UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

Convergência Local do Método de Newton Inexato e Suas Variações do Ponto de Vista do Princípio Majorante de Kantorovich

por

Max Leandro Nobre Gonçalves

Orientador: Dr. Orizon Pereira Ferreira

Dissertação de Mestrado em Matemática
Goiânia, Goiás
2007

UFG

sistema de bibliotecas ufg

Termo de Ciência e de Autorização para Disponibilizar as Teses e Dissertações Eletrônicas (TEDE) na Biblioteca Digital da UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás–UFG a disponibilizar gratuitamente através da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações – BDTD/UFG, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[x] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor(a):	Max Leandro Nobre Gonçalves						
CPF:		E-mail:	maxlng@hotmail.com'				
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [x]Sim [ ] Não							
Vínculo Empre-gatício do autor							
Agência de fomento:	Coord. de Aperf. de Pessoal de Nível Superior					Sigla:	CAPES
País:	Brasil	UF:	GO	CNPJ:	00889834/0001-08		
Título:	Convergência Local do Método de Newton Inexato e suas Variações do Ponto de Vista do Princípio Majorante de Kantorovich						
Palavras-chave:	Método de Newton Inexato						
Título em outra língua:	Local Convergence of Inexact Newton Methods from the Viewpoint of The Kantorovich`s Majorant Principle						
Palavras-chave em outra língua:	Inexact Newton Methods						
--							
Área de concentração:	Matemática Aplicada						
Data defesa: (14/12/2007)							
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado em Matemática						
Orientador(a):	Orizon Pereira Ferreira						
CPF:		E-mail:	orizon@mat.ufg.br				
Co-orientador(a):	--------------------------						
CPF:	----------------------------	E-mail:	------------------------------				

3. Informações de acesso ao documento:

Liberação para disponibilização?[1] [x] total [ ] parcial

Em caso de disponibilização parcial, assinale as permissões:

[ ] Capítulos. Especifique: ______________________________________

[ ] Outras restrições: ______________________________________

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O Sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Max Leandro N. Gonçalves

Assinatura do(a) autor(a) Data: 17 /12 / 2007

[1] Em caso de restrição, esta poderá ser mantida por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Todo resumo e metadados ficarão sempre disponibilizados.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Convergência Local do Método de Newton Inexato e Suas Variações do Ponto de Vista do Princípio Majorante de Kantorovich

por

Max Leandro Nobre Gonçalves

Área de Concentração : **Matemática Aplicada**
Orientador: **Dr. Orizon Pereira Ferreira**

Dissertação submetida à Banca Examinadora designada pelo Conselho Diretor do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Goiânia, Goiás
2007

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(GPT/BC/UFG)

Gonçalves, Max Leandro Nobre.
G635c **Convergência local do método inexato e suas variações do ponto de vista do princípio majorante de kantorovich / Max Leandro Nobre Gonçalves. – 2007.**
50f.

Orientador: Prof. Orizon Pereira Ferreira.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás. Instituto de Matemática e Estatística, 2007.

Bibliografia: f. 49-50.

1. Matemática aplicada 2. Newton, método inexato de I. Ferreira, Orizon Pereira II. Universidade Federal de Goiás. **Instituto de Matemática e Estatística.** III. Título.

CDU: 519.6

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
COORDENAÇÃO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA-MESTRADO

"CONVERGÊNCIA LOCAL DO MÉTODO DE NEWTON INEXATO E SUAS VARIAÇÕES DO PONTO DE VISTA DO PRINCÍPIO MAJORANTE DE KANTOROVICH"

por

Max Leandro Nobre Gonçalves

Dissertação submetida à Banca Examinadora designada pelo Conselho Diretor do Instituto de Matemática e Estatística, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Goiânia, 14 de dezembro de 2007.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Orizon Pereira Ferreira - IME/UFG
(Orientador)

Fernanda Maria Pereira Raupp
Profa. Dra. Fernanda Maria Pereira Raupp – PUC/RJ

Geci José Pereira da Silva
Prof. Dr. Geci José Pereira da Silva - IME/UFG

Aos meus queridos pais;
Jurandir e Maria de Lourdes

Agradecimentos

À Deus, pela proteção durante este percurso da minha carreira estudantil, por ter me dado a oportunidade e a capacidade, pois sem Deus nada disso seria possível. À ele toda honra e toda glória.

Ao Prof. Dr. Orizon Pereira Ferreira, pela amizade, paciência e dedicação que foram indispensáveis para a concretização deste trabalho.

À minha esposa Ana Paula, pela amizade, compreensão e pelas constantes ajudas.

À todos os meus familiares e amigos, que apoiaram-me em mais um degrau de minha vida. Em especial, aos colegas de mestrado, que ajudaram-me nos momentos de dificuldades, não vou esquecer nenhum de vocês.

À (CAPES), pela Bolsa de Estudos Concedida, sem a qual seria difícil a realização desta dissertação[1]

[1] Este trabalho teve suporte financeiro da CAPES.

Sumário

Resumo

A busca por soluções de equações não-lineares nos espaços Euclidianos é objeto de interesse em várias áreas da ciência e das engenharias. Devido a sua velocidade de convergência e eficiência computacional, o método de Newton inexato e suas variações têm sido bastante utilizados para o propósito de obter soluções dessas equações. Nesta dissertação apresentamos uma análise de convergência local do método de Newton inexato e algumas de suas variações, mais especificamente, o método quase-Newton inexato e o método de Newton modificado inexato. Esta análise tem a desvantagem de exigir o conhecimento prévio de um zero do operador em consideração e hipóteses sobre o comportamento do operador nesse zero, mas por outro lado ela fornece informações sobre a taxa e o raio de convergência.

Abstract

The search for solutions of nonlinear equations in the Euclidean spaces is object of interest in some areas of science and engineerings. Due the speed of convergence and computational efficiency, the inexact Newton method and its variations have been sufficiently used to obtain solutions of these equations. In this dissertation we present a local analysis of convergence of the inexact Newton method and some of its variations, more specifically, the inexact Newton-like method and the inexact modified Newton method. This analysis has the disadvantage to demand the previous knowledge of a zero of the operator in consideration and the hypotheses on the behavior of the operator at this zero, but on the other hand it supplies to information on the convergence rate and convergence radius.

Capítulo 1

Introdução

Resolver um sistema de equações não-lineares é encontrar um ponto que satisfaça todas as equações simultaneamente. Existem vários métodos para resolver um sistema não-linear, mas o método de Newton e suas variações são os mais eficientes. Neste trabalho, analisaremos a convergência do método de Newton inexato e algumas de suas variações.

Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma função continuamente diferenciável. Considere o sistema de equações não-lineares

$$F(x) = 0. \tag{1.1}$$

Os *processos iterativos clássicos* usados para resolver (1.1) são formalmente descritos como: dado $x_0 \in \Omega$ defina

$$x_{k+1} = x_k + s_k, \qquad B_k s_k = -F(x_k), \qquad k = 0, 1, ... \tag{1.2}$$

Em particular, o processo acima é o *método de Newton* se $B_k = F'(x_k)$, é o *método Newton modificado* se $B_k = F'(x_0)$ ou é o *método quase-Newton* se B_k é uma aproximação de $F'(x_k)$. Uma perspectiva histórica recente das aplicações do método de Newton pode ser encontrada em [11]. É bem conhecido que, sob certas condições, o método de Newton tem convergência local quadrática para uma solução de (1.1), veja por exemplo, [1], [2] e [5]. No entanto, resolver em cada passo o sistema linear (1.2) pode ser computacionalmente muito "caro"se o número de incógnitas for muito grande, e isto não se justifica quando a iterada corrente está longe da solução. Uma alternativa é resolver aproximadamente o sistema linear, o que da origem a uma nova classe de processos iterativos, os quais são conhecidos como métodos inexatos. Os *métodos inexatos* usados para resolver (1.1) são formalmente descritos como: dado $x_0 \in \Omega$ defina

$$x_{k+1} = x_k + s_k, \qquad B_k s_k = -F(x_k) + r_k, \qquad \|r_k\| \leq \theta_k \|F(x_k)\|, \qquad k = 0, 1, ..., \quad (1.3)$$

onde a seqüência de números reais $\{\theta_k\}$ é dada. A seqüência $\{\theta_k\}$ é usualmente chamada de seqüência "forcing"e é tomada uniformemente limitada por 1. Em particular, o processo acima é o *método de Newton inexato* se $B_k = F'(x_k)$, é o *método Newton modificado inexato* se $B_k = F'(x_0)$ ou é o *método quase-Newton inexato* se B_k é uma aproximação de $F'(x_k)$. Observe que se anularmos a seqüência"forcing", isto é, $\theta_k = 0$ para todo k, o método de Newton inexato e suas variações se reduzem aos métodos clássicos de Newton e suas variações.

Para o método de Newton inexato e suas variações a convergência local pode ser medida em termos da seqüência"forcing"θ_k. Seja $\|.\|$ qualquer norma em $\mathbb{R}^n$ subordinada a uma norma de matriz $\mathbb{R}^{n\times n}$. Em [3] é mostrado que sob a hipótese usual, ou seja, θ_k uniformemente limitada por 1, o método de Newton inexato define uma seqüência $\{x_k\}$ linearmente convergente na norma $\|y\|_* = \|F'(x_*)y\|$ para uma solução x_* de (1.1). Vários autores (veja [4]-[7]) têm proposto diferentes aplicações para o método de Newton inexato no campo da análise numérica e têm ressaltado a difícil aplicação do resultado obtido em [3]. De fato, tais resultados são dependentes da norma $\|.\|_*$, que por sua vez depende da solução e assim não pode ser calculada a priori. Então, eles focalizam a análise no controle do critério de parada $\|r_k\| \leq \theta_k \|F(x_k)\|$ e seu efeito nas propriedades de convergência.

Morini (veja [8]) considerou o método inexato, onde um controle residual relativo escalado é feito em cada iteração. O método é formalmente descrito como: dado $x_0 \in \Omega$ defina

$$x_{k+1} = x_k + s_k, \qquad B_k s_k = -F(x_k) + r_k, \quad \|P_k r_k\| \leq \theta_k \|P_k F(x_k)\|, \quad k = 0, 1, ..., \quad (1.4)$$

onde as seqüencias $\{\theta_k\}$ e $\{P_k\}$, respectivamente de números reais e de matrizes $n \times n$ invertíveis, são dadas. Observamos que se $P_k = I$ para todo k, então (1.4) se reduz ao caso (1.3). A vantagem de se introduzir a matriz P_k é que, se o sistema linear em (1.4) for mal condicionado, esta matriz faz uma correção. Por outro lado, o resultado obtido em [8] não torna claro qual o maior raio de convergência da seqüência.

Nosso objetivo neste trabalho é determinar condições, usando o princípio majorante de Kantorovich (veja [12]), que garantam a convergência linear do método de Newton inexato e suas variações, onde o controle residual relativo escalado é considerado em cada iteração da mesma maneira proposta por Morini (veja [8]). Esta nova abordagem deixa claro a relação entre a função majorante com o operador não-linear em consideração, o que não esta explícito nas provas anteriores, veja [3], [8] e [10]. Com isso, os resultados apresentados aqui torna a prova mais simples e mais didática. Uma outro objetivo é fazer um estudo completo da função majorante, onde quase todos os resultados necessários para a convergência dos métodos de Newton e suas variações são demonstrados, deixando o texto "auto-contido".

Em particular, os resultados alcançados dá uma idéia do maior raio de convergência da seqüência. Vale mencionar que, esta análise inclui o método de Newton inexato e suas variações como apresentadas em (1.3), bem como, o método clássico de Newton e suas variações apresentadas em (1.2). Além disso, mostramos nas considerações finais que as condições para a convergência obtidas aqui estão de acordo com as teorias apresentadas em [9] e [10].

Esta dissertação está organizada da seguinte forma.

No capítulo 2, revisamos alguns tópicos de topologia, análise e norma nos espaços euclidianos e estudamos conceitos básicos de análise convexa. Acreditamos obter um bom embasamento teórico para a compreensão dos demais capítulos.

No capítulo 3, provamos as principais relações entre a função majorante e o operador não-linear. Iniciamos com uma análise de uma determinada função escalar e o módulo da iteração de Newton associada a ela, a qual dará resultados importantes para o estudo das funções majorante radial e central. Os resultados obtidos aqui são os principais instrumentos utilizados no estudo da convergência linear para o método de Newton inexato e suas variações.

No capítulo 4, concentra-se a discussão sobre os métodos inexatos. Mostramos que sob certas condições, a seqüência gerada pelo método de Newton inexato está bem definida e converge para uma solução de (1.1) com taxa de convergência linear. Por fim, aplicamos os resultados obtidos para a condição radial Lipschitz.

No capítulo 5, mostramos que sob certas condições, a seqüência gerada pelo método quase-Newton inexato está bem definida e converge para uma solução de (1.1) com taxa de convergência linear. Por fim, aplicamos os resultados obtidos para a condição radial Lipschitz.

No capítulo 6, mostramos que sob certas condições, a seqüência gerada pelo método de Newton modificado inexato está bem definida e converge para uma solução de (1.1) com taxa de convergência linear. Por fim, aplicamos os resultados obtidos para a condição central Lipschitz.

Finalmente, encerramos esta dissertação expondo algumas considerações finais e apresentando um exemplo, onde anulando a seqüência "forcing"o raio de convergência para o método de Newton inexato obtido é o maior possível.

Capítulo 2

Conceitos Básicos

Nosso objetivo neste capítulo é revisar alguns tópicos dos espaços euclidianos e análise convexa, incluindo alguns resultados de caracterização das funções convexas diferenciáveis de variável real. Estes assuntos serão necessários ao desenvolvimento dos capítulos seguintes, dando um fundamento teórico para uma boa compreensão do texto.

2.1 Noções Topológicas no Espaço Euclidiano

Nesta seção definiremos alguns conjuntos importante do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, seqüencias no $\mathbb{R}^n$ e taxa de convergência. Provaremos um resultado sobre convergência de seqüências que será necessário posteriormente. Iniciaremos definindo bola aberta e fechada.

Sejam dados o ponto $a \in \mathbb{R}^n$ e o número real $\delta > 0$. A *bola aberta* de centro a e raio δ é o conjunto

$$B(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x - a\| < \delta\},$$

isto é, o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ cuja a distância ao ponto a é menor do que δ. Analogamente a *bola fechada* de centro a e raio δ é o conjunto

$$B[a, \delta] = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x - a\| \leqslant \delta\}.$$

Um conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ é *aberto* quando todos os seus pontos são interiores, ou seja, para cada $a \in U$ existe $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \subset U$. O conjunto dos pontos interiores de U será representado pela notação $int(U)$. Similarmente um conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ é *fechado* quando contém todos os seus pontos de aderência, ou seja, para todo ponto $a \in \mathbb{R}^n$ onde qualquer vizinhança de a contém algum elemento de U, então $a \in U$. O conjunto dos pontos de aderência de U será representado pela notação $\bar{U}$.

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$. Um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ diz-se *ponto de acumulação* do conjunto U quando toda bola de centro a contém algum ponto do conjunto U diferente do ponto a, ou seja, para todo $\epsilon > 0$, deve existir $x \in U$ tal que $0 < \|x - a\| < \epsilon$. O conjunto dos pontos de acumulação será representado pela notação $U\,'$.

Uma *seqüência* $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$, que associa a cada número $k \in \mathbb{N}$ um vetor $x_k \in \mathbb{R}^n$. Diz-se que a seqüência $\{x_k\}$ é *limitada* quando o conjunto dos seus termos é limitado em $\mathbb{R}^n$, ou seja, quando existe um número real $c > 0$ tal que $\|x_k\| \leq c$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Uma seqüência $\{x_k\}$ de números reais diz-se *monótona não-decrescente* quando se tem $x_k \leq x_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e diz-se *monótona não-crescente* quando se tem $x_{k+1} \leq x_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Definição 2.1. *Diz-se que uma seqüência $\{x_k\}$ converge para $x_* \in \mathbb{R}^n$ se dado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que*

$$||x_k - x_*|| < \epsilon, \quad \forall \quad k \geqslant n_0.$$

Uma seqüência $\{x_n\}$ é chamada seqüência de Cauchy se dado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que

$$||x_m - x_k|| < \epsilon, \quad \forall \quad m, k \geqslant n_0.$$

Tem-se $\lim x_k = x_* \Leftrightarrow \lim \|x_k - x_*\| = 0$. Isto reduz a convergência em $\mathbb{R}^n$ à convergência de números reais ≥ 0. Um resultado bem conhecido e cuja demonstração pode ser encontrada na página 18 em [14], e que toda seqüência $\{x_k\}$ em $\mathbb{R}^n$ é de Cauchy se, e somente se, é convergente.

Proposição 2.2. *Seja $\{x_k\}$ uma seqüência em $\mathbb{R}^n$. Se existe um número real $\alpha < 1$ tal que*

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq \alpha \|x_k - x_*\|, \quad \forall\, k, \tag{2.1}$$

então $\{x_k\}$ converge para x_*.

Demonstração. É fácil ver de (2.1), que

$$0 \leq \|x_k - x_*\| \leq \alpha^k \|x_0 - x_*\|.$$

Fazendo $k \to \infty$ na desigualdade acima, temos $\lim_{k\to\infty} \|x_k - x_*\| = 0$. Assim, têm-se $\{x_k\}$ converge para x_*. □

Definição 2.3. *Seja a seqüência $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ convergente para x_*, então*

i) Diz-se que $\{x_k\}$ converge linearmente se existe $c \in [0, 1)$, tal que

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq c\|x_k - x_*\|, \quad \forall\, k.$$

ii) Diz-se que $\{x_k\}$ converge quadraticamente se existe $c > 0$, tal que

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq c\|x_k - x_*\|^2, \quad \forall\, k.$$

2.1.1 Noções de Análise no Espaço Euclidiano

Nossa meta nesta seção é obter algumas definições e proposições da análise dos espaços euclidianos que auxiliarão na demonstração de resultados futuros nessa dissertação. Por tratarem de resultados básicos as demonstrações serão omitidas e poderão ser encontradas nas referências [13] e [14]. Iniciaremos definindo funções contínuas.

Definição 2.4. *Seja $\Phi\colon U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação definida no conjunto $U \subset \mathbb{R}^m$. Diz-se que Φ é contínua no ponto $a \in U$ quando, para qualquer $\epsilon > 0$ dado, se pode obter $\delta > 0$ tal que $\|x - a\| < \delta$ implica $|\Phi(x) - \Phi(a)| < \epsilon$. Se $\Phi\colon U \to \mathbb{R}^n$ é contínua em todos os pontos do conjunto U, diz-se simplesmente que Φ é uma função contínua.*

Definição 2.5. *Seja $\Phi\colon U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação definida no conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Diz-se que Φ é diferenciável no ponto $x \in U$ quando existe uma transformação linear $\Phi\,'\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tal que*

$$\Phi(x + h) = \Phi(x) + \Phi'(x)h + s(h), \quad \text{onde} \quad \lim_{h\to 0} \frac{s(h)}{\|h\|} = 0.$$

Se $\Phi\colon U \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável em todos os pontos do conjunto U, diz-se simplesmente que Φ é uma função diferenciável.

A aplicação $\Phi'(x)$ diz-se a *derivada* de Φ no ponto x. Por outro lado, a igualdade $\Phi(x+h) = \Phi(x) + \Phi'(x)h + s(h)$ é simplesmente a definição do "resto" $s(h) \in \mathbb{R}^n$. A diferenciabilidade de Φ no ponto x nos diz que o resto é um "infinitésimo de ordem superior a s", isto é, $\lim_{h\to 0} s(h)/\|h\| = 0$.

Consideremos o conjunto $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ dos operadores lineares de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.6. *Seja $\Phi\colon U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação definida no conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Diz-se que Φ é continuamente diferenciável em U, ou que Φ é de classe C^1, e escreveremos $\Phi \in C^1$, quando Φ for diferenciável e, além disso, $\Phi'\colon U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ for contínua.*

Proposição 2.7. *(Teorema Fundamental do Cálculo) Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto aberto. Dada $\Phi : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1, suponha que o segmento de reta $[x, x+h]$ esteja em U. Então*

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) = \int_0^1 \Phi\,'(x+th)\cdot h\,dt$$

Proposição 2.8. *(Teorema da Permanência do Sinal) Sejam $U \subset \mathbb{R}$, $\Phi : U \to \mathbb{R}$ e $a \in U'$. Se $lim_{x\to a}\Phi(x) = L$ e $\alpha < L < \beta$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in U$ e $0 < |x-a| < \delta$, temos $\alpha < \Phi(x) < \beta$.*

Proposição 2.9. *(Teorema do Valor Médio) Seja $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma aplicação contínua e diferenciável no intervalo aberto (a,b). Então existe $c \in (a,b)$ para o qual*

$$\phi'(c) = \frac{\phi(b) - \phi(a)}{b-a}.$$

2.1.2 Noções de Norma de Operador no Espaço Euclidiano

Nesta seção estudaremos algumas propriedades da norma de operadores definido no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Demonstraremos o conhecido Lema de Banach. Encerraremos definindo os importantes conceitos de operador não-singular e condicionamento de operador. Iniciaremos definindo norma de um operador em $\mathbb{R}^n$.

Consideremos o conjunto $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ dos operadores lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$. Defina a *norma de operadores* $\|.\|$ como

$$\|T\| := \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}. \tag{2.2}$$

É fácil ver, que a aplicação $T \to \|T\|$ cumpre todas as condições exigidas para uma norma, isto é, dados $T, S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, temos:
N1. $T \neq 0 \Rightarrow \|T\| > 0$;
N2. $\|\alpha T\| \leq |\alpha|\|T\|$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$;
N3. $\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|$.

A condição N3 é conhecida como desigualdade triangular. Além disso, a aplicação norma goza das seguintes propriedades.

Lema 2.10. *Dados $T, S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ e $x \in \mathbb{R}^n$, então são válidas as seguintes propriedades:*
i) $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$;
ii) $\|TS\| \leq \|T\|\|S\|$;
iii) $\|T^k\| \leq \|T\|^k$ *para todo* $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Demonstração. **i)** Se x é o vetor nulo segue imediato de (2.2). Se x não é o vetor nulo, considere o vetor $y = x/\|x\|$ e usando (2.2) temos

$$\|T\| \geq \|Ty\| = \frac{1}{\|x\|}\|Tx\|.$$

Portanto $\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$.
ii) É fácil ver de (2.2), item **i** e propriedades do supremo que

$$\|TS\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|TSx\|}{\|x\|} \leq \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|T\|\|Sx\|}{\|x\|} = \|T\|\|S\|.$$

iii) É conseqüência imediato do item **ii**. □

Lema 2.11. *(Lema de Banach) Sejam $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ um operador linear e I o operador identidade de $\mathbb{R}^n$. Se $\|B - I\| < 1$, então B é não-singular e vale*

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|B - I\|}. \tag{2.3}$$

Demonstração. Primeiro, vamos mostrar que se $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ é tal que $\|T\| < 1$, então $I - T$ é inversível e vale

$$\|(I - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|}.$$

Para isso, considere as seguintes seqüências $\{S_k\}$ e $\{t_k\}$ definidas respectivamente por:

$$S_k = I + T + T^2 + \cdots + T^k, \qquad t_k = 1 + \|T\| + \|T\|^2 + \cdots + \|T\|^k.$$

Primeiro, note que

$$\|S_{k+1} - S_k\| = \|(I + T + \cdots + T^{k+1}) - (I + T + \cdots + T^k)\| \leq \|T\|^{k+1} = t_{k+1} - t_k.$$

Agora, como $\|T\| < 1$, temos que $\{t_k\}$ é uma seqüência monótona crescente e convergente, com limite $t_* = 1/(1 - \|T\|)$. Portanto, deste fato e da equação acima, $\{S_k\}$ é uma seqüência de Cauchy em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ e assim existe $\lim_{n\to\infty} S_n$. Agora, observe que

$$S_k(I - T) = (I + T + \cdots + T^k)(I - T) = I - T^{k+1}. \tag{2.4}$$

Por outro lado, temos que $\lim_{k\to\infty} I - T^k = I$, pois

$$\|I - (I - T^k)\| = \|T^k\| \leq \|T\|^k, \qquad \lim_{k\to\infty} \|T\|^k = 0.$$

Assim, pela última equação e (2.4), concluimos que $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = (I - T)^{-1}$. Note ainda que

$$\|(I - T)^{-1}\| = \quad \|\lim_{k\to\infty} S_k\| \leqslant \lim_{k\to\infty} \left(\|I\| + \|T\| + \cdots + \|T^k\|\right) \leq \lim_{k\to\infty} t_k = 1/(1 - \|T\|).$$

Agora, tomando $T = I - B$ e observando a hipótese $\|B - I\| < 1$, temos que $(I - T) = B$ é inversível e vale a estimativa dada em (2.3) para a norma da inversa B^{-1}. $\square$

Um operador $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ é *não-singular* se seu determinante é não-nulo. Um resultado bem conhecido, cuja demonstração pode ser encontrada na página 76 em [15], é que todo operador não-singular tem inverso.

Um problema é dito *mal condicionado* quando um pequeno arredondamento num dado de entrada muda muito os dados de saída.

Definição 2.12. *O número de condicionamento do operador $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, denotado $cond(T)$, é o número real*

$$cond(T) = \|T^{-1}\|\|T\|.$$

Note que, $cond(T) = \|T^{-1}\|\|T\| \geq \|I\| = 1$. Quanto maior o número de condicionamento pior será o condicionamento do operador T.

2.2 Noções de Análise Convexa

Destinamos esta seção a um estudo dos conceitos relacionados aos conjuntos convexos e as funções convexas. Caracterizaremos as funções convexas diferenciáveis de uma variável real. Para tornar este trabalho "auto-contido", demonstraremos a grande maioria dos resultados. Para mais informações sobre análise convexa veja [16], [17] e [18] . Iniciaremos definindo conjunto convexo.

Definição 2.13. *Um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ é dito convexo, se*

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in D, \quad \forall\, x, y \in D, \quad \lambda \in [0,1].$$

Geometricamente, esta definição nos diz que o segmento de reta

$$[x,y] := \{\lambda x + (1-\lambda)y : 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

está inteiramente contido em D, sempre que os pontos extremos x e y estão em D.

Exemplo 2.14. *O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, o espaço euclidiano não-negativo $\mathbb{R}^n_+$ e a bola aberta de centro $a \in \mathbb{R}^n$ e raio δ $B(a,\delta)$ são exemplos de conjuntos convexo.*

Definição 2.15. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Uma função $\varphi : I \to \mathbb{R}$ é dita convexa quando, para todo $x, y \in I$ e todo $\lambda \in [0,1]$*

$$\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y), \tag{2.5}$$

e é estritamente convexa se (2.5) *é estrita para todo $x, y \in I$ com $x \neq y$ e todo $\lambda \in (0,1)$.*

Proposição 2.16. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $\varphi : I \to \mathbb{R}$ uma função convexa. Então dados a, b e $c \in I$, com $a < b < c$, temos*

$$\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a} \leq \frac{\varphi(c)-\varphi(a)}{c-a} \leq \frac{\varphi(c)-\varphi(b)}{c-b}. \tag{2.6}$$

Se φ é estritamente convexa, as desigualdades (2.6) *são estritas.*

Demonstração. Visto que $a < b < c$, obtemos após algumas manipulações algébricas que

$$b = \frac{c-b}{c-a}\,a + \frac{b-a}{c-a}\,c, \tag{2.7}$$

onde $(c-b)/(c-a) < 1$ e $(b-a)/(c-a) < 1$. Como φ é convexa, segue de (2.7) e alguns cálculos que

$$\varphi(b) - \varphi(a) \leq \left(\frac{c-b}{c-a} - 1\right)\varphi(a) + \frac{b-a}{c-a}\varphi(c), \tag{2.8}$$

que é equivalente a

$$\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a} \leq \frac{\varphi(c)-\varphi(a)}{c-a},$$

o que prova a primeira desigualdade em (2.6). A segunda desigualdade em (2.6) é feita de modo análogo. Agora, se φ é estrita para todo $a, b \in I$, então (2.8) vale para desigualdade estrita e segue-se o resultado. □

Corolário 2.17. *Sejam $\epsilon > 0$ e $\tau \in [0,1]$. Se a função $\varphi : [0,\epsilon) \to \mathbb{R}$ é convexa, então a função $l : (0,\epsilon) \to \mathbb{R}$ definida por*

$$l(x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(\tau x)}{x},$$

é não-decrescente. Se φ é estritamente convexa e $\tau \neq 1$, então l é crescente.

Demonstração. Dados $x, y \in (0,\epsilon)$ com $0 < x < y$.

Para $\tau = 1$ é trivial. Para $\tau = 0$ a prova segue como conseqüência da primeira desigualdade na Proposição 2.16 com $a = 0$, $b = x$ e $c = y$.

Agora, supondo que $\tau \in (0,1)$, então $\tau x < x < y$ e da primeira desigualdade na Proposição 2.16, temos

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(\tau x)}{x - \tau x} \leq \frac{\varphi(y)-\varphi(\tau x)}{y-\tau x}. \tag{2.9}$$

Novamente, como $\tau \in (0,1)$, também vale que $\tau x < \tau y < y$. Assim, da segunda desigualdade da Proposição 2.16, segue que

$$\frac{\varphi(y)-\varphi(\tau x)}{y-\tau x} \leq \frac{\varphi(y)-\varphi(\tau y)}{y-\tau y}. \tag{2.10}$$

Combinando (2.9) e (2.10), temos que l é não-decrescente. Agora, se φ é estritamente convexa as desigualdades na Proposição 2.16 valem para desigualdades estritas e analogamente concluímos que l é crescente. □

A seguir apresentaremos a caracterização de funções convexas de uma variável real.

Proposição 2.18. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $\varphi : I \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Então φ é convexa se, e somente se,*

$$\varphi(y) \geq \varphi(x) + \varphi'(x)(y - x), \qquad \forall\, y \in I,\ x \in int(I). \tag{2.11}$$

Se (2.11) *é estrita para todo $y \in I$ e $x \in int(I)$, então φ é estritamente convexa.*

Demonstração. Dados $y \in I$ e $x \in int(I)$, temos por hipótese que

$$\varphi\big(\lambda y + (1 - \lambda)x\big) \leq \lambda\varphi(y) + (1 - \lambda)\varphi(x).$$

Após algumas manipulações algébricas segue-se que

$$\frac{\varphi\big(x + \lambda(y - x)\big) - \varphi(x)}{\lambda} \leq \varphi(y) - \varphi(x),$$

para todo $\lambda \in [0, 1]$. Fazendo $\lambda \to 0$ na última desigualdade, temos

$$\varphi'(x)(y - x) + \varphi(x) \leq \varphi(y),$$

que prova a primeira parte.

Reciprocamente, dados $x, y \in I$. Com $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$, a convexidade é imediata. Agora, supondo que $\lambda \in (0, 1)$ tome $z = \lambda x + (1 - \lambda)y \in int(I)$, então da equação (2.11) segue que

$$\varphi'\big(\lambda x + (1 - \lambda)y\big)(1 - \lambda)(x - y) + \varphi\big(\lambda x + (1 - \lambda)y\big) \leq \varphi(x) \tag{2.12}$$

e

$$\varphi'\big(\lambda x + (1 - \lambda)y\big)\lambda(y - x) + \varphi\big(\lambda x + (1 - \lambda)y\big) \leq \varphi(y). \tag{2.13}$$

Multiplicando (2.12) por λ e (2.13) por $(1 - \lambda)$ e adicionando o resultado obtemos que

$$\varphi\big(\lambda x + (1 - \lambda)y\big) \leq \lambda\varphi(x) + (1 - \lambda)\varphi(y).$$

Portanto φ é convexa. Agora, se (2.11) é estrita para todo $x, y \in I$, então (2.12) e (2.13) valem para desigualdade estrita e analogamente concluímos que φ é estritamente convexa. $\square$

Proposição 2.19. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $\varphi : I \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Então φ é convexa se, e somente se,*

$$\big(\varphi'(x) - \varphi'(y)\big)(x - y) \geq 0, \qquad \forall\, x, y \in int(I). \tag{2.14}$$

Se (2.14) *é estrita para todo $x, y \in int(I)$, então φ é estritamente convexa.*

Demonstração. Tome $x, y \in int(I)$, como φ é convexa em I temos pela Proposição 2.18 que

$$\varphi'(x)(y-x)+\varphi(x) \leq \varphi(y) \quad \text{e} \quad \varphi'(y)(x-y)+\varphi(y) \leq \varphi(x), \tag{2.15}$$

para todo x, y no interior de I. Então, segue-se de (2.15) que

$$\varphi(x)+\varphi'(x)(y-x) \leq \varphi(y) \leq \varphi(x)+\varphi'(y)(y-x),$$

isto implica que $\big(\varphi'(x)-\varphi'(y)\big)(x-y) \geq 0$, para todo x, y no $int(I)$, o que prova a primeira parte.

Reciprocamente, é claro que o resultado é válido para $x = y$. Agora, dados $x, y \in I$ com $x \neq y$ e $\lambda \in [0, 1]$, temos pelo Teorema do Valor Médio que, para todo $a \in (x, y)$, existem c' e c'' com $c' \in (x, a)$ e $c'' \in (a, y)$ tais que

$$\varphi(a)-\varphi(x) = \varphi'(c')(a-x) \quad \text{e} \quad \varphi(y)-\varphi(a) = \varphi'(c'')(y-a).$$

Multiplicando a primeira igualdade por $-\lambda$, a segunda por $1-\lambda$, tomando $a = \lambda x+(1-\lambda)y$ e adicionando o resultado obtemos a seguinte igualdade

$$\lambda\varphi(x)+(1-\lambda)\varphi(y)-\varphi\big(\lambda x+(1-\lambda)y\big) = \varphi'(c'')(1-\lambda)\lambda(y-x)-\varphi'(c')\lambda(1-\lambda)(y-x). \tag{2.16}$$

Note que existe $k > 0$ tal que $c''-c' = k(y-x)$, ou seja, $y-x = (c''-c')/k$. Assim a igualdade anterior se reduz a

$$\lambda\varphi(x)+(1-\lambda)\varphi(y)-\varphi\big(\lambda x+(1-\lambda)y\big) = \frac{(1-\lambda)\lambda}{k}\big(\varphi'(c'')-\varphi'(c')\big)(c''-c'). \tag{2.17}$$

Como $k > 0$ e $\lambda \in [0, 1]$ segue da igualdade anterior e desigualdade (2.14) que

$$\varphi\big(\lambda x+(1-\lambda)y\big) \leq \lambda\varphi(x)+(1-\lambda)\varphi(y),$$

e portanto φ é convexa. Agora, se (2.14) é estrita para todo $x, y \in int(I)$ e como $k > 0$ e $\lambda \in (0, 1)$ na equação (2.16), então (2.17) vale para desigualdade estrita e φ é estritamente convexa. □

No próximo capítulo, estaremos interessados em analisar algumas funções em particular e obter equações que serão utilizadas na prova da convergência do método de Newton inexato e suas variações.

Capítulo 3

A Função Majorante

Para provarmos a convergência local do método de Newton inexato e suas variações usaremos o princípio majorante de Kantorovich, veja [12]. Neste capítulo, mostraremos as principais relações entre a função majorante e o operador não-linear. Iniciaremos com uma análise de uma determinada função escalar e o módulo da iteração de Newton associada a ela, a qual dará resultados importantes para o estudo das funções majorantes definidas nas seções 3.2 e 3.3. Os resultados obtidos aqui são os principais instrumentos utilizados no estudo da convergência linear.

3.1 Análise de uma Função Escalar (f)

Nesta seção nosso objetivo é analisar o comportamento de uma determinada função escalar e o módulo da iteração de Newton associada a ela.

Inicialmente, seja $R > 0$ e uma função escalar continuamente diferenciável $f : [0, R) \to \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:

h1) $f(0) = 0$ e $f'(0) = -1$;

h2) f' é convexa e crescente.

Observação 3.1. *Para uniformizar as notações sempre que usarmos f para uma função nesta dissertação, estaremos referindo a função escalar definida acima.*

A seguir faremos uma análise da função f.

Proposição 3.2. *Seja* $\nu := \sup\{t \in [0, R) : f'(t) < 0\}$. *Então valem as seguintes afirmações:*

i) ν *é positivo;*

ii) $f'(t) < 0, \quad \forall\, t \in [0,\, \nu)$;

iii) *A função* $[0,\, \nu) \ni t \mapsto 1/|f'(t)|$ *é crescente;*

iv) $t - f(t)/f'(t) < 0, \quad \forall\, t \in (0,\, \nu)$.

Demonstração. Como $f'(0) = -1$ e f' é contínua em $[0, R)$, existe $\delta > 0$ tal que $f'(t) < 0$ para todo $t \in [0,\, \delta)$. Assim, $\nu > 0$. Isto prova o item **i**.

Para provar do item **ii**, note que de **h2** temos que f' é crescente em $[0, R)$, isto junto com o item **i** implica que $f' < 0$ em $[0,\, \nu)$.

Para provar o item **iii**, note novamente que de **h2** temos que f' é crescente em $[0, R)$, isto junto com o item **ii** implica que a função $[0,\, \nu) \ni t \mapsto 1/|f'(t)|$ é crescente.

Prova do item **iv**. De **h2** temos que f' é crescente em $[0, R)$, então pela Proposição 2.19 temos que f é estritamente convexa em $[0, R)$. Assim, usando a Proposição 2.18 com $\varphi = f$, $y = 0$ e $x = t$ obtemos que

$$f(0) > f(t) - tf'(t), \qquad \forall\, t \in (0,\, R).$$

Lembrando que $f(0) = 0$ e $f' < 0$ em $(0,\, \nu)$, a desigualdade do item **iv** segue facilmente da desigualdade acima. $\square$

Proposição 3.3. *A função* $\psi : (0,\, \nu) \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$\psi(t) = \frac{f(t) + 2t}{t},$$

é não-decrescente.

Demonstração. Sejam $0 < t_1 < t_2 < \nu$. Fazendo algumas manipulações algébricas, segue-se de **h1** e do Teorema Fundamental do Cálculo que

$$\psi(t_2) - \psi(t_1) = \frac{f(t_2)}{t_2} - \frac{f(t_1)}{t_1} = \int_0^1 \left(f'(\tau t_2) - f'(\tau t_1)\right) d\tau.$$

Agora, de **h2** temos que f' é crescente. Portanto, a equação anterior implica que $\psi(t_2) - \psi(t_1) \geq 0$. Isto prova o resultado. $\square$

Seja n_f a função iteração de Newton associada a função escalar f, definida por

$$\begin{array}{rcl} n_f : [0,\, \nu) & \to & (-\infty,\, 0] \\ t & \mapsto & t - f(t)/f'(t). \end{array} \tag{3.1}$$

Da Proposição 3.2, temos que $f' < 0$ em $[0,\, \nu)$. Assim, a função iteração de Newton associada a função escalar f está bem definida em $[0,\, \nu)$.

Proposição 3.4. *A função* $(0,\, \nu) \ni t \mapsto |n_f(t)|/t^2$ *é não-decrescente.*

Demonstração. Usando o item **iv** da Proposição 3.2, o Teorema Fundamental do Cálculo e **h1** obtemos após algumas manipulações algébricas que

$$|n_f(t)| = \frac{1}{|f'(t)|}\left[tf'(t) - \int_0^1 f'(\tau t)td\tau\right], \qquad \forall\, t \in [0,\, \nu).$$

Segue imediatamente que

$$\frac{|n_f(t)|}{t^2} = \frac{1}{|f'(t)|}\int_0^1 \frac{f'(t) - f'(\tau t)}{t}\, d\tau, \qquad \forall\, t \in (0,\, \nu). \tag{3.2}$$

Agora, segue de **h2** que f' é crescente e como $\tau \in [0, 1]$ temos que a aplicação

$$(0,\, \nu) \ni t \mapsto \frac{f'(t) - f'(\tau t)}{t}, \tag{3.3}$$

é não-negativa, também de **h2** temos que f' é convexa e assim pelo Corolário 2.17 com $f' = \varphi$, $\epsilon = \nu$ e $x = t$ segue que a aplicação (3.3) é não-decrescente. Por outro lado, a Proposição 3.2 implica que a função

$$(0,\, \nu) \ni t \mapsto 1/|f'(t)|, \tag{3.4}$$

é positiva e crescente. Portanto, como as funções definidas em (3.3) e (3.4) são não-decrescentes e não-negativas, segue de (3.2) que a função $(0,\, \nu) \ni t \mapsto |n_f(t)|/t^2$ é não-decrescente. $\square$

Corolário 3.5. *A função* $(0,\, \nu) \ni t \mapsto |n_f(t)|/t$ *é não-decrescente.*

Demonstração. É imediato, basta notar que $|n_f(t)|/t = (|n_f(t)|/t^2)t$, que é o produto de funções não-decrescentes e não-negativas. $\square$

Proposição 3.6. *Dado* $0 \leq \bar{v} < 1$. *Defina a constante*

$$\bar{\rho} := \sup\left\{t \in (0, \nu) : (1+\bar{v})[f(t)/(tf'(t)) - 1] + \bar{v} < 1\right\}.$$

Então, $\bar{\rho}$ *é positiva e vale a seguinte desigualdade*

$$(1+\bar{v})|n_f(t)|/t + \bar{v} < 1, \qquad \forall\, t \in (0,\, \bar{\rho}).$$

Demonstração. Usando a definição em (3.1) e Proposição 3.2, temos que

$$0 < f(t)/(tf'(t)) - 1 = \big(f(t)/(f'(t)) - t\big)/t = |n_f(t)|/t, \qquad \forall\, t \in (0,\, \nu). \tag{3.5}$$

Assim sendo,

$$\lim_{t\to 0} |n_f(t)|/t = \lim_{t\to 0}(|n_f(t)|/t^2)\, t = 0, \tag{3.6}$$

pois a Proposição 3.4 implica que $|n_f(t)|/t^2$ é limitada próximo de zero. Portanto, como $(1-\bar{v})/(1+\bar{v}) > 0$, usando o Teorema da Permanência do Sinal, temos de (3.5) e (3.6) que existe $\bar{\delta} > 0$ tal que

$$0 < (f(t)/(tf'(t)) - 1) < (1-\bar{v})/(1+\bar{v}), \qquad \forall\, t \in (0, \bar{\delta}),$$

que pode ser escrita equivalentemente da seguinte maneira

$$0 < (1+\bar{v})[f(t)/(tf'(t)) - 1] + \bar{v} < 1, \qquad \forall\, t \in (0, \bar{\delta}). \tag{3.7}$$

Daí segue que $\bar{\rho}$ é positivo.

Finalmente, pelo Corolário 3.5 temos que a função $(0,\, \nu) \ni t \mapsto |n_f(t)|/t$ é não-decrescente. Em vista disso, para concluir a prova basta combinar (3.5) e (3.7) com a definição de $\bar{\rho}$. $\square$

Proposição 3.7. *Dadas as constantes não-negativas* $\tilde{v}$, ω_1 *e* ω_2 *satisfazendo* $\tilde{v} < 1$ *e* $\omega_1\tilde{v} + \omega_2 < 1$. *Defina*

$$\tilde{\rho} := \sup\{t \in (0, \nu) : \omega_1(1+\tilde{v})[f(t)/(tf'(t)) - 1] + \omega_1\tilde{v} + \omega_2 < 1\}.$$

Então a constante $\tilde{\rho}$ *é positiva e vale a seguinte desigualdade*

$$\omega_1(1+\tilde{v})|n_f(t)|/t + \omega_1\tilde{v} + \omega_2 < 1, \qquad \forall\, t \in (0,\, \tilde{\rho}).$$

Demonstração. Usando a definição (3.1) e Proposição 3.2, temos que

$$0 < f(t)/(tf'(t)) - 1 = \big(f(t)/(f'(t)) - t\big)/t = |n_f(t)|/t, \qquad \forall\, t \in (0,\, \nu). \tag{3.8}$$

Assim sendo,

$$\lim_{t\to 0} |n_f(t)|/t = \lim_{t\to 0}(|n_f(t)|/t^2)\, t = 0, \tag{3.9}$$

pois pela Proposição 3.4 implica que $|n_f(t)|/t^2$ é limitada próximo de zero. Portanto, como $1 - (\omega_1\tilde{v} + \omega_2)/\omega_1(1+\tilde{v}) > 0$, usando o Teorema da Permanência do Sinal, temos de (3.8) e (3.9) que existe $\tilde{\delta} > 0$ tal que

$$0 < (f(t)/(tf'(t)) - 1) < 1 - (\omega_1\tilde{v} + \omega_2)/\omega_1(1+\tilde{v}), \qquad \forall\, t \in (0, \tilde{\delta}),$$

que pode ser escrita equivalentemente da seguinte maneira

$$0 < \omega_1(1+\tilde{v})[f(t)/(tf'(t)) - 1] + \omega_1\tilde{v} + \omega_2 < 1, \qquad \forall\, t \in (0, \tilde{\delta}). \tag{3.10}$$

Daí segue que $\bar{\rho}$ é positivo.

Finalmente, pelo Corolário 3.5 temos que a função $(0,\, \nu) \ni t \mapsto |n_f(t)|/t$ é não-decrescente. Em visto disso, para concluir a prova basta combinar (3.8) e (3.10) com a definição de $\tilde{\rho}$. □

Proposição 3.8. *Dado* $0 \le \hat{v} < 1$. *Defina a constante*

$$\hat{\rho} := \sup\{t \in (0, \nu) : -(1+\hat{v})(f(t) + 2t)/tf'(t) - 1 < 1\}.$$

Então, a constante $\hat{\rho}$ *é positiva e vale a seguinte desigualdade*

$$(1+\hat{v})(f(t)+2t)/t|f'(t)| - 1 < 1, \quad \forall\, t \in (0, \hat{\rho}).$$

Demonstração. Primeiro, note que

$$\lim_{t\to 0} -(1+\hat{v})\left(\frac{f(t)}{tf'(t)} + \frac{2}{f'(t)}\right) - 1 = \lim_{t\to 0} -(1+\hat{v})\left(\frac{f(t)}{t}\frac{1}{f'(t)} + \frac{2}{f'(t)}\right) - 1 = \hat{v},$$

pois de **h1** temos $f'(0) = -1$ e $f(0) = 0$. Agora, como $\hat{v} < 1$ usando o Teorema da Permanência do Sinal, temos que existe $\hat{\delta} > 0$ tal que

$$0 < -(1+\hat{v})[f(t)/(tf'(t)) + 2/f'(t)] - 1 < 1, \qquad \forall\, t \in (0, \hat{\delta}),$$

que pode ser escrita equivalentemente da seguinte maneira

$$0 < -(1+\hat{v})(f(t)+2)/tf'(t) - 1 < 1, \qquad \forall\, t \in (0, \hat{\delta}). \tag{3.11}$$

Daí segue que $\hat{\rho}$ é positivo.

Finalmente, pelas Proposição 3.2 e Proposição 3.3 temos respectivamente que as funções $(0, \nu) \ni t \mapsto 1/|f(t)|$ e $(0, \nu) \ni t \mapsto f(t) + 2t/t$ são não-decrescente. Em vista disso, para concluir a prova basta combinar (3.11) com a definição de $\hat{\rho}$. □

3.2 A Função Majorante Radial (f_r)

Nesta seção definiremos o conceito de função majorante radial. Apresentaremos a relação entre a função majorante radial e o operador não linear, obtendo as equações que auxiliarão nos Capítulos 4 e Capítulos 5.

Definição 3.9. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciável em Ω. Tome $x_* \in \Omega$, $R > 0$ e seja $\kappa := \sup\{t \in [0, R) : B(x_*, t) \subset \Omega\}$. Suponha que $F'(x_*)$ seja não-singular e $F(x_*) = 0$. Dizemos que a função continuamente diferenciável $f_r : [0,\ R) \to \mathbb{R}$, é uma função majorante radial para o operador F se satisfaz as hipóteses* **h1**, **h2** *e a condição*

$$\left\|F'(x_*)^{-1}\left[F'(x) - F'(x_* + \tau(x - x_*))\right]\right\| \leq f_r'\left(\|x - x_*\|\right) - f_r'\left(\tau\|x - x_*\|\right), \tag{3.12}$$

para $\tau \in [0, 1]$, $x \in B(x_*, \kappa)$, $\|x - x_*\| < R$.

Observação 3.10. *Para uniformizar as notações sempre que usarmos f_r para uma função nesta dissertação, estaremos referindo a função majorante radial definida acima, isto é, satisfazendo as hipóteses* **h1**, **h2** *e a condição* (3.12). *Portanto, a Seção 3.1 será usada aqui, inclusive as notações.*

A seguir, apresentaremos as relações entre o operador não-linear F e a função majorante radial f_r.

Lema 3.11. *Seja $x \in \Omega$. Se $\|x - x_*\| < \min\{\nu, \kappa\}$, então $F'(x)$ é não-singular e*

$$\|F'(x)^{-1}F'(x_*)\| \leqslant 1/|f_r'(\|x - x_*\|)|.$$

Em particular, se $\|x - x_*\| < \sigma \leq \min\{\nu, \kappa\}$, então F' é não-singular em $B(x_*, \sigma)$.

Demonstração. Seja $x \in \Omega$ tal que $\|x - x_*\| < \min\{\nu, \kappa\}$. Portanto $f_r'(\|x - x_*\|) < 0$, o que junto com (3.12) e **h1**, implica

$$\|F'(x_*)^{-1}F'(x) - I\| = \|F'(x_*)^{-1}[F'(x) - F'(x_*)]\| \leq f_r'(\|x - x_*\|) - f_r'(0) < -f'(0) = 1.$$

Considerando a inequação anterior e o Lema de Banach, temos que $F'(x_*)^{-1}F'(x)$ é não-singular. Como $F'(x_*)^{-1}$ é não-singular, podemos concluir que $F'(x)$ é não-singular. Além disso, ainda pelo Lema de Banach

$$\|F'(x)^{-1}F'(x_*)\| \leq \frac{1}{1 - \|F'(x_*)^{-1}F'(x) - I\|}.$$

Por outro lado, usamos (3.12), **h1** e que $f_r' < 0$ em $[0, \nu)$, temos

$$\frac{1}{1 - \|F'(x_*)^{-1}F'(x) - I\|} \leq \frac{1}{1 - (f_r'(\|x - x_*\|) - f_r'(0))} = \frac{1}{|f_r'(\|x - x_*\|)|}.$$

Portanto, o resultado segue combinando as duas equações acima. A última parte do lema é imediata. □

A iteração de Newton produz um ponto que é o zero da linearização de F, tal ponto, também é a primeira-ordem da expansão de Taylor para F. Assim, estudaremos o erro linear para cada ponto em Ω

$$E_F(x, y) := F(y) - [F(x) + F'(x)(y - x)], \qquad x,\, y \in \Omega. \tag{3.13}$$

Iremos limitar este erro pelo erro da linearização da função majorante radial f_r

$$e_{f_r}(t, u) := f_r(u) - [f_r(t) + f_r'(t)(u - t)], \qquad t,\, u \in [0, R). \tag{3.14}$$

Lema 3.12. *Se $\|x_* - x\| < \kappa$, então vale $\|F'(x_*)^{-1}E_F(x, x_*)\| \leq e_{f_r}(\|x - x_*\|, 0)$.*

Demonstração. Como $B(x_*, \kappa)$ é um conjunto convexo, segue $x_* + \tau(x - x_*) \in B(x_*, \kappa)$, para $0 \leq \tau \leq 1$. Então, da definição (3.13) e usando o Teorema Fundamental do Cálculo e propriedades da norma, temos

$$\begin{aligned}
\|F'(x_*)^{-1}E_F(x, x_*)\| &= \|F'(x_*)^{-1}\big(F(x_*) - [F(x) + F'(x)(x_* - x)]\,\big)\| \\
&= \|F'(x_*)^{-1}[F'(x)(x - x_*) - \int_0^1 F'(x_* + \tau(x - x_*))d\tau(x - x_*)]\| \\
&\leq \int_0^1 \left\|F'(x_*)^{-1}[F'(x) - F'(x_* + \tau(x - x_*))]\right\| \, \|x - x_*\| \, d\tau.
\end{aligned}$$

Agora, considerando a inequação anterior, (3.12) e o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos que

$$\begin{aligned}\|F'(x_*)^{-1}E_F(x,x_*)\| &\leq \int_0^1 \left[f_r'\left(\|x-x_*\|\right) - f_r'\left(\tau\|x-x_*\|\right)\right]\|x-x_*\|\, d\tau \\ &= f_r'(\|x-x_*\|)\|x-x_*\| - \int_0^1 f_r'(\tau\|x-x_*\|)\|x-x_*\|\, d\tau \\ &= f_r(0) - f_r(\|x-x_*\|) + f_r'(\|x-x_*\|)\|x-x_*\|.\end{aligned}$$

Portanto, combinando a última desigualdade com a definição (3.14) segue a desigualdade desejada. □

Denominamos como o passo de Newton para a função F e f_r as igualdades

$$S_F(x) := F'(x)^{-1}F(x), \qquad s_{f_r}(t) := f_r'(t)^{-1}f_r(t), \tag{3.15}$$

respectivamente.

Lema 3.13. *Se* $\|x-x_*\| < \min\{\nu,\kappa\}$, *então vale* $\|S_F(x)\| \leq s_{f_r}(\|x-x_*\|)$.

Demonstração. Usando que $F(x_*) = 0$ juntamente com algumas manipulações algébricas, segue das propriedades da norma e de (3.13) que

$$\begin{aligned}\|F'(x)^{-1}F(x)\| &= \|-F'(x)^{-1}(F(x_*) - [F(x) + F'(x)(x_*-x)]) + (x_*-x)\| \\ &\leq \|F'(x)^{-1}F'(x_*)\|\|F'(x_*)^{-1}(F(x_*) - [F(x)+F'(x)(x_*-x)])\| + \|x_*-x\| \\ &= \|F'(x)^{-1}F'(x_*)\|\|F'(x_*)^{-1}E_F(x,x_*)\| + \|x-x_*\|.\end{aligned}$$

Considerando a última inequação, Lema 3.11 e Lema 3.12, temos

$$\|F'(x)^{-1}F(x)\| \leq \frac{e_{f_r}(\|x-x_*\|, 0)}{|f_r'(\|x-x_*\|)|} + \|x-x_*\|.$$

Como $\|x-x_*\| < \min\{\nu,\kappa\}$ e $f_r' < 0$ em $[0,\, \nu)$, segue da última desigualdade, definição em (3.14) e **h1**, que

$$\begin{aligned}\|F'(x)^{-1}F(x)\| &\leq \frac{f_r(0) - f_r(\|x-x_*\|) + f_r'(\|x-x_*\|)\|x-x_*\|}{-f_r'(\|x-x_*\|)} + \|x-x_*\| \\ &= \frac{f_r(\|x-x_*\|)}{f_r'(\|x-x_*\|)}.\end{aligned}$$

Portanto, esta desigualdade junto com (3.15) implica a desigualdade desejada. □

3.3 A Função Majorante Central (f_c)

Nesta seção definiremos o conceito de função majorante central. Apresentaremos a relação entre a função majorante central e o operador não linear, obtendo as equações que auxiliarão no Capítulo 6.

Definição 3.14. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciável em Ω. Tome $x_* \in \Omega$, $R > 0$ e seja $\kappa := \sup\{t \in [0, R) : B(x_*, t) \subset \Omega\}$. Suponha que $F'(x_*)$ seja não-singular e $F(x_*) = 0$. Dizemos que a função continuamente diferenciável $f_c : [0,\ R) \to \mathbb{R}$, é uma função majorante central para o operador F se satisfaz as hipóteses* **h1**, **h2** *e a condição*

$$\left\|F'(x_*)^{-1}\left[F'(x_* + \tau(x - x_*)) - F'(x_*)\right]\right\| \leq f_c'\left(\tau\|x - x_*\|\right) - f_c'\left(0\right), \tag{3.16}$$

para $\tau \in [0, 1]$, $x \in B(x_*, \kappa)$, $\|x - x_*\| < R$.

Observação 3.15. *Para uniformizar as notações sempre que usarmos f_c para uma função nesta dissertação, estaremos referindo a função majorante central definida acima, isto é, satisfazendo as hipóteses* **h1**, **h2** *e a condição* (3.16)*. Portanto, a Seção 3.1 será usada aqui, inclusive as notações.*

A seguir, apresentaremos as relações entre o operador não-linear F e a função majorante central f_c.

Lema 3.16. *Seja $x \in \Omega$. Se $\|x - x_*\| < \min\{\nu, \kappa\}$, então $F'(x)$ é não-singular e*

$$\|F'(x)^{-1}F'(x_*)\| \leqslant 1/|f_c'(\|x - x_*\|)|.$$

Em particular, se $\|x - x_*\| < \sigma \leq \min\{\nu, \kappa\}$, então F' é não-singular em $B(x_*, \sigma)$.

Demonstração. Seja $x \in \Omega$ tal que $\|x - x_*\| < \min\{\nu, \kappa\}$. Portanto $f_c'(\|x - x_*\|) < 0$, o que junto com (3.16) e **h1**, implica

$$\|F'(x_*)^{-1}F'(x) - I\| = \|F'(x_*)^{-1}[F'(x) - F'(x_*)]\| \leq f_c'(\|x - x_*\|) - f_c'(0) < -f_c'(0) = 1.$$

Considerando a inequação anterior e o Lema Banach temos que $F'(x_*)^{-1}F'(x)$ é não-singular. Assim, como $F'(x_*)^{-1}$ é não-singular, concluimos que $F'(x)$ também é não-singular. Além disso, ainda pelo Lema de Banach

$$\|F'(x)^{-1}F'(x_*)\| \leq \frac{1}{1 - \|F'(x_*)^{-1}F'(x) - I\|}.$$

Por outro lado, usamos (3.16), **h1** e que $f_c' < 0$ em $[0,\, \nu)$, temos

$$\frac{1}{1 - \|F'(x_*)^{-1}F'(x) - I\|} \leq \frac{1}{1 - (f_c'(\|x - x_*\|) - f_c'(0))} = \frac{1}{|f_c'(\|x - x_*\|)|}.$$

Portanto, o resultado segue combinando as duas equações acima. A última parte do lema é imediata. $\square$

Lema 3.17. *Se* $x, y \in B(x_*, \kappa)$, *então vale*

$$\int_0^1 \|F'(x_*)^{-1}[F'(x_* + \tau(x - x_*)) - F'(y)]\|\|x - x_*\|d\tau$$
$$\leq f_c(\|x - x_*\|) + 2\|x - x_*\| + f_c'(\|y - x_*\|)\|x - x_*\|.$$

Demonstração. Usando propriedades da norma, a desigualdade (3.16) e **h1**, obtemos após simples manipulação algébrica, que

$$\int_0^1 \|F'(x_*)^{-1}[F'(x_* + \tau(x - x_*)) - F'(y)]\|\|x - x_*\|d\tau$$
$$\leq \int_0^1 (\|F'(x_*)^{-1}[F'(x_* + \tau(x - x_*)) - F'(x_*)]\|\|x - x_*\|d\tau$$
$$+ \int_0^1 \|F'(x_*)^{-1}[F'(x_*) - F'(y)]\|\|x - x_*\|d\tau \leq \int_0^1 [f_c'(\tau\|x - x_*\|)\|x - x_*\| + \|x - x_*\|]\, d\tau$$
$$+ f_c'(\|y - x_*\|)\|x - x_*\| + \|x - x_*\|.$$

Agora, considerando a última desigualdade e o Teorema Fundamental do Cálculo, segue de **h1** que

$$\int_0^1 \|F'(x_*)^{-1}[F'(x_* + \tau(x - x_*)) - F'(y)]\|\|x - x_*\|d\tau$$
$$\leq f_c(\|x - x_*\|) + 2\|x - x_*\| + f_c'(\|y - x_*\|)\|x - x_*\|,$$

o que prova a desigualdade. $\square$

Lema 3.18. *Se* $\|x - x_*\| < \min\{\nu, \kappa\}$ *e* $\|y - x_*\| < \min\{\nu, \kappa\}$, *então vale*

$$\|F'(y)^{-1}F(x)\| \leq (f_c(\|x - x_*\|) + 2\|x - x_*\|)/|f_c'(\|y - x_*\|)|.$$

Demonstração. Usando $F(x_*) = 0$, propriedades da norma e o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos após simples manipulações algébricas que

$$\begin{aligned}
\|F'(y)^{-1}F(x)\| &= \|F'(y)^{-1}F'(x_*)\|\|F'(x_*)^{-1}(F(x) - F(x_*))\| \\
&= \|F'(y)^{-1}F'(x_*)\|\|F'(x_*)^{-1}\int_0^1 F'(x_* + \tau(x - x_*))(x - x_*)d\tau\| \\
&\leq \|F'(y)^{-1}F'(x_*)\|\int_0^1 \|F'(x_*)^{-1}(F'(x_* + \tau(x - x_*)) - F'(x_*))\|\|x - x_*\|d\tau \\
&+ \|F'(y)^{-1}F'(x_*)\|\|x - x_*\|.
\end{aligned}$$

Agora, combinando a última desigualdade com (3.16) segue do Lema 3.16 e de **h1** que

$$\begin{aligned}
\|F'(y)^{-1}F(x)\| &\leq \int_0^1 \frac{f_c'(\tau\|x - x_*\|)\|x - x_*\| - f_c'(0)\|x - x_*\|}{|f_c'(\|y - x_*\|)|}d\tau + \frac{\|x - x_*\|}{|f_c'(\|y - x_*\|)|} \\
&\leq \int_0^1 \frac{f_c'(\tau\|x - x_*\|)\|x - x_*\|}{|f_c'(\|y - x_*\|)|}d\tau + \frac{2\|x - x_*\|}{|f_c'(\|y - x_*\|)|}
\end{aligned}$$

É fácil ver que da última desigualdade junto com o Teorema Fundamental do Cálculo, segue de **h1** que

$$\|F'(y)^{-1}F(x)\| = \frac{f_c(\|x - x_*\|) + 2\|x - x_*\|}{|f_c'(\|y - x_*\|)|},$$

o que prova o lema. □

Agora com os resultados obtidos neste capítulo, estamos aptos a provar a convergência do método de Newton inexato e suas variações.

Capítulo 4

Método de Newton Inexato

Neste capítulo é feita uma discussão sobre os métodos inexatos para resolver sistemas de equações não-lineares. Comprovaremos que sob certas condições a seqüência gerada pelo método de Newton Inexato está bem definida e converge linearmente para uma solução do sistema em consideração. Encerraremos aplicando os resultados obtidos em uma situação particular.

Inicialmente, sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e uma função $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciável em Ω. Considere o sistema de equações não-lineares

$$F(x) = 0. \tag{4.1}$$

Os *métodos inexatos* com controle residual relativo escalado usados para resolver (4.1) são formalmente descritos como: dado $x_0 \in \Omega$ defina

$$x_{k+1} = x_k + s_k, \qquad B_k s_k = -F(x_k) + r_k, \quad \|P_k r_k\| \leq \theta_k \|P_k F(x_k)\|, \quad k = 0, 1, ..., \tag{4.2}$$

onde as seqüências $\{\theta_k\}$ e $\{P_k\}$, respectivamente de números reais e de matrizes $n \times n$ invertíveis, são dadas. A seqüências $\{\theta_k\}$ é usualmente chamada de seqüência"forcing" e é tomada uniformemente limitada por 1. Em particular, o processo acima é o *método de Newton inexato* se $B_k = F'(x_k)$, é o *método de Newton inexato modificado* se $B_k = F'(x_0)$ ou é o *método quase-Newton inexato* se B_k é uma aproximação de $F'(x_k)$.

Primeiro, examinaremos o método de Newton inexato, depois examinaremos os métodos inexatos quase-Newton e Newton modificado nos capítulos 5 e 6, respectivamente.

4.1 Convergência do Método de Newton Inexato

Nesta seção provaremos a convergência para o método de Newton inexato. Admitindo que o sistema não-linear (4.1) tem solução, mostraremos que, tomando o ponto inicial x_0 numa vizinhança apropriada da solução, a seqüência gerada pelo método de Newton inexato está bem definida e converge linearmente para uma solução de (4.1). Está afirmação é o teorema:

Teorema 4.1. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciável em Ω. Tome $x_* \in \Omega$, $R > 0$ e seja $\kappa := \sup\{t \in [0, R) : B(x_*, t) \subset \Omega\}$. Suponha que $F'(x_*)$ seja não-singular, $F(x_*) = 0$ e existe uma função continuamente diferenciável $f_r : [0,\ R) \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\left\|F'(x_*)^{-1}\left[F'(x) - F'(x_* + \tau(x - x_*))\right]\right\| \leq f_r'\left(\|x - x_*\|\right) - f_r'\left(\tau\|x - x_*\|\right), \tag{4.3}$$

para $\tau \in [0, 1]$, $x \in B(x_*, \kappa)$, $\|x - x_*\| < R$, onde

h1) *$f_r(0) = 0$ e $f_r'(0) = -1$;*

h2) *f_r' é convexa e crescente.*

Dado $0 \leq \bar{v} < 1$. Sejam as seguintes constantes positivas $\nu := \sup\{t \in [0, R) : f_r'(t) < 0\}$,

$$\bar{\rho} := \sup\{t \in (0, \nu) : (1 + \bar{v})[f_r(t)/(tf_r'(t)) - 1] + \bar{v} < 1\}, \qquad \sigma := \min\{\kappa,\ \bar{\rho}\}.$$

Dadas as seqüências $\{\theta_k\}$ e $\{P_k\}$, de números reais e de matrizes invertíveis, respectivamente, considere a seqüência $\{x_k\}$, definida por

$$x_{k+1} = x_k - F'(x_k)^{-1}F(x_k) + F'(x_k)^{-1}r_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, \tag{4.4}$$

onde o vetor erro r_k satisfaz a seguinte condição

$$\|P_k r_k\| \leq \theta_k \|P_k F(x_k)\|. \tag{4.5}$$

Seja $v_k := \theta_k cond(P_k F'(x_k))$. Se $v_k \leq \bar{v}$, para todo $k = 0, 1, \ldots$. Então, a seqüência (4.4) gerada pelo método de Newton inexato com controle residual relativo escalado e com ponto inicial $x_0 \in B(x_*, \sigma)/\{x_*\}$ está bem definida, está contida na $B(x_*, \sigma)$, converge para x_* e vale

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq \left[(1+\bar{v})\left(\frac{f_r(\|x_0 - x_*\|)}{\|x_0 - x_*\| f_r'(\|x_0 - x_*\|)} - 1\right) + \bar{v}\right]\|x_k - x_*\|, \quad \forall\, k = 0, 1, \ldots. \tag{4.6}$$

Observação 4.2. *Combinando a desigualdade* (4.6)*, a definição de* σ *e a Proposição 3.6, obtemos que* $\{x_k\}$ *converge linearmente para* x_**.*

Para provar o Teorema 4.1 precisaremos de alguns resultados. Para isso, assumimos que as hipóteses do Teorema 4.1 são válidas.

Observamos que todas as afirmações que faremos nesta seção envolvendo a *função majorante radial* f_r, o módulo da iteração de Newton associada a ela n_{f_r} e as suas relações com operador não-linear considerado foram provadas nas Seções 3.1 e 3.2, respectivamente.

Primeiramente, como Ω é aberto é imediato concluir que $\kappa > 0$. Agora, segue das Proposição 3.2 com $f = f_r$ e Proposição 3.6 que as constantes ν e $\bar{\rho}$ são positivas. Conseqüentemente, $\sigma > 0$.

Para facilitar a demonstração do Teorema 4.1 apresentamos o seguinte resultado auxiliar.

Lema 4.3. *Seja a seqüência* $\{x_k\}$ *como definida no Teorema 4.1. Se* $x_k \in B(x_*, \sigma)/\{x_*\}$*, então*

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq \left[(1+\bar{v})\frac{|n_{f_r}(\|x_k - x_*\|)|}{\|x_k - x_*\|} + \bar{v}\right] \|x_k - x_*\| < \|x_k - x_*\|. \tag{4.7}$$

Como consequência, a sequência $\{x_k\}$ *está bem definida e* $\{x_k\} \subset B(x_*, \sigma)$*.*

Demonstração. Como $x_k \in B(x_*, \sigma)/\{x_*\}$ segue do Lema 3.11 que $F'(x_k)$ é não-singular. Assim, x_{k+1} está bem definida. Já que $F(x_*) = 0$, usando a definição em (3.13) obtemos, após simples cálculos, que

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x_* &= x_k - x_* - F'(x_k)^{-1}(F(x_k) - F(x_*)) + F'(x_k)^{-1} r_k \\ &= F'(x_k)^{-1}\left(F(x_*) - [F(x_k) + F'(x_k)(x_* - x_k)]\right) + F'(x_k)^{-1} r_k \\ &= F'(x_k)^{-1} E_F(x_k, x_*) + F'(x_k)^{-1} r_k. \end{aligned}$$

Reunindo a última igualdade com algumas propriedades da norma, obtemos após simples manipulações algébrica que

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq \|F'(x_k)^{-1}F'(x_*)\| \|F'(x_*)^{-1}E_F(x_k, x_*)\| + \|F'(x_k)^{-1}P_k^{-1}\| \|P_k r_k\|.$$

Agora, considerando a desigualdade acima junto com (4.5) é fácil ver que

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq \|F'(x_k)^{-1}F'(x_*)\| \|F'(x_*)^{-1}E_F(x_k, x_*)\| + \theta_k \|F'(x_k)^{-1}P_k^{-1}\| \|P_k\, F(x)\|.$$

Sendo $v_k = \theta_k \|(P_k' F(x_k))^{-1}\| \|P_k F'(x_k)\| \leq \bar{v} < 1$, para $k = 0, 1, \ldots$, segue da definição em (3.15) que

$$\theta_k \|F'(x_k)^{-1} P_k^{-1}\| \|P_k\, F(x_k)\| \leq \theta_k \|(P_k' F(x_k))^{-1}\| \|P_k F'(x_k)\| \|S_F(x_k)\| \leq \bar{v} \|S_F(x_k)\|.$$

Assim, obtemos imediatamente das duas últimas equações que

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq \|F'(x_k)^{-1} F'(x_*)\| \|F'(x_*)^{-1} E_F(x_k, x_*)\| + \bar{v} \|S_F(x_k)\|.$$

Combinando a desigualdade anterior com o Lema 3.11, Lema 3.12 e Lema 3.13, obtemos

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq \frac{e_{f_r}(||x_k - x_*||, 0)}{|f_r'(||x_k - x_*||)|} + \bar{v}\, s_{f_r}(||x_k - x_*||).$$

Por outro lado, usando as definições em (3.14), (3.1) e (3.15), segue de **h1** que

$$\frac{e_{f_r}(\|x_k - x_*\|, 0)}{|f_r'(\|x_k - x_*\|)|} = |n_{f_r}(\|x_k - x_*\|)|, \qquad s_{f_r}(||x_k - x_*||) = |n_{f_r}(\|x_k - x_*\|)| + \|x_k - x_*\|.$$

Portanto, usando a desigualdade acima e as duas últimas igualdades concluímos que

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq (1 + \bar{v}) |n_{f_r}(\|x_k - x_*\|)| + \bar{v} \|x_k - x_*\|,$$

que é obviamente equivalente a primeira desigualdade do lema. Agora, pelas hipóteses do Teorema 4.1 temos que $\sigma \leq \bar{\rho}$ e $v_k \leq \bar{v} < 1$. Assim pelas Proposição 3.6 obtemos a seguinte desigualdade $(1 + \bar{v}) |n_{f_r}(\|x_k - x_*\|)| / \|x_k - x_*\| + \bar{v} < 1$. Diante disso, segue da primeira desigualdade em (4.7) que

$$\|x_{k+1} - x_*\| < \|x_k - x_*\|,$$

concluindo a primeira parte.

Para concluir a prova, note que por hipótese $x_0 \in B(x_*, \sigma)/\{x_*\}$. Suponhamos por indução que $x_k \in B(x_*, \sigma)/\{x_*\}$. Como já observamos $F'(x_k)$ é não-singular e assim x_{k+1} está bem definido. Agora, desde que $\|x_k - x_*\| < \sigma$ segue da última desigualdade do lema que $\|x_{k+1} - x_*\| < \sigma$, isto é, $x_{k+1} \in B(x_*, \sigma)/\{x_*\}$ o que conclui a prova. $\square$

4.1.1 Prova do Teorema 4.1

Façamos agora a demonstração do Teorema 4.1.

Demonstração. Primeiro, note que estamos sob as hipóteses $\sigma \leq \bar{\rho} < \nu$, $x_0 \in B(x_*, \sigma)$ e

$$v_k = \theta_k cond(P_k F'(x_k)) \leq \bar{v} < 1, \qquad \forall\, k = 0, 1, \ldots.$$

Usando o Lema 4.3 podemos concluir que $\{x_k\}$ é bem definida e está contida em $B(x_*, \sigma)$. Ainda pelo Lema 4.3 concluímos que a seqüência $\{\|x_k - x_*\|\}$ é decrescente, isto é,

$$\|x_{k+1} - x_*\| < \|x_k - x_*\|, \qquad \forall\, k = 0, 1, \ldots. \tag{4.8}$$

Agora, iremos provar a convergência de $\{x_k\}$. Visto que, o Corolário 3.5 implica, em particular, que a aplicação $(0, \sigma) \ni t \mapsto |n_{f_r}(t)|/t$ é não-decrescente, segue das desigualdades (4.8) e da primeira desigualdade em (4.7) que

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq \left[(1 + \bar{v})\frac{|n_{f_r}(\|x_0 - x_*\|)|}{\|x_0 - x_*\|} + \bar{v}\right] \|x_k - x_*\|, \quad \forall\, k = 0, 1, \ldots. \tag{4.9}$$

Já que, pela Proposição 3.6 temos que $(1 + \bar{v})|n_{f_r}(\|x_0 - x_*\|)|/\|x_0 - x_*\| + \bar{v} < 1$, a desigualdade (4.9) junto com a Proposição 2.2 implica que a seqüência $\{x_k\}$ converge para x_*.

Finalmente, usando a definição (3.1) na inequação (4.9), obtemos após simples cálculos que

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq \left[(1 + \bar{v})\left(\frac{f_r(\|x_0 - x_*\|)}{\|x_0 - x_*\| f_r'(\|x_0 - x_*\|)} - 1\right) + \bar{v}\right] \|x_k - x_*\| \quad \forall\, k = 0, 1, \ldots,$$

concluindo a prova. $\square$

4.2 Convergência para Condição Radial Lipschitz

Em nosso estudo para o método de Newton inexato, assumimos a hipótese (4.3) que relaxa a hipótese da derivada ser radial Lipschitz, que por sua vez, relaxa a hipótese tradicional, a saber, da derivada ser Lipschitz. Nesta seção, aplicaremos os resultados para a condição radial Lipschitz.

Corolário 4.4. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciável em Ω. Tome $x_* \in \Omega$ e seja $\kappa := \sup\{t > 0 : B(x_*, t) \subset \Omega\}$. Suponha que $F'(x_*)$ seja não-singular, $F(x_*) = 0$ e existe $K > 0$ tal que*

$$\left\|F'(x_*)^{-1}\left[F'(x) - F'(x_* + \tau(x - x_*))\right]\right\| \leq (1 - \tau)K\|x - x_*\|,$$

para $\tau \in [0,1]$, $x \in B(x_*, \kappa)$, $\|x - x_*\| < R$.

Dado $0 \le \bar{v} < 1$. *Seja*

$$\sigma := \min\{\kappa,\ 2(1-\bar{v})/\left(K(3-\bar{v}\right)\})\,.$$

Dadas as seqüências $\{\theta_k\}$ *e* $\{P_k\}$, *de números reais e de matrizes invertíveis, respectivamente, considere a seqüência* $\{x_k\}$, *definida por*

$$x_{k+1} = x_k - F'(x_k)^{-1}F(x_k) + F'(x_k)^{-1}r_k, \qquad k = 0,1,\ldots. \tag{4.10}$$

onde o vetor erro r_k *satisfaz a seguinte condição*

$$\|P_k r_k\| \le \theta_k \|P_k F(x_k)\|.$$

Seja $v_k = \theta_k cond(P_k F'(x_k))$. *Se* $v_k \le \bar{v}$, *para todo* $k = 0,1,\ldots$. *Então, a seqüência* (4.10) *gerada pelo método de Newton inexato com controle residual relativo escalado e com ponto inicial* $x_0 \in B(x_*, \sigma)/\{x_*\}$ *está bem definida, está contida em* $B(x_*, \sigma)$, *converge para* x_* *e vale*

$$\|x_{k+1} - x_*\| \le \left[\bar{v} + \frac{K\|x_0 - x_*\|(1+\bar{v})}{2(1 - K\|x_0 - x_*\|)}\right]\|x_k - x_*\|, \quad k = 0,1,\ldots.$$

Demonstração. É imediato que $h : [0,\kappa) \to \mathbb{R}$, definida por $h(t) = Kt^2/2 - t$, satisfaz as condições **h1** e **h2** no Teorema 4.1. Também, note que para $t < 1/K$

$$h'(t) = Kt - 1 < 0.$$

Além disso, para $t < 2(1-\bar{v})/K(3-\bar{v})$ temos

$$(1+\bar{v})[h(t)/(th'(t)) - 1] + \bar{v} < 1.$$

Portanto, as constantes $\bar{\rho}$ e ν definidas no Teorema 4.1 são

$$\bar{\rho} = 2(1-\bar{v})/\left(K(3-\bar{v})\right) \le \nu = 1/K.$$

Assim, tomando $f_r = h$, temos F, σ, h e x_0 satisfazendo todas as hipóteses do Teorema 4.1. Portanto, todas afirmações deste teorema estão provadas como conseqüência do Teorema 4.1. □

No próximo capítulo, estaremos interessados em provar a convergência do método quase-Newton inexato. Utilizaremos raciocínio análogo ao deste capítulo.

Capítulo 5

Método Quase-Newton Inexato

Neste capítulo provaremos a convergência do método quase-Newton inexato para resolver sistemas de equações não-lineares. Comprovaremos que sob certas condições a seqüência gerada pelo método está bem definida e converge linearmente para uma solução do sistema em consideração. Encerraremos, aplicando os resultados obtidos em uma situação particular.

5.1 Convergência do Método Quase-Newton Inexato

Nesta seção provaremos a convergência para o método quase-Newton inexato.

Inicialmente, sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e uma função $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciável em Ω. Considere o sistema de equações não-lineares

$$F(x) = 0. \tag{5.1}$$

O *método quase-Newton inexato* usado para resolver (5.1) é o caso onde admitimos que B_k seja uma aproximação de $F'(x_k)$ em (4.2).

Supondo que o sistema não-linear (5.1) tem solução, mostraremos que, tomando o ponto inicial x_0 numa vizinhança apropriada da solução, a seqüência gerada pelo método quase-Newton inexato está bem definida e converge linearmente para uma solução de (5.1). Está afirmação é o teorema:

Teorema 5.1. *Sejam* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *um conjunto aberto e* $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *continuamente diferenciável em* Ω. *Tome* $x_* \in \Omega$, $R > 0$ *e seja* $\kappa := \sup\{t \in [0, R) : B(x_*, t) \subset \Omega\}$. *Suponha que* $F'(x_*)$ *seja não-singular,* $F(x_*) = 0$ *e existe uma função continuamente diferenciável* $f_r : [0,\ R) \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$\left\|F'(x_*)^{-1}\left[F'(x) - F'(x_* + \tau(x - x_*))\right]\right\| \leq f_r'\left(\|x - x_*\|\right) - f_r'\left(\tau\|x - x_*\|\right), \tag{5.2}$$

para $\tau \in [0, 1]$, $x \in B(x_*, \kappa)$, $\|x - x_*\| < R$, *onde*

h1) $f_r(0) = 0$ *e* $f_r'(0) = -1$;

h2) f_r' *é convexa e crescente.*

Dada as constantes não-negativas $\tilde{v}$, ω_1 *e* ω_2 *satisfazendo* $\tilde{v} < 1$ *e* $\omega_1\tilde{v} + \omega_2 < 1$, *considere as constante positivas* $\nu := \sup\{t \in [0, \kappa) : f_r'(t) < 0\}$,

$$\tilde{\rho} := \sup\{t \in (0, \nu) : \omega_1(1 + \tilde{v})[f_r(t)/(tf_r'(t)) - 1] + \omega_1\tilde{v} + \omega_2 < 1\}, \quad \sigma := \min\{\kappa,\ \tilde{\rho}\}.$$

Dadas as seqüências $\{\theta_k\}$ *e* $\{P_k\}$, *de números reais e de matrizes invertíveis respectivamente, considere* $B(x_k)$ *uma aproximação para* $F'(x_k)$, *onde* $B(x_k)$ *é invertível e satisfaz*

$$\|B(x_k)^{-1}F'(x_k)\| \leq \omega_1, \quad \|B(x_k)^{-1}F'(x_k) - I\| \leq \omega_2, \qquad \forall\, k = 0, 1, \ldots. \tag{5.3}$$

Considere a seqüência

$$x_{k+1} = x_k - B(x_k)^{-1}F(x_k) + B(x_k)^{-1}r_k, \qquad \forall\, k = 0, 1, \ldots, \tag{5.4}$$

onde o vetor erro r_k *satisfaz a seguinte condição*

$$\|P_k r_k\| \leq \theta_k \|P_k F(x_k)\|. \tag{5.5}$$

Seja $v_k = \theta_k cond(P_k F'(x_k))$. *Se* $v_k \leq \tilde{v}$, *para todo* $k = 0, 1, \ldots$. *Então, a seqüência* (5.4) *gerada pelo método quase-Newton inexato com controle residual relativo escalado e com ponto inicial* $x_0 \in B(x_*, \sigma)/\{x_*\}$ *está bem definida, está contida na* $B(x_*, \sigma)$, *converge para* x_* *e vale*

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq \left[\omega_1(1 + \tilde{v})\left(\frac{f_r(\|x_0 - x_*\|)}{\|x_0 - x_*\| f_r'(\|x_0 - x_*\|)} - 1\right) + \omega_1\tilde{v} + \omega_2\right]\|x_k - x_*\|, \tag{5.6}$$

para todo $k = 0, 1, \ldots$.

Observação 5.2. *Combinando a desigualdade* (5.6)*, a definição de σ e a Proposição 3.7, obtemos que $\{x_k\}$ converge linearmente para x_*.*

Para provar o Teorema 5.1 precisaremos de alguns resultados. Para isso, assumimos que as hipóteses do Teorema 5.1 são válidas.

Observamos que todas as afirmações que faremos nesta seção envolvendo a *função majorante radial* f_r, o módulo da iteração de Newton associada a ela n_{f_r} e as suas relações com operador não-linear considerado foram provadas nas Seções 3.1 e 3.2, respectivamente.

Primeiramente, como Ω é aberto é imediato concluir que $\kappa > 0$. Agora, segue das Proposição 3.2 com $f = f_r$ e Proposição 3.7 que as constantes ν e $\bar{\rho}$ são positivas. Conseqüentemente, $\sigma > 0$.

Para facilitar a demonstração do Teorema 5.1 apresentamos o seguinte resultado auxiliar.

Lema 5.3. *Seja a seqüência $\{x_k\}$ como definida no Teorema 5.1. Se $x_k \in B(x_*, \sigma)/\{x_*\}$, então*

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq \left[\omega_1(1+\tilde{v})\frac{|n_f(\|x_k - x_*\|)|}{\|x_k - x_*\|} + \omega_1\tilde{v} + \omega_2\right]\|x_k - x_*\| < \|x_k - x_*\|. \tag{5.7}$$

Como consequência, a sequência $\{x_k\}$ está bem definida e $\{x_k\} \subset B(x_*, \sigma)$.

Demonstração. Como $x_k \in B(x_*, \sigma)/\{x_*\}$ segue do Lema 3.11 que $F'(x_k)$ é não-singular. Assim, x_{k+1} está bem definida. Já que $F(x_*) = 0$, usando a definição em (3.13), obtemos após simples cálculos que

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x_* &= x_k - x_* - B(x_k)^{-1}(F(x_k) - F(x_*)) + B(x_k)^{-1}r_k \\ &= B(x_k)^{-1}\big(F(x_*) - [F(x_k) + F'(x_k)(x_* - x_k)]\big) + (B(x_k)^{-1}F'(x_k) - I)(x_* - x_k) \\ &\quad + B(x_k)^{-1}r_k \\ &= B(x_k)^{-1}E_F(x_k, x_*) + (B(x_k)^{-1}F'(x_k) - I)(x_* - x_k) + B^{-1}(x_k)r_k. \end{aligned}$$

Reunindo a última igualdade com algumas propriedades da norma, obtemos após simples manipulações algébricas que

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x_*\| \leq{}& \|B(x_k)^{-1}F'(x_k)\|\|F'(x_k)^{-1}F'(x_*)\|\|F'(x_*)^{-1}E_F(x_k, x_*)\| \\ &+ \|B(x_k)^{-1}F'(x_k) - I\|\|x_k - x_*\| + \|B(x_k)^{-1}F'(x_k)\|\|F'(x_k)^{-1}P_k^{-1}\|\|P_k r_k\|. \end{aligned}$$

Considerando a desigualdade acima junto com as hipóteses (5.3) e (5.5) é fácil ver, que

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq \omega_1 \|F'(x_k)^{-1} F'(x_*)\| \|F'(x_*)^{-1} E_F(x_k, x_*)\| \\ + \omega_2 \|x_k - x_*\| + \omega_1 \theta \|F'(x_k)^{-1} P_k^{-1}\| \|P_k\, F(x_k)\|.$$

Sendo $v_k = \theta_k \|(P_k' F(x_k))^{-1}\| \|P_k F'(x_k)\| \leq \tilde{v} < 1$, para $k = 0, 1, \ldots$, segue da definição em (3.15) que

$$\omega_1 \theta_k \|F'(x_k)^{-1} P_k^{-1}\| \|P_k\, F(x_k)\| \leq \omega_1 \theta_k \|(P_k' F(x_k))^{-1}\| \|P_k F'(x_k)\| \|S_F(x_k)\| \leq \omega_1 \tilde{v} \|S_F(x_k)\|.$$

Assim, obtemos imediatamente das duas últimas equações que

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq \omega_1 \|F'(x_k)^{-1} F'(x_*)\| \|F'(x_*)^{-1} E_F(x_k, x_*)\| + \omega_2 \|x_k - x_*\| + \omega_1 \tilde{v} \|S_F(x_k)\|.$$

Combinando a última desigualdade com o Lemas 3.11, Lema 3.12 e Lema 3.13, obtemos

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq \omega_1 \frac{e_{f_r}(||x_k - x_*||, 0)}{|f_r'(||x_k - x_*||)|} + \omega_2 \|x_k - x_*\| + \omega_1 \tilde{v}\, s_{f_r}(||x_k - x_*||).$$

Por outro lado, usando as definições em (3.14), (3.1) e (3.15), segue de **h1** que

$$\frac{e_{f_r}(\|x_k - x_*\|, 0)}{|f_r'(\|x_k - x_*\|)|} = |n_{f_r}(\|x_k - x_*\|)|, \qquad s_{f_r}(||x_k - x_*||) = |n_{f_r}(\|x_k - x_*\|)| + \|x_k - x_*\|.$$

Portanto, usando a desigualdade acima e as duas últimas igualdades concluímos que

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq \omega_1 (1 + \tilde{v}) |n_{f_r}(\|x_k - x_*\|)| + \omega_2 \|x_k - x_*\| + \omega_1 \tilde{v} \|x_k - x_*\|,$$

que é obviamente equivalente a primeira desigualdade do lema. Agora, pelas hipóteses do Teorema 5.1 temos que $\sigma \leq \tilde{\rho}$, $v_k \leq \tilde{v} < 1$ e $\omega_1 \tilde{v} + \omega_2 < 1$. Assim pela Proposição 3.7 obtemos a seguinte desigualdade $\omega_1 (1 + \tilde{v}) |n_{f_r}(\|x_k - x_*\|)| / \|x_k - x_*\| + \omega_1 \tilde{v} + \omega_2 < 1$. Diante disso, segue da primeira desigualdade em (5.7) que

$$\|x_{k+1} - x_*\| < \|x_k - x_*\|,$$

concluindo a primeira parte.

Para concluir a prova, note que por hipótese $x_0 \in B(x_*, \sigma)/\{x_*\}$. Suponhamos por indução que $x_k \in B(x_*, \sigma)/\{x_*\}$. Como já observamos $F'(x_k)$ é não-singular e assim x_{k+1} está bem definido. Agora, desde que $\|x_k - x_*\| < \sigma$ segue da última desigualdade do lema que $\|x_{k+1} - x_*\| < \sigma$, isto é, $x_{k+1} \in B(x_*, \sigma)/\{x_*\}$ o que conclui a prova. □

5.1.1 Prova do Teorema 5.1

Façamos agora a demonstração do Teorema 5.1.

Demonstração. Primeiro, note que estamos sob as hipóteses que $\sigma \leq \tilde{\rho} < \nu$, $\omega_1 + \omega_2 \leq 1$, $x_0 \in B(x_*, \sigma)$ e

$$v_k = \theta_k cond(P_k F'(x_k)) \leq \tilde{v} < 1 \qquad \forall\, k = 0, 1, \ldots.$$

Usando o Lema 5.3 podemos concluir que $\{x_k\}$ é bem definida e está contida em $B(x_*, \sigma)$. Ainda pelo Lema 5.3 concluímos que a seqüência $\{\|x_k - x_*\|\}$ é decrescente, isto é,

$$\|x_{k+1} - x_*\| < \|x_k - x_*\|, \qquad \forall\, k = 0, 1, \ldots. \tag{5.8}$$

Agora, iremos provar a convergência de $\{x_k\}$. Visto que, o Corolário 3.5 implica, em particular, que a aplicação $(0,\, \sigma) \ni t \mapsto |n_{f_r}(t)|/t$ é não-decrescente, segue da desigualdade (5.8) e da primeira desigualdade em (4.7) que

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq \left[\omega_1(1+\tilde{v})\frac{|n_{f_r}(\|x_0 - x_*\|)|}{\|x_0 - x_*\|} + \omega_1\tilde{v} + \omega_2\right]\|x_k - x_*\|, \quad \forall\, k = 0, 1, \ldots. \tag{5.9}$$

Já que, pela Proposição 3.7 temos que $\omega_1(1+\tilde{v})|n_{f_r}(\|x_0 - x_*\|)|/\|x_0 - x_*\| + \omega_1\tilde{v} + \omega_2 < 1$, a desigualdade (5.9) junto com a Proposição 2.2 implica que a seqüência $\{x_k\}$ converge para x_*.
Finalmente, usando a definição 3.1 na equação 5.9, obtemos após simples cálculos que

$$\|x_* - x_{k+1}\| \leq \left[\omega_1(1+\tilde{v})\left(\frac{f_r(\|x_0 - x_*\|)}{\|x_0 - x_*\| f_r'(\|x_0 - x_*\|)} - 1\right) + \omega_1\tilde{v} + \omega_2\right]\|x_k - x_*\|,$$

para todo $k = 0, 1, \ldots$, concluindo a prova. □

5.2 Resultados para Condição Radial Lipschitz

Em nosso estudo para o método quase-Newton inexato, assumimos a hipótese (5.2) que relaxa a hipótese da derivada ser radial Lipschitz, que por sua vez, relaxa a hipótese tradicional, a saber, da derivada ser Lipschitz. Nesta seção, aplicaremos os resultados para a condição radial Lipschitz.

Corolário 5.4. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciável em Ω. Tome $x_* \in \Omega$ e seja $\kappa := \sup\{t > 0 : B(x_*, t) \subset \Omega\}$. Suponha que $F'(x_*)$ seja não-singular, $F(x_*) = 0$ e existe $K > 0$ tal que*

$$\left\|F'(x_*)^{-1}\left[F'(x) - F'(x_* + \tau(x - x_*))\right]\right\| \leq (1-\tau)K\|x - x_*\|,$$

para $\tau \in [0,1]$, $x \in B(x_*, \kappa)$, $\|x - x_*\| < R$.
Dadas as constantes não-negativas $\tilde{v}$, ω_1 e ω_2 satisfazendo $\tilde{v} < 1$ e $\omega_1\tilde{v} + \omega_2 < 1$, considere

$$\sigma := \min\left\{\kappa,\, 2(1 - \tilde{v}\omega_1 - \omega_2)/\left(K(2 + \omega_1 - \tilde{v}\omega_1 - 2\omega_2)\right)\right\}.$$

Dadas as seqüências $\{\theta_k\}$ e $\{P_k\}$, de números reais e de matrizes invertíveis respectivamente, considere $B(x_k)$ uma aproximação para $F'(x_k)$, onde $B(x_k)$ é invertível e

$$\|B(x_k)^{-1}F'(x_k)\| \leq \omega_1, \quad \|B(x_k)^{-1}F'(x_k) - I\| \leq \omega_2, \quad \forall\, k = 0, 1, \ldots.$$

Considere a seqüência

$$x_{k+1} = x_k - B(x_k)^{-1}F(x_k) + B(x_k)^{-1}r_k, \qquad \forall\, k = 0, 1, \ldots, \tag{5.10}$$

onde o vetor erro r_k satisfaz a seguinte condição

$$\|P_k r_k\| \leq \theta_k \|P_k F(x_k)\|.$$

Seja $v_k = \theta_k cond(P_k F'(x_k))$. Se $v_k \leq \tilde{v}$, para todo $k = 0, 1, \ldots$. Então, a seqüência (5.10) gerada pelo método quase-Newton inexato com controle residual relativo escalado e com ponto inicial $x_0 \in B(x_*, \sigma)/\{x_*\}$ está bem definida, está contida na $B(x_*, \sigma)$, converge para x_* e vale

$$\|x_{k+1-x_*}\| \leq \left[\omega_1\tilde{v} + \frac{K\|x_0 - x_*\|\omega_1(1+\tilde{v})}{2(1 - K\|x_0 - x_*\|)} + \omega_2\right]\|x_k - x_*\|, \quad \forall\, k = 0, 1, \ldots.$$

Demonstração. É imediato que $h : [0, \kappa) \to \mathbb{R}$, definida por $h(t) = Kt^2/2 - t$, satisfaz as condições **h1** e **h2** no Teorema 5.4. Também, note que para $t < 1/K$

$$h'(t) = Kt - 1 < 0.$$

Além disso, para $t < 2(1 - \tilde{v}\omega_1 - \omega_2)/K(2 + \omega_1 - \tilde{v}\omega_1 - 2\omega_2)$ temos

$$\omega_1(1+\tilde{v})[h(t)/(th'(t)) - 1] + +\omega_1\tilde{v} + \omega_2 < 1.$$

Portanto, as constantes $\tilde{\rho}$ e ν definidos no Teorema 5.1 são

$$\tilde{\rho} = 2(1 - \tilde{v}\omega_1 - \omega_2)/\left(K(2 + \omega_1 - \tilde{v}\omega_1 - 2\omega_2)\right) \leq \nu = 1/K,$$

Assim, tomando $f_r = h$, temos F, σ, h e x_0 satisfazendo todas as hipóteses do Teorema 5.1. Portanto, todas afirmações deste teorema estão provadas como conseqüência do Teorema 5.1. □

No próximo capítulo, estaremos interessados em provar a convergência do método de Newton modificado inexato. Para isso, trocaremos a função majorante radial pela função majorante central e utilizaremos raciocínio análogo ao deste capítulo.

Capítulo 6

Método de Newton Modificado Inexato

Neste capítulo provaremos a convergência do método de Newton modificado inexato para resolver sistemas de equações não-lineares. Comprovaremos que sob certas condições a seqüência gerada pelo método está bem definida e converge linearmente para uma solução do sistema em consideração. Encerraremos, aplicando os resultados obtidos em uma situação particular.

6.1 Convergência do método de Newton modificado inexato

Nesta seção provaremos a convergência para o método de Newton modificado inexato.

Inicialmente, sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e uma função $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciável em Ω. Considere o sistema de equações não-lineares

$$F(x) = 0. \tag{6.1}$$

O *método de Newton modificado inexato* usado para resolver (6.1) é o caso onde admitimos que $B_k = F'(x_0)$ em (4.2).

Supondo que o sistema não-linear (6.1) tem solução, mostraremos que tomando o ponto inicial x_0 numa vizinhança apropriada da solução, a seqüência gerada pelo método de Newton modificado inexato está bem definida e converge linearmente para uma solução de (6.1). Está afirmação é o teorema:

Teorema 6.1. *Sejam* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *um conjunto aberto e* $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *continuamente diferenciável em* Ω. *Tome* $x_* \in \Omega$, $R > 0$ *e seja* $\kappa := \sup\{t \in [0, R) : B(x_*, t) \subset \Omega\}$. *Suponha que* $F'(x_*)$ *seja não-singular,* $F(x_*) = 0$ *e existe uma função continuamente diferenciável* $f_c : [0,\ R) \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$\left\|F'(x_*)^{-1}\left[F'(x_* + \tau(x - x_*)) - F'(x_*)\right]\right\| \leq f_c'\left(\tau\|x - x_*\|\right) - f_c'\left(0\right), \tag{6.2}$$

para $\tau \in [0, 1]$, $x \in B(x_*, \kappa)$, $\|x - x_*\| < R$, *onde*

h1) $f_c(0) = 0$ *e* $f_c'(0) = -1$;

h2) f_c' *é convexa e crescente.*

Dado $0 \leq \hat{v} < 1$, *considere as constantes positivas* $\nu := \sup\{t \in [0, \kappa) : f_c'(t) < 0\}$,

$$\hat{\rho} := \sup\{t \in (0, \nu) : -(1 + \hat{v})(f_c(t) + 2t)/\left(tf_c'(t)\right) - 1 < 1\}, \quad \sigma := \min\left\{\kappa,\ \hat{\rho}\right\}.$$

Dadas as seqüências $\{\theta_k\}$ *e* $\{P_k\}$, *de números reais e de matrizes invertíveis respectivamente, considere a seqüência*

$$x_{k+1} = x_k - F'(x_0)^{-1}F(x_k) + F'(x_0)^{-1}r_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, \tag{6.3}$$

onde o vetor erro r_k *satisfaz a seguinte condição*

$$\|P_k r_k\| \leq \theta_k \|P_k F(x_k)\|, \qquad k = 0, 1, \ldots. \tag{6.4}$$

Seja $v_k = \theta_k cond(P_k F'(x_0))$. *Se* $v_k \leq \hat{v}$, *para todo* $k = 0, 1, \ldots$. *Então, a seqüência* (6.3) *gerada pelo método de Newton modificado inexato com controle residual relativo escalado e com ponto inicial* $x_0 \in B(x_*, \sigma)/\{x_*\}$ *está bem definida, está contida em* $B(x_*, \sigma)$, *converge para* x_* *e vale*

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq \left[-\left(1 + \hat{v}\right)\left(\frac{f_c(\|x_0 - x_*\|) + 2\|x_0 - x_*\|}{\|x_0 - x_*\| f_c'(\|x_0 - x_*\|)}\right) - 1\right]\|x_k - x_*\|, \tag{6.5}$$

para todo $k = 0, 1, \ldots$.

Observação 6.2. *Combinando a desigualdade* (6.5)*, a definição de* σ *e a Proposição 3.8, obtemos que* $\{x_k\}$ *converge linearmente para* x_*.

Para provar o Teorema 6.1 precisaremos de alguns resultados. Para isso, assumimos que as hipóteses do Teorema 6.1 são válidas.

Observamos que todas as afirmações que faremos nesta seção envolvendo a *função majorante central* f_c, o módulo da iteração de Newton associada a ela n_{f_c} e as suas relações com operador não-linear considerado foram provadas nas Seções 3.1 e 3.3, respectivamente.

Primeiramente, como Ω é aberto é imediato concluir que $\kappa > 0$. Agora, segue das Proposição 3.2 com $f = f_c$ e Proposição 3.8 que as constantes ν e $\hat{\rho}$ são positivas. Conseqüentemente, $\sigma > 0$.

Para facilitar a demonstração do Teorema 6.1 apresentamos o seguinte resultado auxiliar.

Lema 6.3. *Seja a seqüência* $\{x_k\}$ *como definida no Teorema 6.1. Se* $x_k \in B(x_*, \sigma)/\{x_*\}$*, então*

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq \left[(1 + \hat{v}) \left(\frac{f_c(\|x_k - x_*\|) + 2\|x_k - x_*\|}{\|x_k - x_*\| |f_c'(\|x_0 - x_*\|)|}\right) - 1\right] \|x_k - x_*\|.$$

Demonstração. Como $x_k \in B(x_*, r)/\{x_*\}$ segue do Lema 3.16 que $F'(x_k)$ é não-singular. Assim, x_{k+1} está bem definida. Usando $F(x_*) = 0$ e o Teorema Fundamental do cálculo obtemos, após algumas manipulações algébrica que

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x_* &= x_k - x_* - F'(x_0)^{-1}(F(x_k) - F(x_*)) + F'(x_0)^{-1} r_k \\ &= x_k - x_* - F'(x_0)^{-1} \int_0^1 F'(x_* + \tau(x_k - x_*))(x_k - x_*) d\tau + F'(x_0)^{-1} r_k \\ &= -F'(x_0)^{-1} \int_0^1 \left(F'(x_* + \tau(x_k - x_*)) - F'(x_0)\right)(x_k - x_*) d\tau + F'(x_0)^{-1} P_k^{-1} P_k r_k. \end{aligned}$$

Reunindo a última igualdade com algumas propriedades da norma, obtemos após simples cálculos que

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x_*\| \leq{}& \|F'(x_0)^{-1} F'(x_*)\| \int_0^1 \|F'(x_*)^{-1}(F'(x_* + \tau(x_k - x_*)) - F'(x_0))\| d\tau \|x_k - x_*\| \\ &+ \|F'(x_0)^{-1} P_k^{-1}\| \|P_k r_k\|. \end{aligned}$$

Agora, considerando a desigualdade acima junto com (6.4) é fácil ver que

$$\begin{aligned}\|x_{k+1}-x_*\| \leq \|F'(x_0)^{-1}F'(x_*)\| \int_0^1 \|F'(x_*)^{-1}(F'(x_*+\tau(x_k-x_*)) - F'(x_0))\| d\tau \|x_k - x_*\| \\ + \theta_k \|F'(x_0)^{-1}P_k^{-1}\| \|P_k\, F(x_k)\|.\end{aligned}$$

Por outro lado, como $v_k = \theta_k \|(P_k' F(x_0))^{-1}\| \|P_k F'(x_0)\| \leq \hat{v} < 1$, para $k = 0, 1, \ldots,$ obtemos após simples manipulações algébricas que

$$\begin{aligned}\theta_k \|F'(x_0)^{-1}P_k^{-1}\| \|P_k\, F(x_k)\| &\leq \theta_k \|(P_k' F(x_0))^{-1}\| \|P_k F'(x_0)\| \| \|F'(x_0)^{-1}F(x_k)\| \\ &\leq \hat{v} \|F'(x_0)^{-1}F(x_k)\|.\end{aligned}$$

Assim, obtemos imediatamente das duas últimas equações que

$$\begin{aligned}\|x_{k+1}-x_*\| \leq \|F'(x_0)^{-1}F'(x_*)\| \int_0^1 \|F'(x_*)^{-1}(F'(x_*+\tau(x_k-x_*)) - F'(x_0))\| d\tau \|x_k - x_*\| \\ + \hat{v} \|F'(x_0)^{-1}F(x_k)\|.\end{aligned}$$

Combinando a última desigualdade, com o Lemas 3.16, Lema 3.17 e Lema 3.18, obtemos

$$\begin{aligned}\|x_{k+1}-x_*\| &\leq \frac{f_c(\|x_k - x_*\|) + 2\|x_k - x_*\| + f_c'(\|x_0 - x_*\|)\|x_k - x_*\|}{|f_c'(||x_0 - x_*||)|} \\ &+ \hat{v} \frac{f_c(\|x_k - x_*\|) + 2\|x_k - x_*\|}{|f_c'(\|x_0 - x_*\|)|}.\end{aligned}$$

Como $f'(\|x_0 - x_*\|) < 0$ em $(0, \sigma)$, a desigualdade acima corresponde a

$$\|x_{k+1}-x_*\| \leq (1+\hat{v}) \left(\frac{f_c(\|x_k - x_*\|) + 2\|x_k - x_*\|}{|f_c'(\|x_0 - x_*\|)|} \right) - \|x_k - x_*\|,$$

que é equivalente a desigualdade desejada. □

6.1.1 Prova do Teorema 6.1

Façamos agora a demonstração do Teorema 6.1.

Demonstração. Note que estamos sob as hipóteses que $\sigma \leq \hat{\rho} < \nu$, $x_0 \in B(x_*, \sigma)$ e

$$v_k = \theta_k cond(P_k F'(x_0)) \leq \hat{v} < 1, \qquad \forall\, k = 0, 1, \ldots.$$

Primeiro, mostraremos por indução que a seqüencia $\{\|x_k - x_*\|\}$ é decrescente, isto é,

$$\|x_{k+1} - x_*\| < \|x_k - x_*\|, \qquad k = 0, 1, \ldots. \tag{6.6}$$

Como x_0 está contida na $B(x_*, \sigma)$, obtemos do Lema 6.3 que

$$\|x_1 - x_*\| \leq \left[(1+\hat{v})\left(\frac{f_c(\|x_0 - x_*\|) + 2\|x_0 - x_*\|}{\|x_0 - x_*\||f_c'(\|x_0 - x_*\|)|}\right) - 1\right]\|x_0 - x_*\|.$$

Por outro lado, como x_0 está contida na $B(x_*, \sigma)$ segue da Proposição 3.8 a seguinte desigualdade

$$[(1+\hat{v})(f_c(\|x_0 - x_*\|) + 2\|x_0 - x_*\| / \left(\|x_0 - x_*\||f_c'(\|x_0 - x_*\|)|\right) 1] < 1. \tag{6.7}$$

Daí, combinando as duas últimas desigualdades concluímos que $\|x_1 - x_*\| < \|x_0 - x_*\|$.

Agora, suponha que (6.6) seja válido para k, isto é, que $\|x_k - x_*\| < \|x_0 - x_*\| < \sigma$. Visto que, a Proposição 3.3 implica, em particular, que a aplicação $(0,\, \sigma) \ni t \mapsto f(t) + 2t/t$ é não-decrescente, segue do Lema 6.3 e da hipótese de indução que

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq \left[(1+\hat{v})\left(\frac{f_c(\|x_0 - x_*\|) + 2\|x_0 - x_*\|}{\|x_0 - x_*\||f_c'(\|x_0 - x_*\|)|}\right) - 1\right]\|x_k - x_*\|. \tag{6.8}$$

Assim, da equação anterior e (6.7) concluímos que (6.6) é válida, isto é, $\{\|x_k - x_*\|\}$ é decrescente.

Agora, como $\{\|x_k - x_*\|\}$ é decrescente obtemos do Lema 3.16 que $\{x_k\}$ está bem definida e do Lema 6.3 que $\{x_k\}$ está contida na $B(x_*, \sigma)$.

Por outro lado, obtemos das desigualdades (6.7) e (6.8) junto com a Proposição 2.2 que a seqüência $\{x_k\}$ converge para x_*.

Finalmente, usando que $f' < 0$ em $(0, \sigma)$ a desigualdade (6.8) é equivalente a desigualdade do teorema. $\square$

6.2 Resultados para Condição Central Lipschitz

Em nosso estudo para o método de Newton modificado inexato, assumimos a hipótese (6.2) que relaxa a hipótese da derivada ser radial Lipschitz, que por sua vez, relaxa a hipótese tradicional, a saber, da derivada ser Lipschitz. Nesta seção, aplicaremos os resultados para a condição radial Lipschitz.

Corolário 6.4. *Sejam* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *um conjunto aberto e* $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *continuamente diferenciável em* Ω*. Tome* $x_* \in \Omega$ *e seja* $\kappa := \sup\{t > 0 : B(x_*, t) \subset \Omega\}$*. Suponha que* $F'(x_*)$ *seja não-singular,* $F(x_*) = 0$ *e existe* $K > 0$ *tal que*

$$\left\| F'(x_*)^{-1} \left[F'(x_* + \tau(x - x_*)) - F'(x_*) \right] \right\| \leq \tau K \|x - x_*\|,$$

para $\tau \in [0, 1]$*,* $x \in B(x_*, \kappa)$*,* $\|x - x_*\| < R$*.*
Dado $0 \leq \hat{v} < 1$*, considere*

$$\sigma := \min \left\{ \kappa,\, 2(1 - \hat{v}) / \left(K(5 + \hat{v}) \right) \right\}.$$

Dadas as seqüências $\{\theta_k\}$ *e* $\{P_k\}$*, de números reais e de matrizes invertíveis respectivamente, considere a seqüência*

$$x_{k+1} = x_k - F'(x_0)^{-1} F(x_k) + F'(x_0)^{-1} r_k, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{6.9}$$

onde o vetor erro r_k *satisfaz a seguinte condição*

$$\|P_k r_k\| \leq \theta_k \|P_k F(x_k)\|.$$

Seja $v_k = \theta_k cond(P_k F'(x_0))$*. Se* $v_k \leq \hat{v}$*, para todo* $k = 0, 1, \ldots$*. Então, a seqüência* (6.9) *gerada pelo método de Newton modificado inexato com controle residual relativo escalado e com ponto inicial* $x_0 \in B(x_*, \sigma)/\{x_*\}$ *está bem definida, está contida em* $B(x_*, \sigma)$*, converge para* x_* *e vale*

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq \left[\frac{(1 + \hat{v})(2 + K\|x_0 - x_*\|)}{2(1 - K\|x_0 - x_*\|)} - 1 \right] \|x_k - x_*\|, \quad \forall\, k = 0, 1, \ldots.$$

Demonstração. É imediato que $h : [0, \kappa) \to \mathbb{R}$, definida por $h(t) = Kt^2/2 - t$, satisfaz as condições **h1** e **h2** no Teorema 6.1. Também, note que para $t < 1/K$

$$h'(t) = Kt - 1 < 0.$$

Além disso, para $t < 2(1 - \hat{v})/K(5 + \hat{v})$ temos

$$(1 + \hat{v})[-h(t)/(th'(t)) - 2/h'(t)] - 1 < 1.$$

Portanto, as constantes $\hat{\rho}$ e ν definidas no Teorema 6.1 são

$$\hat{\rho} = 2(1 - \hat{v})/K(5 + \hat{v}) \leq \nu = 1/K.$$

Assim, tomando $f_c = h$, temos F, σ, h e x_0 satisfazendo todas as hipóteses do Teorema 6.1. Portanto, todas afirmações deste teorema estão provadas como conseqüência do Teorema 6.1. □

Desta forma, com este capítulo encerramos nossa análise da convergência linear do método de Newton inexato e suas variações, sob o ponto de vista do princípio majorante de Kantorovich.

Considerações Finais

Neste trabalho, estudamos e demonstramos resultados acerca de convergência local do método de Newton inexato e suas variações.

A convergência do método de Newton inexato e suas variações foram estudadas nas referências [3], [8] e [10]. A demonstração feita em [3] é trabalhosa e seus resultados são de difíceis aplicações. Enquanto que em [8] e [10] as provas são um pouco mais simples, porém, as condições para que ocorra a convergência não estão claras. Especificamente, nesta última, as hipóteses de convergência diferem das adotadas nesta dissertação com respeito a:

- no, lugar da seguinte condição que utilizamos nos Teoremas 4.1 e 5.1

$$\left\|F'(x_*)^{-1}\left[F'(x)-F'(x_*+\tau(x-x_*))\right]\right\| \leq f_r'\left(\|x-x_*\|\right)-f_r'\left(\tau\|x-x_*\|\right),$$

onde f_r é a função majorante radial, é utilizada a condição radial Lipschitz relaxada

$$\left\|F'(x_*)^{-1}\left[F'(x)-F'(x_*+\tau(x-x_*))\right]\right\| \leq \int_{\tau\|x-x_*\|}^{\|x-x_*\|} L(u)du, \qquad o \leq \tau \leq 1, \tag{6.10}$$

onde L é uma função escalar não-decrescente.

- no, lugar da seguinte condição que utilizamos no Teorema 6.1

$$\left\|F'(x_*)^{-1}\left[F'(x_*+\tau(x-x_*))-F'(x_*)\right]\right\| \leq f_c'\left(\tau\|x-x_*\|\right)-f_c'\left(0\right),$$

onde f_c é a função majorante central, é utilizada a condição central Lipschitz relaxada

$$\left\|F'(x_*)^{-1}\left[F'(x)-F'(x_*+\tau(x-x_*))\right]\right\| \leq \int_{0}^{\tau\|x-x_*\|} L(u)du, \qquad o \leq \tau \leq 1, \tag{6.11}$$

onde L é uma função escalar não-decrescente.

Entretanto, note que as condições (6.10) e (6.11) podem ser vistas como um caso particular da função majorante radial e central, respectivamente. Para verificarmos esta afirmação, basta escolhermos as funções majorantes radial e central da seguinte forma:

$$f_r(t) = f_c(t) = \int_0^t L(u)(t-u)du - t.$$

Temos que as funções $f_r(t)$ e $f_c(t)$ definidas acima satisfazem as hipóteses **h1** e **h2**. Além disso, também temos que

$$f_r'(t) = f_c'(t) = \int_0^t L(u)du - 1.$$

Assim, obtemos após alguns cálculos que

$$f_r'(\|x-x_*\|)-f_r'(\tau\|x-x_*\|) = \int_{\tau\|x-x_*\|}^{\|x-x_*\|} L(u)du, \quad f_c'(\tau\|x-x_*\|)-f_c'(0) = \int_0^{\tau\|x-x_*\|} L(u)du,$$

o que prova nossa afirmação. De fato, podemos mostrar que as condições da função majorante radial e central, são equivalentes as condições (6.10) e (6.11) respectivamente. Mas, como adotadas aqui são mais naturais e deixam claro as suas relações com o operador não-linear, refletindo de maneira simétrica em todos os resultados.

Nossa contribuição foi reformular os teoremas de convergência para o método de Newton e suas variações usando o princípio majorante de Kantorovich. Esta nova abordagem deixou claro a relação entre a função majorante com o operador não-linear em consideração, o que não estava explícito nas outras demonstrações. Com isso, os resultados apresentados aqui tornaram a prova mais simples e mais didática.

Uma outra contribuição foi fazer um estudo completo da função majorante, onde quase todos os resultados necessários para a convergência dos métodos de Newton e suas variações foram demonstrados, deixando o texto "auto-contido".

Os Teoremas 4.1, 5.1 e 6.1 com seus respectivos Corolários 4.4, 5.4 e 6.4 dão uma estimativa para o raio de convergência dos métodos de Newton inexatos e suas variações. Até aqui sabemos que, tomando o ponto inicial x_0 em $B(x_*, \sigma)$ a seqüência gerada por estes métodos converge linearmente para uma solução do sistema não-linear. Note que, em cada caso, σ depende de $\bar{v}$, $\tilde{v}$ e $\hat{v}$. Agora, para $\bar{v}$, $\tilde{v}$ e $\hat{v}$ fixos podemos fazer a seguinte pergunta: Qual será o maior raio de convergência? No próximo exemplo, mostraremos que se considerarmos o caso em que anulamos a seqüência "forcing,"o raio de convergência dado pelo Corolário 4.4 é o maior possível.

Exemplo 6.5. *Considere a função*

$$F(x) = \begin{cases} -x + \frac{1}{3}x^2, & 0 \le x \le 2; \\ -x - \frac{1}{3}x^2, & -2 \le x < 0. \end{cases}$$

Então,

$$F'(x) = \begin{cases} -1 + \frac{2}{3}x, & 0 \le x \le 2; \\ -1 - \frac{2}{3}x, & -2 \le x < 0. \end{cases}$$

Obviamente, $x_* = 0$ *é um zero de* F *e* $F'(x)$ *satisfaz*

$$\left\| F'(x_*)^{-1} \left[F'(x) - F'(x_* + \tau(x - x_*)) \right] \right\| = \frac{2}{3}(1 - \tau)\|x - x_*\|.$$

Daí, usando os métodos inexatos de Newton e suas variações, obtemos através dos Corolários 4.4, 5.4 e 6.4 para cada $\bar{v}$, $\tilde{v}$ *e* $\hat{v}$, *respectivamente, uma estimativa para o raio de convergência.*

Além disso, se para a função acima escolhermos $\bar{v} = 0$, *o raio* $\sigma = 1$ *dado pelo Corolário 4.4 é o maior possível, pois tomando* $x_0 = 1$, *a seqüência gerada pelo método de Newton inexato diverge. De fato, se* $x_0 = 1$ *e* $\bar{v} = 0$, *nós temos*

$$x_1 = x_0 - F'(x_0)^{-1}F(x_0) = x_0 - \frac{1}{-1 + \frac{2}{3}x_0}\left(-x_0 + \frac{1}{3}x_0^2\right) = x_0 - 2x_0 = -1,$$

$$x_2 = x_1 - F'(x_1)^{-1}F(x_1) = x_1 - \frac{1}{-1 - \frac{2}{3}x_1}\left(-x_1 - \frac{1}{3}x_1^2\right) = x_1 - 2x_1 = 1.$$

Repetindo o processo, obtemos, $x_n = (-1)^n$, $n = 1, 2, \ldots,$ *que por sua vez é uma seqüência divergente.*

Portanto, se x_0 for tomado na fronteira da $B(x_*, \sigma)$ a seqüência gerada pelo método de Newton inexato diverge. Conseqüentemente, neste caso σ é o maior raio de convergência possível.

Referências Bibliográficas

[1] J.E.Dennis, R.B.Schnabel, *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1983.

[2] J.M.Ortega, W.C.Rheinboldt, *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, Academic Press, New York,1970.

[3] R.S.Dembo, S.C.Eisenstat,T.Steihaug, *Inexact Newton methods, SIAM.Numer.Anal.* 19 (1982) 400-408.

[4] K.R.Jackson, *The numerical solution of large systems of stiff IVPs for ODEs*, Appl. Numer.Math. 20 (1996) 5-20.

[5] L.V.Kantorovich, G.P.Akilov, *Functional Analysis*, second ed., Pergamon Press, Oxford, 1982.

[6] R.Kress, *Numerical Analysis*, Springer, New York, 1998.

[7] J.M.Martinez, L.Qi, *Inexact Newton methods for solving nonsmooth equations*, J. Comput. Appl. Math. 60 (1995) 127-145.

[8] B.Morini, *Convergence behaviour of inexact Newton methods*, Math. Comp.68 (1999) 1605-1613.

[9] X.Wang, *Convergence of Newton methods and uniqueness of the solution of equations in Banach space*, IMA J. Numer. Anal. 20 (2000) 123-134.

[10] C.Jinhai, L.Weiguo, *Convergence behaviour of inexact Newton methods under weak Lipschtz condition*, Appl.Math.Comput. 191 (2006) 143-164.

[11] B.T.Polav, *Newton's method and its use in optimization.* To appear in European Journal of Operational Research (2006). doi 10.1016/j.ejor.2005.06.076.

[12] L.V.Kantorovich, *Principe of majorants and Newton's method* Doklady AN SSSR, **76**, 1(1951), pp 104-144.

[13] E.L.Lima, *Curso de análise - Volume 1.* IMPA, 12ª edição, 2007.

[14] E.L.Lima, *Curso de análise - Volume 2.* IMPA, 9ª edição, 2006.

[15] J.L.Boldrini, *Álgebra Linear I*, Harper& Row do Brasil, São Paulo, 1980.

[16] J.B.Hiriart-Urruty, C. Lemaréchal, *Convex analysis and minimization algorithms I and II*, Springer-Verlag (1993).

[17] R.T.Rockafellar, *Convex analysis*, Princeton University Press, Princeton, 1970.

[18] J.V.Tiel, *Convex analysis an introductory text*, Royal Netherlands Meteorological Institute, 1984.