} = \frac{w'(t)}{\alpha'_3(t)}.$$

□

**Observação 4** Caso a equação característica (3-18) tenha uma raiz dupla, ou seja,  $\lambda_1 = \lambda_2$ , então  $A = B = \sqrt{\lambda_3/(\lambda_3 - \lambda_1)}$ , e assim temos que

$$\alpha'(s) = (A \cos w(s), A \sin w(s), \sqrt{1 - A^2})$$

e

$$\alpha''(s) = w'(s)(-A \sin w(s), A \cos w(s), 0).$$

Donde  $\kappa_\alpha^2 = \|\alpha''(s)\| = A^2 w'(s)^2$ . Por outro lado, temos que  $(w'(s))^2 = \kappa_\alpha^2 + \lambda_1 \lambda_2$ , dessa forma segue

$$\kappa_\alpha^2 = \frac{\lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_1} (\kappa_\alpha^2 + \lambda_1^2),$$

ou seja,

$$(\lambda_3 - \lambda_1) \kappa_\alpha^2 = \lambda_3 \kappa_\alpha^2 + \lambda_3 \lambda_1^2,$$

logo,

$$\kappa_{\alpha}^2 = -\lambda_1 \lambda_3.$$

A torção é dada por

$$\tau_{\alpha} = \frac{c_1}{\kappa_{\alpha}^2} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}{-\lambda_3 \lambda_1} = -\lambda_1.$$

Dessa forma, temos que a curvatura e a torção são constantes, logo a curva  $\alpha$  é uma hélice circular. Por outro lado, a equação diferencial autônoma (3-19) é equivalente a

$$y'^2 + \frac{1}{y^2}(y^2 + \lambda_1^2)(y^2 + \lambda_1 \lambda_3)^2 = 0.$$

Donde concluímos que não existem soluções não constantes de (3-19)

**Observação 5** A equação (3-19) fornece a curvatura  $\kappa$  da curva geratriz  $\alpha$  da superfície mínima de translação  $\Psi(s, t) = \alpha(s) + \alpha(t)$ . Fazendo uma mudança de variável  $u = -(\kappa^2 + \frac{c_3}{3})$ , ou seja, de forma equivalente temos

$$\kappa^2 = -\frac{3u + c_3}{3}. \quad (3-22)$$

Tomando a derivada de  $u$  temos  $u' = -2\kappa\kappa'$  e portanto  $\kappa = \frac{-u'}{2\kappa'}$ . Dessa forma, (3-22) é equivalente a

$$(\kappa')^2 = \frac{3(u')^2}{4(3u + c_3)}. \quad (3-23)$$

Substituindo (3-23) em (3-19), obtemos

$$-\frac{3u'^2}{4(3u + c_3)} + \frac{(3u + c_3)^2}{9} - c_3 \frac{3u + c_3}{3} - \frac{3c_1^2}{3u + c_3} + c_1 c_2 = 0.$$

Simplificando, a equação anterior resulta

$$\frac{-27u'^2 + 4(3u + c_3)^3 - 12c_3(3u + c_3)^2 - 108c_1^2 + 36(3u + c_3)c_1 c_2}{36(3u + c_3)} = 0,$$

ou seja,

$$-27u'^2 + 4(3u + c_3)^3 - 12c_3(3u + c_3)^2 - 108c_1^2 + 36(3u + c_3)c_1 c_2 = 0.$$

dividindo essa equação por  $-27$  decorre que

$$-u'^2 - 4u^3 + \frac{4}{3}uc_3^2 + \frac{8}{27}c_3^3 + 4c_1^2 - 4c_1 c_2 u + \frac{4}{3}c_1 c_2 c_3 = 0.$$

Logo, colocando  $u$  em evidência temos

$$u^2 - 4u^3 + u \left( \frac{4}{3}c_3^2 - 4c_1c_2 \right) + \left( 4c_1^2 - \frac{4}{3}c_1c_2c_3 + \frac{8}{27}c_3^3 \right) = 0$$

Tome  $g_2 = \frac{4}{3}c_3^2 - 4c_1c_2$  e  $g_3 = 4c_1^2 - \frac{4}{3}c_1c_2c_3 + \frac{8}{27}c_3^3$ , sendo assim, concluímos que

$$u^2 - 4u^3 + g_2u + g_3 = 0.$$

Portanto,  $u$  é a forma real da  $\mathcal{P}$ -Função de Weierstrass com invariantes  $g_2$  e  $g_3$ . Assim,  $\kappa$  pode ser explicitamente escrita em termos das formas reais das equações elípticas [28]. Terminamos esse capítulo mostrando exemplos explícitos do procedimento para construir superfícies mínimas de translação com curvas geratrizes não planares, de acordo com o Teorema 3.2. Lembrando que pelo item 1 do Teorema 3.2, se a curva geratriz  $\alpha$  tem curvatura constante (respectivamente torção constante), então sua torção (respectivamente curvatura) também é constante e, portanto, a curva é uma hélice circular e a superfície resultante é um helicóide pelo Teorema 2.7.

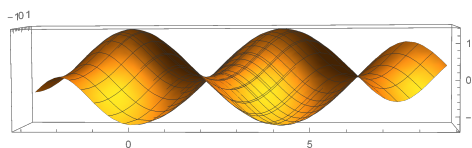
**Observação 6** A família de superfícies mínimas de translação é construída em termos das raízes cúbica da equação polinomial  $-\lambda^3 + c_2\lambda^2 - c_3\lambda + c_1 = 0$ . Após uma homotetia do espaço ambiente  $\mathbb{R}^3$  que preserva a minimalidade da superfície e a propriedade de ser uma superfície de translação, podemos fixar uma das raízes desta equação, como consequência as superfícies mínimas de translação são parametrizadas por dois parâmetros.

Seguindo os Teoremas 3.2 e 3.3 apresentamos aqui o esquema por meio de uma série de etapas para a construção de exemplos de superfícies mínimas de translação no espaço Euclidiano.

- 1 Fixe as raízes de (3-18), por simplicidade, podemos considerar  $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0 < \lambda_3$ . A raiz  $\lambda_3$  será fixada para ser  $\lambda_3 = 1$ . Calcule  $A$  e  $B$ .
- 2 Calcule  $c_i$  e o polinômio (3-18).
- 3 Calcule os pontos de equilíbrio  $y_1 = \sqrt{-\lambda_2\lambda_1}$  e  $y_2 = \sqrt{-\lambda_1\lambda_3}$  de (3-19).
- 4 Fixe o valor inicial  $y_0$  de (3-19) em que  $y_1 < y_0 < y_2$ .
- 5 Resolva numericamente a equação (3-19). Fixe um valor inicial  $w_0$  para resolver numericamente a equação (3-17) e a função  $w$ .
- 6 Encontre a curva  $\alpha$ .

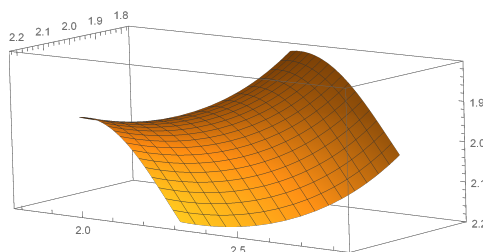
**Exemplo 3.4** Caso do helicóide. Escolha a raiz dupla  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ . Por (3-2) os coeficientes são  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = -1$  e  $c_3 = -1$  e o polinômio em (3-18) é  $-\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ . Assim, o valor de  $A = B = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , e os pontos de equilíbrio são  $y_1 = y_2 = 1$ . Tome  $y_0 = 1$  como condição inicial em (3-19). Então a curvatura é  $\kappa = 1$  e a torção é  $\tau = 1$ . Observe

que tanto a curvatura como a torção são constantes e, portanto, a curva  $\alpha$  é uma hélice e de acordo com o Teorema 2.7 a superfície é um helicóide.



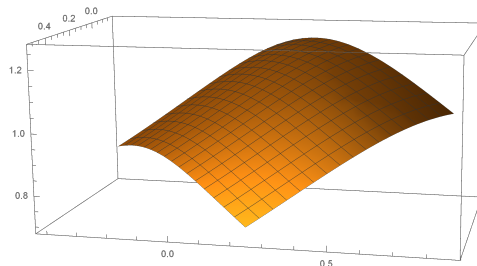
**Figura 3.1:** O Helicóide

**Exemplo 3.5** Tome  $\lambda_1 = -4$  e  $\lambda_2 = -1$ . Os coeficientes do polinômio (3-18) são  $c_1 = 4$ ,  $c_2 = -4$  e  $c_3 = -1$ , e portanto,  $p(\lambda) = -\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 4 = 0$ . Assim, o valor de  $A = 0,447$  e  $B = 0,707$ . Os pontos de equilíbrio são  $y_1 = 1$  e  $y_2 = 2$ . Tome  $y_0 = 1.3$  como condição inicial em (3-19).



**Figura 3.2:** Caso  $\lambda_1 = -4$  e  $\lambda_2 = -1$  e  $\lambda_3 = 1$ .

**Exemplo 3.6** Tome  $\lambda_1 = -2$  e  $\lambda_2 = -1$ . Os coeficientes do polinômio (3-18) são  $c_1 = 2$ ,  $c_2 = -2$  e  $c_3 = -1$  e  $p(\lambda) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$ , assim o valor de  $A = 0,577$  e  $B = 0,707$ . Os pontos de equilíbrio são  $y_1 = 1$  e  $y_2 = 2$ . Escolha o valor  $y_0 = 1.1$  como condição inicial em (3-19).



**Figura 3.3:** Caso  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = -1$  e  $\lambda_3 = 1$ .

# Superfícies Mínimas de Translação no Espaço Hiperbólico

Neste capítulo, apresentaremos brevemente alguns conceitos e resultados básicos de geometria Riemanniana que serão necessários para a compreensão do objeto de nosso estudo, que são as superfícies de translação no espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^3$ .

## 4.1 Noções Básicas de Geometria Riemanniana

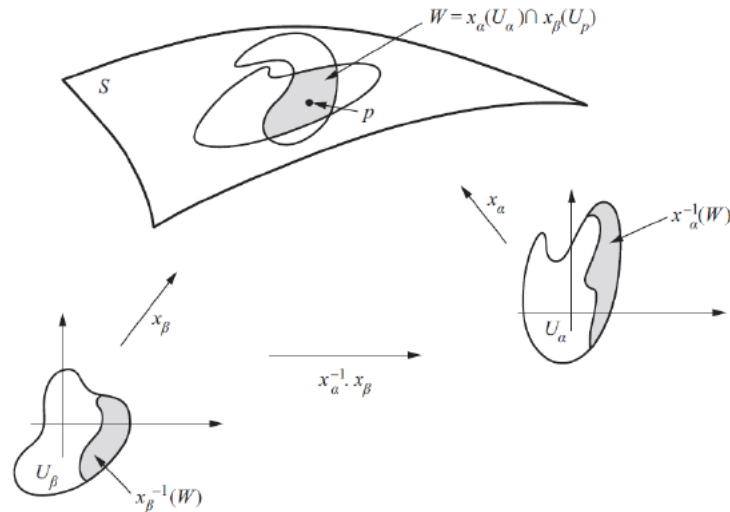
Nesta seção abordaremos alguns conceitos como variedades, métrica Riemanniana, conexões afins e conexões Riemannianas, noções essenciais para o entendimento das superfícies mínimas de translação no espaço hiperbólico, para mais detalhes consultar [3].

**Definição 4.1** (*Variedade Diferenciável*) Uma *variedade diferenciável* de dimensão  $n$  é um conjunto  $M$  e uma família de aplicações biunívocas  $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \rightarrow M$  de abertos  $U_\alpha$  de  $\mathbb{R}^n$  em  $M$  tais que

- 1)  $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$ ;
- 2) Para todo par  $\alpha, \beta$ , com  $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ , os conjuntos  $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(W)$  e  $\mathbf{x}_\beta^{-1}(W)$  são abertos em  $\mathbb{R}^n$  e as aplicações  $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$  e  $\mathbf{x}_\alpha^{-1} \circ \mathbf{x}_\beta$  são diferenciáveis;
- 3) A família  $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$  é máxima relativamente às duas primeiras condições.

O par  $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$  (ou aplicação  $\mathbf{x}_\alpha$ ) com  $p \in \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$  (figura 4.1) é chamado de *parametrização* (ou sistema de coordenadas) de  $M$  em  $p$ ;  $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$  é chamada uma *vizinhança coordenada* em  $p$ . Uma família satisfazendo (1) e (2) é chamada uma *estrutura diferenciável* em  $M$ .

A seguir definiremos o objeto que permitirá estudar as questões geométricas da variedade, como por exemplo, medições, distâncias, áreas, ângulos e etc.



**Figura 4.1:** Variedades diferenciáveis

**Definição 4.2** Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável  $M$  é uma correspondência que associa a cada ponto  $p \in M$  um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  no espaço tangente  $T_p M$ , tal que: se  $\mathbf{x} : U \rightarrow M$ , com  $U \subset \mathbb{R}^n$  aberto, é um sistema de coordenadas locais em torno de  $p$ , com  $\mathbf{x}(x_1, x_2, \dots, x_n) = q \in \mathbf{x}(U)$  e  $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\mathbf{x}(0, \dots, 1, \dots, 0)$  então

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

é uma função diferenciável em  $U$ . Uma variedade diferenciável munida de uma métrica Riemanniana é dita Variedade Riemanniana.

**Definição 4.3** Duas métricas  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$  em uma variedade diferenciável  $M$  são ditas conformes quando existe uma função diferenciável  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ , positiva, tal que para todo ponto  $p \in M$  e todo  $u, v \in T_p M$  se tenha

$$\langle u, v \rangle_p = \varphi(p) \langle\langle u, v \rangle\rangle.$$

Em outros termos, duas métricas são conformes quando a razão entre elas é dada por uma função diferenciável da variedade  $M$  em  $\mathbb{R}$ . A condição de tal função ser positiva se dá justamente pelo fato de ser a razão entre métricas.

Na Literatura, a métrica Euclidiana é usualmente denotada por  $ds^2 = \sum_i dx_i^2$ , ou seja,  $g_{ij} = \delta_{ij}$ . Assim, toda métrica que é dada por

$$g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\varphi^2},$$

é uma métrica conforme à métrica usual do Espaço Euclidiano.

**Definição 4.4 (Conformemente flat)** Seja  $L$  um espaço ambiente. Quando  $L$  é munido de uma métrica conforme à métrica Euclidiana  $L$  é chamado de espaço conformemente flat.

Se  $\varphi$  for uma função limitada, então a métrica  $g_{ij}$  é uma métrica completa, a prova desse fato pode ser encontrada em [23, p. 65].

**Definição 4.5** Um campo de vetores  $X$  em uma variedade diferenciável  $M$  é uma correspondência que a cada ponto  $p \in M$  associa um vetor  $X(p) \in T_pM$ . Em termos de aplicações,  $X$  é uma aplicação de  $M$  no fibrado tangente  $TM$ . O campo  $X$  é diferenciável se a aplicação  $X : M \rightarrow TM$  é diferenciável.

O fibrado tangente é o conjunto  $TM := \{(p, v) : p \in M, v \in T_pM\}$ .

Considerando uma parametrização  $X : U \rightarrow M$  definida num aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ , escrevemos

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde cada  $a_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função em  $U$  e  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$  é a base associada à parametrização de  $\mathbf{x}$ .

Um campo de vetores  $X$  também pode ser caracterizado como uma aplicação  $X : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{F}$  definida no conjunto  $\mathcal{D}$  das funções em  $M$  que são diferenciáveis no conjunto  $\mathcal{F}$  das funções em  $M$ , temos que o campo de vetores  $X$  é dado por

$$(Xf)(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p),$$

onde  $f$  indica a expressão de  $f \in \mathcal{D}$  na parametrização  $\mathbf{x}$ .

**Definição 4.6** Sejam  $X$  e  $Y$  campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável  $M$ . Então definimos o colchete como sendo  $[X, Y] = XY - YX$ .

O colchete  $[X, Y]$  pode também ser interpretado como uma derivação de  $Y$  ao longo das "trajetórias" de  $X$ .

Indicaremos por  $\mathcal{X}(M)$  o conjunto dos campos de vetores de classe  $C^\infty$  em  $M$  e por  $\mathcal{D}(M)$  o anel das funções reais de classe definida em  $M$ .

**Definição 4.7** Uma conexão afim,  $\nabla$ , em uma variedade diferenciável  $M$  é uma aplicação

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$$

se indica por  $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$  e que satisfaz as seguintes propriedades:

$$a) \nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z;$$

$$b) \nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z;$$

$$c) \nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y,$$

onde  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$  e  $f, g \in \mathcal{D}(M)$ .

A conexão  $\nabla_X Y$  pode ser vista como a derivada do campo  $Y$  em relação ao campo  $X$ . Em coordenadas locais, por exemplo, podemos escrever a conexão como  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$ . A compatibilidade com a métrica indica o modo de derivar na métrica.

**Proposição 4.8** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável com uma conexão afim  $\nabla$ . Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial  $V$  ao longo da curva diferenciável  $c : I \rightarrow M$  um outro campo vetorial  $\frac{DV}{dt}$  ao longo de  $c$ , denominado derivada covariante de  $V$  ao longo de  $c$ , tal que:*

$$(a) \frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$$

$$(b) \frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$$

(c) *Se  $V$  é induzido or um campo de vetores  $Y \in (M)$ , isto é,  $V(t) = Y(c(t))$ , então  $\frac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt} Y$ .*

*Demonstração.* consultar [3]. □

**Definição 4.9** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável com uma conexão afim  $\nabla$ . Um campo vetorial  $V$  ao longo de uma curva  $c : I \rightarrow M$  é chamado paralelo quando  $\frac{DV}{dt} = 0$  para todo  $t \in I$ .*

**Definição 4.10** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável com uma conexão afim  $\nabla$  e uma métrica Riemanniana  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . A conexão é dita compatível com a métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , quando para toda curva diferenciável  $c$  e quaisquer pares de campos de vetores paralelos  $P$  e  $P'$  ao longo de  $c$ , tivermos  $\langle P, P' \rangle = \text{constante}$ .*

A definição que acabamos de apresentar é justificada pela proposição seguinte que mostra que se  $\nabla$  é compatível com  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , então podemos diferenciar o produto interno pela "regra do produto" usual.

**Proposição 4.11** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana. Uma conexão  $\nabla$  em  $M$  é compatível com a métrica se, e somente, se para todo par  $V$  e  $W$  de campos de vetores ao longo da curva diferenciável  $c : I \rightarrow M$  tem-se*

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, \quad t \in I.$$

*Demonstração.* consultar [3] □

Utilizando a proposição anterior, podemos obter a seguinte caracterização da compatibilidade com a métrica.

**Corolário 4.12** *Uma conexão  $\nabla$  em uma variedade Riemanniana  $M$  é compatível com a métrica se, e somente se,*

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad X, Y, Z \in (M).$$

*Demonstração.* Suponhamos que  $\nabla$  é compatível com a métrica. Seja  $p \in M$  e sejam  $c : I \rightarrow M$  uma curva diferenciável com  $c(t_0) = p$   $t_0 \in I$ , e com  $\left. \frac{dc}{dt} \right|_{t=t_0} = X(p)$ . Então

$$X(p)\langle Y, Z \rangle = \left. \frac{d}{dt} \langle Y, Z \rangle \right|_{t=t_0} = \langle \nabla_{X(p)} Y, Z \rangle_p + \langle \nabla_{X(p)} Z \rangle_p.$$

Como  $p$  é arbitrário e, dessa forma, obtemos o resultado desejado. A recíproca é imediata. □

**Definição 4.13** *Uma conexão afim  $\nabla$  em uma variedade diferenciável  $M$  é dita *simétrica* quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad \text{para todo } X, Y \in \mathcal{X}(M). \quad (4-1)$$

**Observação 7** Em um sistema de coordenadas  $(U, \mathbf{x})$ , escrevendo  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_i}$ . Podemos concluir  $\Gamma_{ij}^k$  são funções diferenciáveis e chamaremos de os símbolos de Christoffel, da conexão  $\nabla$ . Desse modo, o fato da conexão ser simétrica implica que para quaisquer  $i, j = 1, \dots, n$ ,

$$\nabla_{X_i} X_j = \nabla_{X_j} X_i \Leftrightarrow X_i = \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \quad (4-2)$$

**Definição 4.14** *As funções  $\Gamma_{ij}^k$  definidas no aberto  $U$  são chamadas de coeficientes da conexão  $\nabla$  em  $U$  ou símbolos de Christoffel da conexão  $\nabla$ .*

O teorema a seguir garante a existência e unicidade de uma conexão afim que é ao mesmo tempo, simétrica e compatível com a métrica de  $M$ .

**Teorema 4.15** *(Levi-Civita). Dada uma variedade Riemanniana  $M$ , existe uma única conexão afim  $\nabla$  em  $M$  satisfazendo as condições:*

- i)  $\nabla$  é simétrica
- ii)  $\nabla$  é compatível com a métrica.

*Demonstração.* Iniciaremos a prova com a unicidade. Para isso, suponha a existência da conexão Levi-Civita  $\nabla$ . Como  $\nabla$  é compatível com a métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de  $M$ , temos

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad (4-3)$$

$$Y\langle Z, X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle, \quad (4-4)$$

$$Z\langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle. \quad (4-5)$$

Somando (4-3) e (4-4), subtraindo (4-5) e utilizando as propriedades do produto interno, temos

$$X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle$$

$$= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle \nabla_X Z, Y \rangle + \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle \nabla_Y X, Z \rangle - \langle \nabla_Z X, Y \rangle - \langle \nabla_Z Y, X \rangle \quad (4-6)$$

$$= \langle \nabla_X Z - \nabla_Z X, Y \rangle + \langle \nabla_Y Z - \nabla_Z Y, X \rangle + \langle \nabla_X Y - \nabla_Y X, Z \rangle + 2\langle Z, \nabla_Y X \rangle, \quad (4-7)$$

a segunda igualdade segue somando e subtraindo o termo  $\langle Z, \nabla_Y X \rangle$ . Como  $\nabla$  é simétrica, temos

$$X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle = \langle [X, Y], Y \rangle + \langle [Y, Z], X \rangle + \langle [X, Y], Z \rangle + 2\langle Z, \nabla_Z \nabla_Y X \rangle.$$

logo

$$\langle Z, \nabla_Y X \rangle = \frac{1}{2} \{ X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle - \langle [X, Z], Y \rangle - \langle [Y, Z], X \rangle - \langle [X, Y], Z \rangle \}. \quad (4-8)$$

Dessa forma, como (4-8), determina  $\nabla$  de modo único pela Métrica Riemanniana  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , temos a unicidade de  $\nabla$ . Para mostrar a existência, defina  $\nabla$  por (4-8) e, dessa maneira, temos que  $\nabla$  está bem definida e satisfaz as condições (i) e (ii) do teorema, pelo modo que foi construída. Isso prova a existência da conexão Levi-Civita e, por fim, demonstra o teorema.  $\square$

Tomando um sistema de coordenadas  $(U, x)$ , vamos calcular os símbolos de Christoffel da conexão Riemanniana. De (4-8) segue-se que

$$\sum_k \Gamma_{ij}^k g_{lk} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} + \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\}$$

onde  $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$ . Como a matriz  $(g_{km})$  admite uma inversa  $(g^{km})$ , teremos que

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} + \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km}. \quad (4-9)$$

A equação (4-9) é a expressão clássica dos símbolos de Christoffel em um sistema de coordenadas.

## 4.2 Superfícies em espaços localmente flat

Nosso objetivo aqui será calcular os símbolos de Christoffel. Para isso, considere a conexão Levi-Civita  $\nabla$  de  $\mathbb{R}^3$  e a base canônica  $\{e_1, e_2, e_3\}$ . Dessa forma, temos

$$\nabla_{e_i} e_j = \sum_{k=1}^3 \Gamma_{ij}^k e_k \quad \text{e} \quad \nabla_{e_i} e_j = \nabla_{e_j} e_i \quad \text{pela simetria de } \nabla$$

Como  $g_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\varphi^2}$ ,  $g_{ij} = 0$ ,  $\forall i \neq j$ . Observando sempre que  $m \neq k$  tem-se  $g^{mk} = 0$  e, portanto, todas as parcelas com  $m \neq k$  se anulam, dessa forma, utilizando (4-9), os símbolos de Christoffel são dados por

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} + \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{kk}. \quad (4-10)$$

onde  $g^{kk} = g_{kk}^{-1} = \varphi^2 I$ , em que  $I$  denota a matriz identidade. Temos também que  $\frac{\partial}{\partial x_l} g_{ms} = \frac{-2\varphi_l}{\varphi^3} \delta_{ms}$ , onde  $\varphi_l$  denota a derivada parcial de  $\varphi$  com respeito a  $x_l$ . Assim, iremos analisar quatro casos:

- i)  $i \neq j \neq k \neq i$ . Nesse caso,  $g_{jk} = g_{ki} = g_{ij} = 0$ , portanto,  $\Gamma_{ij}^k = 0$
- ii)  $i \neq j = k$ . Dessa forma  $g_{ij} = 0$  e  $g_{ik} = 0$ , portanto  $\Gamma_{ik}^k = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} g_{kk} \right) g^{kk} = -\frac{\varphi_i}{\varphi}$
- ii)  $i = j \neq k$ . Desse modo,  $g_{jk} = 0$  e  $g_{ki} = 0$  e, portanto,  $\Gamma_{ii}^k = \frac{1}{2} \left( -\frac{\partial}{\partial x_k} g_{ii} \right) g^{kk} = \frac{\varphi_k}{\varphi}$
- iv)  $i = j = k$ . Nesse caso,  $\Gamma_{ii}^i = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} g_{ii} + \frac{\partial}{\partial x_i} g_{ii} + \frac{\partial}{\partial x_i} g_{ii} \right) g^{ii} = \frac{\varphi_i}{\varphi}$ .

Nessas condições, escrevemos de forma resumida os símbolos de Christoffel da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k &= 0, & i \neq j \neq k \neq i \\ \Gamma_{ii}^i &= \frac{\varphi_i}{\varphi}, & \forall i \neq j \\ \Gamma_{ij}^k &= -\frac{\varphi_i}{\varphi}, & 1 \leq i, j \leq 3. \end{aligned} \quad (4-11)$$

No teorema a seguir, considerando superfícies no espaço conforme ao espaço Euclidiano, obtemos as relações entre a curvatura extrínseca da superfície com respeito a métrica euclidiana e a métrica conformemente flat. [4].

**Teorema 4.16** *Seja  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  com  $U \subset \mathbb{R}^2$ , aberto uma superfície parametrizada regular. Considere  $x(U)$  como uma superfície em  $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  com a Métrica Euclidiana e sejam  $N$  a sua aplicação normal de Gauss,  $-\lambda_i$ ,  $H$  e  $K$  as suas curvaturas principais, média e Gaussiana, respectivamente. Analogamente, considere  $x(U)$  como uma superfície em  $\mathbb{R}^3$ , com a métrica conforme à Métrica Euclidiana, com fator conforme  $\varphi^{-2}$  e sejam  $\tilde{N}$  a sua aplicação normal de Gauss,  $\tilde{\lambda}_i$ ,  $\tilde{H}$  e  $\tilde{K}_e$  as suas curvaturas principais, média e extrínseca, respectivamente. Então*

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}_i &= F\lambda_i - \langle N, \text{grad}F \rangle, \\ \tilde{H} &= FH + \langle N, \text{grad}F \rangle, \\ \tilde{K}_e &= F^2K + 2HF \langle N, \text{grad}F \rangle + \langle N, \text{grad}F \rangle^2,\end{aligned}$$

onde  $z$  denota a expressão de  $z$  em  $X(u, v)$ ,  $(u, v) \in U$ .

*Demonstração.* Seja  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  com  $U \subset \mathbb{R}^2$ , aberto, uma superfície parametrizada regular em  $\mathbb{R}^3$  dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = \sum_{k=1}^3 \mathbf{x}^k(u, v) e_j, \quad (u, v) \in U,$$

onde  $\mathbf{x}^j$  representa a  $j$ -ésima coordenada da parametrização  $x$  e  $N$  a aplicação normal de Gauss de  $\mathbf{x}$  em  $\mathbb{R}^3$  a aplicação de Gauss de  $\mathbf{x}$  em  $\mathbb{R}^3$  com a norma Euclidiana dada por

$$N(u, v) = \sum_{j=1}^3 \mathbf{N}^j(u, v) e_j.$$

Observe que

$$|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|_g = \sqrt{g_{uv}} = \sqrt{\frac{\delta_{uv}}{\varphi^2(u, v)}} = \frac{\sqrt{g_{uv}}}{\varphi(u, v)} = \frac{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|_g}{\varphi(u, v)},$$

dessa forma,

$$\tilde{N}(u, v) = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|_g}(u, v) = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\frac{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|_g}{\varphi(u, v)}}(u, v) = \varphi(u, v) \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v|_g}(u, v) = \varphi(u, v)N(u, v).$$

Pelo item (c) da definição (4.7) temos

$$\nabla_{\mathbf{x}_i} \tilde{N} = \nabla_{\mathbf{x}_i} (\varphi N) = \mathbf{x}_i(\varphi)N + \varphi \nabla_{\mathbf{x}_i} N, \quad \forall i \leq i \leq 3.$$

Dessa maneira, temos

$$\nabla_{\mathbf{x}_i} \tilde{N} = \nabla_{\mathbf{x}_i} (\varphi N) = \mathbf{x}_i(\varphi)N + \varphi(\nabla_{\mathbf{x}_i} N). \quad (4-12)$$

Segue das propriedades de conexão, que

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}_i} N &= \nabla_{x_i} \left( \sum_{k=1}^3 N^k e_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^3 N^k e_k \nabla_{x_i} (N^k e_k) \\ &= \sum_{k=1}^3 [\mathbf{x}_i(N^k e_k) + N^k \nabla_{\mathbf{x}_i} e_k] \\ &= N_i + \sum_{k=1}^3 [N^k \nabla_{\sum_{j=1}^3 \mathbf{x}_i^j e_j} e_k] \\ &= N_i + \sum_{k,j=1}^3 N^k \mathbf{x}_i^j \nabla_{e_j} e_k \\ &= N_i + \sum_{k,j,s=1}^3 N^k \mathbf{x}_i^j \Gamma_{jk}^s e_s \\ &= N_i + \sum_{j=1}^3 N^j \mathbf{x}_i^j \Gamma_{jj}^j e_j + \sum_{j \neq k} N^k \mathbf{x}_i^j \Gamma_{jk}^k e_k + \sum_{j \neq s} N^j \mathbf{x}_i^j \Gamma_{jj}^s e_s + \sum_{j \neq k} N^k \mathbf{x}_i^j \Gamma_{jk}^j e_j \end{aligned}$$

Usando os valores dos símbolos de Christoffel em (4-11) obtemos

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}_i} N &= N_i - \sum_{j=1}^3 N^j \mathbf{x}_i^j \left( \frac{\varphi_j}{\varphi} \right) e_j - \sum_{j \neq k} N^k \mathbf{x}_i^j \left( \frac{\varphi_j}{\varphi} \right) e_k \\ &\quad + \sum_{j \neq s} N^j \mathbf{x}_i^j \left( \frac{\varphi_s}{\varphi} \right) e_s - \sum_{j \neq k} N^k \mathbf{x}_i^j \left( \frac{\varphi_k}{\varphi} \right) e_j \\ &= N_i - \sum_{j,k=1} N^k \mathbf{x}_i^j \left( \frac{\varphi_j}{\varphi} \right) e_k - \sum_{j \neq s} N^j \mathbf{x}_i^j \left( \frac{\varphi_s}{\varphi} \right) e_s - \sum_{j \neq k} N^k \mathbf{x}_i^j \left( \frac{\varphi_k}{\varphi} \right) e_j \\ &\quad + \sum_{j=s=1}^3 N^j \mathbf{x}_i^j \left( \frac{\varphi_s}{\varphi} \right) e_s - \sum_{j=k=1}^3 N^k \mathbf{x}_i^k \left( \frac{\varphi_j}{\varphi} \right) e_j \end{aligned}$$

Note que

$$\sum_{j=s=1}^3 N^j \mathbf{x}_i^j \left( \frac{\varphi_s}{\varphi} \right) e_s = \sum_{j=1}^3 N^j \mathbf{x}_i^j \sum_{s=1}^3 N^j \left( \frac{\varphi_s}{\varphi} \right) e_s,$$

onde  $\sum_{j=s=1}^3 N^j \mathbf{x}_i^j = \langle N, \mathbf{x}_i \rangle = 0$ , pois os vetores  $N$  e  $\mathbf{x}_i$  são ortogonais. Sendo assim, temos

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}_i} N &= N_i - \sum_{j,k=1}^3 N^k \mathbf{x}_i^j \left( \frac{\varphi_j}{\varphi} \right) e_j - \sum_{j,k=1}^3 N^k \mathbf{x}_i^j \left( \frac{\varphi_j}{\varphi} \right) e_k \\ &= N_i - \left[ \sum_{k=1}^3 N^k \frac{\varphi_k}{\varphi} \right] \mathbf{x}_i - \left[ \sum_{j=1}^3 \mathbf{x}_i^j \frac{\varphi_j}{\varphi} \right] N. \end{aligned} \quad (4-13)$$

Substituindo (4-13) em (4-12), obtemos

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}_i} \tilde{N} &= \mathbf{x}_i(\varphi)N + \varphi \left[ N_i - \left( \sum_{k=1}^3 N^k \frac{\varphi_k}{\varphi} \right) \mathbf{x}_i - \left( \sum_{j=1}^3 \mathbf{x}_i^j \frac{\varphi_j}{\varphi} \right) N \right] \\ &= \mathbf{x}_i(\varphi)N + \varphi N_i - \left( \sum_{k=1}^3 N^k \varphi_k \right) \mathbf{x}_i - \left( \sum_{j=1}^3 \mathbf{x}_i^j \varphi_j \right) N \\ &= \varphi N_i - \left( \sum_{k=1}^3 N^k \varphi_k \right) \mathbf{x}_i + \left[ \mathbf{x}_i(\varphi) - \left( \sum_{j=1}^3 \mathbf{x}_i^j \varphi_j \right) \right] N. \end{aligned}$$

Uma vez que  $\sum_{k=1}^3 N^k \varphi_k = \langle N, \text{grad} \varphi \rangle$  e que  $\mathbf{x}_i = \sum_{k=1}^3 \mathbf{x}_i^k e_k$ ,  $\mathbf{x}_i(\varphi) = \langle \mathbf{x}_i, \text{grad} \varphi \rangle = \sum_{k=1}^3 \mathbf{x}_i^k \varphi_k$  e disso, segue que

$$\nabla_{\mathbf{x}_i} \tilde{N} = \varphi N_i - \langle N, \text{grad} \varphi \rangle \mathbf{x}_i.$$

Como  $N_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$  e  $\nabla_{\mathbf{x}_i} \tilde{N} = \tilde{\lambda}_i \mathbf{x}_i$  então segue da equação anterior que

$$\tilde{\lambda}_i = \varphi \lambda_i - \langle N, \text{grad} \varphi \rangle. \quad (4-14)$$

Segue da definição de curvatura média que

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{\lambda}_i \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\varphi \lambda_i - \langle N, \text{grad} \varphi \rangle) \\ &= \varphi \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i - \langle N, \text{grad} \varphi \rangle \\ &= \varphi H - \langle N, \text{grad} \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Da definição de curvatura extrínseca, observando que temos duas curvaturas principais

$$\begin{aligned}
 \tilde{k}_E &= \prod_{i=1}^n \tilde{\lambda}_i \\
 &= (\varphi\lambda_1 - \langle N, \text{grad}\varphi \rangle)(\varphi\lambda_2 - \langle N, \text{grad}\varphi \rangle) \\
 &= \varphi^2\lambda_1\lambda_2 - \varphi\langle N, \text{grad}\varphi \rangle(\lambda_1 + \lambda_2) + \langle N, \text{grad}\varphi \rangle^2 \\
 &= \varphi^2K - 2\varphi H\langle N, \text{grad}\varphi \rangle + \langle N, \text{grad}\varphi \rangle^2.
 \end{aligned}$$

Portanto, concluímos a demonstração do teorema.  $\square$

### 4.3 Superfície de translação no Espaço Hiperbólico

Nesta seção vamos considerar superfícies mínimas de translação no espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^3$ . A ausência de uma estrutura afim em  $\mathbb{H}^3$  não permite dar um conceito intrínseco de superfície de translação como no ambiente do espaço Euclidiano. Em analogia ao que acontece em  $\mathbb{R}^3$ , vamos considerar o modelo do semiespaço de  $\mathbb{H}^3$ , isto é,

$$\mathbb{R}_+^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z > 0\}$$

munido com a métrica hiperbólica

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2}.$$

Nesse modelo, vamos considerar superfícies tipo gráfico, ou seja, superfícies que são somas de curvas planas de  $\mathbb{R}_+^3$  contidas em planos Euclidianos. As coordenadas  $x$  e  $y$  são intercambiáveis, mas isso não ocorre para a coordenada  $z$ . Esta é uma diferença com espaço Euclidiano, onde a escolha da coordenada  $z$  não é significativa. Por esse motivo, daremos duas definições de superfícies de translação em  $\mathbb{H}^3$ .

**Definição 4.17** *Considere o modelo do semiespaço de  $\mathbb{H}^3$ . Uma superfície  $S$  no espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^3$  é uma superfície de translação se for dada por uma imersão  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^3$  parametrizada por*

$$X(x, y) = (x, y, f(x) + g(y)), \quad (x, y) \in U \quad \text{tipo I} \quad (4-15)$$

ou

$$X(x, y) = (x, f(x) + g(y), z), \quad (x, y) \in U \quad \text{tipo II} \quad (4-16)$$

onde  $f$  e  $g$  são funções suaves em abertos de  $\mathbb{R}$ .

Ressaltamos que essa definição não é intrínseca à geometria hiperbólica, mas depende do modelo que consideramos na definição. Observamos também que não existem isometrias de  $\mathbb{H}^3$  que transportam superfícies do tipo *I* para as superfícies do tipo *II* e vice-versa.

Assim, como no espaço Euclidiano, uma superfície mínima em  $\mathbb{H}^3$  é uma superfície que possui a curvatura média  $H = 0$ , em cada ponto. Exemplos de superfícies mínimas são os planos totalmente geodésicos, isto é, planos de  $\mathbb{R}_+^3$  paralelos ao eixo  $O_z$ . Na literatura, exemplos de superfícies mínimas no espaço hiperbólico têm sido encontrados resolvendo o problema de correspondência de Dirichlet, obtendo gráficos mínimos. Para exemplos ver [9, 12, 1, 24]

A fim de buscar exemplos de superfícies mínimas, e motivados pelo que acontece no espaço Euclidiano, perguntamos se além dos planos geodésicos, existem outras superfícies mínimas de translação, isto é, superfícies do tipo Scherk. As conclusões são as seguintes:

**Teorema 4.18** *Não existem superfícies mínimas em  $\mathbb{H}^3$  que são superfícies de translação do tipo I.*

**Teorema 4.19** *As únicas superfícies mínimas em  $\mathbb{H}^3$  que são superfícies do tipo II são planos totalmente geodésicos.*

### 4.3.1 Prova dos Resultados

Seja  $S$  uma superfície  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^3$  uma imersão em  $\mathbb{H}_+^3$ . Como o espaço  $\mathbb{R}_+^3$  suporta a métrica hiperbólica e a métrica Euclidiana, a superfície  $S$  herda duas métricas induzidas. Conforme mostramos na seção anterior, a relação entre os campos normais unitários  $N_e, N$  de  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbb{H}^3$  respectivamente, é dada por  $N = \frac{1}{z}N_e$ , além disso, pelo Teorema 4.16 temos que as curvaturas principais  $\kappa_i$  de  $S \subset \mathbb{H}^3$  são relacionadas às curvaturas principais  $\kappa_i^e$  de  $S \subset \mathbb{R}^3$  por  $\kappa_i = \varphi \kappa_i^e - \langle N, \text{grad} \varphi \rangle$ . Como  $\varphi(x, y, z) = z$ , temos que

$$\kappa_i = z\kappa_i^e - \langle N_e, (0, 0, 1) \rangle = z\kappa_i^e - N_3,$$

onde  $N_3$  é a terceira componente do Campo  $N_e$ . Portanto,

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{(z\kappa_1^e + N_3) + (z\kappa_2^e + N_3)}{2} = z\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} + N_3.$$

Ou seja,

$$H(x, y, z) = zH_e(x, y, z) + N_3(x, y, z), \quad (4-17)$$

onde  $H_e$  a curvatura média Euclidiana da superfície  $S$ .

### 4.3.2 Surperfícies do Tipo I

Vamos mostrar o Teorema 4.18. Suponhamos que  $S$  é uma superfície de translação do tipo  $I$  dada pela parametrização (4-15). Como de costume, calculamos a curvatura  $H$  localmente pela fórmula clássica  $H_e = \frac{Ge - 2fF + Eg}{2(EG - F^2)}$ , em que  $E, F, G$  e  $e, f, g$  são os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental de  $X$ , respectivamente calculada com respeito à métrica Euclidiana. De (4-15) temos

$$\begin{aligned} X_x &= (1, 0, f') \\ X_{xx} &= (0, 0, f'') \\ X_y &= (0, 1, g') \\ X_{yx} &= X_{xy} = (0, 0, 0) \\ X_{yy} &= (0, 0, g''). \end{aligned}$$

Os elementos da primeira forma fundamental são dados por

$$E = 1 + f'^2 \quad F = f'g' \quad G = 1 + g'^2.$$

O vetor normal e unitário da superfície no espaço Euclidiano é dado por

$$N_e = \frac{X_x \times X_y}{|X_x \times X_y|} = \frac{(-f', -g', 1)}{\sqrt{1 + f'^2 + g'^2}}$$

Os elementos da segunda forma fundamental são dados por

$$e = \frac{f''}{\sqrt{1 + f'^2 + g'^2}} \quad f = 0 \quad g = \frac{g''}{\sqrt{1 + f'^2 + g'^2}}.$$

A expressão da curvatura  $H_e$  e  $N_3$  são

$$H_e = \frac{1}{2} \frac{(1 + g'^2)f'' + (1 + f'^2)g''}{(1 + f'^2 + g'^2)^{3/2}}$$

e

$$N_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2 + g'^2}}$$

respectivamente. Como a superfície é mínima, isto é,  $H = 0$  sobre  $S$ , temos de (4-17)

$$(f + g) \frac{(1 + g'^2)f'' + (1 + f'^2)g''}{(1 + f'^2 + g'^2)^{3/2}} + \frac{2}{\sqrt{1 + f'^2 + g'^2}} = 0.$$

Escrevemos a equação anterior como

$$(f + g) \left( \frac{f''}{1 + f'^2} + \frac{g''}{1 + g'^2} \right) = -2 \frac{1 + f'^2 + g'^2}{(1 + f'^2)(1 + g'^2)}. \quad (4-18)$$

Derivando (4-18) com respeito a  $x$  obtemos

$$f' \left( \frac{f''}{(1 + f'^2)} + \frac{g''}{(1 + g'^2)} \right) + (f + g) \left( \frac{f''}{(1 + f'^2)} \right)' = \frac{4f'f''g'^2}{(1 + f'^2)^2(1 + g'^2)}. \quad (4-19)$$

Derivando a equação (4-19) com respeito a  $y$  obtemos

$$f' \left( \frac{g''}{1 + g'^2} \right)' + g' \left( \frac{f''}{1 + f'^2} \right)' = 8 \frac{f'g'f''g''}{(1 + f'^2)^2(1 + g'^2)^2},$$

ou seja,

$$\frac{1}{g'} \left( \frac{g''}{1 + g'^2} \right)' + \frac{1}{f'} \left( \frac{f''}{1 + f'^2} \right)' = 8 \frac{f''g''}{(1 + f'^2)^2(1 + g'^2)^2}. \quad (4-20)$$

Como o lado esquerdo dessa equação é a soma de uma função de  $x$  com uma função de  $y$ , uma nova derivada em (4-20) em relação à  $x$  nos dá

$$\frac{1}{f'} \left( \frac{f''}{1 + f'^2} \right)' = \frac{8f'''g'' + 8f'''f'^2g'' - 32f''^2g''f'}{(1 + f'^2)^3(1 + g'^2)^2}. \quad (4-21)$$

Derivando (4-21) com respeito a  $y$  tem-se

$$0 = \frac{d}{dy} \left( \frac{8g''(f''' + f'''f'^2 - 4f'f''^2)}{(1 + f'^2)^3(1 + g'^2)^2} \right),$$

ou seja,

$$0 = g'''(f''' + f'''f'^2 - 4f'f''^2)(1 + g'^2) - g''(f''' + f'''f'^2 - 4f'f''^2)4g'g'',$$

ou ainda,

$$0 = (f'''(1 + f'^2) - 4f'f'') (g'''(1 + g'^2) - 4g'g'').$$

Isso implica que

$$-4f'f''^2 + (1 + f'^2)f''' = 0 \quad \text{ou} \quad -4g'g''^2 + (1 + g'^2)g''' = 0.$$

Sem perda de generalidade, vamos supor que  $-4f'f''^2 + (1 + f'^2)f''' = 0$ . Antes de prosseguirmos, note que

$$\begin{aligned}\ln(f'^2)' &= \frac{2f'''}{f''} \\ (1 + \ln(f'^2))' &= \frac{2f'f''}{(1 + f'^2)},\end{aligned}\tag{4-22}$$

logo,  $-4f'f''^2 + (1 + f'^2)f''' = 0$  é equivalente a

$$\frac{f'''}{f''} = \frac{4f'f''}{(1 + f'^2)}.\tag{4-23}$$

Substituindo (4-22) na equação (4-23) obtemos

$$(\ln(f'^2))' = 4(\ln(1 + f'^2))'.\tag{4-24}$$

Integrando (4-24) com respeito a  $x$ , temos

$$(\ln(f'^2)) = 4\ln(1 + f'^2) + \tilde{a}, \quad \tilde{a} \in \mathbb{R}.$$

Reescrevendo a equação anterior temos

$$\ln(f'^2) = \ln(1 + f'^2)^4 + \tilde{a},$$

ou seja,

$$f'' = a(1 + f'^2)^2, \quad a = \sqrt{\tilde{a}}\tag{4-25}$$

Substituindo (4-25) em (4-20) obtemos

$$\frac{1}{g'} \left( \frac{g''}{1 + g'^2} \right)' + 2af'' = 8a \frac{g''}{(1 + g'^2)^2}.\tag{4-26}$$

Vamos distinguir vários casos:

1. Seja  $a = 0$ . Então  $f(x) = mx + n$ ,  $m, n \in \mathbb{R}$  e de (4-26) temos que  $g'' = b(1 + g'^2)$  para alguma constante  $b$ . Retornando em (4-18) obtemos

$$b(mx + n + g(y)) = -2 \frac{1 + m^2 + g'^2}{(1 + m^2)(1 + g'^2)}.$$

- (a) Se  $b \neq 0$ , então  $m = 0$  e assim

$$b(n + g(y)) = -2,$$

implica que  $g$  é uma função constante, e por isso,  $g'' = 0$  e  $b = 0$ , contradição.

(b) Se  $b = 0$ , então  $g(y) = py + q$ . Agora (4-18) pode ser escrito como

$$0 = -2 \frac{1 + m^2 + p^2}{(1 + m^2)(1 + p^2)},$$

o que, mais uma vez, é uma contradição.

2. Suponha agora  $a \neq 0$ . De (4-26) e dado que  $x$  e  $y$  são variáveis independentes, existe uma constante  $b$  tal que

$$2af'' = -b, \quad \frac{1}{g'} \left( \frac{g''}{1 + g'^2} \right)' - 8a \frac{g''}{(1 + g'^2)^2} = b.$$

Em particular,

$$f(x) = -\frac{b}{4a}x^2 + mx + n, \quad m, n \in \mathbb{R}.$$

A partir desta expressão da função  $f$  junto com a equação diferencial  $f'' = a(1 + f'^2)^2$ , obtemos

$$\begin{aligned} f'' &= a(1 + f'^2)^2 \\ \frac{-b}{2a} &= a \left[ 1 + 2 \left( \frac{-bx}{2a} + m \right)^2 + \left( \frac{-bx}{2a} + m \right)^4 \right]. \end{aligned}$$

Após o desenvolvimento binomial encontramos o seguinte polinômio

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{-b^4}{8a^2}x^4 + \frac{b^3m}{a}x^3 + (b^2 + 2b^2m^2 + \frac{b^2m^2}{2})x^2 + (-4abm - 2bm^3)x \\ &+ (2a^2 + 4a^2m^2 + 2a^2m^4 + b). \end{aligned}$$

Se  $b = m = 0$  então  $f(x) = n = const$ , e dessa forma,  $a(1 + f'^2) = 0$  implicando que  $a = 0$  o que é uma contradição. Dessa maneira concluímos a demonstração para a superfície do tipo I.

### 4.3.3 Superfícies do tipo II

Seja  $S$  uma superfície de translação do tipo II, ou seja,  $S$  é dada pela parametrização

$$X(x, z) = (x, f(x) + g(z), z).$$

Procedemos como no caso acima temos

$$\begin{aligned} X_x &= (1, f', 0) \\ X_{xx} &= (0, f'', 0) \\ X_z &= (0, g', 0) \\ X_{zx} &= (0, 0, 0) \\ X_{zz} &= (0, g'', 0). \end{aligned}$$

Os elementos da primeira forma são dados por

$$E = 1 + f'^2, \quad F = f'g', \quad G = 1 + g'^2.$$

O vetor normal e unitário da superfície no espaço Euclidiano é dado por

$$N_e = \frac{X_x \times X_y}{|X_x \times X_y|} = \frac{(f', -1, g')}{\sqrt{1 + f'^2 + g'^2}}.$$

Dessa forma, os elementos da segunda forma fundamental são dados por

$$e = \frac{f''}{\sqrt{1 + f'^2 + g'^2}} \quad f = 0 \quad g = \frac{g''}{\sqrt{1 + f'^2 + g'^2}}.$$

A expressão da curvatura  $H_e$  e  $N_3$  são.

$$H_e = -\frac{1}{2} \frac{(1 + g'^2)f'' + (1 + f'^2)g''}{(1 + f'^2 + g'^2)^{3/2}}, \quad N_3 = \frac{g'}{\sqrt{1 + f'^2 + g'^2}}.$$

Como a superfície é mínima, isto é,  $H = 0$  sobre  $S$ . Obtemos de (4-17)

$$z \left( \frac{f''}{1 + f'^2} + \frac{g''}{1 + g'^2} \right) = 2g' \frac{1 + f'^2 + g'^2}{(1 + f'^2)(1 + g'^2)}. \quad (4-27)$$

A derivada com respeito a  $x$  (4-27) nos dá

$$z \left( \frac{f''}{1 + f'^2} \right)' = -4 \frac{f' f''}{(1 + f'^2)^2} \frac{g'^3}{(1 + g'^2)}.$$

Dessa maneira, existe  $a \in \mathbb{R}$  tal que

$$\left( \frac{f''}{1 + f'^2} \right)' = -4a \frac{f' f''}{(1 + f'^2)^2}, \quad e \quad \frac{g'^3}{1 + g'^2} = az. \quad (4-28)$$

Se  $a = 0$ , então  $g(y) = p$  é uma função constante e de (4-27),  $f(x) = mx + n$ ,  $m, n \in \mathbb{R}$ . Como conclusão, a superfície pode ser parametrizada como

$$X(x, z) = (x, mx + n + p, z), \quad (x, z) \text{ em } U.$$

Esta superfície é um plano vertical Euclidiano e a superfície é um plano totalmente geodésico. Esta é uma parte do enunciado do Teorema 4.19. A partir de agora, suponhamos que  $a \neq 0$  em (4-28) e dessa forma, chegaremos a uma contradição. Em particular,  $g' \neq 0$  e

$$g'^3 - azg'^2 - az = 0. \quad (4-29)$$

Integrando a primeira equação de (4-28) temos

$$\frac{f''}{1+f'^2} = 2a \frac{1}{1+f'^2} + b, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Derivando a segunda equação em (4-28), obtemos

$$g'' = a \frac{1+g'^2}{g'(3g'-2az)}. \quad (4-30)$$

Observe que  $3g' - 2az \neq 0$  já que  $a \neq 0$ . Voltando a (4-27), temos

$$z \left( b + 2a \frac{1}{1+f'^2} + a \frac{1}{g'(3g'-2az)} \right) = 2g' \frac{1+f'^2+g'^2}{(1+f'^2)(1+g'^2)}.$$

Substituindo a segunda equação de (4-28) na equação acima, obtemos

$$b + 2a \frac{1}{1+f'^2} + a \frac{1}{g'(3g'-2az)} = 2a \frac{1+f'^2+g'^2}{(1+f'^2)g'^2}.$$

Simplificando a equação anterior, encontramos

$$bg'^2(3g'^2 - 2azg') + ag'^2 = 2a(3g'^2 - 2azg'),$$

ou seja,

$$3bg'^3 - 2abzg'^2 - 5ag' + 4a^2z = 0. \quad (4-31)$$

Primeiro suponhamos  $b = 0$ . Então  $g' = 4az/5$ . Substituindo em (4-29), obtemos a seguinte função polinomial em  $z$

$$-\frac{16}{125}a^3z^3 - az = 0,$$

definido em algum intervalo de  $\mathbb{R}$ . Isso leva a uma contradição. Assim, assumimos  $b \neq 0$  em (4-31). Defina  $X = g'$ . Combinando (4-29) e (4-31), concluímos

$$bzX^2 - 5X + 4az + 3bz = 0. \quad (4-32)$$

$$bX^3 - 5aX + 4a^2z + 2abz = 0. \quad (4-33)$$

Multiplicando (4-32) por  $\frac{-x}{z}$  e somando com (4-33) obtemos

$$-5X^2 + 3z(3a + b)X - 2az^2(2a + b) = 0. \quad (4-34)$$

De (4-32) e (4-34) resulta que,

$$X = \frac{(-20a - 15b + 4a^2bz^2 + 2ab^2z^2)z}{(9a + 3b)bz^2 - 25}.$$

Substituindo essa expressão de  $X$  em (4-32), obtemos uma equação polinomial em  $z$ , isto é,

$$4a^2b^3(2a + b)^2z^7 - b^2(16a^3 - 109a^2b - 108ab^2 - 27b^3)z^5 - 125ab^2z^3 = 0,$$

e  $z$  é definido em algum intervalo de  $\mathbb{R}$ . Isso implica  $a = b = 0$ , contradição. E assim completamos a prova do Teorema 4.19.

---

## Referências Bibliográficas

---

- [1] Anderson M. T., Complete minimal varieties in hyperbolic space, *Invent. Math.* 69 (1982), 477–494.
- [2] Carmo, Manfredo P. 2003, *Geometria Diferencial de curvas e superfícies*. IMPA, Rio de Janeiro 2012.
- [3] Carmo, Manfredo P. *Geometria Riemanniana*. SBM, Rio de Janeiro 2015.
- [4] CORRO, A. V.; PINA, R.; SOUZA, M. Surfaces of rotation with constant extrinsic curvature in a conformally flat 3-space. *Results. Math*, 60:225–234, 2011.
- [5] Darboux G., *Leçons sur la Théorie Générale des Surfaces et ses Applications Géométriques du Calcul Infinitésimal*, vol. 1–4, Chelsea Publ. Co, reprint, 1972.
- [6] Dillen F., Goemans W., Van de Woestyne I., Translation Surfaces of Weingarten type in 3-space, *Bulletin Transilvania Univ. Brasov*, 15 (2008), 109–122.
- [7] Dillen F., I. Van de Woestyne, L. Verstraelen and J. T. Walrave, The surface of Scherck in  $E^3$ : a special case in the class of minimal surfaces defined as the sum of two curves, *Bull. Inst. Math. Acad. Sin.*, 26 (1998), 257–267.
- [8] Dillen F., L. Verstraelen, G. Zafindratafa, A generalization of the translation surfaces of Scherk. *Differential Geometry in honor of Radu Rosca*, K.U.L. (1991), 107–109.
- [9] Guan B., J. Spruck, Hypersurfaces of constant mean curvature in hyperbolic space with prescribed asymptotic boundary at infinity. *American J. Math.* 122 (2000), 1039–1060.
- [10] Hasanis T., López, Rafael. Classification and construction of minimal translation surfaces in Euclidean space. *Results in Mathematics*, v. 75, n. 1, p. 1-22, 2020.
- [11] Hasanis T., R. López, Translation surfaces in Euclidean space with constant Gaussian curvature. *Commun. Anal. Geom.* to appear.
- [12] Lin F. H., On the Dirichlet problem for minimal graphs in hyperbolic space, *Invent. math.* 96 (1989), 593–612.

- [13] Liu, H.: Translation surfaces with constant mean curvature in 3-dimensional spaces. *J. Geom.* 64, 141 - 149 (1999).
- [14] Lima, Elon Lages. *Álgebra Linear*, coleção Matemática Universitária 9ª edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.
- [15] López, R.: Minimal translation surfaces in hiperbolic space. *Beitr. Algebra Geom.* 52, 105 -112 (2011).
- [16] López, R., Munteanu, M. I.: Surfaces with constant mean curvature in Sol geometry. *Differ. Geom. Appl.* 29 (suppl. 1), S238 - S245 (2011).
- [17] López, R., Perdomo, O.: Minimal translation surfaces in Euclidean Space. *J. Geom. Anal.* 27, 2926 - 2937 (2017).
- [18] Montiel, S., Ros, A.: *Curves and surfaces*. Graduate studies in mathematics, vol 69. American Mathematical Society, Providence (2009).
- [19] Moruz, M., Munteanu, M.I.: Minimal translation hypersurfaces in  $E^4$ . *J. Math. Anal. Appl.* 439, 798-812 (2016).
- [20] Munteanu M. I., Nistor A. I., Polynomial Translation Weingarten Surfaces in 3-dimensional Euclidean space. *Proceedings of the VIII International Colloquium on Differential Geometry*, World Scientific 2009, 316 - 320.
- [21] Munteanu, M.I., Palmas, O., Ruiz-Hernández, G.: Minimal translation hypersurfaces in Euclidean space. *Mediterr. J. Math.* 13, 2659 – 2676 (2016).
- [22] Nitsche, J. C. C.: *Lectures on Minimal Surfaces*. Cambridge University Press, Cambridge (1989).
- [23] Pina, R.; Tenenblat, K. On solutions of the ricci curvature equation and the Eistein equation. *Israel J, Mat.*, 17(1): 61 - 76, 2009.
- [24] Sa Earp, Ricardo Toubiana, Eric. (2000). Existence and uniqueness of minimal graphs in hyperbolic space. *Asian Journal of Mathematics.* 4. 669-694.
- [25] Scherk, H.F.: Bemerkungen über die Kleinstene Fläche innerhalb gegebener Grenzen. *J. Reine Angew. Math.* 13, 185 - 208 (1935).
- [26] Tenenblat, Ketí. *Introdução à Geometria Diferencial*. 2. ed. rev. São Paulo: Blucher, 2014.
- [27] Verstraelen L., J. Walrave, S. Yaprak, The minimal translation surfaces in Euclidean space, *Soochow J. Math.* 20 (1994), 77–82.

- [28] Weierstrass Elliptic Function. In: Mathworld Wolfram. Disponível em <https://mathworld.wolfram.com/WeierstrassEllipticFunction.html>. Acesso em: 18 out. 2021.

## Apêndice A

---

Neste apêndice mostraremos os detalhes de alguns cálculos que surgiram no desenvolvimento dessa dissertação.

### A.0.1 Demonstrações e resultados do capítulo 2

Apresentamos aqui os detalhes das derivadas feitas na observação (2). A derivada de (2-1), com respeito a  $s$

$$\langle \kappa'_\alpha \mathbf{b}_\alpha + \kappa_\alpha \mathbf{b}'_\alpha, \mathbf{t}_\beta \rangle = \langle \mathbf{t}'_\alpha, \kappa_\beta \mathbf{b}_\beta \rangle.$$

Das equações de Frenet e de  $\mathbf{t}'_\alpha = \kappa_\alpha \mathbf{n}_\alpha$ , obtemos

$$\langle \kappa'_\alpha \mathbf{b}_\alpha - \kappa_\alpha \tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \rangle = \langle \kappa_\alpha \mathbf{n}_\alpha, \kappa_\beta \mathbf{b}_\beta \rangle.$$

Usando (2-30), a equação anterior resulta

$$\langle -\tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha - R_\alpha \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \rangle = \langle \mathbf{n}_\alpha, \kappa_\beta \mathbf{b}_\beta \rangle.$$

A derivada de (2-1), com respeito a  $ss$

$$\langle -\tau'_\alpha \mathbf{n}_\alpha - \tau_\alpha \mathbf{n}'_\alpha - R'_\alpha \mathbf{b}_\alpha - R_\alpha \mathbf{b}'_\alpha, \mathbf{t}_\beta \rangle = \langle \mathbf{n}'_\alpha, \kappa_\beta \mathbf{b}_\beta \rangle.$$

Usando as equações de Frenet e (2-1), a equação anterior resulta

$$\langle -\tau'_\alpha \mathbf{n}_\alpha + \tau_\alpha \kappa_\alpha \mathbf{t}_\alpha - \tau_\alpha^2 \mathbf{b}_\alpha - R'_\alpha \mathbf{b}_\alpha + R_\alpha \tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \rangle = -\kappa_\alpha^2 \langle \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \rangle + \tau_\alpha \langle \mathbf{b}_\alpha, \kappa_\beta \mathbf{t}_\beta \rangle,$$

ou seja,

$$\langle -\tau'_\alpha \mathbf{n}_\alpha + \tau_\alpha \kappa_\alpha \mathbf{t}_\alpha - \tau_\alpha^2 \mathbf{b}_\alpha - R'_\alpha \mathbf{b}_\alpha + R_\alpha \tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha + \kappa_\alpha^2 \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \rangle = \tau_\alpha \langle \mathbf{b}_\alpha, \kappa_\beta \mathbf{t}_\beta \rangle,$$

logo, a equação anterior resulta

$$\left\langle \left( -\frac{\tau'_\alpha}{\tau_\alpha} + R_\alpha \right) \mathbf{n}_\alpha + \kappa_\alpha \mathbf{t}_\alpha + \frac{1}{\tau_\alpha} \left( \kappa_\alpha^2 + \frac{\kappa'_\alpha}{\kappa_\alpha} - \tau_\alpha^2 \right) \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \right\rangle = \langle \mathbf{b}_\alpha, \kappa_\beta \mathbf{t}_\beta \rangle.$$

Com as notações introduzidas em (2-23), a equação anterior torna-se

$$\langle \kappa_\alpha \mathbf{t}_\alpha - R_\alpha \mathbf{n}_\alpha + \frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{t}_\beta \rangle = \langle \mathbf{b}_\alpha, \kappa_\beta \mathbf{t}_\beta \rangle,$$

e de forma análoga, encontra-se as derivadas de (2-1), com respeito a  $t$  e  $tt$ .

A derivada de (2-1), com respeito a  $ts$

$$\langle \kappa'_\alpha \mathbf{b}_\alpha + \kappa_\alpha \mathbf{b}'_\alpha, \mathbf{n}_\beta \rangle = \langle \mathbf{t}'_\alpha, -\tau_\beta \mathbf{n}_\beta - R_\beta \mathbf{b}_\beta \rangle.$$

Das equações de Frenet, obtemos

$$\langle \kappa'_\alpha \mathbf{b}_\alpha - \kappa_\alpha \tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha, \mathbf{n}_\beta \rangle = \kappa_\alpha \langle \mathbf{n}_\alpha, -\tau_\beta \mathbf{n}_\beta - R_\beta \mathbf{b}_\beta \rangle,$$

ou seja,

$$\left\langle \frac{\kappa'_\alpha}{\kappa_\alpha} \mathbf{b}_\alpha - \tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha, \mathbf{n}_\beta \right\rangle = \langle \mathbf{n}_\alpha, \tau_\beta \mathbf{n}_\beta - R_\beta \mathbf{b}_\beta \rangle.$$

Por (2-30), a equação anterior resulta

$$\langle -\tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha - R_\alpha \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{n}_\beta \rangle = \langle \mathbf{n}_\alpha, \tau_\beta \mathbf{n}_\beta - R_\beta \mathbf{b}_\beta \rangle.$$

A derivada de (2-1), com respeito a  $sst$

$$\left\langle \kappa_\alpha \mathbf{t}_\alpha - R_\alpha \mathbf{n}_\alpha + \frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{t}'_\beta \right\rangle = \langle \mathbf{b}_\alpha, \kappa'_\beta \mathbf{b}_\beta + \kappa_\beta \mathbf{b}'_\beta \rangle.$$

Das equações de Frenet e do fato  $\mathbf{t}'_\beta = \kappa_\beta \mathbf{n}_\beta$ , obtemos

$$\left\langle \kappa_\alpha \mathbf{t}_\alpha - R_\alpha \mathbf{n}_\alpha + \frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} \mathbf{b}_\alpha, \kappa_\beta \mathbf{n}_\beta \right\rangle = \langle \mathbf{b}_\alpha, \kappa'_\beta \mathbf{b}_\beta - \kappa_\beta \tau_\beta \mathbf{n}_\beta \rangle,$$

ou seja,

$$\left\langle \kappa_\alpha \mathbf{t}_\alpha - R_\alpha \mathbf{n}_\alpha + \frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{n}_\beta \right\rangle = \langle \mathbf{b}_\alpha, \frac{\kappa'_\beta}{\kappa_\beta} \mathbf{b}_\beta - \tau_\beta \mathbf{n}_\beta \rangle.$$

Segue de (2-30), que

$$\left\langle \kappa_\alpha \mathbf{t}_\alpha - R_\alpha \mathbf{n}_\alpha + \frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{n}_\beta \right\rangle = \langle \mathbf{b}_\alpha, -\tau_\beta \mathbf{n}_\beta - R_\beta \mathbf{b}_\beta \rangle.$$

De modo análogo, obtemos a derivada de (2-1), com respeito a  $ts$ .

A derivada de (2-1), com respeito a  $ts$

$$\langle -\tau'_\alpha \mathbf{n}_\alpha - \tau_\alpha \mathbf{n}'_\alpha - R'_\alpha \mathbf{b}_\alpha - R_\alpha \mathbf{b}'_\alpha, \mathbf{b}_\beta \rangle = \langle \mathbf{n}'_\alpha, \kappa_\beta \mathbf{t}_\beta - R_\beta \mathbf{n}_\beta + \frac{\Sigma_\beta}{\tau_\beta} \mathbf{b}_\beta \rangle.$$

Usando as equações de Frenet, a equação anterior resulta

$$\begin{aligned} \langle -\tau'_\alpha \mathbf{n}_\alpha - \kappa_\alpha \mathbf{t}_\alpha \tau_\alpha - \tau_\alpha^2 \mathbf{b}_\alpha - R'_\alpha \mathbf{b}_\alpha + R_\alpha \mathbf{n}_\alpha \tau_\alpha, \mathbf{b}_\beta \rangle &= -\kappa_\alpha \langle \mathbf{t}_\alpha, \kappa_\beta \mathbf{t}_\beta - R_\beta \mathbf{n}_\beta + \frac{\Sigma_\beta}{\tau_\beta} \mathbf{b}_\beta \rangle \\ &+ \tau_\alpha \langle \mathbf{b}_\alpha, \kappa_\beta \mathbf{t}_\beta - R_\beta \mathbf{n}_\beta + \frac{\Sigma_\beta}{\tau_\beta} \mathbf{b}_\beta \rangle. \end{aligned}$$

De (2-23) e (2-30), temos que  $\tau'_\alpha = 2R_\alpha \tau_\alpha$ , e da quarta relação de (2-34), obtemos

$$\langle -\tau_\alpha R_\alpha \mathbf{n}_\alpha - \kappa_\alpha \mathbf{t}_\alpha \tau_\alpha - \tau_\alpha^2 \mathbf{b}_\alpha - R'_\alpha \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{b}_\beta \rangle = -\kappa_\alpha^2 \langle \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{b}_\beta \rangle + \tau_\alpha \langle \mathbf{b}_\alpha, \kappa_\beta \mathbf{t}_\beta - R_\beta \mathbf{n}_\beta + \frac{\Sigma_\beta}{\tau_\beta} \mathbf{b}_\beta \rangle,$$

ou seja,

$$\langle -R_\alpha \mathbf{n}_\alpha - \kappa_\alpha \mathbf{t}_\alpha - \tau_\alpha^2 \frac{\mathbf{b}_\alpha}{\tau_\alpha} - R'_\alpha \mathbf{b}_\alpha + \kappa_\alpha^2 \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{b}_\beta \rangle = \langle \mathbf{b}_\alpha, \kappa_\beta \mathbf{t}_\beta - R_\beta \mathbf{n}_\beta + \frac{\Sigma_\beta}{\tau_\beta} \mathbf{b}_\beta \rangle,$$

e portanto,

$$\langle \kappa_\alpha \mathbf{t}_\alpha - R_\alpha \mathbf{n}_\alpha + \frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} \mathbf{b}_\alpha, \mathbf{b}_\beta \rangle = \langle \mathbf{b}_\alpha, \kappa_\beta \mathbf{t}_\beta - R_\beta \mathbf{n}_\beta + \frac{\Sigma_\beta}{\tau_\beta} \mathbf{b}_\beta \rangle.$$

Derivadas dos campos vetoriais definidos em (2-42).

Derivando  $V_1$  com respeito a  $s$  obtemos

$$\begin{aligned} V_1' &= \kappa'_\alpha \mathbf{b}_\alpha + \kappa_\alpha \mathbf{b}'_\alpha \\ &= \kappa_\alpha \left( \frac{\kappa'_\alpha}{\kappa_\alpha} \mathbf{b}_\alpha - \tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha \right) \\ &= \kappa_\alpha (-R_\alpha \mathbf{b}_\alpha - \tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha) \\ &= \kappa_\alpha V_2. \end{aligned}$$

Tomando a derivada de  $V_2$  com respeito a  $s$

$$V_2' = -\tau'_\alpha \mathbf{n}_\alpha - \tau_\alpha \mathbf{n}'_\alpha - R'_\alpha \mathbf{b}_\alpha - R_\alpha \mathbf{b}'_\alpha.$$

Usando as equações de Frenet, obtemos

$$V_2' = -\tau'_\alpha \mathbf{n}_\alpha + \tau_\alpha \kappa_\alpha \mathbf{t}_\alpha + (R'_\alpha - \tau_\alpha^2) \mathbf{b}_\alpha + R_\alpha \tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha.$$

De (2-23), temos  $\tau'_\alpha = \tau_\alpha R_\alpha - \frac{\kappa'_\alpha}{\kappa_\alpha} \tau_\alpha$  e  $\Sigma_\alpha - \kappa_\alpha^2 = \left( \frac{\kappa'_\alpha}{\kappa_\alpha} \right)' - \tau_\alpha^2$ , com isso a equação anterior resulta

$$V'_2 = (R_\alpha \mathbf{n}_\alpha - \kappa_\alpha \mathbf{t}_\alpha) \tau_\alpha + (\Sigma_\alpha - \kappa_\alpha^2) \mathbf{b}_\alpha,$$

ou seja,

$$V'_2 = -\kappa_\alpha^2 \mathbf{b}_\alpha - \left( \kappa_\alpha \mathbf{t}_\alpha + R_\alpha \mathbf{n}_\alpha + \frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} \mathbf{b}_\alpha \right) \tau_\alpha,$$

logo,

$$V'_2 = -\kappa_\alpha V_1 + \tau_\alpha V_3.$$

A derivada de  $V_3$  com respeito a  $s$  é dada por

$$V'_3 = \kappa'_\alpha \mathbf{t}_\alpha + \kappa_\alpha \mathbf{t}'_\alpha - R'_\alpha \mathbf{n}_\alpha - R_\alpha \mathbf{n}'_\alpha + \left( \frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} \right)' \mathbf{b}_\alpha + \frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} \mathbf{b}'_\alpha.$$

Usando as equações de Frenet, obtemos

$$V'_3 = \kappa'_\alpha \mathbf{t}_\alpha + \kappa_\alpha^2 \mathbf{n}_\alpha - R'_\alpha \mathbf{n}_\alpha + R_\alpha \kappa_\alpha \mathbf{t}_\alpha - R_\alpha \tau_\alpha \mathbf{b}_\alpha + \left( \frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} \right)' \mathbf{b}_\alpha - \Sigma_\alpha \mathbf{n}_\alpha.$$

Da terceira equação de (2-29), temos  $\left( \frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} \right)' = \tau_\alpha R_\alpha + R_\alpha \tau_\alpha$ , e de (2-30),  $\kappa'_\alpha = -\kappa_\alpha R_\alpha$  e assim, a equação anterior resulta

$$V'_3 = (\kappa_\alpha^2 - R'_\alpha - \Sigma_\alpha) \mathbf{n}_\alpha + R_\alpha \tau_\alpha \mathbf{b}_\alpha.$$

Da definição de (2-23), a equação anterior torna-se

$$V'_3 = \tau_\alpha^2 \mathbf{n}_\alpha + R_\alpha \tau_\alpha \mathbf{b}_\alpha,$$

e portanto,

$$V'_3 = -\tau_\alpha V_2.$$

De modo análogo, derivando  $W_i$  com respeito a  $t$ , obtemos resultados semelhantes.

### A.0.2 Demonstrações e resultados do capítulo 3

Derivada de terceira ordem da curva  $\alpha$  que surgiu na demonstração do Teorema 3.2,

$$\begin{aligned}
\alpha_1'''(s) &= -w''A \sin(w) - (w')^2 A \cos(w), \\
\alpha_2'''(s) &= w''B \cos(w) - (w')^2 B \sin(w), \\
\alpha_3'''(s) &= \frac{w''(A^2 - B^2) \cos(w) \sin(w)}{\alpha_3'} \\
&\quad + w'(A^2 - B^2) \left( \frac{w'[-\sin^2(w) + \cos^2(w)]\alpha_3' - \cos(w) \sin(w)(\alpha_3')''}{(\alpha_3')^2} \right) \\
&= \frac{w''(A^2 - B^2) \cos(w) \sin(w)}{(\alpha_3')^3} \\
&\quad + w'(A^2 - B^2) \left( \frac{w'[-\sin^2(w) + \cos^2(w)](\alpha_3')^2 - \cos^2(w) \sin^2(w)(A^2 - B^2)w'}{(\alpha_3')^3} \right) \\
&= \frac{w''(A^2 - B^2) \cos(w) \sin(w)}{\alpha_3'} \\
&\quad + (w')^2(A^2 - B^2) \left( \frac{-\sin^2(w) + B^2 \sin^4(w) + \cos^2(w) - A^2 \cos^4(w)}{(\alpha_3')^3} \right) \\
&= \frac{w''(A^2 - B^2) \cos(w) \sin(w)}{\alpha_3'} \\
&\quad + (w')^2(A^2 - B^2) \left( \frac{(1 - A^2 \cos^2(w)) \cos^2(w) - (1 - B^2 \sin^2(w)) \sin^2(w)}{(\alpha_3')^3} \right).
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
\alpha'''(s) &= w'' \left( -A \sin w, B \cos w, \frac{(A^2 - B^2) \cos(w) \sin(w)}{\alpha_3'} \right) \\
&\quad + (w')^2 \left( -A \cos w, -B \sin w, \frac{(A^2 - B^2)((1 - A^2 \cos^2 w) \cos^2 w - (1 - B^2 \sin^2 w) \sin^2 w)}{(\alpha_3')^3} \right).
\end{aligned}$$

Demonstração do produto vetorial de (3-6). Aqui  $i$ ,  $j$  e  $k$  são os vetores unitários de  $\mathbb{R}^3$ , dessa forma temos:

$$\begin{aligned}
\alpha' \times \alpha'' &= w' \left( \frac{B(A^2 - B^2) \cos w \sin^2 w - B \cos w \alpha_3'^2}{\alpha_3'} \right) i \\
&\quad + w' \left( \frac{-A \sin w (\alpha_3')^2 - A(A^2 - B^2) \cos^2 w \sin w}{\alpha_3'} \right) j + w'(AB)k,
\end{aligned}$$

como  $\alpha'_3 = (1 - A^2 \cos^2 w - A^2 \sin^2 w)$ , obtemos

$$\alpha' \times \alpha'' = \frac{w'}{\alpha'_3} (A^2 B \cos w - B \cos w, AB^2 \sin w - A \sin w, AB\alpha'_3).$$

Cálculo do produto misto apresentado em (3-7),

$$(\alpha', \alpha'', \alpha''') = \langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle = M + N$$

onde,

$$M = (\alpha' \times \alpha'') \cdot w'' \left( -A \sin w, B \cos w, \frac{(A^2 - B^2) \cos(w) \sin(w)}{\alpha'_3} \right)$$

e

$$N = (\alpha' \times \alpha'') \left( \begin{array}{c} -A \cos w \\ -B \sin w \\ \frac{(A^2 - B^2)((1 - A^2 \cos^2 w) \cos^2 w - (1 - B^2 \sin^2 w) \sin^2 w)}{(\alpha'_3)^3} \end{array} \right).$$

Desenvolvendo  $M$  e  $N$ , temos

$$\begin{aligned} M &= \frac{ABw'w''}{\alpha'_3} (-A^2 - 1) \cos w \sin w + (B^2 - 1) \cos w \sin w + (A^2 - B^2) \cos w \sin w \\ &= \frac{ABw'w''}{\alpha'_3} (\cos w \sin w [-A^2 + 1 + B^2 - 1 + (A^2 - B^2)]) = 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} N &= \frac{ABw^3}{\alpha'_3} (-A^2 - 1) \cos^2 w - (B^2 - 1) \sin^2 w \\ &+ \frac{(A^2 - B^2)}{\alpha'_3} ((1 - A^2 \cos^2 w) \cos^2 w - (1 - B^2 \sin^2 w) \sin^2 w) \\ &= \frac{ABw^3}{\alpha'_3} \left\{ \cos^2 w \left[ -(A^2 - 1) + \frac{(A^2 - B^2)(1 - A^2 \cos^2 w)}{(\alpha'_3)^2} \right] \right. \\ &+ \left. \sin^2 w \left[ -(B^2 - 1) - \frac{(A^2 - B^2)(1 - B^2 \sin^2 w)}{(\alpha'_3)^2} \right] \right\}, \end{aligned}$$

como  $(\alpha'_3)^2 = 1 - A^2 \cos^2 w - B^2 \sin^2 w$ , obtemos

$$\begin{aligned}
N &= \frac{ABw'^3}{\alpha'_3} \left\{ \cos^2 w \left[ \frac{-(A^2 - 1)(1 - A^2 \cos^2 w - B^2 \sin^2 w) + (A^2 - B^2)(1 - A^2 \cos^2 w)}{(\alpha'_3)^2} \right] \right. \\
&\quad \left. + \sin^2 w \left[ \frac{-(B^2 - 1)(1 - A^2 \cos^2 w - B^2 \sin^2 w) - (A^2 - B^2)(1 - B^2 \sin^2 w)}{(\alpha'_3)^2} \right] \right\} \\
&= \frac{ABw'^3}{(\alpha'_3)^3} \{ \cos^2 w [A^2 B^2 - B^2 + 1 - A^2 \cos^2 w - B^2 \sin^2 w] \\
&\quad + \sin^2 w [A^2 B^2 - A^2 + 1 - A^2 \cos^2 w - B^2 \sin^2 w] \} \\
&= \frac{ABw'^3}{(\alpha'_3)^3} \{ A^2 B^2 \cos^2 w - B^2 \cos^2 w + \cos^2 w - A^2 \cos^4 w - B \cos^2 w \sin^2 w \\
&\quad + A^2 B^2 \sin^2 w - A^2 \sin^2 w + \sin^2 w - A^2 \cos^2 w \sin^2 w - B^2 \sin^4 w \} \\
&= \frac{ABw'^3}{(\alpha'_3)^3} \{ B^2 (A^2 - 1) \cos^2 w + \cos^2 w (1 - A^2 \cos^2 w - B^2 \sin^2 w) \\
&\quad + A^2 (B^2 - 1) \sin^2 w + \sin^2 w (1 - A^2 \cos^2 w - B^2 \sin^2 w) \} \\
&= \frac{ABw'^3}{(\alpha'_3)^3} \{ A^2 B^2 \cos^2 w - B^2 \cos^2 w + A^2 B^2 \sin^2 w - A^2 \sin^2 w \\
&\quad + 1 - A^2 \cos^2 w - B^2 \sin^2 w \} \\
&= \frac{ABw'^3}{(\alpha'_3)^3} \{ 1 + A^2 B^2 - A^2 - B^2 \}.
\end{aligned}$$

E, portanto, concluímos que

$$(\alpha', \alpha'', \alpha''') = \frac{ABw'^3}{(\alpha'_3)^3} \{ 1 + A^2 B^2 - A^2 - B^2 \}.$$

Demonstração do resultado apresentado em (3-9). A curvatura da curva  $\alpha$  é dada por  $\kappa_\alpha = \|\alpha''\|$ , dessa forma, temos

$$\begin{aligned}
\kappa_\alpha^2 &= (w')^2 \left( A^2 \sin^2 w + B^2 \cos^2 w + \frac{(A^2 - B^2)^2 \cos^2 w \sin^2 w}{(\alpha'_3)^2} \right) \\
&= \left( \frac{w'}{\alpha'_3} \right)^2 (A^2 \sin^2 w (\alpha'_3)^2 + B^2 \cos^2 w (\alpha'_3)^2 \\
&\quad + A^4 \cos^2 w \sin^2 w - 2A^2 B^2 \cos^2 w \sin^2 w + B^4 \cos^2 w \sin^2 w).
\end{aligned}$$

Como  $(\alpha'_3)^2 = (1 - A^2 \cos^2 w - B^2 \sin^2 w)$ , a equação anterior torna-se

$$\kappa_\alpha^2 = \left( \frac{w'}{\alpha'_3} \right)^2 (A^2 \sin^2 w - A^2 B^2 \sin^4 w + B^2 \cos^2 w - A^2 B^2 \cos^4 w - 2A^2 B^2 \cos^2 w \sin^2 w),$$

ou seja,

$$\kappa_\alpha^2 = \left( \frac{w'}{\alpha'_3} \right)^2 (A^2 \sin^2 w + B^2 \cos^2 w - A^2 B^2 (\sin^2 w + \cos^2 w)^2),$$

ou ainda,

$$\kappa_\alpha^2 = \left( \frac{w'}{\alpha'_3} \right)^2 (A^2 \sin^2 w + B^2 \cos^2 w - A^2 B^2).$$

Fazendo uso das identidades trigonométricas  $\sin^2 w = (1 - \cos^2 w)$  e  $\cos^2 w = (1 - \sin^2 w)$  na equação anterior, obtemos

$$\begin{aligned} \kappa_\alpha^2 &= \left( \frac{w'}{\alpha'_3} \right)^2 (A^2 - A^2 \cos^2 w + B^2 - B^2 \sin^2 w - A^2 B^2) \\ &= \left( \frac{w'}{\alpha'_3} \right)^2 (A^2 + B^2 - A^2 B^2 - 1 + (1 - A^2 \cos^2 w - B^2 \sin^2 w)^2) \end{aligned}$$

e portanto,

$$\kappa_\alpha^2 = \left( \frac{w'}{\alpha'_3} \right)^2 (A^2 + B^2 - A^2 B^2 - 1 + (\alpha'_3)^2).$$

A derivada da segunda equação de (3-20), que surgiu na demonstração do Teorema 3.3

$$L'_\alpha(\mathbf{n}_\alpha) = -L_\alpha(\mathbf{n}'_\alpha) - \tau'_\alpha \mathbf{n}_\alpha - \tau_\alpha \mathbf{n}'_\alpha - R'_\alpha \mathbf{b}_\alpha - R_\alpha \mathbf{b}'_\alpha$$

De (2-23) e (2-30) temos que  $\tau'_\alpha = 2R_\alpha \tau_\alpha$ , e das equações de Frenet resulta

$$L'_\alpha(\mathbf{n}_\alpha) = \kappa_\alpha L_\alpha(\mathbf{t}_\alpha) - \tau_\alpha L_\alpha(\mathbf{b}_\alpha) - 2R_\alpha \tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha + \tau_\alpha \kappa_\alpha \mathbf{t}_\alpha - \tau'_\alpha \mathbf{b}_\alpha - R'_\alpha \mathbf{b}_\alpha + R_\alpha \tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha.$$

Usando a primeira e a terceira equação de (3-20), obtemos

$$\begin{aligned} L'_\alpha(\mathbf{n}_\alpha) &= \kappa_\alpha^2 \mathbf{b}_\alpha - \tau_\alpha \kappa_\alpha \mathbf{t}_\alpha + R_\alpha \mathbf{n}_\alpha \tau_\alpha - \Sigma_\alpha \mathbf{b}_\alpha - 2R_\alpha \tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha + \tau_\alpha \kappa_\alpha \mathbf{t}_\alpha - \tau'_\alpha \mathbf{b}_\alpha \\ &\quad - R'_\alpha \mathbf{b}_\alpha + R_\alpha \tau_\alpha \mathbf{n}_\alpha. \end{aligned}$$

Portanto,

$$L'_\alpha(\mathbf{n}_\alpha) = 0.$$

E, por fim, derivando a terceira equação de (3-20)

$$L'_\alpha(\mathbf{b}_\alpha) = -L_\alpha(\mathbf{b}'_\alpha) + \kappa'_\alpha \mathbf{t}_\alpha + \kappa_\alpha \mathbf{t}'_\alpha - R'_\alpha \mathbf{n}_\alpha - R_\alpha \mathbf{n}'_\alpha + \left( \frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} \right)' \mathbf{b}_\alpha + \frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} \mathbf{b}'_\alpha.$$

De (2-29) e (2-30) temos que  $\left( \frac{\Sigma_\alpha}{\tau_\alpha} \right)' = 2\tau_\alpha R_\alpha$ , e das equações de Frenet obtemos

$$L'_\alpha(\mathbf{b}_\alpha) = -\tau_\alpha L_\alpha(\mathbf{n}_\alpha) + \kappa'_\alpha \mathbf{t}_\alpha + \kappa_\alpha \mathbf{t}'_\alpha - R'_\alpha \mathbf{n}_\alpha + R_\alpha \kappa_\alpha \mathbf{t}_\alpha - R_\alpha \tau_\alpha \mathbf{b}_\alpha + 2\tau_\alpha R_\alpha \mathbf{b}_\alpha - \Sigma_\alpha \mathbf{n}_\alpha.$$

Usando a segunda equação de (3-20), temos

$$\begin{aligned} L'_\alpha(\mathbf{b}_\alpha) &= -\tau_\alpha^2 \mathbf{n}_\alpha - R_\alpha \tau_\alpha \mathbf{b}_\alpha + \kappa'_\alpha \mathbf{t}_\alpha + \kappa_\alpha^2 \mathbf{n}_\alpha - R'_\alpha \mathbf{n}_\alpha + R_\alpha \kappa_\alpha \mathbf{t}_\alpha - R_\alpha \tau_\alpha \mathbf{b}_\alpha \\ &+ 2\tau_\alpha R_\alpha \mathbf{b}_\alpha - \Sigma_\alpha \mathbf{n}_\alpha, \end{aligned}$$

portanto,

$$L'_\alpha(\mathbf{b}_\alpha) = 0.$$

## Resultados Computacionais

O Software usado para a construção das superfícies mínimas de translação foi o Wolfram Mathematica. A seguir apresentaremos os comandos utilizado no software, para a construção das superfícies mínimas de translação, conforme o método apresentado no final do capítulo 3.

### Exemplo B.1 *Helicoide*

#### ■ Exemplo 1

```

In[41]:= λ1 = -1; λ2 = -1; λ3 = 1;
- (λ - λ1) (λ - λ2) (λ - λ3) // Expand
                                         [expande]

c1 = λ1 λ2 λ3
c2 = (λ1 + λ2 + λ3)
c3 = (λ1 λ2 + λ2 λ3 + λ1 λ3)
A = Sqrt[λ3 / (λ3 - λ1)] // N
    [raiz quadrada]           [valor numérico]
B = Sqrt[λ3 / (λ3 - λ2)] // N
    [raiz quadrada]           [valor numérico]
y1 = Sqrt[-λ1 λ3] // N
    [raiz quadrada]           [valor numérico]
y2 = Sqrt[-λ2 λ3] // N
    [raiz quadrada]           [valor numérico]

Out[42]= 1 + λ - λ2 - λ3

Out[43]= 1

Out[44]= -1

Out[45]= -1

Out[46]= 0.707107

Out[47]= 0.707107

Out[48]= 1.

```

- Comando para resolver numericamente a etapa número 5 do algoritmo de construção de superfícies mínimas de translação.

In[10]:= **ko = 1.1;**

In[11]:= **wo = 0;**

In[27]:= **so = -0.115;**

**s1 = .5;**

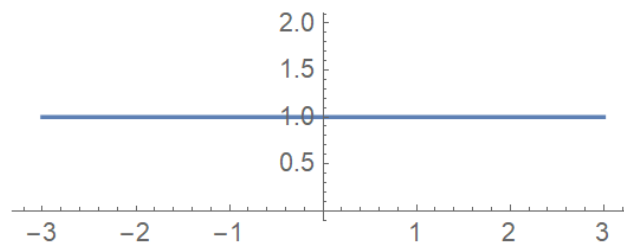
**p = NDSolve** [**{k'[s] ==  $\sqrt{-k[s]^4 - c3 k[s]^2 - c1^2 / k[s]^2 - c1 c2}$ ,**  
[resolve numericamente equação diferencial]  
**w'[s] ==  $\sqrt{k[s]^2 + \lambda1 \lambda2}$ ,** **x'[s] == A Cos[w[s]],** **y'[s] == B Sin[w[s]],**  
[cosseno] [seno]  
**z'[s] ==  $\sqrt{1 - A^2 Cos[w[s]]^2 - B^2 Sin[w[s]]^2}$ ,** **w[0] == wo,** **k[0] == ko,**  
**x[0] == 1,** **y[0] == 1,** **z[0] == 1}**, **{k, w, x, y, z}, {s, so, s1}**];

- Solução numérica da curvatura da curva  $\alpha$

In[56]:=

**ParametricPlot** [**Evaluate** [**{s, k[s]}**] /. **p**], **{s, so, s1}**]  
[gráfico paramétrico] [calcula]

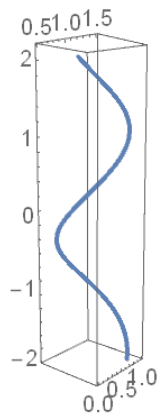
Out[56]=



■ Construção da curva geratriz  $\alpha$

```
In[58]:= ParametricPlot3D[Evaluate[{x[s], y[s], z[s]} /. p], {s, so, s1},
|gráfico paramétrico 3D |calcula
ViewPoint -> {1, -1.2, .25}, PlotRange -> All|
|ponto de vista |intervalo do g· |tudo
```

Out[58]=



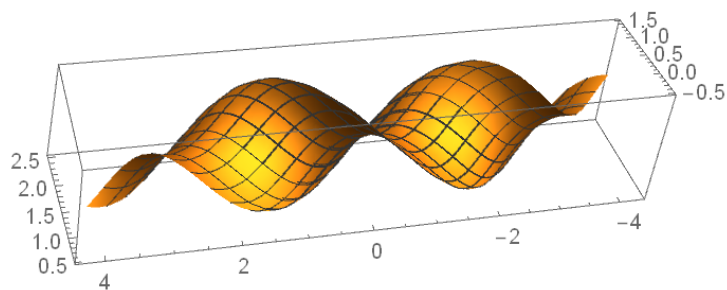
■ Para a curva  $\beta$  escolhemos  $w_1 = \pi/2$

```
In[59]:= w1 = Pi / 2;
|número pi
q = NDSolve[{k'[s] == Sqrt[-k[s]^4 - c3 k[s]^2 - c1^2 / k[s]^2 - c1 c2],
|resolve numericamente· |raiz quadrada
w'[s] == Sqrt[k[s]^2 + lambda1 lambda2], xx'[s] == A Cos[w[s]], yy'[s] == B Sin[w[s]],
|raiz quadrada |cosseno |seno
zz'[s] == Sqrt[1 - A^2 Cos[w[s]]^2 - B^2 Sin[w[s]]^2], w[0] == w1,
|raiz quadrada |cosseno |seno
k[0] == ko, xx[0] == 1, yy[0] == 0, zz[0] == 0}, {k, w, xx, yy, zz}, {s, so, s1}];
```

- Comando para construção da superfície mínima de translação.

```
In[60]:= ParametricPlot3D[Evaluate[{x[s], y[s], z[s]} /. p] +  
|gráfico paramétrico 3D |calcula  
Evaluate[{xx[t], yy[t], zz[t]} /. q], {s, so, s1}, {t, so, s1},  
|calcula  
ViewPoint -> {1, -1.2, .25}, PlotRange -> All]  
|ponto de vista |intervalo do g... |tudo
```

Out[60]=



### ■ Exemplo 2

```

In[1]:= λ1 = -4; λ2 = -1; λ3 = 1;
        - (λ - λ1) (λ - λ2) (λ - λ3) // Expand
                                           [expande]

c1 = λ1 λ2 λ3
c2 = (λ1 + λ2 + λ3)
c3 = (λ1 λ2 + λ2 λ3 + λ1 λ3)
A = Sqrt[λ3 / (λ3 - λ1)] // N
    [raiz quadrada] [valor numér]
B = Sqrt[λ3 / (λ3 - λ2)] // N
    [raiz quadrada] [valor numéri]
y1 = Sqrt[-λ1 λ3] // N
    [raiz quadrada] [valor numérico]
y2 = Sqrt[-λ2 λ3] // N
    [raiz quadrada] [valor numérico]

Out[2]= 4 + λ - 4 λ2 - λ3

Out[3]= 4

Out[4]= -4

Out[5]= -1

Out[6]= 0.447214

Out[7]= 0.707107

Out[8]= 2.

Out[9]= 1.

```

- Comando para resolver numericamente a etapa número 5 do algoritmo de construção de superfícies mínimas de translação.

```
In[ ]:= ko = 1.1;
```

```
In[ ]:= wo = 0;
```

```
In[ ]:= so = -0.115;
```

```
s1 = .5;
```

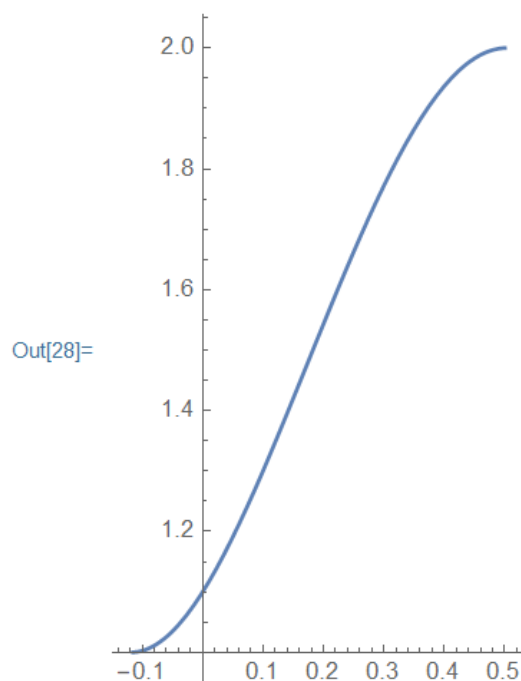
```
p = NDSolve[  
  | resolve numericamente equação diferencial  
  { k'[s] ==  $\sqrt{-k[s]^4 - c3 k[s]^2 - c1^2 / k[s]^2 - c1 c2}$ , w'[s] ==  $\sqrt{k[s]^2 + \lambda1 \lambda2}$ ,  
  x'[s] == A Cos[w[s]], y'[s] == B Sin[w[s]], z'[s] ==  $\sqrt{1 - A^2 Cos[w[s]]^2 - B^2 Sin[w[s]]^2}$ ,  
  | cosseno | seno  
  w[0] == wo, k[0] == ko, x[0] == 1, y[0] == 1, z[0] == 1}, {k, w, x, y, z}, {s, so, s1};
```

- Solução numérica da curvatura da curva  $\alpha$

```
ParametricPlot [Evaluate[{s, k[s]} /. p], {s, so, s1}]  
| gráfico paramétrico | calcula
```

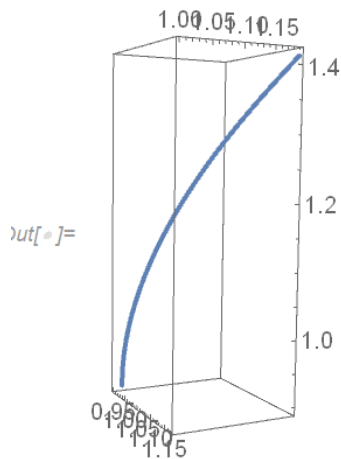
- Solução numérica da curvatura da curva  $\alpha$

```
ParametricPlot [Evaluate[{s, k[s]} /. p], {s, so, s1}]  
| gráfico paramétrico | calcula
```



■ Construção da curva geratriz  $\alpha$

```
In[ ]:= ParametricPlot3D[Evaluate[{x[s], y[s], z[s]} /. p], {s, so, s1},
  gráfico paramétrico 3D calcula
  ViewPoint -> {2, -1.2, .25}, PlotRange -> All]
  ponto de vista intervalo do g· tudo
```



■ Para a construção da curva  $\beta$ , escolhemos  $w1 = \pi$

```
In[ ]:= w1 = Pi;
  número pi
q = NDSolve[{k'[s] == Sqrt[-k[s]^4 - c3 k[s]^2 - c1^2 / k[s]^2 - c1 c2],
  resolve numericamente equação diferencial
  w'[s] == Sqrt[k[s]^2 + lambda1 lambda2], xx'[s] == A Cos[w[s]], yy'[s] == B Sin[w[s]],
  cosseno seno
  zz'[s] == Sqrt[1 - A^2 Cos[w[s]]^2 - B^2 Sin[w[s]]^2], w[0] == w1,
  k[0] == ko, xx[0] == 1, yy[0] == 1, zz[0] == 1}, {k, w, xx, yy, zz},
  {s, so, s1}];
```

- Construção da superfície mínima de translação.

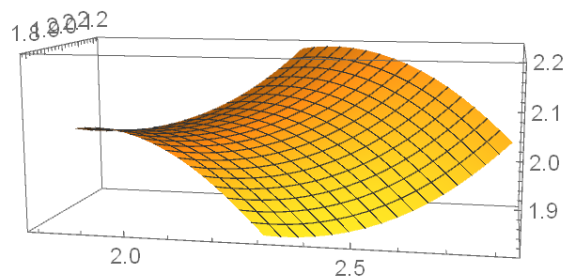
In[ ]:=

```

ParametricPlot3D[Evaluate[{x[s], y[s], z[s]} /. p] +
  gráfico paramétrico 3D calcula
  Evaluate[{xx[t], yy[t], zz[t]} /. q], {s, so, s1}, {t, so, s1},
  calcula
  ViewPoint → {2, -1.2, .25}, PlotRange → All]
  ponto de vista intervalo do gráfico tudo

```

Out[ ]:=



### ■ Exemplo 3

```

In[10]:= λ1 = -2; λ2 = -1; λ3 = 1;
          - (λ - λ1) (λ - λ2) (λ - λ3) // Expand
                                             [expande]

c1 = λ1 λ2 λ3
c2 = (λ1 + λ2 + λ3)
c3 = (λ1 λ2 + λ2 λ3 + λ1 λ3)
A = Sqrt[λ3 / (λ3 - λ1)] // N
    [raiz quadrada]          [valor numér]
B = Sqrt[λ3 / (λ3 - λ2)] // N
    [raiz quadrada]          [valor numéri]
y1 = Sqrt[-λ1 λ3] // N
    [raiz quadrada]          [valor numérico]
y2 = Sqrt[-λ2 λ3] // N
    [raiz quadrada]          [valor numérico]

Out[11]= 2 + λ - 2 λ2 - λ3

Out[12]= 2

Out[13]= -2

Out[14]= -1

Out[15]= 0.57735

Out[16]= 0.707107

Out[17]= 1.41421

Out[18]= 1.

```

- Etapa n<sup>o</sup> 5 do algoritmo de construção de superfície mínima de translação.

In[21]:=

```
ko = 1.1;
```

In[20]:=

```
w0 = 0;
```

In[22]:=

```
so = -0.27;
```

```
s1 = .571;
```

```
p = NDSolve[{k'[s] == Sqrt[-k[s]^4 - c3 k[s]^2 - c1^2 / k[s]^2 - c1 c2],  
[resolva numericamente] [raiz quadrada]
```

```
w'[s] == Sqrt[k[s]^2 + λ1 λ2], x'[s] == A Cos[w[s]], y'[s] == B Sin[w[s]],  
[raiz quadrada] [cosseno] [seno]
```

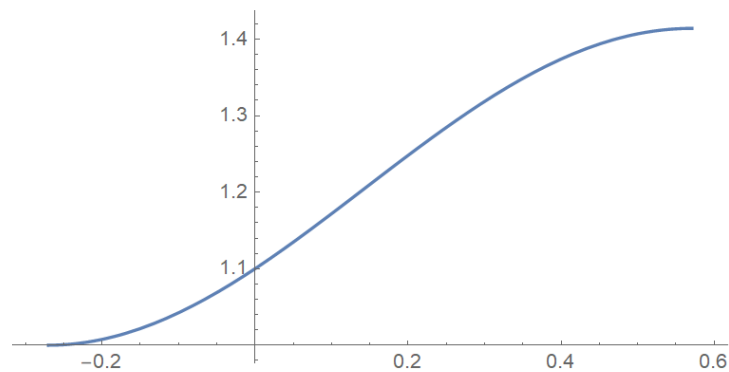
```
z'[s] == Sqrt[1 - A^2 Cos[w[s]]^2 - B^2 Sin[w[s]]^2], w[0] == w0,  
[raiz quadrada] [cosseno] [seno]
```

```
k[0] == ko, x[0] == 0, y[0] == 0, z[0] == 0}, {k, w, x, y, z}, {s, so, s1}];
```

- Solução Numérica da curvatura da curva  $\alpha$

```
In[23]:= ParametricPlot[Evaluate[{s, k[s]} /. p], {s, so, s1}  
[gráfico paramétrico] [calcula]
```

Out[23]:=



- Etapa n<sup>o</sup> 6 do algoritmo de construção de superfície mínima de translação. Curva  $\alpha$

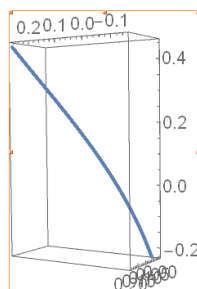
In[35]:=

```
ParametricPlot3D[Evaluate[{x[s], y[s], z[s]} /. p], {s, so, s1},  
[gráfico paramétrico 3D] [calcula]
```

```
PlotRange -> All, ViewPoint -> {0, 3, 1}]
```

```
[intervalo do g... [tudo] [ponto de vista]
```

Out[35]:=



- Para a construção da geratriz  $\beta$ , repetimos novamente a etapa n° 5 do algoritmo de construção de superfície mínima de translação. Agora escolhemos  $w_1 = \pi/2$ .

In[38]:=

```

w1 = Pi / 2;
      |
      | número pi
q = NDSolve[{k'[s] == Sqrt[-k[s]^4 - c3 k[s]^2 - c1^2 / k[s]^2 - c1 c2],
      |
      | resolve numericament... | raiz quadrada
      w'[s] == Sqrt[k[s]^2 + λ1 λ2], xx'[s] == A Cos[w[s]],
      |
      | raiz quadrada | cosseno
      yy'[s] == B Sin[w[s]],
      |
      | seno
      zz'[s] == Sqrt[1 - A^2 Cos[w[s]]^2 - B^2 Sin[w[s]]^2], w[0] == w1,
      |
      | raiz quadrada | cosseno | seno
      k[0] == ko, xx[0] == 1, yy[0] == 0, zz[0] == 0}, {k, w, xx, yy, zz},
      {s, so, s1}];

```

- Construção da superfície mínima de translação

In[39]:=

```

ParametricPlot3D[Evaluate[{x[s], y[s], z[s]} /. p] +
      |
      | gráfico paramétrico 3D | calcula
      Evaluate[{xx[t], yy[t], zz[t]} /. q], {s, so, s1}, {t, so, s1},
      |
      | calcula
      PlotRange -> All, ViewPoint -> {0, 3, 1}]
      |
      | intervalo do g... | tudo | ponto de vista

```

Out[39]=

