

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

HUGO LEONARDO DA SILVA BELISARIO

Ciclos Limite para a Equação de Abel Generalizada

Goiânia
2009



Termo de Ciência e de Autorização para Disponibilizar as Teses e Dissertações Eletrônicas (TEDE) na Biblioteca Digital da UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás – UFG a disponibilizar gratuitamente através da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações – BDTD/UFG, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Dissertação** **Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor:	Hugo Leonardo da Silva Belisário			
CPF:		E-mail:	hugo_matematic@yahoo.com.br	
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? <input checked="" type="checkbox"/> Sim <input type="checkbox"/> Não				
Vínculo Empregatício do autor:	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – IFGoiás. Campus de Inhumas.			
Agência de fomento:	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico	Sigla:	CNPq	
País:	Brasil	UF:	DF CNPJ:	33.654.831/0001-36
Título:	Ciclos Limites para a Equação de Abel Generalizada.			
Palavras-chave:	Equação de Abel, aplicação de Poincaré, estabilidade de órbitas periódicas, ciclo limite, 16º problema de Hilbert.			
Título em outra língua:	Limit cycles for generalized Abel equation.			
Palavras-chave em outra língua:	Abel equation, Poincaré map, stability of periodic orbits limit cycle, 16th Hilbert problem.			
Área de concentração:	Análise			
Data defesa: (dd/mm/aa)	30/10/2009.			
Programa de Pós-Graduação:	Instituto de Matemática e Estatística – Mestrado em Matemática.			
Orientador:	Ronaldo Alves Garcia.			
CPF:		E-mail:	ronaldo.a.garcia@uol.com.br	
Co-orientador(a):				
CPF:		E-mail:		

3. Informações de acesso ao documento:

Liberção para disponibilização?¹ total parcial

Em caso de disponibilização parcial, assinale as permissões:

Capítulos. Especifique: _____

Outras restrições: _____ Gostaria que não fosse divulgado os anexos.

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O Sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Data: 02/12/2009

Assinatura do autor

¹ Em caso de restrição, esta poderá ser mantida por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Todo resumo e metadados ficarão sempre disponibilizados.

HUGO LEONARDO DA SILVA BELISARIO

Ciclos Limite para a Equação de Abel Generalizada

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. Ronaldo Alves Garcia

Goiânia
2009

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
GPT/BC/UFG**

B431c Belisario, Hugo Leonardo da Silva.
Ciclos limite para a equação de Abel generalizada
[manuscrito] / Hugo Leonardo da Silva Belisário. - 2009.
xv, 69 f. : il., figs, tabs.

Orientador: Prof. Dr. Ronaldo Alves Garcia.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás,
Instituto de Matemática e Estatística, 2009.

Bibliografia.

Inclui lista de figuras e tabelas.

1. Equação de Abel 2. Ciclos limite 3. Aplicação de
Poincaré. I. Título.

CDU:517.911

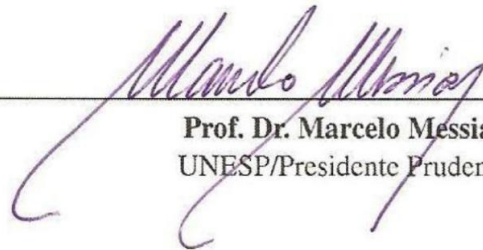
HUGO LEONARDO DA SILVA BELISARIO

Ciclos Limite para a Equação de Abel Generalizada

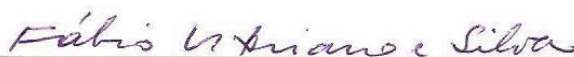
Dissertação defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 30 de outubro de 2009, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



Prof. Dr. Ronaldo Alves Garcia
Instituto de Matemática e Estatística – UFG
Presidente da Banca



Prof. Dr. Marcelo Messias
UNESP/Presidente Prudente



Prof. Dr. Fábio Vitoriano e Silva
Instituto de Matemática e Estatística – UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Hugo Leonardo da Silva Belisario

Graduou-se em Licenciatura Plena em Matemática na UFG - Universidade Federal de Goiás, na extinta extensão de Rialma. Durante a graduação, foi monitor das disciplinas de Geometria Analítica e Equações Diferenciais Aplicadas e pesquisador do CNPq em um trabalho de iniciação científica sobre estabilidade assintótica de uma classe de equações diferenciais. Durante o mestrado, na UFG, foi bolsista do CNPq. Atualmente é professor de matemática no IFG - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás - Campus de Inhumas.

Dedico este trabalho às mulheres da minha vida: Maria Angelina, minha mãe e Gleiceanne, minha esposa.

Agradecimentos

Primeiramente ao Criador pelo dom da vida e pela beleza de toda a criação, que nos faz querer entendê-la.

Aos meus pais, pelo estímulo e apoio desde a primeira hora; pela paciência e sensatez com que sempre me ajudaram.

À minha esposa, pelo companheirismo, paciência e compreensão reveladas ao longo destes meses.

Aos meus familiares e amigos que sempre me apoiaram e acreditaram nessa conquista.

Aos professores de toda a minha vida, da pré-escola à pós-graduação, que me inspiraram e incentivaram.

Ao Prof. Dr. Ronaldo Alves Garcia, pela orientação, disposição e paciência durante a elaboração deste trabalho.

Ao CNPq pelo apoio financeiro recebido durante a realização deste trabalho.

Aquele que pode digerir um segundo ou terceiro fluxo, uma segunda ou terceira diferença, não precisa, creio eu, ter relutância em face de qualquer questão sobre a Divindade.

George Berkeley,
História da Matemática.

Resumo

BELISÁRIO, Hugo Leonardo da Silva. **Ciclos limite para a equação de Abel generalizada**. Goiânia, 2009. 69p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Neste trabalho realizamos um estudo sobre as equações do tipo

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=0}^n a_i(t)x^i, \quad (\text{A})$$

onde $a_i \in C^1$, $i = 0, \dots, n$ e $0 \leq t \leq 1$. Uma equação da forma (A) é denominada equação de Abel generalizada. Nosso estudo se refere ao problema proposto por C. Pugh: existe um número natural N dependendo apenas de n , tal que a equação (A) possui no máximo N ciclos limites?

Inicialmente estudamos o problema de C. Pugh para $n = 1$ e $n = 2$, para os quais a equação (A) possui, no máximo, um e dois ciclos limite, respectivamente. Para $n = 3$, A. Lins Neto mostra que, se $a_3(t)$ não muda de sinal em $[0, 1]$, então a equação (A) possui no máximo três ciclos limite. Além disso A. Lins Neto mostra que, dado um número natural l , é possível construir uma equação da forma (A) com $n = 3$ que possui no mínimo l ciclos limites. Ainda para $n = 3$, A. Gasull e J. Llibre estudam o problema de C. Pugh considerando que $a_2(t)$ não muda de sinal em $[0, 1]$, e M. J. Álvarez, A. Gasull e H. Giacomini também estudam o problema de C. Pugh considerando que existem números reais a e b tais que $aa_3(t) + ba_2(t)$ não muda de sinal em $[0, 1]$ e $a_1(t) = a_0(t) = 0$. Além destes resultados, estudamos alguns resultados mais gerais estudados por A. Gasull e A. Guillamon.

Palavras-chave

Equação de Abel, aplicação de Poincaré, estabilidade de órbitas periódicas, ciclo limite, 16º problema de Hilbert.

Abstract

BELISÁRIO, Hugo Leonardo da Silva. **Ciclos limite para a equação de Abel generalizada**. Goiânia, 2009. 69p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

In this work we conducted a study on the equations of the type

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=0}^n a_i(t)x^i, \quad (\text{A})$$

where $a_i \in C^1$, $i = 0, \dots, n$ and $0 \leq t \leq 1$. An equation of the form (A) is called a generalized Abel equation. Our study refers to the problem proposed by C. Pugh: There is a natural number N depending only on n , such that the equation (A) has at most N limit cycles?

Initially we study the problem of C. Pugh for $n = 1$ and $n = 2$, for which the equation (A) has at most one and two limit cycles, respectively. For $n = 3$, A. Lins Neto shows that if $a_3(t)$ does not change sign on $[0, 1]$, then the equation (A) has at most three limit cycles. Also A. Lins Neto shows that, given a natural number l , it is possible to construct an equation of the form (A) with $n = 3$ that has at least l limit cycles. Still for $n = 3$, A. Gasull and J. Llibre study the problem of C. Pugh considering that $a_2(t)$ does not change sign on $[0, 1]$, and M. J. Alvarez, A. Gasull and H. Giacomini also study the problem of C. Pugh considering that there are real numbers a and b such that $aa_3(t) + ba_2(t)$ does not change sign on $[0, 1]$ and $a_1(t) = a_0(t) = 0$. Besides this, we study some more general results studied by A. Gasull and A. Guillamon.

Keywords

Abel equation, Poincaré map, stability of periodic orbits, limit cycle, 16 Hilbert problem.

Sumário

Lista de Figuras	10
Lista de Tabelas	11
1 Caracterização do Problema	12
2 Generalidades	17
2.1 Definições	17
2.2 Resultados Preliminares	18
2.2.1 Construção de Funções	18
2.2.2 Equivalências	21
2.2.3 Estabilidade e Aplicação de Poincaré	24
2.2.4 Alguns Resultados Sobre Fluxos Planares	31
3 Resultados	35
3.1 Um caso particular	35
3.2 A equação de Ricatti	36
3.3 A equação de Abel	38
3.4 Resultados mais gerais	57
Referências Bibliográficas	68
Índice Remissivo	69

Lista de Figuras

1.1	Solução Periódica.	12
2.1	Aplicação de Poincaré.	17
2.2	Ciclos limite estável, instável e semi-estável, respectivamente.	18
2.3	O ângulo formado entre $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{d\phi}{dt}$ nos casos em que $B(t) \geq 0$ e $B(t) \leq 0$, respectivamente.	23
2.4	Retratos de fase de (2.28) na vizinhança de x_0^* para $\varepsilon = 0$ e $\varepsilon \neq 0$ respectivamente.	30
2.5	Retratos de fase de (2.28) na vizinhança de x_0^* para $\varepsilon = 0$ e $\varepsilon \neq 0$ respectivamente.	31
2.6	O conjunto \tilde{Q} .	33
3.1	Possíveis retratos de fase para a equação (3.11) com $A(t) \geq 0$, $A(t) \not\equiv 0$ e $c > 0$.	42
3.2	Comparando $x(t)$ e $\bar{x}(t)$. Casos (2.1) e (2.2) respectivamente.	49
3.3	Comparando $x(t)$ com $\bar{x}(t)$, para $0 \neq x_0 > \frac{a}{b}$. Caso (3.1).	49
3.4	Comparando $x(t)$ com $\bar{x}(t)$, para $x_0 > \frac{a}{b} > 0$. Caso (3.2).	50
3.5	Comparando $x(t)$ com $\bar{x}(t)$, para $x_0 > \frac{a}{b} > 0$ e $x(t)$ com $\hat{x}(t)$, para $x_0 < 0$. Caso (3.3).	51

Lista de Tabelas

- 3.1 Distribuição dos ciclos limite da equação (3.11), contando multiplicidades, em cada região do plano ($x < 0$, $x = 0$ e $x > 0$) considerando $A(t) \leq 0$ ou $A(t) \geq 0$ tal que $A(t) \neq 0$. 40
- 3.2 Distribuição dos ciclos limite da equação (3.11), contando multiplicidades, em cada região do plano ($x < 0$, $x = 0$ e $x > 0$), considerando $B(t) \leq 0$ ou $B(t) \geq 0$ tal que $B(t) \neq 0$. 44
- 3.3 Informações sobre o único ciclo limite não nulo de (3.16), considerando $aA(t) + bB(t) \leq 0$ ou $aA(t) + bB(t) \geq 0$ tal que $aA(t) + bB(t) \neq 0$. 46

Caracterização do Problema

Neste trabalho nos propomos a estudar o seguinte problema, proposto inicialmente por C. Pugh (citado em [5]):

Sejam $a_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, n$ funções de classe C^1 . Considere a equação diferencial,

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{j=0}^n a_j(t)x^j = S(t, x), \quad (1.1)$$

onde $0 \leq t \leq 1$ e $n \in \mathbb{N}$.

A equação (1.1) é chamada de **Equação de Abel Generalizada**. Particularmente, a equação (1.1) é chamada de **Equação Afim** se $n = 1$, **Equação de Ricatti** se $n = 2$ e de **Equação de Abel** se $n = 3$.

Uma solução completa de (1.1) é uma função $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaça a equação (1.1).

Utilizaremos a notação $x(t, x_0)$ para designar a solução do problema de Cauchy formado pela equação (1.1) e a condição inicial $x(0) = x_0$.

Dizemos que uma solução de (1.1) é **fechada** ou **periódica** se esta for completa e $x(1, x_0) = x_0$.

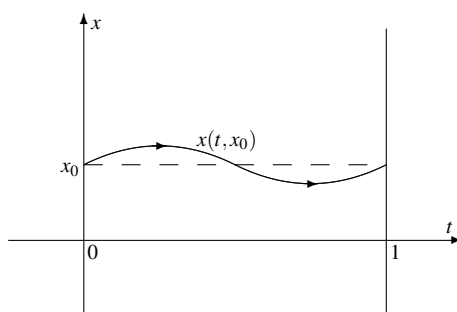


Figura 1.1: Solução Periódica.

A motivação para estudar tais soluções é que se $a_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, n$ forem funções periódicas de período 1, a equação (1.1) é equivalente ao campo de

vetores $X(t, x) = \left(1, \sum_{i=0}^n a_i(t)x^i \right)$ no cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ e as soluções fechadas de (??) são equivalentes a órbitas fechadas do campo de vetores no cilindro.

Uma solução periódica isolada no conjunto de todas as soluções periódicas de (1.1) é chamada de **ciclo limite**.

O problema consiste na seguinte pergunta: sob quais hipóteses sobre as funções $a_i, i = 0, \dots, n$, é possível encontrar um número inteiro N dependendo apenas de n , tal que a equação (1.1) possua no máximo N ciclos limite ou que todas as suas soluções sejam periódicas?

O problema acima foi motivado pela segunda parte do 16º Problema de Hilbert que consiste em:

Seja o campo de vetores,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \end{cases}, \quad (1.2)$$

onde $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ são polinômios de grau n . Existe uma cota superior para o número de ciclos limite do campo acima dependendo apenas de n ?

Em coordenadas polares temos,

$$x = r\cos(\theta) \text{ e } y = r\sin(\theta).$$

Daí o sistema (1.2) fica,

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = \cos(\theta)P(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \sin(\theta)Q(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{\cos(\theta)Q(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) - \sin(\theta)P(r\cos(\theta), r\sin(\theta))}{r} \end{cases}. \quad (1.3)$$

Suponha que $\frac{d\theta}{dt}$ dependa somente de θ isto é, $\frac{d\theta}{dt} = f(\theta)$ onde $f(\theta)$ não se anula. Assim temos,

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{1}{f(\theta)} \frac{dr}{dt} = \sum_{i=0}^n a_i(\theta)r^i, \quad (1.4)$$

onde $a_i(\theta) = \frac{1}{f(\theta)} \sum_{j=0}^i k_j \cos^j(\theta) \sin^{i-j}(\theta)$.

Uma solução de (1.2) é periódica se, e somente se sua correspondente $r(\theta, r_0)$ em (1.4) for tal que $r(2\pi, r_0) = r_0$.

Em [4], Niels Henrik Abel estudou as seguintes equações:

$$dy + (p + qy + ry^2)dx = 0 \quad (1.5)$$

e

$$(y + s)dy + (p + qy + ry^2)dx = 0, \quad (1.6)$$

onde p , q , r e s são funções na variável x .

Ele mostrou que estas equações podem ser reduzidas as equações

$$dz + (P + Qz^2)dx = 0 \quad (1.7)$$

e

$$zdz + (P + Qz)dx = 0 \quad (1.8)$$

respectivamente, onde P e Q são funções na variável x .

Para transformar (1.5) em (1.7) Abel utilizou duas mudanças de coordenadas diferentes.

A primeira consiste em fazer $y = z + r'$, desta forma temos

$$dy = dz + dr',$$

que aplicando em (1.5) nos dá

$$\begin{aligned} dz + dr' + (p + q(z + r') + r(z + r')^2)dx &= 0 \\ dz + dr' + (p + qr' + qz + rz^2 + 2rr'z + rr'^2)dx &= 0 \\ dz + \left(\frac{dr'}{dx} + p + qr' + rr'^2 \right) dx + (q + 2rr')zdx + rz^2 dx &= 0. \end{aligned}$$

A seguir, basta fazer $q + 2rr' = 0$ ou seja, $r' = -\frac{q}{2r}$.

A segunda consiste em fazer $y = zr'$, desta forma temos

$$dy = zdr' + r'dz$$

que aplicando em (1.5) nos dá

$$\begin{aligned} r'dz + (zdr' + p + q(zr') + r(zr')^2)dx &= 0 \\ r'dz + (zdr' + p + qr'z + rr'^2z^2)dx &= 0 \\ dz + \frac{p}{r'}dx + \left(\frac{1}{r'} \frac{dr'}{dx} + q \right) zdx + rr'z^2 dx &= 0. \end{aligned}$$

Para concluir, basta fazer $\frac{1}{r'} \frac{dr'}{dx} + q = 0$ ou seja, $r' = e^{-\int_{x_0}^x q dt}$.

Para transformar (1.6) em (1.8) Abel utilizou a mudança de coordenadas $y = \alpha + \beta z$, desta forma temos

$$dy = d\alpha + z d\beta + \beta dz$$

que aplicando em (1.6) nos dá

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta z + s)(d\alpha + zd\beta + \beta dz) + (p + q(\alpha + \beta z) + r(\alpha + \beta z)^2)dx = 0 \\ \left(z + \frac{\alpha + s}{\beta}\right)dz + \frac{(\alpha + s)\frac{d\alpha}{dx} + q + q\alpha + r\alpha^2}{\beta^2}dx + \\ \frac{\beta\left(\frac{d\alpha}{dx} + q + 2r\alpha\right) + (\alpha + s)\frac{d\beta}{dx}}{\beta^2}zdx + \left(\frac{1}{\beta}\frac{d\beta}{dx} + r\right)z^2dx = 0. \end{aligned}$$

Para concluir, basta fazer

$$\alpha + s = 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{\beta}\frac{d\beta}{dx} + r = 0,$$

ou seja

$$\alpha = -s \quad \text{e} \quad \beta = e^{-\int_{x_0}^x \beta dt}.$$

Observe que a equação (1.7) pode ser reescrita na forma

$$\frac{dz}{dx} = -P - Qz^2,$$

ou seja, na forma (1.1).

Já a equação (1.8) podemos reescrevê-la na forma

$$\frac{dz}{dx} = -Q - P\frac{1}{z},$$

onde, aplicando a mudança de coordenadas $w = \frac{1}{z}$, temos

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} = w^2(-Q - Pw) = -Qw^2 - Pw^3,$$

ou seja, também podemos escrever (1.8) na forma (1.1). Este é o motivo pelo qual denominamos a equação (1.1) de Equação de Abel Generalizada.

O Capítulo 2 inicia-se com uma seção dedicada a conceitos básicos, que se farão necessárias para o bom entendimento deste trabalho. A segunda seção é dedicada a vários resultados considerados preliminares e que serão ferramentas úteis na demonstração dos resultados obtidos no Capítulo 3.

Vamos ao Capítulo 3. Iniciamos este capítulo com o estudo do problema de C. Pugh para a subclasse mais trivial das equações generalizadas de Abel, o caso $n = 1$. Na segunda seção apresentamos um resultado obtido por Lins Neto em [5], o Teorema 3.1, que resolve definitivamente o problema proposto por C. Pugh para o caso em que $n = 2$ (Equação de Ricatti).

Na terceira seção, estudamos o caso $n = 3$ com base em [5], [2] e [6]. Neste caso é possível, em casos particulares, garantir que (1.1) possui no máximo três ciclos limite contando multiplicidades, sob as hipóteses dos Teoremas 3.10, 3.3 e 3.4, no máximo um ciclo limite não nulo, sob as hipóteses do Teorema 3.5 e Corolário 3.7 e no máximo quatro ciclos limite não nulos, sob as hipóteses do Teorema 3.8. Além destes resultados, as Tabelas 3.1, 3.2 e 3.3, trazem resultados sobre localização, estabilidade e existência destes ciclos limite.

Na última seção, partimos para alguns casos mais gerais do problema proposto, considerando $n \geq 3$. Com base em resultados estudados em [1], sob algumas hipóteses, é possível encontrar as cotas do problema estudado (Teoremas 3.11 e 3.12). Os resultados mais interessantes deste estudo são a Proposição 3.9 e a parte *ii*) do Teorema 3.12 que mostram que é possível construir equações de Abel generalizadas para um valor de $n \geq 4$ dado, que possuem no mínimo uma quantidade l de ciclos limite. A proposição 3.9 é uma generalização do mesmo resultado obtido por Lins Neto em [5] para $n = 3$.

Generalidades

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos e resultados utilizados no decorrer deste trabalho. Na primeira seção trazemos as definições e na segunda seção vários resultados considerados preliminares.

2.1 Definições

Definição 2.1. Sejam $\Sigma_0 = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t = 0\}$, $\Sigma_1 = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t = 1\}$ e U o subconjunto aberto de Σ_0 tal que, $(0, x_0) \in U$ se, e somente se $x(t, x_0) \cap \Sigma_1 \neq \emptyset$. Definimos a Aplicação de Poincaré associada à equação (1.1) $h : U \subset \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_1$ como segue, se $x_0 \in U$ então $h(x_0) = x(1, x_0)$.

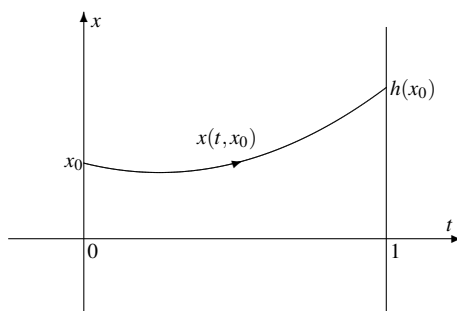


Figura 2.1: Aplicação de Poincaré.

Observe que, se $x(t, x_0)$ é uma solução periódica de (1.1), então temos $h(x_0) = x_0$.

Definição 2.2. A multiplicidade de um ciclo limite $x(t, x_0)$ é a multiplicidade algébrica de x_0 como zero da função $h(x_0) - x_0$.

Definição 2.3. Dizemos que um ciclo limite $x(t, x_0)$ de (1.1) é,

- (a) **Estável** se existe $\varepsilon > 0$ tal que, $|h(y) - x_0| < |y - x_0|$ para todo $y \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$;

(b) **Instável** se existe $\varepsilon > 0$ tal que, $|h(y) - x_0| > |y - x_0|$ para todo $y \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$;

(c) **Semi-Estável** se existe $\varepsilon > 0$ tal que, $|h(y) - x_0| > |y - x_0|$ para todo $y \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ e $|h(y) - x_0| < |y - x_0|$ para todo $y \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ ou o contrário.

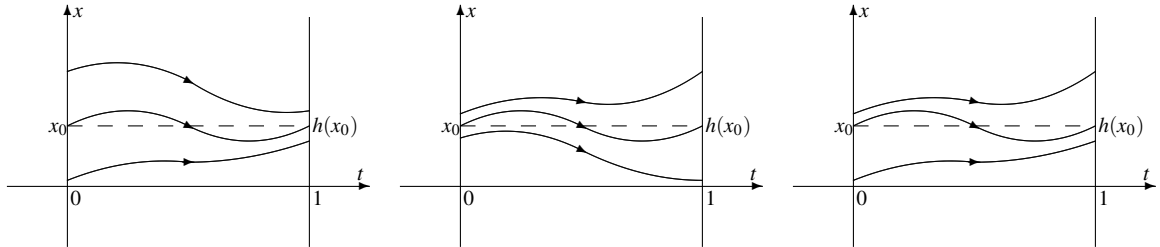


Figura 2.2: Ciclos limite estável, instável e semi-estável, respectivamente.

Definição 2.4. Um ciclo limite $x(t)$ de (1.1) é dito **Hiperbólico** se $\frac{dh}{dx_0}(x(0)) \neq 1$

Em particular, se $\frac{dh}{dx_0}(x(0)) < 1$, podemos aplicar o teorema do valor médio e concluir que $x(t)$ é estável. Por outro lado, se $\frac{dh}{dx_0}(x(0)) > 1$, então $x(t)$ é instável. Veremos na Proposição 2.14 que as condições acima são equivalentes a dizer que, se $\int_0^1 \frac{\partial S}{\partial x}(t, x(t)) dt < 0$, então $x(t)$ é estável e se $\int_0^1 \frac{\partial S}{\partial x}(t, x(t)) dt > 0$, então $x(t)$ é instável. Além disso, veremos que um ciclo limite é hiperbólico se $\int_0^1 \frac{\partial S}{\partial x}(t, x(t)) dt \neq 0$.

2.2 Resultados Preliminares

Esta seção, dedicada a resultados necessários no desenvolvimento deste trabalho, está dividida em quatro subseções: a primeira traz dois Lemas estudados em [5] que serão utilizados na demonstração do Lema 3.10; a segunda trata de algumas mudanças de coordenadas e equações equivalentes à equação generalizada de Abel; a terceira subseção trata da aplicação de Poincaré e da estabilidade de órbitas periódicas e na última subseção falamos sobre alguns resultados conhecidos para fluxos planares que serão utilizados neste estudo.

2.2.1 Construção de Funções

Nesta seção apresentamos dois lemas que serão utilizados na demonstração do Lema 3.10. Seja g uma função real, denotaremos por $j^n(g)$ o polinômio de Taylor da função g em $x = 0$ de grau n e por J^n ao conjunto de todos os polinômios em x de grau menor ou igual a n .

Lema 2.5. *Sejam g_0, g_1, \dots, g_n funções reais analíticas definidas em todo o intervalo $(-\delta, \delta)$ para algum $\delta > 0$. Suponha que $j^n(g_k) = x^k$, para $k = 0, 1, \dots, n$. Então existe uma combinação linear $g = \sum_{i=0}^n a_i g_i$ com pelo menos n raízes x_1, \dots, x_n tais que $x_l \in (0, \delta)$ e $\frac{dg}{dx}(x_l) \neq 0$ para todo $l = 1, \dots, n$.*

Prova. Iremos construir uma sequência de funções G_l , $l = 0, 1, \dots, n$, com $G_l = \sum_{i=0}^l (-1)^i \varepsilon_i g_{n-i}$ onde $\varepsilon_i > 0$, $i = 0, 1, \dots, n$, será escolhido de maneira que G_l possui no mínimo l raízes $x_{i,l}$ com $\frac{dG_l}{dx}(x_{i,l}) \neq 0$, $i = 1, \dots, l$.

Como $j^n(g_k) = x^k$, para $k = 0, 1, \dots, n$ temos que para cada g_k existe um número real $\theta_k > 0$ tal que $g_k(x) > 0$ para $0 < x \leq \theta_k$. Escolha δ_0 tal que $0 < \delta_0 < \min\{\theta_k : k = 0, 1, \dots, n\}$, logo $g_k(x) > 0$, $k = 0, 1, \dots, n$, para $0 < x \leq \delta_0$.

Escolhendo $\varepsilon_0 = 1$ temos $G_0 = g_n$ que é uma função positiva em $[0, \delta_0]$. Escolheremos $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ de maneira que $G_1(\delta_0) > 0$. Como $j^{n-1}(G_1) = -\varepsilon_1 x^{n-1}$, existe um $\delta_1 > 0$ tal que $G_1(x) < 0$ para $x \in (0, \delta_1]$ e logo G_1 possui uma raiz $x_{1,1} \in (\delta_1, \delta_0)$. Calculando $\frac{dG_1}{dx}(x_{1,1})$, temos

$$\begin{aligned} \frac{dG_1}{dx}(x_{1,1}) &= -\varepsilon_1 \frac{dg_{n-1}}{dx}(x_{1,1}) + O((x_{1,1})^{n-1}) \\ &= -\varepsilon_1(n-1)(x_{1,1})^{n-2} + O((x_{1,1})^{n-1}). \end{aligned}$$

Logo podemos escolher δ_0 tão pequeno que $\frac{dG_1}{dx}(x_{1,1}) \neq 0$.

Considere que $G_1(x)$ possui uma raiz $x_{1,1}$ tal que $\frac{dG_1}{dx}(x_{1,1}) \neq 0$ e que $G_1(\delta_1) < 0$. Podemos escolher $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ tão pequeno que $G_2(x) \approx G_1(x)$ para $x \in [\delta_1, \delta_0]$ e assim teremos uma raiz $x_{1,2} \in (\delta_1, \delta_0)$ de $G_2(x)$ tal que $\frac{dG_2}{dx}(x_{1,2}) \neq 0$. Como $j^{n-2}(G_2) = \varepsilon_2 x^{n-2}$, existe $\delta_2 > 0$ tal que $G_2(x) > 0$ para $x \in (0, \delta_2]$ e logo G_2 possui uma raiz $x_{2,2} \in (\delta_2, \delta_1)$. Calculando $\frac{dG_2}{dx}(x_{2,2})$, temos

$$\begin{aligned} \frac{dG_2}{dx}(x_{2,2}) &= \varepsilon_2 \frac{dg_{n-2}}{dx}(x_{2,2}) + O((x_{2,2})^{n-2}) \\ &= \varepsilon_2(n-2)(x_{2,2})^{n-3} + O((x_{2,2})^{n-2}). \end{aligned}$$

Logo podemos escolher δ_1 tão pequeno que $\frac{dG_2}{dx}(x_{2,2}) \neq 0$.

Considere que $G_l(x)$, $l+1 < n$, possui l raízes $x_{i,l}$ tais que $\frac{dG_l}{dx}(x_{i,l}) \neq 0$, para $i = 1, \dots, l$, e que $(-1)^l G_l(\delta_l) > 0$. Podemos escolher $\varepsilon_{l+1} < \varepsilon_l$ tão pequeno que $G_{l+1}(x) \approx G_l(x)$ para $x \in [\delta_l, \delta_0]$ e assim teremos l raízes $x_{i,l+1} \in (\delta_l, \delta_0)$ de $G_{l+1}(x)$ tais que $\frac{dG_{l+1}}{dx}(x_{i,l+1}) \neq 0$, para $i = 1, \dots, l$. Como $j^{n-(l+1)}(G_{l+1}) = (-1)^{l+1} \varepsilon_{l+1} x^{n-(l+1)}$, existe $\delta_{l+1} > 0$ tal que $(-1)^{l+1} G_{l+1}(x) > 0$ para $x \in (0, \delta_{l+1}]$ e logo G_{l+1} possui uma raiz

$x_{l+1,l+1} \in (\delta_{l+1}, \delta_l)$. Calculando $\frac{dG_{l+1}}{dx}(x_{l+1,l+1})$, temos

$$\begin{aligned} \frac{dG_{l+1}}{dx}(x_{l+1,l+1}) &= \varepsilon_{l+1} \frac{dg_{n-(l+1)}}{dx}(x_{l+1,l+1}) + O((x_{l+1,l+1})^{n-(l+1)}) \\ &= \varepsilon_{l+1}(n-(l+1))(x_{l+1,l+1})^{n-(l+2)} + O((x_{l+1,l+1})^{n-l+1}). \end{aligned}$$

Logo podemos escolher δ_l tão pequeno que $\frac{dG_{l+1}}{dx}(x_{l+1,l+1}) \neq 0$.

Considere que $G_{n-1}(x)$, possui $n-1$ raízes $x_{i,n-1}$ tais que $\frac{dG_{n-1}}{dx}(x_{i,n-1}) \neq 0$, para $i = 1, \dots, n-1$, e que $(-1)^{n-1}G_{n-1}(\delta_{n-1}) > 0$. Podemos escolher $\varepsilon_n < \varepsilon_{n-1}$ tão pequeno que $G_n(x) \approx G_{n-1}(x)$ para $x \in [\delta_{n-1}, \delta_0]$ e assim teremos $n-1$ raízes $x_{i,n} \in (\delta_{n-1}, \delta_0)$ de $G_n(x)$ tais que $\frac{dG_n}{dx}(x_{i,n}) \neq 0$, para $i = 1, \dots, n-1$. Como $j^1(G_n) = (-1)^n \varepsilon_n + (-1)^{n-1} \varepsilon_{n-1} x$, existe $\delta_n > 0$ tal que $(-1)^n G_n(x) > 0$ para $x \in (0, \delta_n]$ e logo G_n possui uma raiz $x_{n,n} \in (\delta_n, \delta_{n-1})$. Calculando $\frac{dG_n}{dx}(x_{n,n})$, temos

$$\begin{aligned} \frac{dG_n}{dx}(x_{n,n}) &= (-1)^{n-1} \varepsilon_{n-1} \frac{dg_1}{dx}(x_{n,n}) + (-1)^n \varepsilon_n \frac{dg_0}{dx}(x_{n,n}) + O(x_{n,n})^1 \\ &= (-1)^{n-1} \varepsilon_{n-1} + O(x_{n,n})^1. \end{aligned}$$

Logo podemos escolher δ_{n-1} tão pequeno que $\frac{dG_n}{dx}(x_{n,n}) \neq 0$. □

Observação 2.6. No Lema 2.5 podemos substituir a suposição $j^n(g_k) = x^k$, para $k = 0, 1, \dots, n$ por

$$j^n(g_k) = \sum_{l=0}^{n-k} c_{k,l} x^{k+l}, \quad k = 0, \dots, n, \quad c_{k,l} \in \mathbb{R}, l = 0, \dots, n-k \quad e \quad c_0 > 0.$$

Vejam alguns exemplos de funções como as estudadas no Lema 2.5.

Exemplo 2.7. O exemplo mais trivial das funções estudadas no Lema 2.5 são as funções $g_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, \dots, n$.

Exemplo 2.8. Um exemplo de funções como as da Observação 2.6 são as funções $g_k(x) = \text{sen}^k(x)$, $k = 0, 1, \dots, n$. Observe que,

$$\frac{d^i g_k}{dx^i} = \frac{k!}{(k-i)!} \text{sen}^{k-i}(x) \cos^i(x) + O((\text{sen}(x))^{k-i+2}),$$

logo as funções g_k são da forma dada na Observação 2.6.

Lema 2.9. *Seja Y uma família de funções reais analíticas definidas em $[-1, 1]$ de dimensão $n + 1$. Defina $\tau : Y \rightarrow J^n$ por $\tau(f) = j^n(H_f)$ em $x = 0$, onde*

$$H_f(x) = x^{-n}W_f(x) = \int_0^1 \frac{f(t)}{(1-xA(t))^\alpha} dt,$$

para uma função contínua $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e um número real α dado.

Se τ é sobrejetora, então existe $f \in Y$ tal que $W_f(x)$ possui n raízes x_1, \dots, x_n com $\frac{dW_f}{dx}(x_i) \neq 0$, para $i = 1, \dots, n$.

Prova. Como τ é sobrejetora existem funções $f_0, \dots, f_n \in Y$ tais que $\tau(f_k) = x^k$, para $k = 0, 1, \dots, n$. Defina $g_k(x) = H_{f_k}(x)$, pelo Lema 2.5, existe uma combinação linear $g(x) = \sum_{j=0}^n a_j g_j(x)$ que possui no mínimo n raízes $x_1, \dots, x_n \in (0, \delta)$ com $\frac{dg}{dx}(x_i) \neq 0$, para $i = 1, \dots, n$. Escolhendo $f(t) = \sum_{j=0}^n a_j f_j(t)$, teremos $H_f(x) = g(x)$ e portanto $x_1, \dots, x_n \in (0, \delta)$ serão as raízes desejadas de $W_f(x) = x^n g(x)$. \square

2.2.2 Equivalências

Nesta subseção apresentamos quatro resultados estudados por A. Gasull e J. Llibre em [2], sendo que o Lema 2.11 apresentado aqui é uma generalização do resultado estudado em [2] para $n = 3$. Os resultados estudados nesta seção serão utilizados nas demonstrações dos Teoremas 3.3 e 3.4.

Proposição 2.10. *Toda equação de Abel,*

$$\frac{dx}{dt} = a_3(t)x^3 + a_2(t)x^2 + a_1(t)x + a_0(t), \quad (2.1)$$

com uma solução periódica $x_1(t)$, pode ser escrita na forma

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x^3 + B(t)x^2 + C(t)x. \quad (2.2)$$

Prova. Aplicando a mudança de variáveis $y(t) = x(t) - x_1(t)$ em (2.1) temos,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt} \\ &= a_3(t)(x^3 - x_1^3) + a_2(t)(x^2 - x_1^2) + a_1(t)(x - x_1) \\ &= a_3(t)(x^3 - x_1^3) + a_2(t)(x + x_1)(x - x_1) + a_1(t)(x - x_1) \\ &= a_3(t)((y + x_1)^3 - x_1^3) + a_2(t)((y + x_1) + x_1)y + a_1(t)y \\ &= a_3(t)(y^3 + 3y^2x_1 + 3yx_1^2 + x_1^3 - x_1^3) + a_2(t)(y + 2x_1)y + a_1(t)y \\ &= a_3(t)y^3 + (3x_1 + a_2)y^2 + (3x_1^2 + 2a_2x_1 + a_1)y \\ &= A(t)y^3 + B(t)y^2 + C(t)y, \end{aligned}$$

onde $A(t) = a_3(t)$, $B(t) = 3x_1(t) + a_2(t)$ e $C(t) = 3(x_1(t))^2 + 2a_2(t)x_1(t) + a_1(t)$. \square

Lema 2.11. *No estudo da quantidade de ciclos limite de (1.1) podemos considerar $-a_{2j}$ no lugar de a_{2j} para todo $j = 0, \dots, [\frac{n}{2}]$, ou $-a_{2j+1}$ no lugar de a_{2j+1} para todo $j = 0, \dots, [\frac{n-1}{2}]$.*

Prova. Aplicando em (1.1) a mudança de variáveis

$$y(t) = -x(t), \quad (2.3)$$

temos,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -\frac{dx}{dt} = -\sum_{j=0}^n a_j(t)x^j \\ &= \sum_{j=0}^n (-1)^{j+1} a_j(t)(-x)^j = \sum_{j=0}^n (-1)^{j+1} a_j(t)y^j, \end{aligned} \quad (2.4)$$

logo podemos considerar $-a_{2j}$ no lugar de a_{2j} para todo $j = 0, \dots, [\frac{n}{2}]$.

Aplicando em (2.4) a mudança de variáveis

$$y(s) = y(1-t),$$

temos,

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{ds} = -\frac{dy}{dt} = -\sum_{j=0}^n (-1)^{j+1} a_j(t)y^j = \sum_{j=0}^n (-1)^j a_j(t)y^j.$$

logo podemos considerar $-a_{2j+1}$ no lugar de a_{2j+1} para todo $j = 0, \dots, [\frac{n-1}{2}]$. \square

Lema 2.12. *As soluções de (2.2) nas regiões $x > 0$ e $x < 0$ podem ser estudadas na região $y = \frac{1}{x^2} > 0$ como soluções das equações diferenciais (2.5) e (2.6), respectivamente.*

$$\frac{dy}{dt} = -2A(t) - 2B(t)y^{\frac{1}{2}}(t) - 2C(t)y(t), \quad (2.5)$$

$$\frac{dy}{dt} = -2A(t) + 2B(t)y^{\frac{1}{2}}(t) - 2C(t)y(t). \quad (2.6)$$

Prova. Basta aplicar em (2.2) a mudança de variáveis $y = \frac{1}{x^2}$ pois teremos,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{-2}{x^3} \frac{dx}{dt} \\ &= -2A(t) - 2B(t)\frac{1}{x} - 2C(t)\frac{1}{x^2}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Observe que,

$$y^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2}} = \frac{1}{|x|} = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{se } x > 0 \\ \frac{1}{-x}, & \text{se } x < 0 \end{cases},$$

o que substituindo em (2.7) conclui a demonstração. \square

Lema 2.13. *Considere em (2.2) $B(t) \geq 0$ ou $B(t) \leq 0$ tal que $B(t) \not\equiv 0$ e $x(t) = x(t, x_0)$ uma solução, então o fluxo de (2.2) intercepta a curva $\phi(t) = -x(t, x_0)$ formando com $\frac{d\phi}{dt}$ um ângulo agudo positivo ou negativo, respectivamente.*

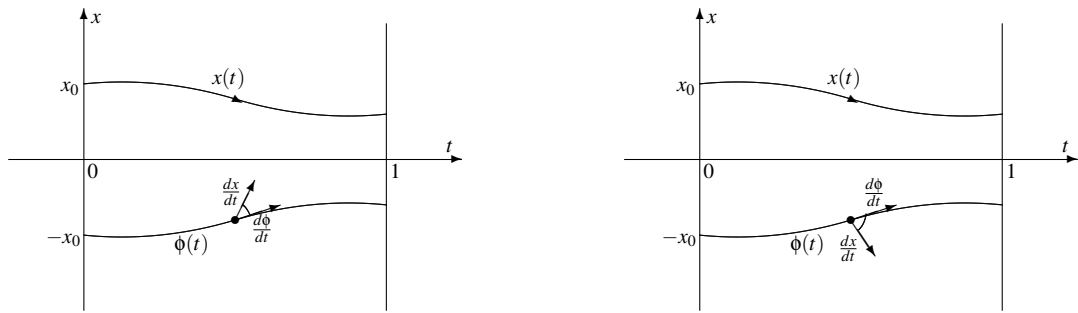


Figura 2.3: O ângulo formado entre $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{d\phi}{dt}$ nos casos em que $B(t) \geq 0$ e $B(t) \leq 0$, respectivamente.

Prova. Por (2.2) temos $\frac{dx}{dt} = A(t)(x(t))^3 + B(t)(x(t))^2 + C(t)x(t)$.

Os vetores tangentes da curva $(t, -x(t))$ são

$$(1, -A(t)(x(t))^3 - B(t)(x(t))^2 - C(t)x(t)).$$

O campo de vetores (2.2) em $(t, -x(t))$ é dado por

$$(1, -A(t)(x(t))^3 + B(t)(x(t))^2 - C(t)x(t)).$$

Como $B(t) \geq 0$ ou $B(t) \leq 0$ é tal que $B(t) \not\equiv 0$ temos

$$-A(t)(x(t))^3 - B(t)(x(t))^2 - C(t)x(t) \leq -A(t)(x(t))^3 + B(t)(x(t))^2 - C(t)x(t)$$

ou

$$-A(t)(x(t))^3 - B(t)(x(t))^2 - C(t)x(t) \geq -A(t)(x(t))^3 + B(t)(x(t))^2 - C(t)x(t),$$

respectivamente. Nas inequações acima a desigualdade estrita vale para algum $t \in [0, 1]$. Logo o Lema é válido. \square

2.2.3 Estabilidade e Aplicação de Poincaré

Nesta subseção apresentamos cinco resultados sobre a estabilidade das soluções da equação de Abel.

A proposição seguinte foi citada em [2], mas a demonstração apresentada aqui pode ser encontrada em [3].

Proposição 2.14. *Seja $h(x_0)$ a aplicação de Poincaré associada à equação,*

$$\frac{dx}{dt} = S(t, x),$$

onde $S \in C^3$ é de período 1 em relação a t e $t \in [0, 1]$. Temos,

$$\begin{aligned} i) \quad \frac{dh}{dx_0}(x_0) &= e^{\int_0^1 \frac{\partial S}{\partial x}(t, x(t, x_0)) dt}, \\ ii) \quad \frac{d^2 h}{dx_0^2}(x_0) &= \frac{dh}{dx_0}(x_0) \left[\int_0^1 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(t, x(t, x_0)) e^{\int_0^t \frac{\partial S}{\partial x}(s, x(s, x_0)) ds} dt \right]; \\ iii) \quad \frac{d^3 h}{dx_0^3}(x_0) &= \frac{dh}{dx_0}(x_0) \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\frac{d^2 h}{dx_0^2}(x_0)}{\frac{dh}{dx_0}(x_0)} \right)^2 + \int_0^1 \frac{\partial^3 S}{\partial x^3}(t, x(t, x_0)) e^{2 \int_0^t \frac{\partial S}{\partial x}(s, x(s, x_0)) ds} dt \right]. \end{aligned}$$

Prova. Pela definição 2.1, temos $h(x_0) = x(1, x_0)$, logo $\frac{dh}{dx_0}(x_0) = \frac{\partial x}{\partial x_0}(1, x_0)$, $\frac{d^2 h}{dx_0^2}(x_0) = \frac{\partial^2 x}{\partial x_0^2}(1, x_0)$ e $\frac{d^3 h}{dx_0^3}(x_0) = \frac{\partial^3 x}{\partial x_0^3}(1, x_0)$.

Como $x(t, x_0)$ é a solução do problema de Cauchy,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = S(t, x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \quad (2.8)$$

então,

$$x(t, x_0) = x_0 + \int_0^t S(s, x(s, x_0)) ds.$$

Derivando em relação a x_0 , temos

$$\frac{\partial x}{\partial x_0}(t, x_0) = 1 + \int_0^t \frac{\partial S}{\partial x}(s, x(s, x_0)) \frac{\partial x}{\partial x_0}(s, x_0) ds. \quad (2.9)$$

Fazendo $z(t) = \frac{\partial x}{\partial x_0}(t, x_0)$ em (2.9), temos

$$z(t) = 1 + \int_0^t \frac{\partial S}{\partial x}(s, x(s, x_0)) z(s) ds, \quad (2.10)$$

onde para $t = 0$ temos $z(0) = 1$. Derivando (2.10) em relação a t obtemos o problema de Cauchy,

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial S}{\partial x}(s, x(s, x_0))z(t) \\ z(0) = 1 \end{cases},$$

cujas solução é

$$z(t) = e^{\int_0^t \frac{\partial S}{\partial x}(s, x(s, x_0)) ds}.$$

Portanto, temos

$$\frac{dh}{dx_0}(x_0) = \frac{\partial x}{\partial x_0}(1, x_0) = z(1) = e^{\int_0^1 \frac{\partial S}{\partial x}(t, x(t, x_0)) dt}.$$

Derivando (2.9) em relação a x_0 , temos

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x_0^2}(t, x_0) = \int_0^t \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(s, x(s, x_0)) \left(\frac{\partial x}{\partial x_0}(s, x_0) \right)^2 + \frac{\partial S}{\partial x}(s, x(s, x_0)) \frac{\partial^2 x}{\partial x_0^2}(s, x_0) \right) ds. \quad (2.11)$$

Fazendo $w(t) = \frac{\partial^2 x}{\partial x_0^2}(t, x_0)$ em (2.11), temos

$$w(t) = \int_0^t \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(s, x(s, x_0)) (z(s))^2 + \frac{\partial S}{\partial x}(s, x(s, x_0)) w(s) \right) ds, \quad (2.12)$$

onde para $t = 0$ temos $w(0) = 0$. Derivando (2.12) em relação a t obtemos o problema de Cauchy,

$$\begin{cases} \frac{dw}{dt} = \frac{\partial S}{\partial x}(t, x(t, x_0))w(t) + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(t, x(t, x_0))(z(t))^2 \\ w(0) = 0 \end{cases},$$

cujas solução pelo método de “variação de parâmetros” é

$$w(t) = z(t) \int_0^t \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(s, x(s, x_0)) z(s) ds.$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} \frac{d^2 h}{dx_0^2}(x_0) &= \frac{\partial^2 x}{\partial x_0^2}(1, x_0) = w(1) = z(1) \int_0^1 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(s, x(s, x_0)) z(s) ds \\ &= \frac{dh}{dx_0}(x_0) \left[\int_0^1 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(t, x(t, x_0)) e^{\int_0^t \frac{\partial S}{\partial x}(s, x(s, x_0)) ds} dt \right]. \end{aligned}$$

Derivando (2.11) em relação a x_0 temos

$$\frac{\partial^3 x}{\partial x_0^3}(t, x_0) = \int_0^t \left(\frac{\partial^3 S}{\partial x^3} \left(\frac{\partial x}{\partial x_0} \right)^3 + 3 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial x_0} \frac{\partial^2 x}{\partial x_0^2} + \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial^3 x}{\partial x_0^3} \right) ds. \quad (2.13)$$

Fazendo $u(t) = \frac{\partial^3 x}{\partial x_0^3}(t, x_0)$ em (2.13), temos

$$u(t) = \int_0^t \left((z(s))^3 \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} + 3z(s)w(s) \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + u(s) \frac{\partial S}{\partial x} \right) ds, \quad (2.14)$$

onde para $t = 0$ temos $u(0) = 0$. Derivando (2.14) em relação a t obtemos o problema de Cauchy,

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{\partial S}{\partial x}(t, x(t, x_0))u(t) + \left(3 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(t, x(t, x_0))z(t)w(t) + \frac{\partial^3 S}{\partial x^3}(t, x(t, x_0))(z(t))^3 \right) \\ u(0) = 0 \end{cases},$$

cuja solução pelo método de “variação de parâmetros” é

$$u(t) = z(t) \left[3 \int_0^t \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(s, x(s, x_0))w(s)ds + \int_0^t \frac{\partial^3 S}{\partial x^3}(s, x(s, x_0))(z(s))^2 ds \right]. \quad (2.15)$$

Considerando a função $M(t) = \frac{3}{2} \left[\frac{w(t)}{z(t)} \right]^2$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= 3 \left[\int_0^t \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(s, x(s, x_0))z(s)ds \right] \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(t, x(t, x_0))z(t) \\ &= 3 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \left[z(t) \int_0^t \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(s, x(s, x_0))z(s)ds \right] \\ &= 3 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(t, x(t, x_0))w(t), \end{aligned}$$

o que substituindo em (2.15), obtemos

$$u(t) = z(t) \left[M(t) + \int_0^t \frac{\partial^3 S}{\partial x^3}(s, x(s, x_0))(z(s))^2 ds \right].$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} \frac{d^3 h}{dx_0^3}(x_0) &= \frac{\partial^3 x}{\partial x_0^3}(1, x_0) = u(1) = z(1) \left[M(1) + \int_0^1 \frac{\partial^3 S}{\partial x^3}(s, x(s, x_0))(z(s))^2 ds \right] \\ &= \frac{dh}{dx_0}(x_0) \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\frac{d^2 h}{dx_0^2}(x_0)}{\frac{dh}{dx_0}(x_0)} \right)^2 + \int_0^1 \frac{\partial^3 S}{\partial x^3}(t, x(t, x_0))e^{2 \int_0^t \frac{\partial S}{\partial x}(s, x(s, x_0))ds} dt \right], \end{aligned}$$

que conclui a demonstração desta proposição. \square

O Lema a seguir também foi estudado em [2] e será útil na demonstração de alguns resultados do Capítulo 3.

Lema 2.15. *A primeira derivada da aplicação de Poincaré associada a uma órbita*

periódica de (2.2) é dada por,

$$e^{\int_0^1 C(t)dt} \quad \text{se } x(t) \equiv 0. \quad (2.16)$$

ou

$$e^{-\int_0^1 (B(t)x(t)+2C(t))dt} = e^{\int_0^1 (A(t)(x(t))^2-C(t))dt} \quad \text{se } x(t) \not\equiv 0. \quad (2.17)$$

Prova. Aplicando o item *i*) da Proposição 2.14, temos,

$$\frac{dh}{dx_0}(x_0) = e^{\int_0^1 (3A(t)(x(t))^2+2B(t)x(t)+C(t))dt}, \quad (2.18)$$

então para $x(t) \equiv 0$ temos,

$$\frac{dh}{dx_0}(0) = e^{\int_0^1 C(t)dt}.$$

Para $x(t) \not\equiv 0$ podemos reescrever (2.2) como segue,

$$\frac{dx}{x(t)} = A(t)(x(t))^2 + B(t)x(t) + C(t),$$

que integrando no intervalo $[0, 1]$ temos,

$$\ln(x(t)) \Big|_0^1 = \int_0^1 (A(t)(x(t))^2 + B(t)x(t) + C(t))dt,$$

logo,

$$\int_0^1 (A(t)(x(t))^2 + B(t)x(t) + C(t))dt = 0. \quad (2.19)$$

Multiplicando (2.19) por -2 e adicionando a $\int_0^1 (3A(t)(x(t))^2 + 2B(t)x(t) + C(t))dt$ temos,

$$\int_0^1 (3A(t)(x(t))^2 + 2B(t)x(t) + C(t))dt = \int_0^1 (A(t)(x(t))^2 - C(t))dt.$$

Multiplicando (2.19) por -3 e adicionando a $\int_0^1 (3A(t)(x(t))^2 + 2B(t)x(t) + C(t))dt$ temos,

$$\int_0^1 (3A(t)(x(t))^2 + 2B(t)x(t) + C(t))dt = -\int_0^1 (B(t)x(t) + 2C(t))dt.$$

Daí,

$$\frac{dh}{dx_0}(x_0) = e^{-\int_0^1 (B(t)x(t)+2C(t))dt} = e^{\int_0^1 (A(t)(x(t))^2-C(t))dt}.$$

Concluimos a demonstração. \square

a próxima proposição foi estudada em [6] e será utilizada na demonstração do Teorema 3.5.

Proposição 2.16. *Considere em $[0, 1] \times \mathbb{R}$ a equação diferencial*

$$\frac{dx}{dt} = f(t)P(x), \quad (2.20)$$

com $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ e $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^1 . Suponha que a equação $P(x) = 0$ tenha n soluções, x_1, \dots, x_n , logo $x_i(t) = x_i$, $i = 1, \dots, n$ são soluções periódicas de (2.20). Se $\int_0^1 f(t)dt = 0$, então todas as soluções de (2.20) são periódicas, caso contrário, os únicos ciclos limite são $x_i(t)$, para $i = 1, \dots, n$ e além disso se x_i tem multiplicidade 1 então $x_i(t)$ é hiperbólico e sua estabilidade é determinada pelo sinal de $\frac{dP}{dx}(x_i) \int_0^1 f(t)dt$.

Prova. Uma solução $x = x(t)$ de (2.20) com condição inicial $x(0) \neq x_i$ para $i = 1, \dots, n$ satisfaz a equação

$$\varphi(x(t)) := \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{du}{P(u)} = \int_0^t f(s)ds. \quad (2.21)$$

Como $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{P(x)}$, temos que $\frac{d\varphi}{dx} \neq 0$ se $x \neq x_i$. Isto implica que $\varphi(x)$ é injetora.

Se $\int_0^1 f(t)dt = 0$, por (2.21) temos $\varphi(x(0)) = 0 = \varphi(x(1))$ e como $\varphi(x)$ é injetora só podemos ter $x(0) = x(1)$, logo toda solução de (2.20) é periódica.

Se $\int_0^1 f(t)dt \neq 0$, então teremos $\varphi(x(0)) = 0 \neq \int_0^1 f(t)dt = \varphi(x(1))$ e daí só podemos ter $x(0) \neq x(1)$, logo $x(t)$ não é periódica o que implica que as soluções $x_i(t)$ são os únicos ciclos limite de (2.20). Além disso, pela Proposição 2.14 temos,

$$\frac{dh}{dx_0}(x_i) = e^{\int_0^1 \frac{\partial(f(t)P(x))}{\partial x}(x_i)dt} = e^{\frac{dP}{dx}(x_i) \int_0^1 f(t)dt}.$$

Seja x_i uma raiz de $P(x)$ de multiplicidade igual a um, então $\frac{dP}{dx}(x_i) \neq 0$ e $\frac{dP}{dx}(x_i) \int_0^1 f(t)dt \neq 0$ o que implica que $\frac{dh}{dx_0}(x_i) \neq 1$, portanto $x_i(t)$ é hiperbólico. \square

A seguir apresentamos dois lemas estudados em [1] que serão úteis na demonstração do Teorema 3.11.

Lema 2.17. *Considere as funções $\Phi, \Psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definidas como*

$$\Phi(x_0) := (n - m) \int_0^1 a_n(t)(x(t, x_0))^{n-1}(t)dt + (1 - m) \int_0^1 a_1(t)dt \quad (2.22)$$

e

$$\Psi(x_0) := (m - n) \int_0^1 a_m(t)(x(t, x_0))^{m-1}(t)dt + (1 - n) \int_0^1 a_1(t)dt, \quad (2.23)$$

onde $x(t, x_0) = x(t)$ é solução de uma equação generalizada de Abel na forma

$$\frac{dx}{dt} = a_n(t)x^n + a_m(t)x^m + a_1(t)x, \quad (2.24)$$

tal que $x(0) = x_0$. Seja $h(x_0)$ a aplicação de Poincaré associada à equação (2.24). Se $x(t)$ for uma solução periódica, então temos,

$$\frac{dh}{dx_0}(x_0) = \begin{cases} e^{\Phi(x_0)} = e^{\Psi(x_0)}, & \text{se } x_0 \neq 0, \\ e^{\int_0^1 a_1(t)dt}, & \text{se } x_0 = 0. \end{cases} \quad (2.25)$$

Prova. Pela Proposição (2.14) temos que

$$\frac{dh}{dx_0}(x_0) = e^{\int_0^1 na_n(t)x^{n-1}dt + \int_0^1 ma_m(t)x^{m-1}dt + \int_0^1 a_1(t)dt}. \quad (2.26)$$

Se $x_0 = 0$ temos $x(t) \equiv 0$ então

$$\frac{dh}{dx_0}(0) = e^{\int_0^1 a_1(t)dt}.$$

Usando as equações (2.22) e (2.23) podemos reescrever (2.26) na forma

$$\frac{dh}{dx_0}(x_0) = e^{\Phi(x_0) + mZ(x_0)} = e^{\Psi(x_0) + nZ(x_0)}, \quad (2.27)$$

onde

$$Z(x_0) := \int_0^1 a_n(t)x^{n-1}dt + \int_0^1 a_m(t)x^{m-1}dt + \int_0^1 a_1(t)dt.$$

Se $x_0 \neq 0$ temos $x(t) \neq 0$ daí

$$\frac{1}{x(t)} \frac{dx}{dt} = a_n(t)x^{n-1} + a_m(t)x^{m-1} + a_1(t),$$

que integrando no intervalo $[0, 1]$ temos

$$\ln(x(1)) - \ln(x(0)) = \int_0^1 a_n(t)x^{n-1}dt + \int_0^1 a_m(t)x^{m-1}dt + \int_0^1 a_1(t)dt = Z(x_0),$$

e como $x(t)$ é periódica temos que $Z(x_0) = 0$ o que substituindo em (2.27) conclui a demonstração. \square

O Lema a seguir foi estudado em [1] apenas para $k = 0$. O que apresentamos aqui é uma generalização deste resultado.

Lema 2.18. *Considere a família a um parâmetro de equações diferenciais*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + \varepsilon x^{2k+1}, \quad (2.28)$$

onde f é periódica de período 1 na variável t , k é um número inteiro não negativo e $f(t, 0) \equiv 0$. Suponha que para $\varepsilon = 0$ a equação (2.28) possui um ciclo limite não nulo semi-estável $x(t)$ tal que $x(0) = x_0^*$. Então, para $|\varepsilon|$ suficientemente pequeno e com o

sinal apropriado, a equação (2.28) possui no mínimo dois ciclos limite numa pequena vizinhança de $x(t)$.

Prova. Defina $D_\varepsilon(x_0) = h_\varepsilon(x_0) - x_0$ onde $h_\varepsilon(x_0)$ é a aplicação de Poincaré associada à equação (2.28).

Vamos dividir esta demonstração em dois casos,

CASO 1. $x_0^* > 0$,

- (1) Suponha que $x(t)$ é estável na região $\{(t, x) \in \mathcal{S} : x < x(t)\}$ e instável na região $\{(t, x) \in \mathcal{S} : x > x(t)\}$. Isto implica que $D_0(x_0) > 0$ em uma vizinhança de x_0^* . Tome então dois números $x_1 < x_0^* < x_2$ tais que $D_0(x_1) > 0$ e $D_0(x_2) > 0$. Pela continuidade das soluções de (2.28) em relação ao parâmetro ε temos que existe um $\delta > 0$ tal que para $0 < |\varepsilon| < \delta$ temos $D_\varepsilon(x_1) > 0$ e $D_\varepsilon(x_2) > 0$. Para $\varepsilon < 0$, pelo fluxo de (2.28) teremos $D_\varepsilon(x_0^*) < 0$, pois $x(t) > 0$ o que implica em $\varepsilon(x(t))^{2k+1} < 0$, pelo teorema de Bolzano a função D_ε possui duas raízes x_ε^+ e x_ε^- tais que $x_1 < x_\varepsilon^- < x_0^* < x_\varepsilon^+ < x_2$. Ou seja, as soluções de (2.28) $x_\varepsilon^-(t)$ e $x_\varepsilon^+(t)$ tais que $x_\varepsilon^-(0) = x_\varepsilon^-$ e $x_\varepsilon^+(0) = x_\varepsilon^+$, são periódicas;

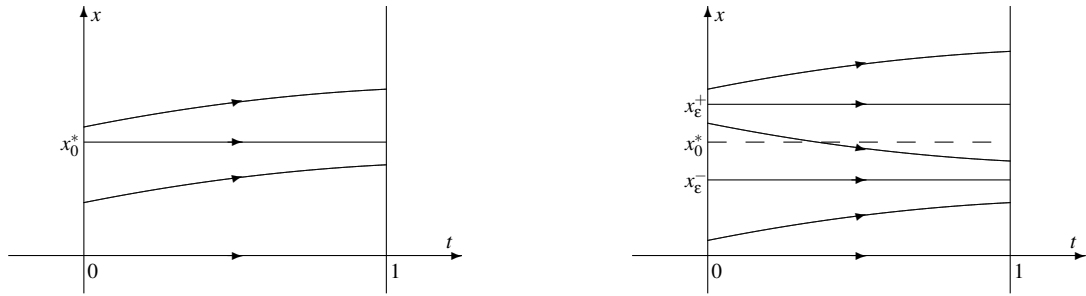


Figura 2.4: Retratos de fase de (2.28) na vizinhança de x_0^* para $\varepsilon = 0$ e $\varepsilon \neq 0$ respectivamente.

- (2) Suponha que $x(t)$ é instável na região $\{(t, x) \in \mathcal{S} : x < x(t)\}$ e estável na região $\{(t, x) \in \mathcal{S} : x > x(t)\}$. Isto implica que $D_0(x_0) < 0$ em uma vizinhança de x_0^* . Tome então dois números $x_1 < x_0^* < x_2$ tais que $D_0(x_1) < 0$ e $D_0(x_2) < 0$. Pela continuidade das soluções de (2.28) em relação ao parâmetro ε temos que existe um $\delta > 0$ tal que para $0 < |\varepsilon| < \delta$ temos $D_\varepsilon(x_1) < 0$ e $D_\varepsilon(x_2) < 0$. Para $\varepsilon > 0$, pelo fluxo de (2.28) teremos $D_\varepsilon(x_0^*) > 0$, pois $x(t) > 0$ o que implica em $\varepsilon(x(t))^{2k+1} > 0$, pelo teorema de Bolzano a função D_ε possui duas raízes x_ε^+ e x_ε^- tais que $x_1 < x_\varepsilon^- < x_0^* < x_\varepsilon^+ < x_2$. Ou seja, as soluções de (2.28) $x_\varepsilon^-(t)$ e $x_\varepsilon^+(t)$ tais que $x_\varepsilon^-(0) = x_\varepsilon^-$ e $x_\varepsilon^+(0) = x_\varepsilon^+$, são periódicas.

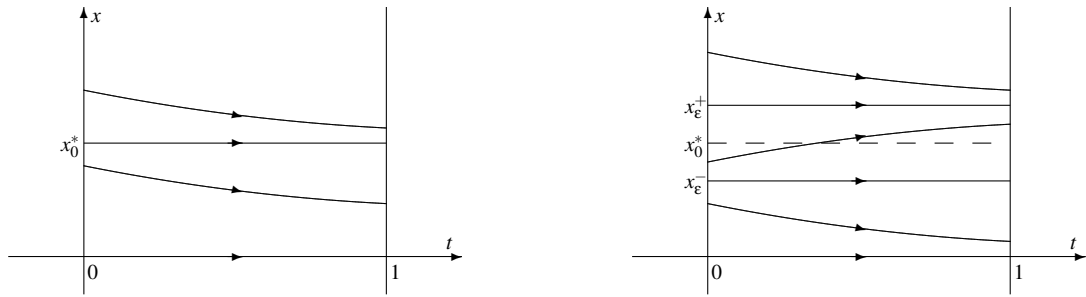


Figura 2.5: Retratos de fase de (2.28) na vizinhança de x_0^* para $\varepsilon = 0$ e $\varepsilon \neq 0$ respectivamente.

CASO 2. $x_0^* < 0$,

A demonstração deste caso é semelhante à do caso anterior. Basta aplicar a mudança de variáveis $y(t) = -x(t)$. \square

2.2.4 Alguns Resultados Sobre Fluxos Planares

Os resultados apresentados nesta subseção foram estudados em [6] e serão utilizados na demonstração do Teorema 3.5.

Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases}, \quad (2.29)$$

de classe $N \geq 1$, e seja L um arco da órbita associada a solução $(x, y) = (\varphi(t), \psi(t))$ para $t \in [0, \tau]$. Para algum $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno considere $\Sigma_t = \{(\alpha(t, n), \beta(t, n)) : |n| < \varepsilon\}$ uma parametrização local para um conjunto de seções transversais a L em cada ponto $(\varphi(t), \psi(t))$ para $t \in [0, \tau]$ onde $(\alpha(t, 0), \beta(t, 0)) = (\varphi(t), \psi(t))$ e $\Delta(0, 0)\Delta(\tau, 0) > 0$ para

$$\Delta(t, n) = \begin{vmatrix} \frac{d\varphi}{dt} & \frac{d\psi}{dt} \\ \frac{\partial\alpha}{\partial n}(t, n) & \frac{\partial\beta}{\partial n}(t, n) \end{vmatrix}. \quad (2.30)$$

O fluxo de (2.29) define uma aplicação de Poincaré entre Σ_0 e Σ_τ que relaciona, pelo fluxo, um ponto de Σ_0 a um ponto de Σ_τ (quando possível).

Proposição 2.19. *Seja H a aplicação de Poincaré descrita acima, então a derivada de H em $p = (\alpha(0, 0), \beta(0, 0)) = (\varphi(0), \psi(0))$ é dada por,*

$$H'(p) = \frac{\Delta(0, 0)}{\Delta(\tau, 0)} \exp \left(\int_0^\tau \operatorname{div}(P(\varphi(t), \psi(t)), Q(\varphi(t), \psi(t))) dt \right).$$

Em [7], [8] e [3], encontramos subsídios para demonstrar este resultado. Utilizaremos esta proposição para demonstrar o seguinte resultado.

Corolário 2.20. *Considerando a equação (2.2) na forma do sistema diferencial*

$$X(t, x) = (\dot{t}, \dot{x}) = (1, A(t)(x(t))^3 + B(t)(x(t))^2 + C(t)x(t)), \quad (2.31)$$

Seja $(t, \gamma(t))$ uma solução de (2.31) definida em $[0, 1]$. Então, para alguma função $g(t, x) \in C^1$ tal que $g(t, x) \neq 0$ para $(t, x) \in \mathcal{S}$ a derivada da aplicação de Poincaré entre Σ_0 e Σ_1 onde $\Sigma_t = \{(t, \gamma(t) + n) : n \in \mathbb{R}\}$ no ponto $(0, \gamma(0))$ é dado por

$$H'(0, \gamma(0)) = \frac{|g(0, \gamma(0))|}{|g(1, \gamma(1))|} \exp \left(\int_0^{\tau_g} \operatorname{div}(|g(t(s), \gamma(t(s)))|(X(t(s), \gamma(t(s)))) ds) \right)$$

sendo τ_g um número real positivo e $t(s)$ uma função crescente dependente de g .

Prova. Como $g(t, x)$ não se anula em $[0, 1] \times \mathbb{R}$ o sistema (2.31) é equivalente a

$$\bar{X}(t, x) = |g(t, x)|X(t, x) = |g(t, x)| (1, A(t)(x(t))^3 + B(t)(x(t))^2 + C(t)x(t)), \quad (2.32)$$

Como $(t, \gamma(t))$ é uma solução de (2.31) então existe uma função $t(s)$ e um número real positivo τ_g tal que $(t(s), \gamma(t(s)))$ seja uma solução de (2.32) no intervalo $[0, \tau_g]$ de forma que teremos $t(0) = 0$ e $t(\tau_g) = 1$. Aplicando a Proposição 2.19 para calcular a derivada da aplicação de Poincaré entre as seções transversais Σ_0 e Σ_1 onde $\Sigma_{t(s)} = (\alpha(s, n), \beta(s, n)) = (t(s), \gamma(t(s)) + n)$ no ponto $(0, \gamma(0))$ temos

$$H'(0, \gamma(0)) = \frac{|\Delta(t(0), 0)|}{|\Delta(t(\tau_g), 0)|} \exp \left(\int_0^{\tau_g} \operatorname{div}(\bar{X}(t(s), \gamma(t(s)))) ds \right) \quad (2.33)$$

De (2.30) temos,

$$\Delta(t, n) = \begin{vmatrix} |g(t, x)| & (A(t)(x(t))^3 + B(t)(x(t))^2 + C(t)x(t)) \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

daí

$$\Delta(t(0), 0) = \Delta(0, 0) = |g(0, \gamma(0))|$$

e

$$\Delta(t(\tau_g), 0) = \Delta(1, 0) = |g(1, \gamma(1))|,$$

substituindo os dados acima e (2.32) em (2.33) concluímos a demonstração. \square

Corolário 2.21. *Considere a equação diferencial (2.2) na forma do sistema diferencial (2.31) e seja $g(t, x) \in C^1$ uma função de período 1 em t que não se anula em $[0, 1] \times \mathbb{R}$. Seja K uma região conexa de $[0, 1] \times \mathbb{R}$ difeomorfa ao cilindro, suponha que $\operatorname{div}(|g(t, x)|X(t, x))$ não muda de sinal em K e se anula apenas em um conjunto de medida nula não invariante pelo fluxo de (2.31). Então (2.2) possui no máximo um cilo limite completamente contido em K e quando este existe é hiperbólico.*

Prova. Seja $x(t)$ um ciclo limite de (2.2) completamente contido em K . Então a curva $(t(s), x(t(s)))$ é uma solução de (2.32), definida em $[0, \tau_g]$. Usando o Corolário 2.20 e a periodicidade de $g(t, x)$ (pois, $|g(0, x(0))| = |g(1, x(1))|$) temos

$$H'(0, x(0)) = \exp \left(\int_0^{\tau_g} \operatorname{div}(|g(t(s), \gamma(t(s)))|(X(t(s), \gamma(t(s)))) ds \right) \neq 1. \quad (2.34)$$

Pela Definição 2.1 é possível observar que a aplicação $h(x)$ relacionada com (2.2) se comporta como a aplicação $H(t, x)$ relacionada com (2.31). Logo podemos estudar a estabilidade de (2.2) através de (2.34). Suponha que (2.2) possua em K mais de um ciclo limite. Como $\operatorname{div}(|g(t, x)|X(t, x))$ não muda de sinal em $[0, 1] \times \mathbb{R}$ e se anula apenas em um conjunto de medida nula que não é invariante pelo fluxo de (2.31), concluímos que todos eles têm a mesma estabilidade o que não é possível. Logo existe no máximo um ciclo limite completamente contido em K . \square

Teorema 2.22. *Considere a equação de Abel (2.2) na forma do sistema diferencial (2.31). Suponha que existe um número real w e uma função real $f(t, x) \in C^1$ de período 1 em t , que se anula apenas em um subconjunto de medida nula de $[0, 1] \times \mathbb{R}$ tais que a função,*

$$M_w(t, x) = \langle \nabla f(t, x), X(t, x) \rangle + wf(t, x)\operatorname{div}(X(t, x)),$$

não muda de sinal em $[0, 1] \times \mathbb{R}$ e se anula apenas em um conjunto N de medida nula tal que o conjunto $N \setminus Q$ não é invariante pelo fluxo de (2.31), sendo Q o conjunto de pontos $(t, x) \in S$ tais que $f(t, x) = 0$. Sejam Ω_i , $i \in I$, onde I é um conjunto de índices, subconjuntos conexos de Q tais que os conjuntos $\Omega_i \cap \Sigma_0$ e $\Omega_i \cap \Sigma_1$ são unitários e para $i \neq j$ se tenha $(\Omega_i \cap \Omega_j) \cap \{(0, 1) \times \mathbb{R}\} = \emptyset$. Seja o conjunto $\tilde{Q} = \{\Omega_i : i \in I\}$, suponha que o conjunto \tilde{Q} tenha $K_1 \in \mathbb{N}$ elementos e que $K_2 \leq K_1$ destes elementos sejam invariantes pelo fluxo de (2.31).

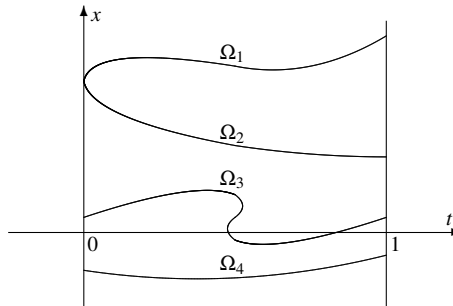


Figura 2.6: O conjunto \tilde{Q} .

Então a equação (2.2) possui no máximo $K_1 + K_2 + 1$ ciclos limite e cada ciclo limite ou é um elemento de \tilde{Q} ou não intercepta nenhum elemento de \tilde{Q} . Além disso os ciclos

limite de (2.2) não pertencentes a \tilde{Q} são hiperbólicos e sua estabilidade é dada pelo sinal constante da função $wf(t, x)M_w(t, x)$ ao longo de sua trajetória.

Prova. Seja $\Omega_i(s) = (t(s), \omega_i(s))$ uma parametrização de cada $\Omega_i \in \tilde{Q}$. Observe que a função $M_w(\Omega_i(s)) = \langle \nabla f(t(s), \omega_i(s)), X(t(s), \omega(s)) \rangle$ não muda de sinal, o que significa que o fluxo de $X(t, x)$ atravessa a curva $\Omega_i(s)$ em um único sentido. Como $f(t, x)$ é periódica em t então cada curva $\Omega_i(s)$ também é periódica, o que implica que ou $\Omega_i(t)$ é um ciclo limite de (2.2) ou não intercepta nenhum dos ciclos limite de (2.2).

Podemos dividir $S \setminus \tilde{Q}$ em $K_1 + 1$ regiões conexas difeomorfas ao cilindro onde a função $g(t, x) = |f(t, x)|^{\frac{1}{w}}$ é sempre positiva, aplicando o Corolário 2.21 em cada uma destas regiões concluímos que existem no máximo $K_1 + 1$ ciclos limite em $S \setminus \tilde{Q}$ todos hiperbólicos e a estabilidade de cada um é dada pelo sinal de

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(|g(t, x)|X(t, x)) &= \operatorname{div}(|f(t, x)|^{\frac{1}{w}}X(t, x)) \\
&= \operatorname{div}(|f(t, x)|^{\frac{1}{w}}, |f(t, x)|^{\frac{1}{w}}(A(t)(x(t))^3 + B(t)(x(t))^2 + C(t)x(t))) \\
&= \frac{\partial(|f(t, x)|^{\frac{1}{w}})}{\partial t} + \frac{\partial(|f(t, x)|^{\frac{1}{w}}(A(t)(x(t))^3 + B(t)(x(t))^2 + C(t)x(t)))}{\partial x} \\
&= \frac{1}{w}|f|^{\frac{1}{w}-1}\sigma(f)\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{w}|f|^{\frac{1}{w}-1}\sigma(f)\frac{\partial f}{\partial x}(Ax^3 + Bx^2 + Cx) \\
&\quad + |f|^{\frac{1}{w}}(3Ax^2 + 2Bx + C) \\
&= \sigma(f)\frac{1}{w}|f|^{\frac{1}{w}-1}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}(Ax^3 + Bx^2 + Cx)\right) \\
&\quad + w\frac{1}{w}|f|^{\frac{1}{w}-1}\sigma(f)f(t, x)\operatorname{div}(X(t, x)) \\
&= \sigma(f)\frac{1}{w}|f|^{\frac{1}{w}-1}(\langle \nabla f(t, x), X(t, x) \rangle + wf(t, x)\operatorname{div}(X(t, x))) \\
&= \sigma(f(t, x))\frac{1}{w}|f(t, x)|^{\frac{1}{w}-1}M_w(t, x)
\end{aligned}$$

onde $\sigma f(t, x)$ é o sinal de Como \tilde{Q} possui K_2 elementos invariantes pelo fluxo de (2.2) o número máximo de ciclos limite de (2.2) é $K_1 + K_2 + 1$. \square

Referências Bibliográficas

- [1] GASULL, A; GUILLAMON, A. **Limit cycles for generalized Abel equations**. International Journal of Bifurcation and Chaos, 16(12):3737–3745, 2006.
- [2] GASULL, A; LLIBRE, J. **Limit cycles for a class of Abel equations**. Siam J. Math. Anal, 21(5):1235–1244, 1990.
- [3] HALE, J. K; KOÇAK, H. **Dynamics and Bifurcations**. Springer-Verlag, 1991.
- [4] HOLBOE, B. **Oeuvres Complètes de N. H. Abel**. Chez Chr Gröndahl, Imprimeur-Libraire, (Volume 2): 229-245, 1839. Disponível on-line: <http://books.google.com.br/books?id=yS4VAAAAQAAJ&dq=Oeuvres%20compl%C3%A8tes%20Niels%20Henrik%20Abel&lr=&pg=RA1-PA229#v=onepage&q=&f=false>, Acesso em: 24/09/2009.
- [5] LINS N., A. **On the number of solutions of the equation $\frac{dx}{dt} = \sum_{j=0}^n a_j(t)x^j, 0 \leq t \leq 1$, for which $x(0) = x(1)$** . Inventiones Mathematicae, (59):67–76, 1980.
- [6] ÁLVAREZ, M. J; GASULL, A; GIACOMINI, H. **A new uniqueness criterion for the number of periodic orbits of Abel equations**. Journal of Differential Equations, (234):161–176, 2007.
- [7] PERKO, L. **Differential Equations and Dynamical Systems**. Springer-Verlag, 1991.
- [8] SOTOMAYOR, J. **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias**. Projeto Euclides, IMPA, 1979.

Índice Remissivo

Abel

equação de, [12](#), [38](#)

equação Generalizada de, [12](#)

N. H., [13](#)

Aplicação de Poincaré, [17](#)

derivada da, [24](#)

C. Pugh

Problema de, [12](#)

Ciclo Limite, [13](#)

estável, [17](#)

hiperbólico, [18](#), [46](#)

instável, [18](#)

multiplicidade de um, [17](#)

semi-estável, [18](#)

Equação

de Abel, [12](#), [21](#), [38](#)

de Abel Generalizada, [12](#)

de Ricatti, [12](#), [36](#)

Equação Afim, [12](#), [35](#)

Hilbert

16^o problema, [13](#)

Ricatti, equação de, [12](#), [36](#)

Solução Periódica, [12](#)