

Abner Leonel Gadelha Gomes

Limites nos parâmetros
do Modelo de Oscilação
com Decaimento de Neutrinos
usando os dados
do experimento MINOS

Goiânia
2013

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1 **1. Identificação do material bibliográfico:** **Dissertação** **Tese**

1
2 **2. Identificação da Tese ou Dissertação**

Autor (a):	Abner Leonel Gadelha Gomes		
E-mail:	Abnerleonel.gadelha@gmail.com		
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página?	<input checked="" type="checkbox"/> Sim	<input type="checkbox"/> Não	
Vínculo empregatício do autor	-		
Agência de fomento:	Coord. Aperf. Pess. Nív. Sup.	Sigla:	CAPES
País:	Brasil	UF:	GO
		CNPJ:	00889834/0001-08
Título:	Limites nos parâmetros do Modelo de Oscilação com Decaimento de Neutrinos usando os dados do experimento MINOS		
Palavras-chave:	Neutrino; Oscilação de neutrinos; Decaimento de neutrinos		
Título em outra língua:			
Palavras-chave em outra língua:			
Área de concentração:	Física Teórica e Computacional		
Data defesa:	13/03/2014		
Programa de Pós-Graduação:	Física		
Orientador (a):	Prof. Dr. Ricardo Avelino Gomes		
E-mail:	ragomes@ufg.br		
Co-orientador (a):*			
E-mail:			

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Data: 10 / 02 / 2015

Assinatura do (a) autor (a)

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Abner Leonel Gadelha Gomes

**Limites nos parâmetros do Modelo de
Oscilação com Decaimento de
Neutrinos usando os dados do
experimento MINOS**

Dissertação apresentada ao Instituto
de Física da Universidade Federal de
Goiás, em cumprimento às exigên-
cias do programa de Mestrado em
Física

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Ave-
lino Gomes

**Goiânia
2013**

Ficha catalográfica elaborada automaticamente
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob orientação do Sibi/UFG.

Leonel Gadelha Gomes, Abner

Limites nos parâmetros do Modelo de Oscilação com Decaimento
usando os dados do experimento MINOS [manuscrito] / Abner
Leonel Gadelha Gomes. - Março de 2014.

0 115 f.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Avelino Gomes.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de
Física (IF) , Programa de Pós-Graduação em Física, Goiânia, Março de 2014.
Bibliografia. Apêndice.

Inclui gráfico, tabelas, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Neutrinos. 2. Oscilação de neutrinos. 3. Decaimento de neutrinos. I.
Avelino Gomes, Ricardo , orient. II. Título.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer à Deus por ter me dado forças para prosseguir sempre adiante e enfrentar as dificuldades que surgiam, seja ela pessoal ou profissional. Em seguida agradeço a família, meus avós (Juraci Alves Gadelha e Eliaquim Alves Gadelha) em especial que são meus pais de criação pelas palavras de conforto quando precisei, e aos meus pais (Raquel Alves Gadelha e Abimar Lionel Gomes) por estarem acreditando na minha formação e carreira. Não poderia deixar de agradecer a todos os amigos do instituto de física da UFG que sempre ajudaram no possível para esta formação. Aos amigos do grupo de física de partículas, Msc. Stefano Tognini e o Dr. César Castromonte, gostaria de agradecer pelas contribuições dadas para este trabalho na parte computacional.

Em especial, agradeço ao meu orientador, o Prof. Dr. Ricardo Avelino Gomes, pela paciência, pelos ensinamentos, não só de física, mas também sobre a vida como um todo. Pela oportunidade dada a mim para desenvolver minhas capacidades em poder aprender e tirar resultados na área de física de altas energias. Ainda gostaria de agradecer ao Prof. Dr. Orlando Luis Goulart Peres por suas contribuições nos estudos fenomenológicos do modelo teórico utilizado neste trabalho, e por suas contribuições nas análises realizadas.

Por fim, gostaria de agradecer as agências de fomento, Capes e Fapeg pelo investimento dado a esse trabalho.

RESUMO

Usamos dados de ν_μ e $\bar{\nu}_\mu$ produzidos da linha de feixe do experimento MINOS publicados recentemente em uma análise de desaparecimento de neutrinos muônicos utilizando dados completos de neutrinos e antineutrinos da linha de feixe e atmosféricos. Estabelecemos limites sobre a razão tempo de vida por massa do neutrino para o modelo de oscilação com decaimento. Obtivemos da análise um limite superior de $\alpha_3 < 1,4 \times 10^{-3} \text{ GeV/s}$, que corresponde a um tempo de vida de $\tau_3/m_3 > 2,4 \times 10^{-12} \text{ s/eV}$ no limite inferior, melhorando a medida anterior do MINOS que era de $\tau_3/m_3 > 2,1 \times 10^{-12} \text{ s/eV}$.

ABSTRACT

We use the ν_μ and $\bar{\nu}_\mu$ produced from MINOS beam line that recently reported a disappearance analysis using their full data and combining the beam line and atmospheric neutrinos and antineutrinos events. We used their beam data analysis to constrain the neutrino lifetime under the oscillation plus decay framework. Our analysis reports $\alpha_3 < 1.4 \times 10^{-3} \text{ GeV}/s$, which corresponds to a decay lifetime $\tau_3/m_3 > 2.4 \times 10^{-12} \text{ s}/eV$, improving a previous MINOS measurement who is $\tau_3/m_3 > 2.1 \times 10^{-12} \text{ s}/eV$.

SUMÁRIO

Agradecimentos	3
Resumo	4
Abstract	5
Introdução	16
1 Introdução Teórica sobre Neutrinos	18
1.1 Breve História da Oscilação de Neutrinos	18
1.2 Interação dos Neutrinos	19
1.2.1 Interação via CC	20
1.2.2 Interação via NC	21
1.3 Neutrinos e o Modelo Padrão	21
1.4 Oscilação Pura	24
1.4.1 Mistura de Neutrinos	24
1.4.2 Formalismo Geral	26
1.4.3 Oscilação de dois sabores de neutrinos: Transição $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$	30
1.4.4 Hierarquia de Massa	32
1.5 Oscilação com Decaimento	33
1.5.1 Decaimento Puro	33
1.5.2 Formalismo Geral	34
1.5.3 Aproximação de dois sabores na sobrevivência de ν_μ	37
1.5.4 Limites extremos	38

2	Experimento MINOS	42
2.1	Descrição Geral	42
2.1.1	Feixe NuMI	44
2.1.2	Detectores do MINOS	46
3	Resultados da Literatura Relevantes para nossa Análise	49
3.1	Produção dos Neutrinos	49
3.1.1	Neutrinos Atmosféricos e de Aceleradores	49
3.1.2	Neutrinos Solares e de Reatores	50
3.2	Medidas de Oscilação de dois Sabores do MINOS	50
3.2.1	Medidas de Oscilação com Decaimento	58
4	Método da Análise de Dados	61
4.1	Manipulação das Distribuições	61
4.1.1	Notação das Distribuições	61
4.1.2	Subtração dos Eventos de Background (ruído)	62
4.1.3	Probabilidade por Bin de Energia	64
4.1.4	Cálculo da Probabilidade do Espectro Total	65
4.1.5	Cálculo do Número de Eventos Esperados	65
4.2	Método de Normalização dos Eventos	66
4.2.1	Normalização dos Eventos de Neutrinos	67
4.2.2	Normalização dos Eventos de Antineutrinos	69
4.3	Função χ^2	70
4.3.1	Combinar Conjunto de Dados Distintos com χ^2	71
4.3.2	Graus de liberdade e χ^2 reduzido	71
4.3.3	Mínimo da função χ^2	72
4.3.4	Cálculo do Erro	73
4.4	Região Permitida	73
4.4.1	Método desenvolvido para construir região permitida 2D de 90% CL	75
4.4.2	Método desenvolvido para construir região permitida 1D	76
5	Resultados	78
5.1	Oscilação Pura	78
5.1.1	Dados de 2011 e 2012	78
5.1.2	Dados de 2013	81

5.2	Oscilação com Decaimento	84
5.2.1	Influência gerada por α_3 sobre a análise de Oscilação Pura	86
	Conclusão	99
A	Método da Extração das Distribuições	100
A.1	Extração dos Dados e dos Erros	101
B	Nível de Confiança - CL	105
B.1	O Desvio Padrão de 68% de CL	106
C	Distribuição χ^2	109
	Referências Bibliográficas	111

LISTA DE FIGURAS

1.1	Exemplos de interações CC e NC entre neutrino e um núcleo. Em (a) temos um exemplo de CC, da interação de um sabor de neutrino qualquer ν_l com um núcleo N, intermediado por um bóson W^\pm . Em (b), temos um caso de NC, da interação de um sabor de neutrino com um núcleo intermediado por um bóson Z^0 causando um espalhamento. Os diagramas de Feynman foram retirados da referência [20].	20
1.2	Diagrama com as partículas elementares e suas devidas categorias. Fonte: http://www-visualmedia.fnal.gov/VMS_Site/gallery/stillphotos/1995/0700/95-0759D.hr.jpg	22
1.3	Decaimento do π^- no estado de repouso. O esquema mostra que a helicidade do antineutrino é paralela ao momento angular total ($h = +1$). A figura foi retirada da referência [16].	23
1.4	Hierarquia normal e invertida de massa dos neutrinos. Figura adaptada e retirada de http://scienceblogs.com/startswithabang/2012/01/16/neutrinos-to-ring-in-the-new-y/	33
1.5	Neste gráfico mostramos vários cenários da probabilidade de sobrevivência de oscilação pura, decaimento puro, e oscilação com decaimento para vários valores do parâmetro de decaimento (mantivemos fixos os valores dos parâmetros de oscilação em $\sin^2 2\theta_{23} = 0,95$ e $\Delta m_{32}^2 = 2,41 \times 10^{-3} eV^2$). Em (a) a probabilidade de sobrevivência está em função da energia, enquanto que em (b) está em função da distância pela energia L/E . Mostramos que o para o caso de decaimento puro, não temos um mínimo para a função, e que quanto menor o valor de α_3 , mais próximo a probabilidade de oscilação com decaimento fica da probabilidade de oscilação pura como esperado.	41

2.1	Localização do experimento MINOS, informações sobre os detectores (distância entre os detectores) e suas profundidades. A reta na imagem indica o caminho em que o feixe NuMI percorre.	43
2.2	Esquema da cadeia de aceleradores do Fermilab.	45
2.3	Esquema mostrando como é produzido a linha de feixe NuMI com o horn.	45
2.4	Imagem do Near Detector durante sua construção.	46
2.5	Figura esquemática dos planos e das seções do Near Detector.	47
2.6	Na imagem (a) temos o detector Far Detector, ainda na imagem está indicado o veto e a espira produtora do campo magnético toroidal. Em (b) temos uma figura esquemática mostrando como são os planos UV do Far Detector.	48
2.7	Exemplo de um evento detectado pelo FD, extraído 22 de fevereiro de 2012 as 13 horas, 01 minuto e 58 segundos. Evento do tipo: Neutrino do feixe NuMI.	48
3.1	Períodos de coleta de dados do MINOS de 2005 até 2012.	51
3.2	Em (a), o resultado publicado pelo MINOS no ano de 2006 da energia pelo número de eventos, possuindo as curvas no caso sem oscilação e o melhor ajuste de acordo com os dados obtidos, e os eventos produzidos por ruídos (background). O gráfico (b) mostra o resultado da razão entre os dados com a curva sem oscilação e está ajustada de acordo com o modelo de oscilação. Esta figura foi retirada da referência [40].	52
3.3	Resultado dos limites de confiança onde os dois parâmetros de oscilação são estimados simultaneamente. Figura retirada da referência [40].	52
3.4	Resultado dos limites de confiança onde os dois parâmetros de oscilação são estimados simultaneamente dos resultados contidos na referência [47]. Regiões permitidas nos níveis de confiança de 90% e 68% CL. É feita uma comparação dos resultados do MINOS com seu próprio resultado de 2006, e ainda com regiões de outros experimentos.	53
3.5	O gráfico (a) mostra o resultado publicado pelo MINOS no ano de 2008 da energia pelo número de eventos, possuindo as curvas no caso sem oscilação e o melhor ajuste de acordo com os dados obtidos, e os eventos produzidos por ruídos (background). Em (b) temos o resultado da razão entre os dados com a curva sem oscilação e está ajustada de acordo com os modelos de oscilação, descoerência e de decaimento. Estas figuras foram retiradas da referência [1].	54

3.6	Temos nestes gráficos os resultados publicados em 2011. Em (a) temos o resultado da energia pelo número de eventos, possuindo as curvas no caso sem oscilação e o melhor ajuste de acordo com os dados obtidos junto ao gráfico da razão com os ajustes do modelo de oscilação, descoerência e de decaimento, além dos eventos de NC (background). Em (b) temos o resultado da região de contorno onde podemos encontrar os parâmetros de oscilação nos cenários de níveis de confiança de 90% e 68% CL. É feita uma comparação dos resultados do MINOS com seu próprio resultado de 2008, e ainda com regiões de outros experimentos. Estas figuras foram retiradas da referência [1].	55
3.7	Resultados publicados referentes à referência [48]. Em (a) temos o resultado da qual foram extraídos os dados utilizados nesta análise de antineutrinos, os eventos esperados sem oscilação, eventos utilizando os ajustes contidos na referência [1], e os eventos segundo o melhor ajuste com modelo de oscilação. Em (b) temos o resultado das regiões permitidas para 90% de CL no MINOS para dados de antineutrinos. Ainda é englobado os resultados das regiões obtidas para alguns períodos em anos de tomada de dados. O resultado total para neutrinos de CC também é comparado com as regiões de antineutrinos.	56
3.8	Comparação para diferentes amostras de dados coletados pelo FD com predições com e sem oscilação. Os gráficos superiores mostram o espectro de energia dos feixes enquanto que os gráficos inferiores mostra os resultados L/E das distribuições de eventos atmosféricos. Figura retirada da referência [49].	57
3.9	Região permitida para 90% CL dos parâmetros de oscilação do ajuste assumindo que neutrinos e antineutrinos são indênticos é comparado com a região permitida de ν_μ e $\bar{\nu}_\mu$ do ajuste em que neutrinos e antineutrinos possuem parâmetros de oscilação distintos. Figura retirada da referência [49].	58
3.10	Em (a) temos o resultado da região permitida no nível de 90% de CL para dois parâmetros do modelo de oscilação com decaimento, o parâmetro de decaimento α e o ângulo de mistura. Em (b), o resultado das projeções 1D para α e θ [46].	59
3.11	Resultado 1D obtido pelos 3 gráficos superiores para dados atmosféricos somente (pontilhado), e atmosféricos + aceleradores (linha). Os dois gráficos inferiores são as projeções 2D, as regiões com preenchimento são os resultados de atmosféricos mais aceleradores. As projeções foram feitas nos níveis de confiança de 90%, 95%, 99%, e 3σ CL.	60

4.1	Para um conjunto de dados, apresentamos o resultado do teste realizado para definir qual das quatro possibilidades descritas é a correta. O mesmo critério deve valer para o tratamento de outros dados, desde que os dados utilizados sejam do mesmo experimento. Em (a) temos o resultado da razão para os diferentes casos comparados com a razão extraída R_o . Em (b), a comparação é feita diretamente pela divisão entre as razões para os quatro casos.	63
4.2	Colocamos um aumento de escala de uma parte do espectro de energia dos neutrinos para exemplificar o <i>bin</i> de energia.	64
4.3	Região permitida representada por um histograma 2D com parâmetros x_1 e x_2 exemplificando os diversos níveis de permissão que estão relacionados com os valores de χ^2	75
5.1	Em (a) temos o espectro de energia extraídos da referência [1], enquanto que em (b) temos o espectro experimental. Este resultado possui o número de eventos pela energia, possuindo as curvas no caso sem oscilação e o melhor ajuste de acordo com os dados obtidos. Também está contido neste resultado os eventos de background.	87
5.2	Em (a) temos o espectro de energia extraídos da referência [48], enquanto que em (b) temos o espectro experimental. Este resultado possui o número de eventos pela energia, possuindo os eventos de background e os espectros para casos sem oscilação, e o melhor ajuste. O MINOS ainda construiu nesta análise (b), resultados utilizando os parâmetros de oscilação obtidos da referência [1].	88
5.3	Em (a) mostramos o resultado da região de contorno no nível de 90% CL de ν_μ apenas, comparado com a região da análise combinada. Em (b) temos a região de 90% CL obtida experimentalmente da referência [1] para neutrinos. Em (c) temos o resultado obtido da análise de antineutrinos da referência [48] comparado com as regiões obtidas de neutrinos da referência [1] e combinada para níveis de 90% CL. Por fim, em (d) mostramos os resultados experimentais da região de confiança de antineutrinos do MINOS, referentes à [48]. Procuramos também comparar as curvas obtidas pelas experimentais.	89
5.4	Em (a) temos o espectro de energia de neutrinos da linha de feixe ν_μ extraídos da referência [49], enquanto que em (b) temos o espectro experimental de neutrinos da linha de feixe ν_μ . Comparamos os dois espectros de energia. [1].	90
5.5	Em (a) temos o espectro de energia de antineutrinos da linha de feixe ν_μ extraídos da referência [49], enquanto que em (b) temos o espectro experimental de antineutrinos da linha de feixe ν_μ . Comparamos os dois espectros de energia. [1].	91

5.6	Região permitida para 90% CL dos parâmetros de oscilação do ajuste assumindo que neutrinos e antineutrinos são indênticos (curva vermelha) obtida experimentalmente é comparado com a região permitida de $\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu$ obtida. Comparamos também as regiões obtidas pelas análises separadas de ν_μ e $\bar{\nu}_\mu$. O resultado do MINOS foi retirado de: http://www-numi.fnal.gov/PublicInfo/forscientists.html	92
5.7	Em (a) temos a projeção 1D de $\Delta\chi^2$ em função de $\sin^2\theta_{23}$ para três casos distintos em estatística, enquanto que em (b) temos também a projeção 1D de $\Delta\chi^2$, só que em função de Δm_{32}^2 para os mesmos três casos descritos anteriormente.	93
5.8	Em (a) temos a projeção 1D de $\Delta\chi^2$ em função de α_3 para três casos distintos em estatística, enquanto que em (b) temos também a projeção 1D de $\Delta\chi^2$, só que em função de τ_3/m_3 para os mesmos três casos descritos anteriormente.	94
5.9	Em (a) temos a projeção 1D de $\Delta\chi^2$ em função de α_3 e uma lente de aumento de uma região do gráfico para mostrar o mínimo do χ^2 que é próximo dos valores para qual α_3 é nulo, enquanto que em (b) temos também a projeção 1D de $\Delta\chi^2$, só que em função de τ_3/m_3	95
5.10	Região permitida $\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu$ para 90% CL dos parâmetros τ_3/m_3 por Δm_{32}^2 do ajuste assumindo que neutrinos e antineutrinos possuem os mesmos parâmetros.	96
5.11	Em (a) temos a projeção 1D de $\Delta\chi^2$ em função de $\sin^2\theta_{23}$ onde comparamos os casos de oscilação pura com oscilação com decaimento, enquanto que em (b) temos também a projeção 1D de $\Delta\chi^2$, só que em função de Δm_{32}^2 onde realizamos a comparação dos dois modelos.	97
5.12	Região permitida $\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu$ para 90% CL dos parâmetros τ_3/m_3 por Δm_{32}^2 do ajuste assumindo que neutrinos e antineutrinos possuem os mesmos parâmetros.	98
A.1	Demonstrativo das configurações usadas para extração das distribuições. Em (a) temos a definição da configuração do eixo Y. Em (b) mostramos como é selecionado cada ponto da distribuição no momento da extração dos dados.	102
A.2	A imagem mostra como selecionamos os pontos dos dados do Far Detector. Selecionamos cada ponto tendo como referência o erro horizontal como pode ser visto pela <i>zoom area</i>	103
A.3	Demonstrativo da seleção dos erros extraídos. Em (a) mostramos como é realizado a seleção dos erros superiores referente aos dados. Em (b) mostramos como é realizado a seleção dos erros inferiores também referente aos dados.	104

B.1	A area sombreada entre $X \pm \sigma$ é a probabilidade de uma medida dentro de um desvio padrão de X [54].	106
B.2	A area sombreada entre $X \pm t\sigma$ é a probabilidade de uma medida dentro de t desvios padrão de X [54].	107
B.3	A area sombreada entre $X \pm \sigma$ é a probabilidade de uma medida dentro de um desvio padrão de X [54].	107
C.1	Algumas distribuições χ^2 para valores de $n = 1,2,3,5$ e 10 [55].	109

LISTA DE TABELAS

4.1	Teste estatístico realizado para um conjunto de dados com três diferentes formas do cálculo do número esperado de eventos.	66
4.2	Relação dos parâmetros contidos na probabilidade. São três parâmetros com propriedades físicas e um parâmetro não físico.	73
4.3	Diferentes valores de χ^2 para $\sigma_s = 0$, $\sigma_s = \sigma_s^{\text{est}} = \sqrt{N_e}$, e $\sigma_s = \sigma_{s,\text{est}}^2 + \sigma_{s,\text{sist}}^2$. Mostramos como σ_s melhora os valores obtidos de χ^2	74
5.1	Os ajustes obtidos da simulação comparados com os ajustes obtidos experimentalmente nas configurações de neutrinos e antineutrinos.	80
5.2	Os ajustes obtidos da simulação comparados com os ajustes obtidos experimentalmente nas configurações de neutrinos e antineutrinos.	82
5.3	Os ajustes obtidos da simulação utilizando o modelo de oscilação com decaimento nas configurações de neutrinos e antineutrinos combinados para os conjunto de dados descritos.	84
5.4	Limites obtidos no nível de 90% CL dos parâmetros de decaimento de neutrinos para três diferentes em estatística de dados.	84
5.5	Principal resultado obtido dos limites no nível de 90% CL dos parâmetros de decaimento de neutrinos comparados com os resultados das referências [26, 46].	85

INTRODUÇÃO

Introduzimos neste trabalho dois modelos teóricos que se aplicam aos neutrinos. Em uma delas, a oscilação de neutrinos foi comprovada por diversos experimentos, entre eles, o MINOS (Main Injector neutrino Oscillation Search) como sendo o efeito predominante sobre os neutrinos. A oscilação pura como é chamada, foi usada para ajustar os dados do MINOS, na investigação de desaparecimento de neutrinos muônicos. Este modelo depende de dois parâmetros, o ângulo de mistura θ_{23} , que relaciona a quantidade que cada neutrino (ν_2, ν_3) possui de (ν_μ, ν_τ), e um termo de massa, $|\Delta m_{32}^2|$, que é diferença quadrática¹ de massa entre dois tipos de neutrinos. Decretar experimentalmente que os neutrinos oscilavam serviu também para dizer que com certeza, estas partículas eram massivas. Usamos este modelo em nosso trabalho para verificar a consistência da nossa análise com os resultados experimentais do MINOS. O outro modelo que desenvolvemos neste trabalho é o de decaimento de neutrinos. Usamos este modelo junto com a oscilação de neutrinos, pois procuramos tratá-lo como um efeito subdominante da oscilação, da qual os experimentos ainda não teriam resolução suficiente para determinar o parâmetro de decaimento α que provavelmente possui um efeito muito menor do que o gerado por $|\Delta m_{32}^2|$. Procuramos, portanto, utilizando os dados extraídos do MINOS, determinar limites para o parâmetro α_3 (parâmetro do setor de neutrinos atmosféricos) utilizando o modelo de oscilação com decaimento. Para isso, foi necessário investigar como o experimento funciona, como é realizado a detecção dos eventos de neutrinos, qual a faixa de energia de interesse, e qual o mínimo da probabilidade de oscilação é investigada. Todas estas informações são

¹ É definido em módulo por ser um termo quadrático, portanto não sabemos se o parâmetro é negativo, ou positivo.

úteis para entender os resultados experimentais da qual extraímos os dados. Com isso, foi necessário fazer uma revisão dos resultados experimentais do MINOS e sua evolução durante os anos de coleta de dados em estatística de eventos. Todas estas informações são dadas entre o capítulo 1 e 3 deste trabalho.

Criamos uma metodologia para análise dos dados fundamentada na função χ^2 que é descrita no capítulo 4. E por fim, mostramos os resultados obtidos para os limites do parâmetro de decaimento no capítulo 5.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO TEÓRICA SOBRE NEUTRINOS

Neste capítulo fazemos uma introdução breve à história da oscilação dos neutrinos, à solução da oscilação de neutrinos e à matriz de mistura em sua forma geral, para três e para dois sabores de neutrinos. Ainda, apresentamos o modelo de oscilação com decaimento, com a oscilação como modelo dominante sobre o decaimento de neutrinos. Nestas soluções, trabalharemos para o caso da partícula no vácuo.

1.1 Breve História da Oscilação de Neutrinos

Oscilação de neutrinos é um modelo quântico atualmente muito bem consolidado pelas medidas experimentais dos principais experimentos de neutrinos existentes [1–3]. O modelo foi proposto na década de 1950 por Pontecorvo [4, 5], baseado na teoria de quarks.

Os neutrinos não massivos do Modelo Padrão logo revelou um problema no experimento de Davis na mina de Homestake [6], construído para detectar os neutrinos produzidos no Sol que chegavam à Terra. A contagem dos neutrinos detectados de Davis apresentou um déficit em relação ao que se esperava, aproximadamente um terço da predição realizada por Bahcall, o teórico que estimou o número de neutrinos que deveria ser detectado. A conclusão foi a de que o experimento poderia estar com algum problema, ou que a predição de Bahcall estaria errada, ou ainda uma terceira possibilidade era o surgimento de uma nova física por trás dos neutrinos. Com as verificações minuciosas

realizadas em diante, houve a conclusão de que o experimento de Davis e os cálculos de Bahcall estavam corretos. As dificuldades geradas nos resultados de Davis em relação aos neutrinos ficou conhecido como problema do neutrinos solares.

O neutrino conhecido na época em que Pontecorvo propôs sua ideia era o eletrônico. Pontecorvo afirmou que o neutrino eletrônico devia transitar para um estado diferente de acordo com o espaço percorrido pela partícula. Os experimentos eram sensíveis apenas a detecção de neutrinos eletrônicos, o que o levou a criar o conceito de neutrino estéril¹[7]. Mais tarde em 1962, o neutrino muônico foi descoberto pelo experimento de Brookhaven [8], liderado por Lederman, Schwartz e Steinberger. A possibilidade de oscilação ganhou força com a descoberta de um novo tipo de neutrino assim como a ideia destas partículas serem massivas. Em 1962 Maki, Nakagawa e Sakata descreveram um modelo teórico que permite a mistura de dois tipos de neutrinos ($\nu_e \rightarrow \nu_\mu$), de onde surge a matriz PMNS [9]. Um pouco mais tarde, em 1969 Pontecorvo e Gribov discutiram sobre a oscilação de neutrinos solares formulando assim o primeiro modelo de oscilação de dois neutrinos quantitativamente [10], dado como explicação para os dados de Homestake.

A ideia de que os neutrinos oscilavam de um estado de sabor para outro, significava que estas partículas deveriam ser massivas, logo, o Modelo Padrão (MP) deveria ser revisado por não admitir massa aos neutrinos. A teoria dos neutrinos foi modelada por Eliezer e Swift [11], Fritzsche e Minkowski [12], Bilenky e Pontecorvo [13, 14], e revisada por Bilenky e Pontecorvo [15].

1.2 Interação dos Neutrinos

Pelo MP, os neutrinos não possuem massa, e portanto sua única interação é devido a força fraca, pois a força gravitacional não é incluída neste modelo.

A interação fraca foi uma teoria desenvolvida através de estudos do decaimento β . Podemos encontrar detalhes desta interação nas referências [16–19]. Os neutrinos são produzidos através da interação fraca via correntes carregadas (CC) e neutras (NC) que são derivadas do setor eletrofraco² do MP. A corrente carregada tem como mediador, os

¹ Essa denominação foi criada pois acreditava-se que o neutrino estéril seria uma partícula neutra que não interagiria por nenhuma das forças descritas no Modelo Padrão, sendo praticamente impossível de ser detectada.

² O Modelo Padrão é uma teoria que além de fazer ótimas previsões, conseguiu também unificar as forças eletromagnéticas e fraca em uma única teoria conhecida como força eletrofraca.

bósons carregados W^\pm e a corrente neutra, o bóson Z^0 . O modelo prevê que estes bósons intermediadores são massivos. As interações dos neutrinos marcadas por um lépton l de

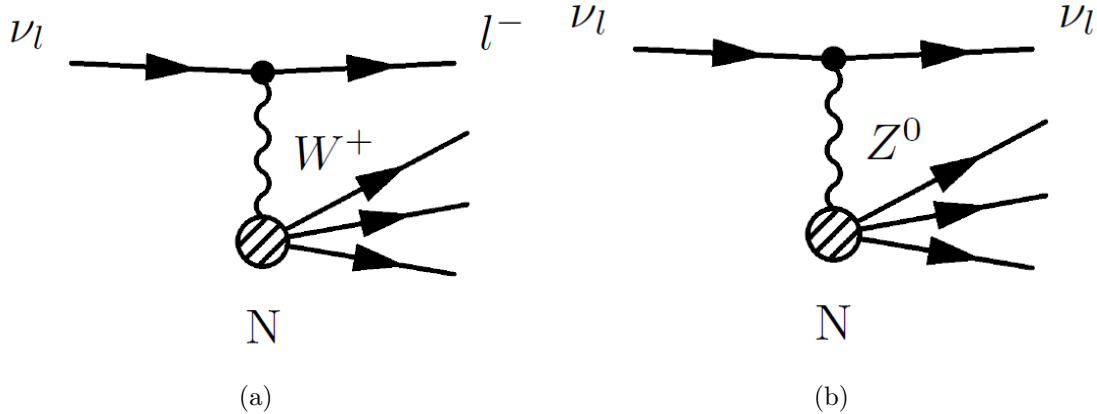


Figura 1.1: Exemplos de interações CC e NC entre neutrino e um núcleo. Em (a) temos um exemplo de CC, da interação de um sabor de neutrino qualquer ν_l com um núcleo N, intermediado por um bóson W^\pm . Em (b), temos um caso de NC, da interação de um sabor de neutrino com um núcleo intermediado por um bóson Z^0 causando um espalhamento. Os diagramas de Feynman foram retirados da referência [20].

saída são interações via corrente carregada como descrito pelo diagrama em 1.1 (a), já interações em que não gerados léptons, são devido a corrente neutra como descrito pelo diagrama em 1.1 (b).

1.2.1 Interação via CC

No processo CC temos uma conversão do quark *up* em *down*, mediado pelo bóson W^\pm . Quando ocorre uma absorção do bóson, temos a corrente gerada pelo W^+ , que possui carga elétrica $q = +1$ e o neutrino com $q = 0$, então a terceira partícula da interação no vértice νW^+ deve ser um lépton l de carga $q = -1$ para termos conservação de carga e do número leptônico³ como exemplificado em 1.1 (a). Quando ocorre a emissão do bóson, temos a corrente produzida pelo W^- , onde de forma análoga ao processo anterior, é preciso gerar um lépton l com carga $q = +1$ para que exista conservação de carga e número leptônico,

³ Para determinar se um canal de decaimento é possível foram criadas algumas regras que estes processos devem obedecer. Konopinski e Mahmoud [21] introduziram uma simples regra para determinar estas reações, o chamado número leptônico, que atribui $L = +1$ ao elétron, o múon, e o neutrino, e $L = -1$ ao pósitron, ao múon positivo, e ao antineutrino. Todas as outras partículas possuem número leptônico igual à zero. Então foi proposto a lei de conservação do número leptônico análogo a lei da conservação de carga.

como descrito pela reação,

$$\begin{aligned}\nu_l + n &\rightarrow l^- + p, \\ \bar{\nu}_l + p &\rightarrow l^+ + n,\end{aligned}\tag{1.1}$$

com $l = e, \mu, \tau$. Portanto, vemos pelo diagrama de Feynman na figura 1.1 (a) e pela equação 1.1 que a conversão dos quarks *up* em *down* no núcleo N transforma um nêutron deste núcleo em próton, e um lépton respectivo ao sabor do neutrino da interação é liberado para manter a conservação da carga[16]. Na prática, somente os feixes de neutrinos eletrônicos e muônicos e seus respectivos antineutrinos são produzidos em laboratório. O feixe de neutrinos tauônicos está ligado à astrofísica de partículas e pela interação dos raios cósmicos de alta energia com a atmosfera da Terra.

1.2.2 Interação via NC

Neutrinos e antineutrinos interagem elasticamente com núcleos através do processo de corrente neutra. Logo, neutrinos trocam também bósons Z^0 com a matéria, similarmente com a corrente carregada para um caso sem lépton gerado, como descrito pela reação a seguir,

$$\begin{aligned}\nu_l + N &\rightarrow \nu_l + N^*, \\ \bar{\nu}_l + N &\rightarrow \bar{\nu}_l + N^*,\end{aligned}\tag{1.2}$$

onde N é um núcleo e N^* , o núcleo após a interação. O Z^0 possui carga $q = 0$, então a terceira partícula no vértice νZ^0 é outro neutrino garantindo a conservação de carga e do número leptônico, como mostrado no diagrama 1.1 (b).

1.3 Neutrinos e o Modelo Padrão

O MP é uma teoria totalmente desenvolvida utilizando apenas as partículas da figura 1.2. Um dos problemas desta teoria é o fato dos neutrinos serem massivos, pois originalmente, o modelo não admite massa aos neutrinos. Este modelo é formado por três famílias de geração das partículas fundamentais, dividido entre os férmions e bósons intermediadores das forças que compõem a teoria, a força forte, fraca e eletromagnética que pode ser unificada e chamada de teoria eletrofraca. Outro problema desta poderosa teoria é que não foi possível englobar a teoria gravitacional.

Evidências experimentais mostraram que os neutrinos pareciam sentir efeitos do tempo quando viajavam pelo espaço. Isto levou a pensar que os neutrinos podiam ter massa.

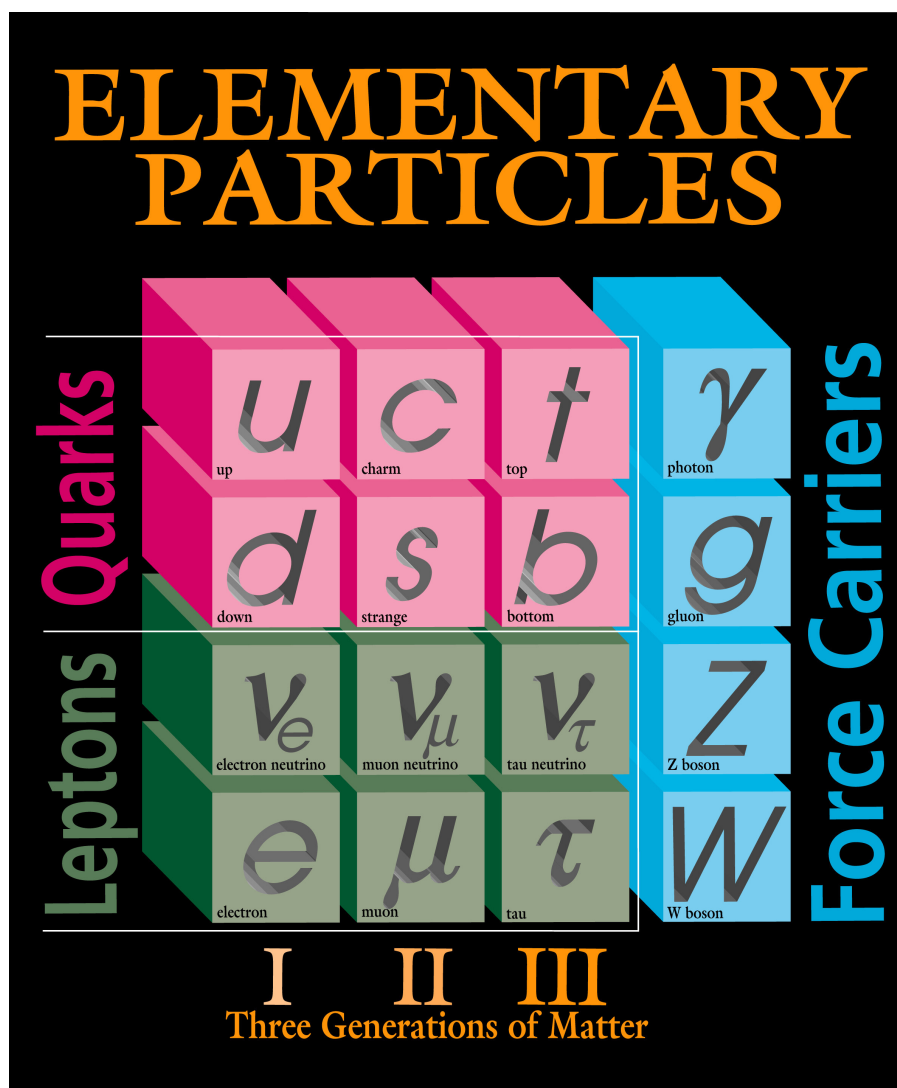


Figura 1.2: Diagrama com as partículas elementares e suas devidas categorias. Fonte: http://www-visualmedia.fnal.gov/VMS_Site/gallery/stillphotos/1995/0700/95-0759D.hr.jpg

Entendemos que caso o neutrino não tivesse massa, estes efeitos seriam imperceptíveis, pois contendo velocidade igual à da luz significaria que seu movimento seria independente de qualquer referencial. Entretanto, experimentos diversos de neutrinos solares e de reatores, atmosféricos e de aceleradores apontavam para uma possível superposição dos autoestados dos neutrinos semelhantes com o descrito pelo modelo de quarks [22], remetendo à proposta feita no passado por Pontecorvo.

A questão da massividade dos neutrinos só foi de fato resolvida recentemente pelos resultados do experimento Super-Kamiokande em 1998 [23]. Já a oscilação de neutrinos foi consolidada como um fenômeno que de fato os neutrinos eram afetados, pelos os resul-

tados de desaparecimento de neutrinos muônicos do experimento MINOS (Main Injector Neutrinos Oscillation Search).

Vale a pena aqui fazer um comentário breve e qualitativo sobre a questão da geração de massas dos neutrinos, que deve ser incorporada ao MP. Estes termos acrescentados geram o que chamamos geralmente de modelos além do Modelo Padrão. O MP prevê que os neutrinos possuem estados apenas de mão-esquerda, que significa que a orientação de seu spin é na direção contrária ao seu momento angular, ou seja, possui helicidade $h = -1$, e que por consequência, os antineutrinos são de mão-direita, e que portanto, a orientação do spin é na mesma direção do seu momento, com helicidade $h = +1$. Medir helicidade de um neutrino pode ser feito através de um método indireto através do decaimento de um π^- . Se o pión está em repouso, o múon e o antineutrino recuam em direções opostas devido a conservação do momento linear. Podemos então medir o momento intrínscio do múon numa certa direção que podemos escolher como sendo o eixo z . Como o pión possui spin zero, o neutrino terá spin contrário ao do múon, logo, como os antineutrinos são de mão-direita por terem a massa muito pequena, então o múon também será de mão-direita para garantir a conservação do momento angular total do decaimento. As observações experimentais encontraram apenas antineutrinos de mão-direita através deste processo, da mesma forma, para o decaimento de π^+ só foram observados neutrinos de mão-esquerda. Na figura 1.3 mostramos o recuo do múon e do antineutrino quando o pión em repouso decai. Temos as orientações do spin neste caso, e podemos ver que trata-se de um antineutrino de mão-direita. Devido as observações indicarem que neutrinos de mão-direita e por consequência que antineutrinos de mão-esquerda não existiam, o MP foi desenvolvido com estados apenas de mão-esquerda ν_L para neutrinos. Desta forma, foi possível definir que os neutrinos possuíam massa nula sem causar nenhum problema para teoria.

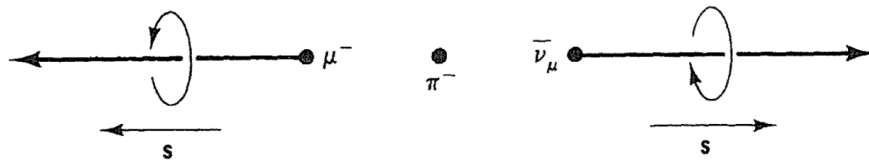


Figura 1.3: Decaimento do π^- no estado de repouso. O esquema mostra que a helicidade do antineutrino é paralela ao momento angular total ($h = +1$). A figura foi retirada da referência [16].

Sabemos que na verdade os neutrinos são massivos, logo, foi necessário criar um mecanismo de geração de massa para os neutrinos. O mecanismo mais conhecido é a inclusão

de estados de mão-direita ν_R para cada neutrino na Lagrangiana do sistema. As consequências desses estados incluídos ν_R altera a corrente da interação fraca CC fazendo surgir dela a possibilidade de vários fenômenos para os neutrinos, dentre eles, a possibilidade de neutrinos estéreis, de decoerência, decaimento de neutrinos e de oscilação entre os sabores. As medidas experimentais mostram que os efeitos do fenômeno de oscilação é dominante perante as outras possibilidades. No entanto, em níveis subdominantes, não podemos descartar outros modelos. Outro fato é que o neutrino de mão-direita não foi observado, isto é, este mecanismo só será comprovado com esta observação.

1.4 Oscilação Pura

Nesta sessão, apresentamos o modelo de oscilação de neutrinos para um formalismo geral, no entanto, focamos em especial na solução da transição de dois sabores.

1.4.1 Mistura de Neutrinos

Com a transformação da base fermiônica no termo da corrente carregada da Lagrangiana do sistema de neutrinos com o mecanismo desenvolvido para gerar massa a estas partículas, concluí-se que os autoestados de sabor ν_α não são idênticos aos autoestados de massa ν_m . Os estados são conectados assim como os quarks por uma matriz unitária U , como a matriz CKM (parametrização utilizada no modelo de quarks).

A ideia sobre a oscilação dos neutrinos foi proposta por Pontecorvo, a parametrização e o desenvolvimento desta teoria foi desenvolvida por Maki-Nakagawa-Sakata. A matriz unitária é conhecida por matriz PMNS [9],

$$U_{PMNS} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix},$$

que mistura os estados de sabor com os de massa,

$$|\nu_\alpha\rangle = U_{PMNS}^* |\nu_m\rangle \quad \alpha = e, \mu, \tau; \quad m = 1, 2, 3. \quad (1.3)$$

A matriz PMNS três por três é dada como,

$$U_{PMNS} = \begin{pmatrix} c_{13}c_{12} & c_{13}s_{12} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -c_{23}s_{12} - s_{13}c_{12}s_{23}e^{+i\delta} & c_{23}c_{12} - s_{13}s_{12}s_{23}e^{+i\delta} & c_{13}s_{23} \\ s_{23}s_{12} - s_{13}c_{12}c_{23}e^{+i\delta} & -s_{23}c_{12} - s_{13}s_{12}c_{23}e^{+i\delta} & c_{13}c_{23} \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

onde $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$, $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ e θ_{ij} é o ângulo de mistura dos autoestados de massa com $i, j = 1, 2, 3$. A fase de Dirac, δ , permite a possibilidade de violação CP (charge-conjugation parity)⁴ nos modelos de aparecimento de neutrino.

A matriz PMNS pode ser fatorada nos seus respectivos setores de oscilação.

$$U_{PMNS} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{+i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

A matriz na transição $2 \rightarrow 3$ descreve neutrinos atmosférico e produzidos por aceleradores, enquanto que a matriz na transição $1 \rightarrow 2$ descreve neutrinos solares e produzidos nos reatores. A matriz central pode tanto se combinar com o setor atmosférico/acelerador como com o setor solar/reator. As observações experimentais do ângulo θ_{13} que está associado com esta matriz foi nulo em suas primeiras medidas, logo, esta matriz podia ser descartada dos setores de oscilação. Porém, as medidas atuais do ângulo θ_{13} resultaram em valores não nulos grandes o suficiente para possibilitar a medida da fase de violação CP para os neutrinos. Usamos em nossos resultados no capítulo 5, $\theta_{13} = 0$, pois como o valor do parâmetro é muito menor do que θ_{23} , podemos utilizar uma aproximação em que apenas o parâmetro θ_{23} é usado. No entanto, as próximas medidas experimentais começarão a considerar o valor de θ_{13} como parâmetro de entrada. Resultados futuros deste trabalho também poderão ser aplicados para casos em que $\theta_{13} \neq 0$. Podemos reescrever a equação 1.3 na forma matricial como,

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = U_{PMNS} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

tornando claro como podemos descrever os autoestados a partir de uma matriz unitária U geral para n autoestados.

⁴ Conjugação de carga e paridade são discutidos na referência [16].

1.4.2 Formalismo Geral

Na teoria da oscilação de neutrinos, um neutrino criado com um sabor α e momento \vec{p} , por uma interação fraca via corrente carregada a partir de um lépton carregado l_α^- ou junto com um antilépton carregado l_α^+ pode ser descrito por um modelo que basicamente relaciona duas bases de estados, a base de estados de sabor e a de massa. Vamos supor um número arbitrário n de autoestados ortonormais. Os n autoestados de sabor $|\nu_\alpha\rangle$ com $\langle\nu_\beta|\nu_\alpha\rangle = \delta_{\alpha\beta}$ são conectados aos n autoestados $|\nu_m\rangle$ com $\langle\nu_m|\nu_n\rangle = \delta_{mn}$ via matriz unitária U . Os estados de sabor podem de uma maneira geral serem escritos na base de massa em termos dos elementos da matriz U de acordo com a equação 1.7,

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_m U_{\alpha m}^* |\nu_m\rangle, \quad (1.7)$$

com somatória em $m = 1, 2, 3$. Podemos inverter a última relação obtendo os autoestados de massa em função do de sabor fazendo o complexo conjugado do elemento de matriz $U_{\alpha m}$,

$$|\nu_m\rangle = \sum_\alpha U_{\alpha m} |\nu_\alpha\rangle, \quad (1.8)$$

onde a somatória passa a ser em $\alpha = e, \mu, \tau$. A matriz unitária U deve seguir algumas condições como ser unitária,

$$UU^\dagger = 1, \quad (1.9)$$

onde U possui $n \times n$ termos que podem ser descritos também como o número de parâmetros possíveis. As fases relativas definidas $2n - 1$ de $2n$ estados de neutrinos podem ser fixadas de tal maneira que $(n - 1)^2$ parâmetros independentes permanecem. É possível reescrevê-los como $\frac{1}{2}n(n - 1)$ ângulos de mistura de uma matriz rotacional n -dimensional junto com $\frac{1}{2}(n - 1)(n - 2)$ fases de violação CP. Pela condição da matriz unitária, podemos ainda escrever a equação 1.9 como a soma dos termos da matriz,

$$\begin{aligned} \sum_m U_{\alpha m} U_{\beta m}^* &= \delta_{\alpha\beta} \\ \sum_\alpha U_{\alpha m} U_{\alpha n}^* &= \delta_{mn}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

onde a soma 1.10 em m ou α deve satisfazer a delta.

Os estados de massa $|\nu_m\rangle$ são os autoestados do Hamiltoniano \mathcal{H} que é diagonal para

a base de massa,

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} E_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & E_m \end{pmatrix}, \quad (1.11)$$

portanto, se aplicarmos o operador \mathcal{H} sobre o estado $|\nu_m\rangle$ teremos,

$$\mathcal{H}|\nu_m\rangle = E_m|\nu_m\rangle, \quad (1.12)$$

onde E_m são os autovalores de \mathcal{H} de acordo com a relação 1.11. A energia E_m não é clássica, pois os neutrinos são partículas relativísticas, portanto E_m pode ser descrito segundo a teoria da relatividade,

$$E_m = \sqrt{\vec{p}^2 + m_m^2}, \quad (1.13)$$

onde usamos o sistema natural de unidades, com $c = \hbar = 1$, onde c é a velocidade da luz e \hbar é a constante de Planck.

Evoluímos o estado de massa no espaço e no tempo. Primeiramente, descrevemos o estado como uma evolução temporal,

$$|\nu_m(x,t)\rangle = e^{-iE_m t}|\nu_m(x,0)\rangle. \quad (1.14)$$

Como o neutrino é emitido com um dado momento \vec{p} , a equação 1.14 pode ser reescrita aplicando o operador translação,

$$|\nu_m(x,t)\rangle = e^{ipx} e^{-iE_m t}|\nu_m\rangle. \quad (1.15)$$

No entanto, os estados que detectamos são os de sabor $|\nu_\alpha\rangle$ que evolui no espaço e tempo assim como $|\nu_m\rangle$. Sabemos pela equação 1.7 como os estados de sabor são descritos na base de massa. Esta mesma relação vale para quando os estados são evoluídos espacialmente e temporalmente,

$$|\nu_\alpha(x,t)\rangle = \sum_m U_{\alpha m}^* |\nu_m(x,t)\rangle. \quad (1.16)$$

Agora, substituindo a equação 1.15 em 1.16 obtemos,

$$|\nu_\alpha(x,t)\rangle = \sum_m U_{\alpha m}^* e^{ipx} e^{-iE_m t} |\nu_m\rangle. \quad (1.17)$$

O estado de sabor está completo e escrito na base de massa. Para que possamos realizar medidas, basta substituir na equação 1.17, a relação 1.8,

$$|\nu_\alpha(x,t)\rangle = \sum_m U_{\alpha m}^* e^{ipx} e^{-iE_m t} \sum_\beta U_{\beta m} |\nu_\beta\rangle, \quad (1.18)$$

onde escrevemos o estado $|\nu_m\rangle$ na outra base para que possamos realizar o produto interno mais a frente, por isto, mudamos o índice de α para β . A soma em β não interfere a soma em m , com isso podemos rearranjar a equação 1.18 como,

$$|\nu_\alpha(x,t)\rangle = \sum_{\beta} \sum_m U_{\alpha m}^* e^{ipx} e^{-iE_m t} U_{\beta m} |\nu_\beta\rangle, \quad (1.19)$$

de tal maneira que a amplitude de transição de α para β é dado por,

$$\langle \nu_\beta | \nu_\alpha(x,t) \rangle = \sum_m U_{\alpha m}^* U_{\beta m} e^{ipx} e^{-iE_m t}. \quad (1.20)$$

A probabilidade de transição de α para β é definido como o módulo quadrado da amplitude de transição,

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = |\langle \nu_\beta | \nu_\alpha(x,t) \rangle|^2 = \sum_{m,n} U_{\alpha m}^* U_{\beta m} U_{\beta n}^* U_{\alpha n} e^{-i(E_m - E_n)t}. \quad (1.21)$$

Dividimos a soma em 1.21 em duas somas, onde a primeira é para $m = n$ e a outra para $m \neq n$,

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = \sum_m |U_{\alpha m} U_{\beta m}|^2 + \sum_{n \neq m} U_{\alpha m}^* U_{\beta m} U_{\beta n}^* U_{\alpha n} e^{-i(E_m - E_n)t}. \quad (1.22)$$

No entanto, passamos a soma para m diferente de n em 1.22, para valores em que $n > m$, e pra isso basta multiplicarmos a segunda soma por um fator 2,

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = \sum_m |U_{\alpha m} U_{\beta m}|^2 + 2 \sum_{n > m} U_{\alpha m}^* U_{\beta m} U_{\beta n}^* U_{\alpha n} e^{-i(E_m - E_n)t}. \quad (1.23)$$

Os neutrinos possuem uma energia cinética muito maior do que sua energia de repouso. No sistema natural de unidades isto é a mesma coisa que afirmar que $p \gg m_m$. Podemos a partir desta consideração reescrever a energia dos neutrinos E_m como sendo,

$$E_m = \sqrt{\vec{p}^2 + m_m^2} \simeq |\vec{p}| + \frac{m_m^2}{2|\vec{p}|} \simeq E + \frac{m_m^2}{2E}, \quad (1.24)$$

onde fazemos $|\vec{p}| \simeq E$. Agora, substituímos a equação 1.24 em 1.23 e obtemos,

$$P(L/E)_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = \sum_m |U_{\alpha m} U_{\beta m}|^2 + 2 \sum_{n > m} U_{\alpha m}^* U_{\beta m} U_{\beta n}^* U_{\alpha n} \exp\left(-i \frac{\Delta m_{mn}^2 L}{2E}\right), \quad (1.25)$$

onde $\Delta m_{mn}^2 = m_m^2 - m_n^2$ é o módulo da diferença quadrática de massa dos neutrinos e a distância L é a aproximação feita,

$$x = c \cdot t \approx t \approx L. \quad (1.26)$$

A distância L (fonte - detector) e a energia dos neutrinos E , são quantidades determinadas pelos experimentos [24, 25]. Estas são as variáveis da equação 1.25.

Vamos separar o segundo termo da somatória em 1.25 na parte real e imaginária. Logo, obtemos,

$$\begin{aligned}
 P(L/E)_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} &= \sum_m |U_{\alpha m} U_{\beta m}|^2 + \sum_{n>m} 2\text{Re}[U_{\alpha m}^* U_{\beta m} U_{\beta n}^* U_{\alpha n}] \cos\left(\frac{\Delta m_{mn}^2 L}{2E}\right) \\
 &\quad - \sum_{n>m} 2\text{Im}[U_{\alpha m}^* U_{\beta m} U_{\beta n}^* U_{\alpha n}] \text{sen}\left(\frac{\Delta m_{mn}^2 L}{2E}\right).
 \end{aligned} \tag{1.27}$$

Uma outra identidade que podemos tirar da matriz U é a seguinte,

$$UU^\dagger UU^\dagger = 1 \longrightarrow \sum_{n,m} U_{\alpha m}^* U_{\beta m} U_{\beta n}^* U_{\alpha n} = \sum_m |U_{\alpha m} U_{\beta m}|^2 + \sum_{n>m} 2\text{Re}[U_{\alpha m}^* U_{\beta m} U_{\beta n}^* U_{\alpha n}] = \delta_{\alpha\beta}, \tag{1.28}$$

e que sendo assim,

$$\sum_m |U_{\alpha m} U_{\beta m}|^2 = \delta_{\alpha\beta} - \sum_{n>m} 2\text{Re}[U_{\alpha m}^* U_{\beta m} U_{\beta n}^* U_{\alpha n}], \tag{1.29}$$

substituímos a equação 1.29 em 1.27, e obtemos,

$$\begin{aligned}
 P(L/E)_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} &= \delta_{\alpha\beta} - 2 \sum_{n>m} \text{Re}[U_{\alpha m}^* U_{\beta m} U_{\beta n}^* U_{\alpha n}] \left[1 - \cos\left(\frac{\Delta m_{mn}^2 L}{2E}\right)\right] \\
 &\quad - 2 \sum_{n>m} \text{Im}[U_{\alpha m}^* U_{\beta m} U_{\beta n}^* U_{\alpha n}] \text{sen}\left(\frac{\Delta m_{mn}^2 L}{2E}\right).
 \end{aligned} \tag{1.30}$$

onde podemos escrever,

$$1 - \cos\left(\frac{\Delta m_{mn}^2 L}{2E}\right) = 2\text{sen}^2\left(\frac{\Delta m_{mn}^2 L}{4E}\right), \tag{1.31}$$

e por fim,

$$\begin{aligned}
 P(L/E)_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} &= \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{n>m} \text{Re}[U_{\alpha m}^* U_{\beta m} U_{\beta n}^* U_{\alpha n}] \text{sen}^2\left(\frac{\Delta m_{mn}^2 L}{4E}\right) \\
 &\quad - 2 \sum_{n>m} \text{Im}[U_{\alpha m}^* U_{\beta m} U_{\beta n}^* U_{\alpha n}] \text{sen}\left(\frac{\Delta m_{mn}^2 L}{2E}\right).
 \end{aligned} \tag{1.32}$$

A probabilidade de oscilação dos canais onde $\alpha \neq \beta$ é chamado de probabilidade de transição, enquanto que nos casos em que $\alpha = \beta$, chamamos de probabilidade de sobrevivência. Nos casos em que os termos da matriz U são reais, podemos simplificar a equação 1.32 da seguinte forma,

$$P(L/E)_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{n>m} U_{\alpha m} U_{\alpha n} U_{\beta m} U_{\beta n} \text{sen}^2\left(\frac{\Delta m_{mn}^2 L}{4E}\right), \tag{1.33}$$

onde a probabilidade de sobrevivência neste caso é em sua forma geral,

$$P(L/E)_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha} = 1 - 4 \sum_{n>m} |U_{\alpha m} U_{\alpha n}|^2 \text{sen}^2 \left(\frac{\Delta m_{mn}^2 L}{4 E} \right). \quad (1.34)$$

Vamos descrever rapidamente como é a probabilidade de oscilação para o caso de antineutrinos. Da definição dada pelas equações 1.7 e 1.8 podemos escrever a forma dos estados para antineutrinos,

$$\begin{aligned} |\bar{\nu}_\alpha\rangle &= \sum_m U_{\alpha m} |\bar{\nu}_m\rangle \\ |\bar{\nu}_m\rangle &= \sum_\alpha U_{\alpha m}^* |\bar{\nu}_\alpha\rangle, \end{aligned} \quad (1.35)$$

dada que a expressão para probabilidade $P_{\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta}$ é basicamente a mesma que a equação 1.32, diferindo apenas pela forma em que os termos de U são multiplicados,

$$\begin{aligned} P(L/E)_{\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta} &= \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{n>m} \text{Re}[U_{\alpha m} U_{\beta m}^* U_{\beta n} U_{\alpha n}^*] \text{sen}^2 \left(\frac{\Delta \bar{m}_{mn}^2 L}{4 E} \right) \\ &\quad - 2 \sum_{n>m} \text{Im}[U_{\alpha m} U_{\beta m}^* U_{\beta n} U_{\alpha n}^*] \text{sen} \left(\frac{\Delta \bar{m}_{mn}^2 L}{2 E} \right). \end{aligned} \quad (1.36)$$

e por fim, nos casos em que os termos da matriz U são reais, a probabilidade de sobrevivência para antineutrinos possui o mesmo funcional que para neutrinos,

$$P(L/E)_{\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta} = 1 - 4 \sum_{n>m} |U_{\alpha m} U_{\alpha n}|^2 \text{sen}^2 \left(\frac{\Delta \bar{m}_{mn}^2 L}{4 E} \right). \quad (1.37)$$

1.4.3 Oscilação de dois sabores de neutrinos: Transição $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$

O parâmetro θ_{13} não foi considerado nos experimentos de desaparecimento de neutrinos, pois a resolução desses experimentos não foi capaz durante algum tempo de determinar uma significativa mudança nas medidas de oscilação devido o efeito de θ_{13} . O modelo de dois sabores foi suficiente para ajustar os dados. Atualmente, os experimentos começaram a realizar medidas de desaparecimento junto com aparecimento de neutrinos, com o modelo de três sabores de neutrinos. Utilizamos o modelo de dois sabores na transição em especial de $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$, pois esta transição é interessante na análise de dados deste trabalho.

A probabilidade de oscilação no caso que estamos tratando vai depender de dois graus de liberdade que são os parâmetros de oscilação $|\Delta m_{32}^2| = |m_3^2 - m_2^2|$ em módulo e o ângulo de mistura θ_{23} . Podemos então realizar a transformação unitária através de uma matriz

dois por dois que vêm da matriz unitária do setor atmosférico,

$$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{23} & \text{sen } \theta_{23} \\ -\text{sen } \theta_{23} & \cos \theta_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}, \quad (1.38)$$

e a partir disso escrevemos a superposição dos estados igual a

$$\begin{aligned} |\nu_\mu\rangle &= \cos \theta_{23} |\nu_2\rangle + \text{sen } \theta_{23} |\nu_3\rangle, \\ |\nu_\tau\rangle &= -\text{sen } \theta_{23} |\nu_2\rangle + \cos \theta_{23} |\nu_3\rangle \end{aligned} \quad (1.39)$$

Por simplicidade, fazemos a evolução temporal do estado ν_τ ,

$$|\nu_\tau(t)\rangle = -\text{sen } \theta_{23} e^{-iE_2L} |\nu_2\rangle + \cos \theta_{23} e^{-iE_3L} |\nu_3\rangle, \quad (1.40)$$

e calculamos a probabilidade de sobrevivência a partir da expressão abaixo,

$$P(L/E)_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu} = 1 - |\langle \nu_\mu | \nu_\tau(t) \rangle|^2, \quad (1.41)$$

e podemos derivar facilmente a probabilidade de sobrevivência na transição $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$,

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu) = 1 - \text{sen}^2 2\theta_{23} \text{sen}^2 \left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{4E} \right). \quad (1.42)$$

Podemos também derivar a expressão 1.42 também a partir da 1.34, portanto temos,

$$\begin{aligned} P(L/E)_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha} &= 1 - 4|U_{\mu 3} U_{\mu 2}|^2 \text{sen}^2 \left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{4E} \right) \\ &= 1 - 4 \cos^2 \theta_{23} \text{sen}^2 \theta_{23} \text{sen}^2 \left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{4E} \right) \\ &= 1 - \text{sen}^2 2\theta_{23} \text{sen}^2 \left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{4E} \right). \end{aligned} \quad (1.43)$$

Para utilizarmos a equação nas unidades de medidas do detector, é necessário realizar uma nova transformação na equação 1.42 onde devemos sair do sistema natural de unidades. Para isso precisamos reconsiderar aqui as constantes \hbar e c ,

$$\frac{\Delta m_{32}^2 L}{4E} \rightarrow \frac{1}{4\hbar/[eV \cdot s]c/[km/s]} \frac{\Delta m_{32}^2/[eV^2]L/[km]}{E/[GeV]} = 1,27 \frac{\Delta m_{32}^2 L}{E}, \quad (1.44)$$

onde o parâmetro Δm_{32}^2 é medido em unidades de eV^2 , E em GeV e L em km . Assim, a probabilidade que vamos utilizar fica

$$P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu) = 1 - \text{sen}^2 2\theta_{23} \text{sen}^2 \left(1,27 \frac{\Delta m_{32}^2 L}{E} \right). \quad (1.45)$$

1.4.4 Hierarquia de Massa

Medir a massa dos neutrinos é um processo ainda difícil de realizar na nossa atualidade. A dificuldade está basicamente no fato da massa destas partículas serem de uma ordem menor do que os equipamentos atuais possam alcançar. O modelo de oscilação possui um parâmetro que envolve o módulo da diferença quadrática das massas dos neutrinos, e, portanto, também não favorece uma medida direta de sua massa. Pelo modelo de oscilação, podemos extrair o módulo deste parâmetro possibilitando duas hierarquias de massa possíveis para os neutrinos⁵.

As medidas experimentais do parâmetro Δm^2 para neutrinos atmosférico é,

$$\Delta m_{32}^2 \sim 0,003 \text{ eV}^2, \quad (1.46)$$

enquanto que para neutrinos solares,

$$\Delta m_{21}^2 \sim 0,0001 \text{ eV}^2, \quad (1.47)$$

onde é mostrado na figura 1.4 o deslocamento que ocorre entre as massas para estes valores experimentais de Δm^2 . Com isso, podemos ter o seguinte,

$$|\Delta m_{31}^2| \sim |\Delta m_{32}^2 + \Delta m_{21}^2|, \quad (1.48)$$

que é o caso da hierarquia normal de massa dos neutrinos, então a massa seguiria a ordem a seguir,

$$m_1 < m_2 < m_3, \quad (1.49)$$

onde a massa do neutrino do elétron é menor que o do múon, e que por sua vez é menor do que a do tau, assim como o que ocorre com seus respectivos léptons carregados. Mas também podemos ter o inverso na qual,

$$|\Delta m_{31}^2| \sim |\Delta m_{32}^2 - \Delta m_{21}^2|, \quad (1.50)$$

que é mostrado na hierarquia invertida dos neutrinos na figura 1.4. Nesse caso, a massa dos neutrinos seguiriam a seguinte ordem,

$$m_3 < m_1 < m_2. \quad (1.51)$$

⁵ Na verdade, seriam três possibilidades, mas sabemos que $m_1 < m_2$ devido a interação de neutrinos eletrônicos com a matéria, logo, a hierarquia se reduz a duas possibilidades.

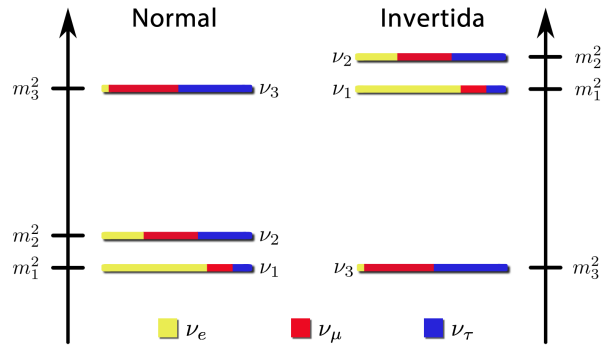


Figura 1.4: Hierarquia normal e invertida de massa dos neutrinos. Figura adaptada e retirada de <http://scienceblogs.com/startswithabang/2012/01/16/neutrinos-to-ring-in-the-new-y/>.

Estas são as possibilidades que temos a respeito da informação do módulo da diferença quadrática de massa dos neutrinos. No caso da hierarquia de massa normal, $\Delta m_{32}^2 > 0$ e $\Delta m_{31}^2 > 0$. O mesmo padrão ocorre quando consideramos a hierarquia invertida onde $\Delta m_{32}^2 < 0$ e $\Delta m_{31}^2 < 0$.

1.5 Oscilação com Decaimento

Descrevemos o modelo de oscilação incluindo a possibilidade de decaimento de neutrinos. Tratamos do caso em que neutrinos decaem para um estado invisível. Os neutrinos são criados com um sabor α e momento \vec{p} . Logo, podem oscilar para um sabor β , ou decaírem em partículas com massa inferior à partícula mãe no modelo teórico em questão. Antes, vamos introduzir uma sessão sobre decaimento puro.

1.5.1 Decaimento Puro

O fluxo de neutrinos pode ser descrito como a soma dos fluxos de cada sabor,

$$\phi_{\nu_{Total}}(t) = \phi_{\nu_e}(t) + \phi_{\nu_\mu}(t) + \phi_{\nu_\tau}(t), \quad (1.52)$$

A variação do fluxo ocorre entre $\phi_{\nu_e}(t)$, $\phi_{\nu_\mu}(t)$, e $\phi_{\nu_\tau}(t)$ é devido apenas a oscilação, de tal maneira, que quando o fluxo de neutrino eletrônico diminui, consequentemente, os fluxos de neutrinos muônicos e tauônicos devem aumentar mantendo o número total de neutrinos constante com o tempo. Em um caso em que incluímos a possibilidade de um decaimento de neutrinos em uma partícula desconhecida, ou até mesmo um neutrino estéril que não interagiria fracamente, e portanto, seria praticamente imperceptível aos detectores, podemos imaginar que o fluxo total de neutrinos não seria mais constante em

relação ao tempo. Neste caso, o fluxo diminuiria com uma taxa de decaimento λ ,

$$\lambda_\mu \phi_{\nu_\mu}(t) = -\frac{d\phi_{\nu_\mu}(t)}{dt}, \quad (1.53)$$

onde λ_μ é taxa de decaimento de ν_μ e o sinal negativo indica que neutrinos estão sendo perdidos ao longo do tempo. Esta taxa de decaimento, porém, pode ter comportamento de maneira diferente para cada sabor de neutrino. Isto significa que o decaimento de cada sabor de neutrino podem ter parâmetros de decaimento que indicam diferentes taxas de decaimento para cada neutrino, podendo um sabor ter mais probabilidade de decair do que os outros. Integramos a relação 1.53 levando isto em conta, e encontramos que fluxo de neutrinos considerando decaimento é,

$$\phi_{\nu_\mu}(t) = \phi_{0\nu_\mu} e^{-\lambda_\mu t}, \quad (1.54)$$

onde $\phi_{0\nu_\mu}$ é o fluxo inicial não dependente do tempo, pois estamos considerando um caso de decaimento puro⁶.

1.5.2 Formalismo Geral

Incluir um novo parâmetro no modelo que ainda não tenha sido observado pelos experimentos indica que possivelmente este parâmetro deve possuir uma ordem de grandeza no mínimo, menor que a do parâmetro Δm_{32}^2 . Isto significa que um novo grau de liberdade na oscilação não deve mudar muito a análise dos dados experimentais. Apesar dos dados dos experimentos corroborarem com o modelo de oscilação, esperamos que um ajuste com o acréscimo de um parâmetro não mude este quadro de maneira drástica [26–28].

O decaimento de neutrinos é descrito por uma evolução não-unitária. Neste caso, ocorre desaparecimento de neutrinos sem ocorrer transição para outros autoestados, portanto, a probabilidade não se conserva. O motivo desta violação é causado pelo fato de estarmos ignorando neste trabalho, o estado final para qual os neutrinos decaem [29].

Para o caso em que os neutrinos decaem para estados finais invisíveis podemos, de forma alternativa, moldar este modelo adicionando um termo imaginário na Hamiltoniana do sistema,

$$H = H_{\text{v\u00e1cuo}} + i\Lambda \quad (1.55)$$

⁶ O decaimento das partículas na verdade devem ocorrer sobre os estados de massa dos neutrinos. Mas como estamos tratando de um caso em que não há oscilação, os estados de massa e sabor são os mesmos.

onde $H_{\text{v\u00e1cuo}} = \text{diag}(E_1, E_2, E_3)$ e $\Lambda = \text{diag}(-\phi_1, -\phi_2, -\phi_3)/2E$ com $\lambda_m = -\phi_m/2E$, sendo $m = 1, 2, 3$. A matriz Λ representa uma taxa de decaimento e o fator $1/2E$ corresponde a dilata\u00e7\u00e3o temporal provocada pela alta energia cin\u00e9tica dos neutrinos⁷. Supondo o caso para n estados, a Hamiltoniana fica,

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} E_1 + i\lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & E_m + i\lambda_m \end{pmatrix}. \quad (1.56)$$

Com isto podemos descrever os autoestados de massa e sabor evolu\u00eddos no tempo,

$$\begin{aligned} |\nu'_m(t)\rangle &= e^{-i(E_m+i\lambda_m)t} |\nu'_m\rangle, \\ |\nu'_\alpha(t)\rangle &= \sum_m U_{\alpha m}^* |\nu'_m(t)\rangle = \sum_m U_{\alpha m}^* e^{-i(E_m+i\lambda_m)t} |\nu'_m\rangle, \end{aligned} \quad (1.57)$$

substituindo $|\nu'_m\rangle$ em fun\u00e7\u00e3o dos estados de sabor na express\u00e3o 1.57 temos,

$$|\nu'_\alpha(t)\rangle = \sum_{m,\beta} U_{\alpha m}^* e^{-i(E_m+i\lambda_m)t} U_{\beta m} |\nu'_\beta\rangle. \quad (1.58)$$

Repetindo o mesmo processo realizado para a oscila\u00e7\u00e3o pura, a amplitude de transi\u00e7\u00e3o do estado α para β \u00e9

$$\langle \nu'_\beta | \nu'_\alpha(t) \rangle = \sum_m U_{\beta m} U_{\alpha m}^* e^{-i(E_m+i\lambda_m)t}. \quad (1.59)$$

Portanto, a probabilidade de transi\u00e7\u00e3o \u00e9 dada por,

$$P'_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = \sum_{m,n} U_{\alpha m} U_{\alpha n}^* U_{\beta m}^* U_{\beta n} e^{-i(E_m-E_n)t} e^{(\lambda_m+\lambda_n)t}, \quad (1.60)$$

onde separando a soma em 1.60 para $m = n$ e $m \neq n$ obtemos,

$$P'_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = \sum_m |U_{\alpha m} U_{\beta m}|^2 e^{-\lambda_m L} + \sum_{n \neq m} U_{\alpha m} U_{\alpha n}^* U_{\beta m}^* U_{\beta n} e^{-i(E_m-E_n)t} e^{(\lambda_m+\lambda_n)t}, \quad (1.61)$$

Na soma em que $m \neq n$ na equa\u00e7\u00e3o 1.61, reescrevemos como uma soma para $n > m$,

$$P'_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = \sum_m |U_{\alpha m} U_{\beta m}|^2 e^{-\lambda_m t} + 2 \sum_{n>m} U_{\alpha m} U_{\alpha n}^* U_{\beta m}^* U_{\beta n} e^{-i(E_m-E_n)t} e^{(\lambda_m+\lambda_n)t}, \quad (1.62)$$

⁷ Cada neutrino pode ser produzido com uma energia diferente. Esta energia pode ser baixa, como da ordem de 1 GeV, ou alta como da ordem de 60 GeV. Portanto, os efeitos de dilata\u00e7\u00e3o temporal s\u00e3o distintos para cada neutrino que nasce. Sendo assim, \u00e9 necess\u00e1rio levar esta considera\u00e7\u00e3o no par\u00e2metro λ .

expandindo E_m como descrito pela equação 1.24 e aproximando $L \approx t$ temos,

$$P'(L/E)_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = \sum_m |U_{\alpha m} U_{\beta m}|^2 e^{2\lambda_m L} + 2 \sum_{n>m} U_{\alpha m} U_{\alpha n}^* U_{\beta m}^* U_{\beta n} e^{(\lambda_m + \lambda_n)L} \exp\left(-i \frac{\Delta m_{mn}^2 L}{2E}\right), \quad (1.63)$$

Agora, expandimos a segunda somatória de 1.63 em sua parte real e imaginária,

$$\begin{aligned} P'(L/E)_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} &= \sum_m |U_{\alpha m} U_{\beta m}|^2 e^{2\lambda_m L} \\ &+ 2 \sum_{n>m} \text{Re}[U_{\alpha m} U_{\alpha n}^* U_{\beta m}^* U_{\beta n}] e^{(\lambda_m + \lambda_n)L} \cos\left(\frac{\Delta m_{mn}^2 L}{2E}\right) \\ &- 2 \sum_{n>m} \text{Im}[U_{\alpha m} U_{\alpha n}^* U_{\beta m}^* U_{\beta n}] e^{(\lambda_m + \lambda_n)L} \text{sen}\left(\frac{\Delta m_{mn}^2 L}{2E}\right), \end{aligned} \quad (1.64)$$

e por fim, substituímos λ_m que possui dimensão de eV em termo de ϕ_m que tem dimensão de eV^2 na equação 1.64,

$$\begin{aligned} P'(L/E)_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} &= \sum_m |U_{\alpha m} U_{\beta m}|^2 e^{-\phi_m L/E} \\ &+ 2 \sum_{n>m} \text{Re}[U_{\alpha m} U_{\alpha n}^* U_{\beta m}^* U_{\beta n}] e^{-(\phi_m + \phi_n)L/2E} \cos\left(\frac{\Delta m_{mn}^2 L}{2E}\right) \\ &- 2 \sum_{n>m} \text{Im}[U_{\alpha m} U_{\alpha n}^* U_{\beta m}^* U_{\beta n}] e^{-(\phi_m + \phi_n)L/2E} \text{sen}\left(\frac{\Delta m_{mn}^2 L}{2E}\right), \end{aligned} \quad (1.65)$$

que é a probabilidade de oscilação geral com termos de amortecimento. Os parâmetros de amortecimento da probabilidade são chamados de parâmetros de decaimento dos neutrinos.

No caso em que a matriz U é real, podemos simplificar a equação 1.65. Logo, a soma dos termos imaginários é nula, e com isso temos,

$$\begin{aligned} P'(L/E)_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} &= \sum_m |U_{\alpha m} U_{\beta m}|^2 e^{-\phi_m L/E} \\ &+ 2 \sum_{n>m} [U_{\alpha m} U_{\alpha n} U_{\beta m} U_{\beta n}] e^{-(\phi_m + \phi_n)L/2E} \cos\left(\frac{\Delta m_{mn}^2 L}{2E}\right). \end{aligned} \quad (1.66)$$

Finalmente, a probabilidade de oscilação com termos amortecidos de sobrevivência é,

$$\begin{aligned} P'(L/E)_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha} &= \sum_m |U_{\alpha m}|^4 e^{-\phi_m L/E} \\ &+ 2 \sum_{n>m} |U_{\alpha m} U_{\alpha n}|^2 e^{-(\phi_m + \phi_n)L/2E} \cos\left(\frac{\Delta m_{mn}^2 L}{2E}\right). \end{aligned} \quad (1.67)$$

1.5.3 Aproximação de dois sabores na sobrevivência de ν_μ

O resultado da aproximação de dois sabores para sobrevivência de ν_μ é obtido tomando os termos da matriz do setor atmosférico. Utilizando a equação 1.67 temos,

$$P'(L/E)_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu} = |U_{\mu 2}|^4 e^{-\alpha_2 L/E} + |U_{\mu 3}|^4 e^{-\alpha_3 L/E} + 2|U_{\mu 2} U_{\mu 3}|^2 e^{-(\alpha_2 + \alpha_3)L/2E} \cos\left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{2E}\right). \quad (1.68)$$

Substituindo os valores da matriz unitária temos,

$$P'(L/E)_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu} = \cos^4 \theta_{23} e^{-\frac{\alpha_2 L}{E}} + \sin^4 \theta_{23} e^{-\frac{\alpha_3 L}{E}} + 2\sin^2 \theta_{23} \cos^2 \theta_{23} e^{-(\alpha_2 + \alpha_3)L/2E} \cos\left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{2E}\right). \quad (1.69)$$

No caso do experimento MINOS, a energia E é medida em GeV , portanto, α_3 e α_2 também deve ser medido com dimensão de GeV^2 . Agora, como estamos utilizando o sistema natural de unidades, temos que;

$$dim[E \times t] = 1, \quad (1.70)$$

logo, neste sistema energia possui dimensão igual ao inverso do tempo. Ainda neste sistema, o tempo possui dimensão de distância, ou seja, podemos mostrar que o parâmetro α_i possui dimensão igual a GeV/km .

É comum encontrarmos resultados experimentais publicados também em unidades de s/eV para expressar o tempo de decaimento dos neutrinos. A conversão de α_i em GeV/km para τ_i/m_i em s/eV é,

$$\tau_i/m_i [s/eV] = \frac{1}{\alpha_i [GeV/km]} \times \frac{1}{3,0 \times 10^{14}}. \quad (1.71)$$

Agora, podemos fazer uma análise rápida das medidas dos limites do parâmetro α_2 segundo resultados experimentais de neutrinos solares. Segundo a referência [30], os limites encontrados são da ordem de,

$$\frac{\tau_2}{m_2} \gtrsim 10^{-4} s/eV, \quad (1.72)$$

em um nível de 90% CL (nível de confiança). Isto corresponde a um valor da ordem de $10^{-10} GeV/km$, logo, α_2 pode ser desprezado em medidas do setor atmosférico que possui valores de uma ordem de grandeza na faixa entre $10^{-4} - 10^{-3} GeV/km$. Fazendo $\alpha_2 \ll \alpha_3$ em 1.69, temos,

$$P'(L/E)_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu} = \cos^4 \theta_{23} + \sin^4 \theta_{23} e^{-\frac{\alpha_3 L}{E}} + 2\sin^2 \theta_{23} \cos^2 \theta_{23} e^{-\frac{\alpha_3 L}{2E}} \cos\left(\frac{\Delta m_{32}^2 L}{2E}\right). \quad (1.73)$$

onde α_3 ⁸ é o parâmetro de decaimento do ν_3 na oscilação de ν_μ para ν_τ . Por fim, a probabilidade de oscilação com decaimento utilizada para ajustar os dados desta análise, deve levar em conta a transformação do sistema natural de unidades no sistema internacional, logo, a probabilidade utilizada na análise é

$$P'(L/E)_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu} = \cos^4 \theta_{23} + \sin^4 \theta_{23} e^{-\frac{\alpha_3 L}{E}} + 2 \sin^2 \theta_{23} \cos^2 \theta_{23} e^{-\frac{\alpha_3 L}{2E}} \cos \left(2,54 \frac{\Delta m_{32}^2 L}{E} \right). \quad (1.74)$$

Podemos discutir um pouco mais sobre o modelo de oscilação com decaimento a partir das investigações publicadas na literatura. Colaboradores do CERN investigaram a possibilidade de decaimento de neutrinos produzido por aceleradores. Neste trabalho foi pego $L = 7152$ km, que é a distância da fonte no CERN até o detector INO (India-based Neutrino Observatory). Os colaboradores do observatório dizem ser capazes de determinar a massa dos neutrinos caso seja determinado os parâmetros α_2 e α_3 , não conseguindo apenas desvendar a hierarquia de massa [31].

Podemos ainda, por exemplo, citar outros trabalhos que motivam a nossa investigação, ou seja, buscam determinar limites sobre o parâmetro de decaimento dos neutrinos, como por exemplo, o decaimento de neutrinos cosmológicos, que estão a anos-luz da Terra [32, 33]. Nas referências [34–37], são discutidos sobre as possibilidades de neutrinos decaírem, e o quanto isto é interessante fenomenologicamente. Além disso, também é feito o tratamento teórico da combinação de oscilação com decaimento.

A colaboração MiniBooNE, que faz parte do Fermilab, descobriu recentemente uma anomalia na distribuição de baixa energia de eventos de neutrinos quase-elásticos. Nesta análise foi observado durante o processo um excesso de elétrons produzidos, o que poderia ter procedência do decaimento de um neutrino mais pesado. Este neutrino mais pesado seria criado a partir da mistura de ν_μ de interações NC, e decaimentos radioativos em $\nu + \gamma$ devido a mudança do momento magnético entre o neutrino pesado e o neutrino leve ν . Esta anomalia é discutida nas referências [38, 39].

1.5.4 Limites extremos

Podemos derivar através da probabilidade de oscilação com decaimento, as expressões para oscilação pura e decaimento puro através de limites extremos. Se fazemos $\alpha_3 L/E \ll 1$ em 1.74, recuperamos a probabilidade de oscilação pura dada pela equação 1.45. Caso

⁸ Na equação 1.67 denotamos o parâmetro de decaimento como ϕ_m , no entanto, é comum encontramos na literatura este parâmetro denotado por α . Usaremos esta notação daqui em diante.

peguemos o limite em que $\Delta m_{32}^2 \gg E/L$ [27], então $\cos(2,54\Delta m_{32}^2 L/E)$ na média vai pra zero, com isso, chegamos para este caso, na probabilidade de oscilação com decaimento na qual a diferença quadrática de massa entre os neutrinos é muito grande comparada com α_3 , ou seja, um caso em que independente o valor de Δm_{32}^2 ,

$$P'(L/E)_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu} = \cos^4 \theta_{23} + \sin^4 \theta_{23} e^{-\frac{\alpha_3 L}{E}}. \quad (1.75)$$

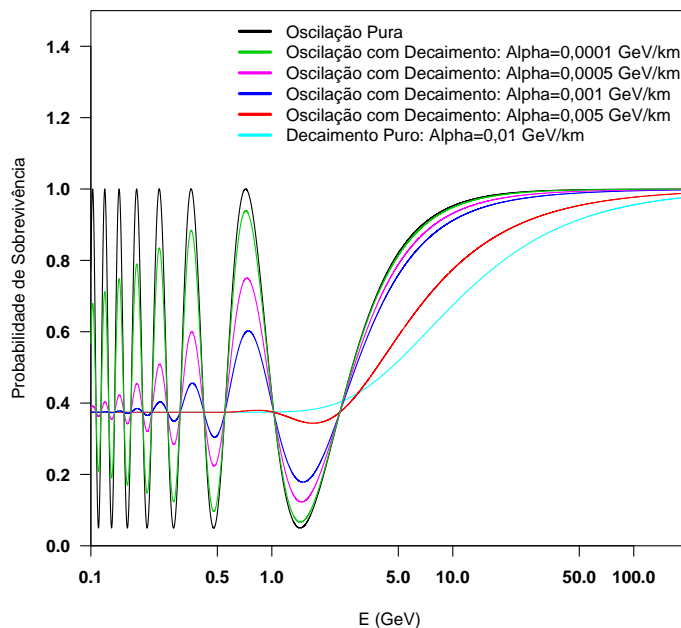
Um outro cenário é discutido na referência [28], o caso do decaimento puro, quando o limite $\Delta m_{32}^2 L/E \ll 1$, logo,

$$P'(L/E)_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu} = (\cos^2 \theta_{23} + \sin^2 \theta_{23} e^{-\frac{\alpha_3 L}{E}})^2. \quad (1.76)$$

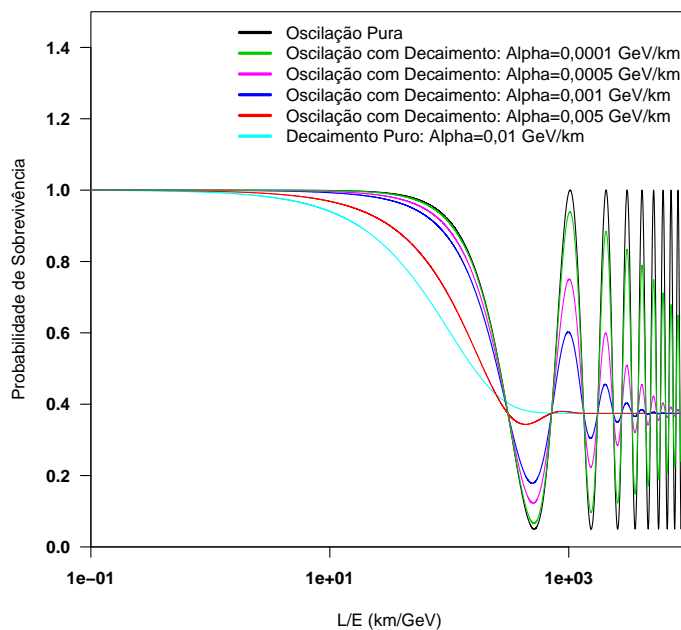
No capítulo 4 mostramos que este último caso limite é atualmente excluído.

Os experimentos que investigam a física dos neutrinos mostraram que o fenômeno de oscilação é predominante sobre os outros possíveis fenômenos que o neutrino pode sofrer. Isso não quer dizer que outras possibilidades estão descartadas, e sim que os equipamentos de detecção não possuem resolução suficiente ainda para obter bons resultados destes outros efeitos que podem ser tratados como fenômenos subdominantes da oscilação. Portanto, sabemos que o parâmetro α_3 do setor atmosférico deve ser de uma ordem menor que do parâmetro de oscilação Δm_{32}^2 . Na figura 1.5 fizemos um gráfico contendo as probabilidades de oscilação pura em comparação com decaimento puro, e alguns cenários possíveis para oscilação com decaimento (mantivemos fixos os valores dos parâmetros de oscilação em $\sin^2 2\theta_{23} = 0,95$ e $\Delta m_{32}^2 = 2,41 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$). Mostramos que decaimento puro não concorda com oscilação pura, e portanto, estaria descartado. Mostramos ainda que o valor de α_3 pode ser de uma ordem menor ou igual à 10^{-3} GeV/km . Para valores maiores que este, o mínimo da probabilidade deixa de existir. Ainda nesta figura, tanto (a) quanto (b), vemos que por exemplo para $\alpha_3 \sim 10^{-3} \text{ GeV/km}$, o primeiro mínimo da probabilidade de oscilação com decaimento comparado com o primeiro mínimo da oscilação pura não são tão discrepantes, ou seja, este cenário não estaria descartado. O experimento MINOS investiga o primeiro mínimo da oscilação, logo, vemos a dificuldade em determinar limites bons para α_3 , pois neste primeiro mínimo, os experimentos mostram que a oscilação é um fenômeno muito forte. Mas notemos pela curva azul escuro, em ambos os gráficos, que o efeito do parâmetro de decaimento fica maior nos mínimos subsequentes. Experimento como o MINOS+ pode contribuir em resultados sobre limites de α_3 no futuro, pois este experimento irá aumentar consideravelmente a estatística de

dados obtida pelo MINOS e ainda o experimento NOvA que investiga um outro mínimo da oscilação. Outros experimentos que forneçam dados de neutrinos atmosféricos devem contribuir muito nestas medidas.



(a)



(b)

Figura 1.5: Neste gráfico mostramos vários cenários da probabilidade de sobrevivência de oscilação pura, decaimento puro, e oscilação com decaimento para vários valores do parâmetro de decaimento (mantivemos fixos os valores dos parâmetros de oscilação em $\sin^2 2\theta_{23} = 0,95$ e $\Delta m_{32}^2 = 2,41 \times 10^{-3} eV^2$). Em (a) a probabilidade de sobrevivência está em função da energia, enquanto que em (b) está em função da distância pela energia L/E . Mostramos que o para o caso de decaimento puro, não temos um mínimo para a função, e que quanto menor o valor de α_3 , mais próximo a probabilidade de oscilação com decaimento fica da probabilidade de oscilação pura como esperado.

CAPÍTULO 2

EXPERIMENTO MINOS

Este não é um trabalho do experimento MINOS, porém, como estamos utilizando os dados extraídos publicados por este experimento, é interessante descrever com um pouco mais de detalhes, a parte técnica do experimento. Neste capítulo apresentamos características básicas deste experimento.

2.1 Descrição Geral

MINOS é um experimento designado a estudar um fenômeno conhecido como oscilação de neutrinos e determinar os parâmetros do modelo. Esta investigação pode dizer que os neutrinos de fato, oscilavam e eram massivos.

A construção da linha de feixe e do experimento foram realizadas entre os anos de 1999 e 2004, sendo que em 2004 o FD estava em fase de testes, operando e coletando dados de raios cósmicos e neutrinos atmosféricos. De fato, os dois detectores começaram a funcionar simultaneamente a partir de 2005, portanto, esta é a data inicial para os estudos de desaparecimento com a linha de feixe. O feixe de neutrinos gerado pode ser configurado para otimizar produção de neutrinos ou antineutrinos [40].

Os primeiros resultados do MINOS testou os modelos de decaimento e decoerência pura em seus dados para comparar com os resultados de oscilação e determinar qual dos modelos tem maior aceitação. O experimento MINOS excluiu com seus resultados, as possibilidades de decaimento e decoerência pura.

O experimento está localizado no Fermilab a nordeste dos EUA, no estado de Illinois.

O MINOS é um experimento proposto para medir os parâmetros de oscilação de neutrinos do setor atmosférico, via eventos de desaparecimento de neutrinos muônicos. É composto de uma linha de feixe de neutrinos (NuMI-*Neutrinos at the Main Injector*), com dois detectores constituídos de cintiladores plástico magnetizados por um campo toroidal \vec{B} . Os dois detectores são denominados por *Near Detector* (Fermilab), pesando 980 toneladas, e *Far Detector* (Soudan, Minnesota, EUA), com 5400 toneladas, visualizado na figura 2.1. Estão distanciados por 734 km, na qual o *Near Detector* e *Far Detector* estão a uma profundidade de aproximadamente 100 e 713 metros abaixo do solo respectivamente, falaremos deles com mais detalhe adiante.

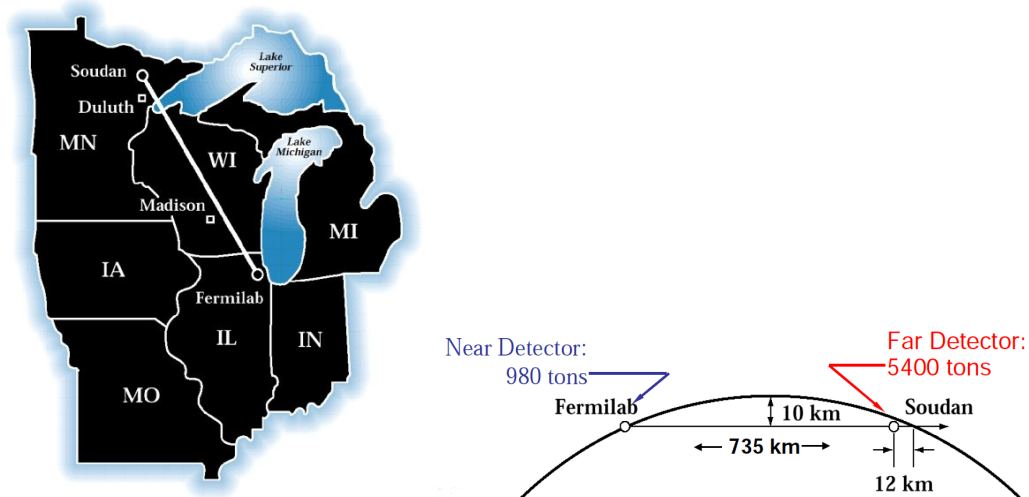


Figura 2.1: Localização do experimento MINOS, informações sobre os detectores (distância entre os detectores) e suas profundidades. A reta na imagem indica o caminho em que o feixe NuMI percorre.

No MINOS é utilizado uma quantidade de prótons em um alvo específico (POT - protons on target) para produzir a linha de feixe NuMI. Na colisão de prótons com um cilindro fino de grafite são produzidas várias partículas das quais uma grande quantidade é considerada ruído. Utilizando-se um mecanismo a base de campos eletromagnéticos, as partículas podem ser separadas. A configuração para neutrinos do feixe NuMI focaliza em π^+ e K^+ , resultando em um feixe composto de 92,9% de ν_μ , 5,8% de $\bar{\nu}_\mu$, e 1,3% de $(\nu_e + \bar{\nu}_e)$. No caso da configuração para antineutrinos que focaliza π^- e K^- , as porcentagens ou probabilidades da produção do feixe de antineutrinos diferem da de neutrinos, pois o feixe é produzido da colisão de prótons, resultando em um feixe composto agora de 58,1% de

ν_μ , 39,9% de $\bar{\nu}_\mu$, e 2,0% ($\nu_e + \bar{\nu}_e$), através dos canais de decaimentos [41],

$$\begin{aligned}
 \pi^{+(-)} &\longrightarrow \mu^{+(-)} + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)(\sim 100\%) & K^{+(-)} &\longrightarrow \mu^{+(-)} + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)(63.5\%) \\
 K^{+(-)} &\longrightarrow \pi^{+(-)} + \pi^0(20.6\%) & K^{+(-)} &\longrightarrow \pi^0 + e^{+(-)} + \nu_e(\bar{\nu}_e)(5.1\%). \\
 K^{+(-)} &\longrightarrow \pi^0 + \mu^{+(-)} + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)(3.4\%) & K^{+(-)} &\longrightarrow \pi^{+(-)} + \pi^{+(-)} + \pi^{-(+)}(5.6\%)
 \end{aligned} \quad (2.1)$$

com suas respectivas probabilidades de ocorrência.

2.1.1 Feixe NuMI

O feixe NuMI é originado de um feixe de prótons. O feixe de prótons origina-se inicialmente de um cilindro de hidrogênio. Logo após é injetado em um acelerador linear chamado Cockroft-Walton, em seguida no LINAC (*linear accelerator*). Ao sair do LINAC, o feixe passa por uma folha de grafite onde os elétrons do gás são removidos, e então o feixe é injetado no Booster (o primeiro acelerador circular do processo com 75 m de raio). No Booster, o feixe é acelerado até atingir uma energia de 8 *GeV*, após isto, é injetado no Main Injector, outro acelerador do Fermilab com 530 m de raio, eleva a energia dos prótons até um valor próximo de 150 *GeV* [42].

No Main Injector ocorre uma separação no feixe de prótons, na qual uma parte do feixe é dirigido para a linha de feixe NuMI para produção do feixe de neutrinos. O Main Injector envia o feixe de prótons para a linha NuMI com 120 *GeV* de energia, para colidir com um alvo de grafite de dimensões $6,4 \times 15,0 \times 940,0 \text{ mm}^3$. A outra parte do feixe de prótons era encaminhada para o Tevatron, maior acelerador do Fermilab, até 30 de setembro de 2011, quando este acelerador foi desativado. Podemos ver uma ilustração deste mecanismo na figura 2.2

Na linha de feixe NuMI, os mésons produzidos, são focalizados por um par de sistemas magnéticos chamados *horns*, representado na figura 2.3, que podem focalizar tanto mésons positivos quanto negativos, de acordo com a corrente selecionada. Após serem focalizados, os mésons são direcionados a uma região de decaimento com 675 m de comprimento e 2 m de diâmetro, responsável por parar eventuais hádrons que não decaíram, por meio de um absorvedor localizado no fim dessa região. Os mésons positivos irão decair em antimúons e gerarão o feixe de neutrinos enquanto o decaimento de mésons negativos geram o feixe de antineutrinos como mostrado pela eq. 2.2,

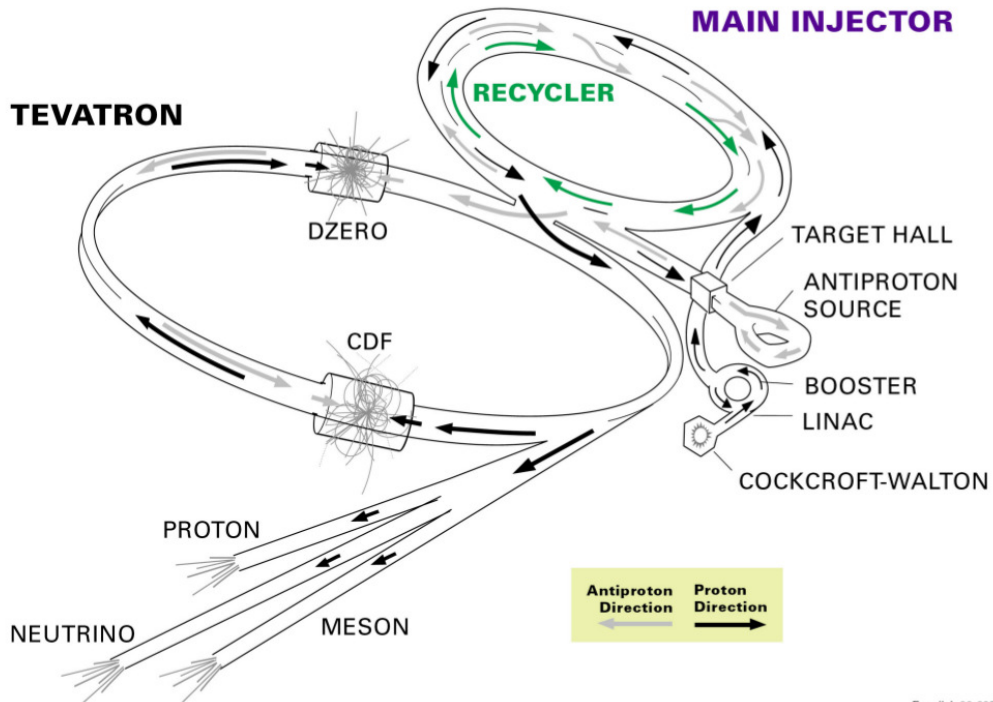


Figura 2.2: Esquema da cadeia de aceleradores do Fermilab.



Caso o horn opere focalizando mésons positivos, chamamos de FHC (*Foward Horn Current*), senão se o horn opera focalizando mésons negativos, o RHC (*Reverse Horn Current*). Neste regime pode ocorrer de alguns múons ou kaóns não decaírem, para isto, são usados aproximadamente 300 m de rocha para bloquear tais partículas [43].

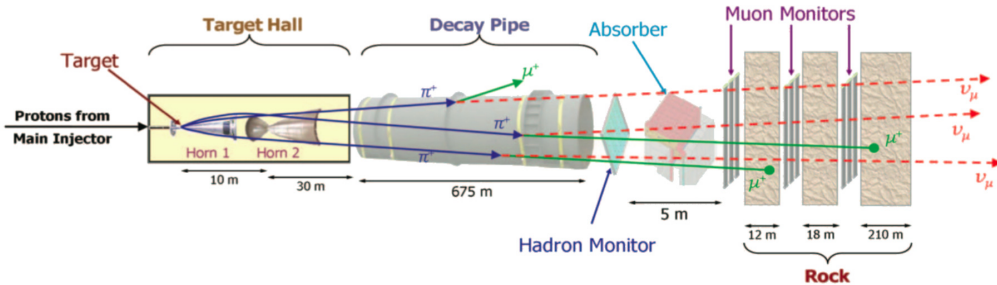


Figura 2.3: Esquema mostrando como é produzido a linha de feixe NuMI com o horn.

2.1.2 Detectores do MINOS

Near Detector (ND)

Este detector está localizado no Fermilab, próximo ao alvo de grafite (aproximadamente 1 km de distância do alvo), possuindo uma profundidade de 100 m abaixo do solo e com intuito de detectar o fluxo inicial de neutrinos muônicos. Possui dimensões de 16 m \times 3,8 m \times 4,8 m e um conjunto de 282 planos octagonais de Fe, além disso, são somados a 152 planos de cintiladores plásticos (localizado entre os planos), com uma massa total e fiducial, da ordem de 980 toneladas e 100 toneladas respectivamente de acordo com o ilustrado na figura 2.4 [43].

Near Detector



Figura 2.4: Imagem do Near Detector durante sua construção.

O Near Detector é dividido em duas grandes seções, chamadas de seção frontal e do espectrômetro de múons. A seção frontal é dividida em três subseções. São eles o veto, a região-alvo e a região de chuveiros hadrônicos. O veto é composto de 20 planos de Fe, servindo para detectar as partículas que entram no detector a partir de uma interação do feixe com a rocha (eventos deste tipo são descartados). A região-alvo possui 40 planos de Fe e é responsável por todos os eventos detectados aceitos pelo experimento. A região de chuveiros hadrônicos é o local onde ocorrerão os chuveiros resultantes de interações que ocorreram na subseção anterior. No total, a primeira seção é formada por 120 planos de Fe e 120 planos de cintiladores plásticos, sendo totalmente instrumentada numa área do detector em torno de 2,8 m \times 2,8 m (região central onde ocorre a incidência do feixe), contendo uma instrumentação maior a cada cinco planos. A região com uma instrumentação maior fornece as informações das interações fora da região central.

A segunda seção é composta por 162 planos de Fe e por 32 planos cintiladores, com

um plano instrumentado a cada cinco planos de Fe, considerado por isso como uma seção parcialmente instrumentada [43–45] como na figura 2.5.

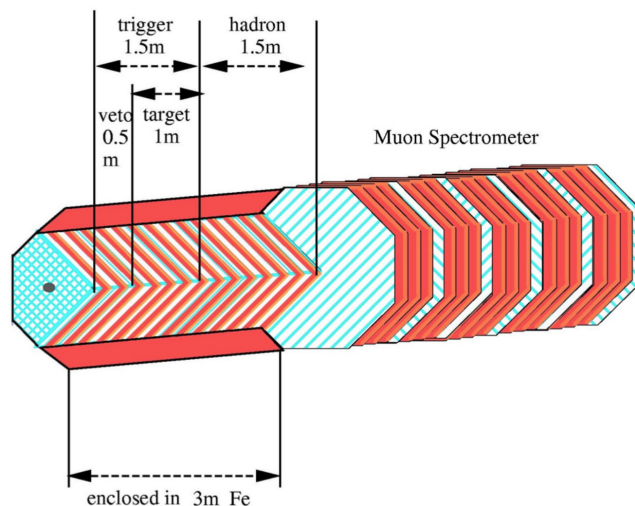


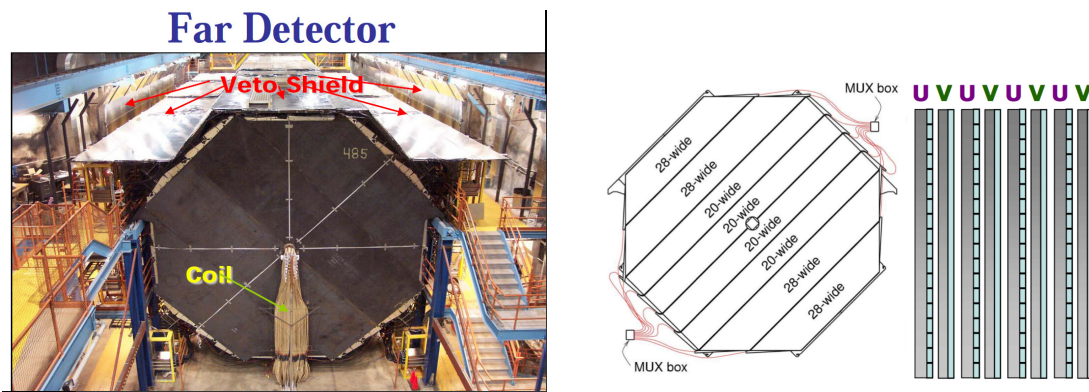
Figura 2.5: Figura esquemática dos planos e das seções do Near Detector.

O detector gera um campo magnético devido a uma espira que passa pelo seu centro. O campo magnético produzido pela espira é essencial para determinar a carga da partícula detectada.

Far Detector (FD)

Este detector está mais distante do Fermilab, foi construído em uma mina (Soudan mine, MN) a 735 *km* de distância do Fermilab e 734 *km* do Near Detector. O Far Detector está a uma profundidade de 713 m em relação ao nível do solo, sendo bem maior que o Near Detector possuindo dimensões de 31 m × 8 m × 8 m. É formado por dois supermódulos, cada um com 243 planos de Fe e 242 planos cintiladores plásticos, sendo no total um conjunto de 486 planos de ferro e 484 planos instrumentados, resultando em uma massa total e fiducial de aproximadamente 5400 toneladas e 3300 toneladas respectivamente [43]. Os planos instrumentados do FD são intercalados, chamados de planos **UV** (planos U ou V de acordo com a direção). Os planos estão rotacionados de um ângulo de 90° entre si, com o objetivo de fornecer uma melhor visualização das trajetórias dos eventos medidos. Além disso, o FD possui um veto na parte superior para garantir a separação dos eventos medidos de raios cósmicos e eventos associados ao feixe NuMI.

O campo magnético produzido pela espira no interior do detector, representado na figura 2.6, tem como objetivo assim como no Near Detector de definir a carga da par-



(a) (b)
 Figura 2.6: Na imagem (a) temos o detector Far Detector, ainda na imagem está indicado o veto e a espira produtora do campo magnético toroidal. Em (b) temos uma figura esquemática mostrando como são os planos UV do Far Detector.

tícula detectada (definir a carga dos múons que passam pelo detector). A profundidade e as dimensões do Far Detector permite também a possibilidade de medidas de múons atmosféricos (raios cósmicos). As medidas são observadas por display de monitoramento como indicado na figura 2.7 que mostra um dos últimos eventos de neutrinos do MINOS.

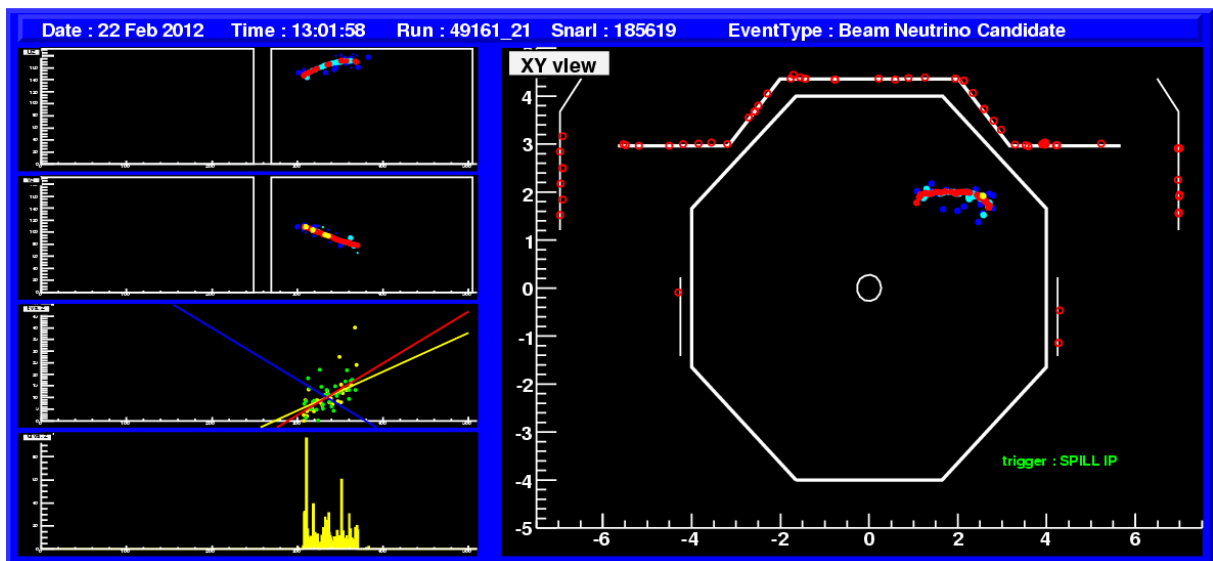


Figura 2.7: Exemplo de um evento detectado pelo FD, extraído 22 de fevereiro de 2012 as 13 horas, 01 minuto e 58 segundos. Evento do tipo: Neutrino do feixe NuMI.

CAPÍTULO 3

RESULTADOS DA LITERATURA RELEVANTES PARA NOSSA ANÁLISE

Neste capítulo fazemos uma revisão dos resultados do experimento MINOS de desaparecimento de $\nu_\mu/\bar{\nu}_\mu$ na investigação da oscilação de neutrinos. Mostramos, ainda, o resultado obtido do próprio MINOS na procura por limites do tempo de vida dos neutrinos utilizando o modelo de oscilação com decaimento [46], e também um trabalho fenomenológico no cenário de oscilação com decaimento que pode ser visto na referência [26], que servirão de base para esta análise que procura determinar limites para o parâmetro de decaimento dos neutrinos.

3.1 Produção dos Neutrinos

Antes de apresentarmos os resultados relevantes que contribuíram para esta análise, é interessante definirmos os diferentes neutrinos que são caracterizados pela sua fonte de produção.

3.1.1 Neutrinos Atmosféricos e de Aceleradores

A produção de ambos neutrinos atmosféricos e de aceleradores vêm dos mesmos canais de decaimento. A maior taxa destes neutrinos produzidos provém do decaimento de píons e múons, como resultado temos neutrinos de sabor muônico. A grande diferença entre estes neutrinos está no fato de neutrinos atmosféricos como o próprio nome diz, é produzido

por toda a atmosfera terrestre. Neste caso, os neutrinos são produzidos com uma faixa extensa de energia e por diferentes pontos da atmosfera, ou seja, são produzidos a uma distância da Terra que varia bastante. Para analisar estes neutrinos, é preciso admitir que a distância L entre o detector e a produção do neutrino seja uma variável a mais do problema, isto, além da energia que também é uma variável. Com isso, é utilizado como variável do sistema a razão L/E . Ao contrário dos neutrinos atmosféricos, os neutrinos produzidos em aceleradores, apesar de também serem muônicos, a distância L é fixa e bem definida, além disso, a faixa de energia em que os neutrinos são produzidos é menor e possui um controle muito maior na produção, podendo focar melhor a análise em certa faixa de energia que seja interessante de analisar, controle que não existe com neutrinos atmosféricos.

3.1.2 Neutrinos Solares e de Reatores

Estes neutrinos produzidos são de sabor eletrônico, e ambos provém do modelo solar. São as cadeias de reações que ocorrem no Sol. Novamente, a grande diferença é que devemos tratar os neutrinos solares através da variável L/E , ou seja, não temos nenhum controle da produção destes neutrinos. No caso dos reatores, onde ocorre a produção dos neutrinos, podemos fixar um detector a uma distância L do reator podendo assim reduzir o sistema apenas a variável da energia dos neutrinos.

3.2 Medidas de Oscilação de dois Sabores do MINOS

Os períodos de tomada de dados do experimento são conhecido por "*runs*". Na figura¹ 3.1 podemos observar todo o período em que o experimento MINOS coletou dados, e também os períodos em que estava desligado, ou em fase de calibração. O histograma verde são os períodos em que o experimento funcionou em sua configuração de neutrinos, em vermelho são os "*special runs*", que servem para testes do fluxo de neutrinos, e da linha de feixe NuMI. No ano de 2009 em diante há um período em cor laranja que o experimento operou na configuração de antineutrinos. Com isso, podemos saber a quantidade de meses em que o experimento estava funcionando entre os resultados publicados. Ao fim do período de coleta de dados do MINOS, que começou em maio de 2005, atingiu-se um

¹ Esta figura pode ser acessada em: [http://www.fnal.gov/directorate/program_planning/New%\\$20Documents%\\$20of%\\$20Interest/AnnOpsSum/AnnOpsSumTM2012.docx](http://www.fnal.gov/directorate/program_planning/New%$20Documents%$20of%$20Interest/AnnOpsSum/AnnOpsSumTM2012.docx)

total de $15,7 \times 10^{20}$ POT.

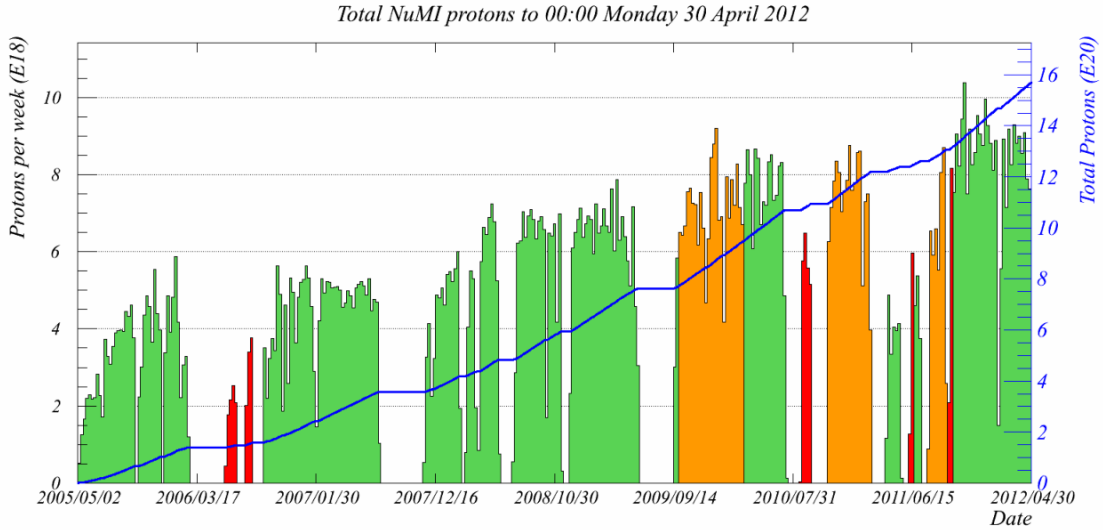


Figura 3.1: Períodos de coleta de dados do MINOS de 2005 até 2012.

O primeiro resultado de desaparecimento de neutrinos muônicos foi publicado um ano após o experimento começar a tomar dados, com uma estatística de $1,27 \times 10^{20}$ POT. Foram observados 215 eventos e eram esperados 336 ± 14 eventos caso não houvesse oscilação. O melhor ajuste usando o modelo de oscilação pura foi,

$$\Delta m_{32}^2 = 2,74 \times 10^{-3} \text{ eV}^2 \quad \text{e} \quad \sin^2 2\theta_{23} = 1,00 \quad (3.1)$$

Neste primeiro resultado, MINOS utilizou o modelo de oscilação pura de dois sabores para ajustar os dados. Este resultado mostrou como a oscilação de neutrinos se ajustou muito bem aos dados, mesmo com uma estatística ainda bem abaixo da sua capacidade total, pois como podemos ver na figura 3.2 (a), há uma grande discrepância entre o espectro de eventos sem oscilação e os dados. O ajuste com o modelo de oscilação por outro lado, está próxima dos dados obtidos. Em (b) desta mesma figura, temos a razão dos eventos observados (dados) e esperados segundo a oscilação pelos eventos esperados sem oscilação. Observamos que o ajuste com o modelo de oscilação pura novamente possui uma boa concordância com os dados. Ainda em (b), podemos ver um mínimo que significa a energia dos neutrinos em que ocorre o máximo de oscilação de neutrino muônico para neutrino tauônico. É nessa faixa de energia que o experimento possui maior interesse. Vale ressaltar que o experimento não sabia antes de começar a medir qual energia correspondia a este mínimo.

Um dos objetivos do MINOS é também determinar limites para os parâmetros de oscilação. O processo escolhido para determinar estes limites foi através de regiões de

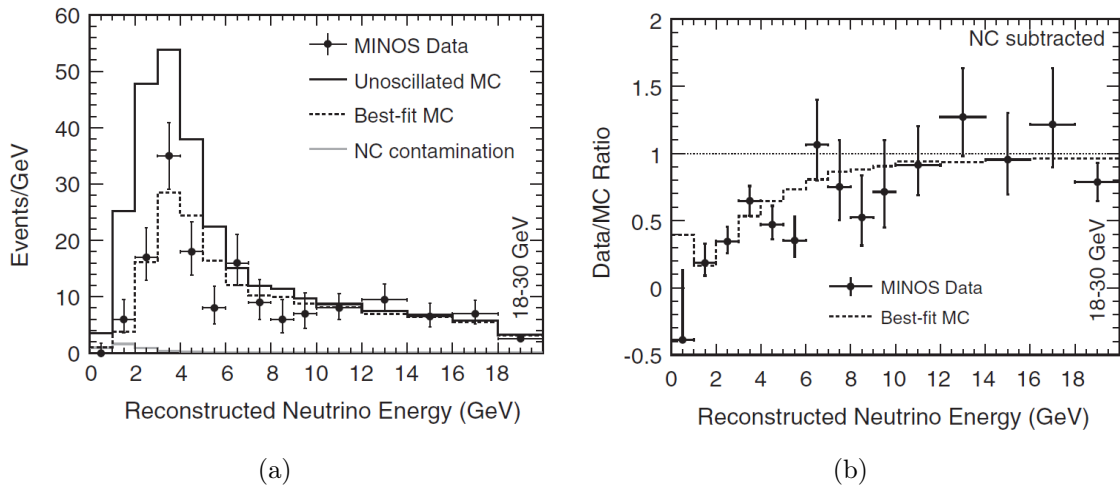


Figura 3.2: Em (a), o resultado publicado pelo MINOS no ano de 2006 da energia pelo número de eventos, possuindo as curvas no caso sem oscilação e o melhor ajuste de acordo com os dados obtidos, e os eventos produzidos por ruídos (background). O gráfico (b) mostra o resultado da razão entre os dados com a curva sem oscilação e está ajustada de acordo com o modelo de oscilação. Esta figura foi retirada da referência [40].

confiança ou permitidas onde os dois parâmetros são estimados simultaneamente. Trata-se, portanto, de um histograma bidimensional. O resultado dado pela figura 3.3 foi construído para 68%, 90%, e 99% CL², e também contém o valor do melhor ajuste. Os

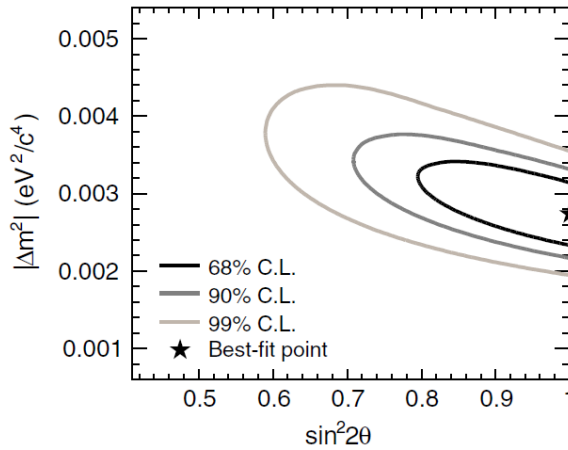


Figura 3.3: Resultado dos limites de confiança onde os dois parâmetros de oscilação são estimados simultaneamente. Figura retirada da referência [40].

limites encontrados para 90% CL foram,

$$2,31 \times 10^{-3} < \Delta m_{32}^2 < 3,43 \times 10^{-3} \text{ eV}^2, \quad (3.2)$$

² Para maiores detalhes sobre regiões de confiança, ver apêndice B.

para diferença quadrática de massa, e

$$\sin^2 2\theta_{23} > 0,68, \quad (3.3)$$

para o seno quadrado de θ_{23} .

O segundo resultado deste experimento utilizou uma estatística de $3,36 \times 10^{20}$ POT que corresponde a dois anos de tomada de dados, com uma previsão de 1065 ± 60 eventos esperados, mas com a observação de 848 eventos. Aplicando o modelo de oscilação sobre os dados, o MINOS obteve o melhor ajuste dos parâmetros de oscilação igual a,

$$\Delta m_{32}^2 = (2,43 \pm 0,13) \times 10^{-3} \text{ eV}^2 \text{ (68\%CL)} \quad \text{e} \quad \sin^2 2\theta_{23} = 1,00. \quad (3.4)$$

O limite obtido para o parâmetro de θ_{23} à 90% CL (figura 3.4) foi de,

$$\sin^2 2\theta_{23} > 0,90. \quad (3.5)$$

Neste resultado foi investigado os modelos de decaimento puro e decoerência pura ainda

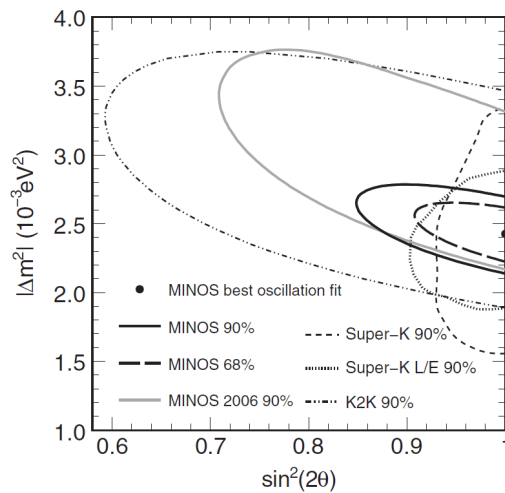


Figura 3.4: Resultado dos limites de confiança onde os dois parâmetros de oscilação são estimados simultaneamente dos resultados contidos na referência [47]. Regiões permitidas nos níveis de confiança de 90% e 68% CL. É feita uma comparação dos resultados do MINOS com seu próprio resultado de 2006, e ainda com regiões de outros experimentos.

como mostrado na figura 3.5 (b). Em (b) podemos ver que o modelo de oscilação pura se ajustou melhor aos dados. Mas para comprovarmos isto, o experimento publicou que o modelo de decaimento puro é excluído no nível de $3,7\sigma$ CL, e o modelo decoerência pura no nível de $5,7\sigma$ CL, ou seja, é um desfavorecimento acima de 99% CL. Figura 3.5 (a) compara os eventos produzidos no ND extrapolados para o FD (eventos esperados) com os eventos coletados no FD, e além disso com os eventos produzidos segundo o modelo de oscilação pura que claramente está mais próximo dos dados.

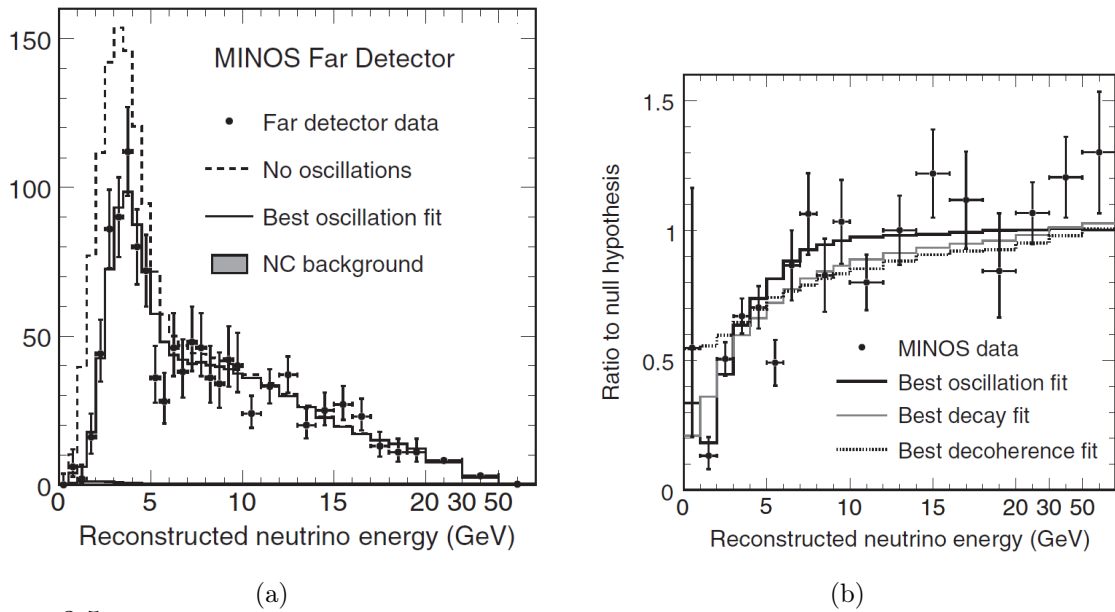


Figura 3.5: O gráfico (a) mostra o resultado publicado pelo MINOS no ano de 2008 da energia pelo número de eventos, possuindo as curvas no caso sem oscilação e o melhor ajuste de acordo com os dados obtidos, e os eventos produzidos por ruídos (background). Em (b) temos o resultado da razão entre os dados com a curva sem oscilação e está ajustada de acordo com os modelos de oscilação, descoerência e de decaimento. Estas figuras foram retiradas da referência [1].

O terceiro resultado publicado pela colaboração do MINOS de desaparecimento de neutrinos muônicos usou uma estatística de $7,25 \times 10^{20}$ POT, e foram observados 1986 eventos, sendo esperados 2451 eventos caso não houvesse. O ajuste dos parâmetros de oscilação, logo, foram atualizados para,

$$\Delta m_{32}^2 = 2,32 \times 10^{-3} \text{ eV}^2 \quad \text{e} \quad \sin^2 2\theta_{23} = 1,00. \quad (3.6)$$

Na figura 3.6 (a) comparamos o espectro de eventos esperados sem oscilação com os dados obtidos, e também fazemos a mesma comparação com o espectro de eventos construídos a partir do modelo de oscilação pura. Ainda em (a) temos o resultado da razão entre o espectro de eventos esperados por dados observados, e além disso essas mesmas razões segundo o modelo de oscilação pura, decaimento puro, e descoerência pura. Em ambos os resultados, a oscilação pura parece estar em melhor concordância com os dados experimentais. O ganho estatístico desta análise serviu para mostrar que o desfavorecimento para modelos como decaimento puro e descoerência são ainda maiores que da última análise, sendo respectivamente 7σ e 9σ . A região de confiança 2D dada na figura 3.6 (b) mostra que os parâmetros de oscilação no limite de 90% CL estão mais restritos com aumento estatístico dos dados. Para 90% CL, os limites da região 1D publicados pelo experimento

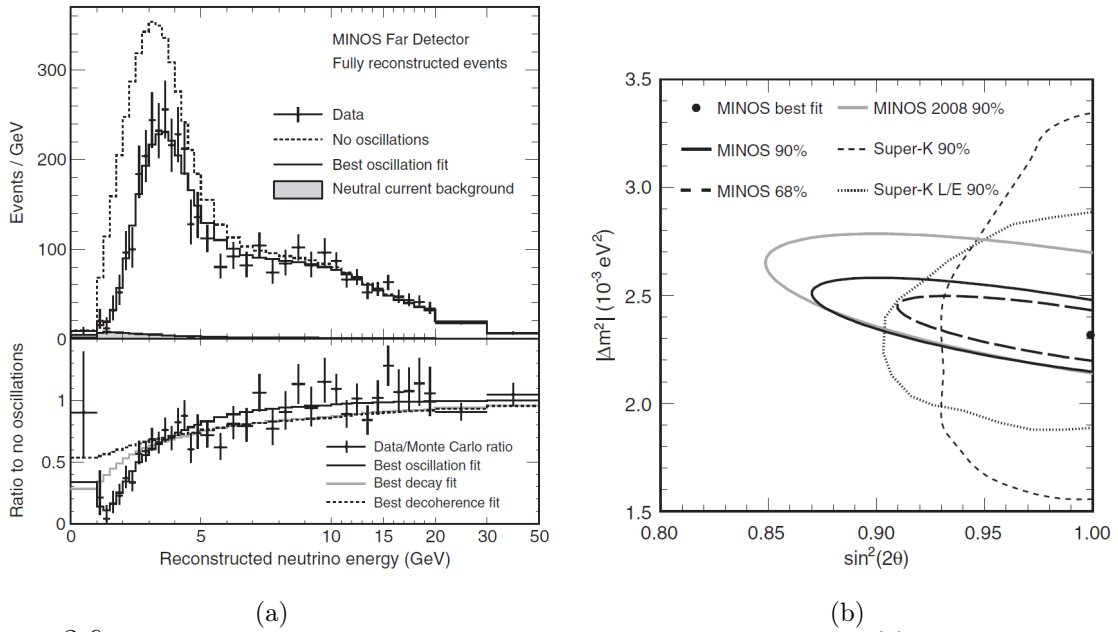


Figura 3.6: Temos nestes gráficos os resultados publicados em 2011. Em (a) temos o resultado da energia pelo número de eventos, possuindo as curvas no caso sem oscilação e o melhor ajuste de acordo com os dados obtidos junto ao gráfico da razão com os ajustes do modelo de oscilação, descoerência e de decaimento, além dos eventos de NC (background). Em (b) temos o resultado da região de contorno onde podemos encontrar os parâmetros de oscilação nos cenários de níveis de confiança de 90% e 68% CL. É feita uma comparação dos resultados do MINOS com seu próprio resultado de 2008, e ainda com regiões de outros experimentos. Estas figuras foram retiradas da referência [1].

foram,

$$\Delta m_{32}^2 = 2,32_{-0,08}^{+0,12} \times 10^{-3} \text{ eV}^2, \quad (3.7)$$

e,

$$\text{sen}^2 2\theta_{23} > 0,90, \quad (3.8)$$

Houve uma melhora no limite de Δm_{32}^2 onde o MINOS realmente possui maior capacidade de investigação.

Retomando a figura 3.1, vemos que entre parte de 2009 e um período de 2010, MINOS trabalhou em sua configuração de antineutrinos muônicos que resultou em uma estatística de $1,71 \times 10^{20}$ POT. Ainda no final deste mesmo ano até alguns períodos de 2011 também funcionou nesta configuração com o acréscimo de $1,24 \times 10^{20}$ POT, então, com um total de $2,95 \times 10^{20}$ POT. Isto rendeu a primeira publicação de desaparecimento de antineutrinos da colaboração, onde o melhor ajuste obtido para os parâmetros de oscilação nesta configuração foram,

$$\Delta \bar{m}_{32}^2 = 2,62 \times 10^{-3} \text{ eV}^2 \quad \text{e} \quad \text{sen}^2 2\bar{\theta}_{23} = 0,95. \quad (3.9)$$

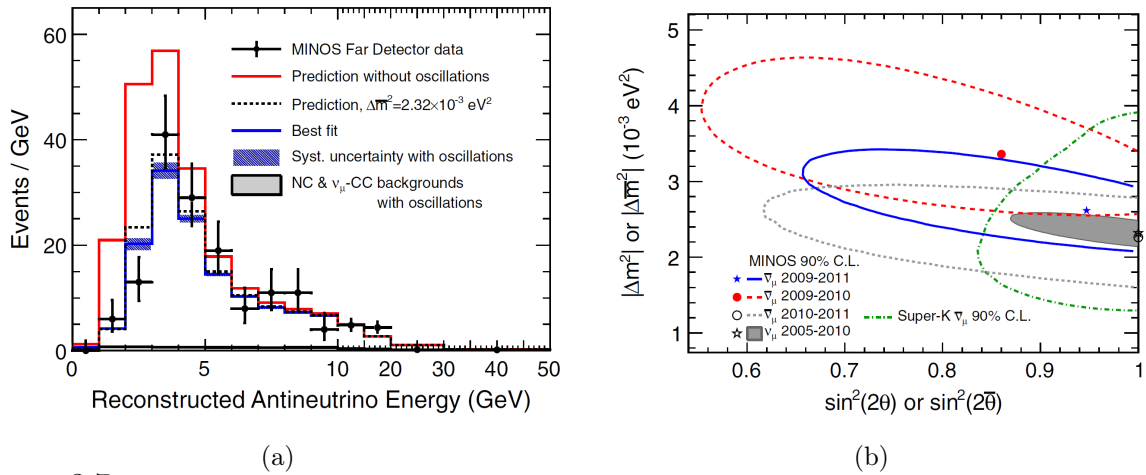


Figura 3.7: Resultados publicados referentes à referência [48]. Em (a) temos o resultado da qual foram extraídos os dados utilizados nesta análise de antineutrinos, os eventos esperados sem oscilação, eventos utilizando os ajustes contidos na referência [1], e os eventos segundo o melhor ajuste com modelo de oscilação. Em (b) temos o resultado das regiões permitidas para 90% de CL no MINOS para dados de antineutrinos. Ainda é englobado os resultados das regiões obtidas para alguns períodos em anos de tomada de dados. O resultado total para neutrinos de CC também é comparado com as regiões de antineutrinos.

Na figura 3.7 (a) temos os espectros para os casos sem oscilação, com o modelo de oscilação segundo o melhor ajuste dos parâmetros de oscilação da referência [1] e também com o melhor ajuste desta análise, os eventos observados, e ainda um pequeno ruído provocado pelos eventos de NC³. Em (b) desta mesma figura temos o cenário obtido dos limites de confiança dos parâmetros na configuração de antineutrinos comparados com a configuração de neutrinos. Percebemos que há coerência, pois a região permitida dos neutrinos está contida na região de antineutrinos. A região de antineutrinos está bem maior que a de neutrinos provavelmente por ter uma estatística em dados bem inferior. Por fim, os limites encontrados para os parâmetros de oscilação (limites da região 1D) nesta configuração foram para 90% CL,

$$\Delta\bar{m}_{32}^2 = 2,62_{-0,28}^{+0,31}(\text{estat.}) \pm 0,09(\text{sist.}) \times 10^{-3} \text{ eV}^2, \quad (3.10)$$

para diferença quadrática de massas, e

$$\text{sen}^2 2\bar{\theta}_{23} > 0,75, \quad (3.11)$$

para o quadrado do seno do ângulo de mistura.

O resultado mais recente da colaboração do MINOS é um ajuste global combinando os dados obtidos de neutrinos e antineutrinos. Foram utilizados nesta análise dados obtidos

³ No capítulo 4 discutiremos a importância dos eventos de NC para esta análise.

do feixe e de neutrinos atmosféricos. Os dados incluem exposições de $10,71 \times 10^{20}$ POT no feixe dominado por ν_μ , $3,36 \times 10^{20}$ POT no feixe dominado por $\bar{\nu}_\mu$ e $37,88$ kton yr de neutrinos atmosféricos. Supondo que os parâmetros de oscilação sejam os mesmos para neutrinos e antineutrinos, o ajuste global destes dados segundo o modelo de oscilação pura foi,

$$\Delta m_{32}^2 = 2,41 \times 10^{-3} eV^2 \quad \text{e} \quad \sin^2 2\theta_{23} = 0,950, \quad (3.12)$$

e permitindo medidas independentes para ν_μ e $\bar{\nu}_\mu$, MINOS mediu os parâmetros para antineutrinos e obteve,

$$\Delta \bar{m}_{32}^2 = 2,50 \times 10^{-3} eV^2 \quad \text{e} \quad \sin^2 2\bar{\theta}_{23} = 0,97. \quad (3.13)$$

Na figura 3.8 temos a relação de todos os espectros de energia construídos da linha de feixe (gráficos superiores), e os resultados obtidos das distribuições de eventos atmosféricos no espectro L/E (gráficos inferiores). Podemos ver deste resultado que a maior contribuição nos dados vêm do feixe dominado por neutrinos. Na figura 3.9 temos a comparação entre as regiões permitidas da análise combinada de ν_μ e $\bar{\nu}_\mu$ com as regiões de ν_μ e $\bar{\nu}_\mu$ separadas. Também é apresentado os limites de confiança 1D do ajuste dos dados de antineutrinos apenas. Os limites encontrados para os parâmetros supondo que sejam os mesmos para

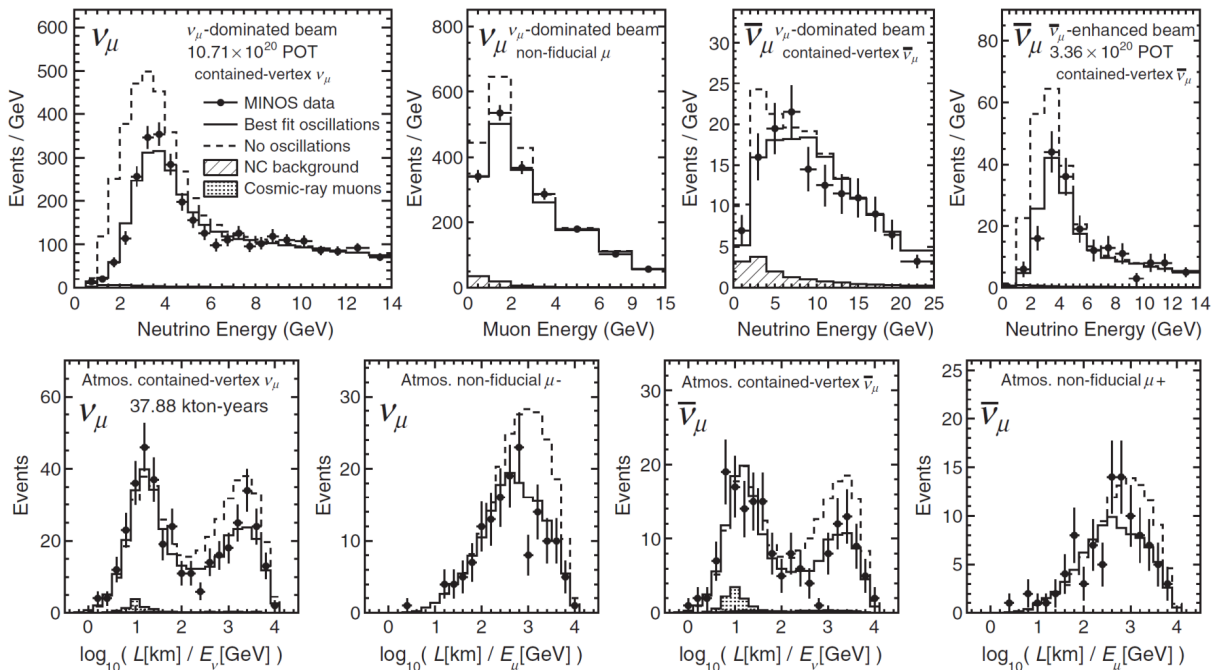


Figura 3.8: Comparação para diferentes amostras de dados coletados pelo FD com predições com e sem oscilação. Os gráficos superiores mostram o espectro de energia dos feixes enquanto que os gráficos inferiores mostra os resultados L/E das distribuições de eventos atmosféricos. Figura retirada da referência [49].

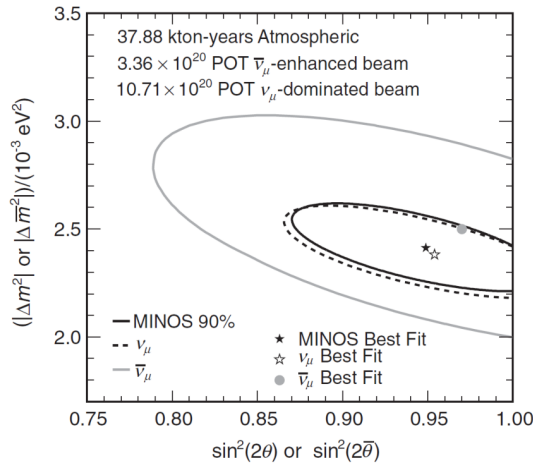


Figura 3.9: Região permitida para 90% CL dos parâmetros de oscilação do ajuste assumindo que neutrinos e antineutrinos são idênticos é comparado com a região permitida de ν_μ e $\bar{\nu}_\mu$ do ajuste em que neutrinos e antineutrinos possuem parâmetros de oscilação distintos. Figura retirada da referência [49].

ν_μ e $\bar{\nu}_\mu$ foi para 90% CL,

$$\Delta m_{32}^2 = 2,41_{-0,10}^{+0,09} \times 10^{-3} \text{ eV}^2, \quad (3.14)$$

para diferença quadrática das massas, e

$$\text{sen}^2 2\theta_{23} > 0,890, \quad (3.15)$$

para o quadrado do seno do ângulo de mistura. Os limites obtidos para ν_μ e $\bar{\nu}_\mu$ independentes foi para os dados de antineutrinos,

$$\Delta \bar{m}_{32}^2 = 2,50_{-0,25}^{+0,23} \times 10^{-3} \text{ eV}^2, \quad (3.16)$$

e,

$$\text{sen}^2 2\bar{\theta}_{23} > 0,83. \quad (3.17)$$

3.2.1 Medidas de Oscilação com Decaimento

MINOS publicou um resultado em que determina um limite para o parâmetro de decaimento de neutrinos que vêm do modelo de oscilação com decaimento para uma exposição de $3,18 \times 10^{20}$ POT [46]. Não foi possível encontrar um melhor ajuste para o parâmetro de decaimento, no entanto foi possível determinar limites para este parâmetro que é mostrado no resultado dado pela figura 3.10 (b) nos níveis de 68% e 90% CL. O limite no nível de 90% CL é,

$$\alpha < 1,6 \times 10^{-3} \text{ GeV}/km, \quad (3.18)$$

que corresponde à uma razão tempo de vida sobre a massa igual a,

$$\tau_3/m_3 > 2,1 \times 10^{-12} \text{ s/eV}, \quad (3.19)$$

Na figura 3.10 (a) é mostrado a região de confiança (90% CL) em que os parâmetros θ e

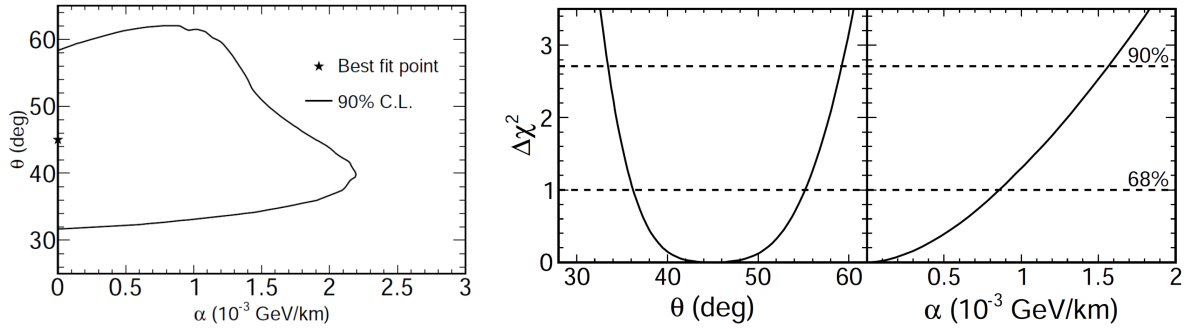


Figura 3.10: Em (a) temos o resultado da região permitida no nível de 90% de CL para dois parâmetros do modelo de oscilação com decaimento, o parâmetro de decaimento α e o ângulo de mistura. Em (b), o resultado das projeções 1D para α e θ [46].

α são estimados simultaneamente, e o melhor ajuste segundo o modelo de oscilação com decaimento. Podemos observar que o melhor ajuste para α nesse caso foi zero.

Vamos também fazer uma revisão do resultado fenomenológico obtido da referência [26] (Gonzalez e Maltoni), onde é feito uma análise aplicando o modelo de oscilação com decaimento sobre dados predominantemente de neutrinos atmosféricos do experimento Super-Kamiokande [50] junto com dados de experimentos de neutrinos de aceleradores dos experimentos K2K [51] e MINOS [40]. Os resultados mostram diferentes projeções dos parâmetros de oscilação e tempo de vida dos neutrinos nos cenários de uma dimensão e duas dimensões para níveis de confiança de 90%, 95%, 99%, e 3σ CL para análises com dados de neutrinos atmosféricos apenas, e com inclusão de neutrinos de aceleradores. As projeções correspondentes 1D (uma dimensão) são mostradas nos três gráficos superiores de 3.11. Desta figura podemos ver que o melhor ajuste para o cenário de oscilação com decaimento corresponde com a oscilação pura, ou seja, $\alpha \rightarrow 0$. São eles,

$$\sin^2 2\theta_{23} = 1,0, \quad \Delta m_{32}^2 = 2,4 \times 10^{-3} eV^2, \quad \text{e} \quad \tau_3/m_3 \gg 10^{-8} s/eV. \quad (3.20)$$

Estas soluções são bem aceitas no nível de 90% CL para análise de dados atmosféricos, no entanto, a figura também mostra que no cenário de oscilação com decaimento ainda é possível admitir no nível de 2σ CL o seguinte ajuste,

$$\sin^2 2\theta_{23} = 0,86, \quad \Delta m_{32}^2 = 2,6 \times 10^{-3} eV^2, \quad \text{e} \quad \tau_3/m_3 = 2,6 \times 10^{-12} s/eV, \quad (3.21)$$

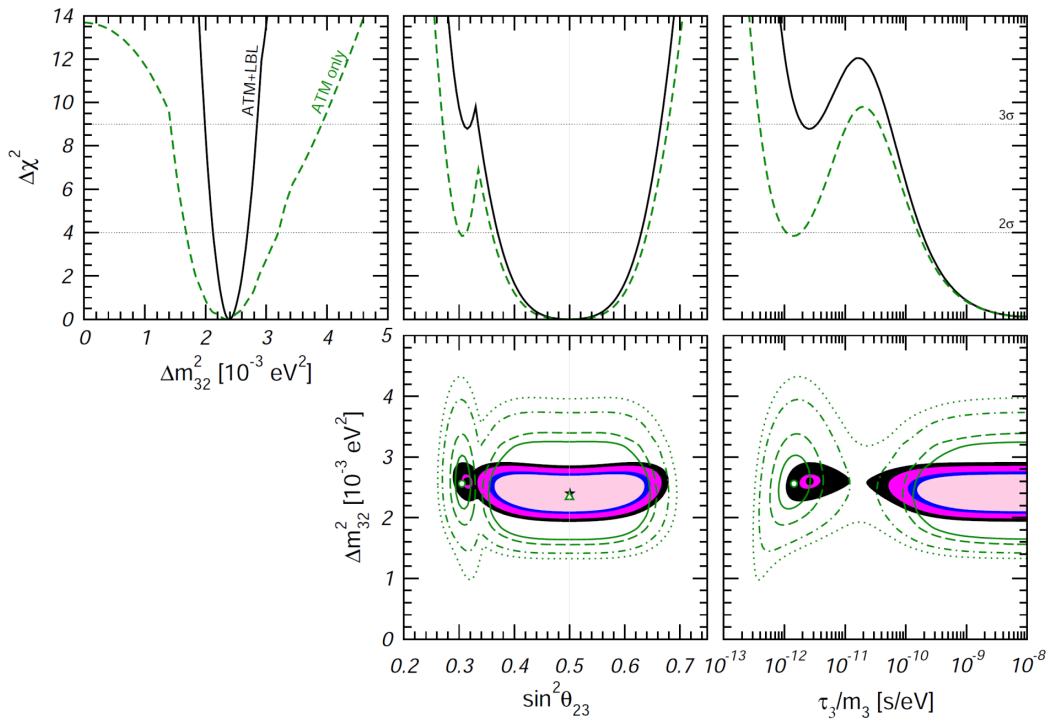


Figura 3.11: Resultado 1D obtido pelos 3 gráficos superiores para dados atmosféricos somente (pontilhado), e atmosféricos + aceleradores (linha). Os dois gráficos inferiores são as projeções 2D, as regiões com preenchimento são os resultados de atmosféricos mais aceleradores. As projeções foram feitas nos níveis de confiança de 90%, 95%, 99%, e 3σ CL.

mas quando os dados de neutrinos de aceleradores são adicionados, isto passa a ser para o nível de 3σ CL. Como principal ponto de importância deste trabalho, o limite para o tempo de vida dos neutrinos obtidos usando todos os dados foi para 90% CL de que,

$$\tau_3/m_3 \geq 2,9 \times 10^{-10} \text{ s/eV}. \quad (3.22)$$

CAPÍTULO 4

MÉTODO DA ANÁLISE DE DADOS

O objetivo desta análise é utilizar dados publicados de desaparecimento de ν_μ e $\bar{\nu}_\mu$ para obter limites sobre o parâmetro de decaimento α_3 do modelo de oscilação com decaimento de forma fenomenológica. Para este trabalho usamos os dados do experimento MINOS.

Apresentaremos os métodos utilizados para extração de dados, os recursos estatísticos e as metodologias para cálculo computacional das probabilidades na obtenção de regiões de confiança ou regiões permitidas (regiões de probabilidades para encontrar parâmetros-*graus de liberdade*) para 90% de nível de confiança (CL - do inglês *confidence level*).

4.1 Manipulação das Distribuições

As distribuições de eventos que utilizamos para as análises a partir da extração dos dados (ver apêndice A) publicados pelo experimento MINOS são relacionadas a seguir. Mostramos como foi realizado o tratamento sobre os dados e o processo do cálculo de eventos esperados da análise.

4.1.1 Notação das Distribuições

Vamos introduzir a notação das distribuições extraídas para realizar esta análise:

- N_u : Número de eventos sem oscilação (esperados se não há oscilação);
- N_o : Número de eventos com oscilação (melhor ajuste);
- N_d : Número de eventos de dados (de cada análise);

- N_b : Número de eventos de background (corrente neutra);
- R_o : Razão dos evento oscilados extraídos (melhor ajuste do MINOS);

4.1.2 Subtração dos Eventos de Background (ruído)

Os eventos de background são provenientes da interação fraca devido a corrente neutra. O experimento é projetado para trabalhar com eventos de corrente carregada, portanto, os eventos detectados por corrente neutra são um ruído do experimento.

Uma questão analisada foi em como lidar com os eventos de background no sentido de entender se as distribuições no espectro de energia possuem ou não os eventos de background extraídos. A informação que temos da referência [1], é que o resultado que computa a razão dos eventos oscilados pelos sem oscilação possuem background extraído, R_o . No entanto, não há comentários claros sobre o resultado que contém as distribuições de eventos a respeito do tratamento realizado sobre N_b . Portanto, em termos gerais, consideramos todas possibilidades da razão que poderíamos ter em relação a manipulação de N_b , entre o N_o (eventos com oscilação) sobre N_u (eventos sem oscilação). São quatro suposições que podemos admitir:

1. Background em ambos N_o e $N_u \Rightarrow R_1 = N_o/N_u$;
2. Sem background em N_o e $N_u \Rightarrow R_2 = (N_o - N_b)/(N_u - N_b)$;
3. Background somente em $N_u \Rightarrow R_3 = N_o/(N_u - N_b)$;
4. Background somente em $N_o \Rightarrow R_4 = (N_o - N_b)/N_u$.

Utilizamos as razões definidas R_1 , R_2 , R_3 e R_4 das possibilidades citadas e comparamos com a razão oscilada extraída R_o . Na figura 4.1 (a) temos as razões definidas em comparação com a razão do melhor ajuste. As curvas que se aproximam mais de R_o são R_1 e R_2 , exceto pela região de baixa energia no local do mínimo da razão onde R_2 está em melhor concordância com R_o do que as outras curvas. Isto ainda pode ser evidenciado também na figura 4.1 (b) que procura mostrar,

$$\frac{R_i}{R_o} \approx 1, \quad (4.1)$$

onde $i = 1,2,3$. Neste caso, a razão entre R_i/R_o que melhor está de acordo com o valor constante um, é a opção que assumimos das suposições inicialmente sugeridas. Novamente, a razão R_2 mostrou ser o mais próximo de R_o . Com isso, concluímos a partir

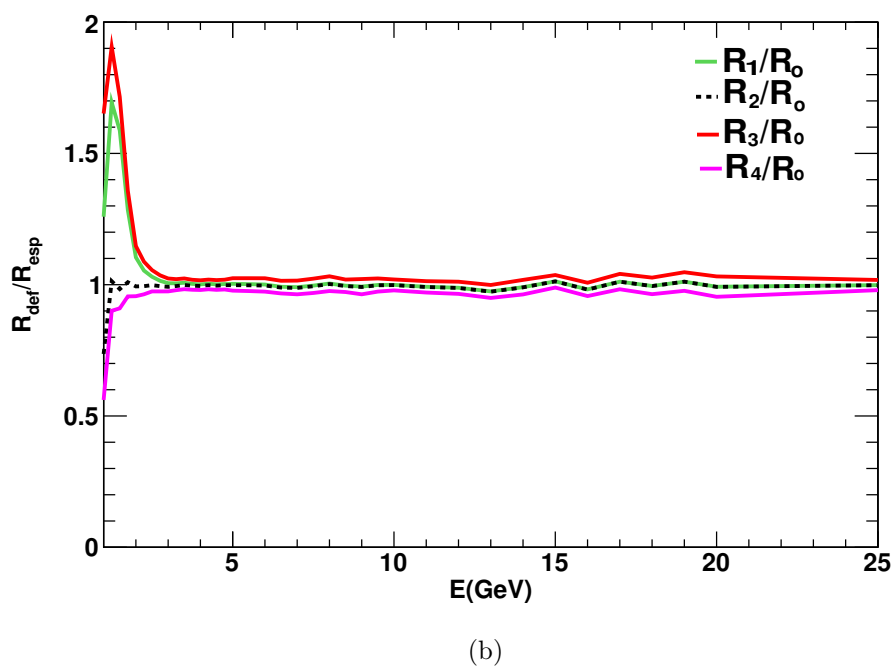
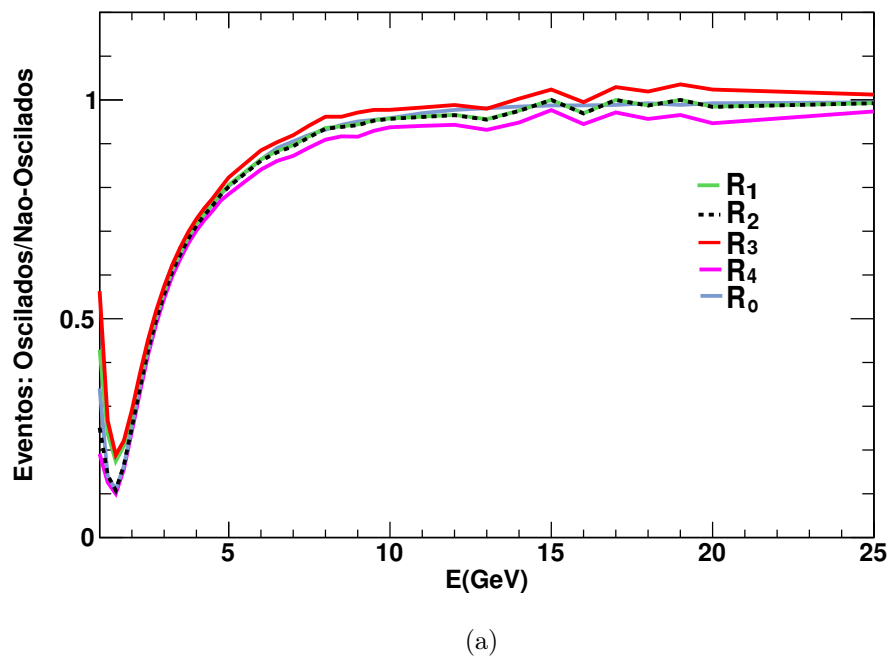


Figura 4.1: Para um conjunto de dados, apresentamos o resultado do teste realizado para definir qual das quatro possibilidades descritas é a correta. O mesmo critério deve valer para o tratamento de outros dados, desde que os dados utilizados sejam do mesmo experimento. Em (a) temos o resultado da razão para os diferentes casos comparados com a razão extraída R_o . Em (b), a comparação é feita diretamente pela divisão entre as razões para os quatro casos.

desta análise que devemos subtrair os eventos de background de ambas distribuições N_o

e N_d ¹.

4.1.3 Probabilidade por Bin de Energia

O espectro de energia dos neutrinos é construído de acordo com uma binagem² que é definida pelo experimento. Pela figura 4.2 temos um exemplo do que é um *bin* de energia de um espectro de partículas. Caso o número de *bins* de um espectro tenda a infinito, podemos imaginar isto como sendo um tipo de espectro contínuo.

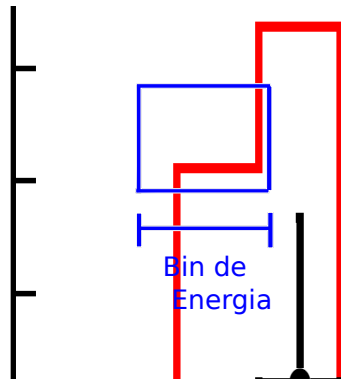


Figura 4.2: Colocamos um aumento de escala de uma parte do espectro de energia dos neutrinos para exemplificar o *bin* de energia.

Calculamos um valor médio para probabilidade sobre cada *bin* de energia utilizando as equações 1.45 para probabilidade de oscilação e 1.66 para probabilidade de oscilação com decaimento. Temos conhecimento sobre a dimensão da binagem de todos os espectros de energia utilizados nesta análise, portanto, integramos sobre cada *bin* de energia, aplicando o pressuposto teórico para obtermos os pontos de probabilidade constantes p_i de acordo com a equação 4.2,

$$p_i = \frac{1}{\delta_i} \int_{(E_{c_i} - \delta_i/2)}^{(E_{c_i} + \delta_i/2)} f(E)P(E)dE, \quad (4.2)$$

onde E_{c_i} é o valor da energia no centro de um *bin* qualquer, e δ_i o comprimento deste *bin*, para garantir que os pontos p_i estejam normalizados. A probabilidade $P(E)$ é a função pela qual procuramos ajustar os dados, enquanto que $f(E)$ é uma função definida para ponderar a probabilidade $P(E)$. Nesta análise em específico não ponderamos a

¹ A análise foi feita para a distribuição N_o . Concluído que o tratamento dos dados para N_o é realizado desta maneira, entendemos que o mesmo é feito para distribuição N_d .

² O *bin* de energia é definido arbitrariamente como um determinado intervalo de acordo com número de eventos.

probabilidade, utilizamos $f(E) = 1$. A largura do *bin* é definido de uma maneira geral pela equação 4.3,

$$\delta_i = \int_{(E_{c_i} - \delta_i/2)}^{(E_{c_i} + \delta_i/2)} f(E) dE. \quad (4.3)$$

4.1.4 Cálculo da Probabilidade do Espectro Total

Precisamos somar todos os pontos de probabilidade constante p_i para ter a probabilidade total do espectro. A probabilidade média do espectro é calculada da seguinte maneira,

$$\mathcal{P} = \sum_{i=1}^n p_i, \quad (4.4)$$

onde \mathcal{P} é um número e está normalizado devido os termos p_i estarem normalizados.

4.1.5 Cálculo do Número de Eventos Esperados

Calculamos o número de eventos simulados pelo produto da função probabilidade dada pela equação 4.4 e o número de eventos de corrente carregada (CC). Para considerar todos os eventos foi preciso ainda adicionar o número de eventos de background N_b que computa o número de eventos de corrente neutra (NC). O background medido é significativo no cálculo da distribuição esperada, mesmo que eventos desta natureza sejam mais raros, como podemos ver nos resultados do MINOS apresentados no capítulo 3. A extração de N_b é um trabalho complicado devido o baixo número de eventos que esta distribuição possui³, por isso, o erro natural causado pela extração destes resultados tem uma maior significância sobre N_b do que para as outras distribuições extraídas. Propomos incluir um parâmetro β de normalização dos eventos de N_b para tentarmos minimizar o erro na extração destes dados. A análise foi baseada em três possibilidades em que N_e pode ser definido,

1. $N_{e_{1_i}} = p_i \times (N_{u_i} - N_{b_i}) + N_{b_i}$;
2. $N_{e_{2_i}} = p_i \times (N_{u_i} - \beta N_{b_i}) + \beta N_{b_i}$;
3. $N_{e_{3_i}} = p_i \times (N_{u_i} - N_{b_i}) + \beta N_{b_i}$;

onde $N_{e_{1_i}}$, $N_{e_{2_i}}$ e $N_{e_{3_i}}$ é o evento esperado de cada *bin* de energia para cada uma das três hipóteses, β é o fator que introduzimos para ajustar o peso dos eventos de background

³ Para mais detalhes sobre o método de extração dos dados, ver apêndice A.

no números de eventos esperados, e p_i é dado pela equação 4.2. Lembramos que a probabilidade p_i está relacionada com as equações 1.45 e 1.66. A primeira hipótese é admitir $\beta = 1$, isto é, não realizar nenhuma normalização em N_b . Na segunda hipótese usamos o fator sobre os eventos de background e também sobre os eventos de corrente carregada que é proporcional à $(N_u - N_b)$. Por fim, a terceira hipótese é a que colocamos como a mais coerente em uma análise com este tipo de recurso. Não interferimos nos eventos de CC, mas ao adicionar os eventos de NC, usamos o parâmetro β para normalizar N_b a fim de minimizar os erros, e assim melhorar o ajuste dos dados. Usamos um teste estatístico sobre um conjunto de dados aplicando a probabilidade de oscilação sobre as distribuições. Fizemos o teste para intervalos iguais dos parâmetros de oscilação e obtivemos o resultado da tabela 4.1. Nesta análise estatística, o valor de χ_{min}^2 ⁴ menor entre os três obtidos da

	χ_{min}^2
$N_{e_{1i}}$	18,96
$N_{e_{2i}}$	18,56
$N_{e_{3i}}$	18,18

Tabela 4.1: Teste estatístico realizado para um conjunto de dados com três diferentes formas do cálculo do número esperado de eventos.

tabela 4.1 mostra o método mais eficiente entre eles. Portanto, concluímos que entre as três maneiras supostas para cálculo do número de eventos esperados, a terceira que foi dita como sendo a mais coerente entre elas, foi de fato pelo teste estatístico a melhor forma. Utilizamos para toda análise a opção 3 de acordo com a equação 4.5,

$$N_{e_i} = p_i \times N_{CC_i} + \beta N_{b_i}, \quad (4.5)$$

onde N_{CC_i} são os eventos de corrente carregada para cada *bin* i de energia.

4.2 Método de Normalização dos Eventos

O método desenvolvido para extrair os dados nos permitiu encontrar o número total de eventos próximo do real número do experimento. Utilizamos a normalização como uma forma de corrigir o erro no número total de eventos. Foi possível normalizar devido conhecermos a partir das referências [1], [48] e [49] os números totais de eventos observados

⁴ Teste pela função do χ^2 é visto com mais detalhes na seção 4.3.

e esperados pelo MINOS. Sempre que possível é recomendado realizar a normalização dos dados, porém, nos resultados finais desse trabalho, isto não é possível. Contudo, em resultados intermediários ou anteriores, o processo de normalização foi usado e satisfatório para estas análises.

Realizamos a normalização das distribuições N_u e N_d a partir do número de eventos esperados sem oscilação e observados experimentalmente. Temos para cada *bin* i na distribuição N_u a seguinte relação

$$N_{u,i} = f_u \times N_{u,\text{extraído},i}, \quad (4.6)$$

onde

$$f_u = \frac{\sum_i N_{u,\text{MINOS},i}}{\sum_i N_{u,\text{extraído},i}}, \quad (4.7)$$

é o fator de normalização dos eventos que considera a razão dos números totais de eventos oficiais do experimento pelo número de eventos não oficiais obtidos da extração dos dados. Este fator é uma constante e é aplicado sobre todos os termos da distribuição. A mesma relação é usada para normalizar a distribuição N_d ,

$$N_{d,i} = f_d \times N_{d,\text{extraído},i}, \quad (4.8)$$

com

$$f_d = \frac{\sum_i N_{d,\text{MINOS},i}}{\sum_i N_{d,\text{extraído},i}}. \quad (4.9)$$

Assim como f_u , o fator f_d é a razão do número total de dados observados experimentalmente pelo dados extraídos por fenomenologia.

4.2.1 Normalização dos Eventos de Neutrinos

O número de eventos contabilizados pelo MINOS contidos na referência [1] referente ao número de dados obtidos entre os anos de 2005 e 2009 são descritos pela equação 4.10,

$$\begin{aligned} \sum_i N_{u,\text{MINOS},i} &= 2451 \\ \sum_i N_{d,\text{MINOS},i} &= 1986, \end{aligned} \quad (4.10)$$

enquanto que o número de eventos extraídos da própria referência [1] é dado pela equação 4.11,

$$\begin{aligned} \sum_i N_{u,\text{extraído},i} &= 2474,82 \\ \sum_i N_{d,\text{extraído},i} &= 1950,09. \end{aligned} \quad (4.11)$$

A diferença percentual entre o número total de eventos esperados sem oscilação pelo número total de eventos esperados sem oscilação extraídos é de apenas 0,97% enquanto que de forma similar, o número total de eventos observados e o total de eventos observados extraídos possuem uma diferença de 1,80%. A forma de extrair os eventos é favorável a distribuição que possui maior número de eventos contados, ou seja, quanto maior for a estatística, melhor é a extração dos dados. Podemos ver este padrão no caso dos antineutrinos que no experimento MINOS possuem uma contagem muito inferior aos eventos de neutrinos.

O fator de normalização de N_u dado pela razão do número total de eventos pode ser visto pela equação 4.12,

$$f_u = \frac{2451}{2474,82} \sim 0,9904, \quad (4.12)$$

e de N_d pela equação 4.13,

$$f_d = \frac{1986}{1950,09} \sim 1,018. \quad (4.13)$$

Utilizamos as relações 4.6 e 4.8 para determinar as distribuições N_u e N_d normalizadas.

Normalização do Último Resultado do MINOS de Neutrinos

Afirmamos que a prática da normalização das distribuições extraídas contribuem para a melhora dos resultados. A estatística dos eventos é outro fator que contribui para resultados melhores, ou seja, quanto mais eventos, mais sólido um resultado se torna caso uma suposição admitida seja verdadeira.

O último resultado de neutrinos do MINOS que computa eventos medidos até meados de 2012 [49], possui um corte na distribuição de eventos, na qual é publicado apenas o espectro de energia dos neutrinos que é interessante para a análise, a região em que a oscilação é investigada. Como não é computado em seu resultado todos os eventos contabilizados até este período, não é possível realizar a normalização dos dados neste caso. O número de total de eventos de neutrinos contabilizou 3201 para eventos esperados sem oscilação e 2579 eventos observados até este período. Em termos gerais são aproximadamente 30% a mais de eventos contados em relação ao resultado anterior. Isto é o suficiente para termos melhores resultados com os dados mais atualizados do MINOS, mesmo que com estes conjunto de dados não seja possível fazer a normalização.

4.2.2 Normalização dos Eventos de Antineutrinos

No caso dos antineutrinos, o processo é o mesmo efetuado anteriormente, apenas diferindo as distribuições utilizadas. A primeira tomada de dados do MINOS de antineutrinos foi realizada no período de 2009 a 2010 e teve acréscimo de eventos com dados tomados durante uma parte do ano de 2010 até 2011 [48]. Os resultados obtidos experimentalmente foram,

$$\begin{aligned}\sum_i N_{u, \text{MINOS}, i} &= 273 \\ \sum_i N_{d, \text{MINOS}, i} &= 193.\end{aligned}\tag{4.14}$$

enquanto que o número de dados extraídos referente a este resultado foram,

$$\begin{aligned}\sum_i N_{u, \text{extraído}, i} &= 284,72 \\ \sum_i N_{d, \text{extraído}, i} &= 201,19.\end{aligned}\tag{4.15}$$

A diferença percentual entre o número total de eventos esperados sem oscilação pelo número total de eventos esperados sem oscilação extraídos é 4,29% enquanto que a diferença percentual entre o número total de eventos observados e o total de eventos observados extraídos é 4,24%. Retomando aos valores totais de eventos contados, vemos que possuímos um erro maior na extração de dados de antineutrinos quando comparado com neutrinos devido a diferença do número eventos entre os dois ser alta. Como o experimento foi projetado a partir de colisão de prótons, o número de neutrinos produzidos é maior do que de antineutrinos mesmo o MINOS estando em sua configuração inversa. No entanto, acrescentar dados de antineutrinos em nossa análise contribui estatisticamente. O fator de normalização para N_u é,

$$f_u = \frac{273}{284,72} \sim 0,9588,\tag{4.16}$$

e da mesma forma, o fator para N_d é igual à,

$$f_d = \frac{193}{201,194} \sim 0,9593.\tag{4.17}$$

Novamente, para calcularmos o número de eventos normalizados para antineutrinos, basta utilizar as equações 4.6 e 4.8.

Normalização do Último Resultado do MINOS de Antineutrinos

Assim como no caso de neutrinos, o último resultado do MINOS de antineutrinos [49] possui um corte no espectro de energia dos antineutrinos onde é computado apenas a

região onde a oscilação ocorre. Com isso, a extração dos dados pelos resultados publicados não possui todos eventos contados pelo experimento. E da mesma forma que para neutrinos, não é possível realizar a normalização das distribuições. O número total de eventos esperados sem oscilação foram 363 e de eventos observados foram 312 durante o período de funcionamento do experimento que ocorreu até meados de 2012. Em relação ao resultado anterior do próprio experimento, isto é responsável por um aumento estatístico de 33% sobre os eventos esperados sem oscilação e de 62% sobre os eventos observados. Este ganho estatístico sobre os eventos compensa o fato de não podermos utilizar da normalização.

4.3 Função χ^2

Para realização do ajuste dos dados foi utilizado uma função especial que correlaciona a proximidade ou concordância entre uma distribuição observada e uma esperada. Para realizarmos o grau de concordância entre as distribuições de forma correta, devemos levar em conta que as diferentes respostas obtidas para os eventos observados deverá ter um valor médio dos eventos esperados, e então seria previsto uma flutuação em torno da distribuição esperada por um desvio padrão⁵ σ .

A distribuição esperada carrega a probabilidade hipotética que provém de um modelo teórico. Esta função probabilidade contém um certo número de parâmetros livres necessários para ajustar os eventos esperados. No caso em específico procuramos obter a proximidade entre a distribuição dos dados (observado - N_d) e a distribuição de eventos que criamos (esperado - N_e) cuja dependência se dá através de uma função $P(x_1, \dots, x_N)$ onde x_1, \dots, x_N são parâmetros livres da probabilidade.

A função probabilidade utilizada provém de um modelo teórico servindo como um peso que calibra a proximidade entre as distribuições que estamos investigando fornecendo as informações necessárias para testar um pressuposto teórico com dados experimentais. Entre os métodos existentes, optamos pela forma funcional χ^2 de mínimos quadrados[52], como mostrado pela equação 4.18,

$$\chi^2(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{N_{d_i} - N_{e_i}(x_1, \dots, x_N)}{\sigma_{total}} \right]^2, \quad (4.18)$$

⁵ O desvio padrão possui os erros totais da distribuição de eventos observada e esperada.

onde σ_{total} é o erro utilizado para as medidas, e é calculado pela equação 4.19,

$$\sigma_{\text{total}} = \sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_d^2}, \quad (4.19)$$

que inclui os erros totais dos eventos simulados e dos eventos observados (dados).

Caso $\chi^2 = 0$, a concordância é perfeita, ou seja, $N_{d_i} = N_{e_i}$ para qualquer bin i , uma situação quase improvável de acontecer. Vamos supor que a somatória da equação 4.18 tenha n termos, portanto se,

$$\chi^2 \lesssim n, \quad (4.20)$$

a distribuição de eventos observada e esperada concordam bem, e podemos concluir que não há razão para duvidar do pressuposto teórico. No entanto, se,

$$\chi^2 \gg n, \quad (4.21)$$

as distribuições diferem significamente e com isso chegamos a conclusão que temos boas razões para suspeitar do pressuposto teórico.

4.3.1 Combinar Conjunto de Dados Distintos com χ^2

Vale ressaltar que o nosso principal resultado que apresentamos no capítulo 5 é dado pela combinação do conjunto de dados de neutrinos com antineutrinos. Neste caso, a análise estatística diz que se um conjunto de dados possui N_1 medidas e o outro conjunto de dados, N_2 , então devemos tratar a análise combinada com número total de medidas igual à

$$N = N_1 + N_2 \quad (4.22)$$

A forma que tratamos a função χ^2 neste caso é pouco distinta e definida a seguir,

$$\chi^2(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^{N_1} \chi_{1_i}^2 + \sum_{i=1}^{N_2} \chi_{2_i}^2, \quad (4.23)$$

onde $\chi_{1_i}^2$ e $\chi_{2_i}^2$ são os valores de χ^2 para cada bin i para o conjunto de dados 1 e o conjunto de dados 2 respectivamente. O conjunto de parâmetros x_1, \dots, x_N de χ^2 devem ser simultaneamente os mesmos para χ_1^2 e χ_2^2 .

4.3.2 Graus de liberdade e χ^2 reduzido

O número de graus de liberdade D é definido como o cálculo estatístico que envolve o número de medidas dos dados n subtraído do número de parâmetros livres N utilizados

para ajustar os dados,

$$D = n - N. \quad (4.24)$$

Argumentamos que podemos testar a concordância de N_d com N_e através de n , no entanto, o melhor procedimento para uma análise rigorosa é realizar esta comparação com o número de graus de liberdade D . Como justificativa, usamos o fato de estarmos utilizando a melhor estimativa para os parâmetros livres como entrada, isto é, de alguma forma devemos compensar o fato dos parâmetros estarem interferindo na análise estatística. O valor de χ^2 possui uma relação inversa com o número de parâmetros, quando N aumenta, em geral, χ^2 diminui,

$$\uparrow N \quad \downarrow \chi^2. \quad (4.25)$$

Chamamos a relação dada pela equação 4.25 de redução do χ^2 .

Vamos introduzir o χ^2 reduzido (χ^2 por graus de liberdade) denotado $\bar{\chi}^2$ e definí-lo como,

$$\bar{\chi}^2 = \chi^2/D. \quad (4.26)$$

O ideal é que o valor de χ^2 seja igual à D , portanto, esperamos que,

$$\bar{\chi}^2 \approx 1. \quad (4.27)$$

Resumindo, se obtivermos $\bar{\chi}^2$ da ordem de 1 ou menos, então não teremos razão para duvidar da hipótese assumida para os valores da distribuição de eventos esperada. Mas, se obtemos $\bar{\chi}^2$ muito maior que 1, então provavelmente nossa hipótese não é boa [54].

4.3.3 Mínimo da função χ^2

A energia define o número de eventos que temos em cada bin em nossa distribuição. A energia é muito bem definida para cada bin, o que permite que o cálculo da equação 4.18 seja uma soma em todos os bins i . Portanto, para um conjunto de parâmetros x_1, \dots, x_N temos um único valor de χ^2 que soma todo espectro de energia da distribuição de eventos. O conjunto de parâmetros x_1, \dots, x_N que resultam no menor valor de χ^2 é o que chamamos de melhor ajuste (estes valores são salvos).

Neste trabalho testamos uma distribuição por duas funções de probabilidades mostradas nas seções 1.4 e 1.5. Os parâmetros em termos gerais são dados pela tabela 4.2.

Definimos um intervalo de valores para cada parâmetro e varremos todos os arranjos possíveis definidos por um número de passos introduzido inicialmente.

	$\frac{\text{sen}^2 2\theta_{23}}{\text{sen}^2 \theta_{23}}$	Δm_{32}^2	α_3	β
Parâmetro	Físico	Físico	Físico	Não Físico

Tabela 4.2: Relação dos parâmetros contidos na probabilidade. São três parâmetros com propriedades físicas e um parâmetro não físico.

4.3.4 Cálculo do Erro

Realizamos a extração dos erros superiores e inferiores dos dados (N_d) de neutrinos e antineutrinos das referências [1, 48, 49]. O erro sobre as medidas é composto de uma parte devido a estatística de eventos produzidos e outra sistemática que leva em consideração os erros de mensuração. Após uma análise, concluímos que a barra de erro dos eventos N_d não é simétrico, já que engloba erros sistemáticos.

De modo geral, podemos calcular σ_d como,

$$\sigma_d^2 = \sigma_+ \sigma_- \quad (4.28)$$

de tal maneira que σ_+ e σ_- são respectivamente os erros superiores e inferiores extraídos.

Para o caso de N_e , o erro estatístico é igual à $\sqrt{N_e}$ e o termo correspondente ao erro sistemático retiramos da literatura. Impomos que os eventos são dados por uma distribuição de Poisson com uma incerteza sistemática total de 4% como dado pela referência [26]. Por fim, calculamos σ_s da seguinte forma,

$$\sigma_s^2 = \sigma_s^{2(\text{est})} + \sigma_s^{2(\text{sist})} = N_e + (0,04)^2 \times N_e^2. \quad (4.29)$$

Na tabela 4.3 mostramos os efeitos positivos gerados em nossa análise ao introduzir o erro sistemático em N_e no cálculo de χ^2 ⁶.

Considerando o erro sistemático, para um mesmo número de passos, o valor de χ^2 é em média 5,17% menor que o valor com erro sistemático igual à zero.

4.4 Região Permitida

Se duas ou mais variáveis estão sendo estimadas simultaneamente, então calculamos os limites de confiança que ambas possuem. Pode-se satisfazer com a criação de uma região

⁶ Os valores apresentados na tabela 4.3 foram obtidos da extração de conjunto de dados da referência [1]. Fica claro que o resultado é satisfatório para outros conjunto de dados que são utilizados nesta análise.

σ_s	Passos	$\sin^2 2\theta_{23}$	Δm_{32}^2 (10^{-3})	β	χ^2
0	7^3	0,971	2,286	1,714	29,403
$\sigma_s^{\text{est}} = \sqrt{N_e}$	7^3	0,971	2,214	1,571	19,089
	8^3	0,975	2,250	1,625	19,035
	9^3	0,978	2,222	1,556	19,031
	10^3	0,980	2,250	1,700	19,041
	11^3	0,982	2,227	1,636	19,008
	12^3	0,967	2,250	1,583	19,033
	15^3	0,987	2,233	1,733	19,010
	20^3	0,990	2,225	1,750	19,003
$\sigma_{s,\text{est}}^2 + \sigma_{s,\text{sist}}^2$	7^3	0,971	2,214	1,571	18,156
	10^3	0,980	2,250	1,700	18,113
	15^3	0,987	2,233	1,733	18,078
	20^3	0,990	2,225	1,750	18,069

Tabela 4.3: Diferentes valores de χ^2 para $\sigma_s = 0$, $\sigma_s = \sigma_s^{\text{est}} = \sqrt{N_e}$, e $\sigma_s = \sigma_{s,\text{est}}^2 + \sigma_{s,\text{sist}}^2$. Mostramos como σ_s melhora os valores obtidos de χ^2 .

de confiança ou região permitida no espaço de parâmetros que passam a ser os graus de liberdade da equação C.1, dentro da qual os parâmetros verdadeiros estão contidos com um certo nível de confiança. Isto geralmente é muito relevante para uma estimativa do máximo do likelihood, que fornece um quadro natural para estimativa de várias variáveis.

A região permitida que estamos trabalhando são histogramas que envolvem um ou dois parâmetros que são determinados simultaneamente pelo valor do χ^2 . De forma geral, se escolhermos um conjunto de parâmetros x_1, \dots, x_N , a equação 4.18 resulta em um certo valor para χ^2 que corresponde a um peso para os parâmetros x_1, \dots, x_N selecionados. Portanto, cada conjunto x_1, \dots, x_N selecionado corresponderá a um certo valor de χ^2 . Como exemplo, podemos ver a figura 4.3 onde utilizamos a função *SetCountourLevel* do pacote *ROOT* [53], que mostra a região permitida para dois parâmetros x_1, x_2 , ou seja, uma região 2D (duas dimensões).

Para cada par de valores x_1, x_2 temos o valor de χ^2 que é representado pelas camadas de cores na figura 4.3. As camadas de cores nos permitem ver diversos níveis de permissão com forma elíptica para os parâmetros x_1, x_2 que são as regiões permitidas para estes

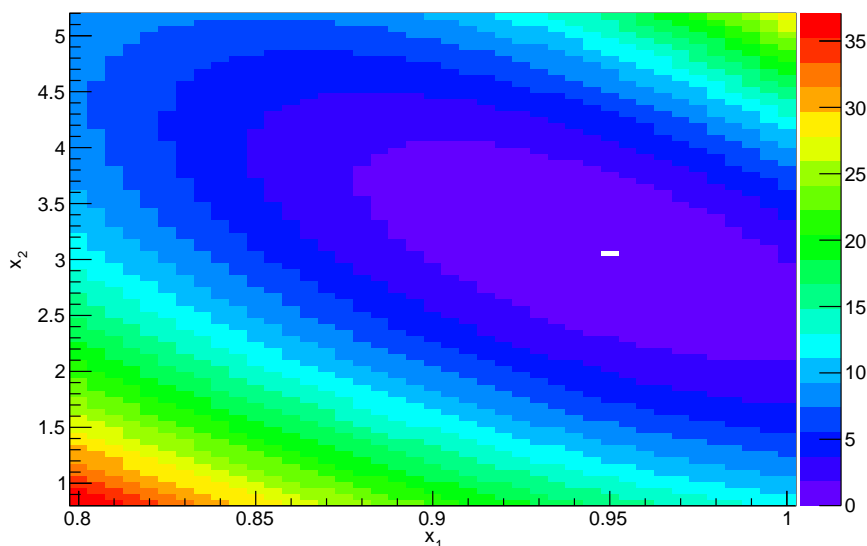


Figura 4.3: Região permitida representada por um histograma 2D com parâmetros x_1 e x_2 exemplificando os diversos níveis de permissão que estão relacionados com os valores de χ^2 .

parâmetros para vários valores de nível de confiança. Ainda na figura 4.3 podemos ver um pequeno retângulo branco na posição $(0,95;3,1)$ que destaca a dimensão do bin para este histograma, lembrando que cada bin carrega um par de valores (x_1, x_2) .

Para construir a região permitida é importante definir com cuidado a dimensão da binagem utilizada que é introduzida e obtida da construção dos resultados. No caso referido, em um espaço de $0,2$, x_1 está dividido em 41 partes, e em um espaço $4,4$, x_2 está dividido em 81 partes.

4.4.1 Método desenvolvido para construir região permitida 2D de 90% CL

O método desenvolvido para construção da região permitida é composto de três etapas. Primeiro, precisamos encontrar o melhor ajuste dos parâmetros livres encontrados na função da probabilidade teórica. Como dito anteriormente, englobamos na análise um parâmetro extra não físico, o β que é ajustado neste momento. O segundo passo é utilizar o valor numérico encontrado para β como parâmetro de entrada na construção da região permitida. A terceira etapa nesse processo é minimizar x_2 para cada x_1 selecionado a partir da análise do $\Delta\chi^2$. Os parâmetros x_1 e x_2 são os parâmetros que estamos interessados em definir os limites de confiança, portanto estes são os nossos graus de liberdade. No entanto, isto não impede que a função probabilidade em que estamos trabalhando não possua outros

parâmetros. Vamos fazer a suposição mais geral de que nossa função probabilidade tenha x_1, \dots, x_N parâmetros livres. Os dois primeiros, são os parâmetros que escolhemos para determinar os limites, os outros parâmetros são minimizados em relação à x_1 , no entanto são embutidos como parâmetros de entrada.

Definimos $\Delta\chi^2$ como sendo,

$$\Delta\chi^2 = \chi_{min}^2 - [\chi_{melhor\ ajuste}^2 + \chi^2(P_{\chi^2}, D)], \quad (4.30)$$

onde χ_{min}^2 é o valor mínimo de χ^2 que minimiza x_2 para cada x_1 selecionado, $\chi_{melhor\ ajuste}^2$ é o valor encontrado no ajuste dos parâmetros livres, e $\chi^2(P_{\chi^2}, D)$ está relacionado com a equação C.1.

Os graus de liberdade são neste caso, dois apenas, os parâmetros x_1 e x_2 da função teórica que estamos trabalhando, e construímos em nossa análise, regiões de permissão para 90% CL. Portanto, reescrevemos a equação 4.30 como,

$$\Delta\chi^2 = \chi_{min}^2 - [\chi_{melhor\ ajuste}^2 + \chi^2(0,9; 2)], \quad (4.31)$$

onde,

$$\chi^2(0,9; 2) \approx 4,61. \quad (4.32)$$

Este valor pode ser retirado de gráficos, ou por bibliotecas de subrotinas, ou ainda por tabelas.

Dizemos que nossos parâmetros livres (x_1, x_2) estão dentro dos limites de 90% CL quando,

$$\chi_{min}^2 < \chi_{melhor\ ajuste}^2 + \chi^2(0,9; 2), \quad (4.33)$$

ou seja, em outras palavras, quando,

$$\Delta\chi^2 < 0. \quad (4.34)$$

Selecionamos os valores de x_1 e x_2 de tal maneira que $\Delta\chi^2$ seja menor que zero garantindo que estamos com valores dentro de 90% CL.

4.4.2 Método desenvolvido para construir região permitida 1D

Como no caso 2D, entramos com o valor de β como parâmetro de entrada. Neste caso, o processo é mais simples, pois como nosso objetivo é construir limites para apenas um grau de liberdade, podemos visualizar de forma direta os valores de $\Delta\chi^2$ pelo parâmetro

x_1 . Vamos supor como anteriormente que nossa função probabilidade contenha x_1, \dots, x_N parâmetros livres e que para cada x_1 selecionado, minimizamos x_2, \dots, x_N parâmetros pelo mínimo do χ^2 . Os valores x_2, \dots, x_N tornam-se neste caso específico parâmetros de entrada. O valor de x_1 é o único grau de liberdade por ser a variável a se determinar os limites de confiança.

Definimos $\Delta\chi^2$ para este caso como sendo,

$$\Delta\chi^2 = \chi_{min}^2 - \chi_{\text{melhor ajuste}}^2, \quad (4.35)$$

onde,

$$\Delta\chi^2 \geq 0, \quad (4.36)$$

sempre, pois χ_{min}^2 nunca pode ser menor do que $\chi_{\text{melhor ajuste}}^2$.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS

5.1 Oscilação Pura

Apresentamos os resultados obtidos utilizando o método de análise descrito no capítulo 4 para verificar a consistência com os resultados experimentais de oscilação pura. Para isso, reproduzimos os melhores ajustes e as regiões de confiança no nível de 90% CL para neutrinos e antineutrinos muônicos.

5.1.1 Dados de 2011 e 2012

O espectro de energia ν_μ extraído do resultado do MINOS de 2011 [1] é comparado com o espectro de energia experimental do MINOS na figura 5.1. Com o modelo de oscilação pura, o melhor ajuste que encontramos para os valores de Δm_{32}^2 e $\sin^2 2\theta_{23}$ foi,

$$\Delta m_{32}^2 = 2,21 \times 10^{-3} \text{ eV}^2 \quad \text{e} \quad \sin^2 2\theta_{23} = 1,00. \quad (5.1)$$

Este resultado é discrepante em 4,7% do valor obtido experimentalmente para Δm_{32}^2 , enquanto que não houve diferença para o ângulo de mistura. Encontramos para este conjunto de dados o fator de normalização dos eventos de background $\beta = 1,85$ e,

$$\chi^2 = 18,08, \quad (5.2)$$

com isso, o χ^2 reduzido é $\chi^2/gl = 0,50$.

Na figura 5.2 mostramos o espectro de energia $\bar{\nu}_\mu$ extraídos do resultado do MINOs de 2012 [48] comparado com o espectro obtido experimentalmente. Do nosso ajuste,

encontramos $\beta = 2,33$, e os parâmetros de oscilação iguais a,

$$\Delta\bar{m}_{32}^2 = 2,72 \times 10^{-3} \text{ eV}^2 \quad \text{e} \quad \text{sen}^2 2\bar{\theta}_{23} = 0,97, \quad (5.3)$$

os quais possuem uma diferença percentual em relação ao ajuste do experimento de 11% para $\Delta\bar{m}_{32}^2$ e de 2,1% para $\text{sen}^2 2\bar{\theta}_{23}$. A diferença percentual obtida é maior do que a apresentada em 5.1. Isto ocorre por que a estatística de $\bar{\nu}_\mu$ é menor de que ν_μ , portanto, os erros associados a extração dos dados são mais significativos. Para este ajuste encontramos,

$$\chi^2 = 4,56. \quad (5.4)$$

e partir disso calculamos que $\chi^2/gl = 0,46$.

Usando os resultados obtidos de β para neutrinos [1] e antineutrinos [48], fizemos uma análise combinada de ν_μ com $\bar{\nu}_\mu$ supondo que os parâmetros de oscilação sejam iguais neutrino e antineutrino. Nesse caso, com os valores de β obtidos anteriormente fixos, ajustamos novamente os parâmetros de oscilação. O ajuste global encontrado foi,

$$\Delta m_{32}^2 = 2,25 \times 10^{-3} \text{ eV}^2 \quad \text{e} \quad \text{sen}^2 2\theta_{23} = 0,99, \quad (5.5)$$

com,

$$\chi^2 = 24,42, \quad (5.6)$$

o qual é aproximadamente a soma dos valores de χ^2 encontrados para ν_μ e $\bar{\nu}_\mu$, separadamente.

Com os dados extraídos foi possível reproduzir as regiões de confiança (ou permitida) 2D no nível de 90% CL para os casos de neutrinos, antineutrinos e a combinação deles. Logo, a partir da comparação entre os resultados obtidos com os resultados experimentais podemos dizer algo sobre a metodologia desenvolvida nessa análise.

Na figura 5.3 (a), vemos da análise combinada uma melhora na resolução de $\text{sen}^2 2\theta_{23}$, enquanto que não obtemos diferença na resolução de Δm_{32}^2 . Podemos ainda observar que o fato de acrescentarmos eventos de antineutrinos na análise de neutrinos, apenas deslocou o valor de Δm_{32}^2 , pois o erro na medida deste parâmetro permaneceu o mesmo. Comparando as curvas de 90% CL de ν_μ obtida em (a) com a curva experimental em (b) temos uma perda de qualidade em $\text{sen}^2 2\theta_{23}$ de aproximadamente 2,30%, porém, em Δm_{32}^2 não temos diferença significativa. Atribuímos esta perda de qualidade aos erros no processo de extração dos dados, pois apesar de minimizá-los em nossa metodologia, não é possível vetá-los completamente.

Em (c) comparamos as regiões de confiança de ν_μ , $\bar{\nu}_\mu$ e a análise combinada. Com isso, mostramos que a região de neutrinos é mais restrita que a de antineutrinos. Agora, relacionando (c) com (d), vemos que o nosso resultado de antineutrinos comparado com o resultado experimental tem perda de qualidade de aproximadamente 10,3% em $\text{sen}^2 2\bar{\theta}_{23}$ e de 5% e 10% nos limites inferior e superior de $\Delta\bar{m}_{32}^2$, respectivamente. Novamente, observamos uma maior discrepância nos resultados de $\bar{\nu}_\mu$ comparado com ν_μ devido a estatística. Mostramos ainda que os resultados obtidos combinando estes dois conjuntos de dados segundo as referências [1] e [48], é dominado pelos eventos de ν_μ , porém, o fato de acrescentar eventos de $\bar{\nu}_\mu$ restringe ainda mais a região de confiança.

Com os resultados obtidos da figura 5.3, podemos afirmar que o método descrito no capítulo 4 deste trabalho é eficiente de acordo com a estatística, em POT, utilizada. Quanto maior a estatística em POT dos eventos, menores são os erros obtidos durante a extração dos dados e de realização de ajustes dos parâmetros. Portanto, desde que tenhamos dados com estatística suficientemente boa, podemos utilizar o método para investigar modelos teóricos sobre os neutrinos. Os resultados de antineutrinos aqui apresentados utilizaram uma estatística de $2,95 \times 10^{20}$ POT, enquanto que para neutrinos a estatística foi de $7,25 \times 10^{20}$ POT. Observamos que os erros encontrados foram bem menores para ν_μ , quando comparado com $\bar{\nu}_\mu$. Portanto, para uma estatística da ordem de 10^{21} POT, podemos garantir que reproduzimos os resultados do MINOS. Os melhores ajustes de cada análise estão resumidos na tabela 5.1.

	$\text{sen}^2 2\theta_{23}$	$\Delta m_{32}^2 (10^{-3}) eV^2$	β	χ^2
Nossa Análise ν_μ ($7,25 \times 10^{20}$ POT)	1,00	2,21	1,85	18,08
MINOS ν_μ ($7,25 \times 10^{20}$ POT)	1,00	2,32	-	-
Nossa Análise $\bar{\nu}_\mu$ ($2,95 \times 10^{20}$ POT)	0,97	2,72	2,33	4,56
MINOS $\bar{\nu}_\mu$ ($2,95 \times 10^{20}$ POT)	0,95	2,62	-	-
Nossa Análise ν_μ ($7,25 \times 10^{20}$) + $\bar{\nu}_\mu$ ($2,95 \times 10^{20}$ POT)	1,00	2,25	-	24,42

Tabela 5.1: Os ajustes obtidos da simulação comparados com os ajustes obtidos experimentalmente nas configurações de neutrinos e antineutrinos.

5.1.2 Dados de 2013

Nesta análise, o resultado principal é encontrado a partir dos dados extraídos da referência [49], que computa o resultado global do MINOS combinando dados de neutrinos ($10,71 \times 10^{20}$ POT) e antineutrinos ($3,36 \times 10^{20}$ POT) da linha de feixe NuMI com 37,88 $kt - y$ de neutrinos atmosféricos. Na figura 3.8 mostramos todos os espectros publicados pelo MINOS da referência [49]. Neste trabalho utilizamos apenas amostras de neutrinos e antineutrinos produzidos da linha de feixe NuMI do MINOS. Primeiramente, trataremos do caso ν_μ mostrado na figura 5.4, onde apresentamos o espectro extraído de neutrinos produzidos da linha de feixe NuMI dominado por ν_μ (a), comparado com o espectro experimental (b). Ajustamos os dados extraídos de acordo com o modelo de oscilação e encontramos,

$$\Delta m_{32}^2 = 2,34 \times 10^{-3} \text{ eV}^2 \text{ e } \sin^2 2\theta_{23} = 0,93, \quad (5.7)$$

com $\beta = 0,86^1$ e,

$$\chi^2 = 10,94. \quad (5.8)$$

Com isso, o valor do χ^2 reduzido obtido é $\chi^2/gl = 0,55$. Agora, vamos partir para o espectro de antineutrinos mostrado na figura 5.5 produzidos pela linha de feixe NuMI dominado por eventos $\bar{\nu}_\mu$ (a), comparado com o espectro experimental (b). Novamente, aplicamos o modelo de oscilação pura sobre os eventos sem oscilação e obtivemos como melhor ajuste, os parâmetros a seguir,

$$\Delta \bar{m}_{32}^2 = 2,65 \times 10^{-3} \text{ eV}^2 \text{ e } \sin^2 2\bar{\theta}_{23} = 0,96, \quad (5.9)$$

com $\beta = 1,90$ e,

$$\chi^2 = 5,69. \quad (5.10)$$

Portanto, calculamos o valor do χ^2 reduzido e obtivemos $\chi^2/gl = 0,57$. Este último resultado possui uma discrepância de 6% em relação ao valor obtido pelo MINOS em $\Delta \bar{m}_{32}^2$, e de 1,03% em relação ao $\sin^2 2\bar{\theta}_{23}$. Como no caso anterior, o parâmetro β de cada análise (ν_μ e $\bar{\nu}_\mu$) e ajustamos os parâmetros de oscilação combinando ν_μ com $\bar{\nu}_\mu$. O ajuste

¹ São poucos os eventos de background coletados pelo experimento, fazendo com que os erros de extração sobre eles sejam mais significativos. Até este ponto dos resultados, em todos os conjuntos de dados utilizados, $\beta > 1$. Isto significa que extraímos menos eventos de background do que o esperado. O conjunto de dados que possui maior estatística em POT é o de ν_μ 2013. Neste caso, temos mais eventos de background que em resultados anteriores. Este é o único resultado em nossa análise onde o número de eventos de background normalizados é menor que o extraído.

global obtido dos parâmetros de oscilação é,

$$\Delta m_{32}^2 = 2,38 \times 10^{-3} \text{ eV}^2 \text{ e } \sin^2 2\theta_{23} = 0,93, \quad (5.11)$$

que é claramente dominado pelos eventos de ν_μ quando comparamos os parâmetros obtidos em 5.11 com 5.7 e 5.9. Por último, obtivemos,

$$\chi^2 = 17,83, \quad (5.12)$$

para o melhor ajuste.

Estes resultados de ν_μ e $\bar{\nu}_\mu$ da linha de feixe NuMI publicados pela colaboração MINOS são os mais recentes e com a maior resolução atingida pelo experimento. Na figura 5.6 mostramos a região de confiança obtida no nível de 90% CL da análise separada de ν_μ e $\bar{\nu}_\mu$ comparado com a análise combinada. Incluir os eventos de antineutrinos na análise de neutrinos melhora um pouco a região de confiança nos dois parâmetros de oscilação. Colocamos ainda o resultado do experimento incluindo os neutrinos atmosféricos. Mostramos que eles são significativamente importantes para o resultado experimental, visto que sua inclusão restringe consideravelmente a região de confiança. No entanto, como dito anteriormente, focamos apenas nos eventos produzidos pela linha de feixe, onde a distância L do experimento é fixa, de forma que a única variável é a energia E . Já no caso de neutrinos atmosféricos, a distância L também é uma variável. Resumimos os ajustes encontrados com os conjuntos de dados utilizados na tabela 5.2.

	$\sin^2 2\theta_{23}$	$\Delta m_{32}^2 (10^{-3}) \text{ eV}^2$	β	χ^2
Nossa Análise ν_μ ($10,71 \times 10^{20}$ POT)	0,93	2,34	0,86	10,94
Nossa Análise $\bar{\nu}_\mu$ ($3,36 \times 10^{20}$ POT)	0,96	2,65	1,90	5,69
MINOS $\bar{\nu}_\mu$ ($3,36 \times 10^{20}$ POT)	0,97	2,50	-	-
Nossa Análise $\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu$	0,93	2,38	-	17,83
MINOS $\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu +$ neutrinos atmosféricos	0,95	2,41	-	-

Tabela 5.2: Os ajustes obtidos da simulação comparados com os ajustes obtidos experimentalmente nas configurações de neutrinos e antineutrinos.

Limites sobre os parâmetros de Oscilação Pura

Os limites dos parâmetros de oscilação obtidos são mostrados nas regiões de confiança 1D na figura 5.7 para os casos ν_μ ($7,25 \times 10^{20}$ POT) mais $\bar{\nu}_\mu$ ($2,95 \times 10^{20}$ POT), onde

vemos em (a) que para esta resolução, o parâmetro $\sin^2 2\theta_{23}$ se ajusta para um valor em torno de 1. Já no caso ν_μ ($10,71 \times 10^{20}$ POT), o valor de $\sin^2 2\theta_{23}$ é deslocado de 1 permitindo, como apresentamos em (a), a possibilidade de dois valores mínimos, para o parâmetro $\sin^2 \theta_{23}$. A partir do momento em que o valor de $2\theta_{23} \neq \pi/2$, devemos passar a trabalhar com o parâmetro $\sin^2 \theta_{23}$. Com isso, mostramos em nosso resultado que, para esta resolução, conseguimos com $10,71 \times 10^{20}$ POT, excluir o valor de $\sin^2 \theta_{23} = 0,5$ em $1,10\sigma$ CL. Quando combinamos ν_μ ($10,71 \times 10^{20}$ POT) com $\bar{\nu}_\mu$ ($3,36 \times 10^{20}$ POT), excluimos $\sin^2 \theta_{23} = 0,5$ ainda mais, agora com $1,34\sigma$ CL. Isto é uma evidência de que no futuro, com uma resolução superior, excluiríamos este valor com uma confiança ainda maior. Em (b) mostramos que com o aumento da estatística ao longo do período de tomada de dados, o experimento MINOS restringiu cada vez mais seus limites em Δm_{32}^2 nos níveis mostrados de 90%, 2σ , e 3σ CL.

Os limites obtidos dos parâmetros de oscilação para o caso ν_μ ($7,25 \times 10^{20}$ POT) mais $\bar{\nu}_\mu$ ($2,95 \times 10^{20}$ POT) foi em nível de 90% CL para Δm_{32}^2 , sendo

$$\Delta m_{32}^2 = 2,25_{-0,40}^{+0,23} \times 10^{-3} \text{ eV}^2, \quad (5.13)$$

e,

$$0,34 < \sin^2 \theta_{23} < 0,73. \quad (5.14)$$

No caso ν_μ ($10,71 \times 10^{20}$ POT), os limites obtidos para os parâmetros de oscilação foram,

$$\Delta m_{32}^2 = 2,34_{-0,25}^{+0,33} \times 10^{-3} \text{ eV}^2, \quad (5.15)$$

e,

$$0,29 < \sin^2 \theta_{23} < 0,74. \quad (5.16)$$

Por fim, no caso ν_μ ($10,71 \times 10^{20}$ POT) mais $\bar{\nu}_\mu$ ($3,36 \times 10^{20}$ POT) temos os seguintes limites,

$$\Delta m_{32}^2 = 2,38_{-0,20}^{+0,23} \times 10^{-3} \text{ eV}^2, \quad (5.17)$$

e,

$$0,30 < \sin^2 \theta_{23} < 0,74. \quad (5.18)$$

Com o modelo de oscilação pura, os limites principais encontrados para os parâmetros de oscilação são descritos pelas equações 5.17 e 5.18 em níveis de 90% CL.

5.2 Oscilação com Decaimento

O mesmo raciocínio utilizado na análise dos resultados de oscilação pura foi feito para o caso de oscilação com decaimento. Portanto, os melhores valores dos ajustes encontrados segundo este modelo são descritos na tabela 5.3. O melhor resultado é descrito

	$\sin^2\theta_{23}$	Δm_{32}^2 (10^{-3}) eV^2	α_3 (10^{-4}) GeV/km	β	χ^2
ν_μ ($7,25 \times 10^{20}$) + $\bar{\nu}_\mu$ ($2,95 \times 10^{20}$ POT)	0,51	2,19	2,0	-	24,23
ν_μ ($10,71 \times 10^{20}$ POT)	0,37	2,34	-	0,86	10,94
$\bar{\nu}_\mu$ ($3,36 \times 10^{20}$ POT)	0,39	2,65	0,02	1,89	5,69
ν_μ ($10,71 \times 10^{20}$) + $\bar{\nu}_\mu$ ($3,36 \times 10^{20}$ POT)	0,64	2,37	0,55	-	17,80

Tabela 5.3: Os ajustes obtidos da simulação utilizando o modelo de oscilação com decaimento nas configurações de neutrinos e antineutrinos combinados para os conjunto de dados descritos.

para ν_μ ($10,71 \times 10^{20}$ POT) mais $\bar{\nu}_\mu$ ($3,36 \times 10^{20}$ POT), que possui maior estatística e comparado com o resultado de oscilação pura, possui um χ^2 menor (comparar os valores obtidos das tabelas 5.2 e 5.3). Isto significa que neste caso, acrescentar o parâmetro de decaimento melhora os ajustes dos dados do MINOS. O parâmetro α_3 obtido do melhor ajuste corresponde a,

$$\tau_3/m_3 = 6,01 \times 10^{-11} s/eV. \quad (5.19)$$

No caso ν_μ ($10,71 \times 10^{20}$ POT) não conseguimos encontrar um mínimo para o parâmetro de decaimento, portanto, o melhor ajuste coincide com o caso de oscilação pura.

Apresentamos os resultados das projeções 1D de α_3 e τ_3/m_3 para os três casos descritos na figura 5.8. A partir disso, mostramos os limites do parâmetro α_3 , que estão resumidos na tabela 5.4, no nível de 90% CL. O resultado apresentado nesta tabela junto com a

	α_3 (10^{-3}) GeV/km	τ_3/m_3 (10^{-12}) s/eV
Nossa Análise ν_μ $7,25 \times 10^{20}$ + $\bar{\nu}_\mu$ $2,95 \times 10^{20}$ POT	< 1,8	> 1,9
Nossa Análise ν_μ ($10,71 \times 10^{20}$ POT)	< 1,4	> 2,4
Nossa Análise ν_μ $10,71 \times 10^{20}$ + $\bar{\nu}_\mu$ $3,36 \times 10^{20}$ POT	< 1,4	> 2,4

Tabela 5.4: Limites obtidos no nível de 90% CL dos parâmetros de decaimento de neutrinos para três diferentes em estatística de dados.

figura 5.8 significa que para α_3 no nível de 90% CL, estamos excluindo com um certo valor toda região de valores superiores a este, que seria toda área a direita das curvas

vistas em (a), enquanto que para τ_3/m_3 é o inverso, ou seja, para um certo valor estamos excluindo toda região de valores menores que este, que é toda a região a esquerda das curvas apresentadas em (b). Logo, concluímos que a nível 90% CL, o resultado obtido para o caso $\nu_\mu (7,25 \times 10^{20}) + \bar{\nu}_\mu (2,95 \times 10^{20} \text{ POT})$ é o que restringe menos as regiões obtidas. Além disso, observamos que nesse nível de confiança, acrescentar os dados de antineutrinos 2013 aos dados de neutrinos 2013 não melhora os limites. No entanto, tomamos a análise combinada dos resultados mais recentes do MINOS como referência, pois a partir da figura 5.8, vemos que em níveis de 2σ e 3σ , a análise combinada é levemente melhorada. Em resumo, para valores de α_3 iguais a zero, o ajuste dos dados piora (tabela 5.3), logo, podemos colocar um limite superior de α_3 ou, equivalentemente, um limite inferior do parâmetro τ_3/m_3 como descrito pelos limites da tabela 5.4.

Na figura 5.9 reapresentamos as projeções 1D de $\Delta\chi^2$ em função de α_3 (a), e τ_3/m_3 (b), com o resultado principal obtido da figura 5.8. Fizemos um aumento em uma área do gráfico para mostrar que o valor do χ^2_{min} para o melhor ajuste de α_3 e τ_3/m_3 não é significamente diferente do valor de χ^2 para o qual o parâmetro de decaimento é nulo.

A figura 5.10 mostra a região de confiança no nível de 90% CL dos parâmetros τ_3/m_3 por Δm_{32}^2 para oscilação com decaimento da análise combinada dos dados de 2013 de neutrinos e antineutrinos. Para valores pequenos de τ_3/m_3 , quando o efeito de decaimento é grande, a região de Δm_{32}^2 tende para valores menores. Entendemos que isto é devido ao fato de que quando os efeitos de decaimento são grandes, o efeito de desaparecimento de ν_μ é, em parte, devido à oscilação e, em parte, ao decaimento.

Por fim, podemos comparar os limites obtidos para o parâmetro de decaimento com o limite publicado pela colaboração do MINOS [46], que utilizou $3,18 \times 10^{20}$ POT, com resultado da referência [26], que inclui dados de neutrinos atmosféricos (tabela 5.5). Conseguimos melhorar a medida do MINOS, porém não fomos capazes de superar o

	α_3 (GeV/km)	τ_3/m_3 (s/eV)
Nossa Análise $\nu_\mu 10,71 \times 10^{20} + \bar{\nu}_\mu 3,36 \times 10^{20}$ POT	$< 1,4 \times 10^{-3}$	$> 2,4 \times 10^{-12}$
MINOS [46]	$< 1,6 \times 10^{-3}$	$> 2,1 \times 10^{-12}$
Gonzalez e Maltoni [26]	$< 1,2 \times 10^{-5}$	$> 2,9 \times 10^{-10}$

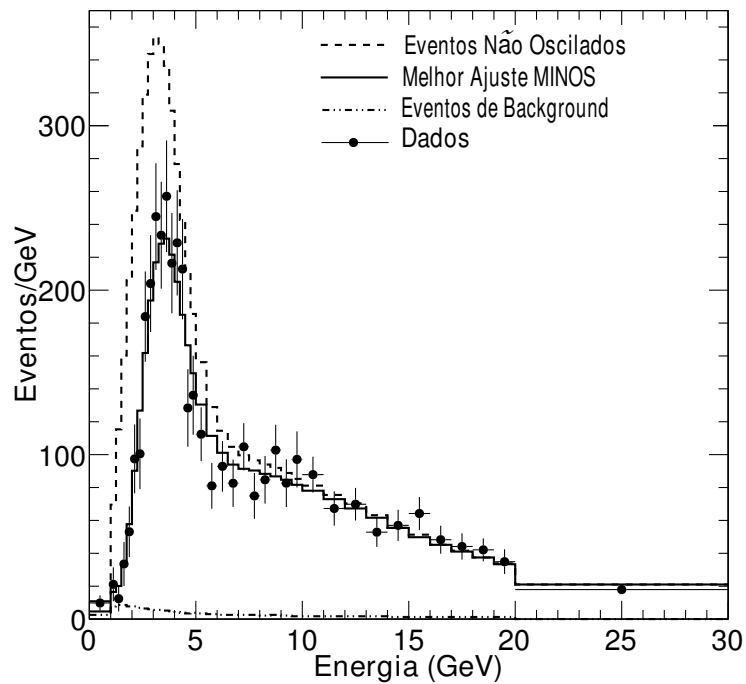
Tabela 5.5: Principal resultado obtido dos limites no nível de 90% CL dos parâmetros de decaimento de neutrinos comparados com os resultados das referências [26, 46].

limite obtido em [26], o que indica que os eventos de neutrinos atmosféricos são muito

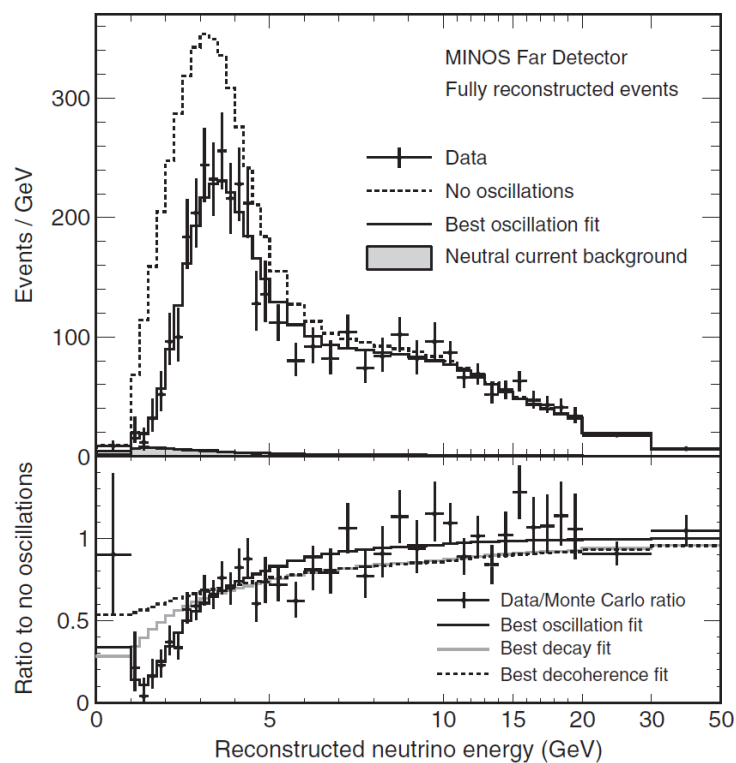
significativos para se medir limites do parâmetro de decaimento. Entendemos que isto provavelmente pode ser explicado pela dependência L/E que estes neutrinos possuem. Em escala, a distância L pode ser muito superior à dos experimentos de aceleradores, o que pode permitir explorar outros mínimos da probabilidade como mostramos no capítulo 1, figura 1.5, em que o efeito do decaimento é permitido com mais significância.

5.2.1 Influência gerada por α_3 sobre a análise de Oscilação Pura

Na figura 5.11 (a) mostramos que os efeitos gerados pela inclusão do parâmetro α_3 na análise não muda significamente a projeção 1D de $\Delta\chi^2$ em função de Δm_{32}^2 quando usamos apenas oscilação pura. O efeito resultante do decaimento mostra que valores menores Δm_{32}^2 sejam permitidos (valores que não eram permitidos com oscilação pura apenas). Em (b) mostramos que o mesmo comportamento ocorre na escala em $\sin^2\theta_{23}$. Neste caso, podemos ver isto a partir da assimetria da probabilidade de oscilação com decaimento em $\sin^2\theta_{23}$. Ao compararmos com a curva de oscilação pura, vemos que o decaimento permite valores de $\sin^2\theta_{23}$ do lado direito do gráfico em (b) onde a oscilação pura excluía. Por fim, na figura 5.12 vemos o efeito mais claramente do comportamento assimétrico. O que vemos nesta figura é o comportamento simultâneo de $\sin^2\theta_{23}$ e Δm_{32}^2 quando o decaimento é acrescentado. Novamente, o que vemos é que para $\sin^2\theta_{23} > 0,5$ e Δm_{32}^2 com valores menores, o decaimento é permitido. Em comparação com oscilação pura, vemos que valores que não eram permitidos passam a ser permitidos, como efeito principal de acrescentar o decaimento na análise. Esta assimetria vista vem da equação 1.74, que é probabilidade de sobrevivência de neutrino muônico para dois sabores segundo o modelo de oscilação com decaimento. Este efeito pode explicar as assimetrias observadas nos resultados de oscilação de neutrinos.

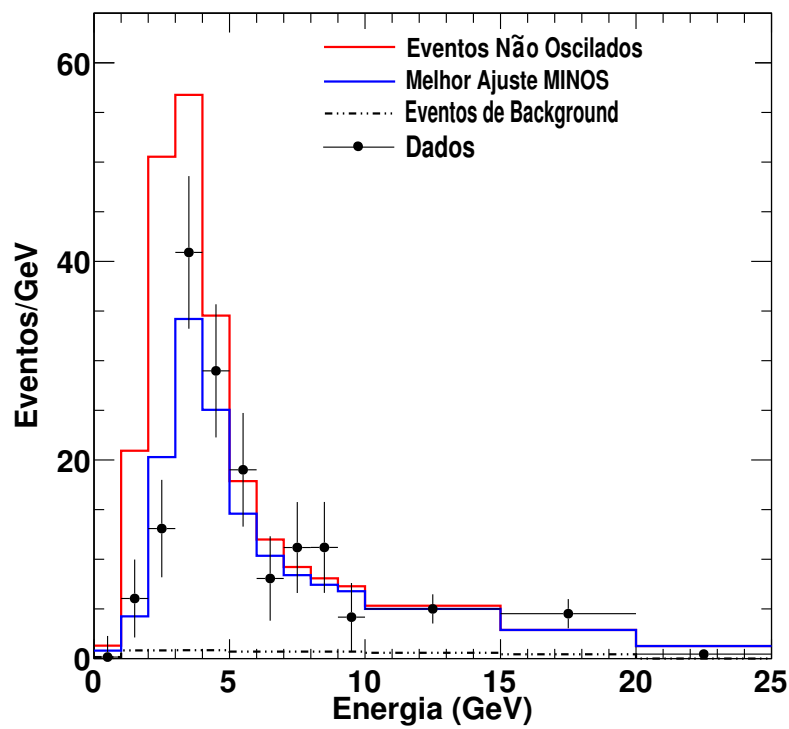


(a)

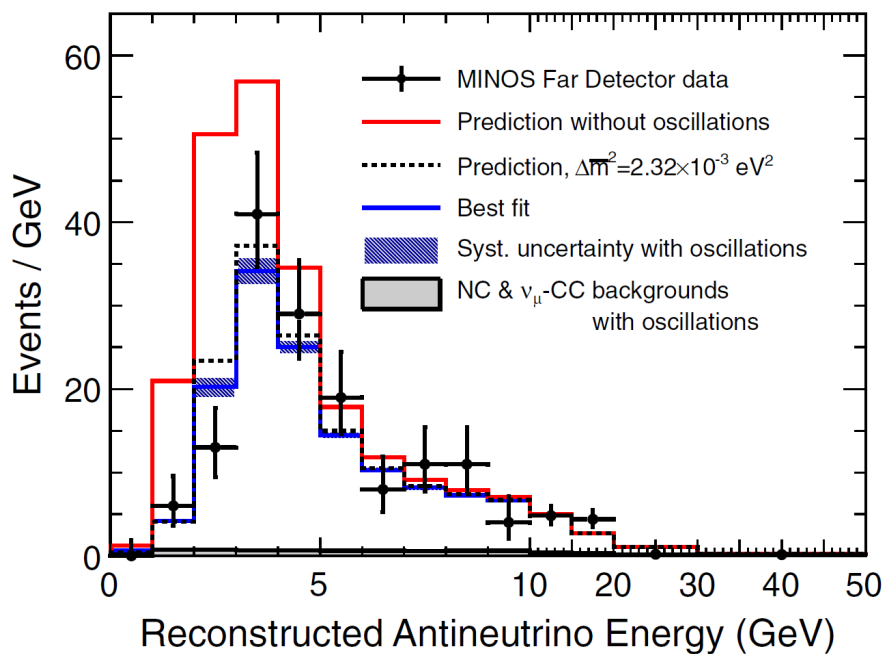


(b)

Figura 5.1: Em (a) temos o espectro de energia extraídos da referência [1], enquanto que em (b) temos o espectro experimental. Este resultado possui o número de eventos pela energia, possuindo as curvas no caso sem oscilação e o melhor ajuste de acordo com os dados obtidos. Também está contido neste resultado os eventos de background.



(a)



(b)

Figura 5.2: Em (a) temos o espectro de energia extraídos da referência [48], enquanto que em (b) temos o espectro experimental. Este resultado possui o número de eventos pela energia, possuindo os eventos de background e os espectros para casos sem oscilação, e o melhor ajuste. O MINOS ainda construiu nesta análise (b), resultados utilizando os parâmetros de oscilação obtidos da referência [1].

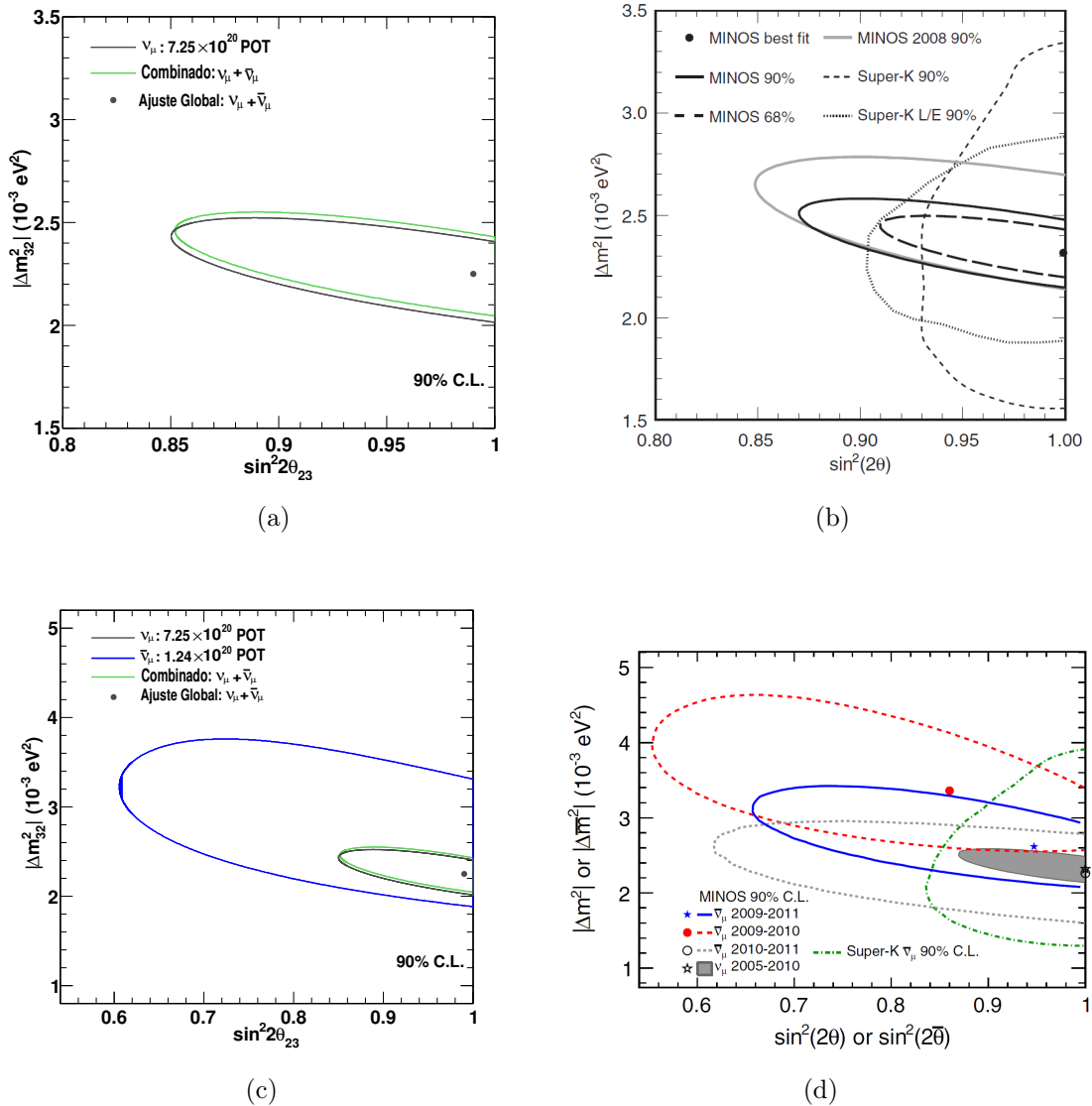
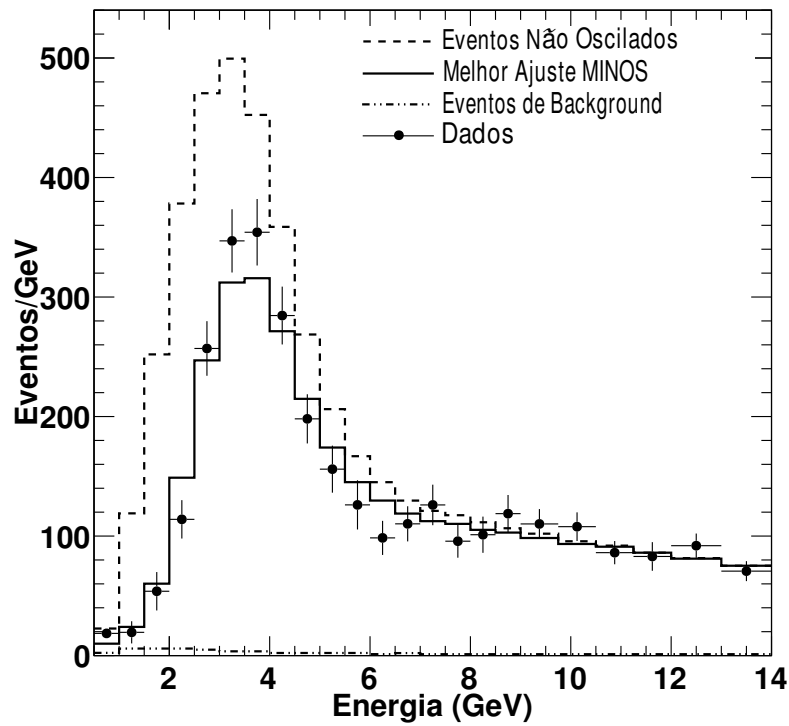
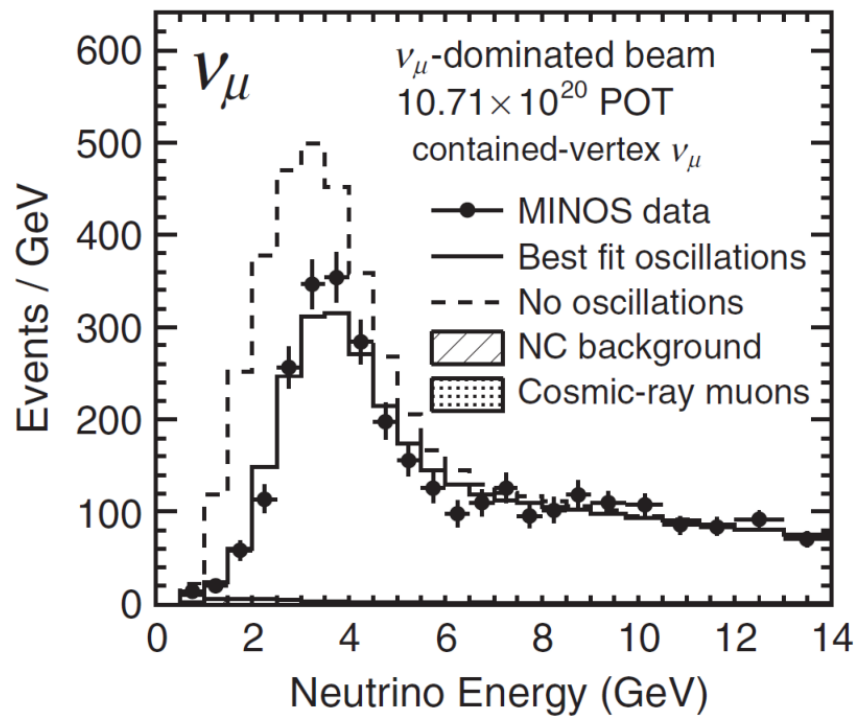


Figura 5.3: Em (a) mostramos o resultado da região de contorno no nível de 90% CL de ν_μ apenas, comparado com a região da análise combinada. Em (b) temos a região de 90% CL obtida experimentalmente da referência [1] para neutrinos. Em (c) temos o resultado obtido da análise de antineutrinos da referência [48] comparado com as regiões obtidas de neutrinos da referência [1] e combinada para níveis de 90% CL. Por fim, em (d) mostramos os resultados experimentais da região de confiança de antineutrinos do MINOS, referentes à [48]. Procuramos também comparar as curvas obtidas pelas experimentais.

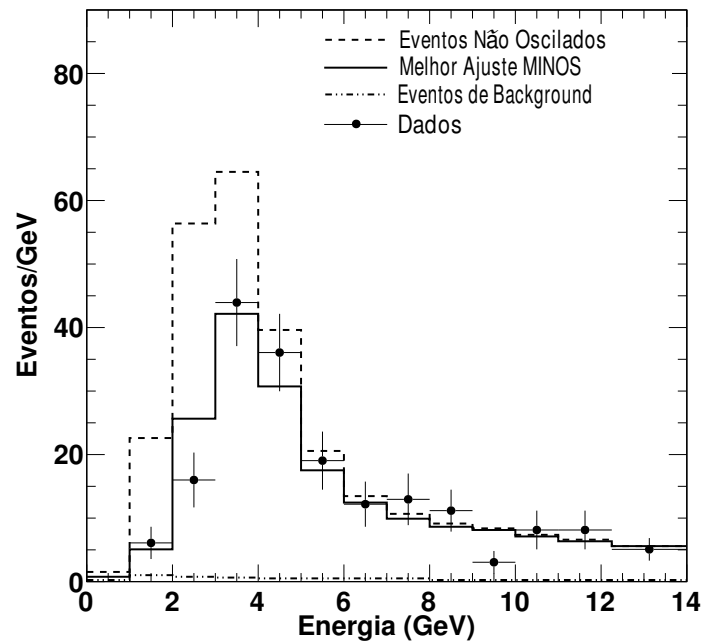


(a)

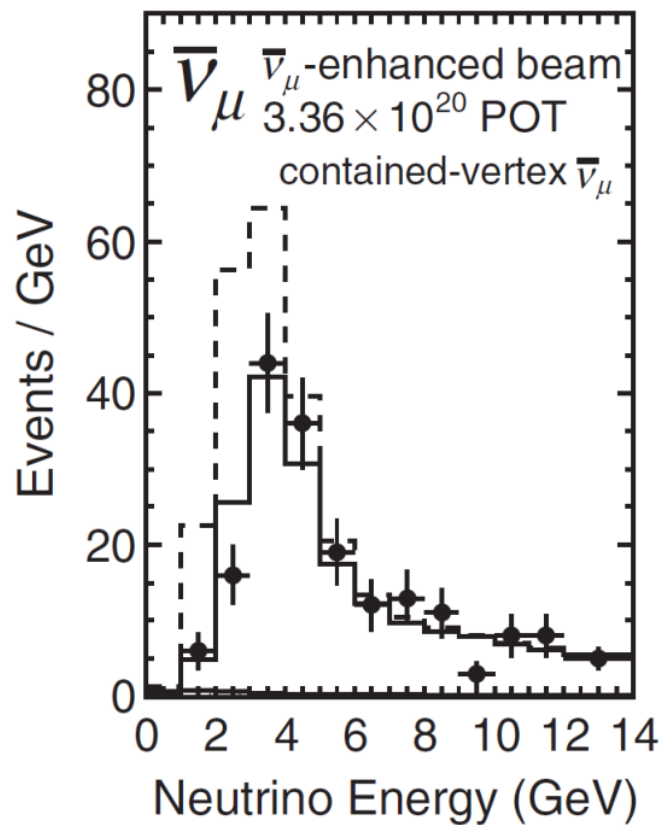


(b)

Figura 5.4: Em (a) temos o espectro de energia de neutrinos da linha de feixe ν_μ extraídos da referência [49], enquanto que em (b) temos o espectro experimental de neutrinos da linha de feixe ν_μ . Comparamos os dois espectros de energia. [1].



(a)



(b)

Figura 5.5: Em (a) temos o espectro de energia de antineutrinos da linha de feixe ν_μ extraídos da referência [49], enquanto que em (b) temos o espectro experimental de antineutrinos da linha de feixe ν_μ . Comparamos os dois espectros de energia. [1].

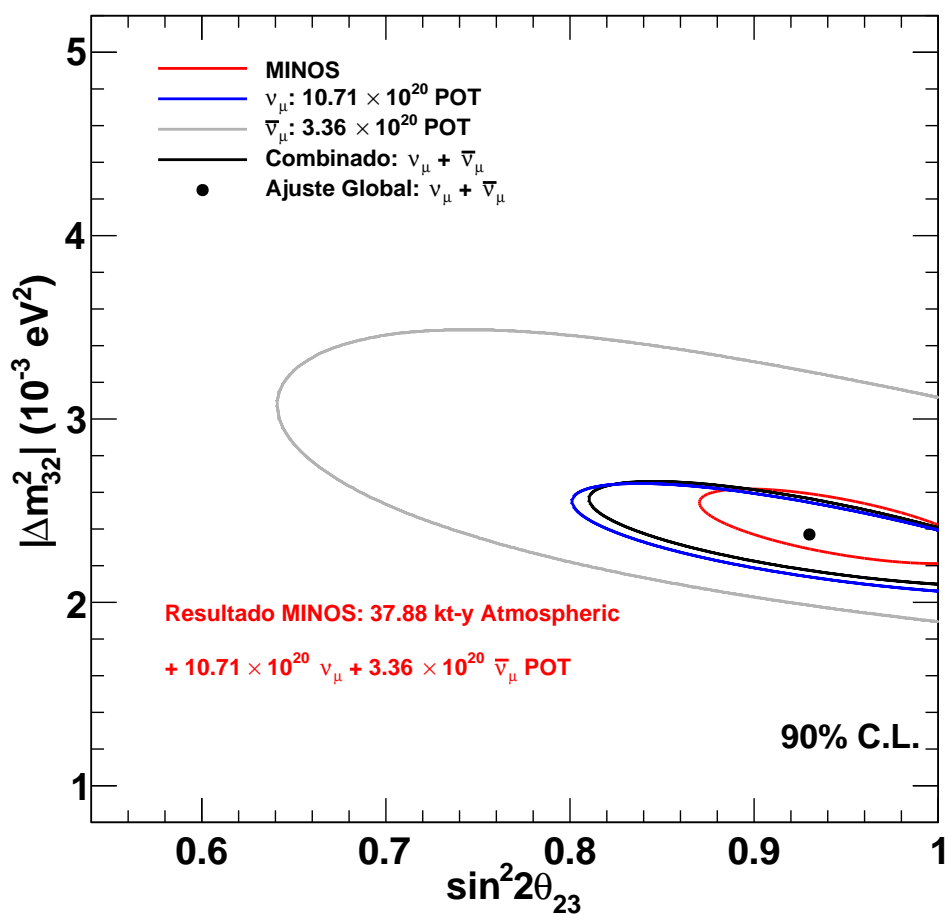
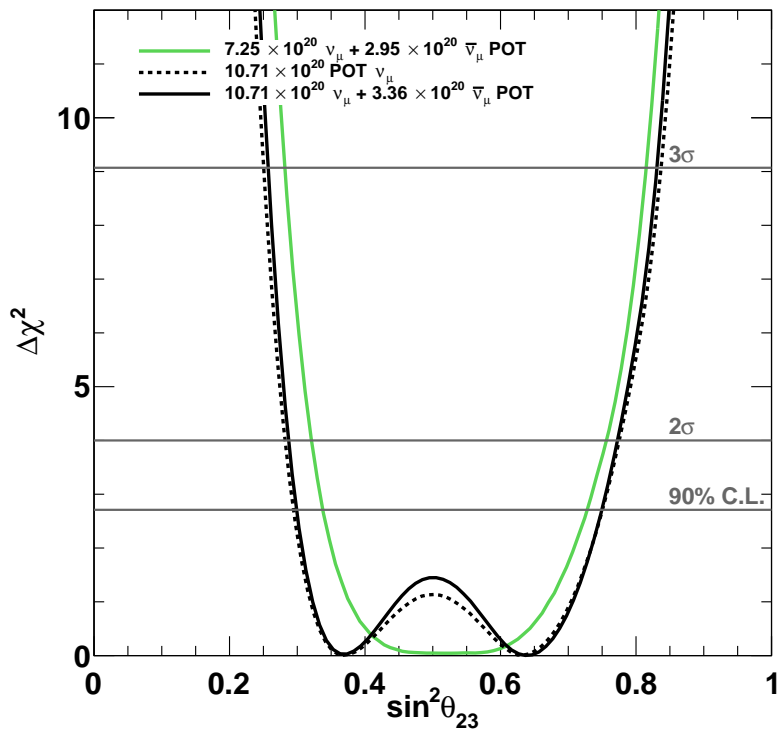
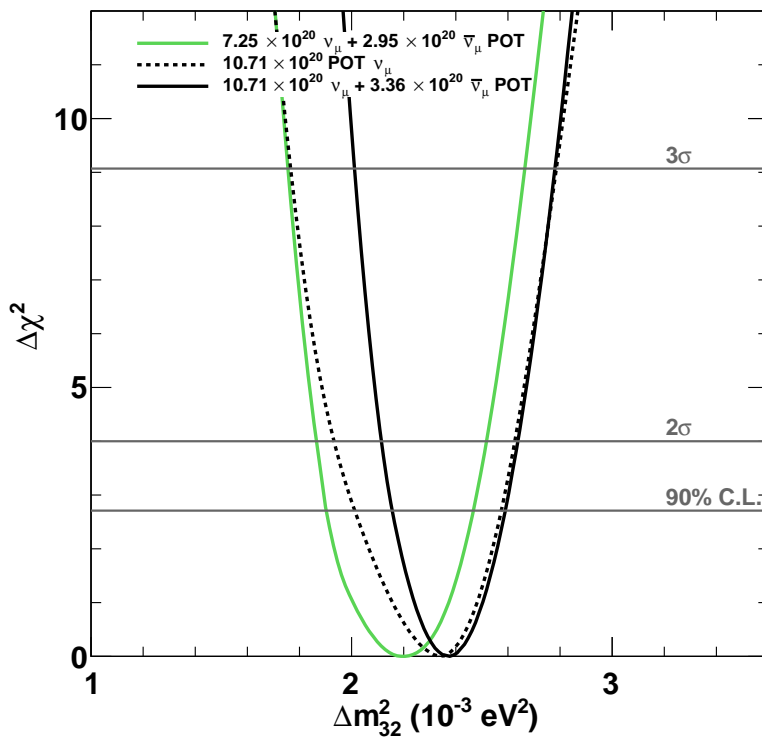


Figura 5.6: Região permitida para 90% CL dos parâmetros de oscilação do ajuste assumindo que neutrinos e antineutrinos são idênticos (curva vermelha) obtida experimentalmente é comparado com a região permitida de $\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu$ obtida. Comparamos também as regiões obtidas pelas análises separadas de ν_μ e $\bar{\nu}_\mu$. O resultado do MINOS foi retirado de: <http://www-numi.fnal.gov/PublicInfo/forscientists.html>.

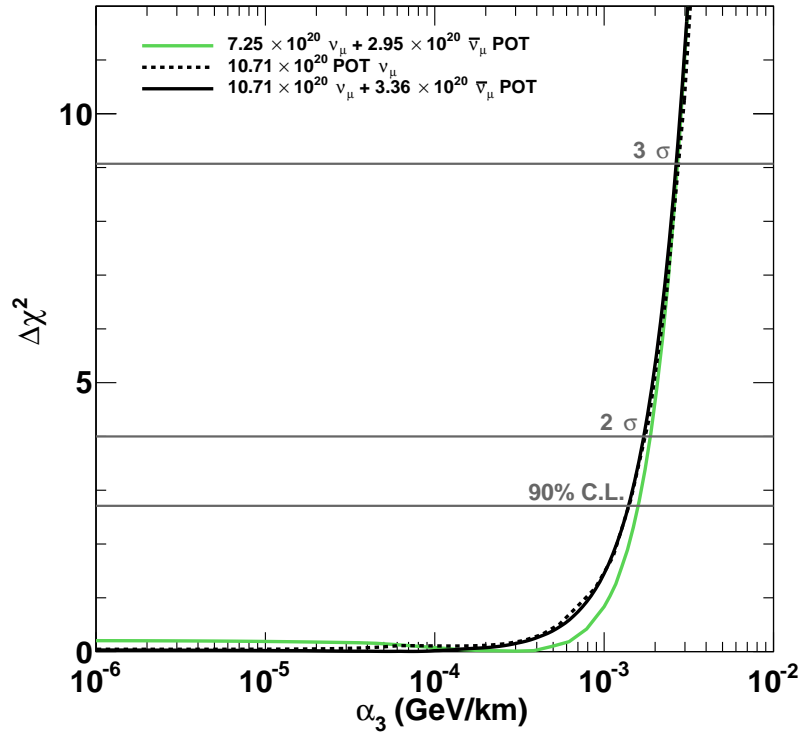


(a)

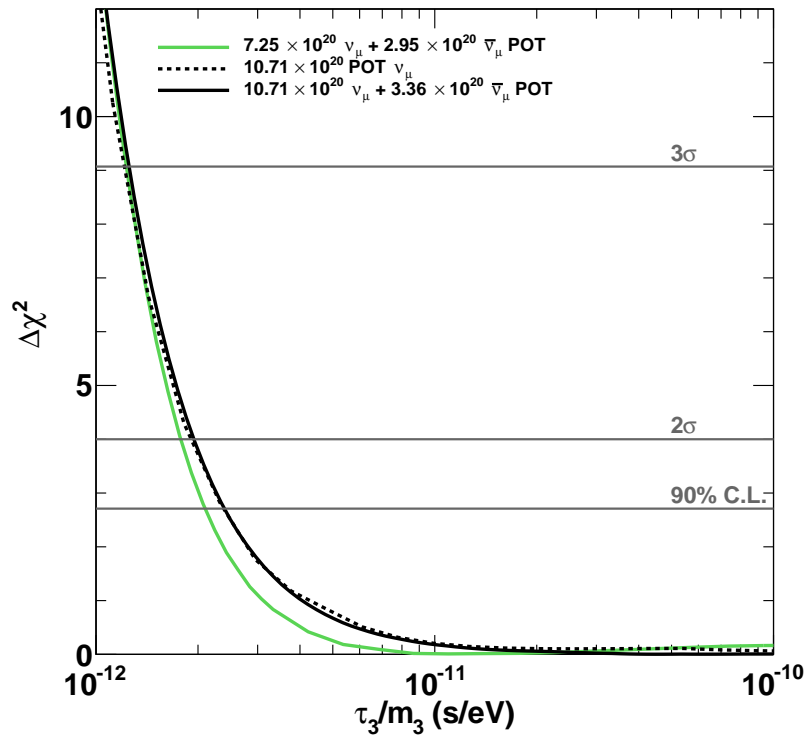


(b)

Figura 5.7: Em (a) temos a projeção 1D de $\Delta\chi^2$ em função de $\sin^2\theta_{23}$ para três casos distintos em estatística, enquanto que em (b) temos também a projeção 1D de $\Delta\chi^2$, só que em função de Δm_{32}^2 para os mesmos três casos descritos anteriormente.

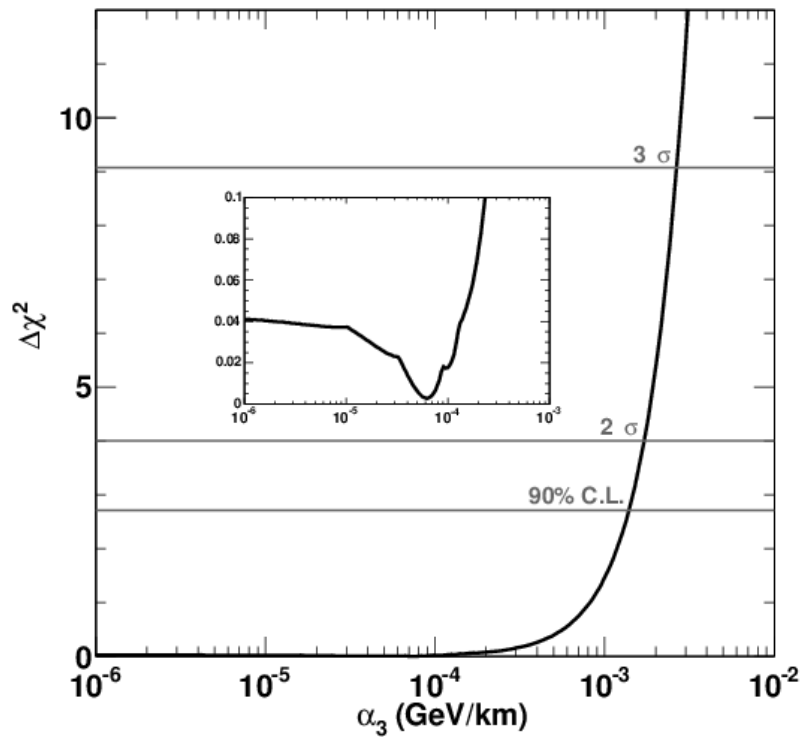


(a)

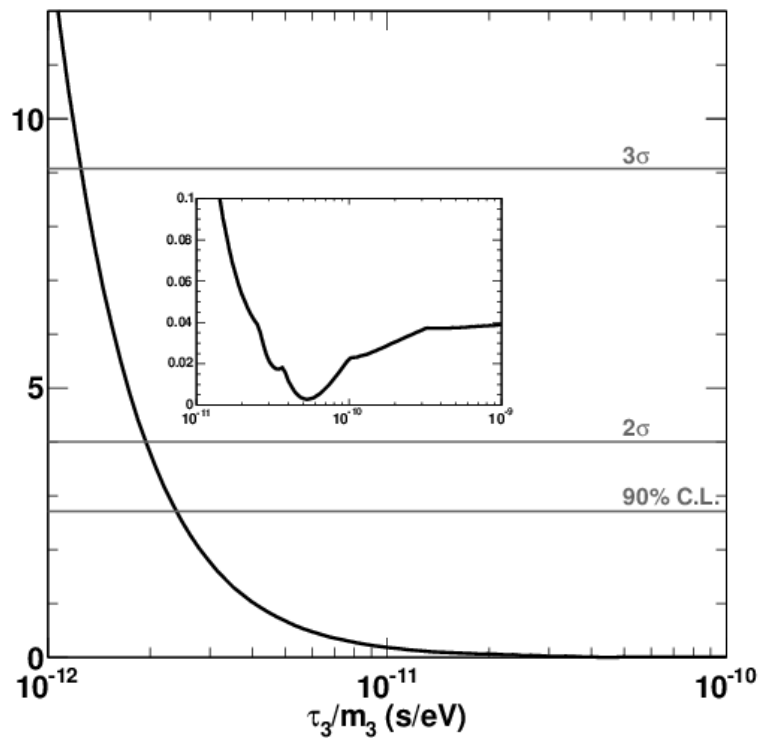


(b)

Figura 5.8: Em (a) temos a projeção 1D de $\Delta\chi^2$ em função de α_3 para três casos distintos em estatística, enquanto que em (b) temos também a projeção 1D de $\Delta\chi^2$, só que em função de τ_3/m_3 para os mesmos três casos descritos anteriormente.



(a)



(b)

Figura 5.9: Em (a) temos a projeção 1D de $\Delta\chi^2$ em função de α_3 e uma lente de aumento de uma região do gráfico para mostrar o mínimo do χ^2 que é próximo dos valores para qual α_3 é nulo, enquanto que em (b) temos também a projeção 1D de $\Delta\chi^2$, só que em função de τ_3/m_3 .

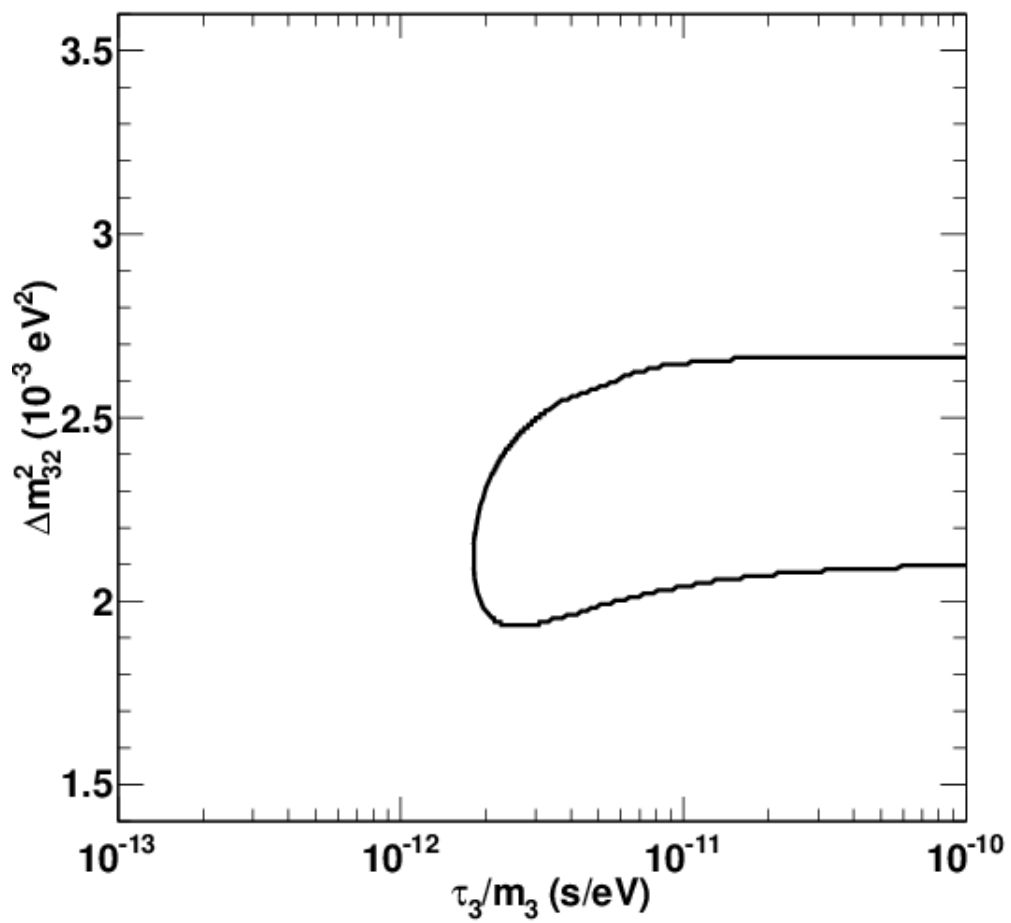
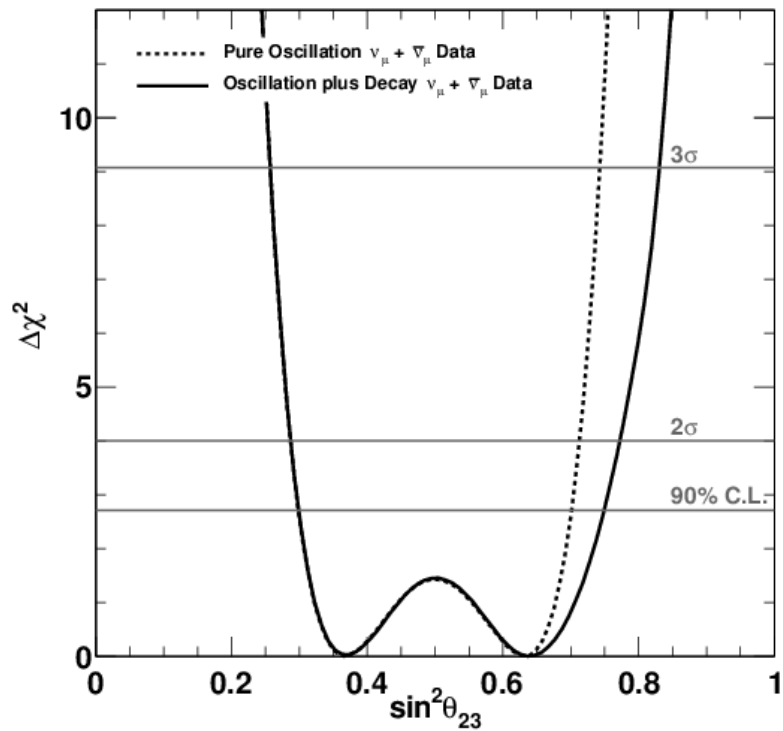
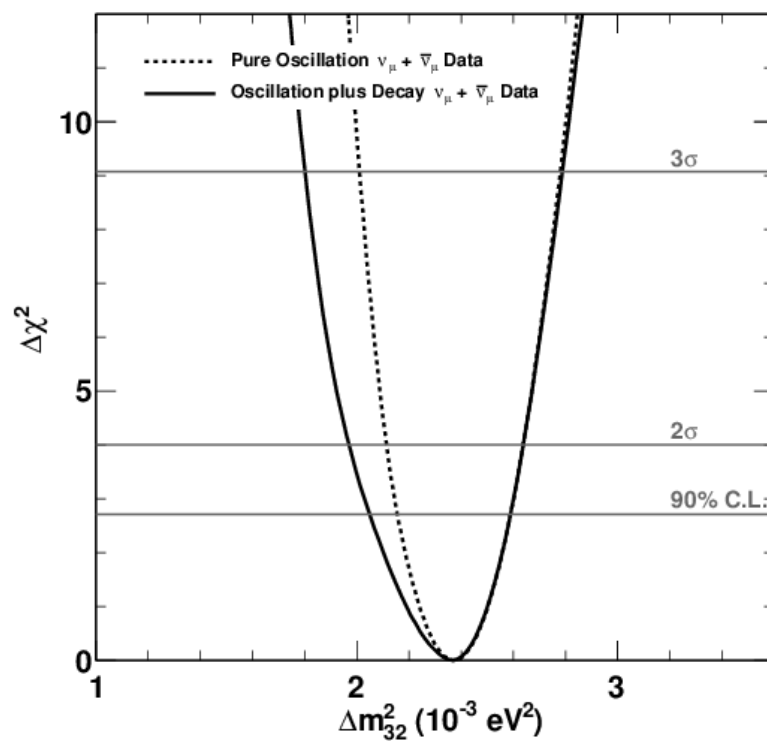


Figura 5.10: Região permitida $\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu$ para 90% CL dos parâmetros τ_3/m_3 por Δm_{32}^2 do ajuste assumindo que neutrinos e antineutrinos possuem os mesmos parâmetros.



(a)



(b)

Figura 5.11: Em (a) temos a projeção 1D de $\Delta\chi^2$ em função de $\sin^2\theta_{23}$ onde comparamos os casos de oscilação pura com oscilação com decaimento, enquanto que em (b) temos também a projeção 1D de $\Delta\chi^2$, só que em função de Δm_{32}^2 onde realizamos a comparação dos dois modelos.

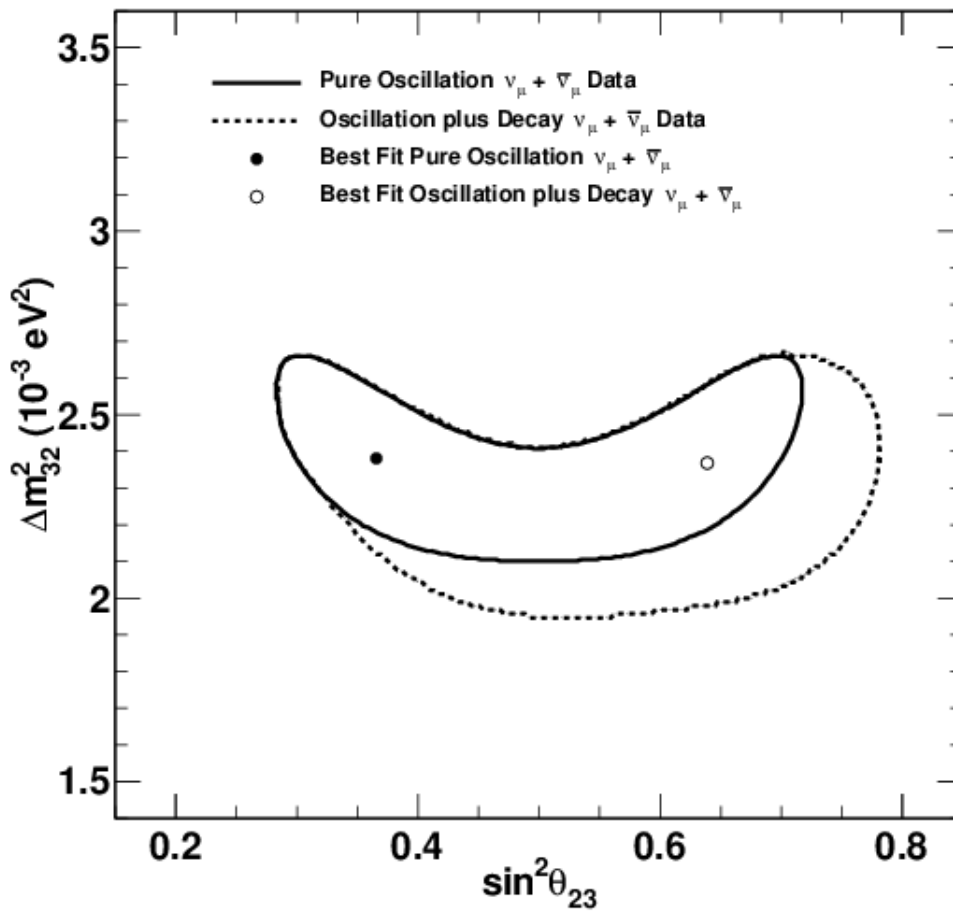


Figura 5.12: Região permitida $\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu$ para 90% CL dos parâmetros τ_3/m_3 por Δm_{32}^2 do ajuste assumindo que neutrinos e antineutrinos possuem os mesmos parâmetros.

CONCLUSÃO

Apresentamos uma análise combinada dos dados de neutrinos e antineutrinos da linha de feixe produzida pelo experimento MINOS aplicando o modelo de oscilação com decaimento e determinamos limites para o parâmetro de decaimento e para a razão tempo de vida dos neutrinos por massa. Conseguimos melhorar a medida experimental realizada pelo MINOS. Já em comparação com o resultado apresentado na referência [26] (Michele e Maltoni) que utiliza em sua análise, dados de neutrinos atmosféricos de SK e K2K e de neutrinos de acelerador do MINOS, obtivemos um resultado com duas ordens de grandeza a menos [26]. Conseguimos também, inicialmente, reproduzir os resultados de oscilação pura do MINOS, obtendo regiões de contorno consistentes com os resultados experimentais. Observamos que é interessante utilizar dados de neutrinos atmosféricos para melhorar esta última medida devido as questões da variável L/E da probabilidade de sobrevivência favorecer nestes casos os efeitos de decaimento de neutrinos. Podemos propor também uma análise experimental futura nesse sentido com os dados do MINOS+ e NOvA junto com os dados completos do MINOS incluindo neutrinos atmosféricos que poderia contribuir efetivamente com medidas de limites sobre α_3 .

APÊNDICE A

MÉTODO DA EXTRAÇÃO DAS DISTRIBUIÇÕES

Para extrair as distribuições diretamente das publicações do MINOS utilizamos o pacote computacional *G3Data Graph Analyzer*¹. Seleccionamos o gráfico contendo as distribuições e definimos o eixo de coordenadas, manualmente, marcando um ponto no gráfico e seu valor de referência. Na figura A.1 (a) vemos na parte superior à esquerda, as definições usadas para X_1 e X_2 que vão de 0 a 14 e Y_1 e Y_2 que vai de 0 a 500, ambos condizentes com o gráfico. O pacote *G3Data Graph Analyzer* funciona a partir de pixels onde cada píxel definido internamente pelo pacote é igual a um ponto com coordenadas X e Y na região do eixo de coordenadas. Ainda na figura A.1 (a) podemos observar a área de zoom "zoom area" que auxilia nas marcações, como se fosse uma lente de aumento no local onde o cursor se encontra.

O eixo X representa a energia das partículas que pode ser extraído de maneira simples, pois a largura de cada *bin* é bem definida. A preocupação está em obter o número de eventos que cada *bin* de energia possui, ou seja, estamos interessados em obter precisamente os valores do eixo Y . Definimos como o marco 0 de Y o píxel demarcado de cor vermelha da figura A.1 (a). Na área de zoom o píxel demarcado está acima da linha escura do gráfico, isto é, não está no ponto zero real do gráfico que certamente é o centro da linha. Levamos em consideração esse aspecto, pois observamos que isto atribui menos

¹ Para mais informações, o pacote computacional está disponível em: <http://www.frantz.fi/software/g3data.php>.

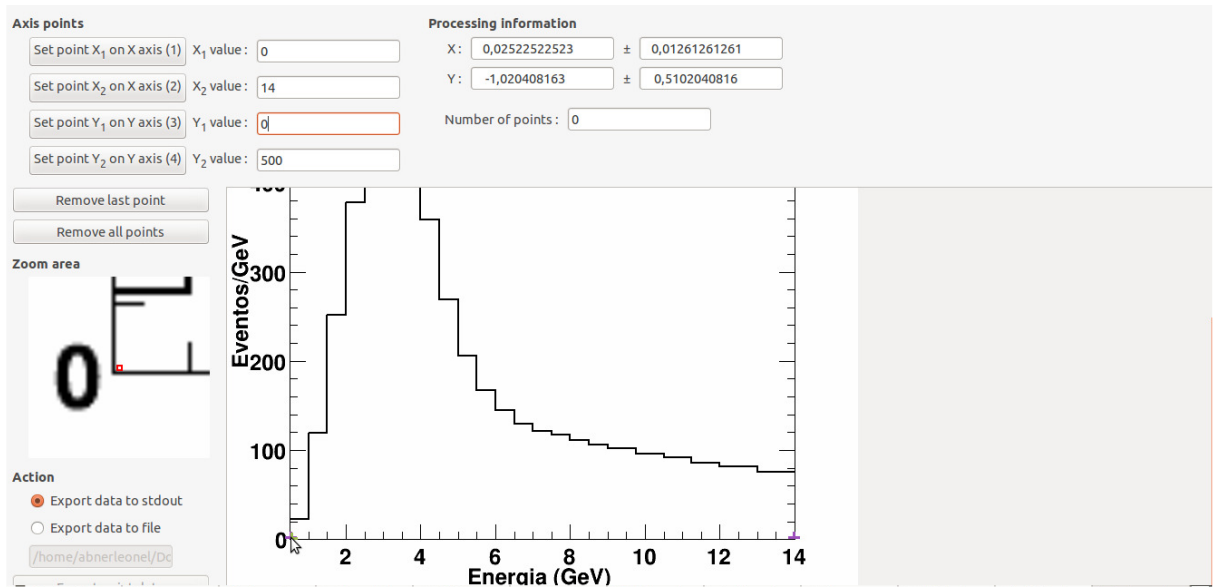
erros ao processo de extração. Para consertar o erro na definição do eixo Y , precisamos tomar o cuidado apenas de extrair todos os outros pontos com esta mesma definição. Na figura A.1 (b) estamos mostrando como os pontos são extraídos. Com todas definições feitas, precisamos apenas tomar o cuidado em pegar o píxel sempre acima da linha escura do gráfico. Observe pela área de zoom como é possível extrair os pontos com uma boa confiança.

A.1 Extração dos Dados e dos Erros

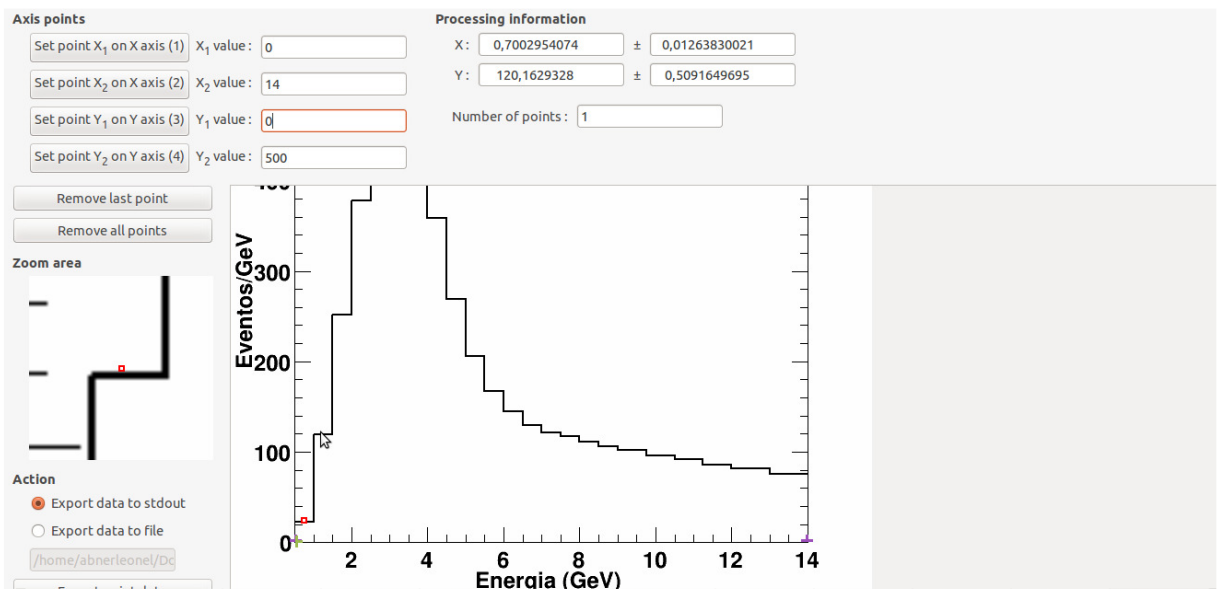
Na figura A.2, os pontos representam os dados. Para aplicarmos as mesmas definições sobre os dados realizadas nas distribuições é preciso pegar um píxel acima do centro do ponto. Fazemos isto tomando os valores superiores da barra de erro horizontal de cada ponto, assim garantimos que estamos pegando um píxel acima do centro de cada ponto dos dados.

Os erros contidos nos resultados do MINOS não são simétricos, então é necessário extrair os erros sobre os eventos para realizar uma análise com os erros totais do experimento. Assim como em todos os outros casos mencionados, precisamos tomar o cuidado de sempre selecionar um píxel acima. Portanto, na área de zoom na figura A.3 (a) temos o ponto recolhido do erro superior. No caso do marco do erro inferior, selecionar um píxel acima exige que peguemos um valor dentro da barra de erro como pode ser visto pela área de zoom na figura A.3 (b).

O valor absoluto de cada erro é portanto em módulo, a diferença entre cada ponto dos dados pelo valor extraído do erro.



(a)



(b)

Figura A.1: Demonstrativo das configurações usadas para extração das distribuições. Em (a) temos a definição da configuração do eixo Y. Em (b) mostramos como é selecionado cada ponto da distribuição no momento da extração dos dados.

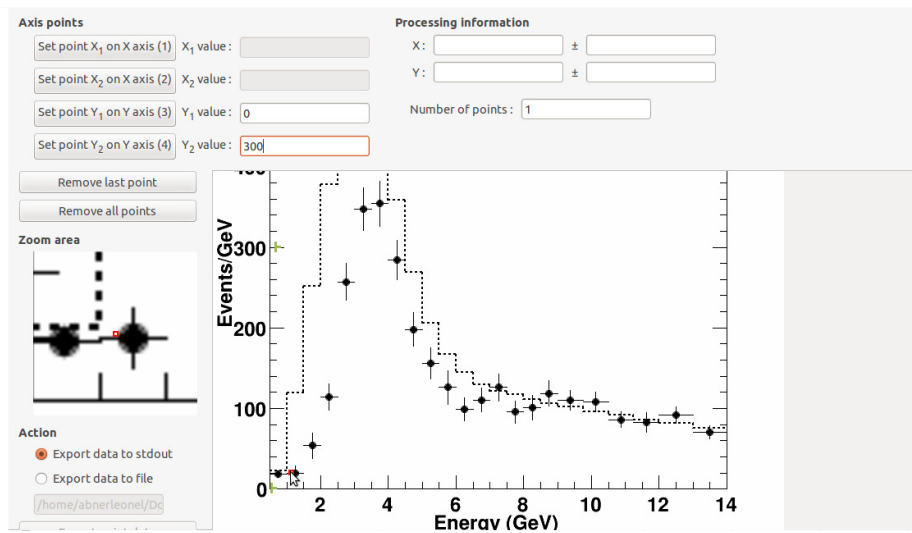
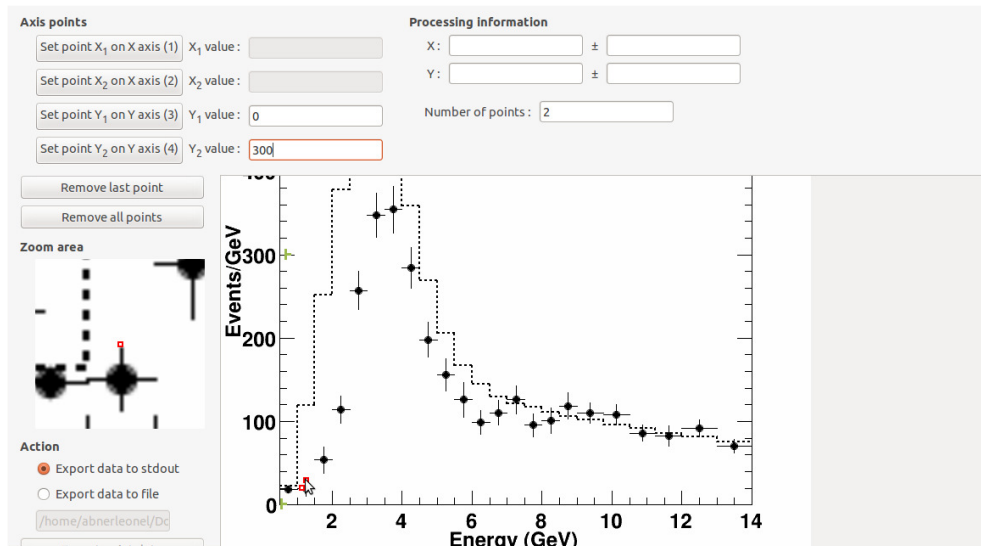
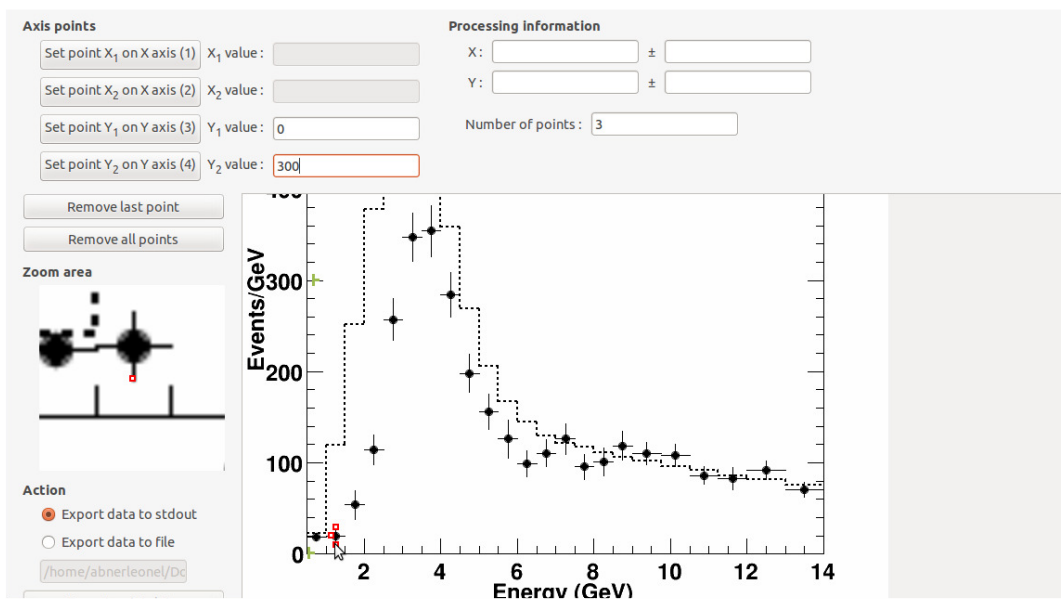


Figura A.2: A imagem mostra como selecionamos os pontos dos dados do Far Detector. Selecionamos cada ponto tendo como referência o erro horizontal como pode ser visto pela *zoom area*.



(a)



(b)

Figura A.3: Demonstrativo da seleção dos erros extraídos. Em (a) mostramos como é realizado a seleção dos erros superiores referente aos dados. Em (b) mostramos como é realizado a seleção dos erros inferiores também referente aos dados.

APÊNDICE B

NÍVEL DE CONFIANÇA - CL

Nível de confiança aparece como uma parte da estatística, como formas de descrever a propagação de uma distribuição, especialmente nas extremidades. Vamos olhar para a definição e propriedades neste contexto.

Vamos supor que uma certa contagem de partículas admita uma distribuição Gaussiana com energia média E , e um desvio padrão de $E/100$. Então pela equação B.4, dizemos que 68% das partículas terão mais que $E - E/100$ e menos que $E + E/100$ de energia (extremidades). Portanto, se supomos que as partículas possuem energia neste intervalo, estaremos corretos em 68% dos casos, ou seja, temos 68% de confiança sobre as medidas. Como estamos tratando de uma análise estatística, quanto maior o número de partículas medidas, maior será a concordância da probabilidade Gaussiana com as medidas, e o intervalo de energia destas partículas será cada vez mais sólido.

Há muitas escolhas possíveis para o nível de confiança que se pretende medir. Os valores mais comuns são 68%(1 σ), 95,4%(2 σ), 90%(1,64 σ), 95%(1,96 σ) e 99%(2,58 σ) CL. Temos uma relação de perda e ganho de qualidade entre o limite de um intervalo medido e o nível de confiança escolhido. Caso a escolha seja um nível de confiança baixo, seu limite no intervalo das medidas será mais restrito, porém, seu nível de confiança será menor, enquanto que um valor maior de nível de confiança ampliará sua região limite de valores possíveis, em outras palavras, ampliará o nosso intervalo. Voltando ao exemplo das partículas, se quisermos afirmar com uma confiança maior o intervalo de energia destas partículas, é necessário limites mais amplos. Na prática, limites de 90 e 95% CL são os mais comuns em análises estatísticas, 99% CL são ocasionalmente utilizados por

perfeccionistas.

B.1 O Desvio Padrão de 68% de CL

Para uma distribuição $f(x)$, para a medida de uma quantidade x , a probabilidade de obter um dado valor de x é dado pela equação B.1,

$$\int_a^b f(x)dx, \quad (\text{B.1})$$

onde obtemos em resposta uma medida no intervalo $a \leq x \leq b$. Caso a distribuição seja regida pela função de Gauss $G_{X,\sigma}(x)$, então a equação B.1 pode ser resolvida. Vamos calcular a probabilidade que uma certa medida cairá dentro de um desvio padrão σ do valor verdadeiro X . Esta probabilidade pode ser escrita como,

$$\begin{aligned} P(\text{dentro de } 1\sigma) &= \int_{X-\sigma}^{X+\sigma} G_{x,\sigma}(x)dx \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{X-\sigma}^{X+\sigma} e^{-(x-X)^2/2\sigma^2} dx, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

com $G_{X,\sigma}(x)$ igual à

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-X)^2/2\sigma^2}. \quad (\text{B.3})$$

A equação B.2 é ilustrada pela figura B.1 que tem por objetivo mostrar a região de investigação das medidas.

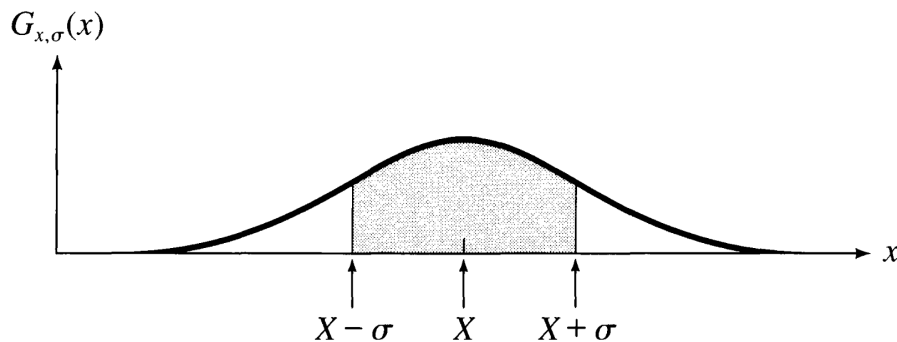


Figura B.1: A área sombreada entre $X \pm \sigma$ é a probabilidade de uma medida dentro de um desvio padrão de X [54].

Podemos simplificar a expressão B.2 substituindo $(x - X)/\sigma = r$. Com esta substituição, $dx = \sigma dr$, e os limites de integração passam a ser $r = \pm 1$. Portanto,

$$P(\text{dentro de } 1\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{+1} e^{-r^2/2} dr. \quad (\text{B.4})$$

A partir da equação B.4 é possível generalizar esta expressão para $t\sigma$ desvios padrão,

$$P(\text{dentro de } t\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{+t} e^{-r^2/2} dr, \tag{B.5}$$

como pode ser ilustrado pela figura B.2 que mostra a area limite para o caso de $t\sigma$. o

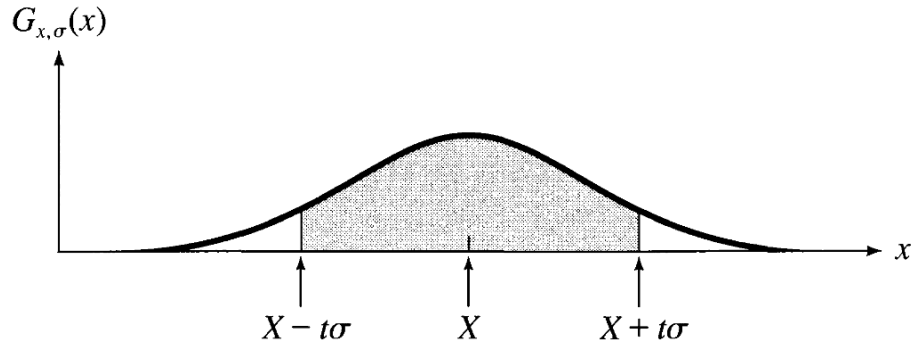


Figura B.2: A area sombreada entre $X \pm t\sigma$ é a probabilidade de uma medida dentro de t desvios padrão de X [54].

valor de t deve ser real e positivo, e significa para a probabilidade, quantos desvios de X está sendo medido. Esta probabilidade é dada pela area sombreada da figura B.2.

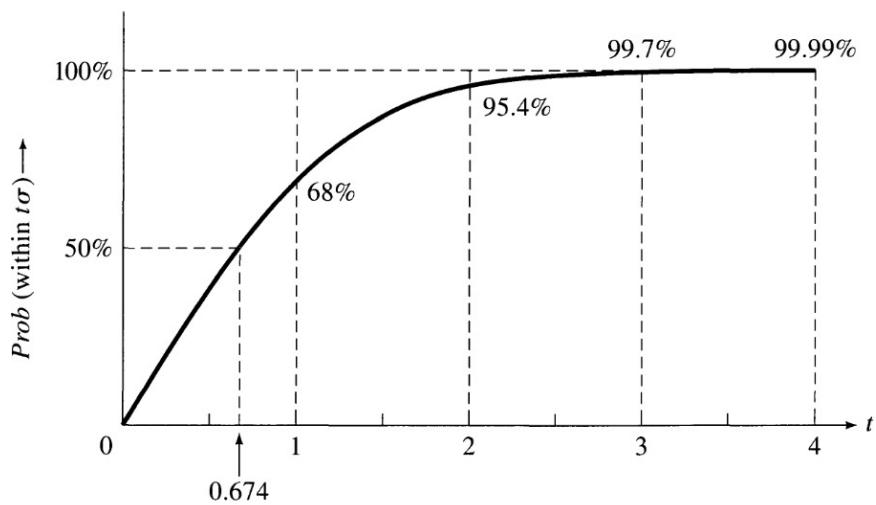


Figura B.3: A area sombreada entre $X \pm \sigma$ é a probabilidade de uma medida dentro de um desvio padrão de X [54].

A expressão B.5 é uma integral padrão da física matemática, e é frequentemente chamada de função erro. Ela não pode ser resolvida analiticamente, mas pode ser solucionada em um computador. A figura B.3 mostra o traço da expressão B.5 em função de t e tabula alguns dos valores da probabilidade usados. A partir da figura B.3 observamos que a probabilidade em que a medida cairá em 1σ da resposta verdadeira é de 68%. Se citarmos

o desvio padrão como incerteza de uma medida ($x = x_{\text{ótimo}} \pm \delta x$, e admitir que $\delta x = \sigma$), então podemos ter confiança que estamos dentro de 1σ do valor correto.

Nós podemos ver pela figura B.3 que a probabilidade $P(\text{dentro de } t\sigma)$ rapidamente aproxima de 100% quando t cresce. A probabilidade de que a medida caia em 2σ é 95,4%, e para 3σ é 99,7%. Para vermos este resultado de uma outra maneira, podemos dizer que a probabilidade da medida cair fora de um desvio padrão é de 32%, de cair de 2σ é ainda menor, apenas 4,6%, e 3σ é extremamente pequena, 0,3%. Ou seja, a probabilidade da medida estar fora da região é,

$$P(\text{fora de } t\sigma) = 1 - P(\text{dentro de } t\sigma). \quad (\text{B.6})$$

APÊNDICE C

DISTRIBUIÇÃO χ^2

A distribuição χ^2 nos permite calcular uma probabilidade, no entanto para tratarmos de nível de confiança, precisamos aproximar esta distribuição à uma Gausseana. Isto pode ser feito quando possuímos um número de eventos observados n relativamente alto. Pela figura C.1 é possível ver que para $n = 10$ temos uma distribuição próxima da Gausseana. A forma da probabilidade de χ^2 pode ser visto na equação C.1,

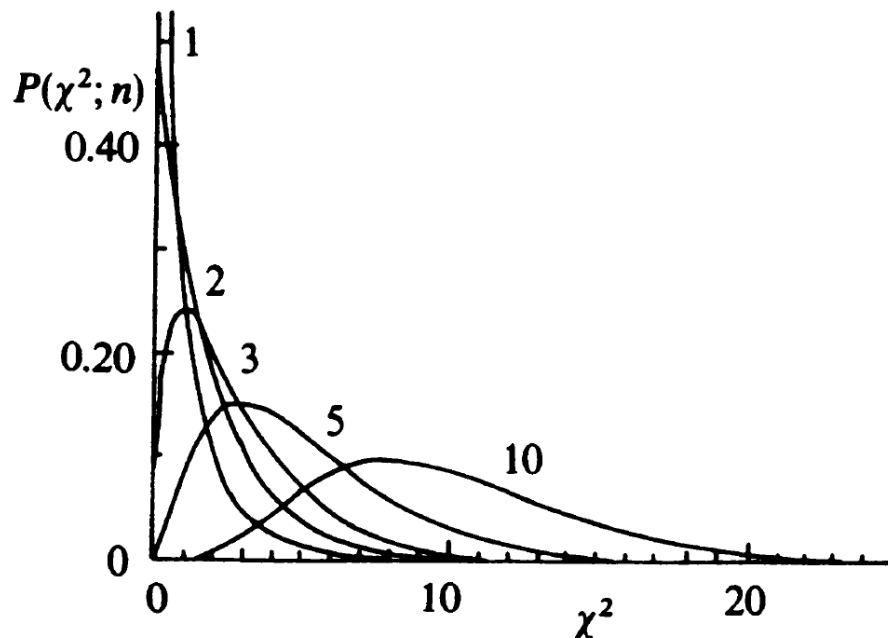


Figura C.1: Algumas distribuições χ^2 para valores de $n = 1, 2, 3, 5$ e 10 [55].

$$P(\chi^2, D) = \frac{2^{-D/2}}{\Gamma(D/2)} \chi^{D-2} e^{-\chi^2/2}, \quad (\text{C.1})$$

onde $\Gamma(D/2)$ é a função gama, e D o número de graus de liberdade.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] P. Adamson *et al.*, "Measurement of the Neutrino Mass Splitting and Flavor Mixing by MINOS", *Phys. Rev. Lett.* **106**, 181801 (2011).
- [2] J. Hosaka *et al.*, "Solar neutrino measurements in Super-Kamiokande-I", *Phys. Rev. D* **73**, 112001 (2006).
- [3] The SNO Collaboration, "Measurement of Charged Current Interactions Produced by 8B Solar Neutrinos at the Sudbury Neutrino Observatory", *Phys. Rev. Lett.* **87**, 071301 (2001).
- [4] B. Pontecorvo, "Mesonium and anti-mesonium", *Sov. Phys. JETP*, **6**, 429, (1957).
- [5] B. Pontecorvo, "Inverse Beta Processes And Nonconservation Of Lepton Charge", *Sov. Phys. JETP*, **7**, 172, (1958).
- [6] B. T. Cleveland *et al.*, "Measurement of the solar electron neutrino flux with the Homestake chlorine detector", *Astrophys. J.*, **496**, 505, (1998).
- [7] B. Pontecorvo, "Neutrinos Experiments and the Problem of Conservation of Leptonic Charge", *Sov. Phys. JETP*, **26**, 984, (1968).
- [8] G. Danby *et al.*, "Observation of high-energy neutrino reactions and the existence of two kinds of neutrinos", *Phys. Rev. Lett.*, **9**, 36, (1962).
- [9] Z. Maki, M. Nakagawa, and S. Sakata, "Remarks on the Unified Model of Elementary Particles", *Prog. Theor. Phys.*, **28**, 870, (1962).

-
- [10] V. N. Gribov and B. Pontecorvo, "Neutrino Astronomy and Lepton Charge", *Phys. Lett.*, **B28**, 493, (1969).
- [11] S. Eliezer and A. R. Swift, "Experimental Consequences of electron Neutrino-Muon-neutrino Mixing in Neutrino Beams", *Nucl. Phys.*, **B105**, 45, (1976).
- [12] H. Fritzsch and P. Minkowski, "Vector - like weak currents, massive neutrinos, and neutrino beam oscillations", *Phys. Lett.*, **B62**, 72, (1976).
- [13] S. M. Bilenky and B. Pontecorvo, "The lepton-quark analogy and muonic charge", *Sov. J. Nucl. Phys.*, **24**, 316, (1976).
- [14] S. M. Bilenky and B. Pontecorvo, "Again on neutrino oscillations", *Nuovo Cim. Lett.*, **17**, 569, (1976).
- [15] S. M. Bilenky and B. Pontecorvo, "Lepton mixing and neutrino oscillations", *Phys. Rep.*, **41**, 225, (1978).
- [16] D. Griffiths, "Introduction to Elementary Particles", WILEY-VCH, second revised edition (2009).
- [17] K. Zuber, "Neutrino Physics", Taylor and Francis Group, (2004).
- [18] F. Halzen and A. D. Martin, "Quarks and Leptons: An Introduction Course in Modern Particle Physics", John Wiley and Sons, (1984)
- [19] C. Giunti and C. W. Kim, "Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics", Oxford University Press, (2007).
- [20] S. J. Colemar, "A Measurement of Neutrino Oscillation with Muon Neutrinos in the MINOS Experiment", Tese de Doutorado, The College of William and Mary, Virginia, (2011).
- [21] E. J. Konopinski and H. M. Mahmoud, "The Universal Fermi interaction", *Phys. Rev.* **92**, 1045, (1953).
- [22] M. Gell-Mann and A. Pais, "Behavior of Neutral Particles under Charge Conjugation", *Phys. Rev.* **97**, 1387, (1955).

- [23] The Super-Kamiokande Collaboration, "Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos", *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1562 (1998).
- [24] B. Kayser, "On the quantum mechanics of neutrino oscillation", *Phys. Rev. D*, **24**, 110, (1981).
- [25] Y. Grossman and H. J. Lipkin, "Flavor oscillations from a spatially localized source: A simple general treatment", *Phys. Rev. D*, **55**, 2760 (1997).
- [26] M. C. Gonzalez-Garcia and M. Maltone, "Status of oscillation plus decay of atmospheric and long-baseline neutrinos", *Phys.Lett. B* **663**, 405, (2008).
- [27] V. D. Barger, J.G. Learned, S. Pakvasa and T.J. Welier, "Neutrino Decay as an Explanation of Atmospheric Neutrino Observations", *Phys. Rev. Lett.*, **83**, 2640, (1999).
- [28] V. D. Barger, J.G. Learned, P. Lipari, M. Lusignoli, S. Pakvasa and T.J. Welier, "Neutrino Decay and Atmospheric Neutrinos", *Phys. Rev. B*, **462**, 109, (1999).
- [29] R. A. Bertlmann, W. Grimus, and B. C. Hiesmayr, "Open-quantum-system formulation of particle decay", *Phys. Rev. A* **73**, 054101 (2006).
- [30] A. Bandyopadhyay, S. Choubey and S. Goswami, "Impact of the first SNO results on Neutrino Mass and Mixing", *Phys. Rev. D*, **63**, 11309 (2001).
- [31] D. Majumdar and A. Ghosal, "Investigating Possible Neutrino Decay in Long Baseline Experiment Using ICAL as Far end Detector", arXiv:0712.0697v2 [hep-ph], (2007).
- [32] P. Baerwald, M. Bustamante and W. Winter, "Neutrino decays over cosmological distances and the implications for neutrino telescopes", arXiv:1208.4600v2 [astro-ph.CO], (2012).
- [33] D. Meloni and Tommy Ohlsson, "Neutrino flux ratios at neutrino telescopes: The role of uncertainties of neutrino mixing parameters and applications to neutrino decay", *Phys. Rev. D*, **75**, 125017 (2007).
- [34] S. Pakvasa, "Do neutrinos decay?", *AIP Conf. Proc.* **542**, 99, arXiv:hep-ph/0004077v2 (2000).

- [35] V. V. Thuan, N. T. Anh and L. H. Thang, "Neutrino decay and long base-line oscillation experiments", arXiv:hep-ph/0002124, (2000).
- [36] M. Lindner, T. Ohlsson and W. Winter, "A combined treatment of neutrino decay and neutrino oscillations", Nucl. Phys. B, **607**, 326, (2001).
- [37] W. Winter, "Peculiar effects in the combination of neutrino decay and neutrino oscillations", arXiv:hep-ph/0106270v1 (2001).
- [38] S.N. Gninenko, "MiniBooNE Anomaly and Heavy Neutrino Decay", Phys. Rev. Lett., **103**, 241802, (2009).
- [39] S.N. Gninenko, Sterile neutrino decay as a common origin for LSND/MiniBooNE and T2K excess events. Phys. Rev. D, **85**, 051702, (2012).
- [40] D. G. Michael *et al.*, "Measurement of the Ratios of Branching Fractions B", Phys. Rev. Lett., **96**, 191801 (2006).
- [41] P. Adamson *et al.*, "Study of muon neutrino disappearance using the Fermilab Main Injector neutrino beam", Phys. Rev. D **77**, 072002 (2008).
- [42] S. Kopp, "The NuMI Neutrino Beam at Fermilab", Department of Physics, University of Texas Austin, TX 78712, U.S.A., (2005).
- [43] The MINOS Collaboration, "Neutrino Oscillation Physics at Fermilab: The NuMI-MINOS Project", Fermilab Report NuMI-L-337, (1998).
- [44] C. B. Smith, "Calibration of the MINOS detectors and extraction of neutrino oscillation parameters", Tese de Doutorado, University College London, Fermilab-Thesis, (2002).
- [45] J. Valle, "Resonant Oscillations of Massless Neutrinos in Matter" Phys. Lett. B. **199**, 432, (1987).
- [46] P. Adamson *et al.*, "Search for sterile neutrino mixing in the MINOS long-baseline experiment", Phys. Rev. D **81**, 052004 (2010).
- [47] P. Adamson *et al.*, "Measurement of Neutrino Oscillations with the MINOS Detectors in the NuMI Beam", Phys. Rev. Lett. **101**, 131802 (2008).

-
- [48] P. Adamson *et al.*, "Improved Measurement of Muon Antineutrino Disappearance in MINOS", *Phys. Rev. Lett.* **108**, 191801 (2012).
- [49] P. Adamson *et al.*, "Measurement of Neutrino and Antineutrino Oscillations Using Beam and Atmospheric Data in MINOS", *Phys. Rev. Lett.* **110**, 251801 (2013).
- [50] Y. Ashie *et al.*, "Measurement of atmospheric neutrino oscillation parameters by Super-Kamiokande I", *Phys. Rev. D* **71**, 112005 (2005).
- [51] M. H. Ahn, *et al.*, "Measurement of Neutrino Oscillation by the K2K Experiment", *Phys. Rev. D* **74**, 112005 (2006).
- [52] K. Nakamura *et al.*, "Particle Data Group: Review of Particle Physics", *J. Phys. G* **37**, 075021 (2010).
- [53] ROOT An Object-Oriented Data Analysis Framework, "ROOT 5.34", CERN. URL <http://root.cern.ch/drupal/>. (2013).
- [54] J. R. Taylor, "An Introduction to Error Analysis", University Science Books, second edition (1997).
- [55] R. J. Barlow, "Statistics: A Guide to the Use of Statistical Methods in the Physical Science", John Wiley and Sons, general edition (1989).