

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
FACULDADE DE FILOSOFIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FILOSOFIA

SARAH LINDSAY BOTÃO DE OLIVEIRA FERREIRA

**AS DUAS NOÇÕES DE MULTIPLICIDADE NO LIVRO *DIE GRUNDLAGEN DER
ARITHMETIK* DE FREGE**

GOIÂNIA

2025



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
FACULDADE DE FILOSOFIA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

Dissertação Tese Outro*: _____

*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

Exemplos: Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

2. Nome completo do autor

SARAH LINDSAY BOTÃO DE OLIVEIRA FERREIRA

3. Título do trabalho

As duas noções de Multiplicidade no livro Die Grundlagen der Arithmetik de Frege

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

a) consulta ao(a) autor(a) e ao(a) orientador(a);

b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.

O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.



Documento assinado eletronicamente por **Araceli Rosich Soares Velloso, Professor do Magistério Superior**, em 13/01/2025, às 17:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Sarah Lindsay Botão De Oliveira Ferreira, Discente**, em 16/01/2025, às 17:17, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **5091902** e o código CRC **EF593EB5**.

Referência: Processo nº 23070.000001/2025-92

SEI nº 5091902

SARAH LINDSAY BOTÃO DE OLIVEIRA FERREIRA

AS DUAS NOÇÕES DE MULTIPLICIDADE NO LIVRO *DIE GRUNDLAGEN DER ARITHMETIK*, DE FREGE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia da Faculdade de Filosofia da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestra em Filosofia.

Area de concentração: Filosofia

Linha de Pesquisa: Lógica e Filosofia da Linguagem

Orientador: Profa. Dra. Araceli Rosich Soares Velloso

Goiânia

2025

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Ferreira, Sarah Lindsay Botão de Oliveira

As duas noções de Multiplicidade no livro Die Grundlagen der Arithmetik de Frege [manuscrito] / Sarah Lindsay Botão de Oliveira Ferreira. - 2025.

83 f.

Orientador: Profa. Dra. Araceli Rosich Soares Velloso.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Faculdade de Filosofia (Fafil), Programa de Pós-Graduação em Filosofia, Goiânia, 2025.

Inclui símbolos, algoritmos.

1. Números Cardinais. 2. Multiplicidade. 3. Conjuntos. 4. Frege. 5. Os Fundamentos da Aritmética. I. Velloso, Araceli Rosich Soares, orient. II. Título.

CDU 1



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

FACULDADE DE FILOSOFIA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº 01/2025 da sessão de Defesa de Dissertação de SARAH LINDSAY BOTÃO DE OLIVEIRA FERREIRA, que confere o título de Mestra em Filosofia do Programa de Pós Graduação em Filosofia da Universidade Federal de Goiás, **área de concentração em Filosofia**.

Aos treze dias do mês de Janeiro do ano de dois mil e vinte e cinco, a partir das nove horas, na sala de defesas do Programa de Pós Graduação em Filosofia da Faculdade de Filosofia da Universidade Federal de Goiás, realizou-se a sessão pública de Defesa de Dissertação intitulada “ **As duas noções de Multiplicidade no livro Die Grundlagen der Arithmetik de Frege**”. Os trabalhos foram instalados pela Orientadora, Professora Doutora Araceli Rosich Soares Velloso (FAFIL-UFG) com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor Mário Ariel González Porta (PUC - SP), membro titular externo; **cuja participação ocorreu através de videoconferência**, Professor Doutor André Da Silva Porto (FAFIL-UFG), membro titular interno. Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido a candidata **aprovada** pelos seus membros. Proclamados os resultados pela Professora Doutora Araceli Rosich Soares Velloso (FAFIL-UFG), Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos treze dias do mês de Janeiro do ano de dois mil e vinte e cinco.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA



Documento assinado eletronicamente por **Fabio Ferreira De Almeida, Coordenador de Pós-Graduação**, em 13/01/2025, às 16:05, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Andre Da Silva Porto, Professor do Magistério Superior**, em 13/01/2025, às 16:49, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Araceli Rosich Soares Velloso, Professor do Magistério Superior**, em 13/01/2025, às 17:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **5073758** e o código CRC **3E36F3F1**.

Referência: Processo nº 23070.000001/2025-92

SEI nº 5073758

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar a minha profunda gratidão a todos aqueles que participaram da minha jornada acadêmica, trilhada no desenvolvimento desta dissertação. Foi uma experiência repleta de obstáculos, mas também de descobertas e oportunidades, guiadas por pessoas excepcionais, que ofereceram apoio, orientação, amizade e acreditaram na minha capacidade de realizar esta pesquisa. Embora a concretização desta seja uma parte significativa do meu desenvolvimento acadêmico, o produto maior foi certamente a experiência intelectual, profissional e afetiva que pude vivenciar nestes últimos anos. Gostaria, assim, de expressar minha profunda gratidão a todos que tornaram esta jornada possível.

Agradeço à minha orientadora, Prof.^a Dr.^a Araceli Rosich Soares Velloso, pela curadoria dos conteúdos em seus seminários, sem os quais esta dissertação não poderia ser escrita e pela preocupação com a precisão do texto.

Ao professor Dr. André da Silva Porto, pela sua generosidade intelectual, por seu entusiasmo e crítica, mostrando-me o caminho e me ajudando a iniciar a minha jornada acadêmica. Suas sugestões e dedicação minuciosa foram indispensáveis para meu desenvolvimento como acadêmico.

Ao professor Dr. Mario Ariel González Porta, por sua disponibilidade para compor a banca examinadora, pois tê-lo como convidado foi uma honra inestimável. Gostaria também de agradecer ao Professor Dr. Guilherme Ghisoni da Silva, não só por ter aceitado o convite para compor a banca de qualificação e por suas observações, mas também pelo seu acolhimento e apoio administrativo, enquanto coordenador do PPGFIL, no período do meu ingresso.

À Marlene Pereira de Oliveira, também pelo apoio e pela assistência administrativa indispensáveis para minha permanência no PPGFIL.

À minha mãe, Vana Cléia Botão de Oliveira, pelo apoio afetivo, suporte e fé em mim. Sem você, eu não poderia ter concluído esta dissertação a tempo.

A todos os servidores da Universidade Federal de Goiás, tanto do Campus Samambaia quanto do Campus Goiás, por terem me acolhido e contribuído para o meu desenvolvimento intelectual nestes últimos 8 anos.

À Capes, pelo apoio financeiro e por ter garantido a minha permanência no PPGFIL.

Mesmo agora, não vejo como a aritmética pode ser fundada cientificamente, como os números podem ser apreendidos como objetos lógicos e levados em consideração, se não for pelo menos condicionalmente permissível passar de um conceito para sua extensão. Posso sempre falar da extensão de um conceito, de uma classe? E se não, como as exceções devem ser reconhecidas? Pode-se sempre inferir da extensão de um conceito coincidindo com a de um segundo que todo objeto que cai sob o primeiro conceito também cai sob o último? Essas questões surgem da comunicação do Sr. Russell [tradução nossa] (Frege, 2013, p. 253).

RESUMO

O tema desta dissertação são as dificuldades identificadas por Frege nas noções empírica (§§ 22-25) e formalista (§ 29-54) de “número”, na obra *Die Grundlagen der Arithmetik*. Nosso principal objetivo é discutir essas dificuldades e a solução que Frege propõe para elas, a partir da afirmação expressa na seção § 46, de que “a indicação numérica enuncia algo sob um conceito”, uma ideia fundamental para compreender sua proposta de fundamentação lógica da aritmética. Nossa hipótese é que, nas seções §§ 18-44 desta obra, Frege rejeita duas noções de “multiplicidade”, com o propósito de persuadir o seu interlocutor de que a indicação numérica enuncia algo sob um “conceito” [§ 46].

Palavras-chave: números cardinais; multiplicidade; conjuntos; Frege; *Die Grundlagen der Arithmetik*.

ABSTRACT

The theme of this dissertation is the difficulties identified by Frege in the empirical (§§ 22-25) and formalist (§ 29-54) notions of “number” in the book *Die Grundlagen der Arithmetik*. Our main objective is to discuss these difficulties and the solution that Frege proposes for them, based on the statement expressed in section § 46, that “a statements of number contains an assertion about a concept”, a fundamental idea to understand his proposal for the logical foundation of arithmetic. Our hypothesis is that, in sections §§ 18-44 of this work, Frege rejects two notions of “multitude”, with the purpose of persuading his interlocutor that a statement of number contains an assertion about a “concept” [§ 46].

Keywords: Cardinal Numbers; Multiplicity; Sets; Frege; The Foundations of Arithmetic.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	8
1 AS DUAS NOÇÕES DE “MULTIPLICIDADE” NO LIVRO DIE GRUNDLAGEN DER ARITHMETIK DE FREGE.....	13
1.1 Multiplicidade de “unidades” como uma noção abstraída da enumeração dos “corpos físicos”.....	15
1.2 Principais argumentos a favor da noção de “multiplicidade de unidades”.....	18
1.3 Principais dificuldades com a noção de “multiplicidade de unidades” na Die Grundlagen der Arithmetik.....	28
1.4 Caracterização da noção de “multiplicidade de corpos físicos”.....	37
1.5 Principais argumentos a favor da noção de “multiplicidade de corpos físicos”.....	40
1.6 Argumentos de Frege para rejeitar a noção de “multiplicidade de corpos físicos”... 	42
1.7 Semelhanças entre a noção de “multiplicidade de unidades” e a noção de “multiplicidade de corpos físicos”.....	47
2. A SOLUÇÃO DE FREGE.....	49
2.1 O problema investigativo.....	50
2.2 Metodologia empregada para analisar as proposições aritméticas na Die Grundlagen der Arithmetik.....	52
2.3 Solução do problema: números como conceitos de segunda ordem.....	57
<i>2.3.1 A indicação numérica contém um enunciado sobre um conceito.....</i>	<i>58</i>
<i>2.3.2 Solução para a múltipla atribuição numérica aos “agregados” de corpos físicos.....</i>	<i>63</i>
<i>2.3.3 O conceito de “unidade”.....</i>	<i>67</i>
2.4 Definições do número “zero” e do número “um”.....	75
3 CONCLUSÃO.....	79
REFERÊNCIAS.....	84

INTRODUÇÃO

O tema desta dissertação foi extraído das leituras da *Die Grundlagen der Arithmetik* (1884). Uma obra do período inicial do desenvolvimento do trabalho de Frege em que o autor esboça um dos aspectos mais importantes da sua filosofia da aritmética, a ideia de que os números cardinais (*Anzahl*) contêm um enunciado sob um conceito de primeira ordem. O principal objetivo de Frege, nessa obra, é persuadir o leitor da sua análise lógica do conceito de número natural e tornar plausível a explicação da tese de que a aritmética pode ser derivada da lógica.

A estrutura expositiva do *Die Grundlagen der Arithmetik* é constituída por uma introdução, sucedida por cento e nove parágrafos. Nas seções §§ 1-4, Frege apresenta os motivos da investigação que conduzirá; nas seções §§ 5-9, critica as opiniões de alguns autores sobre a natureza das proposições aritméticas; nas seções §§ 18-54, apresenta e critica os argumentos de alguns autores sobre o conceito de número natural, interessando-se, principalmente, pelas asserções numéricas relativas à contagem; nas seções §§ 55-86, traz sua definição dos números cardinais (*Anzahl*), dos números “zero” e “um” e da relação de seguir na série natural; nas seções §§ 87-109, explicita sua conclusão.

Para localizar a *Die Grundlagen der Arithmetik* ao longo do desenvolvimento do pensamento de Frege, utilizamos a divisão em três períodos das obras do autor – período inicial, período médio e tardio –, porque essa divisão é mais apropriada para abordar o desenvolvimento de sua filosofia aritmética. Importa localizar a obra *Die Grundlagen der Arithmetik* no período inicial, visto que algumas ideias dessa obra sofreram mudanças ao longo do desenvolvimento do pensamento do autor.

O período inicial é marcado pela publicação da *Begriffsschrift* (1879) e da *Die Grundlagen der Arithmetik* (1884); o período médio tem início em 1891, com o *Funktion und Begriff*. Nestas obras, Frege anuncia as principais mudanças no seu sistema formal e na filosofia subscrita por esse sistema, *i.e.*, a bifurcação da concepção semântica de “conteúdo conceitual” em noções como “sentido” e “referência”, a introdução do Verdadeiro e do Falso como referências das sentenças, a noção de percurso de valor e o operador de descrição. O fim desse período é determinado pelo aparecimento do paradoxo de Russell, em 1903, e a posterior desistência do Frege de tentar achar uma solução para resolver a inconsistência, apontada por Russell no seu sistema formal, apresentado no livro *Grundgesetze der Arithmetik* (1893-1906).

Após 1906, temos o período tardio, no qual pouco foi publicado, pois os problemas filosóficos da aritmética são deixados de lado por Frege, que desiste de fundamentar a aritmética na lógica.

Como já antecipamos, um dos aspectos mais importantes de sua filosofia aritmética é a sua definição dos números cardinais (*Anzahl*) como asserções sob conceitos. Essa definição é apresentada fundamentalmente na *Die Grundlagen der Arithmetik*, uma obra cuja tarefa principal (§ 4) é discutir sobre a possibilidade de reconhecer os inteiros positivos como definíveis ou não.

Frege considera que podemos construir classes de equivalência entre extensões de conceitos que possuem a mesma cardinalidade, partindo do conceito de segunda ordem, “O conceito *A* é equinúmero ao conceito *B*.” Essa definição antecede aquela representada pela Lei Básica V, publicada no *Grundgesetze der Arithmetik*, em 1893-1906, em que Frege passa a definir os “números” como uma equivalência entre percursos de valores.

Antes de Frege apresentar sua definição dos números cardinais na *Die Grundlagen der Arithmetik*, a estratégia expositiva apresentada por ele nas seções §§ 18-54 dessa mesma obra consiste em apresentar e criticar algumas opiniões de filósofos e matemáticos sobre os números inteiros positivos (ou “números naturais”). Identificamos que, nessas seções, Frege rejeita duas noções dos inteiros positivos, pois em cada uma delas estaria pressuposta a existência de multiplicidades aritméticas. Isto é, ambas as definições estariam fundamentadas em uma noção de multiplicidade, um termo matemático utilizado para falar em quantidades aritméticas.

Nossa hipótese é a de que, nas seções §§ 18-54 da *Die Grundlagen der Arithmetik*, Frege rejeita duas noções de multiplicidade, pressupostas nas opiniões de matemáticos e filósofos sobre os inteiros positivos, com o propósito de persuadir o seu interlocutor de que os números cardinais (*Anzahl*) enunciam algo sobre um “conceito”. Portanto, para concretizar nossa hipótese, dividiremos nosso tema em dois capítulos. No primeiro capítulo, caracterizamos as duas noções de multiplicidade aritméticas, circunscrevendo os argumentos de seus partidários, os principais argumentos da crítica de Frege a esses argumentos e o que eles têm em comum, do ponto de vista da lógica desse autor. No segundo capítulo, circunscrevemos os principais argumentos de Frege para superar essas dificuldades, sistematizamos cada dificuldade com a solução proposta por ele e, ao fim, apresentamos as definições fregianas do número “zero” e do número “um”, avaliando a viabilidade desses argumentos com o auxílio da notação do Cálculo Lambda, de Alonzo Church.

O primeiro capítulo consistirá de quatro etapas. Na primeira etapa, para caracterizarmos as duas noções de multiplicidade que o Frege rejeita na parte crítica da obra *Die Grundlagen der Arithmetik*, circunscrevemos as premissas adotadas na noção de “número” de número como um “aglomerado” de “unidades” e os argumentos de Frege para rejeitá-la. Depois, circunscrevemos as premissas adotadas na noção de “número” como um “agregado de corpos físicos” e os argumentos de Frege para rejeitá-la.

Mostramos que, nas seções §§ 29-44 da *Die Grundlagen der Arithmetik*, o Frege critica a pressuposição de que os “números naturais” são formados pela abstração das propriedades distinguidoras – designadas pelo “conceito” sob o qual caem os “objetos” – de uma multiplicidade de “corpos físicos”, para produzir uma multiplicidade de “unidades”. O principal argumento dessa noção de “número” é que “número” é uma “aglomerado” composto de “unidades” – uma definição de origem euclidiana –, em que a palavra “unidade”, no singular, é empregada como um nome aplicável a uma multiplicidade de “corpos físicos” que satisfazem a propriedade de “ser 1”, ou seja, de ser enumerável; e que a palavra “unidades”, no plural, é empregada no sentido de indicar que as coisas enumeradas são discerníveis.

Também indicamos que o objetivo principal da crítica de Frege nas seções §§ 29-44 consiste em indicar uma eminente dificuldade no processo de contagem: não conseguimos ultrapassar o número “1”, porque não é possível distinguir os objetos a serem enumerados, colapsando-os em um único objeto, ou perdemos o elemento comum que informa o que deve ser considerado como objeto de contagem. O principal argumento de Frege consiste em mostrar que se a função cardinal dos números for determinada com base na ideia de que contamos um “aglomerado de coisas” (*Anhäufung von Dingen*), compreendidas como “unidades”, não se é possível reconciliar as propriedades de “identidade” e de “diferença” atribuída aos corpos que compõem a multiplicidade de “unidades”.

Mostramos que, nas seções §§ 22-25 da *Die Grundlagen der Arithmetik*, o Frege critica o argumento de que “número” é uma propriedade atribuída a um “agregado” de corpos físicos e argumentamos que nesse argumento jaz uma noção de multiplicidade aritmética que incorpora resíduos da filosofia naturalista. Mostramos também que, para Frege, a compreensão da expressão “agregado” envolve assumir a premissa de que a realidade já se apresentaria segmentada em “corpos físicos”. Neste sentido, argumentamos que contaríamos uma multiplicidade de “corpos físicos” que se apresentam sob uma realidade já segmentada.

Ao final da caracterização dessa noção de multiplicidade, indicamos que o principal argumento para Frege rejeitar a noção dos números inteiros como uma propriedade atribuída a

multiplicidade de “corpos físicos” é oferecer uma explicação de como um “corpo” empírico pode ser conceitualizado de várias maneiras, de modo que podemos designar a multiplicidade de “corpos físicos” por diversos números de partes, e não de uma única maneira característica, que resultasse de observações empíricas, como os partidários dessa da noção de “número” como um “agregado de corpos físicos” haviam pressuposto.

O segundo passo consiste em delimitar as dificuldades associadas à segunda noção dos números inteiros positivos abordada nas seções §§ 29-44. Argumentamos que essa concepção define “número” como uma propriedade atribuída a uma multiplicidade de “unidades”, caracterizando-se por um enfoque mais abstrato e metafísico. Para Frege, o principal motivo para rejeitá-la é a ambiguidade no uso das categorias semânticas de “unidade” e “um”, que, no plano linguístico, produz a ilusão de que os “números naturais” seriam “propriedades” atribuídas a “objetos” no plano ontológico.

O terceiro passo consistirá em realizar uma exposição dos argumentos na *Die Grundlagen der Arithmetik*, visando circunscrever as dificuldades com a primeira noção dos “números naturais” criticada por Frege, nas seções §§ 22-25, a de “número” como “agregado de corpos físicos”, cujo principal argumento para Frege rejeitá-la consistirá em sustentar que, nas proposições em que haja ocorrências numéricas, a indicação numérica não expressa uma “propriedade” atribuída a “corpos físicos”, pois, nenhum “corpo físico” pode constituir uma “unidade” absoluta.

O quarto passo será comparar as semelhanças entre as duas noções de “número”, a noção de “número” como uma “propriedade” atribuída a um “aglomerado de coisas” (*Anhäufung von Dingen*), consideradas como “unidades”, e a noção de “número” como uma “propriedade” atribuída a um “agregado de coisas” (*Aggregat von Dingen*), consideradas como corpos físicos, para extrairmos o principal problema comum às duas noções, que, segundo Frege, é a exclusão dos números “zero” e “um” como capazes de quantificar quantidades. Ao que parece, não teríamos como falar em “multiplicidade”, no caso do “zero” e do “um”, do mesmo modo como falamos em “multiplicidade” para o caso dos números inteiros positivos “dois”, “três”, “quatro”, “cinco” e etc. Pois, os casos do “um” e do “zero” não parecem se deixarem compreender através da ideia de “multiplicidade”.

Defendemos que o argumento nuclear da crítica de Frege a ambas as noções de número cardinal consiste em rejeitar a noção das quantidades aritméticas como “propriedades” atribuídas a “objetos”, que, segundo o Frege, nas proposições relativas à contagem, são expressas como predicacões atribuídas a nomes de objetos (“nomes próprios”). Para Frege,

esses autores ainda teriam de explicar a natureza semântica do conceito de “multiplicidade”, mas, no entanto, oferecem a metáfora do processo de contagem de objetos empíricos no lugar de uma definição lógica. Na *Die Grundlagen der Arithmetik*, Frege está particularmente preocupado com o contexto de aplicação dos juízos aritméticos e pretende oferecer uma definição lógica de “número” sem fazer uso dos numerais ou da palavra “número”. Nesse sentido, Frege afirma [§ 46] que um juízo aritmético enuncia algo sob um “conceito”, e não sob um “objeto”.

No segundo capítulo, procuramos mostrar que a solução de Frege para lidar com essas dificuldades é adotar a ideia de que os “números cardinais” contêm um enunciado sob um “conceito”, fazendo apelo prioritariamente a recursos linguísticos em detrimento das categorias ontológicas, para fornecer uma explicação lógica dos fundamentos das nossas asserções de contagem. Também mostraremos que, no percurso da sua exposição, o lógico alemão distingue cuidadosamente entre proposições em que um “nome” de um “objeto” instancia um “conceito” e proposições em que um “conceito” cai sob (instancia) um outro “conceito” de ordem superior, *i.e.*, de proposições formais. Por fim, trazemos a definição fregiana dos números “zeros” e “um”, que até então permaneciam sem solução.

Para concretizar o segundo capítulo, o dividiremos em quatro etapas. A primeira etapa consistirá em apresentar o problema investigativo compartilhado pelas duas noções de “multiplicidade”, rejeitadas por Frege na *Grundlagen*; a segunda apresenta a metodologia empregada por Frege para criticar ambas as noções de “multiplicidade” e apresentar a sua solução para as dificuldades que elas introduzem; a terceira etapa visa a sistematizar as dificuldades com a respectiva solução que Frege apresenta [§ 46]; por fim, examinamos a definição lógica fregiana dos números “zero” e “um” [§ 55] com o auxílio da notação do cálculo Lambda, de Alonzo Church.

1 AS DUAS NOÇÕES DE “MULTIPLICIDADE” NO LIVRO *DIE GRUNDLAGEN DER ARITHMETIK* DE FREGE

Na primeira metade da *Die Grundlagen der Arithmetik*, Frege revisou opiniões filosóficas de autores alemães e britânicos acerca dos inteiros positivos. Desta revisão, Frege estava especificamente interessado nas asserções de contagem do discurso aritmético cotidiano, pois, segundo o lógico, embora façamos inferências no discurso aritmético comum a partir de fórmulas numéricas, estas não estão regimentadas logicamente. No desenvolvimento da sua revisão, Frege rejeita duas noções sobre as quais a palavra “número” estaria fundamentada, a noção empírica de “número”, a noção de “número” como um “agregado de coisas” (*Aggregat von Dingen*), consideradas como corpos físicos, e uma noção formalista de número, a noção de “número” como um “aglomerado de coisas” (*Anhäufung von Dingen*), consideradas como “unidades”.

Utilizamos o termo “multiplicidade” para unificar as duas noções de “número” que mencionamos, a empírica e a formalista, porque este termo está entre os substantivos que o Frege julga (1989, §28, p.115) serem indefinidos ou genérico demais para definir “número”. Segundo o lógico alemão (1989, §28, p.115), as palavras “multiplicidade” (*Vielheit*), “agregado” (*Aggregat*), “grupo” (*Gruppe*), “aglomerado” (*Haufe*), “conjunto” (*Menge*), “pluralidade” (*Mehrheit*) são palavras empregadas por alguns autores para definir “número” (1989, §28, p.115). Neste sentido, é importante enfatizar que, qualquer umas destas palavras serviria para caracterizar ambas as noções de “número”, segundo o erro em comum que o Frege argumenta haver ser cometido por ambas, i.e., pressupor que os “objetos” são portadores dos números, empregando estes substantivos indefinidos para definir o conceito “número”. Então, de todas estas palavras que o Frege menciona “multiplicidade” (*Vielheit*), “agregado” (*Aggregat*), “grupo” (*Gruppe*), “aglomerado” (*Haufe*), “conjunto” (*Menge*), “pluralidade” (*Mehrheit*), empregaremos somente o termo “multiplicidade”, para dar maior coerência a nossa exposição. Também é importante enfatizar, que o emprego do termo “multiplicidade” utilizado na nossa exposição não deve ser confundido com o sentido que ele tem atualmente na matemática, que consiste em um caráter mais técnico e restrito às quantidades contínuas.¹

¹ O termo “multiplicidade”, na matemática, é traduzido do inglês “*manifold*” e do alemão “*Mannigfaltigkeit*”. “*Manifold*”. “*Manifold*” é um adjetivo em inglês que significa “muitos e variados”. Mais tarde esse termo adquiriu um sentido como substantivo significando “multiplicidade” que pode ser confundido com “*Mannigfaltigkeit*”, empregado por Riemann como sinônimo de “magnitude” em sua teoria das “multiplicidades”. A evolução do conceito de “*manifold*” na matemática merece uma discussão separada e esta não é nossa pretensão nesse trabalho.

Neste capítulo, abordamos a crítica de Frege nas seções §§29-44, que diz respeito à noção de “número” como um “aglomerado de coisas” (*Anhäufung von Dingen*), concebido pelos matemáticos formalistas como “unidades”. Em seguida, abordamos a crítica à noção de “número” como um “agregado de coisas” (*Aggregat von Dingen*), ou de “corpos físicos”, presente nas seções §§ 22-25. Obedecemos à seguinte ordem de dificuldades: primeiro, abordamos as seções §§ 29-44, em que o Frege critica a relação entre as asserções relativas à contagem de um “aglomerado de coisas” (*Anhäufung von Dingen*), consideradas como “unidades” indistinguíveis, depois, trabalhamos as seções §§ 22-25, em que o Frege critica a relação entre asserções relativas à contagem de um “agregado de coisas” (*Aggregat von Dingen*).

Como já antecipamos, a estrutura dos tópicos neste capítulo será a seguinte: na seção 1.1, caracterizamos a noção de multiplicidade, que jaz na noção de “número” como um “aglomerado de coisas” (*Anhäufung von Dingen*) consideradas como “unidades”; na seção 1.2, circunscrevemos as premissas que indicam a incorporação da noção de “multiplicidade” à explicação de “número” como “aglomerado de coisas”, consideradas como “unidades”; na seção 1.3, indicamos os principais argumentos de Frege para rejeitar a definição de “número” como “aglomerado de coisas”, consideradas como “unidades”. Na continuidade, em 1.4, caracterizamos a noção de “multiplicidade” incorporada na explicação de “número” como um “agregado de coisas” (*Aggregat von Dingen*), consideradas como “corpos físicos”; na seção 1.5, explicamos as premissas que indicam a incorporação da noção de “multiplicidade” à explicação de “número” como um “agregado de coisas”, consideradas como “corpos físicos”; e na seção 1.6, citamos os principais argumentos de Frege para rejeitar a explicação de “número” como “agregado de coisas”, consideradas como “corpos físicos”. Por fim, na seção 1.7 comparamos as semelhanças entre as duas noções de “número” para extrairmos o principal problema comum às duas noções, que é, segundo Frege, a exclusão dos números “zero” e “um” como capazes de quantificar quantidades.

1.1 Multiplicidade de “unidades” como uma noção abstraída da enumeração dos “corpos físicos”.

Na crítica de Frege à noção de “número” como um “aglomerado de coisas” (*Anhäufung von Dingen*) consideradas como “unidades” (§§ 29-44), Frege está preocupado com a aplicação de asserções numéricas, relativas à contagem. Argumentamos que Ernest Schröder (§ 29, § 34,

§ 43), Carl Johannes Thomae (§ 34), Stanley Jevons (§ 36, § 40, § 44) pressupõem uma “multiplicidade” de objetos descaracterizados chamados de “unidade”, ao definirem “número” como um “aglomerado de coisas” enumeradas (*die zu zählenden Dinge*), ou de “objetos” enumerados (*zu zählenden Gegenstände*). Neste sentido, para esses autores que Frege cita nas seções §§29-44, a palavra “unidade” significaria “objetos a enumerar” (*zu zählenden Gegenstände*) ou “coisas a enumerar” (*die zu zählenden Dinge*).

No início da crítica, Frege (1989, § 29) indica que o emprego da noção de multiplicidade de unidades tem origem no livro VII dos Elementos de Euclides. Na sua argumentação, afirma que Euclides utiliza a palavra “unidades” com vários sentidos, para se referir à propriedade classificadora, a um corpo físico enumerado e ao número um.

A primeira definição do Livro VII de Euclides (2009, p. 269) traz que “unidade é aquilo segundo o qual cada uma das coisas existentes é dita uma”. Segundo Frege (1989, § 29), nessa definição dos “números naturais” Euclides emprega a palavra “unidade” para se referir a corpos físicos e se referir a uma propriedade adicional que corpos físicos teriam, a dizer, a propriedade de “ser um(a)”.

Essa noção de “número” de Euclides foi generalizada para algumas estruturas matemáticas no século XIX. O uso da palavra “unidade”, tal como empregada por Euclides nos *Elementos*, foi incorporado na tradição da matemática. Esse uso da palavra, ao qual Frege se refere, diz respeito ao uso da palavra “unidade” como sinônima da palavra “um”, para caracterizar a noção de inteiros positivos empregados na matemática.

Segundo Frege (1989, § 29), a adoção desse uso da palavra “unidade” como sinônimo da expressão “um” implicaria o seguinte: ao se denominar corpos físicos de “unidade”, seria também possível encontrar uma propriedade adicional, por meio da qual esses corpos físicos são caracterizados como objeto de contagem, a dizer, a propriedade de “ser um”. Por conseguinte, para Frege, esses autores estariam oferecendo uma explicação dos inteiros positivos como propriedades atribuídas diretamente aos “objetos”, i.e., atribuições de primeira ordem.

A segunda definição do Livro VII de Euclides (2009, p. 269) é a seguinte: “número é a quantidade composta de unidades”. Então, se juntarmos a primeira definição com a segunda, teríamos um uso da palavra “quantidade composta” para se referir a “multiplicidades” e a palavra “unidade”, no plural, “unidades”, serviria para se referir à “multiplicidade” de “corpos físicos” que, quando são considerados individualmente, podem ser chamados de “um”.

Esse uso do substantivo “unidades”, no plural, utilizado para se falar de quantidades comparativas, i.e., de “coisas” que não podem ser definidas isoladamente, ocorre na matemática até os dias atuais. A palavra “um” é concebida como sinônima da palavra “unidade”, e no plural, “uns” como sinônima da palavra “unidades”. Ambas as palavras “um” e “unidade” não são propriamente consideradas como “números”, mas como aquilo que compõem os “números”, i.e., dos inteiros positivos, “zero”, “um”, “dois”, “três”, “quatro” e etc., somente poderia ser considerado como “número”, a partir do número “dois”. Isto é, o “zero” e o “um” não poderiam ser compreendidos como uma coleção de objetos enumerados, dos quais se poderia abstrair os números.

Nas seções §§ 29-44, Frege argumenta que os matemáticos Schröder, Thomae, Jevons entre outros, oferecem uma explicação sobre “número”, assumindo essa noção de “multiplicidade euclidiana” que acabamos de descrever nos últimos parágrafos. Segundo Frege, para esses autores, os inteiros positivos seriam produtos da denominação de cada “corpo físico” da “multiplicidade” a ser enumerada pela palavra “unidade”. Isso, nesse sentido, faria com que a palavra “unidade” fosse empregada como um substantivo comum. No plural, a palavra “unidades” pressuporia a “multiplicidade” de “corpos físicos” enumerados (*zu zählenden*), como um todo, antes mesmo de ser descrita por um “conceito”.

Essa compreensão dos inteiros positivos como uma composição de repetições de casos de unidade é, na matemática, uma compreensão dos inteiros positivos como produtos de contagem. Nessa perspectiva, para obtê-los seria necessário abstrair da multiplicidade de corpos físicos aquelas propriedades que tornariam cada corpo distinto do outro, mediante a atribuição da palavra “unidade” como substantivo comum para cada corpo físico, enumerado na multiplicidade. Isto é, obter-se-ia uma “multiplicidade de unidades” descaracterizada de qualquer propriedade distinguidora. Frege (1989, p. 117-124, §§ 29-44) argumenta que, para Schröder, Hobbes, Thomae, Jevons, Leibniz e Hesse, se fossem abstraídas as propriedades empíricas que tornam cada objeto distinto do outro. Considerando-se peso, tamanho e/ou forma, tempo e espaço, sem eliminar a distinção entre cada corpo da multiplicidade, restaria a propriedade de “ser um”, uma propriedade que todo corpo físico deveria supostamente possuir.

Seria razoável assumir, para esses autores, que se quiséssemos comparar duas multiplicidades de corpos físicos, com respeito a sua quantidade, tal comparação poderia ser realizada mediante a característica mais geral que todo corpo físico deveria supostamente possuir, independentemente de qualquer propriedade espaço-temporal que cada corpo físico

venha a possuir: a propriedade da “existência” e a propriedade da “unicidade” (“singularidade”).

Essa noção do processo de contagem de quantidades sugere que um sistema abstrato de contagem poderia ser expresso em linguagem ordinária. Nesse contexto, além de se estar assumindo os números inteiros positivos como uma escala natural, comum a todos os “corpos físicos”, também se estaria assumindo que os métodos práticos de abstração empírica (ou enumeração) precedem a formação da linguagem numérica. Sem embargo, segundo Frege (1989, § 21), a forma com que a expressão “um” aparece na linguagem ordinária pode, ilusoriamente, indicar um uso atributivo, em que a expressão “um” assume, na forma predicativa, a forma categórica correlata ao que se predica de um objeto – como se fosse uma expressão para designar uma propriedade de primeira ordem. O termo “um(a)”, porém, numa frase, em construção atributiva, i.e., “ser um(a)”, está sendo utilizado como artigo indefinido, e não com uma expressão para linguagem numérica.

Leibniz, Thomae, Schröder, Jevons e Hesse assumem essa postura descrita no parágrafo anterior e a ideia euclidiana de que “existência” e “unicidade” (singularidade) são características de corpos físicos, presumindo então que, abstraindo-se todas as propriedades espaço-temporais, obter-se-ia o nome geral a todas as coisas a serem enumeradas, “unidades”. Nesse sentido, no plural, a palavra “unidades” seria um substantivo aplicável a todos os corpos físicos ao serem enumerados. Para Frege (1989, § 48), esses autores que mencionamos no início do parágrafo, ao invés de oferecerem uma definição lógica de “número”, somente indicam o método pela qual os números são formados, i.e., via abstração empírica (como contagem) dos corpos físicos. Tal método obteve grande popularidade na comunidade matemática, como uma atitude investigativa mais distante daquela operada pelo empirismo.

Na crítica de Frege, na *Die Grundlagen der Arithmetik*, distinguimos a noção formalista de “número” da noção empírica de “número”, pois, a primeira adota o método de abstração empírica, enquanto processo formador de “unidades”, para se afastar das dificuldades que são produzidas pela noção empírica de “número”. Como se pode notar no texto, Frege faz várias menções ao método de abstração empírica das propriedades distinguidoras dos “objetos” nas seções § 21, da § 34 à § 44 e § 109. Frege também discute, nas seções §§40-44, este afastamento da noção empírica de “número” via o método de abstração. Um outro indicio desse afastamento, não menos importante, é o fato de que Jevons, um matemático formalista, é um crítico de Mill que, por sua vez, é um dos proponentes da noção empírica de “número” alvo da crítica de Frege, nas seções §§22-24.

1.2 Principais argumentos a favor da noção de “multiplicidade de unidades”

A seguir, explicamos como os matemáticos formalistas² criticados por Frege incorporam a noção de “multiplicidade de unidades” euclidiana em suas definições dos números inteiros, dando origem a uma pretensa teoria formal [dos “números”] como uma “multiplicidade de unidades descaracterizadas”. Na sequência, primeiro explicamos como os matemáticos formalistas concebem o número “um”, fazendo apelo aos numerais e à passagem deste para números maiores. Em seguida, trazemos os argumentos de Schröder, Jevons e Thomae nos quais essa circunstância aparece.

Como descrevemos na seção anterior, a definição de “unidade” e de “número” euclidiana, i.e., de que “unidade é aquilo segundo o qual cada uma das coisas existentes é dita uma” e “número é a quantidade composta de unidades”, é comparada por Frege com a noção de “unidade” empregada por Schröder, ou seja, “cada uma das coisas a se enumerar chama-se por unidade”. Essa comparação, feita pelo Frege (1989, p. 117) na seção § 29, tem como expediente indicar a origem de definições dos números naturais, em que o numeral “um” enuncia uma propriedade ou atributo de corpos físicos, ou seja, a origem das opiniões partidárias da ideia de que o numeral “um” é uma predicação de primeira ordem, atribuída ao “substantivo abstrato” “unidade” – “nome geral” que todos os corpos físicos receberiam ao serem enumerados.

Tal comparação de Frege sugere que em ambas as afirmações de Euclides e Schröder estar-se-ia definindo o “um” como “unidade” e os números como uma “multiplicidade” de “coisas” enumeradas, chamadas de “unidades”. Com essa estratégia expositiva, Frege identifica a origem da definição do numeral “um” como uma predicação atribuída aos corpos físicos ao serem enumeradas, as “unidades”. As palavras, “coisas a se enumerar” e “unidades” são todas empregadas genericamente para falar em “número” como coleções de objetos, assim como a que estamos empregando nesta exposição, a dizer, o substantivo “multiplicidade”. Contudo, todas estas palavras são, segundo Frege, demasiadamente indeterminadas para serem empregadas na definição de “número”.

² A prática formalista a qual Frege dirige sua crítica, no século XIX, refere-se a um tipo de formalismo mais arcaico e menos preocupado com a validade de suas manipulações (demonstrações e provas), como em Hilbert, seja por desconhecer alguma essência subjacente, seja por utilizar um raciocínio por analogia.

Como descrevemos na seção anterior, definiu-se o numeral “um” como uma propriedade adicional que todo “corpo físico” teria, enquanto objeto de enumeração ou de contagem, chamadas pelo substantivo “unidade”. Discutimos também como o matemático formalista pressupõe obter tal número “um” mediante o método de abstração de todas as propriedades distinguidoras dos “objetos”, incluindo as propriedades espaço-temporais que fazem um corpo físico ser distinto do outro. Restando, ao final da abstração, uma “multiplicidade de unidades” que teriam a propriedade que todo corpo, enquanto objeto de contagem, compartilharia, a dizer, a propriedade de “ser um”.

Embora os matemáticos formalistas tivessem uma visão da matemática não focada em quantidades, enquanto objetos matemáticos, mas em operações simbólicas com objetos arbitrários, a estrutura dos sinais com os quais os matemáticos formalistas operam suas investigações, contraem a mesma ambiguidade entre as palavras “um” e “unidade”. Neste sentido, os sinais são compreendidos pelos matemáticos formalistas com dupla função semântica, são considerados “termos” ou “nomes” aplicados a um “objeto” e a um “substantivo comum”, que pode ser aplicado a uma multiplicidade de objetos a serem enumerados.³

O duplo sentido dos sinais, na crítica de Frege, nas seções §§34-39, é encontrado nos trabalhos de Jevons, um dos maiores expoentes do formalismo na Grã-Bretanha, e também nos trabalhos de Schröder que, por sua vez, foi influenciado por Jevons. Esse duplo sentido dos sinais foi exaustivamente discutido e defendido na teoria dos signos de Charles Sanders Peirce, que por sua vez, foi influenciado pela compreensão dos signos nos trabalhos de Jevons e colaborou em alguns trabalhos de Schröder. Adiante, vamos circunscrever os argumentos dos matemáticos formalistas para explicar “número” como um “aglomerado de coisas” (*Anhäufung von Dingen*), consideradas como “unidades” e a compreensão das palavras “um” e “unidade” designadas pelo sinal “1”.

Na passagem a seguir, notamos o emprego dos substantivos a “soma de uns” e “soma de unidades” como sinônimas para “número”, no argumento de Schröder:

Para obter um sinal capaz de expressar quantas unidades existem, focamos na série, uma unidade por vez, representando cada uma com um traço [*man bildet sie mit einem Strich ab*]: 1 (um) [*eine Eins*]. Os colocamos em uma linha, conectando-os com o sinal + (mais), pois, por exemplo, 111 na notação padrão

³ cf. JEVONS, William Stanley. *The Principle of Science: A Treatise on Logic and Scientific Method*. Ed. 2ª London: Macmillan and Co, 1879. p.13-17, 156-157.

cf. SCHRÖDER. Ernst. *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studierende*. translated: Stephen Pollard. In: POLLARD. Stephen (org.) *Ernst Schröder on Algebra and Logic*. Springer: Kirksville, 2022. p.6

cf. FREGE, Gottlob. *Fundamentos da Aritmética*. Tradução: Luis Henrique dos Santos, ed. 4ª. São Paulo: Nova Cultural, 1989. p.121, 130-131

significaria cento e onze. Obtemos assim um sinal como $1 + 1 + 1 + 1 + 1$ cuja composição podemos descrever dizendo: “Um número natural é uma soma de uns”. Se admitirmos que às vezes podemos tratar os próprios objetos contados como unidades, então também podemos dizer: o número é uma soma de unidades⁴ (Schröder, 2022, p. 5, tradução nossa).

Na passagem anterior, extraída do capítulo 1 do *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studierende* (1873), Schröder apresenta sua concepção de “número natural” como uma composição de traços, descrita como “uma soma de uns”. Essa passagem também é citada na crítica de Frege na seção § 43 (Frege, 1989, p. 126, § 43). Nela, percebemos, que para Schröder, ao se combinar os vários sinais “1” repetidamente, intercalando-os pelo sinal de adição “+”, obtendo uma sequência, por exemplo, como esta “ $1 + 1 + 1 + 1 + 1$ ”, seria possível expressar um “número” que nomeia uma “multiplicidade de objetos contados”, as “unidades”.

Outra citação de Schröder, com respeito à relação entre o método de abstração empírica e a aplicação dos números naturais que vale a pena analisar, é a seguinte:

Um número natural é um sinal que expressa a frequência com que uma coisa é concebida como repetidamente presente – seja já presente na realidade [...] ou mesmo, existindo como uma ideia. A rigor, as duas atividades principais de abstração e reconhecimento estão sempre envolvidas na aplicação de números [...], um número [como qualquer outro sinal] tem o propósito intrínseco de comunicação [...]. Quem inicia a comunicação deve utilizar o processo de abstração para criar um número representando uma pluralidade de unidades, que são apresentadas como ideia, enquanto quem recebe e compreende a comunicação, deve realizar a operação de realização, utilizando o número como modelo para formar a mesma ideia desse conjunto de unidades (Schröder, 2022, p. 9, tradução nossa).⁵

Essa passagem também foi extraída do capítulo 1 do *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studierende* (1873), de Schröder, em que o autor descreve o processo de abstração como necessário para a aplicação dos números. A partir dessa passagem,

⁴ No original: “To obtain a sign capable of expressing how many of those units there are, we focus on the series one unit at a time, representing each with a stroke [[man bildet sie mit einem Strich ab]]: 1 (a one) [[eine Eins]]. We place these ones in a row, connecting them with the sign + (plus) since, for example, 111 in the standard notation would mean one hundred eleven. We obtain in this way a sign such as $1 + 1 + 1 + 1 + 1$ whose composition we can describe by saying: A natural number is a sum of ones. If you grant that we can sometimes treat the counted objects themselves as ones, then you can also say: the number is a sum of units. See the sections on named numbers in the second volume.”

⁵ No original: “A natural number is a sign that expresses how often a thing is conceived as repeatedly present—whether already present in reality or yet to be or even just existing as an idea. Strictly speaking, the two principal activities of abstraction and realization are always involved in the application of numbers since, as with any sign, a number has the intrinsic purpose of communication—including the communication of a single item which can often serve as a memory aid. The person who initiates the communication must use the abstraction process to create a number representing a plurality of units present to him as an idea, while the person who receives and understands the communication must perform the operation of realization using the number as a model to form the same idea of that set of units.”

observamos que Schröder defende uma fundamentação dos inteiros positivos altamente psicologista, à medida que, para ele, uma comunicação efetiva dos inteiros positivos, enquanto sinais, requer uma intuição ou experiência comum entre o emissor e receptor da comunicação.

Podemos também perceber a relação entre o método de abstração empírica e aquilo que Thomae considera como os inteiros positivos, na seguinte passagem da *Die Grundlagen der Arithmetik*:

Thomae chama de unidade um indivíduo do conjunto e diz: “As unidades são iguais entre si”. Do mesmo modo, ou muito mais corretamente, poder-se-ia dizer: os indivíduos do conjunto são distintos entre si. Ora, em que esta igualdade é importante para o número? As propriedades pelas quais as coisas se distinguem são indiferentes e estranhas a seu número. Eis por que deseja-se mantê-las afastadas. Mas isto não se consegue desta maneira. Quando, como requer Thomae, “faz-se abstração das peculiaridades dos indivíduos de um conjunto de objetos”, ou “ignoram-se, no exame de coisas separadas, as características pelas quais elas se distinguem” (Frege, 1989, p. 120, § 34).

Na passagem acima, Frege argumenta que, para Thomae, as propriedades distinguidoras daquilo que se deseja enumerar devem ser ignoradas, abstraindo as propriedades pelas quais se distinguem cada “objeto” enumerado que pertencente a um “conjunto” de indivíduos e a partir dessa pressuposição afirma que as “unidades iguais”.

Nas seções §§ 34-39, Frege (1989, p. 119-124) apresenta uma discussão mais específica sobre como os formalistas concebem o número “um” e os números maiores. A exposição dessa discussão é dividida em dois argumentos, tematizados pelo Frege em duas perguntas retóricas: a primeira, “se as unidades são iguais entre si?”, e a segunda, “se as unidades são diferentes entre si?”. A primeira é discutida nas seções §§ 34-35 e a segunda é discutida nas §§ 36-39. Nas seções §§ 34-35, Frege argumenta que os matemáticos formalistas oferecem como razão para se atribuir o número “um” às “unidades” a “identidade” compartilhada pelas “unidades”. Nas seções §§ 36-39, Frege argumenta que os matemáticos formalistas oferecem como razão para atribuir números maiores que “um” a “diferença” atribuída às “unidades”.

Segundo Frege, para os matemáticos formalistas, uma vez que todos os corpos físicos a serem enumerados compartilham a mesma “propriedade”, a dizer, a de “ser um”, as “unidades” seriam iguais (ou idênticas) segundo essa suposta propriedade. Os números inteiros positivos maiores que ‘um’ surgiriam da diferença que haveria entre as unidades enquanto múltiplas, *i.e.*, concebida somente em relação com outras e nunca isoladamente (Frege, 1989, § 35).

Na seção §35 da *Die Grundlagen der Arithmetik*, Frege argumenta que Jevons tenta alcançar o conceito de “número”, afirmando que “número é mais outro nome para diversidade. Que identidade precisa é a ‘unidade’ e com a diferença surge a pluralidade”. (FREGE. 1989, §35, p.121). A diferença numérica surgiria da abstração do caráter da diferença que surgiria da “pluralidade” (Frege, 1989, p. 126, § 44). Jevons chama a abstração da diferença de “número como a forma vazia da diferença” (Frege, 1989, p. 126, § 44).

Para que o número não absorva as marcas distintivas das coisas, diz St. Jevons: “Não será agora muito difícil formar uma ideia clara da abstração numérica. Ela consiste em fazer abstração do caráter da diferença, de que surge da pluralidade, mantendo-se sua mera existência. Quando falo três homens, não preciso indicar imediatamente uma a uma as marcas pelas quais cada um deles pode distinguir-se dos demais. Estas marcas devem existir, se são realmente três homens, e não um e o mesmo, e ao referir-me a eles como muitos, afirmo assim ao mesmo tempo a existência das diferenças requeridas. O número indefinido é, pois, ‘a forma vazia da diferença’” (Frege, 1989, p. 126, § 44).

Nessa passagem, Jevons pressupõe o método de diferenciação das unidades para obter a diversidade numérica, sem especificar nenhum tipo de caracterização que faria surgir uma “multiplicidade de unidades”. Jevons desejaria aproximar a abstração numérica da lógica, como podemos confirmar na seguinte afirmação desse autor (1879, p. 158): “A abstração numérica está longe de ser incompatível com a abstração lógica que é a origem de nossos mais amplos atos de generalização.”⁶

Desse modo, para o Jevons, a diferença surge da multiplicidade de corpos físicos, pois, para ele, é razoável que ao considerar cada “unidade” sendo “uma”, mas não “a mesma”, deveria tornar conhecida alguma propriedade que outra não possuía, isto é, propriedades diferentes. Na seguinte passagem, podemos observar como Jevons argumenta a favor das diferenças das “unidades”:

Jevons define: “Uma unidade (*unit*) é qualquer objeto do pensamento que se possa distinguir de qualquer outro objeto tratado como unidade no mesmo problema” [...]: “Quando escrevo o símbolo 5, quero dizer propriamente “1+1+1+1+1”, e é perfeitamente claro que cada uma destas unidades é distinta de cada uma das outras. Se exigido, posso designá-las assim 1'+1''+1''' +1''''+1''''''” (Frege, 1989, p. 121, § 36).

⁶ No original: “Numerical abstraction is so far from being incompatible with logical abstraction that it is the origin of our widest acts of generalization.”

Jevons justifica o seu procedimento afirmando que poderíamos distinguir as “unidades” umas das outras dentro da sequência intercalada pelo sinal da soma, desde que atribuamos a cada “caso de unidade”, “1”, uma marca ou índice distinto, responsável por sinalizar tal diferença. Jevons recorre a um critério exterior, a uma designação extrínseca, para afirmar que as “unidades” sejam qualitativamente distintas umas das outras e define “número” através da ideia de contagem de “unidades” no espaço ou no tempo.

Podemos observar que nas explicações de “número” de Jevons, Schröder e Thomae, o sinal “1” se refere a palavra “um”, compreendida como um “nome geral”, que designa uma propriedade atribuída a todo “objeto a ser enumerado”. Mas também, que o sinal “1” se refere ao substantivo “unidades” que, por sua vez, é aplicado a uma “multiplicidade de objetos enumerados”. Pois, para o matemático formalista, quando os sinais “1” são combinados lado-a-lado, eles denotam o substantivo “unidades” que relaciona os objetos denotados pelo sinal “1”.

De modo que, segundo o matemático formalista, cada “parte” da “multiplicidade de objetos enumerado”, nomeada como um caso de “unidade”, é indistinguível da “totalidade” de objetos enumerados. Como veremos nas próximas seções, esse duplo sentido dos sinais, que mencionamos nos parágrafos iniciais, é criticado pelo Frege nas seções §§36-39 da *Die Grundlagen der Arithmetik*.

Como mencionamos no início dessa seção, o duplo sentido dos sinais foi defendido por Jevons (1879, p.13-16, 32-33, 156-157) no seu *The Principle of Science*, em 1874. Para Jevons, os sinais se referem a “termos” ou “nomes” que são símbolos para “o mesmo objeto” ou “grupo de objetos distintos”. Como mencionamos no penúltimo parágrafo, na crítica de Frege à noção de “número” de Jevons, para Jevons, os sinais “1” combinados lado-a-lado, denotam o substantivo abstrato “unidades”, abstraído da “multiplicidade de coisas enumeradas”, nesse caso, cada sinal “1”, denota um substantivo “unidade” que possui as mesmas qualidades que o substantivo “unidades”, denotado pelo sinal composto de sinais “1” combinados lado-a-lado. Neste sentido, os sinais “1” combinados lado-a-lado se refere a um “objeto geral”, denominado “unidades”, que é combinado ou “aglomerado” (*Anhäufung*) pela mente.

O duplo sentido dos sinais foi discutido na teoria dos signos, introduzida pelo filósofo e lógico americano, Charles Sanders Peirce. Peirce foi profundamente influenciado pela visão da matemática proposta por Jevons e para explicar o duplo sentido dos sinais, Peirce introduziu a distinção *type/token* dos sinais, que passaremos a empregar adiante para nos referirmos aos dois usos dos sinais pelos matemáticos formalistas. Essa distinção é uma distinção ontológica

entre um tipo geral de objetos sintáticos e suas instâncias concretas particulares. Segundo Peirce (1976, p.315-18, N. do A.), um *token* é um diagrama que representa uma relação compartilhada pelos objetos representados por ele, é um sinal que pode ser usado para representar uma “coleção” ou uma “pluralidade” combinada pela mente, mas é também um “objeto singular” usado como sinal. Pois, segundo Peirce, esse sinal representa o “objeto singular” generalizadamente — nas palavras de Peirce, um “objeto geral”. Neste sentido, Peirce distingue o uso *token* do sinal, em que o sinal é empregado como um “objeto” singular, do uso *type*, em que o sinal é considerado como um “objeto” de uso “geral”, isto é, um “objeto” que designa uma “multiplicidade objetos”.

Por exemplo, na palavra “exemplo”, alguém poderia afirmar que existem sete ocorrências de letras. Nessa perspectiva, tal pessoa estaria utilizando uma interpretação *token* das ocorrências de letras na palavra. Por outro lado, outra pessoa poderia afirmar que existem apenas seis letras distintas, pois estaria utilizando uma interpretação *type* das ocorrências de letras. *Types* são caracterizados como únicos e utilizados para determinar uma multiplicidade de instâncias que o exemplificam. *Tokens*, a seu turno, são caracterizados como instâncias de um *type* específico.

Como Porto (2023, p. 500) indica no artigo “O que é um objeto para um lógico?”, a noção de “objeto lógico” de Frege é uma noção de “objeto” que tem de satisfazer o princípio da identidade dos indiscerníveis de Leibniz. A discussão apresentada por Frege nas seções §§ 34-35 – se “as ‘unidades’ são iguais?” – e nas seções §§ 36-39 – se “as ‘unidades’ são diferentes?” – envolve um tratamento leibniziano no quadro das formas de predicção.

Esse princípio, no “sistema” de Leibniz, teria a função de garantir o reconhecimento da substância individual como única e autoidêntica. A adoção desse princípio por Frege, na argumentação das seções §§ 34-35 e §§ 36-39, é utilizada como estratégia de reconhecimento do número “um” como o mesmo e com único referente diante de uma pluralidade de sinais, em enunciados de identidade e a preservação da discernibilidade numérica sem incorrer numa notação caótica de sinais.

Como já mencionamos, os matemáticos formalistas sugerem que pelo método de abstração é possível tomar vários objetos como qualitativamente idênticos. Pois, para os formalistas, a propriedade de “ser um(a)” seria aquilo pelo qual as “unidades” concordariam em igualdade e que seria representado pela semelhança dos sinais “1”. Segundo o Frege, para dois objetos, a palavra “igual” dificilmente terá especificado algum conteúdo sem que seja especificado sobre o que os objetos podem concordar em igualdade.

O princípio da indiscernibilidade dos idênticos implica que a condição necessária para que dois termos sejam idênticos é que eles exemplifiquem as mesmas propriedades. Dito de outra maneira, x e y são iguais se toda propriedade atribuída a x também será uma propriedade atribuída a y . Em notação formal:

$$\forall xy (x = y) \rightarrow \forall P (P(x) \leftrightarrow P(y)) \quad (1)$$

Utilizando esse princípio para analisar a proposta dos formalistas, descrita no parágrafo anterior, Frege argumenta que o formalista paga o preço de não preservar a diversidade numérica dos inteiros positivos, colapsando todos os casos de “unidade” em um único caso, o que, conseqüentemente, impediria de ultrapassar o número “um” no processo de contagem.

Todavia, Frege (1989, p. 120, § 34) também adota o princípio da identidade de indiscerníveis de Leibniz (1686), que estabelece não ser possível haver dois objetos absolutamente idênticos.⁷ Em notação lógica:

$$\forall \varphi \forall x \forall y ((\varphi(x) \leftrightarrow \varphi(y)) \rightarrow (x = y)) \quad (2)$$

No início da seção § 34, Frege apresenta duas razões que o matemático formalista teria para considerar que as “unidades” são iguais, por meio de duas perguntas retóricas que estabelece com seu interlocutor: se a identidade é atribuída aos objetos, ou se os objetos seriam realmente idênticos? (Frege. 1989, §34, p. 120). Nesse sentido, Frege estaria assumindo, na sua argumentação, a identidade de indiscerníveis para julgar a questão, ao defender que não haveria razão para se atribuir identidade aos “corpos físicos”, pois a igualdade que permitiria a contagem, ou a enumeração dos “corpos físicos”, só pode ser considerada segundo a propriedade sob a qual estes caem, e não atribuída diretamente.

Por outro lado, nessa mesma linha de argumentação, os matemáticos formalistas afirmam que, a partir da abstração da diferença que cada corpo físico da “multiplicidade” possui, obter-se-ia aquilo que Jevons chama de “número” como “forma vazia da diferença” (Frege, 1989, p. 121, § 35). Nesse sentido, Jevons estaria apenas dizendo, de outra maneira, que a diversidade numérica é uma função da diferença qualitativa entre os corpos físicos. Para Frege (1989, p. 122, § 36), essa assumpção não preserva a singularidade, nem a individualidade do número “um”, tendo o matemático formalista de admitir a existência de vários “uns”.

⁷ cf. WIENER, Philip P. (ed.). *Leibniz Selections*. New York: Charles Scribner’s Sons, 1951. p. 96.

Formulado de outra maneira, a contra positiva do princípio da indiscernibilidade dos idênticos é obtida em notação moderna da seguinte maneira:

$$\forall xy (x \neq y) \rightarrow \exists P (P(x) \wedge \neg P(y)) \quad (3)$$

Formulado dessa maneira, o princípio estabelece que qualquer propriedade distinguidora que um tem e o outro não implica não serem iguais. Tal consideração da contra positiva da indiscernibilidade dos idênticos só poderia ser sustentada havendo um critério externo, que, segundo Jevons, consistiria em designar as “unidades” a partir da atribuição de marcas discriminantes aos sinais “1”, por exemplo, $1' + 1'' + 1''' = 3$. Isso, para Frege, significaria recorrer a uma ordem espacial em que os sinais “1” estão justapostos na expressão $1' + 1'' + 1''' = 3$.

Assim como descrevemos no parágrafo anterior, o mesmo ocorre com a indiscernibilidade que recorre à repetição das “unidades” no tempo, i.e., que recorre a uma ordem de sucessão no tempo. Esse modo de enumeração sucessiva seria o recurso utilizado para se distinguir as “unidades” uma da outra. Frege (1989, p. 125) explica, na seção § 40 como sendo uma posição adotada também por Jevons e Thomae.

St. Jevons diz: “Três moedas são três moedas, sejam elas enumeradas sucessivamente ou consideradas todas ao mesmo tempo. Em muitos casos a razão da diferença não é nem o tempo, nem o espaço, mas somente a qualidade. Podemos apreender o peso, a inércia e a dureza do ouro como três propriedades, embora nenhuma delas esteja antes ou depois da outra no espaço ou no tempo. Cada meio de diferenciação pode ser uma fonte de pluralidade” (Frege, 1989, § 40, p. 125).

Como podemos observar na passagem anterior, para Jevons cada meio de discriminação pode vir a ser uma fonte da diversidade numérica. Para Frege, Jevons estaria pressupondo ser conhecido o meio de discriminação, pelos quais as “unidades” são consideradas distintas.

Thomae também recorre a uma ordem de sucessão no tempo como critério para a diferenciação, considerando o tempo em si mesmo, enquanto parte de uma intuição global, como podemos ver na passagem a seguir:

Thomae diz: “Se representarmos um conjunto de indivíduos ou unidades no espaço e os enumerarmos sucessivamente, o que requer tempo, restará ainda como característica distintiva das unidades, após toda abstração, sua diferente posição no espaço e sua diferente ordem de sucessão no tempo” (Frege, 1989, § 40, p. 124).

Segundo Dummett (1991, p. 84), podemos resumir a crítica de Frege ao método de abstração empírica na seguinte tese:

- a) A operação de abstração pode gerar construções mentais abstratas, i.e., objetos abstratos ou estrutura de objetos, descaracterizada das propriedades dos quais foram abstraídos.⁸

Podemos entender, da exposição crítica de Frege sobre os argumentos apresentados pelos matemáticos formalistas, presente no livro *Die Grundlagen der Arithmetik*, que até o século XIX alguns autores se comprometeram com a doutrina abstracionista, em uma época em que ela era tida como garantida, em que a concepção do conceito de “número” era produzida pela admissão dessa doutrina. Vimos, nesses argumentos de Schröder, Jevons e Thomae, que o método de abstração é o ponto comum entre esses matemáticos.

O método de abstração empírica é utilizado, por esses matemáticos, como um meio de se ter acesso à propriedade essencial que todos os “objetos físicos” teriam, ao serem desmaterializando de suas propriedades distinguidoras, para retê-los como objeto ou figura matemática. Para Frege, na linguagem ordinária, seria inapropriado atribuir igualdade ou diferença a esses “objetos”, se os desmaterializamos das propriedades distinguidoras que eles detêm.

1.3 Principais dificuldades com a noção de “multiplicidade de unidades” na *Die Grundlagen der Arithmetik*

Segundo Frege (1989, §28, p.115) além da proposta empírica e formalista de “número” não incluir os números “zero” e “um” como números cardinais, excluindo-os do conceito de número cardinal, há outras dificuldades específicas à cada uma das propostas de definir “número”. Nas seções anteriores, somente mencionamos as dificuldades específicas à noção de “número” como “unidades”. A seguir, vamos discutir as dificuldades mais detalhadamente, as dificuldades com esta noção.

⁸ No original: “*The operation of abstraction referred to under can also generate abstract mental construction, that is, abstract objects or structures of objects that lack all those properties abstracted from and have no others in place.*”

Na obra *Die Grundlagen der Arithmetik*, nas seções §§ 34-39, Frege explica como a admissão da noção de “números” como “unidades” implica dificuldades no próprio processo de contagem. Segundo Frege, o matemático formalista aponta duas razões irreconciliáveis para se chamar a “multiplicidade de corpos físicos enumerados” de “unidades”: que as “unidades” são iguais e que cada uma das “unidades” da “multiplicidade de unidades” é distinta das outras. Frege quer indicar que o matemático formalista oferece duas propriedades contraditórias para que os corpos físicos sejam objeto de contagem.

Se pretendemos fazer o número surgir da reunião de diferentes objetos, obtemos um aglomerado em que estão contidos os objetos com as mesmas propriedades pelas quais se diferenciam, e isto não é número. Se por outro lado, pretendemos formar o número pela reunião de iguais, eles confluem sempre em um único, e nunca chegamos a uma pluralidade (Frege, 1989, § 39, p. 123).

Nessa passagem, Frege apresenta o dilema que a noção de “número” do matemático formalista acarreta, ao compreendê-la no sentido de “identidade” e no da “diferença” [ou distinguibilidade] das “unidades”. Segundo Frege, aqueles que consideram “número” como um “aglomerado de unidades”, formado a partir da nomeação da palavra “unidade”, atribui a cada parte do aglomerado uma “unidade”, que seria indistinta da outra. O matemático formalista explica que chama cada corpo enumerado por “unidade”, após o emprego do método de abstração empírica, abstraindo as propriedades distinguidoras para obter-se o “número”. Mas essa estratégia produz no processo de contagem a seguinte dificuldade: se “unidade” for empregue no sentido de “identidade”, não se poderia mais ultrapassar o número “um” (ou “1”) na contagem, colapsando todos os casos de “unidades” em um único caso. Por outro lado, ao se atribuir marcas discriminantes a cada sinal “1”, com o objetivo de preservar a “diferença” [ou diversidade] numérica, tal notação seria incompatível com a subsistência da notação aritmética, pois, sem especificar a natureza da diferença ou qual tipo de marca se poderia ter – ou seja, sem especificar nenhum tipo de caracterização que faria surgir uma “multiplicidade de unidades” – obter-se-iam vários números “uns”, “dois”, “três” etc. Duas advertências sérias, mas pouco consideradas entre os contemporâneos de Frege.

Segundo Frege, os matemáticos formalistas Schröder, Jevons e Thomae confundem as razões demonstrativas das proposições relativas à contagem com as condições empíricas de abstração, ao justificarem que para obter os números, deve-se abstrair da multiplicidade de corpos enumerados, as “unidades” que, por sua vez, compõem o “número”.

Como Frege argumenta na seção § 21, a forma gramatical, em construção atributiva, na qual a palavra “um” aparece, conduziu muitos matemáticos a confundirem o inteiro positivo “um” com o artigo indefinido “um”. Como consequência dessa confusão, esses matemáticos incorporaram, por analogia, a estrutura semântica de proposições empíricas ao empregarem proposições aritméticas (Frege, 1989, p. 109). Como já argumentamos anteriormente, essa confusão teria sua origem desde a matemática grega e seria responsável por estabelecer a hipótese de que os números cardinais seriam atribuições diretas a corpos físicos, ou seja, propriedades entendidas, a nível linguístico, como uma relação entre expressões conceituais e nomes de corpos físicos.

Para Frege, os números aparecem na linguagem ordinária em construção adjetiva como parte do predicado, mas não são atribuídos diretamente aos “objetos”. Neste sentido, numa asserção de contagem, a indicação numérica como parte do predicado, enuncia algo sobre um “conceito”, que determina o “objeto” que cai sob esse “conceito”. Então, segundo o Frege, se adotássemos o método de abstração das propriedades distinguidoras do “objeto”, a atribuição qualitativa de que “objetos de contagem” são “iguais” ou “diferentes” não especificaria o conteúdo pelo qual os “objetos” em causa concordam ou diferem.

Para Frege (1989, § 39, p. 123) essas dificuldades são projetadas na notação do matemático formalista da seguinte maneira, “se designamos por 1 cada um dos objetos a enumerar erramos, visto que coisas diferentes recebem o mesmo sinal [*Zeichen*]. Se provermos o 1 de traços distintivos, torna-se inutilizável pela aritmética.” (1989, § 39, p. 123) Frege indica como o matemático formalista não consegue reconciliar as duas propriedades contraditórias, da “identidade” e da “diferença”, na sua notação. Por um lado, explica, há o colapso de todos os casos de “unidade” designados pelo numeral “1” em um único caso de “unidade”. Isso, conseqüentemente, não preservaria a diversidade necessária para a contagem dos números maiores que um. Por outro lado, atribuir marcas discriminantes ao sinal “1”, por exemplo, “1’, 1’’, 1’’’, ..., produziria uma notação caótica, pois não asseguraria o elemento comum, necessário para que o sinal “1” possa ser reconhecido como o mesmo, e não como outro.

Um dos argumentos que compõem a crítica do Frege aos matemáticos formalistas, Schröder e Jevons [§§34-39], consiste no emprego do sinal [*Zeichen*] “1” para representar distintos “objetos” arbitrários. Neste sentido, os inteiros positivos maiores que “um” designariam uma composição de sinais “1”, combinados lado-a-lado, que o matemático formalista chama ambigüamente de a “soma de uns” e de a “soma das unidades” e que, como já mencionamos, é um “objeto” geral aplicado à vários objetos singulares. O que faz com o

sinal “1” acarrete o uso ambíguo das palavras “unidade” e “um”, da definição de “numero”, no plano ontológico dos sinais. O sinal é empregado como um nome de um objeto singular, mas também como um nome aplicável a uma “multiplicidade” de objetos arbitrários nomeados pelo substantivo “unidade”.

Adiante, empregaremos a distinção *type/token*, mencionada na seção anterior, para discutir a notação unária e o duplo sentido dos sinais empregado nessa notação pelos matemáticos formalistas e criticado por Frege nas seções § 34-39 da *Die Grundlagen der Arithmetik*.

Na passagem a seguir, extraída do primeiro capítulo do *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studierende* (1873), notamos que Schröder claramente adota uma interpretação *token* dos números naturais.

Se todas as unidades são objetos concretos, podemos imaginar combiná-las alongando os traços, formando os uns de modo que as unidades dos dois conjuntos fiquem em extremidades opostas dos traços alongados uma operação que podemos imaginar não apenas quando as unidades dos dois tipos estão presentes simultaneamente, mas mesmo quando existem em momentos diferentes. É uma questão de escolha, inteiramente livre, quando o processo de alongamento em uma ou ambas as direções, deve ocorrer; e precisamente porque o número consiste em partes espacialmente separadas, produzidas em momentos arbitrários, estendidos no tempo, ele tem a capacidade de fornecer uma representação espacial do tempo [*die Kraft die Zeit im Raume abzubilden*] ou mesmo uma representação temporal do espaço⁹ (Schröder, 2022, p. 8, tradução nossa).

Como podemos observar, os números inteiros positivos são literalmente compreendidos como traços físicos. Para um formalista, marcações em forma de traço – impressas por tinta, projetadas por pixels na tela de um dispositivo eletrônico ou como talhas na madeira – são instâncias particulares concretas de um tipo geral (classe) de um símbolo numérico.

Para o matemático formalista as marcações (*tokens*) são símbolos que exemplificam e instanciam uma classe numérica fisicamente. Uma interpretação *token* dos números inteiros positivos implica que cada marcação (*token*) exemplifica e instancia um *type*, i.e., no caso dos números, instancia o *type* “unidade” ou “um”, que o matemático formalista define como “corpo

⁹ No original: “If the units are all concrete objects, we can imagine pairing them off by lengthening the strokes forming the ones so that the units of the two sets lie at opposite ends of the elongated strokes—an operation we can imagine not only when the units of the two kinds are present simultaneously, but even when they exist at different times. It is a matter of entirely free choice when the process of elongation, in one or both directions, is to occur; and precisely because the number consists of spatially separate parts produced at arbitrary moments extended in time, it has the capacity to provide a spatial representation of time [*die Kraft die Zeit im Raume abzubilden*] or even a temporal representation of space.”

físico enumerado” (“unidade”), cujo sinal “1” é símbolo. Por essa razão, os formalistas se sentiram atraídos pela ideia de considerar-se os números inteiros positivos como marcações (*tokens*) que servem de imagem (*Abbildungen*) para contar os corpos físicos, pois os *tokens* os exemplificam numericamente.

Ao compreender os “números naturais” como a “soma de unidades” ou a “soma de uns”, o matemático formalista emprega o sinal “1” para garantir que o *type* numérico seja sempre o **mesmo**, a dizer uma “unidade” ou “corpo enumerado”. Cada marcação (*token*) “ ’ ” atribuída ao sinal “1” expressaria quantas instâncias de “corpos físicos enumerados” estão sendo exemplificadas. Nesse sentido, podemos dizer que o matemático formalista emprega dois métodos de nomeação: um que nomeia uma classe de objetos e outro para nomear os objetos individualmente. Por exemplo, para o matemático formalista há três *tokens* do mesmo *type* na seguinte expressão “1 + 1 + 1”, mas, em se tratando de uma interpretação *token*, i.e., do sinal concreto “x é um traço”, quantos *tokens* haveria na expressão “1 + 1 + 1”? Bem, haveria sete, se contássemos todos os traços físicos empregados na expressão. Além dos sinais “1”, contaríamos também os traços do sinal de adição “+”, como dois traços sobrepostos. Então, o sinal que supostamente seria nome da propriedade que pertencente ao “aglomerado de coisas” (*Anhäufung von Dingen*), consideradas como “unidades”, a dizer que há “três” elementos-partes, poderia designar outros “números”, como “três” ou “sete”. No caso da proposta de Jevons de atribuir marcas discriminantes “ ’ ” ao sinal “1”, para indicar que cada “unidade” do aglomerado é distinta da outra, quantas “unidades” o sinal “1’ + 1’’ + 1''' poderia denominar? Poderíamos responder, afirmativamente, que há “treze” “unidades” nesse sinal, se “unidades” forem traços alongados.

Para Jevons, Schröder e Thomae, cada emprego repetido do sinal “1” na seguinte expressão “1 + 1 + 1” exemplifica o *type* “1”, definido como um símbolo, que, quando empregado, expressaria “corpo enumerado”, a noção de “número” do formalista. Assim, na expressão composta, cada sinal “1” seria um *token*, empregado para isolar e expressar uma propriedade do “aglomerado de coisas” (*Anhäufung von Dingen*), consideradas como “unidades”, a saber, a quantidade de elementos-parte que esse aglomerado possui.

A origem da grande generalidade do número é agora aparente. Três soa diferente de três cores ou três cavaleiros de três cavalos; mas concordam em respeito à variedade de marcas pelas quais podem ser discriminados. Os símbolos 1 + 1 + 1 são marcas vazias asserido a existência da discriminação. Mas ao perder de vista as diferenças, damos origem a novos acordos no qual o raciocínio matemático pode ser fundado. Abstração numérica é até agora

longe de ser incompatível com a abstração lógica que é a origem de nossos mais amplos atos de generalização¹⁰ (Jevons, 1879, p. 159, tradução nossa).

Segundo Frege (1989, § 37, p. 121), para Jevons, a possibilidade de atribuir marcas discriminantes aos sinais “1”, que ocorrem na expressão “1 + 1 + 1”, empregando o sinal dessa maneira “1' + 1'' + 1'''”, indica que cada “1” nomeia uma “unidade” distinta de elementos-partes do aglomerado, dependendo de quantas marcas discriminantes são atribuídas ao sinal “1”, na expressão “1' + 1'' + 1'''”. Nessa perspectiva, Frege quer dizer que o sinal “1'” denominaria a propriedade de conter o primeiro elemento; o sinal “1''” denominaria a propriedade de conter o segundo elemento; o sinal “1'''” denominaria a propriedade de que o aglomerado teria de conter um terceiro elemento. Logo, a justificativa de Jevons para preservar a diversidade numérica pode ser tomada, no contexto da nossa discussão, como uma interpretação *token* das “unidades”.

O argumento de Jevons tampouco consegue reconciliar a “identidade” e a “diferença” necessária para a contagem. Para Frege, o matemático formalista parece não somente concordar com existências de vários números “uns”, mas também de vários números “dois”, “três”, “quatro” etc. Se o matemático formalista se compromete com afirmação de que os números podem ser denominados por traços físicos alongados, os “*tokens*”, “como saberíamos, por exemplo, que cada *token* “1'”, “1''”, “1'''” é do mesmo *type*, no sinal composto “1' + 1'' + 1'''”, se a semelhança formal estabelecida pelo *type* é desfeita pelas marcas discriminantes? Nesse sinal poder-se-ia identificar até treze traços alongados, três ou nove.

Segundo o formalista, a expressão “1' + 1'' + 1'''” deveria denominar o número “3” (“três”), mas, para Frege (1989, § 38, p. 122), as marcas discriminantes estariam relacionadas à justaposição de cada *token* no sinal composto e essa característica não diz respeito aos números.

Uma operação de subtração do tipo $3 - 2 = 1$ poderia ser escrita, segundo Jevons, da seguinte maneira $(1' + 1'' + 1''') - (1'' + 1''') = 1'$, e teríamos o primeiro *token* como resultado. Mas uma operação do tipo “ $(1' + 1'' + 1''') - (1'''' + 1''''')$ ” poderia obter o mesmo resultado? Frege argumenta que certamente não, pois o sinal “1'''' + 1'''''” não poderia substituir o sinal “1'' + 1'''”. Ao nos comprometermos com a atribuição de marcas discriminantes para assegurar

¹⁰ No original: “*The origin of the great generality of number is now apparent. Three sounds differ from three colors or three riders from the horses; but they agree in respect of the variety of marks by which they can be discriminated. The symbols 1+ 1+ 1 are this the empty marks asserting the existence of discrimination. But in dropping out of sight the character of the differences we give rise to new agreements on which mathematical reasoning is founded. Numerical abstraction is so far from incompatible with logical abstraction that it is the origin of our widest acts of generalization.*”

que cada “unidade” é distinta da outra, comprometemo-nos também com o fato de que não podemos designar a mesma coisa pela segunda vez. Nesse sentido, nem mesmo o sinal “ $1' + 1'' + 1'''$ ” poderia ser repetido na subtração $(1' + 1'' + 1''') - (1'' + 1''')$, como afirma Jevons.

O sinal à direita da subtração, enquanto *token*, já significaria outro número que não aquele denominado pelo sinal $(1'' + 1''')$. Esse é o sentido a que Frege se refere quando afirma que a identidade *type* é suprimida. Se fossemos ainda mais radicais, não poderíamos nem mesmo saber que o sinal “ $(1' + 1'' + 1''') - (1'' + 1''')$ ” indica uma subtração, pois, se estamos contando todas as ocorrências de trações físicos como “unidades” partes do aglomerado de sinais, contaríamos também o sinal da operação de subtração “-”, e teríamos 23 como resultado.

Embora essa assumpção à primeira vista lhes pareça ingênua, ela deveria ser tomada como regra sem exceção. Seria ainda mais constrangedora (Frege, 1989, § 38, p. 123) a circunstância em que tivéssemos uma equação com as raízes 2, 5 e 4, já que, se a reproduzirmos como Jevons indica, poderíamos utilizar a expressão, para 3, “ $1' + 1'' + 1'''$ ”, de modo que “ $1''$ ” significasse 2, o sinal “ $1'''$ ”, 5, e o sinal “ $1''''$ ”, 4. O formalista assume que as marcas discriminantes atribuídas a “1”, para discriminar cada “unidade” uma da outra, dizem respeito, na verdade, à justaposição em que cada sinal “1” aparece na expressão, e não a, como gostaria o matemático formalista, um sinal capaz de isolar e expressar uma propriedade do “aglomerado de coisas” (*Anhäufung von Dingen*) a quantidade de elementos-partes que esse aglomerado possui. Segundo Frege, se esse for o caso, deveria ser estabelecido como regra sem exceção, já que nunca poderíamos designar a mesma coisa pela segunda vez. Teríamos, por exemplo, que rejeitar a equação “ $1=1$ ” ou não saber se a expressão “ $1+1$ ” significaria 1 ou 2.

Em outra passagem, ainda relacionada à interpretação *token* numérica, Frege argumenta como a proposta de Jevons não permite reconciliar as propriedades da “diferença” e da “igualdade”, que são necessárias para contagem.

No entanto, se desejamos dar diferentes sinais a coisas diferentes, não se pode perceber o motivo da insistência em manter um elemento comum, e de não se preferir escrever $a + b + c + d + e$ ao invés de $1'+1''+1''' + 1'''' + 1'''''$. A igualdade, contudo, perdeu-se novamente, e a indicação de uma certa semelhança não serve para nada. O um desfaz-se assim em nossas mãos, e ficamos com os objetos e todas suas particularidades. Os sinais $1' + 1'' + 1'''$ são expressões que falam de nosso embaraço: necessitamos da igualdade; por isso o 1; necessitamos da diferença; por isso os índices, que infelizmente apenas suprimem de novo a igualdade (Frege, 1989, § 36, p. 122).

Nessa passagem, Frege é mais literal na formulação da sua objeção. Ainda empregando a distinção *type/token*, é razoável afirmar que ele está fazendo uma objeção à identidade *type*,

se considerarmos que ‘se x é um *token numérico*, então $\tau(x)$ é o *type numérico* de x ’. Nesse sentido, a perda do elemento comum diz respeito à igualdade estabelecida pelo *type numérico*, a dizer “um” ou “coisa enumerada”. Para ele, o motivo para o matemático formalista empregar o mesmo sinal “1” repetida vezes, para contar objetos distintos, tem como vantagem a semelhança entre os sinais, que resulta do seu emprego repetido. Esse emprego acarretaria certa homogeneidade para a contagem, que seria logo suprimida ao se adotar uma interpretação *token numérica*, pois, como já mencionamos, um *token* é definido como uma instância de algum *type* específico.

A igualdade suprimida pela interpretação *token* dos “números” implicaria que, se existe um *token*, deve ter um *type* específico e, mediante este, podemos exemplificar múltiplos *tokens*, que concordam em alguma característica determinada pelo *type numérico*. Quando não podemos mais especificar sobre o que esses *tokens* concordam, o elemento comum ou a igualdade é suprimida. A objeção de Frege à proposta de definir os números como “unidades” distintas diz respeito ao seguinte dilema: se, para assegurar a diversidade numérica na contagem, tenhamos de atribuir marcas discriminantes a cada *token* “1”, não poderíamos mais reconhecer o número como o mesmo. Cada pessoa teria, arbitrariamente, seu número particular, e essa circunstância seria incompatível com continuidade da aritmética.

Conforme Frege (1989, p. 128, § 44), a admissão da existência da diferença produz, na concepção de Jevons, vários números “uns”, “dois”, “três” etc. Por outro lado, se tivermos que designar corpos distintos com o mesmo sinal “1”, não estaríamos enumerando, mas afirmando “é um” repetidas vezes (Frege, 1989, p. 123, § 39). Portanto, colapsando todos os casos de “unidade” do aglomerado em um único caso, é “um”.

Para Frege, não faz sentido falar em vários “uns”, ou flexionar o substantivo “unidade” para plural “unidades” e achar que a flexão gramatical pode, sozinha, indicar que se está falando de uma “multiplicidade”, aplicando o mesmo nome para distintos objetos. Se tomarmos a palavra “unidade” como uma expressão que designa um conceito que apanha sobre si um único objeto de investigação matemática, o número “um”, “número” não pode ser definido como “unidades”, muito menos “soma de uns”, pois se estaria apenas lidando com uma aglomeração de traços alongados.

Outra passagem importante para esta discussão e encerramento da nossa exposição desta seção é aquela em que Frege conclui, resumidamente, como a dificuldade em reconciliar “identidade” com “diferença” é ocultada na definição de “número” do matemático formalista.

A palavra unidade é admiravelmente apropriada a ocultar esta dificuldade; e esta é a razão – ainda que inconsciente – pela qual ela é preferida às palavras “objeto” e “coisa”. Chamam-se inicialmente as coisas a enumerar de “unidades”, o que preserva os direitos da diferença; em seguida a reunião, coleção, anexação, ou como mais se queira chamar, converte-se no conceito de adição aritmética, e o termo conceitual “unidade” transforma-se despercebidamente no nome próprio “um”. Tem-se com isto a igualdade (Frege, 1989, p. 124, § 39).

Na passagem anterior, Frege argumenta que, para ocultar a dificuldade em reconciliar as propriedades da “diferença” e da “igualdade” entre as “unidades”, o matemático formalista emprega, como sinônimas, palavras de categorias semânticas distintas, “unidade” e “um”. Quando o matemático formalista emprega a palavra “um”, identifica o número “um” com o próprio sinal “1”, e não com o significado do número “um”. Os sinais que matemático formalista emprega, acarreta indiscriminadamente as categorias semânticas de “conceito” e “objeto”, ao fundamentar esse sinal na sua definição de “número”, em que as palavras “unidade” e “um” são sinônimas. Mas, para Frege (1989, p. 92), pretender transformar um “conceito” em “objeto” não passa de uma ilusão.

No início da investigação empreendida na *Die Grundlagen der Arithmetik* (Frege, 1989, p. 92), um dos princípios ao qual Frege se ateve, principalmente na argumentação crítica das seções §§ 34-39, foi o que estabelece que “não se deve perder de vista a distinção entre conceito e objeto”, i.e., ao definir os números cardinais a partir do juízo numérico. Para Frege, as proposições da aritmética têm conteúdo próprio, tem conteúdo substantivo. Nesse contexto, Frege identifica “o número um” como um objeto próprio da matemática. Na sua análise da linguagem ordinária, quando se trata de proposições em que os números ocorrem, o artigo definido “o” indica, na expressão, “o número um”, em linguagem ordinária, em que há somente um único e bem definido objeto de investigação científica (Frege, 1989, p. 122, § 38).

Defendendo essa posição, Frege argumentou não poder existir diversos números “uns”, como supõe o matemático formalista, mas um somente único “um”:

Em primeiro lugar, não convém chamar um termo conceitual geral de nome de uma coisa. Surge daí a aparência de ser um número propriedade de uma coisa. Um termo conceitual geral designa precisamente um conceito. Apenas com um artigo definido ou pronome demonstrativo vale como nome próprio de uma coisa, mas deixando assim de valer como termo conceitual. O nome de uma coisa é um nome próprio. Um objeto não aparece repetidamente, mas vários objetos caem sob um conceito. Que um conceito não é obtido somente por abstração já se fez notar contra Espinosa. Acrescento que um conceito não deixa de ser conceito, porque sob ele cai uma única coisa, que é, portanto, completamente determinada por ele. A um tal conceito (por exemplo, satélite

da Terra) convém precisamente o número 1, que é número no mesmo sentido que 2 e 3. Quanto a um conceito, a questão é sempre a de saber se algo cai sob ele, e o quê. Quanto a um nome próprio, questões como esta são desprovidas de sentido. Não nos devemos deixar enganar pelo fato de a linguagem usar nomes próprios, por exemplo Lua, como termos conceituais, e vice-versa; apesar disto a diferença subsiste. Desde que uma palavra seja usada com artigo indefinido, ou no plural sem artigo, ela é termo conceitual (Frege, 1989, p. 131, § 51).

Nessa passagem, verificamos que, para Frege, a distinção entre conceito e objeto tem repercussão no plano linguístico. Segundo o Frege, na linguagem ordinária, quando as palavras aparecem com artigo definido ou pronome demonstrativo, funcionam como um nome de objeto. Quando aparece com artigo indefinido e no plural é um termo conceitual. Frege sugere que, para identificarmos um conceito, basta saber o que cai sob ele. Ao final da passagem, adverte que a linguagem ordinária utiliza nomes próprios como termos conceituais. Então, seguindo a sua sugestão, deve-se estar alerta para essa conversão da linguagem.

Um dos aspectos mais importantes dessa exposição crítica de Frege é explicitar que o conteúdo das asserções relativas à contagem aparece tanto em forma atributiva como em substantiva. No primeiro caso, a natureza real dos números poderia ser facilmente dissimulada, conduzindo à ilusão de que os números são predicções de primeira ordem.

A solução de Frege para reconciliar “diferença” e “identidade” seria argumentar que “existência” ou “unicidade”, como “duosidade”, não são características de corpos físicos, mas de conceitos, ou seja, são conceitos de conceitos. Por exemplo, “um conceito sob o qual cai apenas um objeto”: sob esse conceito cai o conceito “ser satélite natural da terra”, mas não “a lua”.

Se o termo conceitual “unidade” for encarado como um nome que designa um corpo físico a ser enumerado, a noção de “número” do matemático formalista seria similar à do matemático empirista. Isso porque, se o primeiro designa, com o numeral, algo que está fora do contexto do juízo numérico, teria de explicar a conexão entre os corpos físicos e uma operação realizada por meio de traços. Isso, para Frege, só poderia ser estabelecido arbitrariamente por meio de uma regra, simbolicamente falando: se x é um *token* numérico, então $\tau(x)$ é o *type* numérico de x . Para Frege (1989, p. 126, § 43), um formalista no contexto de operações com sinais idealizados também teria de estabelecer, como regra, que o 0 (zero) seria uma expressão escrevendo nada.

Os matemáticos formalistas Schröder, Thomae e Jevons se deparam com o problema de ter de explicar a relação entre afirmações empiricamente evidentes da matemática “pura” e

outras não evidentes da “matemática aplicada”. Como não conseguem fornecer uma explicação compreensível, oferecem o método de abstração empírica como explicação para esse problema. Nesse sentido, a noção de “multiplicidade de unidades” não seria distinta de uma noção de “multiplicidade de corpos físicos” do matemático empirista. Enquanto a primeira poderia usar traços alongados, a segunda poderia utilizar pedras, grãos etc.

Podemos concluir que o método de abstração empírica para a formação dos “números” comprometeu o produto dessa abstração, tornando o conceito de número natural inaplicável. Por isso, acreditamos que Frege aparece como um rigoroso crítico deste método, pois apresentou argumentos consistentes, indicando que não houve nenhum avanço por partes de seus contemporâneos, como eles se propuseram a fazer. Na última seção do *Die Grundlagen der Arithmetik*, Frege afirma que “esta teoria formal arrisca-se assim a recair no *a posteriori*, ou ao menos no sintético, por mais que de fato assumam ares de quem pairam nas alturas da abstração” (Frege, 1989, p. 166, § 109).

1.4 Caracterização da noção de “multiplicidade de corpos físicos”

Nesta subseção, vamos caracterizar a noção de “multiplicidade de corpos físicos”, pressuposta na explicação dos números naturais como uma propriedade atribuídas a um “agregado de coisas” (*Aggregate von Dingen*). Nas seções §§ 22-25 da *Die Grundlagen der Arithmetik*, Frege critica esse tipo de noção e cita o filósofo britânico Stuart Mill como um dos partidários dessa ideia. A noção de uma “multiplicidade de corpos físicos” pressuposta nessa noção de “número”, ao contrário da noção de “multiplicidade de unidades”, já discutida, envolve compreender uma “multiplicidade de unidades” definida espaço-temporalmente, antes mesmo de ser determinada por um conceito.

Nas seções §§ 22-25, a principal premissa do argumento de Mill para definir “número”, como uma propriedade que pertence a um agregado está fundamentada na relação de parte-todo, que o filósofo britânico atribui aos fenômenos naturais e aos fatos físicos. Nesse contexto, para Mill, enumerar ou contar uma “multiplicidade de corpos físicos” consiste em assumir que a realidade física já se apresentaria segmentada em partes. Asserções relativas à contagem expressariam registros que dizem respeito à relação de agregação de unidades, definidas espaço-temporalmente em um único corpo físico composto. Termos numéricos, a exemplo de “dois”, “três”, “sete” etc., expressariam como as partes do agregado estariam arranjadas no

espaço e no tempo. Ao contarmos um agregado de seisos, por exemplo, como “três”, o número “três” também enumeraria uma porção material ocupada por esses “três” seisos.

A seguir, apresentamos as duas principais passagens da *Die Grundlagen der Arithmetik* que caracterizam a noção de uma “multiplicidade de corpos físicos”, pressuposta na noção de “número” de Mill. Nessas passagens, Frege apresenta o argumento sobre os modos de formação de um dado “número”, a partir do livro *A System of Logic Ratiocinative and Inductive* (1843), de Mill.

À questão a saber a que pertence o número enquanto propriedade, Mill responde assim: “O nome de um número designa uma propriedade que pertence ao agregado de coisas que denominamos pelo nome; e esta propriedade é a maneira característica pela qual o agregado é composto ou pode ser decomposto em partes” (Frege, 1989, p. 111, § 23).

Nessa passagem, Frege interpreta a palavra “agregado”, empregada por Mill, como uma expressão que designa uma agregação de uma “multiplicidade de corpos físicos” em um único corpo físico composto. Segunda essa explicação empírica dos “números”, as asserções relativas à contagem expressariam registros que dizem respeito “à maneira característica” de arranjar unidades definidas espaço-temporalmente (corpos físicos) em um único corpo físico composto. O termo “agregado” seleciona determinada porção material e os termos numéricos designariam propriedades atribuídas a uma “multiplicidade de corpos físicos” que ocupam essa porção material. Portanto, contar uma “multiplicidade de corpos físicos” envolve também contar determinada porção do tempo e do espaço, ocupada pelos corpos físicos que compõem o “agregado”.

Ao oferecer essa explicação sobre o que é “número”, Mill se compromete com a pressuposição de que a realidade já se apresentaria segmentada em partes. Nesse sentido, qualquer asserção relativa à contagem, qualquer proposição que resulta de uma operação aritmética, afirma como a multiplicidade de corpos físicos é arranjada em agregado (cf. Mill, 1974, p. 430, § 5).

A segunda passagem na *Die Grundlagen der Arithmetik*, que nos ajuda a caracterizar a noção de “multiplicidade de corpos físicos”, diz respeito à afirmação de Frege sobre Mill ter se comprometido com uma explicação empírica da relação de parte e todo. “Mill considera como verdade válida para todos os fenômenos naturais que tudo o que é composto de partes, é composto de partes destas partes, visto que todos podem ser enumerados.” (Frege, 1989, p. 111, § 24)

Nessa passagem, Frege está argumentando contra o comprometimento de Mill com uma explicação da relação de parte e todo fundamentada em fenômenos naturais e fatos físicos. Os termos numéricos designariam registros de segmentações aplicáveis a qualquer fenômeno natural. A partir da afirmação de Mill de que “o que é composto de partes é também composto de partes destas partes” podemos afirmar que, mesmo que Mill não tenha tecnicamente empregado uma noção mereológica de enumerabilidade, a enumerabilidade da “multiplicidade de corpos físicos” é construída sobre relações mereológicas, isto é, que dizem respeito à relação que as partes mantêm com o todo a qual elas pertencem.

Para Mill seria válido, então, afirmar, de maneira geral, que uma mesa é uma unidade, ou uma entidade unitária, composta pelas seguintes partes: superfície da mesa e base da mesa. De posse de uma das suas partes, digamos a “base”, ainda podemos dizer ser essa parte composta pelas “pernas da mesa” e pelos “pés da mesa”. Logo, embora a estrutura de uma mesa seja um corpo artificial, ainda podemos dizer que é um corpo físico composto por uma “multiplicidade” de outros “corpos físicos” que constituem as partes desse corpo físico. Nesse sentido, segundo com Mill, faria sentido dizer que os números expressam como “a estrutura da mesa” é composta por suas partes e as partes destas partes.

Considerando as duas passagens apresentadas, podemos afirmar que a noção de “número” como uma “propriedade” atribuída a um “agregado de coisas” (*Aggregat von Dingen*), consideradas como “corpos físicos”, se compromete com a premissa de que contamos uma realidade já segmentada em uma “multiplicidade de corpos físicos”. Nessa perspectiva, para os partidários dessa noção, as asserções de contagem registrariam segmentações de porções espaço-temporais dispersas no mundo e, ao contarmos uma “multiplicidade de corpos físicos”, contamos também determinada porção espaço-temporal da realidade que a “multiplicidade de corpos físicos” ocupa.

Outro exemplo, fora do contexto da crítica e mais próximo à própria interpretação de Mill¹¹ dos “agregados”, é que, considerando a definição de “número” como uma propriedade de “agregados” e a relação mereológica que os estrutura, podemos afirmar que, para Mill, o numeral “três” expressa “a maneira característica” pela qual uma “multiplicidade de corpos físicos” deve ser reunida, a fim de produzir aquele agregado específico. No caso, se o agregado é “pedras” e o chamamos de “três”, o nome “três” implica “a maneira característica” pela qual

¹¹ Pois estamos apresentando uma caracterização da noção de “multiplicidade de corpos físicos” do ponto de vista de Frege, da *Die Grundlagen der Arithmetik*, e não do ponto de vista do *System of Logic Ratiocinative and Inductive*. Isso porque não podemos dizer com certeza se Mill assume uma noção universal de segmentação.

deve se produzir aquele agregado, como podemos perceber na passagem a seguir de *System of Logic Ratiocinative and Inductive*, de Mill:

Quando chamamos uma coleção de objetos de dois, três ou quatro, eles não são dois, três ou quatro em abstrato; são duas, três ou quatro coisas de algum tipo particular; seixos, cavalos, polegadas, peso de uma libra. O que o nome de número conota é a maneira pela qual objetos individuais de um determinado tipo devem ser reunidos, a fim de produzir aquele agregado específico. Se o agregado for de pedrinhas, e o chamamos de dois, o nome implica que, para compor o agregado, uma pedrinha deve estar unida a uma pedrinha. Se chamarmos isso de três, uma e uma e uma pedra deve ser reunida para produzi-lo, ou então uma pedra deve ser unida a um agregado do tipo chamado dois, já existente¹² (Mill, 1974, p. 430, tradução nossa).

1.5 Principais argumentos a favor da noção de “multiplicidade de corpos físicos”

Depois de termos caracterizado a noção de “multiplicidade de corpos físicos”, circunscrevemos os principais argumentos de Mill para fundamentar os números inteiros nessa noção. Segundo Frege, para Mill, quaisquer que sejam as sentenças da aritmética elas designam um fato físico observado.

Na passagem a seguir, ao criticar o emprego impreciso e hesitante das condições de validade de proposições aritméticas na teoria semântica de Mill, Frege chama a atenção para a equivalência dada às proposições aritméticas com as aplicações físicas destas. Segundo o Frege, Mill recorre à princípios lógicos para justificar suas definições, mas emprega princípios de indução empírica na sua demonstração.

Mill deseja utilizar, em sua demonstração acima mencionada da fórmula $5 + 2 = 7$, a proposição “o que é composto de partes é composto de partes destas partes”. Ele toma-a por uma expressão mais característica da proposição melhor conhecida sob a forma: “as somas de iguais são iguais”. [...]. Mas a fim de poder chamar as verdades aritméticas de leis da natureza, Mill introduz um sentido que elas não têm (Frege, 1989, p. 100, § 9).

Nessa passagem, Frege está se referindo aos empregos que Mill faz de alguns axiomas de Euclides no livro *A System of Logic Ratiocinative and Inductive*, em que esse autor explica

¹² No original: “When we call a collection of objects two, three, or four, they are not two, three, or four in the abstract; they are two, three, or four things of some particular kind; pebbles, horses, inches, pound's weight. Wha the name of number connotes is the manner in which single objects of the given kind must be put together, in order to produce that particular aggregate. If the aggregate be of pebbles, and we call it two, the name implies that, to compose the aggregate, one pebble must be joined to one pebble. If we call it three, one and one and one pebble must be brought together to produce it, or else one pebble must be joined to an aggregate of the kind called two, already existing.”

os “modos de formação de número”. Mill emprega o segundo axioma do sistema euclidiano, “caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais”. No entanto, para Mill, as expressões que compõem a proposição se referem a fatos observados, transfere o sentido de proposições empíricas para as aplicações das proposições aritméticas.

Repetindo a mesma estrutura argumentativa que utilizamos na seção anterior para apresentar a noção de “multiplicidade de unidades”, também comparamos a citação de Frege sobre o argumento original a que Frege se refere, do livro *System of Logic Ratiocinative and Inductive*, em que Mill argumenta compreender a proposição aritmética como uma declaração sobre um fato físico observado.

O que torna a aritmética o tipo de ciência dedutiva é a feliz aplicabilidade de uma lei tão abrangente como “As somas de iguais são iguais”: ou (para expressar o mesmo princípio em uma linguagem menos familiar, mas mais característica), o que quer que seja composto de partes é composto pelas partes dessas partes. Esta verdade, óbvia aos sentidos, é em todos os casos em que podem ser razoavelmente referidos à sua decisão, tão geral que é coextensiva com a própria natureza, sendo verdadeira para todos os tipos de fenômenos (pois todos admitem ser numerados), deve ser considerada uma verdade indutiva, ou lei da natureza, da mais alta ordem. E toda operação aritmética é uma aplicação dessas leis que são deduzidas dela. Esta é a nossa garantia para todos os cálculos¹³ (Mill, 1843, Livro III, Capítulo XXIV, § 5, tradução nossa).

O tipo de objetividade que Stuart Mill reivindica na sua concepção de lógica sugere uma espécie de lógica fundamentada em certezas empíricas. Frege recusa veemente essa caracterização de objetividade, que retira a certeza da realidade empírica. Apesar de prezar pela objetividade dos conteúdos conceituais de proposições da aritmética, Frege nunca os fez depender, para sua justificativa, de fatos empíricos.

1.6 Argumentos de Frege para rejeitar a noção de “multiplicidade de corpos físicos”

Nesta subseção, explicamos os principais argumentos de Frege para rejeitar a noção de “multiplicidade de corpos físicos” presente nas seções §§ 22-25 da *Die Grundlagen der*

¹³ No original: “What renders arithmetic the type of a deductive science, is the fortunate applicability to it of a law so comprehensive as ‘The sums of equals are equals’:” or (to express the same principle in less familiar but more characteristic language), Whatever is made up of partes is made up of the parts of those parts. This truth, obvious to the senses in all cases which can be fairly referred to their decision, and so general as to be co-extensive with nature itself, being true of all sorts of phenomena (for all admit of being numbered), must be considered an inductive truth, or law of nature, of the highest order. And every arithmetical operation is an application of this laws of being deduced from it. This is our warrant for all calculations.”

Arithmetik. A estrutura da estratégia argumentativa do autor consiste em destacar as dificuldades encontradas por ele na interpretação dos inteiros positivos como propriedades atribuídas diretamente a corpos físicos. Seu argumento consiste em primeiro mostrar que um “agregado de coisas” (*Aggregat von Dingen*), consideradas como corpos físicos, não possui essencialmente nenhuma “propriedade numérica”, visto que podemos fazer várias atribuições numéricas à mesma porção material ocupada pela “multiplicidade de corpos físicos”, isto é, o mesmo “agregado de coisas” (*Aggregat von Dingen*), ou de corpos físicos, pode ser designado por diferentes “números”.

Para Frege, os números cardinais (*Anzahlen*) respondem à questão “quantos?”.¹⁴ Então, dado uma porção material diante de nós e se nos fosse instruído para determinar sua quantidade, enunciando “quantos?”, naturalmente perguntaríamos “quantos de quê?”. Frege (1989, p. 110, § 22) ilustra essa questão com o conhecido exemplo do “jogo de cartas”. Na passagem a seguir, traz a seguinte situação para seu leitor, a partir da questão: “em posse de um maço de cartas – Frege pergunta ao seu leitor – qual o ‘número’ que pertence ao agregado de cartas?”. Argumenta que não seria possível saber se ele desejaria que déssemos o “número” completo de cartas, de jogos completos ou das unidades de valor relativas a um jogo de *Skat*,¹⁵ em que, por exemplo, as cartas de número “2” e “6” são removidas. Precisamos, portanto, de um conceito que viabilize a atribuição numérica ao agregado.

Se dou a alguém uma pedra e digo “determine seu peso”, dei-lhe assim todo o objeto de uma investigação. No entanto, se dou-lhe nas mãos um maço de cartas de jogar e digo “determine seu número”, ele não saberá se desejo conhecer o número de cartas, de jogos completos ou, digamos, de unidades de valor no jogo de *skat*. Dando-lhe o maço nas mãos, nem por isso dei-lhe de modo completo, o objeto de sua investigação; devo acrescentar uma palavra: carta, jogo, unidade de valor. Não se pode também dizer que neste caso os diferentes números coexistam um ao lado do outro, como as diferentes cores (Frege, 1989, p. 110, § 22).

Segundo o lógico, conforme denominemos um conceito, podemos atribuir distintos números à mesma porção material ocupada pela “multiplicidade de corpos físicos”. Tal aspecto arbitrário da atribuição numérica não é capaz de fixar critérios de identidade para as partes que constituem o agregado, pois só temos uma “multiplicidade corpos físicos” dispersa no espaço, sem ser selecionada por nenhum conceito, e não uma “multiplicidade de corpos físicos” dados como uma unidade composta.

¹⁴ cf. Frege, 1989, p. 95, § 4 (N. do A.).

¹⁵ Jogo de cartas baseado no tarot para três jogadores, muito popular na Alemanha, no século XIX.

Posso apontar para uma superfície colorida singular sem dizer uma palavra, mas não para um número singular. Se posso, com o mesmo direito, chamar um objeto de verde e vermelho, isto é sinal de que este objeto não é propriamente o portador do verde. Este portador, encontro-o antes em uma superfície somente verde. Assim também um objeto a que se pode com o mesmo direito conferir diferentes números não é propriamente o portador de um número (Frege, 1989, p. 110, § 22).

Frege explica que os objetos empíricos não podem ser o sentido de uma atribuição numérica, porque daí permitir-se-ia atribuir vários números à mesma porção material. Frege rejeita qualquer dependência empírica que se dê às proposições da aritmética. Ele exemplifica esse tipo de posição, citando o filósofo britânico Stuart Mill, um dos principais partidários do empirismo britânico contemporâneo a Frege.

A fim de tornar a questão mais clara, Frege (1989, p. 128, § 46) sugere que façamos um exame da proposição onde os números ocorrem, no contexto de sua aplicação, para verificar se as predicções numéricas expressam propriedades de objetos empíricos. Se a predicção numérica atribuída a um substantivo comum produzir uma sentença com sentido, então se pode dizer que a estrutura das proposições terá validade para nomes de “objetos”. Tal estratégia de análise testa o comportamento predicativo das proposições em que os números ocorrem. Se, a nível linguístico, o conteúdo dessas proposições expressa relações entre um termo conceitual e um nome de um objeto, então estamos autorizados a afirmar que os números expressam propriedades de objetos (empíricos).

Primeiramente, o lógico alemão examina a noção de “número” de Mill. Frege (1989, p. 115-116, § 28) afirma que o substantivo “agregado” não pode designar determinadamente aquilo que pode ser enumerado como partes constituintes do “agregado”. Diante de uma mesma porção material, a expressão “agregado” não fornece critérios de identidade suficientes para obtermos a lista do que deve ser contado, posto que as partes componentes do “agregado” perdem a identidade, pois podemos segmentar a mesma porção material de várias maneiras. Diante de uma mesma porção material, teríamos somente uma “multiplicidade de corpos físicos” dispersos no espaço, e não um “agregado” – uma unidade composta por uma “multiplicidade de corpos físicos”.

Considerando a formulação de “número” de Mill (Frege, 1989, p. 111, § 23), vista anteriormente, i.e., de que os números designam uma propriedade que pertence ao “agregado” de corpos físicos e que essa propriedade expressaria “a maneira característica” pela qual o “agregado” pode ser composto ou decomposto em partes componentes, Frege chama a atenção

para o seguinte aspecto da noção de “número” de Mill: o emprego da expressão “*a* maneira característica”, com o artigo definido “*a*”, implica assumir que só há uma e única maneira característica de segmentar o “agregado” de corpos físicos em suas partes componentes, indicado pela atribuição numérica. Frege argumenta que, diante da mesma porção material, podemos atribuir vários números, por isso não haveria somente uma e única maneira essencial de segmentar um “agregado” indicado pela atribuição numérica.

Em primeiro lugar, o artigo definido na expressão “a maneira característica” é aqui um erro; pois há maneiras muitas diferentes pelas quais se pode decompor um agregado, e não se pode dizer que apenas uma seja característica. Um feixe de palha, por exemplo, pode ser fragmentado partindo-se cada talo, desfazendo-se o feixe em talos singulares, ou fazendo-se dele dois feixes (Frege, 1989, p. 111, § 23, grifo nosso).

Da mesma maneira que na passagem anterior, Frege contra-argumenta contra a ideia de que a atribuição numérica expressa uma e única maneira de decompor o agregado em partes componentes. Ainda, contra-argumenta contra a ideia de que atribuição numérica expressa uma e única maneira de compor um agregado em partes componentes. Para isso, estabelece a seguinte questão com o leitor (Frege, 1989, p. 111, § 23): se a expressão numérica designa uma propriedade essencial que expressa *a* maneira pela qual o agregado pode ser composto em partes componentes, então seria válido afirmar que “um feixe de cem talos de palha” é composto da mesma maneira que “um monte de cem grãos de areia”? Ambos os agregados são designados pelas mesmas “propriedades numéricas”, a dizer “um”. Segundo o Frege, a palavra “um”, na expressão “um talho de palha”, não exprime como esse talo poderia, por exemplo, ser composto por “moléculas” ou “células”, embora a forma da linguagem apresente o número como nome de uma propriedade (Frege, 1989, p. 111, § 23). Não é necessário que tenhamos de reunir empiricamente os corpos físicos para que possamos enumerá-los.

Um monte de cem grãos de areia é composto da mesma maneira que um feixe de cem talos de palha? E tem-se, no entanto, o mesmo número. O numeral “um” não exprime, na expressão “um talho de palha”, como este talo é composto de células ou moléculas. O número 0 traz ainda dificuldade maiores. Os talos de palha devem de modo geral formar um feixe a fim de poderem ser enumerados? É estritamente necessário reunir os cegos do império alemão em uma assembleia para que a expressão “número de cegos no império alemão” tenha sentido? (Frege, 1989, p. 111, § 23).

Frege argumenta que essa dificuldade é gerada pela aparência da linguagem. No uso ordinário da linguagem, os termos numéricos aparecem na forma adjetiva ou em construção

atributiva, o que faz com que a ocorrência desses termos contraia para si um sentido que eles não têm. Por isso, ao considerar que os numerais (*Anzahl*) designam uma propriedade atribuída a uma “multiplicidade corpos físicos”, Mill introduz, nas proposições aritméticas, um sentido que elas não têm, o de relações intrínsecas das predicções de primeira ordem – de predicções que expressam, a nível linguístico, relações entre termos conceituais e substantivos comuns. Para o autor, a palavra “um”, que aparece na expressão “um talo de palha”, em forma adjetiva, não poderia expressar a unicidade de uma “multiplicidade de corpos físicos” em um único corpo físico composto (ou agregado) ou em uma entidade unitária.

Na seção § 24 da *Die Grundlagen der Arithmetik*, Frege argumenta sobre o aspecto universal das proposições aritméticas. Segundo Frege, Mill defende que o método indutivo é universal, aplicável a qualquer domínio de investigação da verdade, o que o compromete com a tese de que a matemática deve ser fundamentada na percepção. Para Mill, por meio da aplicação do método indutivo, poder-se-ia organizar uma “multiplicidade” de fatos físicos, dados na percepção, em um “agregado” de fato particulares. No entanto, Frege argumenta que a aplicabilidade das asserções relativas à contagem não se limita somente a objetos empíricos. Como discutimos na seção anterior, Mill interpretou o axioma euclidiano “a soma de iguais são iguais” como uma verdade indutiva, a qual poderia ser expressa como “o que quer que seja composto de partes é composto pelas partes dessas partes”. Para Frege, essa compreensão de Mill é equivocada, porque toda proposição da aritmética teria de ser interpretada como uma aplicação de uma lei coextensiva com a natureza.

Ao definir número como uma propriedade que expressa uma maneira característica de arranjar uma “multiplicidade de corpos físicos” no tempo e no espaço, Mill está pensando que as propriedades dos objetos observáveis sugerem uma característica singular pela qual uma “multiplicidade” de corpos físicos idênticos pode ser arranjada em um agregado, indicado pela predicção numérica. No entanto, Frege mostra que este não pode ser o sentido de uma atribuição numérica, pois a noção de “agregado” não é um conceito bem determinado o bastante para viabilizar a atribuição numérica, já que não fixa a referência do que deve ser enumerado.

Para Frege, não podemos transportar o sentido de proposições válidas empiricamente para as asserções relativas à contagem ou enumerabilidade. Os termos numéricos que ocorrem na proposição não são nomes de propriedades aplicáveis a uma multiplicidade de corpos físicos. Por meio da análise do conteúdo da proposição em que os números ocorrem, na sua própria aplicação, Frege mostra que o sentido empírico introduzido por Mill não pode mais ser

reconhecido na aplicação das proposições aritméticas, porque o domínio empírico não pode fixar o conteúdo das asserções relativas à enumerabilidade.

Frege nos mostra que o sentido das predicções em que os números ocorrem é mais amplo do que o sentido de proposições que expressam fatos perceptíveis. Segundo Frege, o domínio da enumerabilidade é universal. As asserções de contagem ou enumerabilidade não se limitam a serem atribuídas somente a objetos empíricos, já que poderíamos contar tudo que podemos denominar por um conceito, daí sua validade universal. Frege rejeita a tese de Mill de que o método indutivo é válido logicamente para demonstrar as proposições aritméticas; portanto, rejeita a tese milliana de que esse seria o método correto para investigar a verdade das proposições aritméticas.

Sem embargo, segundo Frege (1989, p. 112, § 25), podemos estabelecer a seguinte questão: é razoável dizer que diferenças físicas correspondem a diferenças numéricas? Ele responderia, enfaticamente: “não!”. Do mesmo modo, não poderíamos afirmar que a unidade, doisidade ou a tresidade são algo físico. Para o lógico alemão, se os “números” fossem algo físico não seria possível distinguir entre um par de botas ou duas botas, pois “dois” e “um par” não são absolutamente o mesmo.

Citando Berkley, Frege argumenta que nenhuma “multiplicidade de corpos físicos” dispersa no tempo e no espaço pode ser considerada uma unidade composta, absoluta, porque, conforme a denominamos, também variará a unidade:

Berkley diz: “Cabe notar que o número não é nada fixo e estabelecido, existindo *realiter* nas próprias coisas. Ele é inteiramente criação do espírito, ao considerar uma ideia em si mesma, ou uma combinação de ideias, a que deseja dar um nome e fazer valer assim como unidade. Conforme o espírito combine suas ideias de modo variado, variará a unidade, e com a unidade também o número, que é apenas uma coleção de unidades. Uma janela = 1; uma casa onde há quatro janelas = 1; muitas casas formam uma cidade” (Frege, 1989, p. 111-112, § 25).

A premissa de que contamos uma realidade já segmentada, *i.e.*, que “número” é uma segmentação aplicável a qualquer fenômeno natural, é contraposta por Frege, a partir do argumento de que nenhum corpo físico pode ser considerado uma unidade em absoluto, porque sempre podemos atribuir vários números à mesma porção material. Os termos numéricos não podem indicar uma propriedade que sugere uma característica singular, pela qual objetos idênticos são arrançados em um agregado. Para viabilizar a contagem desses corpos físicos

teríamos que ter em posse um conceito que dá a lista do que deve ser contado. Sem esse conceito, em posse de “multiplicidade de corpos físicos” não teríamos como saber o que contar.

1.7 Semelhanças entre a noção de “multiplicidade de unidades” e a noção de “multiplicidade de corpos físicos”

A seguir, ressaltamos os pontos em comum com as duas noções de “multiplicidade” rejeitadas por Frege na *Die Grundlagen der Arithmetik*. Na parte da crítica às definições dos números, §§ 18-54, notamos algumas dificuldades recorrentes em ambas as propostas para definir os números cardinais. A interpretação dos números cardinais por uma teoria mereológica de *tokens* ou uma teoria mereológica de agregados impossibilita a enumerabilidade, porque não conseguimos identificar os objetos que deveríamos contar; além da impossibilidade de identificação não se é possível definir nem o número “zero” e nem o “um”. Ambas as tentativas de definir o número “um” falharam e em ambas as propostas o número “zero” não teria sentido, pois não poderiam quantificar uma contagem ou quantidade.

Alguns autores definem o número como um conjunto, multiplicidade ou pluralidade. Existe aí um inconveniente, que consiste em excluir do conceito os números 0 e 1. Aquelas expressões são muito indeterminadas: ora aproximam-se mais do significado de “aglomerado”, “grupo”, “agregado” – pensando-se em uma reunião espacial – ora são empregadas quase como equivalentes de “número”, apenas de maneira mais indeterminada. Eis porque não se pode encontrar nesta definição um esclarecimento do conceito de número (Frege, 1989, p. 115-116, § 28).

Essa passagem pertence à seção § 28 da *Die Grundlagen der Arithmetik*. Nela, Frege chama a atenção para a semelhança entre o emprego das expressões “multiplicidade”, “conjunto” e “pluralidade”, pelos matemáticos formalistas [§§ 29-44], e as expressões “agregado”, “grupo”, “aglomerado”, pelos matemáticos empiristas [§§ 22-25]. O ponto comum ao qual o lógico alemão se refere diz respeito às propriedades espaciais introduzidas na “definição” dos números cardinais. Para o matemático empirista, o domínio da enumerabilidade consiste em contar uma “multiplicidade de corpos físicos” reunidos espacialmente. Nesse sentido, quer dizer que, embora o matemático formalista tenha proposto abstrair qualquer propriedade espaço-temporal de corpos físicos, como condição para a enumerabilidade, a atribuição do “número” como um sinal vazio de significado implica definir “número” como “*tokens*”. Além disso, essa definição contém residualmente propriedades espaciais, porque

recorre a uma ordem espacial em que os sinais estão justapostos, i.e., estão dispostos um ao lado do outro, separados apenas pelo sinal de adição “+”.

Como nenhuma dessas “noções” de número consegue fixar a referência de uma atribuição numérica, Frege argumenta que seu sentido está incorreto e esse inconveniente teria em comum a exclusão do “zero” e do “um” dos números cardinais.

O número “um” não pôde ser definido nem pela proposta do matemático formalista [§§ 29-44], nem pela proposta do matemático empirista [§§ 22-25]. Em ambas as propostas, a forma em que os termos numéricos aparecem na linguagem ordinária, em forma adjetiva ou em construção atributiva, contribuiu para que vários autores elegessem o domínio empírico como o da enumerabilidade. A partir da noção de “multiplicidade de unidades”, o número “um” foi definido somente como numeral, e não como número cardinal (Frege, 1989, § 43, p. 126); a partir da noção de “multiplicidade de corpos físicos”, o número “um” não pôde ser definido, porque nenhum corpo físico pode ser definido como unidade absoluta, pois sempre pode ser segmentado em partes, arbitrariamente, i.e., conforme quisermos denominar a “multiplicidade de corpos físicos”.

O número “zero” ainda tem implicações mais graves, porque nem mesmo seria considerado como um número cardinal. Em ambas as noções de “multiplicidade”, seria desprovido de sentido. Segundo Frege (1989, p. 23, § 43), a partir da noção de “multiplicidade de unidades”, o número “zero” teria de ser expresso não se escrevendo nada, pois nunca poderíamos encontrar um objeto pelo qual o número “zero” pudesse ser abstraído (Frege, 1989, p. 127, § 44); a partir da noção de “multiplicidade de corpos físicos”, o número “zero” não teria sentido, porque não poderíamos encontrar nem no espaço e nem no tempo um fato físico cujo número “zero” pudesse asserir – i.e., um agregado que pudesse ser segmentado em “zero” partes. Logo, seria apenas um sinal vazio de conteúdo e seria surpreendente que pudesse gerar algum resultado racional em cálculos (Frege, 1989, p. 99, § 8).

Frege (1989, p. 127, § 44) argumenta que, quando se pergunta “quantos?”, contamos tanto com o “zero” como com o “um” como resposta para quantificar contagens, já que ambos são “números” que quantificam uma contagem ou quantidade. Para o Frege, essas dificuldades partilhadas por ambas as noções de “multiplicidade” resultam de uma interpretação equivocada dos “números” como propriedades atribuídas diretamente a objetos empíricos. Segundo a crítica de Frege, a forma adjetiva ou a construção atributiva em que as expressões numéricas aparecem na linguagem ordinária contribuíram para esse equívoco, produzindo uma compreensão errônea dos números cardinais.

Para Frege, os dois principais erros cometidos em ambas as noções de “multiplicidades” foram a admissão de “corpos empíricos” como os portadores dos termos numéricos, i.e., de se ter admitido “corpos empíricos” como conteúdo semântico e não o conceito, ou a extensão do conceito. Na seguinte passagem da seção § 48, em referência ao aspecto arbitrário da estipulação numérica [§ 22] (Frege, 1989, p. 110, § 22), diz o seguinte:

A aparência, surgida de alguns exemplos anteriores, de que à mesma coisa conviriam diferentes números explica-se por terem sido os objetos admitidos como os portadores de número. Tão logo o verdadeiro portador, o conceito, for investido de seus direitos, os números mostrar-se-ão tão exclusivos quanto as cores em seu domínio (Frege, 1989, p. 129, § 48).

Esses erros têm como origem o mesmo problema: a incapacidade da linguagem ordinária para expressar níveis lógicos de predicação distintamente. No caso dos números cardinais, a linguagem ordinária colapsa níveis lógicos, porque a estrutura gramatical de suas unidades básicas de sentido, isto é, de sujeito e predicado, não captura níveis lógicos distintos, mas achata todos os níveis lógicos na sua estrutura. Portanto, segundo Frege, poderíamos ser facilmente conduzidos a confundir as categorias semânticas dos termos numéricos que nela ocorrem, pelo emprego de nomes próprios como termos conceituais, e vice-versa.

2. A SOLUÇÃO DE FREGE

Aqui, apresentamos a solução de Frege para o problema de saber sobre o que estamos asserindo quando fazemos atribuições numéricas e caracterizamos as duas noções de “multiplicidade” que fundamentaram a interpretação empírica (§§ 22-25) e formalista (§§ 29-44) dos “números” cardinais, criticadas por Frege na *Die Grundlagen der Arithmetik*, a noção de “multiplicidade de corpos físicos” e a de “multiplicidade de unidades”. Também trazemos os argumentos, empregados pelos partidários da interpretação empirista e formalista, para justificar tomar essas “multiplicidades” como portadoras dos números cardinais; por último, explicamos a crítica de Frege a esses argumentos, circunscrevendo as dificuldades e semelhanças em ambas as interpretações para a aplicabilidade dos juízos aritméticos.

Apresentamos a solução de Frege para superar o problema que ambas as soluções, a empírica e a formalista, acarretam para “definir” os números cardinais. Para concretizar esta etapa, iremos dividi-la em três momentos: na primeira seção, vamos explicitar o problema investigativo principal que Frege sugere haver com ambas as noções de “multiplicidade”: a classificação dos números cardinais como propriedades de objetos empíricos. Na segunda, explicamos a metodologia de Frege para extrair o conteúdo lógico do discurso aritmético comum e fornecer uma definição lógica dos números “zero” e “um”, que permanece sem resposta. Tendo concluído essa etapa, na terceira seção deste capítulo abordamos a solução que o Frege apresenta na seção § 46 da *Die Grundlagen der Arithmetik*, de que o a predicação numérica contém um enunciado sob um conceito e sistematizá-la com as dificuldades produzidas pelas duas noções de “multiplicidade”. Por fim, nas últimas seções, apresentamos as definições lógicas dos números “zero” e “um”, que permanecem sem resposta nas soluções, empírica e formalista, e analisamo-las formalizadas a partir da teoria dos conjuntos e sob a notação do cálculo lambda.

2.1 O problema investigativo

Nesta seção, circunscrevemos a questão que Frege estabelece com seu interlocutor para investigar as duas noções de “multiplicidade”, rejeitadas por ele na *Die Grundlagen der Arithmetik*. A questão está circunscrita nos argumentos iniciais da crítica de Frege nessa obra, na seção § 21. Ela captura o principal erro cometido pelas duas soluções, empírica e formalista,

para definir os números cardinais, a admissão de objetos empíricos como sujeito da predicação numérica, já discutido na seção 1.7 do primeiro capítulo.

A questão investigativa que Frege apresenta ao seu interlocutor na seção § 21 da *Die Grundlagen der Arithmetik* é a seguinte:

Tentemos ao menos indicar a posição do número entre nossos conceitos. Na linguagem os números aparecem frequentemente sob forma adjetiva e em construção atributiva, analogamente as palavras como duro, difícil e vermelho, que significam propriedades de coisas exteriores. Surge naturalmente a questão de saber se os números singulares devem também ser assim entendidos, e se conseqüentemente o conceito de número pode ser classificado juntamente, digamos, com o de cor (Frege, 1989, p. 109, § 21, grifos nossos).

Com base na leitura desse trecho, a questão que Frege estabelece com seu interlocutor se resume em saber: “os números devem ser classificados como propriedades de objetos empíricos?” – como sustentam os partidários daqueles que definem “número” como uma atribuição a uma “multiplicidade de corpos físicos” ou daqueles que definem como uma atribuição a uma “multiplicidade de unidades”. A partir dessa questão, investiga se é possível classificar os termos numéricos que ocorrem na proposição como propriedades atribuídas diretamente a objetos empíricos, assim como são as cores. Ao argumentar que os termos numéricos que ocorrem na linguagem ordinária ocorrem, na maioria das vezes, em forma adjetiva ou em construção atributiva, Frege toma o plano linguístico como ponto de partida da sua investigação do significado dos termos numéricos.

Por exemplo, os termos numéricos podem ocorrer em forma adjetiva da seguinte maneira, nas expressões “um monte de cem grãos”, “um feixe de setenta palhas”, “mil grãos de trigo”, a ocorrência dos termos numéricos “cem”, “setenta” e “mil” ocorrem em forma adjetiva, do mesmo modo que os termos para cores, por exemplo, “cavalos brancos”, “gatos amarelos”. O termo numérico adjetiva um substantivo comum que nomeia uma “multiplicidade de corpos físicos” e indica um atributo que pertence à “multiplicidade”, a dizer, como ela é composta — a tese de Mill de que a realidade já se apresenta segmentada. Mas os termos numéricos também podem aparecer em construção atributiva como uma expressão incompleta, por exemplo, na proposição “Solon é um”, o termo numérico ocupa lugar sintático na proposição, que é relativo à expressão predicativa.

Nesse sentido, o termo numérico assume, linguisticamente, a forma da categoria correspondente ao que se predica do objeto, isto é, assume a categoria de propriedades de

objetos. Esse seria o caso da “definição” de “número” fundamentada em uma noção de “multiplicidade de unidades”; a tese dos matemáticos formalistas de que os números são atribuídos a objetos empíricos, ao serem considerados objeto de contagem (unidade). Isso faria com que o número “um” fosse uma determinação adicional, que todo objeto empírico ao ser enumerado (contado), haveria de ter, i.e., a propriedade de “ser um”.

Como se pode observar, a investigação de Frege ressalta o aspecto linguístico das proposições aritméticas construídas em linguagem ordinária. Na crítica à noção empírica de “número” das seções §§ 22-25 e da noção formal de “número”, das seções §§ 29-44, Frege inicia sua investigação do conceito de “número”, partido da suposição de que os números são propriedades atribuídas a corpos físicos, como supõem os partidários da noção empírica e da noção formalista de número, verificando se as propriedades expressas pela expressão predicativa podem ser afirmadas de um objeto, i.e., se aquelas expressas pelo predicado podem ser afirmadas do sujeito do enunciado em questão, os objetos empíricos. No percurso da demonstração, as soluções empírica e formalista de “número” são fundamentadas em uma ideia de “multiplicidade de corpos físicos” (§§ 22-25) e de uma “multiplicidade de unidades” (§§ 29-44) que se mostraram inaplicáveis e contraditórias, levando o lógico alemão a sugerir que os significados dos termos numéricos devem ser considerados do ponto de vista da sentença completa, e não somente da parte da sentença.

Como já discutido, Frege demonstrou que algumas visões sobre as definições de número cardinal, fundamentadas nas noções duas de “multiplicidades”, a empírica e a formal, se mostram insatisfatórias. Portanto, nenhuma das soluções propostas pelos contemporâneos do autor foi capaz de responder à questão: qual é o conteúdo das asserções aritméticas? O conceito de “número” pode ser classificado juntamente, digamos, com o de cor, como uma propriedade de objetos empíricos?

2.2 Metodologia empregada para analisar as proposições aritméticas na *Die Grundlagen der Arithmetik*

Antes, explicamos o problema investigativo que Frege apresenta no início da investigação, na seção § 21, e o articulamos às duas noções de “multiplicidades” rejeitadas por ele na crítica. Antes de apresentarmos a solução de Frege para resolvê-lo, vamos circunscrever a metodologia empregada pelo lógico alemão para analisar o discurso aritmético comum e formular a sua solução. Para concretizar essa etapa, primeiramente abordamos e

exemplificamos a noção de “conteúdo judicável”; depois, relacionamos essa noção com o terceiro princípio adotado na obra, a distinção entre “conceito” e “objeto”, e como aplicá-lo a exemplos do discurso aritmético comum.

Podemos afirmar que o objetivo principal do trabalho lógico-filosófico de Frege foi a tentativa de demonstrar que aritmética pode ser derivada de proposições da lógica, o projeto conhecido na literatura como “projeto logicista”. Na *Die Grundlagen der Arithmetik*, consta a argumentação dele a favor desse projeto, dispensando a notação formal desenvolvida na *Begriffsschrift* e propondo-se a demonstrar a definição lógica de “número” cardinal (*Anzahl*) e de “seguir em série”, a partir da análise lógica do discurso aritmético comum. Então, na primeira parte da obra, apresenta uma discussão crítica das soluções empírica e formalista para definir os números inteiros positivos e, na segunda parte, propõe uma solução para o problema trazido na seção § 21, nomeadamente, de saber se os números podem ser classificados como propriedades atribuídas diretamente a objetos.

Na parte crítica da obra, Frege tenta persuadir o interlocutor de que os números cardinais têm validade lógica-objetiva, demonstrando que as soluções, a empírica e a formalista, são incompatíveis com respeito ao contexto de sua aplicação, *i.e.*, o do juízo aritmético. No desenvolvimento da demonstração, preocupa-se em extrair o conteúdo lógico-objetivo asserido pelos juízos aritméticos, recusando-se a fazer qualquer apelo a recursos psicológicos ou empíricos na sua demonstração. O lógico alemão considera somente aquilo que pode ser asserido objetivamente e comunicado intersubjetivamente, isto é, por uma proposição da linguagem. Na terminologia empregada na obra [*Grundlagen*], não menciona a expressão “conteúdo conceitual” (*begrifflichen Inhalt*), como faz na *Begriffsschrift*, mas emprega a expressão “conteúdo judicável” (*beurteilbaren Inhalts*) para se referir àquilo que deve ser entendido como o conteúdo objetivo asserido pela proposição, *i.e.*, “conceito” e “objeto”. Para Frege (1989, p. 140, N. do A.), “conceito” é um predicado possível de um conteúdo judicável singular e “objeto” é um sujeito possível de tal conteúdo.

Embora Frege tenha explicado tecnicamente a distinção entre “conceito” e “objeto”, em 1892, depois de ter bifurcado a noção de “conteúdo judicável”, em pensamento (sentido) e valor de verdade (referência), afirma, no artigo *Über Begriffsschrift und Gegenstand*, que mantém o essencial dessa distinção, à maneira de como já havia feito na *Die Grundlagen der Arithmetik*, em nota da seção § 66 (Frege, 1989, p. 140). Nessa nota, Frege já descreve o que tem mente do que é essencial numa análise lógica da linguagem. Segundo o lógico alemão, “conceito” é um predicado possível de um conteúdo singular e “objeto” é o sujeito desse

conteúdo. Deve-se distingui-los na análise lógica para que não se corra o risco de alterar o sentido da sentença. Na *Grundlagen*, Frege emprega a palavra “conceito” como a forma geral de um conteúdo judicável “a cai sob F”. Essa forma geral do conteúdo trata de um objeto a e permanece judicável (ou asserido), substituindo-se a pelo que quer que seja (Frege, 1989, p. 147, § 72). Nesse sentido, Frege estaria elucidando “objeto” a partir de uma maneira completamente diferente, esclarecendo a noção de “objeto” a partir do conceito sob o qual cai.

Então, a partir de distinções linguísticas entre “nome próprio” e “predicado”, Frege exhibe as articulações lógicas do discurso aritmético comum, evitando considerar o conteúdo das expressões isoladamente, como faz o simbolismo da gramática. Frege analisa o conteúdo veiculado em sentenças completas e, a partir de distinções entre contextos sentenciais (sentenças completas), exhibe distinções conteudísticas fundamentais para sua proposta para definir os números cardinais como uma propriedade de segunda ordem.

Toda essa estratégia descrita nos dois últimos parágrafos é empregada na parte crítica da obra e está fundamentada no terceiro princípio metodológico que Frege (1989, p. 92) estabelece no início da *Die Grundlagen der Arithmetik*: P3) “Não se deve perder de vista a distinção entre conceito e objeto”.

Na parte crítica da obra, esse princípio remonta aos fundamentos mais gerais da lógica de Frege. Quando dirige a crítica aos seus contemporâneos, na *Grundlagen*, Frege está constantemente identificando empregos indistintos de “termos conceituais” e “nomes próprios” nas asserções numéricas relativas à contagem, empregadas por filósofos e matemáticos (§§ 22-25 e §§ 29-44). Mas, embora o aspecto crítico dessa primeira parte da obra consista em demonstrar contradições presentes nas soluções empírica e formalista de “número”, ao empregar esse princípio no exame crítico, também esclarece no que consiste o conteúdo lógico do discurso aritmético comum (§ 46).

Vejamos o seguinte exemplo: na proposição “Shamu é mamífero”, conteudisticamente falando, a expressão “é mamífero” designa um predicado possível de um conteúdo singular e “Shamu” se refere a um sujeito possível desse conteúdo. Portanto, para Frege, o conteúdo lógico expresso por essa proposição é a circunstância de que objeto “Shamu” cai sob o conceito “Mamífero”. Lembrando que essa proposição é uma proposição verdadeira; se aplicarmos a operação de inversão do termo sujeito e do termo predicado, como, por exemplo, “Mamífero é Shamu”, notamos algo de errado na sentença, obtemos uma expressão predicativa que não é nem falsa e nem verdadeira, mas sem sentido. Conteudisticamente falando, a palavra “Shamu” não pode designar uma expressão conceitual, isto é, não pode ser empregada na forma

linguística de predicado possível de um conteúdo singular (Frege, 1989, p. 140), por não possuir uma natureza predicativa, pois é um nome próprio. Podemos afirmar, desse exemplo, que nem todas as entidades têm natureza predicativa.

Para Frege (1989, p. 131), quanto a um conceito a questão é sempre saber se algum objeto “cai sob” este conceito ou não. Portanto, numa demonstração lógica, tudo que se pode exigir de um conceito é que fique determinado, se cada objeto “cai sob” ou “não cai sob” ele (Frege, 1989, p. 146). Quanto a um objeto, sabemos que este não pode desempenhar o papel de atribuir propriedades, i.e., de ser expresso por um termo predicativo. Por essa razão, a sentença “Mamífero é Shamu” não tem sentido, porque a palavra “Shamu” jamais poderá desempenhar numa sentença o papel predicativo, a palavra “Shamu” não expressa o conteúdo de um predicado singular possível.

Outra maneira de saber se uma expressão desempenha papel predicativo é negando-a, pois, à maneira, somente um predicado tem a propriedade semântica de obter sua contraditória quando negado. Nesse sentido, na proposição “Mamífero não é Shamu”,¹⁶ embora a palavra “Shamu” assuma a forma da categoria de termos que se predicam de objetos, como ela não pode desempenhar esse papel, ao inverter sujeito e predicado obtemos novamente uma frase que não é nem verdadeira, nem falsa, mas sem sentido. Nesse exemplo, a frase parece não funcionar bem, porque o operador só se antepõe às expressões predicativas, por isso, nunca obtemos, no exemplo acima, a contraditória da proposição.

Com base nessas demonstrações, e nas sugestões de Frege, afirmamos que, no exame do contexto sentencial das proposições, as distinções linguísticas ocultam certas distinções contedísticas no plano material da expressão. Por essa razão, o autor recomenda avaliar o significado de uma expressão de acordo com o papel sintático desempenhado por ela na sentença completa, juntamente com a verdade do contexto sentencial em que ela ocorre. Na *Die Grundlagen der Arithmetik*, quando nos referirmos a “conteúdo”, estamos pensando em uma noção de “pensamento” que ainda está intimamente conectada à noção de “verdade expressa por uma sentença completa”.

Então, quando Frege formula o problema investigativo, na seção § 21, de que a classificação dos números cardinais como propriedades de objetos empíricos é uma consequência da forma adjetiva ou da composição atributiva,¹⁷ em que os termos numéricos aparecem no discurso aritmético comum, Frege também estaria chamando a atenção do interlocutor de que esse é um uso linguístico enganador, cujo critério de aplicação não é

¹⁶ Comparar com “Shamu não é mamífero”.

¹⁷ Composição atributiva: substantivo + adjetivo.

suficiente para distinguir os constituintes lógicos da sentença. Segundo o lógico alemão (1989, p. 131-132, §§ 51-53), esse uso é enganador, porque a linguagem ordinária emprega “nomes próprios”, como termos conceituais e vice-versa. Contudo, tendo mente o princípio de que devemos sempre distinguir termos conceituais de nomes de objeto (nomes próprios), a diferença subsiste.

Para Frege (1989, p. 131, § 52), na linguagem ordinária, por exemplo, é comum dizer “o número de balas” do mesmo modo que se pode dizer “o peso das balas” ou “a cor das balas”, considerando a palavra “número” como uma palavra que adjetiva o substantivo “balas”, como as palavras “peso” e “cor” a adjetivam (termo determinante). Mas, parafraseando-o, “fala-se aparentemente de objetos quando na verdade se quer enunciar algo de um conceito” (Frege, 1989, p. 131, § 52).

A circunstância descrita no parágrafo anterior também ocorre com os numerais. Na expressão “quatro cavalos brancos” poder-se-ia pensar que, do mesmo modo que “branco” adjetiva “cavalos”, o numeral “quatro” poderia expressar uma propriedade atribuída ao substantivo “cavalos”. Mas “cavalos brancos” é uma nota característica (*Merkmale*) da espécie “cavalo”. Podemos sempre tirar a prova, perguntando se algo “cai sob” o “conceito” e “o que cai?”. Nesse caso, “cavalos brancos” é subordinado ao conceito “cavalo”, então qualquer coisa que cai sob o conceito de “cavalo branco” cai sob o conceito de “cavalo”. No entanto, não faz sentido perguntar se “quatro” cai sobre o conceito “cavalos brancos”.

A expressão “o número de balas” é um conteúdo não judicável (não asserível), portanto, é preciso considerá-la em um contexto sentencial completo para poder analisá-la. Na expressão “o número de balas”, pelo artigo definido “o” temos a impressão de que estamos falando de um objeto ou de um conteúdo singular. Nesse sentido, para Frege, a linguagem reveste o conceito da forma linguística de seus enunciados, de modo que o que é dito do conceito possa ser conteúdo possível de um predicado. Por isso, a expressão é construída com o auxílio do artigo definido, de maneira que se “objetifica o conceito” na linguagem. Segundo Frege, o plural gramatical indica que a expressão “balas” não pode ser nominal, porque na linguagem ordinária o plural gramatical indica um conceito, e não um nome próprio.

Essa ambiguidade da linguagem é responsável por diversos equívocos cometidos por matemáticos e filósofos ao tentarem definir os números cardinais. Então, ao considerarmos a expressão “o número de balas” num contexto sentencial, como, por exemplo, na sentença aritmética “a raiz quadrada de 4 é dois”, digamos, o “número de balas é sete”, temos um

contexto sentencial em que algo é enunciado do conceito “balas”, a dizer, quantas vezes o conceito foi instanciado.

Segundo Frege (1989, p. 131, § 52), na expressão “quatro cavalos brancos” também se é necessário distinguir entre propriedades enunciadas de um conceito e propriedades enunciadas de objetos. Seguindo o mesmo procedimento, aplicado no parágrafo anterior, se a expressão no seguinte contexto sentencial, por exemplo, “a carruagem do rei é puxada por quatro cavalos brancos”, “quatro” contém um enunciado sobre o conceito “cavalos brancos que puxam a carruagem do rei”, a dizer, que esse conceito é instanciado quatro vezes, e não uma propriedade atribuída diretamente ao substantivo “cavalos”, como acontece com a palavra “branco”.

A questão colocada é que temos de distinguir entre enunciados que exprimem propriedades de objetos e outros que exprimem uma propriedade de um conceito (propriedades de nível superior). Embora os termos numéricos possam ser considerados na linguagem ordinária como adjetivos, sempre acompanhando um substantivo comum, temos de distinguir, entre os adjetivos, aqueles que exprimem uma propriedade atribuída ao conceito e aqueles que exprimem propriedades atribuídas diretamente a um substantivo comum. Então, mesmo que a nível linguístico não seja possível expressar essa distinção entre propriedades, porque a forma adjetiva achata o nível predicativo das propriedades, o recurso à forma geral de um conteúdo judicável, em que “*a* cai sob o conceito *F*” utilizado por Frege, mostra para o seu interlocutor as articulações lógicas que se engendram na linguagem ordinária. Logo, ao empregarmos-lo no discurso aritmético comum, conseguimos tornar evidente tais articulações.

Notamos que os adjetivos sempre acompanham um substantivo, como vimos nas expressões empregadas em alguns exemplos anteriores “o número de bala” e “quatro cavalos brancos”. Os adjetivos nessas expressões servem para formar um nome composto, mas nunca conseguem desempenhar essa função isoladamente; se os analisamos em contextos sentenciais, da forma geral de um conteúdo judicável, podemos distinguir entre contextos sentenciais que exprimem propriedades de objetos e outros que exprimem propriedades de conceitos.

Segundo Frege, o uso adjetivo dos termos numéricos disfarça a real natureza dos números cardinais. Por isso, na linguagem ordinária, nem sempre a categoria lógica a qual um termo pertence está explícita. No discurso aritmético comum, a linguagem atribui números a objetos, mas, como Frege adverte, a sentença em que se predica algo de um objeto não é do mesmo *tipo* da sentença que predica algo de um conceito. Para o próprio Frege (1989, p. 129, § 47), essa distinção só surpreende aqueles que interpretam os “conceitos” subjetivamente como representação, pois desconhecem que uma mesma sentença pode ser decomposta de

várias maneiras. Portanto, a análise lógica do discurso aritmético esclarece a questão de saber se os números cardinais podem ser classificados como propriedades de corpos físicos, como são as cores. A análise de Frege do discurso aritmético comum demonstra que as expressões “quatro” e “branco” parecem não possuírem a mesma função semântica.

2.3 Solução do problema: números como conceitos de segunda ordem

Nesta subseção, circunscrevemos a solução para o problema de saber se os números cardinais (*Anzahl*) podem ser classificados como propriedades de corpos físicos e, depois, sistematizamos as dificuldades que as duas noções de “multiplicidade” acarretam para a interpretação de “número” cardinal (*Anzahl*), já discutidas no capítulo primeiro, e que permanecem sem resposta ao longo da crítica (§§ 18-44). São elas: a explicação lógica do conceito de “unidade”, a múltipla atribuição numérica ao mesmo “agregado” de corpos físicos, a indistinguibilidade das “unidades” e as definições dos números “zero” e “um”.

2.3.1 A indicação numérica contém um enunciado sobre um conceito

A seguir, explicitamos os principais argumentos envolvidos na solução [§ 46] que Frege apresenta para a questão [§ 21] de saber se os números são propriedades de objetos empíricos. A estratégia argumentativa do Frege consistiu em apelar somente para intuições linguísticas em detrimento de recursos psicológicos e empíricos. A partir do plano linguístico, analisou as asserções mais fundamentais da matemática, aquelas relativas à contagem no discurso aritmético, e propôs uma solução comum para as dificuldades presentes nas soluções empírica e a formalista de “número”. Segundo o lógico alemão, a ocorrência dos termos numéricos em forma adjetiva, na linguagem ordinária, indica que os termos numéricos não parecem desempenhar um papel de “nome próprio” nas sentenças, mas sim de uma propriedade, em algumas sentenças, de uma propriedade atribuída a um “conceito”, a exemplo da expressão “cem mil grãos de milho”. Essa circunstância, segundo o Frege, é provocada por uma esquisitice da linguagem, que, para poder enunciar algo de um “conceito”, tem que expressá-lo na sua forma usual de afirmações, i.e., tomá-lo como um conteúdo de uma predicação gramatical. Mas esse uso linguístico dos numerais não deve nos enganar, porque, segundo o Frege, podemos sempre formar uma sentença em que os termos numéricos ocorrem em forma adjetiva em uma sentença em que os termos numéricos ocorrem em forma substantiva, por exemplo, “o número de grãos de milho é cem mil”. Tendo esclarecido como o papel linguístico dos termos numéricos no discurso aritmético contribui para compreensões equivocadas dos números cardinais, Frege pode afirmar que, na linguagem ordinária, a ocorrência de um termo numérico enuncia uma propriedade de um conceito, uma tese que futuramente seria adotada pela teoria de tipos e que levanta a hipótese, a saber, se é possível predicar de entidades que não

são objetos. Para Frege, ao tratar os números como propriedade que enunciam algo de um “conceito” qualquer, no que diz respeito à predicação numérica, essa predicação enuncia de um “conceito” se sob ele cai ou não algum objeto.

Ao afirmar que o termo numérico “enuncia algo de um conceito”, Frege (1989, p. 128, § 46) quer dizer que, numa asserção de contagem do discurso aritmético comum, embora a linguagem atribua números a objetos, essa circunstância não acontece tão diretamente como pressupõem as soluções empírica e formalista. Os números cardinais (*Anzahl*) só podem ser atribuídos a objetos via um conceito, na *Grundlagen*, via um predicado possível de um conteúdo singular. Segundo Frege, para confirmarmos tal hipótese basta distinguir as categorias semânticas de “conceito” e “objeto” nas asserções de contagem do discurso aritmético. Essa interpretação cardinal dos números é realizada por Frege somente analisando as asserções de contagem na linguagem ordinária. Ela aparece pela primeira vez no seguinte trecho da *Die Grundlagen der Arithmetik*:

A fim de iluminar a questão, será conveniente examinar o número no contexto de um juízo onde se evidencia sua espécie original de aplicação. Se observando o mesmo fenômeno exterior posso dizer de modo igualmente verdadeiro: “Isto é um grupo de árvore” e “isto são cinco árvores”, ou “aqui há quatro companhias” e “aqui há 500 homens”, o que varia não é o objeto singular nem o todo, ou o agregado, mas sim minha maneira de denominar. No entanto, isto é apenas índice da substituição de um conceito por outro. Impõem-se assim, como resposta à primeira questão do parágrafo anterior, que a indicação numérica contém um enunciado sobre um conceito (Frege, 1989, p. 128, § 46, tradução nossa).

Conforme o próprio Frege, essa interpretação dos números cardinais (*Anzahl*) é mantida até o fim do período médio, na *Grundgesetze der Arithmetik*,¹⁸ mesmo após ter bifurcada a noção de “conteúdo conceitual” em “sentido” e “referência”. A partir da solução apresentada no trecho anterior, Frege responde ao problema investigativo introduzido na seção § 21, a saber: Podemos classificar os termos numéricos como uma propriedade atribuída diretamente a objetos, como são as cores? Com base na leitura desse trecho, podemos afirmar que a solução de Frege é propor que os termos numéricos são atribuídos a conceitos, e não a objetos. Em certa

¹⁸ Na *Grundgesetze der Arithmetik*, Frege argumenta: “Realizo aqui um projeto que já tinha em mente na época do meu *Begriffsschrift* do ano de 1879 e que anunciei no meu *Grundlagen der Arithmetik* de 1884. Com este ato pretendo confirmar a concepção de número cardinal que eu estabeleci no último livro. A base para meus resultados está articulada na seção §46, nomeadamente, que uma afirmação numérica contém uma predicação sobre um conceito; e a exposição aqui repousa sobre ela. [...] Sem dúvida, na linguagem, a questão não é tão transparente; mas se prestarmos muita atenção, descobriremos que mesmo aqui há menção de um conceito, em vez de um grupo, um agregado ou algo semelhante, sempre que uma declaração de número é feita.” (Frege, 2013, p. IX).

medida, em última análise, eles dizem respeito a objetos, mas essa atribuição é sempre mediada por um “conceito”. Por essa razão, nesse trecho, Frege demonstra que podemos fazer várias atribuições numéricas a uma mesma porção material, sem que a porção espaço-temporal se modifique. Ele exemplifica, por exemplo, que nas expressões “isto é um grupo de árvores” e “isto são cinco árvores” o que varia não é a porção material ocupada pela “multiplicidade de corpos físicos”, é a maneira pela qual selecionamos essa porção material, i.e., por meio de um “conceito”, no exemplo, os conceitos “grupo de árvores” e “cinco árvores”.

Segundo Frege (1989, p. 129, § 46), na expressão “quatro cavalos”, embora a palavra “quatro” esteja adjetivando o substantivo “cavalos”, a nível linguístico, se analisarmos logicamente a sentença sob a forma geral de um “conteúdo judicável”, por exemplo, na sentença “a carruagem do imperador é puxada por quatro cavalos” obtemos a circunstância em que a palavra “quatro” contém um enunciado sobre o conceito “cavalos que puxam a carruagem do imperador”. Essa propriedade é atribuída ao conceito “cavalos que puxam a carruagem do imperador”, instância em que há quatro objetos que satisfazem àquele conceito.

No que diz respeito às cores, Frege recomenda comparar os dois tipos de atribuições, de cores e de termos numéricos, para observarmos se eles se comportam diferente numa sentença completa. Para Frege, uma atribuição numérica não poderia desempenhar o mesmo papel que um termo para cores. Para confirmarmos esse argumento, basta que notemos não ser possível analisar a expressão “cavalos brancos” da mesma maneira que a expressão “quatro cavalos”. As palavras “cavalos” e “brancos” não possuem unidades semânticas distintas, como as palavras “quatro” e “cavalos”. A palavra “branco” pode desempenhar o papel de expressar uma propriedade subordinada a um conceito, digamos ao conceito “cavalos”, e podemos derivar dessa expressão a seguinte sentença adjetiva “Os cavalos são brancos”. Desta podemos derivar uma sentença com conteúdo singular “O cavalo é branco”.

Mas, no caso de predicções em que ocorrem termos numéricos, não podemos aplicar as mesmas operações descritas no parágrafo anterior. Por exemplo, para Frege, primeiramente, podemos notar que a palavra “quatro” só pode ser flexionada no singular. Para o lógico, essa propriedade do termo numérico deve ser considerada como um indicador de que este desempenha um papel de identificador de um objeto e, por isso mesmo, jamais poderia desempenhar o papel de um termo conceitual (ou um termo geral). O número singular é considerado somente como parte do predicado e, isoladamente, é um nome próprio (Frege, 1989, p. 134, § 57), por isso dizemos “o quatro” fazendo recurso ao artigo definido “o”. Na expressão “quatro cavalos”, o autor diria que há duas unidades lógico-semânticas envolvidas e

podemos evidenciar a distinção entre elas se tentássemos, por exemplo, considerando-as numa sentença completa, “A carruagem do imperador é puxada por quatro cavalos”, tentar derivar dela “Cavalos são quatro”, como fizemos no parágrafo anterior com a palavra “branco”. Perceberemos que a forma atributiva em que “quatro” aparece na sentença “cavalos são quatro” produz uma sentença que não é nem falsa, nem verdadeira, mas sem sentido. Parafraseando Velloso no artigo “Os números como substância matemática em Frege” (2023), seria razoável dizer que, diante desse enunciado, o interlocutor, ao reconhecer sua falta de sentido, para reorientar aquele que a enuncia, talvez pergunte “são quatro o quê?”. O formato da questão corrigiria imediatamente o sentido desta, orientando aquele que a enuncia a corrigir o equívoco, para “generosamente” informar seu interlocutor sobre o conteúdo da atribuição numérica. Nosso interlocutor talvez diga “— Desculpe-me, quis dizer ‘O número de cavalos que puxam a carruagem do imperador!’”, para indicar que é o “conceito” que deve ser tomado como conteúdo da predicação numérica.

Essa distinção cuidadosa que Frege opera exaustivamente entre contextos sentenciais ocorre em diversos trechos da *Grundlagen*, tanto na parte crítica da obra quanto ao longo da parte positiva, em que Frege reduz proposições aritméticas à proposições da lógica. Esse modo de operar a distinção, isto é, distinguindo propriedades e relações entre nomes próprios e termos conceituais e propriedades e relações entre termos conceituais é chamada, na literatura, de uma teoria simples de tipos. Portanto, seria razoável afirmar que a tese de Frege sobre os números cardinais (*Anzahl*) pressupõe uma teoria de tipos simples. Pois, Frege distingue cuidadosamente entre propriedades e relações de primeira ordem, propriedades que, a nível linguístico, expressam relações entre um nome próprio e um termo conceitual; e propriedades de segunda ordem que, a nível linguístico, expressam relações entre termos conceituais.

Na *Die Grundlagen der Arithmetik*, Frege emprega o termo técnico “conceito de ordem superior” para se referir a propriedades que são predicadas de conceitos e “relação de cair sob” para se referir à relação de subsunção. Segundo o Frege, a “relação de cair sob” pode ocorrer tanto entre nomes próprios e termos conceituais quanto entre termos conceituais de ordem distintas. No trecho da seção § 53 (Frege, 1989, p. 132), Frege diz:

Pode-se, pois, fazer um conceito cair sob outro conceito superior ou, por assim dizer, sob um conceito de segunda ordem. Não se deve, porém, confundir essa relação com a de subordinação.

Com base na leitura desse trecho, podemos afirmar que Frege emprega a distinção entre “propriedades de ordem distintas”, considerando fundamentalmente a “relação de subsunção”,

em detrimento da “relação de subordinação”, pois essa última ocorre somente entre conceitos de mesma ordem. Portanto, seria válido afirmar que podemos avaliar a definição fregeana dos números cardinais (*Anzahl*) como predicacões que enunciam propriedades de ordem superior, se empregamos a metodologia de análise lógica para vislumbrar as articulações lógicas presentes nas proposições fundamentais da aritmética, as asserções sobre contagem empregadas no discurso aritmético cotidiano. Como Frege sugeriu na seção § 46, as asserções sobre contagem no discurso aritmético comum são aquelas que dizem respeito a objetos via um “conceito”, que, por sua vez, tem a função semântica de indicar o que deverá ser contado.

Tal interpretação dos números cardinais (*Anzahl*) é importante para Frege, porque permite ao conceito a função semântica de indicar o que deverá ser contado em asserções sobre contagem, individualizando os objetos que deverão ser contados. Portanto, seria incorreto dizer que os termos numéricos são atribuídos aos objetos empíricos como as cores, sua atribuição não é realizada de modo direto, como são as cores, mas é mediada por um conceito que seleciona o que deve ser contado.

A partir dessa explicação, Frege pode explicar o aspecto universal das predicacões numéricas, pois, conforme o lógico alemão, aos conceitos tudo pode ser abarcado, tanto os corpos físicos quanto as ideias que podem deles serem abstraídas; até mesmo os próprios conceitos podem ser quantificados segundo essa concepção de número, eis a razão da universalidade das proposições aritméticas.

Explica-se também a vasta aplicabilidade do número. É de fato enigmático como algo poderia ser enunciado ao mesmo tempo de fenômenos [físicos e mentais] exteriores e interiores, do espacial e temporal e do não espacial e não temporal. Ora, também no que concerne à indicação numérica isto absolutamente não ocorre. Apenas aos conceitos, sob os quais são subsumidos o exterior e o interior, o espacial e o temporal, o não espacial e não temporal, atribui-se números (Frege, 1989, p. 130, § 48).

A definição dos números cardinais (*Anzahl*) como contendo um enunciado sobre um “conceito” é produto da análise semântica do comportamento das predicacões numéricas, portanto, uma análise essencialmente realizada no plano linguístico. Como já mencionamos, tal estratégia de análise constitui o “embrião” do que conhecemos atualmente como a teoria dos tipos. Embora ainda seja uma teoria simples dos tipos, a partir dela Frege distingue cuidadosamente predicacões que expressam, linguisticamente, relações e propriedades de primeira ordem, atribuídas a “objetos”, e predicacões de segunda ordem, que expressam, a nível linguístico, relações e propriedades de segunda ordem, i.e., propriedades de um “conceito”.

Frege demonstrou que as maneiras do ponto de vista do matemático formalista e do matemático empirista de compreender a contagem apresentam lacunas e sua crítica consiste em rejeitar as tentativas de suprimir essas lacunas, fazendo um apelo à percepção empírica ou à representação psicológica, para demonstrar as asserções de contagem na sua aplicação. Por isso, o autor (1989, p. 128, § 46) recomenda que se examinem os números cardinais onde se evidencia a espécie original de sua aplicação no contexto do juízo aritmético do discurso comum. Diferentemente da maneira que o formalista e o empirista justificam as asserções relativas à contagem, Frege apela ao plano linguístico para argumentar que a ocorrência numérica exprime uma propriedade sob um conceito. Isto é, exprime a propriedade de que o “conceito” em questão possui determinada extensão ou que a esse conceito nada se é subsumido.

A solução que Frege propõe na seção § 46 esclarece todas as dificuldades que permanecem em aberto na crítica, no que diz respeito às seções §§ 22-25 e §§ 29-39. São elas: a explicação da múltipla atribuição numérica ao mesmo “agregado” de corpos físicos; a explicação do conceito de “unidade” e, por conseguinte, também o problema da indistinguibilidade das “unidades”; por fim, a explicação do número “zero” e do número “um” como também capazes de quantificar quantidades. A seguir, sistematizamos cada uma dessas dificuldades e esclarecemos como a solução de Frege se aplica a cada uma delas.

2.3.2 Solução para a múltipla atribuição numérica aos “agregados” de corpos físicos

Como discutimos nas seções 1.4 a 1.7 do primeiro capítulo, Frege apresentou argumentos convincentes para rejeitar a noção de que os números são atribuídos diretamente a uma “multiplicidade de corpos físicos”. Vimos, também, que o Frege cita o filósofo britânico Stuart Mill como um proponente desse tipo de interpretação e, na seção 1.4, circunscrevemos o argumento de Mill, para quem os “números” são nomes de propriedades, que expressam como um “agregado” é composto de suas partes. Na seção 1.6, explicamos que, para Frege, a grande dificuldade com a interpretação empírica dos números é que sem um conceito completamente determinado não sabemos o que deve ser considerado como “objeto” da contagem, pois podemos fazer várias atribuições à mesma porção material, ocupada pelas partes do “agregado”, segmentando-as de diversas maneiras, e não somente de uma única maneira, como Mill sustenta.

Frege demonstra ao seu interlocutor que podemos fazer várias predicções numéricas para uma mesma porção material. Então, dada essa circunstância, podemos concluir que os termos numéricos não preservam a identidade (ou igualdade) entre as partes (“corpos físicos”) que compõem o “agregado físico”. Como discutimos na seção 2.3.1, a solução do Frege para superar as dificuldades com a noção empírica de “número” foi afirmar que as predicções numéricas possuem características distintas daquelas feitas a “substantivos”, pois predicções numéricas enunciam, na linguagem ordinária, propriedades atribuídas a um “conceito” (de segunda ordem), e não a um “substantivo” que pode ser aplicado a múltiplos objetos. A estratégia do Frege nesse momento da crítica [§§22-25] consiste em empregar o argumento da arbitrariedade das predicções numéricas, comparando contextos sentenciais de predicções de primeira ordem com contextos sentenciais de predicções de segunda ordem, enfatizando que a explicação empírica dos números proposta por Mill é logicamente inaplicável.

Como discutimos na seção 2.1, Frege (1989, p. 117, § 21) identificou que os números surgem na linguagem ordinária em forma adjetiva ou em construção atributiva, mas tomando-os em contextos sentenciais, quando tentamos atribuir números diretamente a substantivos comuns, eles não parecem desempenhar esse papel corretamente. Como resultado dessa predicção, obtemos frases que parecem não serem nem falsas, nem verdadeiras, mas sem sentido. Frege então tenta corrigir essa dificuldade, mostrando ao seu interlocutor que o sentido das atribuições de primeira ordem é distinto das atribuições de segunda ordem, questionando o interlocutor da seguinte maneira: “Não falamos em um sentido completamente diferente de ‘mil folhas de uma árvore’ e de ‘folhas verdes de uma árvore’?” (Frege, 1989, p. 110, § 22), e argumenta “podemos compreender todas as folhas de uma árvore sob o nome de ‘ramagem’, esta ramagem será ‘verde’, mas não será ‘mil’” (Frege, 1989, p. 110, § 22).

Frege demonstra, por meio de comparações entre contextos sentenciais, a distinção entre um contexto sentencial que expressa a relação, a nível linguístico, entre “nome próprio” e “termos conceituais” e um contexto sentencial que expressa a relação, a nível linguístico, entre “termos conceituais”. Então a questão lançada por Frege ao seu interlocutor, mencionada no parágrafo anterior, sugere que se consideramos substituir o “agregado de folhas” pelo nome próprio “a ramagem”, obtendo um nome de um “corpo físico” do qual podemos predicar a expressão “é verde”, podemos formar a sentença “a ramagem da árvore é verde”. Sem embargo, Frege aponta que não podemos atribuir, com sentido, “número” ao nome próprio “a ramagem”, formando a sentença “a ramagem da árvore é 1000”, porque produziríamos uma sentença incompleta.

Como Velloso sugere na sua interpretação desse argumento, no artigo “Os números como substância matemática em Frege” (2023), o argumento da arbitrariedade numérica de Frege [§§ 22-25] envolve pensar a necessidade de um “conceito” para viabilizar a predicação numérica, aquilo que a autora chama de “conceito pivô”:

[...] o que chamamos de “conceito pivô” tem uma natureza estritamente semântica. Sua função é fornecer critérios para que possamos obter a lista de objetos que possam ser contados em uma certa situação. Se o conceito pivô for “cartas em cima da mesa”, segundo outro exemplo de Frege (1980, §22), vamos provavelmente contar 52 (cinquenta e duas cartas). Mas se escolhermos o conceito “baralhos em cima da mesa”, contaremos apenas 1 (um baralho). É muito importante também notar aqui que esse papel que Frege atribui aos conceitos, o de ser um critério de escolha para os objetos a serem contados, depende de que os conceitos usados estejam completamente determinados. Segundo Frege, para que um conceito empírico seja completamente determinado, devemos incluir termos que indiquem o tempo e o lugar no qual esses objetos seriam encontrados (Velloso, 2023, p. 539).

Como Velloso sugere nessa passagem, a predicação numérica é viabilizada por um conceito de primeira ordem, que a autora chama de “conceito pivô”, no sentido de explicar que ele fornece um critério, para saber o que deve ser considerado como objeto de contagem. Então, voltando ao nosso exemplo, ao tentarmos predicar “números” diretamente a “nomes próprios” produzimos sentenças incompletas, por exemplo, se tentássemos atribuir o número “1000” ao nome próprio “a ramagem”, formando o enunciado “A ramagem é 1000”, podemos afirmar, parafraseando Velloso (2023), que a predicação está incompleta, porque o “conceito pivô”, que indica o que deve ser considerado como objeto de contagem está ausente no enunciado. Mesmo que tentássemos atribuir “números” para contar “corpos físicos”, com o auxílio de um pronome demonstrativo em um gesto ostensivo, como apontar para alguma região espaço-temporalmente dispersa no mundo e referindo-se a ela pelo pronome demonstrativo, produzindo o seguinte enunciando “essa árvore é uma”, o sujeito da atribuição – “essa árvore” – não consegue desempenhar simultaneamente o papel de identificador do sujeito da atribuição e de viabilizador da atribuição numérica. Nesse enunciado, ainda estaria ausente o “conceito pivô” da atribuição numérica.

Frege adianta que poder-se-ia até contra-argumentar que alguns “objetos” não possuem propriedades completamente determinadas, pois as propriedades de alguns “objetos” poderiam variar “espaço-temporalmente”. Frege contesta esse contra-argumento (1989, p. 129, § 46), afirmando que alguns “conceitos” poderiam possuir elementos variáveis, por exemplo, o conceito “habitante do império alemão” teria uma propriedade variável de ano para ano se a

indicação numérica enunciasse uma propriedade desse “conceito”. Mas isso não impediria de reconhecer os “objetos” em questão como os mesmos, se fornecêssemos precisamente os termos que indicassem a sua localização espaço-temporal. O conceito “habitante do império alemão”, por exemplo, possui o tempo como elemento variável, portanto, o conceito seria uma função do tempo. Por outro lado, poderíamos determinar completamente esse “conceito” se enunciássemos todos os termos que fornecem precisamente a localização temporal dos “objetos” que caem sob o “conceito” em questão, por exemplo, o conceito “habitante do império alemão no ano novo de 1883, hora de Berlim”, possui o mesmo número pela eternidade.

Então, retomando a discussão do penúltimo parágrafo, vimos que o pronome demonstrativo “isso”, acompanhado de um gesto ostensivo, pode até ser empregado para referir-se a uma porção material dispersa no mundo, mas não pode fornecer o critério para sabermos quais “corpos físicos”, que ocupam essa porção material referida, devem ser considerados objetos de contagem. Nesse contexto, se adotássemos o argumento de Mill sobre “números”, não saberíamos a quais partes do “agregado” físico deveríamos nos referir na contagem. Isso porque, tendo indicado uma porção material com o gesto ostensivo e o auxílio do pronome demonstrativo, enunciando, por exemplo, “esta árvore é uma”, esperaríamos que a expressão que ocupa o lugar de sujeito da predicação “numérica” fosse a localização espaço-temporal de um “objeto” que caísse sob o conceito “ser árvore”. No entanto, conforme substituíssemos esse “conceito” por outro no enunciado, poderíamos fazer várias atribuições à mesma porção material, sem que ela própria jamais se modificasse, o que estaria sendo modificado seria unicamente a maneira de denominar a porção material em questão. Por exemplo, poder-se-ia enunciar a mesma porção material “este grupo de árvores” ou “isto são cinco árvores”, o que variaria não seria nem o “objeto singular”, nem a sua “totalidade”, mas a nossa maneira de denominá-los (Frege, 1989, p. 128, § 46).

Assim, ainda que nas expressões, por exemplo, “mil folhas de árvore” e “folhas de árvores verdes”, a palavra “mil” e a palavra “verde” ocorram, gramaticalmente falando, sob a mesma forma, adjetivamente, em contextos sentenciais completos observamos que o comportamento predicativo dos termos numéricos e dos termos conceituais apresentam características distintas na linguagem ordinária, pois, segundo Frege, termos que valem como propriedade de primeira ordem, por exemplo, a classe de termos para cores, expressam propriedades atribuídas diretamente a “nomes próprios” de objetos, enquanto termos numéricos, nas asserções de contagem, expressam propriedades predicadas de conceitos. Como

o Frege apresentou na seção § 46, a predicação numérica na linguagem ordinária enuncia algo de um “conceito”, e não de um “objeto”.

O argumento da arbitrariedade empregado na crítica à interpretação empírica dos “números naturais”, mencionado nos parágrafos anteriores desta seção, estabelece que devemos rejeitar uma explicação dos “números” fundamentada em relações de parte e todo de corpos físicos, porque nenhum corpo físico pode ser considerado uma “unidade indivisível”. Nesse sentido, a arbitrariedade com a qual podemos fazer múltiplas atribuições numéricas a uma mesma porção material é possível porque podemos selecionar, via um “conceito”, quais distintas “multiplicidades de corpos físicos” que compartilham a mesma porção material devemos considerar como “objeto” de contagem.

Então, quando Mill estabelece que o nome do “número” designa uma propriedade que pertence a um “agregado” físico e exprime *a maneira característica* pela qual o “agregado” é composto (Frege, 1989, p. 111, § 23), Frege contra-argumenta que, na verdade, é possível segmentar esse “agregado” físico de várias maneiras. Isto é, ao argumentar que a atribuição numérica é mediada por um “conceito” completamente determinado, ele rejeita que haja somente uma única maneira, como defende Mill. Isto é, segundo Frege (1989, p. 111, § 23), o artigo definido “a” na expressão “a maneira característica pela qual o agregado é composto de partes”, empregado no argumento de Mill, compromete o filósofo britânico com a ideia de que a predicação numérica indica somente uma única maneira de segmentar o “agregado”. Como Frege contra-argumenta, podemos segmentar o “agregado” físico conforme se queira individualizar os “corpos físicos” que o compõem, via a denominação de um “conceito”. Podemos dizer (Frege, 1989, p. 128, § 46), por exemplo, “isso é um grupo de árvores” e “isso são 5 árvores”, o que varia não são as partes do “objeto singular”, e nem o todo, mas a maneira de denominar os conceitos “grupo de árvores” e “árvores”.

Desse modo, adotando a solução de Frege [§ 46] de que os números cardinais (*Anzahl*) enunciam uma propriedade de um “conceito”, podemos solucionar a dificuldade gerada pelo aspecto arbitrário da atribuição numérica empregada para contar “corpos físicos” diretamente. O conceito de primeira ordem indica quais “corpos físicos” devem ser considerados como “objeto” de contagem, sem o qual não estaria completamente determinado o que contar. Essa solução nos permite explicar que um conceito seria indivisível, mas um objeto concreto pode ser dividido das mais diversas maneiras, produzindo os mais diferentes números de partes. Nesse sentido, vimos que o Frege apresentou argumentos convincentes para demonstrar que a atribuição numérica diretamente a uma “multiplicidade de corpos físicos”, não permite fixar a

referência daquilo que deve ser considerado “objeto” da contagem ou, no caso da proposta de Mill, não permite fixar a identidade das partes do agregado.

2.3.3 O conceito de “unidade”

A seguir, retomamos as dificuldades que Frege identifica na interpretação formalista dos números cardinais [§§ 29-44], para, em seguida, compará-las à solução do Frege. Para concretizar esta etapa, resumimos o dilema enfrentado pela noção de “número” como uma “multiplicidade de unidades”, a dizer, o problema da indistinguibilidade das “unidades”: a) “como considerar cada ‘objeto’ como uma coisa enumerada [“unidade”] ou um exemplo do número ‘um’, se cada coisa é diferente da outra?”, sistematizando-o à luz do princípio da indiscernibilidade, de Leibniz. Por fim, circunscrevemos a solução que Frege apresenta para resolvê-lo, nas seções § 53 e § 54 da *Die Grundlagen der Arithmetik*.

Duas distinções são importantes para compreendermos a solução dessa dificuldade: a) a distinção das categorias semânticas das palavras “unidade” e “um”; b) e a distinção entre níveis de predicação. A partir da primeira distinção, Frege esclarece que certos predicados podem ser situados em níveis distintos de predicação. Nesse sentido, articulamos essas duas distinções, entre níveis de predicação e entre as palavras “unidade” e “um”, para resolver o dilema enfrentado pelos matemáticos formalistas Schröder, Thomae, Hesse e Jevons.

a) Resumo da dificuldade

Como já mencionamos anteriormente, a noção de “número” como uma “multiplicidade de unidades” é derivada da ideia de que contamos uma “multiplicidade de corpos físicos”, porque as “unidades” são, segundo o matemático formalista, abstraídas de corpos físicos. Aquele que é partidário da noção de os “números” serem propriedade atribuídas a uma “multiplicidade de unidades”, chama corpos físicos, considerados objeto de contagem, de “unidade”, pressupondo ocorrências de *tokens* numéricos, com o objetivo de registrar um “corpo físico” como objeto de enumeração.

Para o matemático formalista, o conceito de “unidade” é abstraído diretamente de “corpos físicos”. Segundo Frege, esse emprego da palavra “unidade” como um “nome genérico” aplicável a todo “objeto” sujeito a ser enumerado, despojando o “objeto” em questão de todas as suas propriedades distinguidoras. Como o Frege bem argumenta, o apelo ao método

de abstração empírica não pode ser tomado como uma explicação para a formação do conceito de “unidade” no lugar de uma definição correta. Se o conceito de “unidade” for compreendido como “objeto a enumerar”, os números cardinais (*Anzahl*) não podem ser definidos como “unidades”.

Como já discutimos, o contra-argumento dele contra essa noção dos “números naturais” consiste em identificar uma eminente dificuldade no processo de contagem, se a palavra “unidade” for empregada no sentido de “identidade”, abstraindo todas as propriedades distinguidoras dos objetos enumerados e atribuindo-lhes o mesmo *token* “1” para registrar a ocorrência desse fato empírico, não conseguimos ultrapassar o número “1” no processo de contagem. Isso porque colapsamos todos os casos de “unidade” em um único caso. Por outro lado, se adicionamos índices [] aos *tokens* numéricos para preservar a diversidade numérica, tornamos os sinais numéricos inutilizáveis para a aritmética. Segundo o lógico alemão, produzimos diversos números “uns”, “dois”, “três” etc. Como já exemplificamos, teríamos uma “multiplicidade” de sinais para representar um mesmo “número”.

Esse dilema metodológico é enfrentado pelo matemático formalista, porque ele apaga toda e qualquer distinção de que haveria entre “um” e muitos [ou uma “multiplicidade”], atribuindo o número “um” (“1”) como uma propriedade dos “objetos” e, ao mesmo tempo, como sinônimo da palavra “unidade”. Segundo Frege, essa ambiguidade é indicada pela falsidade dos argumentos, i.e., o método de abstrair as propriedades distinguidoras, empregando “unidade” no sentido de “identidade” e o método de abstrair o caráter da diferença, atribuindo sinais distintos, para garantir a diversidade numérica, são ambos falsos.

Discutimos, nas seções 1.1 e 1.2, que “unidade” não pode ser empregada no sentido de “identidade”, de modo a dizer que “ x e y são um” seja o mesmo que dizer que “ x é igual a y ”. Frege questionou esse sentido do emprego da palavra “unidade”, perguntando ao seu interlocutor se “a igualdade é apenas conferida a eles ou eles são realmente iguais?” (Frege, 1989, p. 120, § 34). Questionou, também, o emprego da palavra “unidade” no sentido de “diferença”. Nesse sentido, o emprego da palavra “unidade”, no plural “unidades”, é obtido via abstração das propriedades distinguidoras dos “objetos”, retendo unicamente a “existência” das suas diferenças – àquilo que St. Jevons chamou de “a forma vazia da diferença”. Atribuimos distintos “índices numéricos” aos *tokens* numéricos.

b) “Unidade” no sentido de “identidade”

Seguindo a sugestão de Porto (2023, p. 500) de que a noção de “objeto” fregiana é compatível com o princípio da identidade dos indiscerníveis de Leibniz, uma noção de “identidade” mais compatível com a solução fregiana, podemos afirmar que Frege (1989, p. 117, § 29) emprega esse princípio para avaliar o raciocínio do matemático formalista, na sua crítica ao argumento de que o numeral “1” (ou “um”) exprimiria uma propriedade de um “corpo físico”, considerado como objeto de contagem.

Então, ao analisarmos o raciocínio do matemático formalista empregando o princípio da identidade dos indiscerníveis, de Leibniz, como indicado por Porto (2023), se os “corpos enumerados” compartilham todas e as mesmas propriedades, a dizer, a propriedade de “ser um”, então não temos mais “unidades” diversas e discerníveis, mas um único caso de unidade. Se todos os “objetos” compartilham a mesma propriedade “ser um”, não poderíamos mais discriminar uma “unidade” da outra e, conseqüentemente, nunca ultrapassaríamos o número “um” no processo de contagem. Portanto, Frege conclui que a atribuição de “identidade” às “unidades” é equivocada.

$$\forall xy (x = y \rightarrow \forall P (P(x) \leftrightarrow P(y))) \quad (4)$$

Acima, em “4”, o princípio da indiscernibilidade dos idênticos de Leibniz, formulado em notação moderna, estabelece que x e y são “idênticos”, se toda propriedade atribuída a x for também atribuída a y . É nesse sentido que afirmamos que não poderíamos mais pensar as “unidades” como diversas e discerníveis, pois perdemos a discernibilidade necessária para ultrapassarmos o “um”. Recorrendo, então, a esse princípio, Frege estaria correto em argumentar contra o matemático formalista, afirmando que a atribuição de igualdade às “unidades” é falsa. Isso conseqüentemente faz com que Frege rejeite o argumento de que o numeral “1” exprima uma propriedade de “corpos físicos” – uma propriedade de primeira ordem.

Ao atribuir igualdade às “unidades”, o matemático formalista incorporou uma noção de identidade unívoca e absoluta. “Unívoca”, porque considerou o conceito “ser um” como um predicado dito de muitos em sentido de “identidade”; “absoluta”, porque considerou o “numeral” do ponto de vista da uniformidade entre os sinais atribuídos e aglutinados na expressão. Essa noção de “identidade” seria incompatível com o poder coletante do “conceito”, ao qual se pode subsumir uma diversidade de “corpos físicos” e enumerá-los (Frege, 1989, p. 130, § 48). Como já mencionado, o “conceito” tem a função de fornecer critérios para sabermos

o que deve ser considerado como objeto da contagem. Somente nesse sentido se poderia dizer que, embora diversos, os objetos subsumidos a um “conceito” são idênticos relativamente a esse “conceito” e então poderíamos enumerá-los. Mas seria falso dizer que quando considerados “objetos de contagem” [“unidades”] esses “objetos” são iguais.

c) “Unidade” no sentido de “diferença”

Mesmo que inversamente se deseje definir a palavra “unidades” como a “forma vazia da diferença” (Frege, 1989, p. 126, § 44), empregando a palavra “unidades” no sentido de “discernibilidade”, a atribuição de marcações ao *tokens* “1” não pode garantir a “discernibilidade”, sob pena de inviabilizar a contagem, pois produziríamos uma multiplicidade de números “uns”, “dois”, “três” etc.

Se os *tokens* numéricos registram a ocorrência de eventos idênticos, exceto pela justaposição em que ocorrem os traços, podemos analisar esse raciocínio seguindo a sugestão de Porto (2023, p. 500), formulando a contra positiva do “princípio da identidade dos indiscerníveis”, com o auxílio da regra de inferência *Modus Tollens*. Como sugere Porto em seu artigo (2023), diante de eventos semelhantes, qualquer propriedade distinguidora é imediatamente transferida para o plano ontológico. Então, formulando o “princípio da identidade dos indiscerníveis” em *Modus Tollens*, como sugerido por Porto (2023, p. 513):

$$\forall xy (\neg \forall P (P(x) \leftrightarrow P(y)) \rightarrow (x \neq y)) \quad (5)$$

Tomamos o antecedente da contra positiva em “5” e, internalizando a negação, produzimos a seguinte formulação:

$$\exists P (P(x) \wedge \neg P(y)) \quad (6)$$

Ao instanciarmos o existencial da “6” com parâmetros “a” e “b” e substituímo-los na formulação completa, obtemos:

$$\exists P (P(a) \wedge \neg P(b)) \rightarrow x \neq y \quad (7)$$

Formulado dessa maneira, “7”, como havíamos mencionado no parágrafo anterior, o princípio estabeleceria que qualquer propriedade distinguidora será imediatamente transferida para o plano ontológico, obrigando-nos a distinguir os “objetos” que aquela propriedade logrou segregar. Segundo Porto (2023, p. 513):

Formulado dessa maneira, o que o “Princípio da identidade dos indiscerníveis” de Leibniz parece nos dizer é que, se porventura houver pelo menos uma propriedade P que distinga o objeto a (*i.e.*, o objeto nomeado pelo nome “ a ”), de um objeto b (*i.e.*, o objeto nomeado pelo nome “ b ”) – ou seja, se houver uma propriedade P tal que $P(a)$ e $P(b)$ — então não haverá como escaparmos a conclusão: o objeto nomeado pelo nome “ a ” jamais poderia ser o mesmo objeto nomeado pelo nome “ b ”. Isto é, o objeto a jamais poderia ser idêntico ao objeto b : $a \neq b$.

Propomos avaliar a crítica de Frege da proposta de St. Jevons a partir da formulação contra-positiva do “princípio da identidade dos indiscerníveis”, pois afirmamos que ela é compatível com a crítica que Frege faz a Jevons, presente nas seções § 36-39 da *Die Grundlagen der Arithmetik*. Então, St. Jevons acreditou que qualquer meio de diferenciação – como os índices – poderia ser uma fonte de pluralidade (Frege, 1989, § 40, p. 125) eficiente para registrar as “unidades” como plurais e diversas. Contudo, Frege (1989, p. 128, § 44) argumentou que, certamente, os índices atribuídos aos numerais indicam alguma diferença, mas não a natureza da diferença. Não podemos reunir “corpos” distintos e abstrair a natureza da sua diferença sem, porém, indicar qual é a natureza da diferença. Por essa razão, a natureza da discriminação das “unidades” não pode ser fundamentada em designações distintas, como argumenta Jevons. Logo, “a indicação do modo de abstração não é uma definição” (Frege, 1989, p. 127, § 44).

Então, como argumentamos na seção 1.3, Frege concluiu que a simples existência da diferença já bastaria para produzir, na concepção de Jevons, diferentes números “uns”, “dois”, “três” etc., tornando a notação completamente inutilizável para a aritmética. Consequentemente, a atribuição da “unidade”, no sentido da diferença às “unidades”, também é falsa, pois, o elemento comum, necessário para a contagem, está ausente. A indicação da semelhança entre os sinais “1” não serve de nada, porque os índices suprimem a igualdade (Frege, 1989, p. 122, § 38). Visto que distintas designações são empregadas, nunca se poderia mais designar a mesma coisa pela segunda vez.

Para Frege (1989, p. 121, § 36), se as coisas são distintas então certamente se exige que sejam designadas distintamente. Mas esse não é o caso do número “um”, porque, segundo o

lógico, não há diferentes números “uns”. Como Frege contra-argumentou (1989, p. 123, § 38), a alternativa que o matemático formalista propôs para reconciliar a “igualdade” e a “distinguíbilidade” das “unidades”, atribuindo índices discriminantes “” ao numeral “1”, não resolve a dificuldade, porque o problema não diz respeito à notação empregada, mas sim à carência de uma definição lógica dos números cardinais (*Anzahl*).

d) Solução da dificuldade: “como considerar cada objeto como uma ‘coisa’ ou um exemplo do número “um”, se cada objeto é diferente do outro?”

Como já discutimos na seção 2.3.1, para solucionar essas dificuldades, Frege argumenta que os números cardinais (*Anzahl*) enunciam algo sobre um “conceito”. Ele recorre a recursos linguísticos para distinguir as categorias semânticas das palavras “unidade” e “um”, empregadas pelo matemático formalista indistintamente, surgindo daí a aparência de que o número “um” é uma propriedade de objetos. Para afastar essa ambiguidade e solucionar a questão de saber “como considerar cada objeto como uma ‘coisa’ ou um exemplo do número ‘um’, se cada objeto é diferente do outro?”, o lógico alemão sugere que consideremos como “unidade”, com respeito aos números cardinais (*Anzahl*), o “conceito” que delimita determinadamente o que cai sob ele e não admite divisão arbitrária.

Nas seções § 38 e § 53, há trechos em que Frege apela às noções sintáticas da linguagem, para identificar as categorias semânticas dos “termos conceituais” e dos “nomes próprios” no discurso aritmético comum, e a relação de “subsunção” que o lógico chama por cair “sob”. Na seção § 38, Frege identifica a categoria semântica da palavra “um” como um “nome próprio”, fazendo recurso ao plano linguístico, e explica que devemos compreender “unidade” como um conceito que apanha sob si um “objeto” singularmente. Frege afirma o seguinte:

Diz-se “o número um”, e com o artigo definido indica-se um objeto definido e singular da investigação científica. Não há diferentes números um, mas apenas um. 1 é um nome próprio que não admite plural. [...] Não é por acaso, nem por imprecisão terminológica que se escreve 1 sem traços distintivos. [...] Só é possível o plural de termos conceituais. Se falamos, pois de “unidades” não podemos empregar esta palavra com o mesmo significado do nome próprio “um”, e sim como termo conceitual. Se “unidade” significa “objeto enumerar” não se pode definir o número como unidades. Entendendo-se por “unidade” um conceito que apanha sob si o um e apenas ele, o plural não tem sentido (Frege, 1989, p. 123, § 38).

Na seção § 51, Frege não trata especificamente das categorias semânticas das palavras “unidade” e “um”, mas reafirma a necessidade de distinguir entre as categorias semânticas de “termo conceitual” e “nome próprio”, identificando os aspectos dos termos que pertencem a cada uma dessas categorias. Entre os aspectos linguísticos, outro aspecto que nos ajudaria a identificar as categorias semânticas de “termo conceitual” e “nome próprio”, segundo o Frege, é a relação de subsunção, que ele chama de “cair sob”.

Em primeiro lugar, não convém chamar um termo conceitual geral de nome de uma coisa. Surge daí a aparência de ser um número propriedade de uma coisa. Um termo conceitual geral designa precisamente um conceito. Apenas com um artigo definido ou nome próprio de uma coisa, mas deixando assim de valer como termo conceitual. O nome de uma coisa é um nome próprio. Um objeto não aparece repetidamente, mas vários objetos caem sob um conceito. Que um conceito não é obtido somente por abstração a partir das coisas que caem sob, já fez notar Espinosa. [...] Quanto a um conceito, a questão é sempre a de saber se algo cai sob ele, e o quê. [...] Não nos devemos deixar enganar pelo fato da linguagem usar nomes próprios, por exemplo Lua, como termos conceituais, e vice-versa; apesar disto a diferença subsiste. Desde que uma palavra seja usada com artigo indefinido, ou no plural sem artigo, ela é termo conceitual (Frege, 1989, § 51, p. 131).

A partir da leitura dessas passagens, podemos afirmar que, para Frege, a distinção entre “um” e “múltiplos” pode ser mantida sob a observância da flexão numérica gramatical das palavras no discurso. Quando a palavra vem acompanhada de artigo definido [“o/a”] e no singular indica-se um objeto, se palavra vem acompanhada de artigo indefinido [“um/uma”] e/ou no plural, indica-se que ela designa um “conceito”.

Então, retomando o emprego da palavra “unidade”, Frege argumenta que aquele que emprega “unidades” no plural poderia até estar correto se não fosse pelo fato de que o conceito “unidade” somente apanha sob si um único objeto, a dizer, o número “um”. Mas, se entendermos a palavra “unidade” como um conceito sob o qual só cai um único “número”, o número “um” e a nada mais, então não faz sentido usá-la no plural. Nesse sentido, além dos aspectos linguísticos aos quais Frege recorre em ambos os trechos, o principal aspecto para se distinguir as categorias semânticas de “termos conceituais” e “nomes próprios” é a partir da relação de “subsunção”, que Frege chama de “cair sob”.

Dito isso, como essa distinção resolve o problema de reconciliar a “identidade” e “distinguidade”, i.e., “como considerar cada objeto como um exemplo do número “um” se cada objeto é diferente do outro?”¹⁹ A solução de Frege para esse problema articulará sua

¹⁹ VELLOSO, A. Tópicos de lógica. Goiânia: Universidade Federal de Goiás.,2º Semestre de 2022. Notas de

proposta dos números como contendo um enunciado sob um conceito [§ 46], conjuntamente aos aspectos linguísticos pelos quais identificamos “unidade” como um “termo conceitual”, sob o qual cai somente um único “objeto”, “o número um”.

Na passagem a seguir, extraída da seção § 54, podemos ver como Frege sugere lidar com essa última dificuldade:

Apenas pode ser unidade com referência a um número finito um conceito que delimite de modo determinado o que cai sob ele e não admita divisão arbitrária. Vê-se, porém, que indivisibilidade tem aqui um significado particular. Responde-se agora facilmente a questão de saber como é possível reconciliar a igualdade com a distinguibilidade das unidades. A palavra “unidade” é usada aqui em duplo sentido. As unidades são iguais se a palavra é tomada no significado acima definido. Na proposição “Júpiter tem quatro luas”, a unidade é “lua de Júpiter”. Sob este conceito caem tanto I, como II, III e IV. Pode-se, pois, dizer: a unidade a que I é referida é igual à unidade a que II é referida, etc. Temos aí a igualdade. Quando é, porém, afirmada a distinguibilidade das unidades, entende-se por unidades as coisas enumeradas (Frege, 1989, p. 132-133, § 54).

Como podemos notar nessa passagem, Frege sugere que a palavra “unidade” só possa ser explicada com referência a um “conceito” sob o qual cai somente um único “objeto”. Nesse sentido, sugere que, segundo sua solução, que é o “conceito” que nos dá o critério do que deve ser considerado como uma unidade. Desse modo, os dois sentidos pelos quais se está empregando a palavra “unidade” são reconciliados, “unidade” com respeito ao “conceito”, garante a indivisibilidade e a seleção delimitada daquilo que cai sob ele, delimitando assim, precisamente, o que deve ser considerado “objeto” de contagem. Assim, viabiliza-se, afirmamos que “objetos” que caem sob ele são discerníveis, portanto, irrepetíveis, permitindo-os ultrapassar o número “um”, sem, contudo, colapsar os casos de “unidade”.

Por ser falsa a afirmação tanto da “identidade” quando da “diferença” das “unidades”, Frege identifica como responsável o emprego ambíguo dos termos “um” e “unidade”, apresentando o problema da indistinguibilidade das “unidades” no processo de contagem. Para Frege, esse emprego ambíguo leva à ilusão de que os “números” são propriedade de “objetos”, e não de “conceitos”, como ele defende.

A solução de Frege, como podemos ler no trecho transcrito anteriormente, consiste em chamar de “unidade” o conceito com referência ao número que lhe convém. Nesse sentido, ficamos autorizados a dizer “unidade” a qual o “número” é referido é igual à “unidade” a qual

o outro número é referido, i.e., são idênticas e simultaneamente mantemos cada caso de “unidade” como discernível do outro caso.

Seguindo a ideia de que os números contêm um enunciado sob um “conceito”, podemos exemplificar o raciocínio, empregado nos três últimos parágrafos, da seguinte maneira: podemos designar por “unidade” o conceito “lua de Júpiter”. Supondo que sob esse “conceito” caem quatro “objetos”, “Io”, “Calisto”, “Europa” e “Ganímedes”, podemos afirmar que a “unidade” sob a qual cai “Io” é igual à unidade sob a qual cai “Calisto”, que é igual à unidade sob a qual cai “Europa”, que é igual à unidade sob a qual cai “Ganímedes”. Tendo delimitado precisamente cada “objeto”, segundo o “conceito” ao qual cada um cai sob, podemos afirmar que são discerníveis.

2.4 Definições do número “zero” e do número “um”

Nas seções anteriores, sistematizamos as dificuldades que Frege identificou haver no raciocínio dos partidários de ambas as noções de “multiplicidade”, com as respectivas soluções sugeridas pelo lógico alemão. Foram elas: a) a múltipla atribuição numérica à mesma “multiplicidade de corpos físicos” (§§ 22-25); b) “unidade” no sentido de “identidade” (§§ 34-35); d) “unidade” no sentido de “diferença” (§ 36-39); e) como considerar cada objeto como uma “coisa” ou um exemplo do número “um”, se cada objeto é diferente do outro?

Como já discutimos na seção 1.7, além de ambas as noções de “multiplicidades” admitirem os “corpos empíricos” como os portadores dos termos numéricos, ao invés do conceito ou da sua extensão, produzindo as dificuldades já mencionadas, esse erro impossibilitou a compreensão do número “zero” e do “um” como números capazes de quantificar quantidades aritméticas.

Para a noção de “número” como uma propriedade atribuída a uma “multiplicidade de corpos físicos”, as asserções de contagem que envolvessem o número “zero” não teriam sentido, porque não seria possível encontrar, no espaço e no tempo, um fato físico sob o qual o número “zero” pudesse asserir (cf. Frege, 1989, p. 99, § 8). O número “um” tampouco poderia exprimir como um “agregado” é composto de partes. Posto que a ideia do “agregado” está fundamentada numa relação de parte-todo, que pressupõem uma realidade segmentada em multiplicidade de partes.

Para a noção de “número” como uma propriedade atribuída a uma “multiplicidade de unidades”, o número “um” não está sendo definido corretamente em nenhum sentido pelo qual

a palavra “unidade” é empregada – como pode ser identificado na análise crítica de Frege, com a impossibilidade de prosseguir com o processo de contagem. Para Frege, não haveria nenhum “objeto” a partir do qual o número “zero” pudesse ser abstraído. Logo, incapaz de quantificar quantidades.

A seguir, apresentamos a definição lógica dos números cardinais (*Anzahl*) “zero” e “um”, proposta por Frege na seção § 55 da *Die Grundlagen der Arithmetik* e, posteriormente, avaliamos essa proposta com o auxílio da notação do cálculo Lambda, de Alonzo Church.

Antes de prosseguirmos, é importante destacar que Frege não se mostra a favor da ideia de que podemos nos “referir”, no discurso ordinário, às propriedades, como é possível na notação do cálculo Lambda. Isso porque, como já discutimos na seção 2.2, Frege argumentou que, pelo fato de a linguagem ordinária não permitir fazer referência a entidades intencionais, mas somente a “objetos”, o “conceito” não se comporta como sujeito de uma predicação. Ao tentarmos, somos conduzidos a empregá-lo com o auxílio do artigo definido como um “objeto” (Frege, 2009, p. 120), o que produziria a ilusão do “conceito” ser um “objeto” (Frege, 1989, p. 131, § 52) – “objetificando” o “conceito” em questão. Nesse contexto, adiantamos haver uma tensão entre a teoria dos números cardinais do Frege e a notação do cálculo Lambda, de Alonzo Church.

No entanto, também adiantamos que, embora Frege tenha se mostrado contra a ideia de que podemos nos “referir” os conceitos, também nos mostra que essa incapacidade não nos impede de “falar” das predicções numéricas, como propriedades de segunda ordem, aquilo que o lógico alemão chama de relação de “cair sob”, ou, como é conhecido na literatura, por “relação de subsunção” de um conceito por outro. Então, é nesse sentido que empregamos o cálculo Lambda, de Alonzo Church, pois essa notação prioriza a abstração de “funções” proposicionais de distintos níveis predicativos e nos auxiliaria a melhor compreender a proposta fregeana de definir os números cardinais (*Anzahl*) como contendo um enunciado sob um “conceito”.

Na seção § 55 da *Grundlagen*, Frege apresenta a definição lógica do número “zero”, que até então, não era admitido entre seus contemporâneos como um “número” capaz de quantificar quantidades. Segundo Frege, para a solução empírica, o número “zero” não teria sentido, porque não teríamos como encontrar, nem no espaço e nem no tempo, um fato físico sob o qual o número “zero” pudesse asserir (cf. Frege, 1989, p. 99, § 8).

Misterioso seria então o número 0; pois até hoje ninguém viu ou tocou em 0 pedrinhas. Mill seguramente explicaria o 0 como algo desprovido de sentido,

como uma mera maneira de falar; os cálculos com o zero seriam um mero jogo com sinais vazios, e apenas seria surpreendente que pudesse resultar daí algo razoável. Se, contudo, estes cálculos possuírem seriamente um significado, também o próprio sinal 0 não pode ser inteiramente desprovido de sentido (Frege, 1989, p. 99, § 8).

Para a noção de “número” como uma propriedade de uma “multiplicidade de unidades”, o número “zero” tampouco teria sentido, porque “nunca poderíamos encontrar um objeto, a partir qual o número “zero” pudesse ser abstraído” (cf. Frege, 1989, p. 127, § 44). Como vimos na seção 1.2, o matemático formalista argumentou que os números naturais são expressos pela “soma de uns” (cf. Frege, 1989, p. 126, § 43) como um todo, cujas partes seriam representadas por um *token*. Frege objeta contra essa ideia, afirmando que o número “zero” seria expresso não se escrevendo nada. Essa objeção pode ser encontrada no seguinte trecho:

Vê-se daí que para Schröder o número é um sinal. O que este sinal exprime, o que venho chamando de número, ele pressupõe, com as palavras “quantas destas unidades há”, conhecido. Também pela palavra “um” entende o sinal 1, não seu significado. O sinal + serve-lhe inicialmente apenas de meio exterior de combinação, sem conteúdo próprio; somente mais tarde é definida a adição. Ele poderia ter dito mais concisamente: escrevam-se tantos sinais 1, lado a lado quanto sejam os objetos a enumerar, e combinem-se estes sinais por meio sinal +. O zero seria expresso não se escrevendo nada (Frege, 1989, p. 126, § 43).

No trecho a seguir, extraído da seção § 46 da *Grundlagen*, após argumentar que predicções numéricas contém um enunciado sob um “conceito”, Frege exemplifica o número “zero” à luz da sua definição de número cardinal (*Anzahl*) da seguinte maneira:

Impõem-se assim, como resposta à primeira questão do parágrafo anterior [“a que são atribuídos os ‘números?’”], que indicação numérica contém um enunciado sobre um conceito. É o que fica talvez mais claro no caso do número 0. Se digo: “Vênus tem 0 luas”, não há absolutamente nenhuma lua ou agregado de luas sobre o que algo se pudesse enunciar; mas ao conceito “lua de Vênus” atribui-se deste modo uma propriedade, a saber, a de não subsumir nada (Frege, 1989, p. 129, § 45).

Nesse trecho, Frege explica que a atribuição equivocada dos números aos objetos fica mais evidente quando se trata do número “zero”. Pois, não poderíamos encontrar nem no espaço, nem no tempo, um corpo físico sob o qual o número “zero” pudesse ser asserido. Para Frege, ao dizermos que “Vênus tem zero luas”, uma propriedade é asserida do conceito “lua de Vênus”, a dizer, a propriedade de que *nenhum* “objeto” é subsumido sob este “conceito”.

Passemos agora à definição do número “zero”, apresentada na seção § 55, da *Die Grundlagen der Arithmetik*:

Parece natural definir: a um conceito convém o número 0 se nenhum objeto cai sob ele. Mas aqui o “nenhum” parece ter entrado no lugar do 0, tendo ambos o mesmo significado; por isso é preferível a seguinte formulação: a um conceito convém o número 0 se vale universalmente, para qualquer a, a proposição de que a não cai sob este conceito (Frege, 1989, p. 134, § 55).

Nesse trecho, podemos compreender melhor o que Frege quer dizer com a propriedade que “zero” enuncia, a dizer de que nenhum “objeto” é subsumido sob o “conceito” em questão.

Antes de dar a formulação lógica do número “zero”, Frege observa que a palavra “nenhum” poderia ser tomada como sinônima do numeral “zero”, implicando circularidade. Importa destacar que Frege deseja, diferentemente de seus contemporâneos e de todos que, segundo ele, se propuseram a explicar o número “zero”, oferecer uma definição lógica do número “zero”, sem fazer uso do numeral “0”.

No entanto, podemos afirmar que, no trecho da seção anterior [§ 53], Frege (1989, p. 131-132) havia afirmado que a atribuição do número “zero” a um conceito de primeira ordem tem um aspeto similar ao significado da “existência”. O autor afirma que a “existência” é uma propriedade de um conceito e sua afirmação nada mais é que negação do número “zero” como podemos verificar no trecho a seguir:

Por propriedade que se enunciam de um conceito entendo naturalmente não as notas características que compõem o conceito. Estas são propriedades das coisas que caem sob o conceito, não do conceito. Assim, “retângulo” não é uma propriedade “triângulo retângulo”; mas a proposição de que não existe triângulo retângulo equilátero enuncia uma propriedade do conceito “triângulo retângulo retilíneo equilátero”; ela atribui-lhe o número zero. Sob este aspecto a existência assemelha-se ao número. De fato, a afirmação da existência nada mais é que a negação do número zero (Frege, 1989, p. 131, § 53).

Então, além de possibilitar a formulação de definições de segunda ordem, o argumento apresentado seria outro motivo para considerarmos avaliar a definição lógica do número “zero” à luz da notação Lambda, proposta por Alonzo Church. A definição do número “zero”, formulada da maneira como sugerimos adiante, reflete a abordagem da “existência” antes proposta. Podemos compreender a construção do número “zero” como um conceito de segunda ordem, ao invés de pensar o “zero” como uma asserção sobre “um não existente”. Desse modo, o interpretamos como uma asserção sobre a extensão daquele conceito, em que a “existência”

é atribuída a um “conceito” em desfavor de interpretar a “existência” via um quantificador existencial.

No trecho anterior, primeiro Frege formula que “a um ‘conceito’ convém o número ‘zero’, se nenhum objeto cai sob ele”, mas adverte que devemos formular a definição lógica do número “zero” sem o emprego da palavra “nenhum”, recomendando reformularmos da seguinte maneira: “a um conceito convém o número 0 se vale universalmente, para qualquer a , a proposição de que a não cai sob este conceito”, que em notação Lambda fica da seguinte maneira:

$$0 = [\lambda C. \neg \exists x C(x)] \quad (8)$$

Como já discutimos, segundo Frege, as soluções, empírica e formalista, tampouco foram bem-sucedidas em apresentar uma definição do número “um”. Na seção 2.6, argumentamos que, para Frege, o número “um” não expressa uma propriedade de uma “multiplicidade de corpos físicos”, pois essa ideia se compromete com a ideia de que a realidade já se apresenta segmentada em parte. Isso implica que nenhum corpo físico pode se apresentar isoladamente à observação empírica, já que a ideia de “partes” pressupõe haver mais de um corpo físico na composição do “todo”.

Também trouxemos que o número “um” não pode ser considerado uma propriedade adicional que todo “corpo físico” teria ao ser considerado como uma “unidade pura”, pois, segundo Frege, as categorias semânticas de “termo conceitual” e “nome próprio” estão sendo empregadas indistintamente. O nome “um” é interpretado como sinônimo do termo conceitual “unidade”, para especificar um método para comparar quantidades.

No trecho a seguir, extraído da seção § 55 da *Grundlagen*, Frege propôs definir o número “um” da seguinte maneira:

Poder-se-ia dizer analogamente: a um conceito F convém o número 1 se não vale universalmente, para qualquer a , a proposição de que a não cai sob F , e se das proposições “ a cai sob F ” e “ b cai sob F ” segue-se universalmente que a e b são o mesmo (Frege, 1989, § 55, p. 134).

A partir da leitura desse trecho, podemos analisar a formulação lógica do número “um” que Frege oferece à luz do Cálculo Lambda, proposto por Alonzo Church da seguinte maneira:

$$1 = [\lambda C. \exists x C(x) \wedge \forall y C(y) \rightarrow x = y] \quad (11)$$

3 CONCLUSÃO

Na parte crítica da *Grundlagen* [§§ 18-54], Frege dedica a primeira metade dessa obra para expor as dificuldades que as noções, empírica e formalista, dos “números” introduzem na concepção de “número cardinal”, com o propósito de convencer seu interlocutor de que sua análise das asserções numéricas, relativas à contagem, é a mais adequada. Procuramos arranjar as duas propostas rejeitadas pelo Frege na parte crítica [§§ 18-44] da *Grundlagen*, sob a questão geral da parte crítica “quando fazemos uma atribuição numérica, sob o que estamos asserindo?”. No início da nossa dissertação, assumimos a hipótese de que Frege rejeita duas noções de “multiplicidade” propostas como solução da questão. Empregamos o termo “multiplicidade” para caracterizarmos as duas noções de “número”, a empirista e a formalista. Pois, esse, igualmente a “pluralidade”, “conjunto”, “aglomerado”, “agregado”, “grupo”, são substantivos demasiadamente indeterminados para se definir os números cardinais (*Anzahl*).

Identificamos que as duas soluções, empirista e formalista, candidatas a responderem a essa questão, mencionada no parágrafo anterior, baseiam suas opiniões acerca dos inteiros positivos, fundamentalmente, na nossa capacidade de contar “unidades”, atribuindo-lhes números inteiros como “propriedades”. Uma caracterização que pode ser interpretada como contendo resíduos da compreensão grega de “número”, *arithmós* (*ἀριθμός*), em que os números inteiros positivos são instrumentos para contagem de “unidades”, com exceção dos números “0” e “1”, como discutimos no primeiro capítulo.

Para concretizar nossa hipótese, circunscrevemos, no primeiro capítulo, os argumentos dos partidários de ambas as noções de “multiplicidade”, com o objetivo de caracterizá-las, e abordamos os argumentos de Frege para rejeitá-las, sem deixar de destacar o principal aspecto de sua análise crítica, a distinção conteudística entre contextos sentenciais em asserções relativas à contagem.

A primeira noção de “multiplicidade”, a concepção de “multiplicidade de unidades”, responde positivamente à questão da seção § 29: “o numeral ‘um’ exprime uma propriedade de objetos?” (Frege, 1989, p. 117). A segunda noção de “multiplicidade”, a concepção de “multiplicidade de corpos físicos”, responde positivamente à questão da seção § 21, “o número é uma propriedade das coisas exteriores?” (Frege, 1989, p. 109).

Na nossa exposição, invertemos a ordem da exposição feita por Frege na *Grundlagen*, em que o autor primeiro analisa a noção de uma “multiplicidade de corpos físicos”, a definição de “número” como uma propriedade de um “agregado de coisas” (*Aggregat von Dingen*),

consideradas como corpos físicos [§§ 23-25] e depois a noção de “multiplicidade de unidades”, a noção de “número” como um “aglomerado de coisas” (*Anhäufung von Dingen*), consideradas como “unidades” [§§ 29-54]. Queríamos, assim, destacar que a noção de “multiplicidade de unidades” pode ser derivada da noção de “multiplicidade de corpos físicos”, pois os partidários da noção de “multiplicidade de unidades” empregam o método de abstração empírica, desmaterializando os “corpos físicos” de suas propriedades distinguidoras para admiti-los como um tipo geral de objetos sintáticos, os *tokens* numéricos, retidos como um sinal ou figura matemática.

Queríamos destacar a indicação de Frege da ideia euclidiana pressuposta na noção de “multiplicidade de unidades”, principalmente em relação ao emprego euclidiano da palavra “unidade”, utilizado para se falar de quantidades comparativas, de “coisas” que não podem ser definidas isoladamente. Porque está pressuposta a noção de que contamos uma “multiplicidade de corpos”, comparando “multiplicidade de unidades” com uma “multiplicidade de corpos físicos”.

Na nossa caracterização da “multiplicidade de unidades”, no primeiro capítulo, circunscrevemos que os matemáticos que adotam essa noção defendem que todas as “coisas” enumeradas possuem a propriedade de “ser um”. Esses matemáticos indicam o método de abstração empírica para chamar cada “corpo” de “unidade” e admiti-los como um tipo geral de objeto sintático, os *tokens* numéricos.

Identificamos que a crítica de Frege à noção de “multiplicidade de unidades” utiliza o seguinte argumento: os dois sentidos da palavra “unidade”, empregados pelo matemático formalista, são irreconciliáveis. A palavra “unidade”, no singular, é empregada no sentido de “identidade”, de modo que, dizer que “ x e y são um” seria o mesmo que dizer que “ x é idêntico a y ”; no plural, a palavra “unidades” é empregada no sentido de “diferença”, para indicar que os “objetos” considerados na contagem são “múltiplos” e discerníveis. Esses dois sentidos da palavra “unidade”, se atribuídos a “corpos físicos”, introduzem uma eminente dificuldade no processo de contagem: por um lado, os casos de “unidade” se colapsam em um único caso de “unidade” e não conseguimos ultrapassar o número “um”; por outro, considerar as “unidades” como discerníveis, tem como consequência a inutilização da notação aritmética, pois se compreende diversos números “uns”, “dois”, “três” etc.

Na caracterização da noção de “multiplicidade de corpos físicos”, circunscrevemos que os matemáticos empiristas que adotam essa noção defendem a ideia de que a realidade já se apresenta segmentada e os “números” asserem fatos físicos, observados empiricamente.

Identificamos que o principal argumento do Frege para criticar a noção de “multiplicidade de corpos físicos” é afirmar que, para aqueles que adotam essa ideia, contamos uma “multiplicidade de corpos físicos”, dispersa espaço-temporalmente, antes de um “conceito” que os individualize e indique o que deve ser considerado como objeto da contagem. Frege argumenta que desse modo não haveria somente uma única maneira de segmentar uma mesma porção material, mas diversas maneiras, conforme selecionamos a “multiplicidade” via um “conceito”. Para o lógico, quando fazemos asserções numéricas não é o “agregado” ou o “objeto” que varia, mas a maneira de denominá-los via um “conceito”. A porção material ocupada pelo “agregado” continua a mesma.

Na última seção do primeiro capítulo, 1.7, procuramos comparar as duas noções de “multiplicidade”, identificando o que elas têm em comum. O erro comum a ambas as noções foi a admissão dos numerais como predicções de primeira ordem, resultando, conseqüentemente, na não admissão do número “um” e do número “zero” como capazes de quantificar quantidades aritméticas. Esse desfecho antecipa, na exposição, a necessidade da apresentar a solução fregiana para essa questão, que ainda permanece sem resposta. Nesse sentido, ao final do segundo capítulo, apresentamos as definições propostas por Frege na seção § 55 do número “um” e do número “zero”.

No segundo capítulo, identificamos a solução do Frege, sugerida na seção § 46, para a questão “quando fazemos uma atribuição numérica, sob o que estamos asserindo?”. Frege (1989, p. 128, § 46) afirma que “a indicação numérica contém um enunciado sob um “conceito”. Essa alternativa implica, conseqüentemente, a rejeição da proposta empírica e formalista de que os “números” são propriedades de “objetos”, i.e., propriedades de primeira ordem. Articulamos essa solução em quatro etapas.

Primeiro, circunscrevemos o que o Frege indica ser o gênero de problema introduzido por uma concepção dos “números” como propriedades de primeira ordem. O lógico sugere que a forma adjetiva (ou atributiva) em que os “números” ocorrem no discurso aritmético comum é o gênero de problema comum a ambas as noções de “multiplicidade”. Na seção § 21, sugere que o uso adjetivo dos números disfarça a real natureza dos números cardinais, levando-nos a considerá-los como propriedades de “objetos”, assim como são as cores. Segundo ele, na linguagem ordinária, nem sempre a categoria lógica a qual um termo pertence está explícita, pois a linguagem atribui “números” a “objetos”. Contudo, a diferença permanece, já que a sentença que predica algo de um “objeto” não é do mesmo tipo da sentença que predica algo de um “conceito”.

Na seção 2.1 do segundo capítulo, procuramos caracterizar a metodologia empregada por Frege na *Grundlagen* para analisar o discurso aritmético comum e destacamos que, para responder qual a natureza das predicções numéricas, Frege dispensa justificativas empíricas e psicológicas a favor daquilo que o autor julga ser relevante para o seu projeto logicista, i.e., o conteúdo lógico-objetivo das asserções aritméticas.

Para explicar o que seria esse conteúdo, articulamos o terceiro princípio enunciado na *Grundlagen* por Frege para “não perder de vista a distinção entre ‘conceito’ e ‘objeto’” com o conceito de “conteúdo judicável” (*beurtheilbaren Inhalts*), empregado na *Grundlagen*. Argumentamos que, no período da publicação da *Grundlagen*, Frege já menciona o que ele entende por “conceito”, antes mesmo da publicação da “*Under Begriff und Gegenstand*”, de 1892. Nessa obra temos, além dos recursos linguísticos que faz para indicar os “termos conceituais” [§§ 18-54], a forma plural e o artigo indefinido. Em nota, na seção § 66, o autor afirma que, para ele, o “conceito” é um predicado possível de um conteúdo ajuizável singular e um “objeto” um sujeito possível de tal conteúdo” (Frege, 1989, p. 140, § 66, N. do A.).

O próximo passo da nossa exposição consistiu em sistematizar cada uma das dificuldades produzidas pelas noções de “número” como uma propriedade atribuída a uma “multiplicidade de corpos físicos” e de “número” como uma propriedade atribuída a uma “multiplicidade de unidades”, com a solução apresentada na seção § 46: a) a múltipla atribuição numérica à mesma “multiplicidade de corpos físicos” (§§ 22-25); b) “unidade” no sentido de “identidade” (§§ 34-35); c) “unidade” no sentido de “diferença” (§ 36-39); e d) como considerar cada objeto como uma “coisa” ou um exemplo do número “um”, se cada objeto é diferente do outro?

A partir dessa última etapa, podemos concluir que Frege apresentou razões convincentes para rejeitar qualquer interpretação dos números como propriedades de “objetos”, seja como uma propriedade atribuída a uma “multiplicidade de unidades” ou propriedades atribuídas a uma “multiplicidade de corpos físicos”. A solução de Frege para lidar com todas as dificuldades que mencionamos foi a proposta de que os números asseram uma propriedade sob um “conceito” e não sob um “objeto”. Neste sentido, rompe com a fundamentação de que os números são propriedade atribuídos à “objetos físicos”.

Concluimos que, para rejeitar as propostas de definição, empírica e formalista, dos “números” como “propriedades de primeira ordem”, Frege introduziu uma teoria simples de tipos, com o objetivo de convencer seu interlocutor de sua análise e da sua proposta, de que a ocorrência numérica é atribuída a “conceitos”. Procuramos, no desenvolvimento da nossa

pesquisa, até chegarmos a esta conclusão, discutir as distinções contedísticas fundamentais que o lógico exhibe, entre contextos sentenciais que exprimem “propriedades de primeira ordem” e “propriedades de segunda ordem”. Até a seção § 55, porém, poderíamos concluir que os “números” expressam uma propriedade do “conceito”, i.e., se o “conceito” é instanciado ou não por x “objetos”.

Para finalizar o segundo capítulo, circunscrevemos as definições individuais dos números “zero” e “um” que Frege apresenta na seção § 55 e as interpretamos como o lógico parece sugerir até o fim desta seção, isto é, que a ocorrência numérica expressa propriedades de segunda ordem. Nessa perspectiva, além das formulações fregianas dos números “zero” e “um”, em linguagem ordinária, sugerimos interpretá-las em uma linguagem que permite predicções de níveis superior, utilizando a notação Lambda.

REFERÊNCIAS

- DUMMETT, Michael. *Frege: Philosophy of Mathematics*. London: Duckworth, 1991.
- EUCLIDES. *Os Elementos/Euclides*. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora Unesp, 2009.
- FREGE, Gottlob. *Basic Laws of Arithmetic*. Translation by Philip Ebert e Marcus Rossberg Oxford: Oxford University Press, 2013.
- FREGE, Gottlob. *Die Grundlagen der Arithmetik: eine logisch mathematische Untersuchung*. Breslau: Verlag Von Wilhelm Koebner, 1884. Disponível em: <https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=hvd.32044018824896&view=1up&seq=7>. Acesso em: 2 set. 2022.
- FREGE, Gottlob. *Fundamentos da aritmética*. Tradução de Luís Henrique dos Santos. 4. ed. São Paulo: Nova Cultural, 1989.
- FREGE, Gottlob. *Lógica e Filosofia da Linguagem*. Tradução de Paulo Alcoforado, 2ª ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2009.
- FREGE, Gottlob. Replying to Bertrand Russell's letter about Russell's Paradox. In: *Basic Laws of Arithmetic*. Translation by Philip Ebert e Marcus Rossberg. Oxford: Oxford University Press, 2013. v. 2, p. 253.
- JEVONS, William Stanley. *On the Mechanical Performance of Logical Inference*. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Vol. 160. Part II. London: Taylor and Francis, 1870 [p.497–518]
- JEVONS, William Stanley. *The Principle of Science: A Treatise on Logic and Scientific Method*. 3. ed. London: Macmillan and Co, 1879.
- JEVONS, William Stanley. *Pure Logic and Other Minor Works*. London: Macmillan and co 1890. Disponível em: <https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=hvd.32044010059947&view=1up&seq=9>. Acesso em: 23 out. 2022.
- LIPSCHITZ, Rudolf. *Lehrbuch der Analysis*. Bonn: M. Cohen & Sohn, 1877. Disponível em: <https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=hvd.32044015214596&view=1up&seq=6>. Acesso em: 20 nov. 2022.
- MILL, John Stuart. *A System of Logic Ratiocinative and Inductive*. v. I-III. 8. ed. London: Haper and Brothers Publishers, 1974. Disponível em: <https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=coo1.ark:/13960/t0ft94p7h&view=1up&seq=19>. Acesso em: 1º jan. 2023.

PECKHAUS, Volker. *The Mathematical Origins of Nineteenth-Century Algebra of Logic*. In: HAAPARANTA, Leila. *The Development of Modern Logic*. Oxford: Oxford University Press, 2009. p.159-195.

PEIRCE, Charles Sanders. *Sings, Thoughts, Reasoning*. In: PEIRCE, Charles. *Prolegomena to Science of Reasoning*. Frankfurt am Main: Peter Lang, 2016. p.95-113.

PEIRCE, Charles Sanders. *The new elements of Mathematics. Volume IV*. Atlantic Highlands: Humanities Press Inc, 1976.

PORTO, André. O que é um objeto para um lógico? In: LEVY, Lia et al. *Substância na história da filosofia*. Pelotas: NEPFIL Online, 2023. p.509-526.

RUSSEL, Bertrand. *Introduction to Mathematical Philosophy*. 2. ed. New York: Dover Publication, INC., 1993.

SCHRÖDER, Ernst. *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studierende*. Translated by Stephen Pollard. In: POLLARD, Stephen (org.). *Ernst Schröder on Algebra and Logic*. Springer: Kirksville, 2022. p. 1-47.

STALLO, J. B. *The Concepts and theories of modern physics*. Second Edition (1st. Ed. 1884). London: Kegan Paul, Trench, Trüber & Co. Ltda, 1960.

VELLOSO, Araceli. Os números como substância matemática em Frege. In: LEVY, Lia et al. (orgs.). *Substância na história da filosofia*. Pelotas: NEPFIL Online, 2023.

WRIGHT, Crispin. *Frege's Conception of Numbers as Objects*. Aberdeen: Great Britain, 1983.