

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

FANG CHOU LEE

**Par de Curvas no Plano: Geometria da
Bicicleta.**

Goiânia
2011

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Dissertação** **Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):	Fang Chou Lee		
E-mail:	fangchoulee@hotmail.com		
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? <input checked="" type="checkbox"/> Sim <input type="checkbox"/> Não			
Vínculo empregatício do autor			
Agência de fomento:	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior	Sigla:	CAPES
País:	Brasil	UF:	GO
		CNPJ:	00889834/0001-08
Título:	Par de Curvas no Plano: Geometria da bicicleta		
Palavras-chave:	Equações diferenciais ordinárias; Geometria Diferencial		
Título em outra língua:	Pair of Curves in the plane: Bicycle's Geometry		
Palavras-chave em outra língua:	Ordinary Differential Equations; Differential Geometry		
Área de concentração:	Geometria e Topologia		
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	25/03/2011		
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado em Matemática		
Orientador (a):	Ronaldo Alves Garcia		
E-mail:	ragarcia@mat.ufg.br		
Co-orientador (a):*			
E-mail:			

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Liberação para disponibilização?¹ total parcial


Em caso de disponibilização parcial, assinale as permissões:

Capítulos. Especifique: _____

Outras restrições: _____

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O Sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.



 Assinatura do (a) autor (a)

Data: 11 / 05 / 2011

¹ Em caso de restrição, esta poderá ser mantida por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Todo resumo e metadados ficarão sempre disponibilizados

FANG CHOU LEE

Par de Curvas no Plano: Geometria da Bicicleta.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria e Topologia.

Orientador: Prof. Ronaldo Alves Garcia

Goiânia
2011

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)
GPT/BC/UFG**

L477p Lee, Fang Chou.
Par de curvas no plano [manuscrito]: Geometria da
Bicicleta / Fang Chou Lee. - 2011.
xv, 85 f. : il., figs.

Orientador: Prof. Dr. Ronaldo Alves Garcia.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás,
Instituto de Matemática e Estatística, 2011.

Bibliografia.
Inclui lista de figuras.

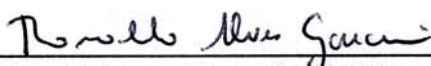
1.Cúspides de Whitney 2. Curvas da Bicicleta I. Título.

CDU: 512.772:629.3

FANG CHOU LEE

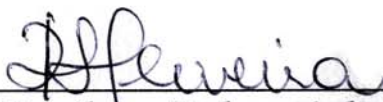
PAR DE CURVAS NO PLANO: GEOMETRIA DA BICICLETA

Dissertação defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada no dia 25 de março de 2011, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



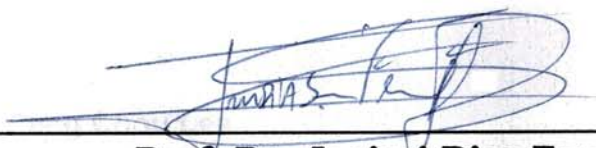
Prof. Dr. Ronaldo Alves Garcia

Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca



Profa. Dra. Regilene Delazari dos Santos Oliveira

Universidade de São Paulo-São Carlos



Prof. Dr. Jocirei Dias Ferreira

Universidade Federal de Mato Grosso-Barra do Garças

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Fang Chou Lee

Graduou-se em Matemática na UFG - Universidade Federal de Goiás.

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Fang Chou Lee

Graduou-se em Matemática na UFG - Universidade Federal de Goiás.

Dedico este trabalho a Deus, as divindades universais, a minha crença, aos meus pais e a minha família.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por estar no Brasil e a minha família por tudo que tem feito por mim até hoje. Sem eles, dificilmente este trabalho seria concretizado. Agradeço ao Professor Dr. Ronaldo Alves Garcia, meu orientador, que sempre acreditou em mim, mesmo quando eu não acreditava e por ter me dado bons e sábios conselhos. Agradeço a todos os professores do IME, pois com a ajuda deles também, consegui chegar até aqui. Agradeço aos meus amigos, cujos nomes não colocarei aqui para não cometer injustiças, mas eles sabem quem são, por me perdoarem por não ter saído com eles, pois tinha que estudar e por me arrastarem de vez em quando, mesmo quando eu tinha que estudar. Por fim, agradeço a mim mesmo, por não ter desistido no meio do caminho, apesar das dificuldades e por ter me tornado um ser humano melhor.

“Não só de pão vive o homem, mas de toda palavra que sai da boca de Deus”

Jesus Cristo,

.

Resumo

Lee, Fang Chou. **Par de Curvas no Plano: Geometria da Bicicleta..** Goiânia, 2011. 85p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

O principal objetivo deste trabalho é estudar as curvas geradas pelas rodas traseira e dianteira de uma bicicleta do ponto de vista da Geometria diferencial.

Palavras-chave

Par de curvas no plano; Curvatura; Singularidades; Bicicleta

Abstract

Lee, Fang Chou. **Pair of curves in the plane: Geometry of the bicycle.** Goiânia, 2011. 85p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

The main objective is to study the curves generated by the front and rear wheels of a bicycle from the standpoint of differential geometry.

Keywords

Pair of curves in the plan; curvature; singularities; bicycle

Sumário

Lista de Figuras	10
1 Par de curvas no plano	13
1.1 Par de curvas relacionadas	13
1.2 Relação entre as curvaturas das Rodas Dianteira e Traseira	15
1.3 A construção das curvas de bicicleta com a razão rotacional $\rho = \frac{1}{2}$	29
1.4 Restrições sobre a quantidade de vértices e a razão rotacional	33
1.5 Deformação infinitesimal do círculo	37
1.6 Deformação infinitesimal das curvas de bicicleta com razão rotacional $1/2$	42
1.7 A construção das curvas com cúspides	43
1.8 Alguns exemplos interessantes	44
2 Bicicleta Poligonal	49
2.1 Bicicleta Poligonal	49
2.2 Deformação infinitesimal dos polígonos regulares	53
3 Monodromia entre par de curvas	62
3.1 Monodromia no Círculo	62
3.2 Oscilação do monociclo	73
4 Curvas de bicicleta em \mathbb{S}^2	78
4.1 Par de curvas na esfera \mathbb{S}^2	78
Referências Bibliográficas	85

Lista de Figuras

1.1	As trajetórias das rodas traseira e dianteira	14
1.2	Um par de curvas ambíguas	14
1.4	Singularidade não-Whitney	22
1.5	A curva γ possui 4 singularidades de Whitney e a curva Γ é suave.	23
1.6	A curva $\gamma = (t^2, t^5)$	24
1.7	A curva Γ possui singularidade	24
1.10	o arco $X1Y1$ é igual ao arco $X2Y2$	28
1.11	x_1 e x_2 tem a mesma velocidade.	30
1.14	O valor de K com $L = 1$	33
1.15	O valor de K com $L = 10$	33
1.18	γ_1 e γ_2 possuem no mínimo 3 e 4 vértices respectivamente.	35
1.23	Evoluta da elipse	45
1.25	Uma curva fechada com 3 singularidades	46
1.26	As curvas dianteira e traseira com cúspides	47
1.29	cicloide como a curva da roda traseira e a curva da sua roda dianteira.	48
2.1	$(5, 2) - gonal$, $(6, 3) - gonal$ e $(7, 3) - gonal$	49
2.6	$(6, 3)gonal$ e $(8, 3)gonal$	53
4.3	A curva γ que tem 4 singularidades	84
4.4	A curva γ possui singularidade do tipo cúspide de Whitney	84

Introdução

No primeiro capítulo estudamos a relação entre a curva da roda dianteira, denotada por Γ , e a curva da roda traseira, denotada por γ , de uma bicicleta, considerando também o ângulo α entre (Γ, γ) . Definimos a singularidade de Whitney e demonstramos que mesmo que a curva γ possua tal singularidade a curva Γ é suave. Consideremos a curva Γ fechada, convexa e suave, satisfazendo as seguintes propriedades: num par de pontos (x, y) , pode percorrer Γ tal que a distância entre x e y ao longo da curva no plano não mude. Tais curvas são denominadas de curvas de uma bicicleta. A motivação para este estudo vem do problema de como determinar a direção do movimento de uma bicicleta por faixas de pneus de suas rodas. As curvas ambíguas de uma bicicleta surgem na situação em que não se pode determinar o caminho, i.e., a direção em que a bicicleta percorreu.

Nós discutimos a existência e a não-existência de curvas de uma bicicleta, além dos círculos concêntricos. Em particular, obtemos as restrições sobre as curvas fechadas de bicicleta tais como a relação entre o comprimento do arco xy e o comprimento do perímetro de Γ , o número e a localização de seus vértices, etc. Construimos as curvas fechadas de bicicleta com a razão rotacional igual a $\frac{1}{2}$. Estudamos também a deformação infinitesimal nos seguintes casos: nos círculos, nos polígonos regulares e nas curvas fechadas de bicicleta com razão rotacional $\frac{1}{2}$. No final do capítulo desenvolvemos um método para construir curvas com cúspide de Whitney. Veja na referência ([TA]).

No capítulo 2 estudamos (n, k) – gonais equiláteros e convexos, cujas k – diagonais tem os mesmos comprimentos, análogos às curvas de bicicleta. Para alguns valores de n e k , provamos que com a rigidez (n, k) – gonais teremos um polígono regular, e para alguns valores construimos polígonos flexíveis de bicicleta. Veja na referência ([TA]).

No capítulo 3 classificamos as curvas fechadas da roda dianteira de bicicleta, tais como hiperbólica, parabólica e elíptica. Além disso, definimos o comprimento algébrico da curva da roda traseira. Desenvolvemos um método de só traçar uma faixa do rastro dos pneus da bicicleta e discutimos a quantidade de pontos críticos e de pontos de interseção com o eixo x das curvas (Γ, γ) em cada intervalo determinado. Veja na referência ([LT]).

No capítulo 4 estendemos a noção da bicicleta à esfera S^2 . Redefinimos a relação entre a roda traseira e a roda dianteira e estabelecemos o análogo do primeiro Lema no capítulo 1.

Par de curvas no plano

1.1 Par de curvas relacionadas

Seja uma bicicleta andando num plano. Eventualmente aparecem duas curvas no chão, sendo uma delas o caminho da roda dianteira e a outra o caminho da traseira. Considera-se o ponto A da roda traseira e B da dianteira como na figura (1.1), onde aparentemente a roda traseira sempre descreve um movimento com vetor tangente direcionado para a curva dianteira traçada.

Iremos considerar movimentos de avanço e recuo (ré) do par de curvas.

Agora consideremos $\gamma(t)$ e $\Gamma(t)$ as trajetórias das rodas traseira e dianteira da bicicleta e $T(t)$ denota o vetor tangente unitário à curva γ a qual supomos regular. Então o modelo matemático para este movimento é descrito pela equação abaixo.

$$\Gamma(t) = \gamma(t) + LT(t), \quad (1-1)$$

onde $L \in \mathbb{R}$ é a distância entre a roda dianteira e a traseira.

Se γ não é parametrizada pelo comprimento de arco, então naturalmente para manter a mesma distância L entre γ e Γ podemos definir a curva da roda dianteira como

$$\Gamma(t) = \gamma(t) + L \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}. \quad (1-2)$$

Seja α o ângulo entre (γ', Γ') . Se o percurso do primeiro vetor até o segundo vetor for no sentido anti-horário então α é positivo pela convenção, caso contrário, negativo. Intuitivamente,

$$\alpha > 0 \Leftrightarrow k > 0, \alpha < 0 \Leftrightarrow k < 0 \text{ e } \alpha = 0 \Leftrightarrow k = 0, \quad (1-3)$$

onde k é a curvatura de γ .

Um par de curvas $\gamma(t)$ e $\Gamma(t)$ é chamado de ambíguo se pode servir como trajetórias das rodas traseira e dianteira quando percorrido em duas direções opostas. Assim não se pode determinar a partir deste par de curvas o caminho (orientado) que

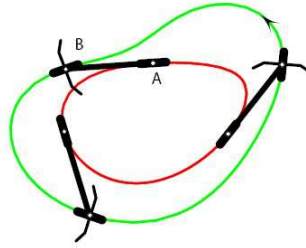


Figura 1.1: As trajetórias das rodas traseira e dianteira

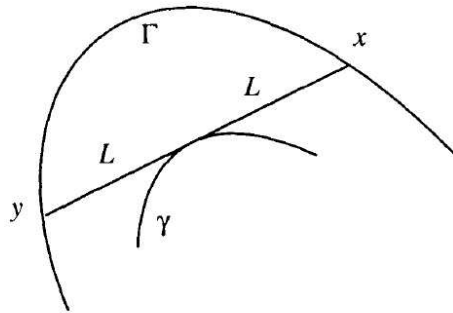


Figura 1.2: Um par de curvas ambíguas

a bicicleta percorreu. Um exemplo natural de curvas ambíguas é um par de círculos concêntricos cujos raios r e R satisfazem $R^2 - r^2 = L^2$. Se (γ, Γ) é um par ambíguo e um segmento de comprimento $2L$ é tangente a γ em seu ponto médio, então ambos os pontos finais do segmento estão em Γ , veja a Figura (1.2).

Existem dois conceitos clássicos da geometria diferencial que valem a pena a serem citados agora:

A) Seja $\gamma: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, plana e fechada por $\gamma(s) = (x(s), y(s))$, com o vetor tangente $t(s) = (x'(s), y'(s))$ unitário. Convém introduzir a indicatriz tangente $t: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $t(s) = (x'(s), y'(s))$, onde esta é uma curva cujo traço está contido em círculo de raio 1. Observe que o vetor velocidade da indicatriz $\frac{dt}{ds} = t'(s) = (x''(s), y''(s)) = \gamma''(s) = kn$, onde n é o vetor normal e k é a curvatura de γ . Seja $\theta(s)$, $0 < \theta(s) < 2\pi$, o ângulo que $t(s)$ faz com o eixo x , isto é, $x'(s) = \cos\theta(s)$, $y'(s) = \sin\theta(s)$, assim $\theta(s) = \arctg \frac{y'(s)}{x'(s)}$. O ângulo θ está bem definido localmente e $\frac{dt}{ds} = \frac{d}{ds}(\cos\theta, \sin\theta) = \theta'(-\sin\theta, \cos\theta) = \theta'n$, isto significa que $\theta' = k$ e sugere a definição de uma função global $\theta: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\theta(s) = \int_0^s k(s)ds$ e $\theta' = k = x'y'' - x''y' = (\arctg \frac{y'}{x})'$. Esta função global coincide, a menos de constantes, com a função local θ definida previamente. Intuitivamente, $\theta(s)$ mede a rotação total do vetor tangente, isto é, o ângulo total descrito pelo vetor $t(s)$ da indicatriz tangente a medida que percorremos a curva γ de 0 a s . Como γ é fechada, este ângulo é um múltiplo inteiro I de 2π , ou seja, $\int_0^l k(s)ds = \theta(l) - \theta(0) = 2\pi I$, onde este número inteiro I é chamado índice

de rotação da curva γ .

B) Teorema fundamental das curvas planas:

- 1) Dada uma função diferenciável $k(s)$, $s \in I \subset \mathbb{R}$, existe uma curva regular $\alpha(s)$, parametrizada pelo comprimento de arco s , cuja curvatura é $k(s)$.
- 2) A curva $\alpha(s)$ acima é única quando fixamos $\alpha(s_0)$ e $\alpha'(s_0) = v_0$, onde v_0 é um vetor unitário de \mathbb{R}^2 .
- 3) Se duas curvas $\alpha(s)$ e $\beta(s)$ têm a mesma curvatura, então diferem por sua posição no plano por uma isometria, isto é, existe uma rotação L e uma translação T em \mathbb{R}^2 , tal que $\alpha(s) = (L \circ T)(\beta(s))$.

1.2 Relação entre as curvaturas das Rodas Dianteira e Traseira

Considere duas curvas suaves γ e Γ de classe C^k e C^{k-1} , $k \geq 3$, relacionadas como em (1-1) e sejam t e x os parâmetros de comprimento de arco de γ e Γ , respectivamente. A correspondência entre as duas curvas é dada por

$$\Gamma(x(t)) = \gamma(t) + L\gamma_t(t). \quad (1-4)$$

Sejam k e K as curvaturas de γ e Γ , e seja também $\alpha(t)$ o ângulo entre os vetores tangentes das curvas γ e Γ nos pontos t e $x(t)$.

Lema 1.1 *Existem as relações*

$$\frac{-\pi}{2} < \alpha(t) < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos\alpha(t)}, \quad k = \frac{tg\alpha}{L},$$

e

$$K = \frac{\text{sen}\alpha}{L} + \frac{d\alpha}{dx}. \quad (1-5)$$

Prova: Como t é o parâmetro pelo comprimento de arco de γ , então $|\gamma_{tt}|$ é $|k|$ e γ_{tt} é ortogonal a γ_t . Derivando (1-4) encontramos

$$\Gamma_t = \gamma_t + L\gamma_{tt}. \quad (1-6)$$

Esta última equação implica $|\Gamma_t| = |\gamma_t| + L|\gamma_{tt}| \geq |\gamma_t|$. Isto quer dizer que a velocidade da roda dianteira é maior ou igual à da traseira. Também $\langle \gamma_t, \Gamma_t \rangle = \langle \gamma_t, \gamma_t \rangle + L\langle \gamma_{tt}, \gamma_t \rangle = 1$. Portanto $\langle \Gamma_t, \gamma_t \rangle = 1$ e $\langle \Gamma_t, \gamma_t \rangle = |\Gamma_t||\gamma_t| \cos\alpha(t)$. Logo $\cos\alpha(t) > 0$, para todo t .

Consequentemente $-\frac{\pi}{2} < \alpha(t) < \frac{\pi}{2}$ e $1 = |\Gamma_t| \cos \alpha(t)$.

Assim

$$\frac{1}{\cos \alpha} = |\Gamma_t| = \sqrt{1 + L^2 k^2}, \quad (1-7)$$

pois,

$$\begin{aligned} |\Gamma_t| &= \langle \gamma_t + L\gamma_{tt}, \gamma_t + L\gamma_{tt} \rangle^{1/2} \\ &= [\langle \gamma_t \gamma_t \rangle + L^2 \langle \gamma_{tt} \gamma_{tt} \rangle]^{1/2} \\ &= \sqrt{1 + L^2 k^2}. \end{aligned}$$

Pela equação (1-7) $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + L^2 k^2$. Logo $\sec^2 \alpha - 1 = L^2 k^2 = tg^2 \alpha$. Por tudo $L|k| = |tg \alpha|$ e segue da equação (1-3) que $Lk = tg \alpha$.

Como $\Gamma_t = \Gamma_x \frac{dx}{dt}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos \alpha} &= |\Gamma_x| \left| \frac{dx}{dt} \right|, \\ &= \left| \frac{dx}{dt} \right|. \end{aligned}$$

O módulo da equação significa que se existe uma reparametrização $x(t)$, tal que, $dx/dt = 1/\cos \alpha$, então existe uma outra reparametrização $\bar{x}(t) = x(-t)$, tal que, $d\bar{x}/dt = -1/\cos \alpha$. Analogamente, se existir uma reparametrização $x(t)$, tal que, $dx/dt = -1/\cos \alpha$, então existe uma outra reparametrização $\bar{x}(t) = x(-t)$ tal que $d\bar{x}/dt = 1/\cos \alpha$. Sendo assim sempre podemos escolher uma reparametrização $x(t)$, tal que, $dx/dt = 1/\cos \alpha$.

Além disso a curvatura é dada por

$$K = \frac{\Gamma_t \times \Gamma_{tt}}{|\Gamma_t|^3} = \frac{-x''y' + x'y''}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (1-8)$$

Como t é o parâmetro pelo comprimento de arco em γ , temos, $\gamma_{ttt} = (k_t/k)\gamma_{tt} - k^2\gamma_t$.

De fato, pela fórmula de Frenet, $T' = kn$, logo, $\frac{T'}{k} = \frac{\gamma_{tt}}{k} = n$ e $T' = \gamma_{tt} = kn$ então temos

$$\begin{aligned} \gamma_{ttt} &= k'n + kn' \\ &= \frac{k'\gamma_{tt}}{k} + k(-kT - \tau b) \\ &= (k_t/k)\gamma_{tt} - k^2\gamma_t. \end{aligned}$$

Derivando (1-6), encontramos,

$$\begin{aligned}\Gamma_{tt} &= \gamma_{tt} + L(\gamma_{ttt}), \\ &= \gamma_{tt} + L[(k_t/k)\gamma_{tt} - k^2\gamma_t], \\ &= \gamma_{tt} + L(k_t/k)\gamma_{tt} - Lk^2\gamma_t.\end{aligned}$$

Substituindo em (1-8) e usando $\gamma_t \times \gamma_{tt} = k$, obtemos,

$$K = \frac{\Gamma_t \times \Gamma_{tt}}{|\Gamma_t|^3} = \frac{k + Lk_t + L^2k^3}{(1 + L^2k^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (1-9)$$

e ainda,

$$\begin{aligned}K &= \frac{\Gamma_t \times \Gamma_{tt}}{|\Gamma_t|^3} = \frac{k + Lk_t + L^2k^3}{(1 + L^2k^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ &= \frac{k(1 + L^2k^2)}{(1 + L^2k^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{Lk_t}{(1 + L^2k^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ &= k(1 + L^2k^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{\sec^2\alpha(t) \cdot \alpha_t(t)L}{L(1 + L^2k^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ &= k(1 + L^2k^2)^{-\frac{1}{2}} + \cos^3\alpha \cdot \sec^2\alpha(t)\alpha_t(t), \\ &= \frac{1 \operatorname{sen}\alpha}{L \operatorname{cos}\alpha} \operatorname{cos}\alpha + \operatorname{cos}\alpha \cdot \alpha_t(t), \\ &= \frac{\operatorname{sen}\alpha}{L} + \alpha_t \frac{dt}{dx}, \\ &= \frac{\operatorname{sen}\alpha}{L} + \alpha_x.\end{aligned}$$

□

Lema 1.2 Se γ é de classe C^k , $k \geq 1$, então Γ_L é de classe C^{k-1} para todo $L > 0$.

Prova: Seja γ uma função parametrizada pelo comprimento de arco em s . Pela definição temos que $\Gamma(s) = \gamma(s) + L\gamma'(s)$ e γ é de classe C^k , implicando que γ' e Γ é de C^{k-1} .

Observação 1: Se γ é uma curva periódica com período P , então Γ também é uma curva fechada. De fato, $\Gamma(x+P) = \gamma(x+P) + \gamma'(x+P) = \gamma(x) + \gamma'(x) = \Gamma(x)$. Sejam γ e Γ as curvas fechadas das rodas traseira e dianteira de bicicleta, isto é, curvas suaves e fechadas relacionadas por (1-4). O Lema 1.1 implica que a trajetória da roda traseira é sempre mais curta que a da roda dianteira. De fato, $|\Gamma_t| \geq |\gamma_t| \Rightarrow \int |\Gamma_t| \geq \int |\gamma_t|$.

Observação 2: O Lema 1.1 revela informações importantes. Se temos $\alpha(t)$ encontramos $k(t)$ e pelo Teorema fundamental das curvas planas encontramos $\gamma(t)$, e ainda pela equação

(1-1), determinamos $\Gamma(t)$. Se temos $k(t)$ então $\alpha(t) = \arctg(Lk)$, e repetindo o mesmo processo, encontramos $\Gamma(t)$. Se temos $\alpha(x)$, encontramos $\Gamma(x)$ e, daí, surge a pergunta, será que conseguimos encontrar $\gamma(x)$?

Se temos $K(x)$, pelo teorema de Existência e Unicidade da solução para EDO's, encontramos $\alpha(x)$, assim voltamos a mesma questão anterior, e precisamos dos dois lemas a seguir para respondê-la.

Lema 1.3 *Considere as funções $k(x)$ e $f(x) > 0$, onde k contínua e f de classe C^1 . Então existe uma curva γ de classe C^2 no plano, tal que, k é a curvatura de γ e $|\gamma'| = f(x)$.*

Prova: Seja $\gamma' = f(x)(\cos\theta(x), \sin\theta(x))$ e daí $|\gamma'| = f(x)$, então

$$\gamma'' = f'(\cos\theta(x), \sin\theta(x)) + f(x)\theta'(x)(-\sin\theta(x), \cos\theta(x)).$$

$$\text{Como } k(x) = \frac{\gamma' \wedge \gamma''}{|\gamma'|^3} = \frac{x'y'' - x''y'}{\sqrt{x^2+y^2}^3} = \frac{\theta' f^2}{f^3}, \text{ então } \theta'(x) = k(x)f(x).$$

Por integração direta de γ' encontramos $\gamma(x) = (X(x), Y(x))$, onde

$$X(x) = \int_0^x f(t)[\cos(\theta_0 + \int_0^t k(t)f(t)dt)]dx \text{ e}$$

$$Y(x) = \int_0^x f(t)[\sin(\theta_0 + \int_0^t k(t)f(t)dt)]dx.$$

Como k é contínua e f de classe C^1 , então θ' é contínua e segue que θ é C^1 e γ é C^2 .

Lema 1.4 *Seja $\Gamma(x) = \gamma(x) + L\frac{\gamma'(x)}{|\gamma'(x)|}$, onde x é o parâmetro do comprimento de arco Γ , e seja também, $k(x)$ a curvatura de γ . Então $|\gamma'(x)| = \frac{1}{\sqrt{1+L^2k(x)^2}}$.*

Prova: Observamos que

$$(\gamma'(x)/|\gamma'(x)|)' = k(x)|\gamma'(x)|n(x). \quad (1-10)$$

De fato, seja $A(x) = \gamma'(x)/|\gamma'(x)|$, então $A'(x) = (\gamma'(x)/|\gamma'(x)|)'$. Seja s o parâmetro do comprimento de γ , assim $A_s = \gamma'(s)$, pois, $|\gamma'(s)| = 1$ e $dx/ds = 1/(ds/dx) = 1/|\gamma'(x)|$, conseqüentemente, $A_s = A_x dx/ds$. Portanto $\gamma''(s) = A_x/|\gamma'(x)|$ e ainda, $k(x)n(x)|\gamma'(x)| = A_x$.

Além disso, $\Gamma'(x) = \gamma' + L(\gamma'(x)/|\gamma'(x)|)'$ implica $1 = |\gamma'|^2 + L^2k^2(x)|\gamma'|^2$ e $|\gamma'(x)| = 1/\sqrt{1+L^2k^2(x)}$.

Ou seja, se temos $\alpha(x)$, tem-se $k(x)$, pelo Lema 1.4 e 1.3 conseguimos recuperar a curva γ .

Ao considerar γ de classe C^k , parametrizada pelo comprimento de arco, onde $k \geq 3$, temos que não aparecem singularidades na curva γ , ou seja, $\gamma' \neq 0$. Agora consideremos a classe mais abrangente de curvas γ que admitem singularidades, mais especificamente pontos de cúspides. Veja na Figura 1.12.

Antes disso, definimos a cúspide.

Definição 1.5 Seja $\gamma(t)$ uma curva reparametrizada de classe C^k , onde $k \geq 3$. O ponto $\gamma(t)$ é chamado um ponto de cúspide de Whitney se $\gamma'(t) = v(t) = 0$, $\gamma''(t) = a(t) \neq 0$, $a'(t) \neq 0$, e além disso $(a(t), a'(t))$ são linearmente independentes.

Vamos estudar as curvas que possuem uma função suporte P real no plano. Para mais informações, veja na referência ([Hi]) {pg.188 – 191}.

Dada uma reta no plano, sempre podemos escrever $\cos(t)x + \sin(t)y = p(t)$ tal que $(\cos(t), \sin(t))$ é o vetor normal da reta, t o ângulo do vetor normal com o eixo x . A distância da origem à reta será $p(t)$. Derivando a equação temos, $-\sin(t)x + \cos(t)y = p'(t)$, e resolvemos x e y , assim

$$x(t) = -\sin(t)p'(t) + \cos(t)p(t),$$

$$y(t) = \cos(t)p'(t) + \sin(t)p(t).$$

Definição 1.6 Uma curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ no \mathbb{R}^2 é uma curva com função suporte p se existe uma função $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que,

$$x(t) = -\sin(t)p'(t) + \cos(t)p(t), \quad (1-11)$$

$$y(t) = \cos(t)p'(t) + \sin(t)p(t). \quad (1-12)$$

Seja γ uma curva planar com função suporte p , então

$$x'(t) = -\sin(t)(p''(t) + p'(t))$$

$$y'(t) = \cos(t)(p''(t) + p'(t))$$

$$x''(t) = -\cos(t)(p + p'') - \sin(t)(p' + p''')$$

$$y''(t) = -\sin(t)(p + p'') + \cos(t)(p' + p''')$$

$$x'''(t) = \sin(t)(p + p'') - 2\cos(t)(p' + p''') - \sin(t)(p'' + p'''')$$

$$y'''(t) = -\cos(t)(p + p'') - 2\sin(t)(p' + p''') + \cos(t)(p'' + p'''')$$

$$k(t) = \frac{-x''y' + x'y''}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(p + p'')^2}{|p + p''|^3} = \frac{1}{|p + p''|}$$

Como k é sempre positivo, então, γ percorre no sentido anti-horário em R^2 . Consideremos uma curva pela parametrização,

$$x(t) = -\sin(-t)p'(t) + \cos(-t)p(t), \quad (1-13)$$

$$y(t) = \cos(-t)p'(t) + \sin(-t)p(t). \quad (1-14)$$

Então $k(t) = \frac{-1}{|p+p''|}$. Consequentemente, γ percorre no sentido horário.

Considere γ uma curva como acima e substitua na equação (1-2). Então,

$$\begin{aligned}
 \Gamma &= (X(t), Y(t)) \\
 &= \left(x(t) + L \frac{x'}{|p+p''|}, y(t) + L \frac{y'}{|p+p''|}\right) \\
 &= \left(x(t) + L \frac{-\text{sen}(t)(p+p'')}{|p+p''|}, y(t) + L \frac{\text{cos}(t)(p+p'')}{|p+p''|}\right) \\
 &= (x(t) + L \text{sen}(t), y(t) - L \text{cos}(t)) \\
 \text{ou} &= (x(t) - L \text{sen}(t), y(t) + L \text{cos}(t)).
 \end{aligned}$$

Para simplificar definimos

$$\begin{aligned}
 \Gamma &= (x(t) - L \text{sen}(t), y(t) + L \text{cos}(t)), \\
 \bar{\Gamma} &= (x(t) + L \text{sen}(t), y(t) - L \text{cos}(t)).
 \end{aligned} \tag{1-15}$$

Assim

$$\begin{aligned}
 X'(t) &= x'(t) - L \text{cos}(t), \\
 Y'(t) &= y'(t) - L \text{sen}(t), \\
 X''(t) &= x''(t) + L \text{sen}(t), \\
 Y''(t) &= y''(t) - L \text{cos}(t), \\
 X'^2 + Y'^2 &= x'^2 - 2Lx' \text{cos}(t) + L^2 \text{cos}^2(t) + y'^2 - 2Ly' \text{sen}(t) + L^2 \text{sen}^2(t) \\
 &= (p+p'')^2 - 2L[-\text{sen}(t)\text{cos}(t)(p+p'') + \text{sen}(t)\text{cos}(t)(p+p'')] + L^2 \\
 &= (p+p'')^2 + L^2.
 \end{aligned}$$

E ainda,

$$\begin{aligned}
 K(t) &= \frac{\Gamma_t \times \Gamma_{tt}}{|\Gamma_t|^3} = \frac{-X''Y' + X'Y''}{(X'^2 + Y'^2)^{3/2}} \\
 &= \frac{(-x'' - L \text{sen}(t))(y' - L \text{sen}(t)) + (x' - L \text{cos}(t))(y'' - L \text{cos}(t))}{[(p+p'')^2 + L^2]^{3/2}} \\
 &= \frac{-x''y' + Lx'' \text{sen}(t) + L^2 \text{sen}^2(t) + x'y'' - Ly'' \text{cos}(t) + L^2 \text{cos}^2(t)}{[(p+p'')^2 + L^2]^{3/2}} \\
 &= \frac{-x''y' + x'y'' + L^2 + L(x'' \text{sen}(t) - y'' \text{cos}(t))}{[(p+p'')^2 + L^2]^{3/2}} \\
 &= \frac{(p+p'')^2 + L^2 - L(p' + p''')^{3/2}}{(p+p'')^2 + L^2}.
 \end{aligned}$$

Como $\Gamma(t) = \gamma(t) + L \frac{\gamma'}{|\gamma'}}$ e pela equação (1-10) temos, $\Gamma'(t) = \gamma'(t) + Lk(t)n(t)|\gamma'|$

e ainda, $|\Gamma'| = |\gamma'| + L|k||\gamma'| \geq |\gamma'|$, ou seja, a velocidade da roda dianteira é maior ou igual que a velocidade da roda traseira.

Definimos, como no Lema 1.1, $\alpha(t)$ o ângulo entre Γ' e γ' , e como $\langle \Gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = |\Gamma'(t)||\gamma'(t)|\cos\alpha(t)$, então $(p + p'')^2 = \sqrt{(p + p'')^2 + L^2}|p + p''|\cos\alpha(t)$, logo $\frac{|p+p''|}{\sqrt{(p+p'')^2+L^2}} = \cos\alpha(t)$, que implica, $(p + p'')^2 = (p + p'')^2\cos^2(t) + L^2\cos^2(t)$ e, $(p + p'')^2\sin^2(t) = L^2\cos^2(t)$, mais uma vez, $\frac{\text{tg}^2\alpha(t)}{L^2} = \frac{1}{(p+p'')^2} = k^2$, e enfim, $k(t) = \frac{\text{tg}\alpha(t)}{L}$.
Encontramos uma relação trigonométrica, veja na figura (1.3). Como $k = \frac{1}{|p+p''|}$,

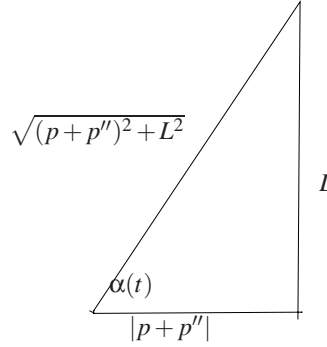


Figura 1.3:

então, $\frac{1}{k} = p + p''$, $k_t = -\frac{p'+p'''}{(p+p'')^2}$ e $\text{tg}\alpha = Lk = \frac{L}{p+p''}$, que implica $\frac{1}{\cos\alpha} = \sqrt{1 + L^2k^2}$, assim:

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{(\frac{1}{k})^2 + L^2 + L\frac{k_t}{k^2}}{((\frac{1}{k})^2 + L^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{k + Lk_t k + L^2k^3}{(1 + L^2k^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{k(1 + L^2k^2)}{(1 + L^2k^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{Lk k_t}{(1 + L^2k^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= k(1 + L^2k^2)^{-\frac{1}{2}} + L\frac{\text{tg}\alpha(t)}{L}\text{sec}^2\alpha(t)\alpha_t(t)\cos^3\alpha(t) \\ &= \frac{\text{tg}\alpha(t)}{L}\cos\alpha(t) + \frac{\text{sen}\alpha(t)}{\cos\alpha(t)}\frac{1}{\cos^2\alpha(t)}\alpha_t(t)\cos^3\alpha(t) \\ &= \frac{\text{sen}\alpha(t)}{L} + \alpha_t(t)\text{sen}\alpha(t). \end{aligned}$$

Observação 3: Nota-se que $p + p'' = 0$ implica em $k = \pm\infty$ e $v(t) = (-\text{sen}(t)(p + p''), \cos(t)(p + p'')) = 0$. Se adicionamos a condição $p' + p''' \neq 0$, então, $a(t) = (-\text{sen}(t)(p''' + p'), \cos(t)(p''' + p')) \neq 0$ e, além disso, $(a(t), a'(t))$ são LI, ou seja, o caso cúspide implica $k = \pm\infty$; porém não é verdade que se $k \neq \pm\infty$ então o ponto não é cúspide.

Vamos ver alguns exemplos que γ possua singularidades do tipo Whitney e também singularidades mais degeneradas, não Whitney.

Exemplo 1.7 Seja $\gamma(t) = (t^2, t^4)$, se $-\infty < t \leq 0$, e $\gamma(t) = (-t^2, 0)$, onde $0 \leq t < \infty$. Assim, na Figura (1.4) aparece uma singularidade, porém não é uma cúspide de Whitney.

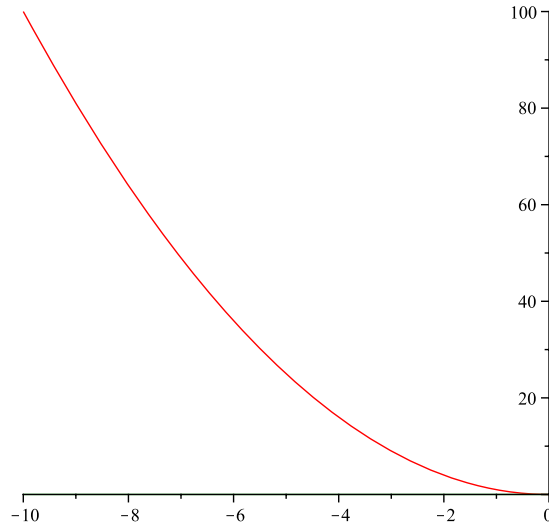


Figura 1.4: Singularidade não-Whitney

Exemplo 1.8 Seja $\gamma(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t))$ definida no intervalo $[0, 2\pi]$. A curva γ possui 4 cúspides de Whitney. E também consideramos $\Gamma(t)$ com $L = 2$, veja na Figura (1.5).

Lema 1.9 Seja γ uma curva parametrizada com função suporte p de classe C^k , $k \geq 3$ e Γ é dada como em (1-15). Quando $\gamma(t(s))$ possuir cúspide de Whitney a curva Γ será suave.

Prova: Pela Observação 3, se $K \neq 0$, então, não aparecerá a cúspide na curva Γ .

De fato, $K(t) = [(p + p'')^2 + L^2 - L(p' + p''')]/[(p + p'')^2 + L^2]^{3/2} \neq \pm\infty$, pois o denominador nunca será nulo.

A singularidade do tipo cúspide de Whitney é indispensável ao lema anterior. Veja o exemplo seguinte.

Exemplo 1.10 Seja $\gamma(t) = (t^2, t^5)$ no intervalo $[-1, 1]$. Na Figura (1.6) notamos que aparece uma singularidade na origem, então $\Gamma(t) = (t^2 + \frac{2t}{\sqrt{4t^2+25t^8}}, t^5 + \frac{5t^4}{\sqrt{4t^2+25t^8}})$ no intervalo $[-1, 0]$, e $\Gamma(t) = (t^2 - \frac{2t}{\sqrt{4t^2+25t^8}}, t^5 - \frac{5t^4}{\sqrt{4t^2+25t^8}})$ no intervalo $[0, 1]$.

Pelo traço da curva Γ , notamos que no tempo $t = 0$, aparece uma singularidade, veja Figura (1.7). Pelo Lema 1.9 a singularidade da curva γ não é cúspide de Whitney. De fato, $\gamma'(0) = (0, 0)$, $\gamma''(0) = (2, 0)$ e $\gamma'''(0) = (0, 0)$, ou seja, (γ', γ'') não são LI.

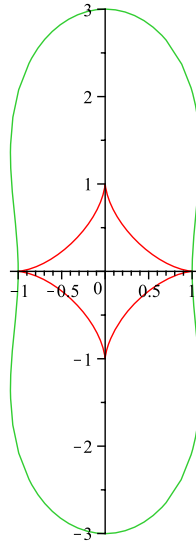


Figura 1.5: A curva γ possui 4 singularidades de Whitney e a curva Γ é suave.

Definição 1.11 *Tractriz é a curva que descreve o movimento de um ponto P à distância L do ponto Γ , quando Q desloca em linha reta.*

Em particular, a Tractriz é o traço da roda traseira da bicicleta, pois P' direciona a Q . Sendo $P = \gamma(t)$, $Q = \Gamma(t)$ e $\alpha(x(t))$ o ângulo entre as curvas Γ e γ , veja Figura (1.8). Intuitivamente quando Γ anda à direita, diminuirá o ângulo α , que estudamos analiticamente no caso seguinte.

Exemplo 1.12 *Seja uma bicicleta com a roda dianteira andando na reta e a traseira fora da reta, como mostra a figura (1.8). Como $\Gamma(t)$ é uma reta, $K = 0$. Pelo lema 1.1 temos que:*

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{-\operatorname{sen}\alpha}{L} \quad (1-16)$$

Sendo, inicialmente, $0 < \alpha(x) < \frac{\pi}{2}$, então por (1-16) $\frac{d\alpha}{dx} < 0$, e isso implica que $\alpha(x)$ tende a zero.

Se $\frac{\pi}{2} < \alpha(x) < \pi$, então $\frac{d\alpha}{dx} > 0$, e isso implica que $\alpha(x)$ tende a zero de novo.

Se $\frac{\pi}{2} < \alpha(x) < \pi$, $\alpha(x)$ tende a zero, assim $\alpha(x)$ passa pelo ângulo $\frac{\pi}{2}$ uma vez. Mais adiante, demonstraremos que cada vez que $\alpha(x)$ passa pelo ângulo $\frac{\pi}{2}$, encontra-se uma cúspide. Agora vamos calcular o exemplo explicitamente. Como $K = 0$ e suponhamos mais ainda que $L = 1$, então

$$\frac{d\alpha}{dx} \operatorname{cosec}\alpha(x) = -1, \text{ temos } \int_0^x \frac{d\alpha}{dx} \operatorname{cosec}\alpha(x) dx = \int_0^x -1 dx,$$

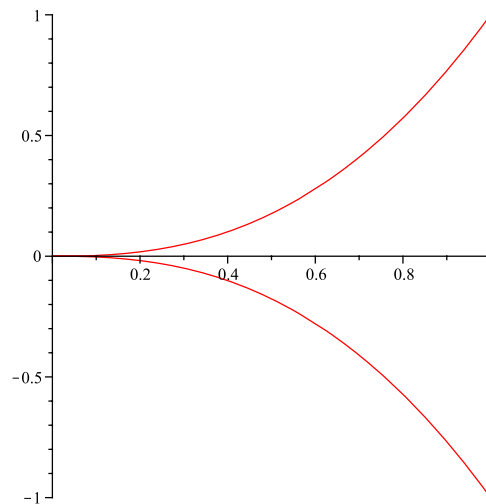


Figura 1.6: A curva $\gamma = (t^2, t^5)$

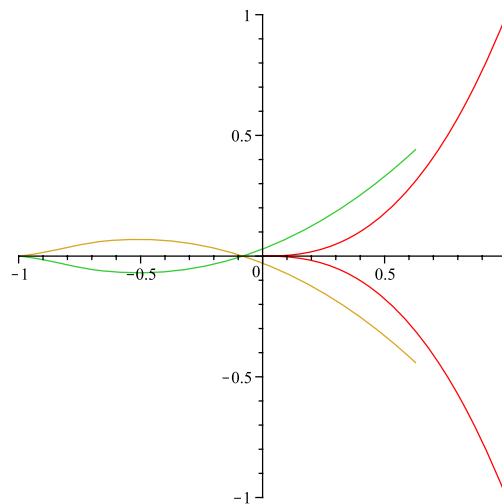


Figura 1.7: A curva Γ possui singularidade

como,

$$\int \operatorname{cosec}\alpha(x) dx = \ln|\operatorname{cosec}\alpha(x) + \cot\alpha(x)|, \text{ temos } \ln|\operatorname{cosec}\alpha(x) + \cot\alpha(x)| - \ln|c| = -x,$$

isto é,

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha(x)} + \frac{\cos\alpha(x)}{\operatorname{sen}\alpha(x)} = ce^{-x} \iff \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\alpha(x)} = \operatorname{sen}\alpha(x)e^{-x} - 1,$$

$$\iff 1 - \operatorname{sen}^2\alpha(x) = \operatorname{sen}^2\alpha(x)e^{-2x} - 2\operatorname{sen}\alpha(x)e^{-x} + 1,$$

$$\iff 0 = \operatorname{sen}\alpha(x)[\operatorname{sen}\alpha(x)(e^{-2x} + 1) - 2e^{-x}] \iff \operatorname{sen}\alpha(x) = \frac{2e^{-x}}{e^{-2x} + 1}.$$

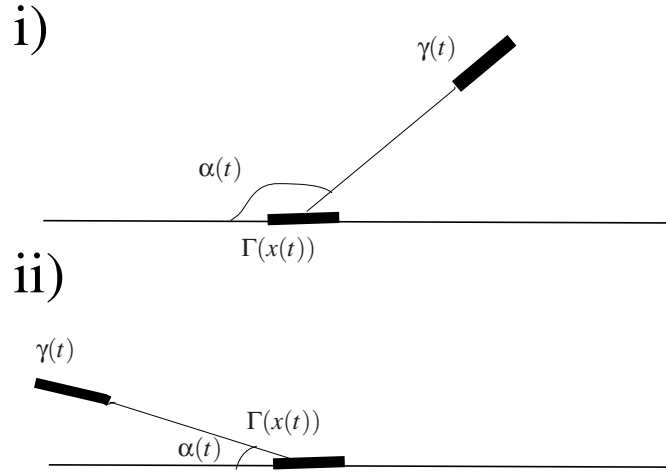


Figura 1.8:

Portanto,

$$\cos\alpha(x) = \sqrt{1 - \sin^2\alpha(x)} = \sqrt{\frac{e^{-4x} + 2e^{-2x} + 1 - 4e^{-2x}}{e^{-4x} + 2e^{-2x} + 1}} = \frac{e^{-2x} - 1}{e^{-2x} + 1}.$$

Então, pelo Lema 1.3 $\gamma(x) = (X(x), Y(x))$, onde,

$$\begin{aligned} X(x) &= \int_0^x f(t) \left[\cos(\theta_0 + \int_0^t k(t) f(t) dt) \right] dx, \\ Y(x) &= \int_0^x f(t) \left[\sin(\theta_0 + \int_0^t k(t) f(t) dt) \right] dx. \end{aligned}$$

E também,

$$k(x) = \operatorname{tg}\alpha(x) = \frac{2e^{-x}}{e^{-2x} - 1},$$

e, mais ainda,

$$|\gamma'(x)| = f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + L^2 k^2(x)}} = \sqrt{\frac{e^{-4x} - 2e^{-2x} + 1}{e^{-4x} + 2e^{-2x} + 1}}.$$

Agora vamos demonstrar que se $\alpha(t) = \pi/2$ então, $\gamma(t)$ tem cúspide de Whitney.

Lema 1.13 Considere a equação diferencial da tractriz, $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{L^2 - y^2}}$. Então γ terá cúspide quando γ' é perpendicular a Γ' .

Prova: Dada a equação diferencial da tractriz: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{L^2 - y^2}}$ temos $(\frac{dx}{dy})^2 = \frac{y^2 - L^2}{y^2}$ e, mais

ainda, $\frac{dx}{dy} = +\sqrt{\frac{y^2 - L^2}{y^2}}$ ou $-\sqrt{\frac{y^2 - L^2}{y^2}}$.

Tome $\frac{dx}{dy} = q$, então, $y^2 q^2 = y^2 - L^2$. Derivando em relação a t , temos, $2yy'q^2 + y^2 2qq' =$

$-2yy'$, que implica, $y'q^2 + yqq' = -y'$. Escolha $y' = 1$, então, $q' = \frac{-1-q^2}{qy}$. Como, $\frac{x'}{y} = \frac{dx}{dy} = q$ e, $y' = 1$, implica que, $x' = q$. Para que q' não seja uma expressão fracionária tome $y' = qy$, então temos 3 equações diferenciais:

$$q' = -1 - q^2, \quad y' = qy, \quad x' = q^2y,$$

onde as condições iniciais são,

$$q(0) = 0, \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = L.$$

Então, imediatamente $x'(0) = y'(0) = 0$, ou seja, $v(0) = 0$ e $q'(0) = -1$, e além disso, $x''(0) = 2qq'y + q^2(qy) = 0$ e, $y''(0) = q'y + qy' = -L$, ou seja, $a(0)$ é paralelo ao eixo y . Então para que $\gamma(0)$ seja cúspide de Whitney, basta que $x'''(0)$ não seja zero. De fato, $x'''(0) = 2(q'^2 + qq'')y + 2qq'y' + 3q^2q'y + q^3y' = 2L$.

Depois de definir a relação entre as rodas traseira e dianteira, vamos demonstrar que o comprimento percorrido pela roda dianteira é maior que o da roda traseira.

Corolário 1.14

$$0 < \text{compr.}(\Gamma) - \text{compr.}(\gamma) < L \int_{\gamma} |k| dt,$$

onde "compr." é comprimento. Em particular, se γ for convexa, então

$$\text{compr.}(\Gamma) - \text{compr.}(\gamma) < 2\pi L$$

Prova: Tem-se,

$$|\Gamma_t| = \sqrt{1 + L^2 k^2}$$

e,

$$|\gamma_t| = 1.$$

Pelo Corolário (1.14), $(\sqrt{1 + L^2 k^2} - 1)^2 = 1 + L^2 k^2 - 2\sqrt{1 + L^2 k^2} > 0$. Ainda temos que,

$$\sqrt{1 + L^2 k^2} > 1$$

$$\Rightarrow (\sqrt{1 + L^2 k^2} - 1)^2 \leq L^2 k^2$$

$$\Rightarrow |\Gamma_t| - |\gamma_t| = \sqrt{1 + L^2 k^2} - 1 \leq L|k|.$$

Integrando a equação, consegue-se o resultado. Se a curva γ for convexa então, a curvatura k sempre mantém o mesmo sinal, por exemplo, $k > 0$, e além disso, $\int_{\gamma} k dt$ representa o ângulo total percorrido pela curva convexa γ , que seria 2π , assim segue o segundo

resultado.

A diferença entre o comprimento das rodas dianteira e traseira pode ser arbitrariamente pequeno em curvas convexas. Se γ é o círculo de raio R , então $\text{compr.}(\Gamma) - \text{compr.}(\gamma) = 2\pi(\sqrt{R^2 + L^2} - R)$, e assim, quanto maior R , menor a diferença.

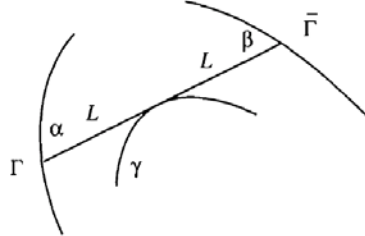


Figura 1.9:

Agora consideremos a curva $\bar{\Gamma} = \gamma - L\gamma_t$, e seja $\beta(r)$ o ângulo entre o vetor tangente de γ e $\bar{\Gamma}$ nos pontos respectivos. Consideremos a inversão da orientação de $\bar{\Gamma}$ e a trajetória da roda dianteira quando a traseira γ percorre em direção oposta, veja na Figura (1.9).

Lema 1.15 Nas condições acima temos $|\bar{\Gamma}_t| = |\Gamma_t|$ e $|\beta(t)| = |\alpha(t)|$. A curvatura de $\bar{\Gamma}$ é dada pela fórmula,

$$\bar{K} = \frac{\sin \alpha}{L} - \frac{d\alpha}{dx},$$

onde x é o parâmetro pelo comprimento de arco de $\bar{\Gamma}$.

Prova: Refazendo o Lema 1.1 com $-L$ em vez de L , temos $\bar{\Gamma}(x(t)) = \gamma(t) - L\gamma_t(t)$, e também pela Equação (1-7), temos $|\bar{\Gamma}_t| = \sqrt{1 + L^2 k^2} = |\Gamma_t|$. Agora,

$$\bar{\Gamma}_t = \gamma_t - L\gamma_{tt} \Rightarrow \langle \bar{\Gamma}_t, \gamma_t \rangle = \langle \gamma_t, \gamma_t \rangle - L\langle \gamma_{tt}, \gamma_t \rangle = 1,$$

então, $\cos \beta = \cos \alpha$. Pela Figura (1.9) observa-se que o ângulo entre (γ_t, Γ_t) é $\alpha(t)$ positivo, e o percurso de $(\gamma_t, \bar{\Gamma}_t)$ está no sentido anti-horário. Então $\alpha(t) = -\beta(t)$, e para calcular a curvatura \bar{K} de $\bar{\Gamma}$, tomemos a fórmula, $K = \frac{\sin \alpha}{L} + \frac{d\alpha}{dx}$. Substituindo α por β e L por $-L$, chegamos ao resultado.

Observação 4: Sem considerar a orientação, podemos dizer que $\alpha(t) = \beta(t)$.

Agora, seja (γ, Γ) um par de curvas ambíguas, então os traços de Γ e $\bar{\Gamma}$ coincidem. Seja $x = \gamma - L\gamma_t$ e $y = \gamma + L\gamma_t$, então vamos demonstrar o seguinte corolário.

Corolário 1.16 O comprimento do percurso de Γ limitado pelo segmento xy , sempre mantém-se constante.

Prova: Como $|\bar{\Gamma}_t| = |\Gamma_t|$, então conseguimos o mesmo comprimento ao integrar os dois lados. Se as duas curvas andam na mesma direção, então quando um lado aumenta certa unidade de comprimento, o outro lado também percorre a mesma para compensá-la, veja na Figura (1.10).

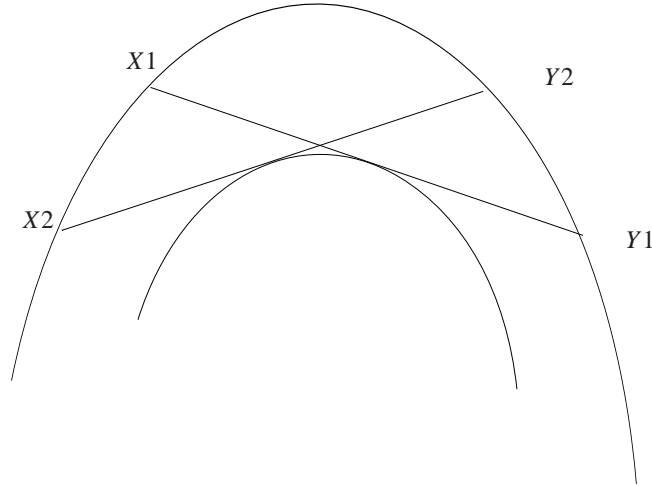


Figura 1.10: o arco $X1Y1$ é igual ao arco $X2Y2$

Denotamos xy por $2L$, que representa a distância de Γ a $\bar{\Gamma}$.

Definição 1.17 *Sejam γ uma curva fechada da roda traseira da bicicleta, Γ a curva da roda dianteira e $\bar{\Gamma}$, tal que, $\bar{\Gamma}(x(t)) = \gamma(t) - L\gamma_t(t)$. Definimos a razão rotacional, ρ , como a razão entre o comprimento do arco limitado pelo segmento $2L$ e o perímetro da curva Γ .*

Seja agora $\Gamma(x)$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, fechada, suave e convexa. Então o comprimento do arco limitado pelo segmento xy denotado por $\check{x}\check{y}$ e o perímetro de Γ são contantes. Supondo que o perímetro de Γ é igual a 2π , então $\rho = \frac{\check{x}\check{y}}{2\pi}$, ou seja $\check{x}\check{y} = 2\pi\frac{\check{x}\check{y}}{2\pi} = 2\pi\rho = 2w$, onde, $w = \pi\rho$. Consequentemente, $\Gamma(x)\Gamma(x+2w)$ é um segmento que toca $\gamma(t)$ no seu ponto médio. Sejam $\beta(x)$ e $\alpha(x)$ os ângulos entre o segmento $\Gamma(x)\Gamma(x+2w)$ e a curva Γ nos pontos $\Gamma(x)$ e $\Gamma(x+2w)$, respectivamente; os ângulos são iguais com sinal trocado pelo Lema 1.15.

Teorema 1.18 *Para qualquer $x \in [0, 2\pi]$ tem-se*

$$\text{sen}\alpha(x+w) - \text{sen}\alpha(x-w) = L(\alpha'(x+w) + \alpha'(x-w)). \quad (1-17)$$

Prova: Pelo Lema 1.1 e 1.15 as curvaturas nos pontos $\Gamma(x)$ e $\Gamma(x+2w)$ são, respectivamente,

$$K(x) = \frac{\text{sen}\alpha(x)}{L} - \alpha'(x), K(x+2w) = \frac{\text{sen}\alpha(x)}{L} + \alpha'(x). \quad (1-18)$$

Substituindo as variáveis $x = x + w$ e $x = x - w$ para a primeira e segunda equação respectivamente, conseguimos,

$$\begin{aligned} K(x+w) &= \frac{\text{sen}\alpha(x+w)}{L} - \alpha'(x+w), \\ K(x-w) &= \frac{\text{sen}\alpha(x-w)}{L} + \alpha'(x-w). \end{aligned}$$

Subtraindo o segundo termo do primeiro, temos,

$$\text{sen}(x+w) - \text{sen}(x-w) = L[\alpha'(x+w) + \alpha'(x-w)]$$

Vamos demonstrar de outra maneira. Seja $\alpha(s)$ o ângulo entre o segmento $\Gamma(x)\Gamma(x+2w)$ e a curva Γ , então o ângulo percorrido de $\Gamma(x)$ até $\Gamma(x+2w)$ é $2\alpha(x)$. Por outro lado, temos $K(x) = \frac{\text{sen}\alpha(x)}{L} - \frac{d\alpha}{dx}$ o que implica, $\int_x^{x+2w} K(\tau)d\tau = \frac{1}{L} \int_x^{x+2w} \text{sen}(\tau)d\tau - \alpha(x+2w) + \alpha(x) = 2\alpha(x)$, então,

$$L(\alpha(x+2w) + \alpha(x)) = \int_x^{x+2w} \text{sen}(\tau)d\tau.$$

Tomando $x = x - w$ e derivando em relação a x obtemos o resultado.

1.3 A construção das curvas de bicicleta com a razão rotacional $\rho = \frac{1}{2}$

Relembremos que a razão rotacional ρ é a razão entre o comprimento do arco limitado pelo segmento $2L$ e o perímetro da curva Γ . Consideremos um segmento orientado com o comprimento $2L$ no plano euclidiano, caracterizado por seu ponto médio x e o vetor tangente unitário v ao longo do segmento. Sejam $x(t)$ e $v(t)$ as funções suaves descrevendo o movimento do segmento. Nestas condições temos o Lema seguinte:

Lema 1.19 *Os pontos finais do segmento de comprimento $2L$ tem a mesma velocidade se, e só se, $\langle x', v' \rangle = 0$. No caso plano $\langle x', v' \rangle = 0$ se, e só se, $v' = 0$ ou x' é colinear com v .*

Prova: Os pontos finais são os vetores $x \pm Lv$ e suas velocidades são $x' \pm Lv'$, então,

$$\begin{aligned} |x' + Lv'| &= |x' - Lv'| \\ \Leftrightarrow |x' + Lv'|^2 &= |x' - Lv'|^2 \\ \Leftrightarrow \langle Lv', x' + Lv' \rangle &= \langle x' - Lv', x' - Lv' \rangle \\ \Leftrightarrow \langle x', v' \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Então, os pontos finais tem a mesma velocidade se, e só se, $\langle x', v' \rangle = 0$. Como v é um vetor unitário, temos $\langle v', v \rangle = 0$, e ainda que, x' e v são perpendiculares a v' . Se $x' \neq 0$, então, no caso plano, x' e v são colineares.

Pela demonstração anterior, podemos dizer que se um segmento de comprimento $2L$ com seu ponto médio x tangente a trajetória γ e percorrendo-a, então seus pontos finais tem a mesma velocidade. Veja na Figura (1.11).

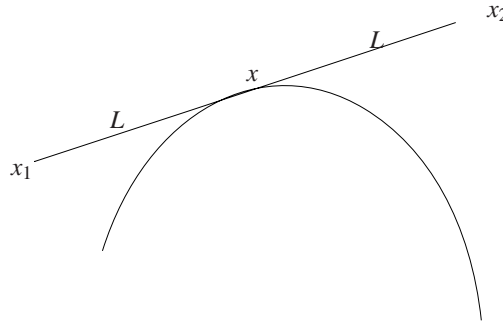


Figura 1.11: x_1 e x_2 tem a mesma velocidade.

Corolário 1.20 *Se um segmento de comprimento fixado está movimentando-se no plano com velocidade angular não nula, tal que seus pontos finais tenham a mesma velocidade, então, o segmento é tangente à trajetória do seu ponto médio.*

Prova: Como a velocidade angular não é zero, implica $v' \neq 0$, então x' e v são colineares.

Definição 1.21 *Uma curva $\gamma(t)$ de classe C^k , onde $k \geq 3$, é denominada de frente de onda se todas as suas singularidades são de Whitney e tem pelo menos uma singularidade.*

Voltamos às curvas de bicicleta ambíguas γ , $\bar{\Gamma}$ e Γ . A trajetória do seu ponto médio pode ter cúspide de Whitney denominada de frente de onda. Agora, estamos prontos para construir uma curva de bicicleta Γ convexa, suave, fechada e plana com a razão rotacional $\rho = \frac{1}{2}$, e relembremos que o segmento de Γ que bissecta o perímetro vai ter um comprimento fixo e uma frente de onda γ . Em termos do problema de bicicleta, Γ é o rastro da roda dianteira e γ é o rastro da roda traseira.

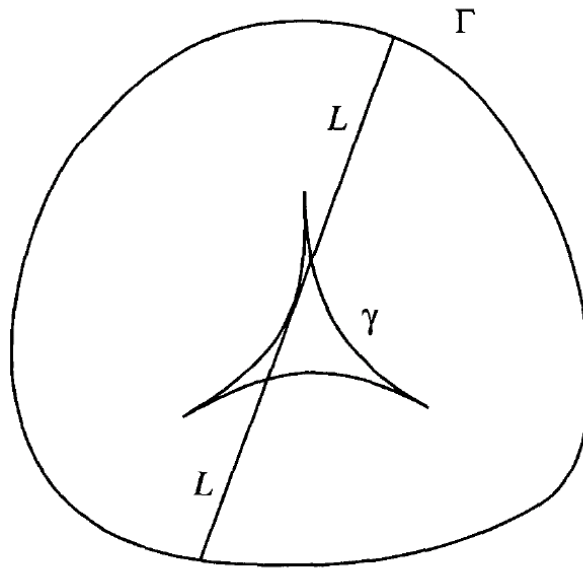


Figura 1.12:

Teorema 1.22 *Seja γ uma frente de onda plana e fechada, com número ímpar de cúspides de Whitney, com rotação total π , sem inflexões, e seja também o ponto médio do segmento $2L$ que passa por γ , tal que, o segmento seja sempre tangente a γ . Então, os pontos finais do segmento percorre a curva de bicicleta Γ que é convexa para L suficientemente grande.*

Prova: Pelo Lema 1.19, se os pontos extremos do segmento $2L$ movimentam com a mesma velocidade, então, o segmento bissecta o perímetro da curva Γ . Pelo Lema 1.9, essas duas metades se ligam suavemente para ter a curva Γ fechada. Vamos provar que para L suficientemente grande, Γ será convexa. Basta provar que a curvatura K da roda dianteira é positiva. Seja γ não parametrizada pelo comprimento de arco, $K = \frac{k + Lk_t k + L^2 k^3}{(1 + L^2 k^2)^{\frac{3}{2}}}$, com $(1 + L^2 k^2)^{\frac{3}{2}}$ sempre positivo. Se L for suficientemente grande, $Lk_t + L^2 k^3$ determina o sinal da curvatura, e como $\gamma(t)$ é C^3 , então $k = \frac{-x''y' + x'y''}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ é C^1 , k_t é contínua, por isso limitadas. Além disso, γ não tem inflexões, então, $k \neq 0$. Assim, comparando Lk_t e $L^2 k^3$, com L suficientemente grande, temos que $L^2 k^3$ determina o sinal.

Agora vamos tirar algumas restrições para demonstrar outra versão. Antes disso, vamos definir convexidade local de uma curva

Definição 1.23 *Seja $C : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada regular. Dizemos que a curva C é localmente convexa se, e somente se, restrição do traço de C digamos, C_0 , a imagem de C restrita a um pequeno intervalo $(s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$ em torno de um dado ponto s_0 , está contido de um lado de sua reta tangente em s_0*

Teorema 1.24 *Seja γ uma frente de onda plana e fechada sem inflexões, seja também o ponto médio de segmento $2L$ que passa por γ , tal que, o segmento mantém-se tangente a γ . Então, para L suficientemente grande, os pontos finais do segmento percorre a curva de bicicleta Γ , que é localmente convexa.*

Prova: Com as condições acima, Γ não será mais uma curva fechada só de rotação 2π , veja na Figura (1.13). O resto da demonstração é análogo.

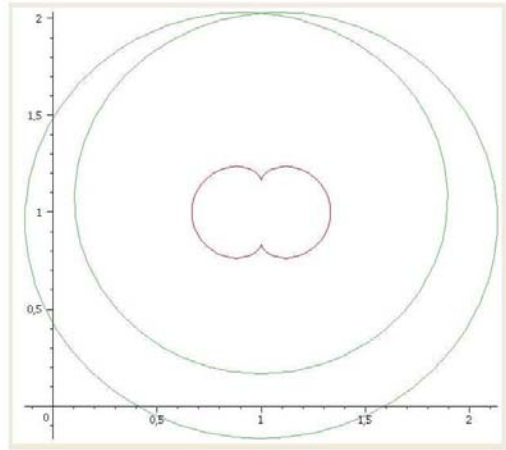


Figura 1.13:

Exemplo 1.25 *Seja $\gamma(t) = (t, t^3)$ definida no intervalo $[-0, 5.0, 5]$, então,*

$$\Gamma(t) = \left(t + \frac{L}{\sqrt{1+9t^4}}, t^3 + \frac{3Lt^2}{\sqrt{1+9t^4}} \right),$$

e

$$k(t) = \frac{-x''y' + x'y''}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = 4t(1+9t^4)^{-3/2}.$$

Como $\gamma(t)$ não é parametrizada pelo comprimento de arco, então,

$$K(t) = \frac{k + Lk_t k + L^2 k^3}{(1 + L^2 k^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{[(4t+L)(1+9t^4)^{-3/2}] - 216t^4(1+9t^4)^{-5/3}][(4t+L^2)(1+9t^4)^{-3/2}]^3}{(1 + L^2[4t(1+9t^4)^{-3/2}]^2)^{3/2}}.$$

Tome $L = 1$, veja na Figura (1.14) de K usando softwares gráficos, ou seja, a curvatura ainda troca de sinal. Se tomamos $L = 10$, o gráfico está acima do eixo x ; veja na Figura (1.15).

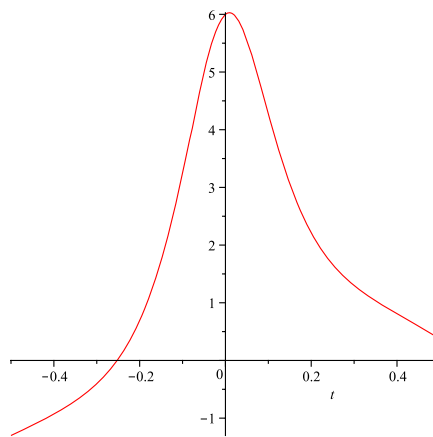


Figura 1.14: O valor de K com $L = 1$

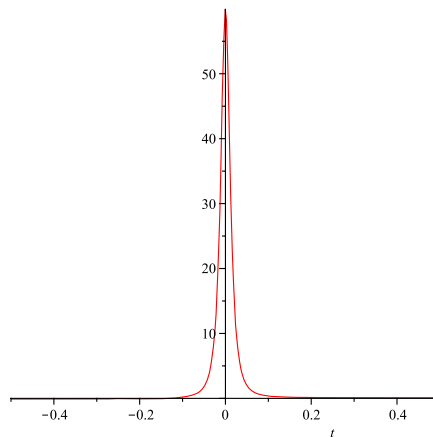


Figura 1.15: O valor de K com $L = 10$

Observação 5: O ângulo $\alpha = \alpha(x)$ entre o segmento $2L$ e Γ , correspondendo às curvas do Teorema (1.22) satisfaz $\alpha(x - \pi/2) + \alpha(x + \pi/2) = \pi$. De fato, suponha que Γ percorre no sentido anti-horário, e seja $A = \alpha(x - \pi/2)$, de acordo com o Lema 1.15, $A = B$ e $C = \alpha(x + \pi/2)$. Então, $\alpha(x - \pi/2) + \alpha(x + \pi/2) = \pi$, veja na Figura (1.16).

1.4 Restrições sobre a quantidade de vértices e a razão rotacional

Definição 1.26 Um vértice de uma curva regular de classe C^r , $r \geq 2$, $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um ponto $t \in [a, b]$, onde $k'(t) = 0$

Para entender resultados importantes sobre vértices e razão rotacional, vamos demonstrar o Teorema de "Vogt" e citar o Teorema de "Fabricius-Bjerre". Outras informações na referência ([HG]) {pg49}.

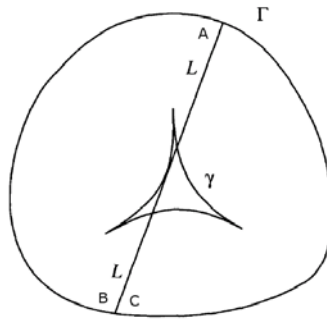


Figura 1.16:

Teorema 1.27 (Vogt) *Sejam A e B os pontos finais de uma curva, tal que, a curvatura não decresce de A a B. Então o ângulo β do vetor tangente da curva em B com o segmento AB não é menor que o ângulo α do vetor tangente da curva em A com AB. Além disso, $\alpha = \beta$ se, e só se, a curvatura é constante.*

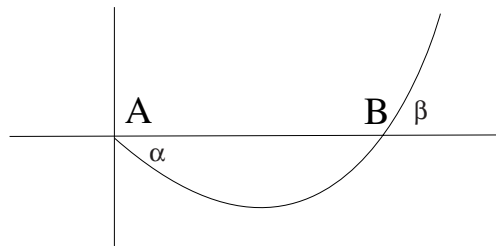


Figura 1.17:

Prova: Sem perda de generalidade, seja $L(s) = (x(s), y(s))$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, onde $L(0) = A$ e $L(l) = B$, tal que, $y(s) < 0$, $0 < s < l$, veja na Figura (1.17). Vamos mostrar que $\theta(l) = \beta \geq \alpha = \theta(0)$, ou seja, $\cos(\theta(l)) \leq \cos\theta(0)$. Por hipótese $k(s_{i+1}) - k(s_i) \geq 0$, assim temos,

$$\cos(\theta(0)) - \cos(\theta(l)) = \int_{\theta(0)}^{\theta(l)} \text{sen}\theta d\theta = \int_0^l y'(s)k(s)ds = - \int_0^l y(s)k'(s)ds \geq 0.$$

Enfim, a igualdade pode ser mantida se, e só se, k é constante.

Teorema 1.28 (Fabricius-Bjerre) *Seja AB uma curva convexa, tal que, um círculo S é o círculo da curvatura tanto em A quanto em B. Se S é tangente nos pontos da curva por fora, então a curva possui no mínimo 3 vértices; e se S é tangente nos pontos da curva por dentro, então a curva possui no mínimo 4 vértices, veja na Figura (1.18) e na referência ([HG]) (pg54).*

Suponha que Γ é uma curva suave, fechada, convexa e plana. O próximo resultado mostra que se Γ não é um círculo, então, a razão rotacional ρ não pode ser pequena. Continuaremos a usar a mesma notação como a anterior, em particular $w = \pi\rho$.

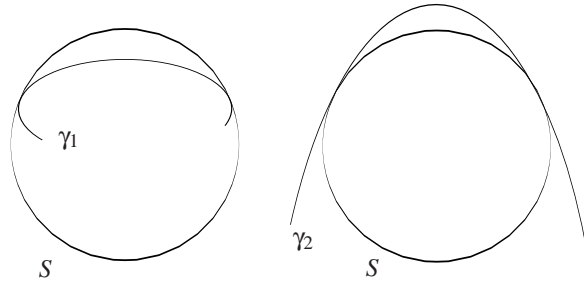


Figura 1.18: γ_1 e γ_2 possuem no mínimo 3 e 4 vértices respectivamente.

Teorema 1.29 Para cada arco de Γ de comprimento $2w$ tem-se no mínimo um vértice.

Prova: Como Γ não é círculo, então a curvatura K não é constante. Suponha por absurdo que Γ não possui vértices, ou seja, $K'(s) \neq 0$, então K é estritamente crescente ou decrescente. Suponha que K é estritamente crescente, então, pelo Teorema de Vogt, o ângulo α formado pelo segmento $\Gamma(x-w)\Gamma(x+w)$ com a curva Γ no ponto $\Gamma(x-w)$ é diferente do ângulo β no ponto $\Gamma(x+w)$, que contraria o Lema 1.15 pelo qual, $\alpha = \beta$.

Observação 6: Segue do Teorema anterior que $2w$ é maior do que a maior distância entre dois vértices consecutivos. Por isso, dizemos que a razão rotacional ρ não pode ser pequena. Aqui há outra restrição sobre a curva Γ em termos de vértices.

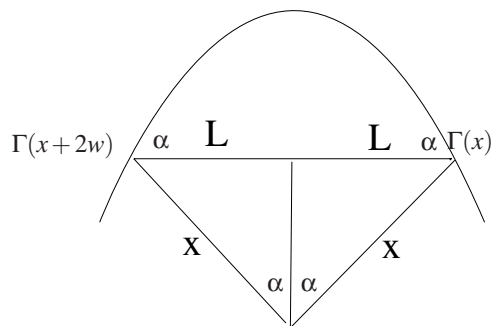


Figura 1.19:

Teorema 1.30 Seja $\Gamma(x)$ uma curva da roda dianteira, suave, fechada, convexa e seja também um segmento de comprimento $2L$ com os pontos finais percorrendo a curva Γ . Então Γ possui no mínimo 6 vértices.

Prova: Como Γ não é um círculo, $\alpha(x)$ não é constante, e mais ainda, Γ é uma curva fechada, então $\alpha(x)$ não é estritamente crescente, assim existe um ponto x tal que $\alpha'(x) = 0$. Pela Equação (1-18), as curvaturas nos pontos $\Gamma(x)$ e $\Gamma(x+2w)$ são iguais. Além disso, $X = \frac{L}{\text{sen}\alpha}$, que é justamente o valor inverso de K , veja a Figura (1.19). Ou seja, os centros de curvaturas nos pontos $\Gamma(x)$ e $\Gamma(x+2w)$ coincidem. Como Γ é uma

curva fechada, então, existem dois arcos limitados pelo segmento $\Gamma(x)\Gamma(x+2w)$, tal que, uma tem comprimento $2w$ e a outra $2\pi - 2w$. Pelo Teorema de Fabricius-Bjerre, cada arco possui no mínimo 3 vértices, e enfim, Γ possui no mínimo 6 vértices.

Teorema 1.31 *Se a razão rotacional é igual a $\frac{1}{3}$, então Γ é um círculo.*

Prova: Assumimos que o perímetro é igual a 2π , então para cada $x \in [0, 2\pi]$ o triângulo com vértices $\Gamma(x)$, $\Gamma(x + \frac{2\pi}{3})$ e $\Gamma(x + \frac{4\pi}{3})$ é equilátero, por isso, $A + B + C = \pi$ e $A = B = C = \pi/3$, veja na Figura (1.20). Seja $\alpha(x)$, $\alpha(x + 2\pi/3)$ e $\alpha(x + 4\pi/3)$ os ângulos entre cada segmento e a curva Γ . Temos $2(\alpha(x) + \alpha(x + 2\pi/3) + \alpha(x + 4\pi/3)) + A + B + C = 3\pi$, que implica, $2(\alpha(x) + \alpha(x + 2\pi/3) + \alpha(x + 4\pi/3)) = 2\pi$, então, $\alpha(x) + \alpha(x + 2\pi/3) + \alpha(x + 4\pi/3) = \pi$. Por outro lado, $\alpha(x) + \alpha(x + 2\pi/3) = 2\pi/3$, pois $\alpha(x) + \alpha(x + 2\pi/3) + \pi/3 = \pi$. Analogamente, $\alpha(x + 2\pi/3) + \alpha(x + 4\pi/3) = 2\pi/3$

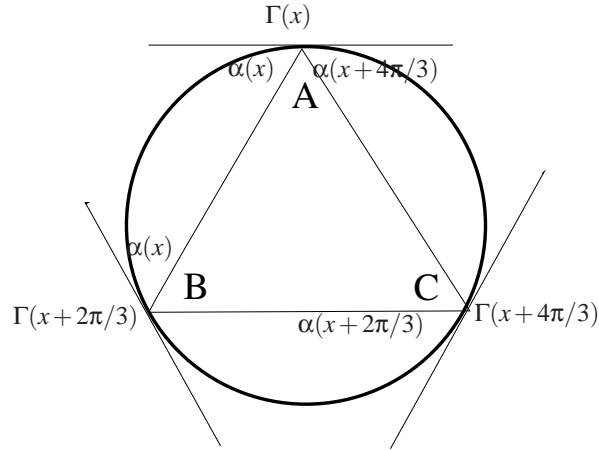


Figura 1.20:

e $\alpha(x) + \alpha(x + 4\pi/3) = 2\pi/3$, então $\alpha(x) = \pi/3$ para todo x . Pela Equação (1-5), a curvatura de Γ é constante, então é um círculo.

Teorema 1.32 *Se a razão rotacional é igual a $\frac{1}{4}$, então Γ é um círculo.*

Prova: Para cada x , o quadrilátero $\Gamma(x)\Gamma(x + \pi/2)\Gamma(x + \pi)\Gamma(x + 3\pi/2)$ é um losango e $A + B + C + D = 2\pi$, veja Figura 1.21. Sejam $\alpha(x)$, $\alpha(x + \pi/2)$, $\alpha(x + \pi)$ e $\alpha(x + 3\pi/2)$ os respectivos ângulos entre os segmentos e a curva Γ . Consequentemente, temos,

$$2(\alpha(x) + \alpha(x + \pi/2) + \alpha(x + \pi) + \alpha(x + 3\pi/2)) + A + B + C + D = 4\pi,$$

e mais ainda,

$$\alpha(x) + \alpha(x + \pi/2) + \alpha(x + \pi) + \alpha(x + 3\pi/2) = \pi.$$

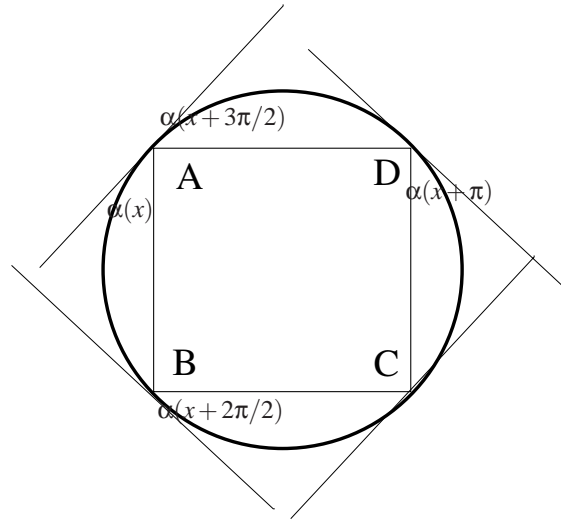


Figura 1.21:

Como os ângulos opostos do losango são iguais, então,

$$\alpha(x) + \alpha(x + \pi/2) = \alpha(x + \pi) + \alpha(x + 3\pi/2).$$

Segue-se,

$$\alpha(x) + \alpha(x + \pi/2) = \pi/2, \text{ e } \alpha'(x) + \alpha'(x + \pi/2) = 0.$$

Consequentemente, $B = \pi/2$. E, analogamente, $A = B = C = D = \pi/2$. Então, o losango é um quadrado e sabe-se também que,

$$\text{sen}\alpha(x+w) - \text{sen}\alpha(x-w) = L(\alpha'(x+w) + \alpha'(x-w)) = 0,$$

$$\Rightarrow \text{sen}\alpha(x) - \text{sen}\alpha(x + \pi/2) = L(\alpha'(x) + \alpha'(x + \pi/2)) = 0,$$

$$\Rightarrow \text{sen}\alpha(x) = \text{sen}\alpha(x + \pi/2) \rightarrow \alpha(x) = \pi/2.$$

De acordo com a Equação (1-5), a curvatura de Γ é constante, então é um círculo.

1.5 Deformação infinitesimal do círculo

Definição 1.33 Seja $\Gamma_0(x)$ uma curva e $v(x)$ um campo de vetores ao longo da $\Gamma_0(x)$, e considere a deformação $\Gamma(x) = \Gamma_0(x) + \varepsilon v(x)$, então dizemos que a deformação é infinitesimal se, e somente se, $\frac{d}{d\varepsilon}(|\Gamma'_\varepsilon|)|_{\varepsilon=0} = 0$.

Pela definição concluímos que a deformação é infinitesimal se, e somente se, $\langle v', \Gamma'_0 \rangle = 0$.

Definição 1.34 *Seja ρ uma função diferenciável, dizemos que a função é ortogonal aos primeiros harmônicos se,*

$$\int_0^{2\pi} \rho(x)\cos(x)dx = \int_0^{2\pi} \rho(x)\sen(x)dx = 0.$$

Seja $H = [\cos(x), \sen(x)] \oplus W$ o espaço de funções periódicas integráveis, sendo W o subespaço das funções ortogonais aos primeiros harmônicos. E qualquer função diferenciável pode ser representada por, $f(x) = a_1\cos(x) + a_2\sen(x) + p(x)$, onde $p(x) \in W$; além disso, $f''(x) = -a_1\cos(x) - a_2\sen(x) + p''(x)$, e mais ainda, $f(x) + f''(x) = p(x) + p''(x)$, tal que, a soma pertence a W .

Seja uma função $g \in W$, então, existe uma função f , tal que, $g = f + f''$. De fato, tome, $f(x) = C_1 \sen(x) + C_2 \cos(x) + [\int \cos(x)g(x)dx]\sen(x) - [\int \sen(x)g(x)dx]\cos(x)$, derive duas vezes e some com f .

Consideramos agora, uma curva de bicicleta obtida do círculo por uma deformação infinitesimal.

Teorema 1.35 *O círculo admite deformação infinitesimal não trivial a uma curva de bicicleta suave e fechada com perímetro 2π e a razão rotacional ρ se, e somente se, ρ é a raiz da equação,*

$$n \operatorname{tg}(\pi\rho) = \operatorname{tg}(n\pi\rho),$$

ou,

$$\frac{\operatorname{cotg}(\pi\rho)}{n} = \operatorname{cotg}(n\pi\rho),$$

onde, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

Prova: Seja $\Gamma_0(x) = (\cos(x), \sen(x))$ um círculo unitário e $v(x)$ um campo de vetores ao longo da Γ_0 . Considere a deformação infinitesimal $\Gamma_\varepsilon(x) = \Gamma_0(x) + \varepsilon v(x)$ e, seja também, parametrizada pelo comprimento de arco. Como $\langle \Gamma'_0(x), v'(x) \rangle = 0$, então, $\langle (-\sen(x), \cos(x)), v'(x) \rangle = 0$. Isto implica que, $v'(x) = g(x)(\cos(x), \sen(x))$, para alguma função g . Note que,

$$\int_0^{2\pi} v'(x)dx = 0,$$

pois, $v(x)$ é o campo vetorial sobre Γ_0 fechada, ou seja, $v(x) = v(x + 2\pi)$, é periódica, então, $v(2\pi) = v(0)$, e isto implica que,

$$\int_0^{2\pi} g(x)\cos(x)dx = \int_0^{2\pi} g(x)\sen(x)dx = 0,$$

ou seja, $g(x)$ é ortogonal aos primeiros harmônicos. Então, $g(x) = f(x) + f''(x)$, para alguma função f . Como v é periódico, implica que g também o é. De fato, $v(x) = v(x + 2\pi)$. Portanto, $f(x)$ também é periódico. De fato, sejam, $E(x) = \int \cos(x)g(x)dx$ e $F(x) =$

$\int \text{sen}(x)g(x)dx$, então, $E(x) = E(0) + \int_0^x \cos(t)g(t)dt$, e $F(x) = F(0) + \int_0^x \text{sen}(t)g(t)dt$, implica que, $E(x + 2\pi) - E(x) = \int_x^{x+2\pi} \cos(t)g(t) = \int_0^{2\pi} \cos(t)g(t) = 0$, e, analogamente, $F(x + 2\pi) - F(x) = 0$.

Note também que, $f(x)$ é ortogonal aos primeiros harmônicos. De fato,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{2\pi} g(x)\text{sen}(x)dx \\ &= \int_0^{2\pi} (f(x) + f''(x))\text{sen}(x)dx \\ &= \int_0^{2\pi} f(x)\text{sen}(x)dx + f'(x)\text{sen}(x)|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f'(x)\cos(x)dx \\ &= \int_0^{2\pi} f(x)\text{sen}(x)dx - f(x)\cos(x)|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} f(x)\text{sen}(x)dx \\ &= 2 \int_0^{2\pi} f(x)\text{sen}(x)dx. \end{aligned}$$

Também temos,

$$v(x) = \int_0^x (f(s) + f''(s))(\cos(s), \text{sen}(s))ds.$$

Fazendo as integrações por partes, duas vezes, obtemos,

$$\begin{aligned} \int_0^x (f(x) + f''(s))\cos(s)ds &= f(s)\text{sen}(s)|_0^x - \int_0^x \text{sen}(s)ds + f'(s)\cos(s)|_0^x \\ &+ \int_0^x f'(s)\text{sen}(s)ds \\ &= f(s)\text{sen}(s) + f'(s)\cos(s) + c_1, \\ \int_0^x (f(x) + f''(s))\text{sen}(s)ds &= -f(s)\cos(s)|_0^x + \int_0^x \cos(s)ds + f'(s)\text{sen}(s)|_0^x \\ &- \int_0^x f'(s)\cos(s)ds \\ &= -f(s)\cos(s) + f'(s)\text{sen}(s) + c_2. \end{aligned}$$

Escolhendo $c_1 = c_2 = 0$, então,

$$v(s) = (f(s)\text{sen}(s) + f'(s)\cos(s), -f(s)\cos(s) + f'(s)\text{sen}(s)). \quad (1-19)$$

Note que, se f é uma constante k , então, a deformação correspondente v é uma rotação do círculo. Sem perder a generalidade, suponhamos que f não seja constante.

No círculo com raio igual a 1 o ângulo central $2w$ vai formar com um arco delimitado pelo segmento de comprimento $2L$, veja Figura (1.22). Assim, aplicando a lei dos cossenos, e, encontramos $L = \text{sen}(w)$, e o comprimento do arco limitado por $2L$, também é de $2w$. Pela deformação infinitesimal, seja $2L = 2(\text{sen}(w) + \epsilon c)$, então:

$$|\Gamma(x + w) - \Gamma(x - w)| = 2(\text{sen}(w) + \epsilon c),$$

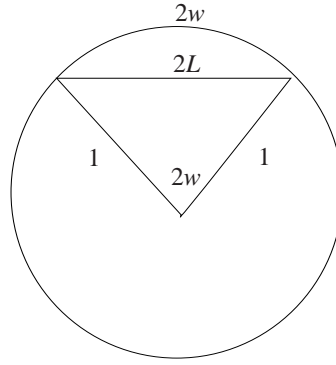


Figura 1.22:

e $|\Gamma(x+w) - \Gamma(x-w)|^2 = |\Gamma_0(x+w) - \Gamma_0(x-w)|^2 + 2\varepsilon < \Gamma_0(x+w) - \Gamma_0(x-w), v(x+w) - v(x-w) > + \varepsilon^2 |v(x+w) - v(x-w)|^2 = 4(\text{sen}^2(w) + 2\varepsilon \text{csen}(w) + \varepsilon^2 c^2)$. Logo,

$$\langle \Gamma_0(x+w) - \Gamma_0(x-w), v(x+w) - v(x-w) \rangle = 4\text{csen}(w).$$

Tome a Equação 1-19 e $\Gamma_0(x) = (\cos(x), \text{sen}(x))$ e substitua na equação anterior:

$$\begin{aligned} & \langle \Gamma_0(x+w) - \Gamma_0(x-w), v(x+w) - v(x-w) \rangle \\ &= (f(x+w) - f(x-w))[\text{sen}(x-w)\cos(x+w)] \\ & \quad - (f(x+w) - f(x-w))[\text{sen}(x+w)\cos(x-w)] \\ & \quad - (f'(x+w) - f'(x-w))[\cos(x+w)\cos(x-w)] \\ & \quad - (f'(x+w) - f'(x-w))[\text{sen}(x+w)\text{sen}(x-w)] \\ & \quad + (f'(x+w) - f'(x-w)) \\ &= (f(x+w) - f(x-w))\text{sen}(-2w) + (f'(x+w) - f'(x-w))[1 - \cos(2w)]. \end{aligned}$$

Assim, temos,

$$[f'(x+w) - f'(x-w)]2\text{sen}^2(w) - [f(x+w) - f(x-w)]2\text{sen}(w)\cos(w) = 4\text{csen}(w),$$

ou,

$$[f'(x+w) - f'(x-w)]\text{sen}(w) - [f(x+w) - f(x-w)]\cos(w) = 2c \quad (1-20)$$

Como f também é periódica no intervalo $[0, 2\pi]$, então,

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_0^{2\pi} f(x+w)dx = \int_0^{2\pi} f(x-w)dx,$$

e,

$$\int_0^{2\pi} f'(x+w) + f'(x-w)dx = f(2\pi+w) - f(w) + f(2\pi-w) - f(-w) = 0.$$

Então, a integral da Equação, (1-20) no intervalo $[0, 2\pi]$, é 0, o que implica $c = 0$.

Logo,

$$(f'(x+w) + f'(x-w))\text{sen}(x) = (f(x+w) - f(x-w))\text{cos}(w).$$

Seja,

$$f(\phi) = \sum_{|n| \geq 2} a_n e^{in\phi}, \quad \bar{a}_n = a_{-n},$$

a expansão de Fourier de f . Temos que $|n| \geq 2$, pois, f é periódico, $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$, e além disso, $f(x)$ é ortogonal ao primeiro harmônico. Aplicando na Equação (1-20), temos,

$$\begin{aligned} \sum a_n [-n \text{sen}(nx) \text{cos}(nw) + in \text{cos}(nx) \text{cos}(nw)] \text{sen}(w) = \\ \sum a_n [-\text{sen}(nx) \text{sen}(nw) + i \text{sen}(nw) \text{cos}(nx)] \text{cos}(w), \end{aligned}$$

ainda temos,

$$\begin{aligned} 0 = \sum a_n (n \text{cos}(nw) \text{sen}(w) - \text{cos}(w) \text{sen}(nw)) \text{sen}(nw) + \\ i \sum a_n (n \text{cos}(nw) \text{sen}(w) - \text{cos}(w) \text{sen}(nw)) \text{cos}(nx). \end{aligned}$$

Isto implica que,

$$a_n (n \text{cos}(nw) \text{sen}(w) - \text{cos}(w) \text{sen}(nw)) = 0, \quad (1-21)$$

para todo $n \geq 2$. O coeficiente de Fourier a_n é não nulo se, e só se,

$$\text{cos}(nw) \text{sen}(w) = \text{cos}(w) \text{sen}(nw),$$

a qual é equivalente à equação,

$$n \text{tg}(\pi\rho) = \text{tg}(n\pi\rho),$$

ou,

$$\frac{\text{cotg}(\pi\rho)}{n} = \text{cotg}(n\pi\rho).$$

Inversamente, se, $n \text{tg}(\pi\rho) = \text{tg}(n\pi\rho)$, ou, $\frac{\text{cotg}(\pi\rho)}{n} = \text{cotg}(n\pi\rho)$, para algum $n \geq 2$, então podemos escolher $f(x)$ como sendo o n -ésimo harmônico, por exemplo, $\text{sen}(nx)$. Então, a deformação infinitesimal do círculo unitário dada pela Equação (1-19), é uma curva de bicicleta.

1.6 Deformação infinitesimal das curvas de bicicleta com razão rotacional 1/2

Considere a solução da Equação (1-17) satisfazendo $\alpha(x + \pi) = \pi - \alpha(x)$. Tal solução corresponde às curvas de bicicleta do Teorema (1.22), com a razão rotacional $\rho = 1/2$. Seja, $\alpha(x) = \pi/2 + \beta(x)$, e seja, também, β uma função ímpar. Nesta seção, vamos estudar as deformações infinitesimais de tais soluções.

Façamos a mudança na razão rotacional. Seja $\rho = 1/2 - \varepsilon/\pi$ como a razão rotacional deformada, então $w = \pi\rho = \pi(1/2 - \varepsilon/\pi) = \pi/2 - \varepsilon$. Seja $\tilde{\alpha}(x) = \pi/2 + \beta(x) + \varepsilon f(x)$, o novo ângulo deformado entre os vetores (γ, Γ) . Supomos que f é uma função par satisfazendo, $f(x - \frac{\pi}{2}) = f(x + \frac{\pi}{2})$. Seja $L + \varepsilon l$ o novo comprimento deformado entre a roda dianteira e a roda traseira.

Teorema 1.36 *Existe uma deformação infinitesimal como acima se, e só se, a função,*

$$f(x) = C(x)e^{\int \frac{-\text{sen}\beta(s)ds}{L}},$$

$$\text{onde, } C(x) = \int \left(\frac{\beta'(x)\text{sen}(\beta(x)) + \beta'(x)}{L} e^{-\int \text{sen}(\beta(s))ds} \right) dx.$$

Prova: Seja $x \pm \pi/2$ trocado por x_{\pm} . Como $\tilde{\alpha}(x) = \pi/2 + \beta(x) + \varepsilon f(x)$, então, $\tilde{\alpha}(x + w) = \pi/2 + \beta(x_+ - \varepsilon) + \varepsilon f(x_+ - \varepsilon)$, implica que, $\text{sen}(\tilde{\alpha}(x + w)) = \text{cos}(\beta(x_+ - \varepsilon) + \varepsilon f(x_+ - \varepsilon))$. Analogamente, $\text{sen}(\tilde{\alpha}(x - w)) = \text{cos}(\beta(x_- + \varepsilon) + \varepsilon f(x_- + \varepsilon))$. Então a Equação (1-17) pode ser reescrita como,

$$\begin{aligned} & \text{cos}(\beta(x_+ - \varepsilon) + \varepsilon f(x_+ - \varepsilon)) - \text{cos}(\beta(x_- + \varepsilon) + \varepsilon f(x_- + \varepsilon)) \\ &= (L + \varepsilon l)(\beta'(x_+ - \varepsilon) + \varepsilon f'(x_+ - \varepsilon) + \beta'(x_- + \varepsilon) + \varepsilon f'(x_- + \varepsilon)). \end{aligned} \quad (1-22)$$

Calculemos a série de Taylor módulo ε^2 . Então,

$$\begin{aligned} \text{cos}(\beta(x_+ - \varepsilon) + \varepsilon f(x_+ - \varepsilon)) &= \text{cos}(\beta(x_+) - \varepsilon\beta'(x_+) + \varepsilon(f(x_+) - \varepsilon f'(x_+))) \\ &= \text{cos}(\beta'(x_+) - \varepsilon(\beta'(x_+) - f(x_+))) \\ &= \text{cos}(\beta(x_+)) + \varepsilon(\beta'(x_+) - f(x_+))\text{sen}(\beta(x_+)). \end{aligned}$$

E, analogamente,

$$\text{cos}(\beta(x_- + \varepsilon) + \varepsilon f(x_- + \varepsilon)) = \text{cos}(\beta(x_-)) - \varepsilon(\beta'(x_-) + f(x_-))\text{sen}(\beta(x_-)).$$

Também, tem-se,

$$\beta'(x_+ - \varepsilon) = \beta'(x_+) - \varepsilon\beta''(x_+), \quad \beta'(x_- + \varepsilon) = \beta'(x_-) + \varepsilon\beta''(x_-),$$

$$f'(x_+ - \varepsilon) = f'(x_+) - \varepsilon f''(x_+), \quad f'(x_- + \varepsilon) = f'(x_-) + \varepsilon f''(x_-).$$

Como β é uma função ímpar, então $\beta(x_-) = -\beta(x_+)$. De fato, como $\alpha(x) = \frac{\pi}{2} + \beta(x)$ e $\alpha(x + \frac{\pi}{2}) + \alpha(x - \frac{\pi}{2}) = \pi$, implica que, $\beta(x + \frac{\pi}{2}) + \beta(x - \frac{\pi}{2}) = 0$, e além disso, $\beta(x + \frac{\pi}{2}) = -\beta(-x + \frac{\pi}{2})$, pois, β é ímpar. Enfim, $\beta(x - \frac{\pi}{2}) = -\beta(-x + \frac{\pi}{2}) = -\beta(x + \frac{\pi}{2})$. E lembramos também que $f(x_-) = f(x_+)$.

Substituindo todos os resultados na Equação (1-22), obtemos,

$$(\beta'(x) - f(x))\text{sen}(\beta(x)) = L(f'(x) - \beta''(x)), \quad (1-23)$$

onde x_+ é substituído por x . Resolvendo a equação diferencial, temos, $Lf'(x) + f(x)\text{sen}\beta(x) = \beta'(x)\text{sen}\beta(x) + \beta''(x)$. Resolvemos primeiro $Lf'(x) + f(x)\text{sen}\beta(x) = 0$, implica que,

$$\begin{aligned} f(x) &= C(x)e^{\int \frac{-\text{sen}\beta(s)ds}{L}}, \\ f'(x) &= \frac{-\text{sen}(\beta(x))}{L}f(x) + C'(x)e^{\int \frac{-\text{sen}(\beta(s))ds}{L}}, \\ Lf'(x) + f(x)\text{sen}(\beta(x)) &= LC'(x)e^{\int \text{sen}(\beta(s))ds}. \end{aligned}$$

Ou seja, $LC'(x)e^{\int \text{sen}(\beta(s))ds} = \beta'(x)\text{sen}\beta(x) + \beta''(x)$. Enfim, temos,

$$C(x) = \int \left(\frac{\beta'(x)\text{sen}(\beta(x)) + \beta''(x)}{L} e^{-\int \text{sen}(\beta(s))ds} \right) dx.$$

1.7 A construção das curvas com cúspides

Sempre consideramos as curvas traseiras da roda traseira de bicicleta com cúspides, porém, como conseguimos curvas com cúspides?

A seguir, vamos desenvolver um método de construir tais curvas.

Vamos considerar curvas regulares $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrizadas pelo comprimento de arco, tais que, sua curvatura k não se anule em I . Nesse caso, para cada $t \in I$, está bem definido o centro de curvatura de α em t , dado por,

$$\beta(t) = \alpha(t) + \frac{N(t)}{k(t)},$$

onde N é o campo normal e unitário de α . A aplicação que a cada $t \in I$ associa $\beta(t)$, define uma curva diferenciável em \mathbb{R}^2 , e é chamada *evolva* da curva α . Vamos estudar a

regularidade de β .

$$\begin{aligned}\beta'(t) &= \alpha' + N'k^{-1} + N(k^{-1})' \\ &= \alpha' + (-k)\alpha'k^{-1} - Nk^{-2}k' \\ &= \frac{-k'}{k^2}N.\end{aligned}$$

Temos, portanto, que $\beta(t)$ é regular se, e somente se,

$$k_t(t) \neq 0.$$

Então, se $k_t = 0$, implica que, $\beta' = 0$. Para achar as demais condições de cúspides, continuamos derivar sobre t ,

$$\begin{aligned}\beta'' &= \left(\frac{-k'}{k^2}\right)'N + \left(\frac{-k'}{k^2}\right)N' \\ &= \left(\frac{-k''}{k^2} + \frac{2k'^2}{k^3}\right)N + \left(\frac{-k'}{k^2}\right)(-k\alpha') \\ &= \left(\frac{-k''}{k^2} + \frac{2k'^2}{k^3}\right)N + \frac{k'}{k}\alpha', \\ \beta''' &= \left(\frac{-k''}{k^2} + \frac{2k'^2}{k^3}\right)'N + \left(\frac{-k''}{k^2} + \frac{2k'^2}{k^3}\right)(-k\alpha') + \left(\frac{k'}{k}\right)'\beta' + \frac{k'}{k}kN \\ &= \left(\frac{-k'''}{k^2} + \frac{2k''k'}{k^3} + \frac{4k''k'}{k^3} - \frac{6k'^3}{k^4} - k'\right)N + \left(\frac{k''}{k} - \frac{2k'^2}{k^2} + \frac{k''}{k} - \frac{k'^2}{k^2}\right)\alpha' \\ &= \left(\frac{-k'''}{k^2} + \frac{6k''k'}{k^3} - \frac{6k'^3}{k^4} - k'\right)N + \left(\frac{2k''}{k} - \frac{3k'^2}{k^2}\right)\alpha'.\end{aligned}$$

Consequentemente, o ponto $\beta(t)$ é cúspide de Whitney, se e somente se, $k'(t) = 0$ e $k''(t) \neq 0$.

Exemplo 1.37 Seja $\alpha(t) = (2\cos(t), \sin(t))$, então,

$$\beta(t) = \left(2\cos(t) - \frac{1}{2} \frac{\cos(t)(-3\cos^2(t) + 4)^{3/2}}{\sqrt{4\sin^2(t) + \cos^2(t)}}, \sin(t) - \frac{\sin(t)(-3\cos^2(t) + 4)^{3/2}}{\sqrt{4\sin^2(t) + \cos^2(t)}}\right),$$

veja na Figura (1.23).

1.8 Alguns exemplos interessantes

Ao pensar as relações entre as curvas dianteira e traseira, surgiram muitos exemplos interessantes, vamos apresentá-los nesta seção.

Exemplo 1.38 Seja $x(t)$ um móvel com a velocidade $x'(t) = v(t)$ e a aceleração $x''(t) = a(t)$. No mundo físico, em geral, quando um móvel está movimentando com velocidade

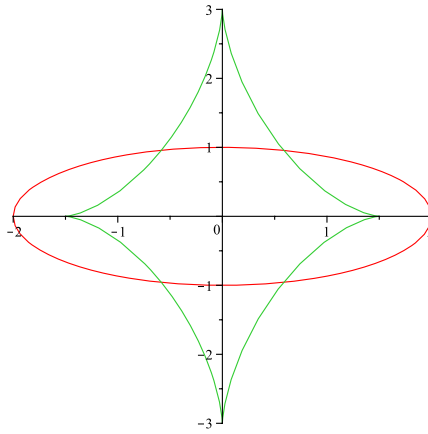


Figura 1.23: Evoluta da elipse

crescente, a aceleração do móvel está limitada, ou seja, existem duas constantes k_1 e k_2 , tal que $0 < k_1 < a(t) < k_2$, então a curvatura tende a 0, ou seja, a curva do móvel tende a reta retilínea. De fato,

$$|k| = \frac{|-x''y' + y''x'|}{|x'^2 + y'^2|^{3/2}} \leq \frac{k_2|y'| + k_2|x'|}{[v(t)]^{3/2}} \leq \frac{2k_2v(t)}{[v(t)]^{3/2}} = \frac{2k_2}{[v(t)]^{1/2}}.$$

E a última equação tende a 0 quando a velocidade tende ao infinito.

Exemplo 1.39 Seja T uma bicicleta de 3 rodas, $\gamma(t)$, $\Gamma(t)$ e $\bar{\Gamma}(t)$, tal que $\Gamma(t) = \gamma(t) + L_1\gamma'(t)$ e $\bar{\Gamma}(t) = \Gamma(t) + L_2\frac{\Gamma'(t)}{|\Gamma'(t)|}$, ou seja, um modelo simplificado de caminhão "Bitrem" com γ parametrizada pelo comprimento de arco. Qual será a trajetória da $\bar{\Gamma}$ quando γ e Γ estão percorrendo dois círculos concêntricos onde C_1 e C_2 são, respectivamente, traçadas pelas γ e Γ ?

A) Sabe-se que a velocidade da Γ é maior que a da γ , então C_2 é maior que C_1 . E, além disso, sabe-se que se a roda traseira percorre em um círculo, então, a roda dianteira também anda em um círculo, por isso, como Γ é a roda traseira em relação a $\bar{\Gamma}$, implica que $\bar{\Gamma}$ percorre o terceiro círculo concêntrico C_3 .

B) Sabe-se $k = \frac{tg\alpha}{L_1}$, onde k é a curvatura da γ e α é o ângulo entre os vetores (γ, Γ) , ou seja, se aumentar C_1 , diminuirá o valor absoluto do ângulo α .

C) Sejam R_1 , R_2 e R_3 os raios dos círculos C_1 , C_2 e C_3 , respectivamente, então, $\text{arc tg}(\frac{L_1}{R_1}) = \alpha$, e $\text{arc tg}(\frac{L_2}{R_2}) = \beta$, onde β é o ângulo entre Γ e $\bar{\Gamma}$.

Exemplo 1.40 Tome um semi-círculo S , e sejam A e D dois pontos nas extremidades. Marque dois pontos B e C , de modo que $\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD}$, em seguida dobre o arco AB no

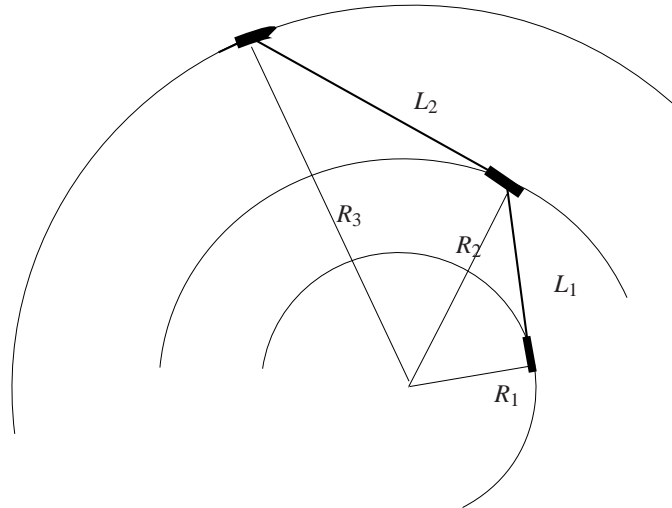


Figura 1.24:

sentido horário e o arco CD no sentido anti-horário de modo que A se encontra com B, conforme a Figura (1.25).

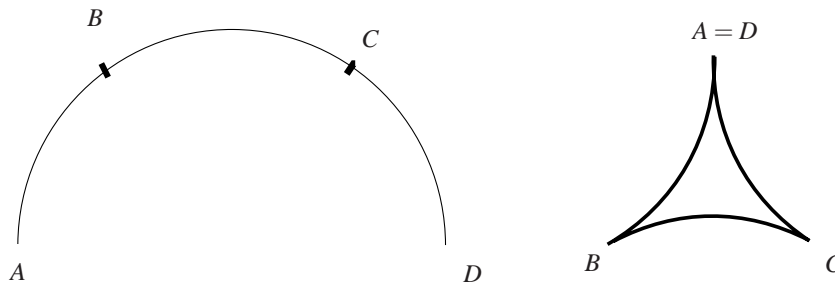


Figura 1.25: Uma curva fechada com 3 singularidades

As 3 cúspides são de Whitney? Para responder isso, construiremos a curva dianteira desta curva, e notamos que a curva dianteira também possui uma singularidade (bico) no meio, o que contraria o Lema 1.9, ou seja, os 3 “bicos” não são cúspides de Whitney.

Um exemplo natural de curvas ambíguas é um par de círculos concêntricos, cujos raios r e R satisfazem $R^2 - r^2 = L^2$. Vamos ver um exemplo de (γ, Γ) que não seja um par ambíguo.

Exemplo 1.41 Seja $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ no intervalo $[-1, 1]$, e no ponto $(0, 0)$ aparece uma singularidade. Se definimos $\Gamma(t) = (t^2 + \frac{2t}{\sqrt{4t^2+9t^4}}, t^3 + \frac{3t^2}{\sqrt{4t^2+9t^4}})$ no intervalo $[-1, 0]$, então, $\Gamma(t) = (t^2 - \frac{2t}{\sqrt{4t^2+9t^4}}, t^3 - \frac{3t^2}{\sqrt{4t^2+9t^4}})$ no intervalo $[0, 1]$ veja na Figura (1.27). Se mudarmos a direção da bicicleta com a mesma traseira, então $\bar{\Gamma}(t) = (t^2 - \frac{2t}{\sqrt{4t^2+9t^4}}, t^3 - \frac{3t^2}{\sqrt{4t^2+9t^4}})$ no intervalo $[-1, 0]$, conseqüentemente, $\bar{\Gamma}(t) = (t^2 + \frac{2t}{\sqrt{4t^2+9t^4}}, t^3 + \frac{3t^2}{\sqrt{4t^2+9t^4}})$, veja na Figura (1.28).

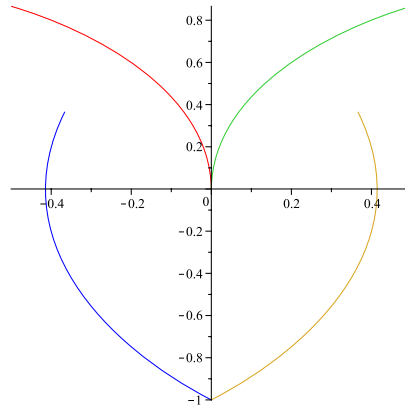


Figura 1.26: As curvas dianteira e traseira com cúspides

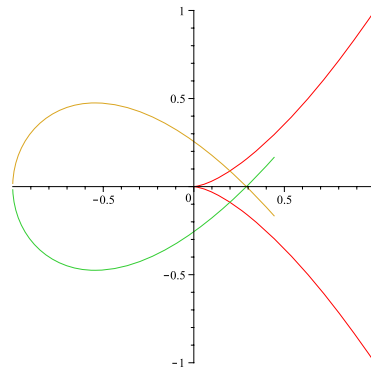


Figura 1.27:

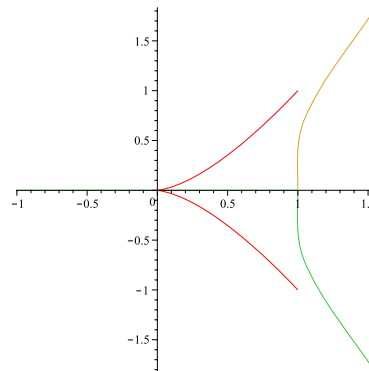


Figura 1.28:

Exemplo 1.42 Sejam o cicloide $\gamma(t) = (t - \text{sen}(t), 1 - \text{cos}(t))$ a curva da roda traseira no intervalo $[0, 10\pi]$, com o eixo $L = 2$ e $\Gamma(t)$ a curva da roda traseira, tal que $\Gamma(t) = (t - \text{sen}(t) + \frac{5(1 - \text{cos}(t))}{\sqrt{2 - 2\text{cos}(t)}}, 1 - \text{cos}(t) + \frac{5\text{sen}(t)}{\sqrt{2 - 2\text{cos}(t)}})$, nos intervalos $[0, 2\pi]$, $[4\pi, 6\pi]$, $[8\pi, 10\pi]$ e $\Gamma(t) = (t - \text{sen}(t) + \frac{5(1 - \text{cos}(t))}{\sqrt{2 - 2\text{cos}(t)}}, 1 - \text{cos}(t) + \frac{5\text{sen}(t)}{\sqrt{2 - 2\text{cos}(t)}})$, nos intervalos $[2\pi, 4\pi]$ e $[6\pi, 8\pi]$, veja na figura (1.29).

Agora, imaginamos de outra maneira. Tome $\Gamma(t)$ como a curva da roda traseira e seja $\bar{\Gamma}(t) = \Gamma(t) + 5 \frac{\Gamma'(t)}{|\Gamma'(t)|}$. Construimos $\bar{\Gamma}(t)$ e veja na figura (1.30).

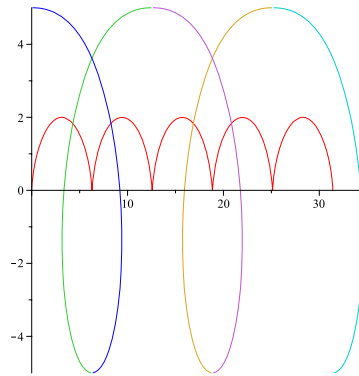


Figura 1.29: *cicloide como a curva da roda traseira e a curva da sua roda dianteira.*

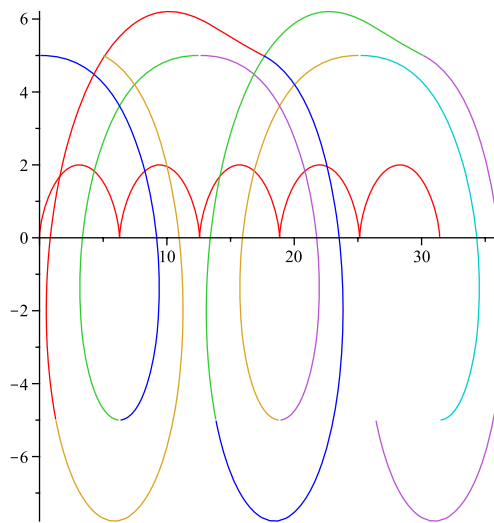


Figura 1.30:

Bicicleta Poligonal

2.1 Bicicleta Poligonal

Consideramos, neste capítulo, as curvas de bicicleta na versão poligonal.

Seja P um polígono simples no plano, e sejam V_1, V_2, \dots, V_n os vértices consecutivos. Os vértices são tomados ciclicamente, ou seja $V_{n+i} = V_i$, etc. A k -diagonal é o segmento $V_i V_{i+k}$, para algum $i = 1, \dots, n$, onde $2 \leq k \leq n/2$. Chama-se P uma bicicleta (n, k) -gonal, se ela é equilátera, isto é, todos os lados são iguais, e todas as suas k -diagonais também são iguais; um exemplo de bicicleta (k, k) -gonal é o polígono regular. A razão k/n é denominada de razão rotacional.

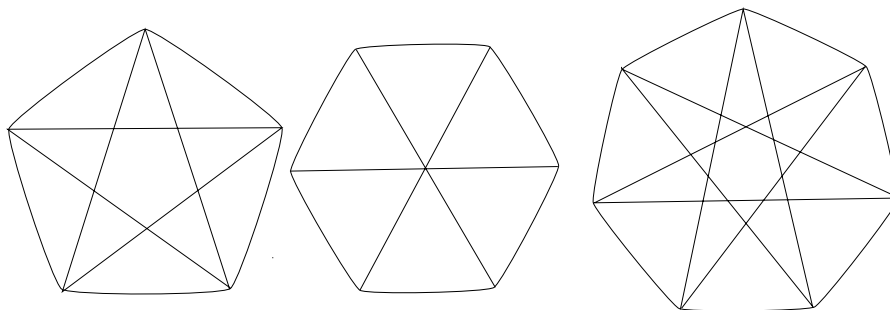


Figura 2.1: $(5, 2)$ -gonal, $(6, 3)$ -gonal e $(7, 3)$ -gonal

Lema 2.1 *Seja P uma bicicleta planar (n, k) -gonal. Para cada i , os vetores $V_{i+1} - V_i$ e $V_{i+k+1} - V_{i+k}$ são iguais e implica que o quadrilátero $V_i V_{i+1} V_{i+k} V_{i+k+1}$ é um paralelogramo ou é um trapézio isósceles com os lados paralelos $V_i V_{i+k+1}$ e $V_{i+1} V_{i+k}$. Se P é convexo então somente o último caso é possível.*

Prova: Consideremos que os triângulos $V_i V_{i+1} V_{i+k}$, $V_{i+1} V_{i+k} V_{i+k+1}$, $V_i V_{i+1}$ e $V_{i+k} V_{i+k+1}$ são congruentes, pois, são os lados do polígono, e $V_i V_{i+k}$ e $V_{i+1} V_{i+k+1}$ também são congruentes, pois, são k -diagonais, e além disso, $V_{i+1} V_{i+k}$ é um lado em comum aos dois, então os dois triângulos são congruentes. Se os segmentos $V_i V_{i+k}$ e $V_{i+1} V_{i+k+1}$ não se intersectam, então, tem-se o primeiro caso do lema. Se intersectam-se, então, tem-se o

segundo caso, veja na Figura (2.2). É bem claro que se o polígono é convexo, então tem-se somente o segundo caso.

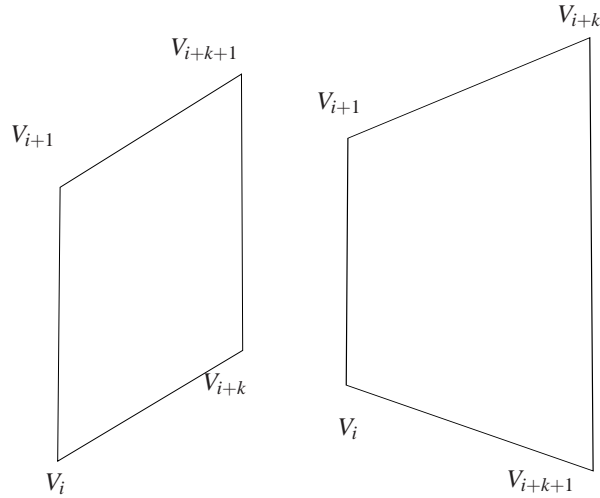


Figura 2.2:

Teorema 2.2 A bicicleta (n, k) – gonal convexa é um polígono regular nos seguintes casos:

- (1) n arbitrário e $k = 2$;
- (2) n ímpar e $k = 3$;
- (3) k arbitrário e $n = 2k + 1$;
- (4) k arbitrário e $n = 3k$.

Prova: Se $k = 2$, então, os triângulos $V_i V_{i+1} V_{i+2}$ são congruentes para qualquer i , pois, $V_i V_{i+2}$ são k -gonais, e além disso, $V_i V_{i+1}$ e $V_{i+1} V_{i+2}$ são lados congruentes de polígonos. Então, todos os ângulos do polígono P são iguais, implica que P é regular.

Seja $k = 3$. Considere 5 vértices consecutivos de P . Pelo Lema 2.1, $V_i V_{i+1} V_{i+2} V_{i+3}$ e $V_{i+1} V_{i+2} V_{i+3} V_{i+4}$ são trapézios isósceles, o que implica que, $V_i V_{i+1} V_{i+2} V_{i+3} V_{i+4}$ possua um eixo de simetria que passa pelo vértice V_{i+2} , veja na Figura (2.3). Segue-se que os ângulos nos vértices V_{i+1} e V_{i+3} são iguais para $i = 1, \dots, n$. Se n for ímpar, isto implica que todos os ângulos são iguais, então, P é regular.

Seja $n = 2k + 1$. Então os triângulos $V_{i-1} V_i V_{i+k}$ são congruentes para todo i , pois, dois dos lados são k -diagonais, e a base é o lado do polígono P . Seja α o ângulo na base do triângulo. Os vértices V_{i-1} , V_i , V_{i+1} , V_{i+k} e V_{i+k+1} geram 3 tais triângulos, e o ângulo $V_{i-1} V_i V_{i+1}$ é igual a $4\alpha - \pi$, veja na Figura (2.4). Então, todos os ângulos de P são iguais e P é regular.

Finalmente, consideremos o caso de $n = 3k$, e precisamos do seguinte lema.

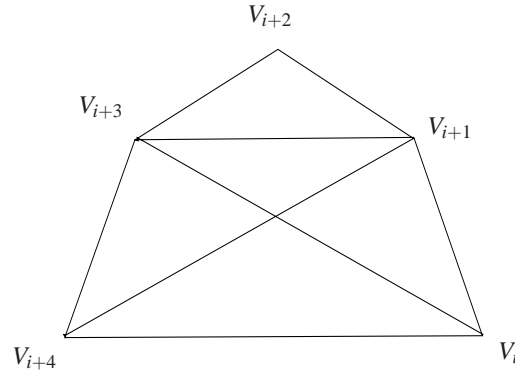


Figura 2.3:

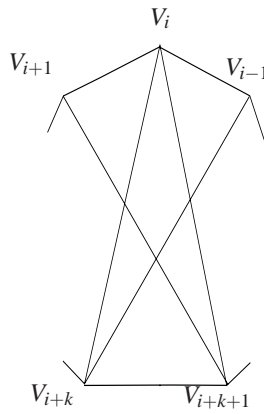


Figura 2.4:

Lema 2.3 *Dados dois triângulos equiláteros congruentes, tais que, a distância entre os vértices correspondentes são iguais, então, um é obtido pelo outro, ou pela translação paralela ou pela rotação sobre seu centro.*

Prova: Identificando o plano \mathbb{R}^2 com o plano complexo \mathbb{C} e, assumindo também, sem perder a generalidade, que o primeiro triângulo é $(1, q, q^2)$, onde q é a raiz cúbica de 1. A aplicação que leva o primeiro triângulo ao segundo é dado por $z \rightarrow uz + v$, onde $|u| = 1$, e como as distâncias entre os vértices correspondentes são iguais, então,

$$|u1 + v - 1| = |uq + v - q| = |uq^2 + v - q^2|,$$

implica que,

$$|(1 - u) - v| = |(1 - u)q - v| = |(1 - u)q^2 - v|.$$

Também sabe-se que $|q| = 1$, $|q^2| = 1$ e $q^3 = 1$. Então,

$$|(1 - u)q - v| = |(1 - u)q - v||q^2| = |(1 - u) - q^2v|,$$

e,

$$|(1 - u)q^2 - v| = |(1 - u)q^2 - v||q| = |(1 - u) - qv|.$$

Ou seja,

$$|(1-u) - v| = |(1-u) - qv| = |(1-u) - q^2v|.$$

E notamos que $(1-u)$ é equidistante dos pontos v , qv , q^2v . Suponha que $|v| = c$, então, $|qv| = c$ e $|q^2v| = c$. Se $c \neq 0$, implica $(1-u) = 0$, por isso, a aplicação é uma translação paralela. Se $|1-u| \neq 0$, implica $c = 0$, ou seja, $v = 0$, por isso, a aplicação é uma rotação sobre a origem.

Agora, vamos aplicar o Lema 2.3 para a bicicleta P de $3k - gonal$. Cada triângulo $V_iV_{i+k}V_{i+2k}$ é equilátero, pois, cada lado é $k - gonal$. Considere também o triângulo $V_{i+1}V_{i+k+1}V_{i+2k+1}$. Pelo Lema 2.3 e a convexidade do polígono P , o segundo triângulo é obtido pelo primeiro pela rotação sobre o seu centro. Para cada i , essas rotações tem o mesmo centro e ângulos iguais, pois, os lados de P são iguais, isto é, P é um polígono regular.

Sem considerar a condição de convexidade sobre P o resultado do Teorema (2.2) não é verdadeiro. Por exemplo, considere um n -gonal fechado, com lados unitários e todos ângulos retos. Claramente, é um $(n, 2) - gonal$ e as 2-digonais possuem o comprimento $\sqrt{2}$ e não é um polígono regular. Veja na Figura (2.5).

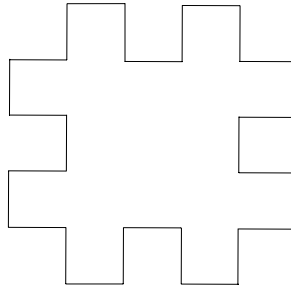


Figura 2.5:

Teorema 2.4 Para k ímpar e n par, existe uma família a um parâmetro das bicicletas $(n, k) - gonal$ não-congruentes.

Prova: Começamos com $n/2 - gonal$, e anexamos os mesmos triângulos isósceles a todos os lados para obter um $n - gonal$ de todos os lados iguais; a altura do triângulo é o parâmetro da construção. Para cada $k \leq n/2$ ímpar, o polígono resultante é uma bicicleta $(n, k) - gonal$ desde que todas as k -diagonais sejam congruentes pela simetria do original $n/2 - gonal$ regular, veja nas Figuras (2.6).

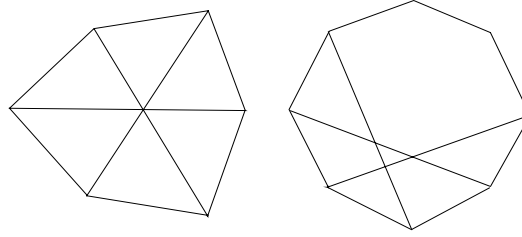


Figura 2.6: $(6,3)$ gonal e $(8,3)$ gonal

2.2 Deformação infinitesimal dos polígonos regulares

É conveniente notar o ângulo π/n por ϕ . Consideremos um polígono regular P de n lados cujos vértices são,

$$V_i = (\cos(2i\phi), \sin(2i\phi)), \quad i = 0, \dots, n-1.$$

Uma deformação do polígono P é dada por uma coleção dos vetores U_i tal que os vértices do polígono deformado P_ε são $V_i + \varepsilon U_i$. Como sempre, todos cálculos são feitos módulo ε^2 , e os índices são entendidos ciclicamente. Sem perder a generalidade, o polígono P_ε tem os lados unitários,

$$|V_{i+1} - V_i + \varepsilon(U_{i+1} - U_i)| = 1,$$

para todo $i = 0, \dots, n-1$.

Definição 2.5 *Seja P um polígono regular com os vértices V_i , e considere a deformação P_ε com os vértices $V_i + \varepsilon U_i$, então dizemos que a deformação é infinitesimal se, e só se,*

$$\frac{d}{d\varepsilon} (|V_{i+1} - V_i + \varepsilon(U_{i+1} - U_i)|) |_{\varepsilon=0} = 0.$$

Pela definição temos o seguinte resultado imediato,

$$\langle V_{i+1} - V_i, U_{i+1} - U_i \rangle = 0. \quad (2-1)$$

Definição 2.6 *Chamamos matriz de Vandermonde, ou das potências, toda matriz de ordem $n \geq 2$, do tipo,*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Isto é, as colunas de M são formadas por potências de mesma base, com expoente inteiro, variando desde 0 até $n - 1$. Os elementos da segunda linha são chamados elementos característicos da matriz. Indiquemos o determinante de uma matriz de Vandermonde por,

$$V(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n).$$

O lema seguinte é fácil de demonstrar com a indução matemática.

Lema 2.7 *O determinante $V(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ é igual ao produto de todas as diferenças possíveis entre os elementos característicos tal que, o minuendo tenha índice maior que o subtraendo. Isto é,*

$$V(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) = \prod_{i>j} (a_i - a_j),$$

onde $1 \leq i, j \leq n$.

Lema 2.8

$$\sum_{j=0}^{k-1} \text{sen}(\alpha + 2j\beta) = \frac{\text{sen}(k\beta)\text{sen}(\alpha + (k-1)\beta)}{\text{sen}(\beta)}, \quad (2-2)$$

e,

$$\sum_{j=0}^{k-1} \text{cos}(\alpha + 2j\beta) = \frac{\text{sen}(k\beta)\text{cos}(\alpha + (k-1)\beta)}{\text{sen}(\beta)}, \quad (2-3)$$

onde as Equações (2-2) e (2-3) são iguais a $k\text{sen}(\alpha)$ e $k\text{cos}(\alpha)$, respectivamente, se $\text{sen}(\beta) = 0$.

Prova: Só demonstraremos a primeira identidade por indução matemática. Quando $k = 1$, a equação (2-2) obedece a regra. Suponhamos que a Equação (2-2) é certa, então, precisamos demonstrar que,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k \text{sen}(\alpha + 2j\beta) &= \frac{\text{sen}(k\beta)\text{sen}(\alpha + (k-1)\beta)}{\text{sen}(\beta)} + \frac{\text{sen}(\beta)\text{sen}(\alpha + 2k\beta)}{\text{sen}(\beta)} \\ &= \frac{\text{sen}((k+1)\beta)\text{sen}(\alpha + k\beta)}{\text{sen}(\beta)}. \end{aligned}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
& \text{sen}(k\beta)\text{sen}(\alpha + (k-1)\beta) + \text{sen}(\beta)\text{sen}(\alpha + 2k\beta) \\
= & \text{sen}(k\beta)\{\text{sen}(\alpha)\cos((k-1)\beta) + \text{sen}((k-1)\beta)\cos(\alpha)\} + \\
& \text{sen}(\beta)\{\text{sen}(\alpha)\cos(2k\beta) + \text{sen}(2k\beta)\cos(\alpha)\} \\
= & \text{sen}(\alpha)\text{sen}(k\beta)[\cos(k\beta)\cos(\beta) + \text{sen}(k\beta)\text{sen}(\beta)] + \\
& \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta)[\cos^2(k\beta) - \text{sen}^2(k\beta)] + \\
& \text{sen}(k\beta)\cos(\alpha)[\text{sen}(k\beta)\cos(\beta) - \text{sen}(\beta)\cos(k\beta)] + \\
& \text{sen}(\beta)\cos(\alpha)[2\text{sen}(k\beta)\cos(k\beta)] \\
= & \text{sen}(\alpha)\text{sen}(k\beta)\cos(k\beta)\cos(\beta) + \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta)\cos^2(k\beta) + \\
& \text{sen}^2(k\beta)\cos(\alpha)\cos(\beta) + \text{sen}(\beta)\text{sen}(k\beta)\cos(\alpha)\cos(k\beta).
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
& \text{sen}((k+1)\beta)\text{sen}(\alpha + k\beta) \\
= & [\text{sen}(k\beta)\cos(\beta) + \text{sen}(\beta)\cos(k\beta)][\text{sen}(\alpha)\cos(k\beta) + \text{sen}(k\beta)\cos(\alpha)] \\
= & \text{sen}(\alpha)\text{sen}(k\beta)\cos(k\beta)\cos(\beta) + \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta)\cos^2(k\beta) + \\
& \text{sen}^2(k\beta)\cos(\alpha)\cos(\beta) + \text{sen}(\beta)\text{sen}(k\beta)\cos(\alpha)\cos(k\beta).
\end{aligned}$$

Se $\text{sen}(\beta) = 0$, então $\beta = 2n\pi$, onde $n \in \mathbb{Z}$. Além disso, $\cos(2j\beta) = 1$ e $\text{sen}(2j\beta) = 0$, onde $j \in \mathbb{Z}$. Enfim, $\sum_{j=0}^k \text{sen}(\alpha + 2j\beta) = \sum_{j=0}^k \text{sen}(\alpha)\cos(2j\beta) + \text{sen}(2j\beta)\cos(\alpha) = k\text{sen}(\alpha)$.

Vamos considerar as deformações infinitesimais dos polígonos regulares na classe de bicicletas poligonais. E o principal resultado está formulado no seguinte teorema.

Teorema 2.9 *Um polígono regular de n lados admite uma deformação infinitesimal não trivial a bicicleta (n, k) -gonal se, e só se,*

$$\text{tg}(kr\frac{\pi}{n})\text{tg}(\frac{\pi}{n}) = \text{tg}(k\frac{\pi}{n})\text{tg}(r\frac{\pi}{n}), \quad (2-4)$$

para algum $2 \leq r \leq n-2$.

Prova: Como $\cos a - \cos b = -2\text{sen}\frac{a+b}{2}\text{sen}\frac{a-b}{2}$ e $\text{sen} a - \text{sen} b = 2\text{sen}\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$, então,

$$V_{i+1} - V_i = 2\text{sen}\phi(-\text{sen}((2i+1)\phi), \cos((2i+1)\phi)).$$

Pela Equação (2-1) temos,

$$U_{i+1} - U_i = t_i(\cos((2i+1)\phi), \text{sen}((2i+1)\phi))$$

para algum t_i real. Seja,

$$W_i = \cos((2i+1)\phi), \text{sen}((2i+1)\phi)),$$

então,

$$\begin{aligned} U_i &= U_0 + (U_1 - U_0) + (U_2 - U_1) + \dots + (U_i - U_{i-1}) \\ &= U_0 + t_0 W_0 + t_1 W_1 + \dots + t_{i-1} W_{i-1}, \quad i = 0, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (2-5)$$

e,

$$\sum_{i=0}^{n-1} t_i W_i = 0. \quad (2-6)$$

De fato, $0 = U_0 - U_0 = U_n - U_0 = \sum_{i=0}^{n-1} U_{i+1} - U_i = \sum_{i=0}^{n-1} t_i W_i$. Note que, se adicionar o mesmo vetor a todo U_i , equivale a uma translação paralela do polígono P_ε . Então, podemos eliminar a translação paralela e assumirmos que $U_0 = 0$.

Podemos também tirar as rotações sobre a origem. Para esta finalidade, notamos que se for uma rotação infinitesimal, então, o vetor U_i é perpendicular ao V_i , assim temos,

$$U_i = c(-\text{sen}(2i\phi), \cos(2i\phi)),$$

onde c é uma constante, e portanto,

$$U_{i+1} - U_i = C(\cos((2i+1)\phi), \text{sen}((2i+1)\phi)),$$

onde C é outra constante. Então, as rotações correspondem $t_0 = t_1 = \dots = t_{n-1}$. Para eliminar as rotações, basta que exista um t_i que seja diferente dos demais. Assim, seja $k = \frac{(\sum_0^{n-1} t_i)}{n}$ e subtraímos k de todo t_i que só tiramos uma rotação, então, $\sum_{i=0}^{n-1} \bar{t}_i = 0$. Assim, sem perder a generalidade podemos assumir diretamente,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \bar{t}_i = 0. \quad (2-7)$$

A seguir, consideremos as condições para que todas as k -*diagonais* do polígono P_ε sejam iguais. Ou seja,

$$|\bar{V}_{i+k} - \bar{V}_i| = c_1 \implies |V_{i+k} - V_i + \varepsilon(V_{i+k} - V_i)|^2 = c_1^2.$$

Módulo ε^2 , temos,

$$\langle (V_{i+k} - V_i), (U_{i+k} - U_i) \rangle = c, \quad (2-8)$$

onde c_1, c são constantes, e também,

$$\begin{aligned}
& \langle W_j, (V_{i+k} - V_i) \rangle = \\
& = \langle (\cos(2j+1)\phi, \operatorname{sen}(2j+1)\phi)(\cos 2(i+k)\phi - \cos 2i\phi, \operatorname{sen} 2(i+k)\phi - \operatorname{sen} 2i\phi) \rangle \\
& = 2\operatorname{sen}(k\phi)[\operatorname{sen}((2j+1)\phi)\cos(2(i+k)\phi) - \cos((2j+1)\phi)\operatorname{sen}(2(i+k)\phi)] \\
& = 2\operatorname{sen}(k\phi)\operatorname{sen}((2j+1-2i-k)\phi).
\end{aligned}$$

Além disso, pela Equação (2-5) a Equação (2-8) pode ser escrita como,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{k-1} 2\operatorname{sen}(k\phi)t_{i+j}\operatorname{sen}((2j+1-k)\phi) = c_2 & \implies \sum_{j=0}^{k-1} t_{i+j}\operatorname{sen}((2j+1-k)\phi) = C \\
\implies \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k-1} t_{i+j}\operatorname{sen}((2j+1-k)\phi) = nC & \implies \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=0}^{n-1} t_{i+j}\operatorname{sen}((2j+1-k)\phi) = nC.
\end{aligned}$$

E, além disso, $\sum_{i=0}^{n-1} t_i = 0$, então $C = 0$. Assim, temos,

$$\sum_{j=0}^{k-1} t_{i+j}\operatorname{sen}((2j+1-k)\phi) = 0 \quad i = 0, \dots, n-1. \quad (2-9)$$

Portanto, temos um sistema (2-9) linear de n equações e n incógnitas

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_i \\ t_{i+2} \\ \vdots \\ t_{i+k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

onde A é uma matriz com elementos $a_j = \operatorname{sen}((2j+1-k)\phi)$, para $j = 0, \dots, k-1$ e $a_j = 0$ caso contrário.

Para estudar o sistema, seja $\xi = \exp(2\phi\sqrt{-1})$ a raiz n -ésima da unidade, e seja também,

$$\theta_r = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \xi^{jr}, \quad r = 0, \dots, n-1.$$

Seja B a matriz $b_{ij} = \xi^{i(j-1)}$, onde $1 \leq i, j \leq n$ então,

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \xi^1 & \xi^2 & \cdots & \xi^{n-1} \\ 1 & \xi^2 & (\xi^2)^2 & \cdots & (\xi^2)^{n-1} \\ 1 & \xi^3 & (\xi^3)^2 & \cdots & (\xi^3)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \xi^n & (\xi^n)^2 & \cdots & (\xi^n)^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Note que a matriz B é uma matriz de Vandermonde e é invertível pelo Lema 2.7. Lembramos que $\xi^n = 1$.

Lema 2.10 *Pelas condições acima, temos,*

$$A = B^{-1}DB,$$

onde $D = \text{Diag}(\theta_{n-1}, \theta_{n-2}, \dots, \theta_0)$.

Prova: Basta provar $BA = DB$. Sejam c_{ij} os elementos da matriz DB e \bar{c}_{ij} os elementos da matriz BA . Então,

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \theta_{n-i} \xi^{i(j-1)} = \sum_{s=0}^{n-1} a_s \xi^{s(n-i)} \xi^{i(j-1)} = \sum_{s=0}^{n-1} a_s \xi^{i(-s+j-1)} \\ &= a_0 \xi^{i(j-1)} + a_1 \xi^{i(j-2)} + \dots + a_{j-1} \xi^0 + a_j \xi^{-i} + \\ &\quad a_{j+1} \xi^{-2i} + \dots + a_{n-2} \xi^{i(-n+j+1)} + a_{n-1} \xi^{i(-n+j)}. \end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned} \bar{c}_{ij} &= \langle (1, \xi^i, (\xi^i)^2, \dots, (\xi^i)^{n-1}), (a_{j-1}, a_{j-2}, \dots, a_0, a_{n-1}, \dots, a_j) \rangle \\ &= a_0 \xi^{i(j-1)} + a_1 \xi^{i(j-2)} + \dots + a_{j-1} \xi^0 + a_j \xi^{-i} + \\ &\quad a_{j+1} \xi^{-2i} + \dots + a_{n-2} \xi^{i(-n+j+1)} + a_{n-1} \xi^{i(-n+j)}. \end{aligned}$$

Assim, $BA = DB$.

Agora, precisamos do seguinte resultado.

Lema 2.11

$$2\theta_r = \left(\frac{\text{sen}(k(r+1)\phi)}{\text{sen}((r+1)\phi)} - \frac{\text{sen}(k(r-1)\phi)}{\text{sen}((r-1)\phi)} \right) \exp\left(i\left(\frac{\pi}{2} - (k-1)r\phi\right)\right) \quad (2-10)$$

onde, para $r = 1$ e $r = n - 1$, temos, respectivamente,

$$\frac{\text{sen}(k(r-1)\phi)}{\text{sen}((r-1)\phi)} = k \quad \text{e} \quad \frac{\text{sen}(k(r+1)\phi)}{\text{sen}((r+1)\phi)} = k.$$

Prova:

$$2\theta_r = \sum_{j=0}^{n-1} 2\text{sen}((2j+1-k)\phi) [\cos(2jr\phi) + i\text{sen}(2jr\phi)].$$

Desenvolvendo a equação, as partes real e imaginária de $2\theta_r$ obtemos as seguintes somas:

$$\sum_{j=0}^{k-1} \text{sen}((2j+1-k-2jr)\phi) + \sum_{j=0}^{k-1} \text{sen}((2j+1-k+2jr)\phi), \quad (2-11)$$

e,

$$\sum_{j=0}^{k-1} \cos((2j+1-k-2jr)\phi) - \sum_{j=0}^{k-1} \cos((2j+1-k+2jr)\phi). \quad (2-12)$$

Aplicando as Equações (2-2) e (2-3) nas Equações (2-11) e (2-12) com escolhas α e β adequadas, a Equação (2-11) é igual a,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{k-1} \text{sen}((2j+1-k-2jr)\phi) + \sum_{j=0}^{k-1} \text{sen}((2j+1-k+2jr)\phi) \\ = & \sum_{j=0}^{k-1} \text{sen}((1-k)\phi + 2j(1-r)\phi) + \sum_{j=0}^{k-1} \text{sen}((1-k)\phi + 2j(r+1)\phi) \\ = & \frac{\text{sen}(k(1-r)\phi)\text{sen}((1-k)\phi + (k-1)(1-r)\phi)}{\text{sen}(1-r)\phi} + \\ & \frac{\text{sen}(k(r+1)\phi)\text{sen}((1-k)\phi + (k-1)(r+1)\phi)}{\text{sen}(r+1)\phi} \\ = & \frac{\text{sen}(k(1-r)\phi)\text{sen}((1-k)r\phi)}{\text{sen}(1-r)\phi} + \frac{\text{sen}(k(r+1)\phi)\text{sen}((k-1)r\phi)}{\text{sen}(r+1)\phi} \\ = & \left(\frac{\text{sen}(k(r+1)\phi)}{\text{sen}((r+1)\phi)} - \frac{\text{sen}(k(r-1)\phi)}{\text{sen}((r-1)\phi)} \right) \text{sen}((k-1)r\phi). \end{aligned}$$

Analogamente, a Equação (2-12) é igual a,

$$\left(\frac{\text{sen}(k(r+1)\phi)}{\text{sen}((r+1)\phi)} - \frac{\text{sen}(k(r-1)\phi)}{\text{sen}((r-1)\phi)} \right) \cos((k-1)r\phi).$$

Também que,

$$\exp(i(\frac{\pi}{2} - (k-1)r\phi)) = \text{sen}((k-1)r\phi) + i\cos((k-1)r\phi).$$

Por isso,

$$2\theta_r = \sum_{j=0}^{n-1} 2\text{sen}((2j+1-k)\phi) [\cos(2jr\phi) + i\text{sen}(2jr\phi)].$$

Agora, vamos demonstrar que se $r = 1$, então $\frac{\text{sen}(k(r-1)\phi)}{\text{sen}((r-1)\phi)} = k$.

De fato, como $2\theta_r$ é uma função contínua, então,

$$\frac{\text{sen}(k(1-1)\phi)}{\text{sen}((1-1)\phi)} = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{\text{sen}(k(r-1)\phi)}{\text{sen}((r-1)\phi)} = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{\text{sen}'(k(r-1)\phi)}{\text{sen}'((r-1)\phi)} = k.$$

Assim demonstramos o lema.

Agora vamos completar a demonstração do teorema. Estamos interessados em resolver o sistema linear $(B^{-1}DB)\bar{t} = 0$, onde $\bar{t} = (t_0, \dots, t_{n-1}) \in C^n$ satisfazendo as Equações (2-6) e (2-7). Essas duas condições são equivalentes a,

$$\bar{t}(1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^{n-1}) = 0, \quad \bar{t}(1, 1, \dots, 1) = 0.$$

Ou seja, são as condições para anular o primeiro e o último componente do sistema $B\bar{t}$. Então, a dimensão do espaço das soluções do sistema é igual ao número das raízes entre os números $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-2}$.

Pelo Lema 2.11, isto é igual ao número de $r = 1, 2, \dots, n-2$, tais que,

$$\frac{\text{sen}(k(r+1)\phi)}{\text{sen}((r+1)\phi)} = \frac{\text{sen}(k(r-1)\phi)}{\text{sen}((r-1)\phi)}. \quad (2-13)$$

Se $r = 1$, então a Equação (2-13) torna-se $\text{sen}(2k\phi) = k \text{sen}(2\phi)$ que não terá solução. Vamos citar o lema seguinte ([AC]) a prová-lo.

Lema 2.12 *Seja $k \geq 2$ um número inteiro. Então,*

$$\text{sen}^2(k\theta) \leq k^2 \text{sen}^2(\theta),$$

que vale a igualdade se e só se $\theta = m\pi$ para algum m inteiro.

Como $\phi = \frac{\pi}{n}$, então $2\frac{\pi}{n}$ não é múltiplo de π . Assim $\text{sen}(2k\phi) = k \text{sen}(2\phi)$ não tem solução. Com os resultados da trigonometria elementar, para $r = 2, \dots, n-2$, a Equação (2-13) pode ser escrita como,

$$\begin{aligned} \frac{\text{sen}(k(r+1)\phi)}{\text{sen}((r+1)\phi)} &= \frac{\text{sen}(k(r-1)\phi)}{\text{sen}((r-1)\phi)} \\ \iff \frac{\text{sen}(kr\phi)\cos(k\phi) + \text{sen}(k\phi)\cos(kr\phi)}{\text{sen}(r\phi)\cos(\phi) + \text{sen}(\phi)\cos(r\phi)} &= \frac{\text{sen}(kr\phi)\cos(k\phi) - \text{sen}(k\phi)\cos(kr\phi)}{\text{sen}(r\phi)\cos(\phi) - \text{sen}(\phi)\cos(r\phi)} \\ \iff 2\text{sen}(k\phi)\text{sen}(r\phi)\cos(kr\phi)\cos(\phi) &= 2\text{sen}(kr\phi)\text{sen}(\phi)\cos(k\phi)\cos(r\phi) \\ \iff \text{tg}(kr\phi)\text{tg}(\phi) &= \text{tg}(k\phi)\text{tg}(r\phi) \\ \iff \text{tg}\left(kr\frac{\pi}{n}\right)\text{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right) &= \text{tg}\left(k\frac{\pi}{n}\right)\text{tg}\left(r\frac{\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

Agora, vamos demonstrar a aplicação inversa.

Se,

$$tg\left(kr\frac{\pi}{n}\right)tg\left(\frac{\pi}{n}\right) = tg\left(k\frac{\pi}{n}\right)tg\left(r\frac{\pi}{n}\right),$$

para algum $2 \leq r \leq n - 2$, então $\frac{\text{sen}(k(r+1)\phi)}{\text{sen}((r+1)\phi)} = \frac{\text{sen}(k(r-1)\phi)}{\text{sen}((r-1)\phi)}$, para algum $2 \leq r \leq n - 2$.

Pelo Lema 2.11 existe pelo menos uma constante r tal que $\theta_r = 0$. Consequentemente, a dimensão do conjunto \bar{t} é maior que 1. Assim, a demonstração está completa.

Notamos que, se forem n par, k ímpar e $n = 2r$, então a Equação (2-4) é verdadeira. De fato, $tg\left(kr\frac{\pi}{n}\right) = tg\left(r\frac{\pi}{n}\right) = \infty$ e, mais ainda, $tg\left(\frac{\pi}{n}\right)$ e $tg\left(k\frac{\pi}{n}\right)$ tem o mesmo sinal. Analogamente, se forem k e r ímpares, $n = 2k$, a Equação (2-4) será verdadeira.

Monodromia entre par de curvas

3.1 Monodromia no Círculo

No capítulo 1, desde que temos uma curva, a da roda traseira γ , encontramos uma expressão $\Gamma(x(t)) = \gamma(t) + L\gamma'(t)$ para a roda dianteira, e assim provamos que existe uma restrição ao ângulo $\alpha(t)$ entre (γ', Γ') tal que $-\frac{\pi}{2} < \alpha(t) < \frac{\pi}{2}$, onde t e x são os parâmetros do comprimento de arco das curvas γ e Γ . Neste capítulo vamos fazer o contrário, seja $\Gamma(x)$ uma curva fechada, então a curvatura $K(x)$ da Γ é periódica, e seja P período da curva Γ . Ou seja, a roda dianteira, após uma volta, voltará ao mesmo ponto e recomeça a mesma trajetória a cada P unidades de comprimento que percorre. Suponhamos ainda que a distância L entre a roda dianteira e traseira seja 1. Ou seja, considere o círculo Γ_0 de raio 1 centrado no ponto $\Gamma(0) = \Gamma(P)$. Portanto, se $\gamma(0) \in \Gamma_0$ temos que $\gamma(P) \in \Gamma_0$. Veja na figura (3.1).

Sabe-se que, $K = \frac{\text{sen}\alpha}{L} + \frac{d\alpha}{dx}$, e tome também $\text{tg}(\frac{\alpha}{2}) = u$, ou seja, $\text{tg}(\frac{\alpha(x, \alpha_0)}{2}) = u(x, u_0)$, tal que, $\text{tg}(\frac{\alpha_0}{2}) = u_0$, implica que, $\text{sen}(\frac{\alpha}{2}) = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$ e $\text{cos}(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$. Também para que a função tangente seja um difeomorfismo, damos restrição a função α , tal que, $-\pi < \alpha < \pi$. Então,

$$u' = (\text{tg}(\frac{\alpha}{2}))' = \sec^2(\frac{\alpha}{2}) \frac{\alpha'}{2} \quad e \quad \alpha' = 2u' \text{cos}(\frac{\alpha}{2}) = 2u' \frac{1}{1+u^2}, \quad (3-1)$$

e ainda,

$$\text{sen}(\alpha) = 2 \text{sen}(\frac{\alpha}{2}) \text{cos}(\frac{\alpha}{2}) = 2 \frac{u}{1+u^2}. \quad (3-2)$$

Substituindo na equação $\alpha' + \frac{\text{sen}(\alpha)}{L} = K$, obtemos,

$$2u' \frac{1}{1+u^2} + 2 \frac{u}{(1+u^2)L} = K \quad e \quad u' = \frac{K}{2}u^2 - \frac{u}{L} + \frac{K}{2}, \quad (3-3)$$

que é uma equação de Riccati.

Definição 3.1 Uma equação diferencial do tipo,

$$x' = r(t)x^2 + a(t)x + b(t),$$

chama-se equação de Riccati.

Definição 3.2 Seja $u_i, 1 \leq i \leq 4$, 4 números complexos, então, a razão cruzada desses 4 números é,

$$\frac{(u_1 - u_2)(u_3 - u_4)}{(u_1 - u_4)(u_3 - u_2)}.$$

Para mais informações veja na referência ([St]).{pg. 36-39}

Teorema 3.3 Sejam $u_i, 1 \leq i \leq 4$, 4 soluções de Riccati, então, existe um constante C , tal que, o valor da razão cruzada das soluções é C .

Teorema 3.4 Uma função $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mantém a razão cruzada, ou seja,

$$\frac{(T(u_1) - T(u_2))(T(u_3) - T(u_4))}{(T(u_1) - T(u_4))(T(u_3) - T(u_2))} = \frac{(u_1 - u_2)(u_3 - u_4)}{(u_1 - u_4)(u_3 - u_2)}$$

se, e somente se,

$$T(x) = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Seja $\pi : \{x = 0\} \rightarrow \{x = P\}$ uma transformação de Poincaré, tal que, $\pi(\alpha(0, \alpha_0)) = \pi(\alpha_0) = \alpha(P, \alpha_0)$, então, a função π descreve a posição inicial e final da roda traseira depois de uma volta da roda dianteira ao longo da trajetória fechada, veja na Figura (3.1). Analogamente, também definimos uma função $T : \{x = 0\} \rightarrow \{x = P\}$, tal que, $T(u(0, u_0)) = T(u_0) = u(P, u_0)$.

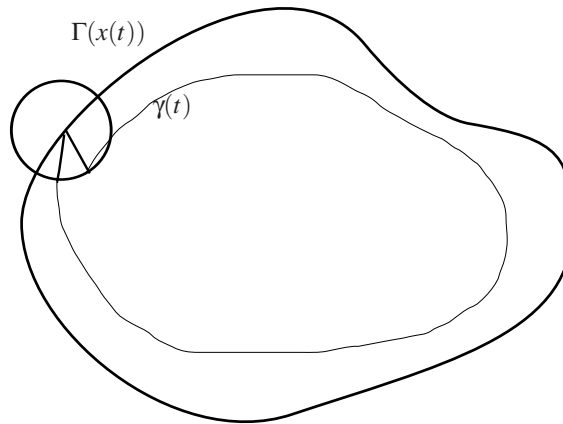


Figura 3.1:

Como a Equação (3-3) é uma equação de Riccati, e pelo Teorema 3.3 temos

$$\begin{aligned} \frac{(T(u_1) - T(u_2))(T(u_3) - T(u_4))}{(T(u_1) - T(u_4))(T(u_3) - T(u_2))} &= \frac{(u(P, u_1) - u(P, u_2))(u(P, u_3) - u(P, u_4))}{(u(P, u_1) - u(P, u_4))(u(P, u_3) - u(P, u_2))} \\ &= \frac{(u_1 - u_2)(u_3 - u_4)}{(u_1 - u_4)(u_3 - u_2)}. \end{aligned}$$

Então, pelo Teorema 3.4, $T(u) = \frac{au+b}{cu+d}$, tal que, $\{a, b, c, d\} \in \mathbb{C}$.

Sabe-se que o conjunto das funções que mantém a razão cruzada é um grupo, denominado de "grupo de transformação de Moebius".

Agora, vamos focar sobre os pontos fixos das transformações de Moebius, ou seja, $T(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = x$, então, $cx^2 + (d-a)x + b = 0$, assim existem 3 possibilidades de soluções, por isso definimos

Definição 3.5 *Seja T uma transformação de Moebius, então temos:*

- 1) *Se T possui 2 raízes reais e distintas, T é hiperbólica.*
- 2) *Se T possui somente 1 raiz real, T é parabólica.*
- 3) *Se T não possui raiz real, T é elíptica.*

No caso de T ser hiperbólica, T possui dois pontos (u_1, u_2) fixos, quer dizer, existem dois ângulos α_1, α_2 tais que $tg \frac{\alpha_i}{2} = u_i$, e além disso,

$$tg \frac{\alpha(0, \alpha_i)}{2} = u(0, u_i) = T(u_i) = u(P, u_i) = tg \frac{\alpha(P, \alpha_i)}{2},$$

então, existem dois pontos da roda traseira que fecham a trajetória depois de uma volta da roda dianteira, ou seja $\alpha(P, \alpha_i) = \alpha(0, \alpha_i) = \alpha_i$.

Analogamente, no caso parabólico só existe um ponto fixo que fecha a trajetória da roda traseira; e no caso elíptico, como as soluções são complexas, então não existe nenhuma posição traseira que fecha a trajetória.

Assim definimos:

Definição 3.6 *Sejam Γ a curva da roda dianteira e T a transformação de Moebius correspondente de Γ , então*

- (1) *Γ é hiperbólica se T é hiperbólica.*
- (2) *Γ é parabólica se T é parabólica.*
- (3) *Γ é elíptica se T é elíptica.*

No caso hiperbólico, vamos provar que $T'(u_1) T'(u_2) = 1$, ou seja, $\frac{\partial u}{\partial u_0}(P, u_1) \frac{\partial u}{\partial u_0}(P, u_2) = 1$. De fato,

a) $T(u) = \frac{au+b}{cu+d}$, implica que $T'(u) = \frac{ad-bc}{(cu+d)^2}$.

b) $T'(u_1)T'(u_2) = 1 \Leftrightarrow \frac{ad-bc}{(cu_1+d)^2} \frac{ad-bc}{(cu_2+d)^2} = 1 \Leftrightarrow (cu_1 + d)^2(cu_2 + d)^2 = (ad - bc)^2$.

c) Como $cu^2 + (d-a)u + b = 0$, implica que, $u = \frac{(a-d) \pm \sqrt{(d-a)^2 + 4bc}}{2c}$, então,

$$\begin{aligned} (cu_1 + d)^2(cu_2 + d)^2 &= \left(\frac{(a-d) + \sqrt{(d-a)^2 + 4bc}}{2c} \right)^2 \left(\frac{(a-d) - \sqrt{(d-a)^2 + 4bc}}{2c} \right)^2 \\ &= \left[\left(\frac{(a-d) + \sqrt{(d-a)^2 + 4bc}}{2c} \right) \left(\frac{(a-d) - \sqrt{(d-a)^2 + 4bc}}{2c} \right) \right]^2 \\ &= \left[\frac{(a+d)^2}{4} - \frac{(d-a^2 + 4bc)}{4} \right]^2 \\ &= (ad - bc)^2. \end{aligned}$$

Além disso, $\pi'(\alpha_1) \pi'(\alpha_2) = 1$, ou seja, $\frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_0}(P, \alpha_1) \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_0}(P, \alpha_2) = 1$. De fato, derivando $tg \frac{\alpha(x, \alpha_i)}{2} = u(x, tg \frac{\alpha_i}{2})$ em α_0 , então $sec^2 \frac{\alpha(P, \alpha_i)}{2} \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_0}(P, \alpha_i) = \frac{\partial u}{\partial u_0}(P, u_i) sec^2 \frac{\alpha_i}{2}$, e mais ainda, $\alpha(P, \alpha_i) = \alpha_i$, então $\pi'(\alpha_i) = \frac{\partial \alpha(P, \alpha_i)}{\partial \alpha_0} = \frac{\partial u(L, u_i)}{\partial u_0} = T'(u_i)$.

Observa-se que, $T'(u_1) \neq T'(u_2)$ implica, $|\pi'(\alpha_1)| \neq |\pi'(\alpha_2)|$, e $|\pi'(\alpha_1)| |\pi'(\alpha_2)| = 1$. Ou seja, se $|\pi'(\alpha_1)| > 1$, então, $|\pi'(\alpha_2)| < 1$. Consequentemente, se um é atrator então o outro é repulsor. Assim, demonstraremos um teorema no caso T hiperbólica:

Teorema 3.7 *Seja γ a trajetória fechada hiperbólica da roda traseira, então a trajetória de roda dianteira Γ também é fechada, e existe uma única curva fechada γ^* com a mesma roda dianteira Γ , tal que, a correspondência $\gamma \leftrightarrow \gamma^*$ é uma bijeção, com a orientação fixa de Γ . Uma das curvas, γ e γ^* , é estável e a outra é instável.*

Prova: γ é uma curva fechada da roda traseira, e como estamos considerando também que T é hiperbólica, então, existe uma outra curva traseira γ^* . Além disso, se $|\pi'(\alpha_1)| > 1$, então, $|\pi'(\alpha_2)| < 1$. Consequentemente, se uma é atratora, então, a outra é repulsora.

Exemplo 3.8 *Seja uma bicicleta com a roda dianteira num círculo cujo raio seja 1, como mostrado na Figura (3.3), então $K = 1$, o que implica $\frac{d\alpha}{dx} = 1 - \frac{sen\alpha}{L}$.*

i) *Caso elítico: Se $L > 1$, $\frac{d\alpha}{dx}$ é positivo, implica que $\alpha(t)$ é crescente, assim a curva traseira vai passar infinitas vezes por múltiplos do ângulo $\pi/2$; posteriormente*

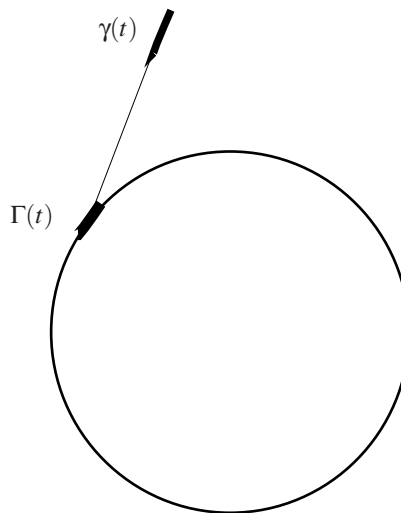


Figura 3.2:

vamos provar que são cúspides de Whitney.

ii) *Caso hiperbólico: Se $L < 1$, existem 2 ângulos $0 < x_1 < \frac{\pi}{2} < x_2 < \pi$, tal que, $\frac{d\alpha}{dx} = 0$. Neste caso, os dois ângulos são simétricos em relação a $\pi/2$, ou seja, as duas curvas fechadas γ e $\bar{\gamma}$ são dois círculos coincidentes.*

Caso $0 \leq \alpha(t) < x_1$, $\alpha(t)$ tende a x_1 , e pela convenção do sinal do ângulo, a roda traseira

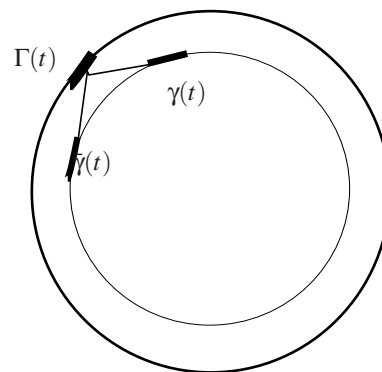


Figura 3.3:

vai entrar no círculo da Γ e tende a um círculo menor.

Caso $x_1 < \alpha(t) < \frac{\pi}{2}$, $\frac{d\alpha}{dx} < 0$, implica que $\alpha(t)$ tende a x_1 .

Caso $\frac{\pi}{2} < \alpha(t) < x_2$, $\alpha(t)$ tende a x_1 , e a traseira faz uma cúspide e tende a um círculo.

Caso $x_2 < \alpha(t) < x_1 + 2\pi$, $\alpha(t)$ cresce e tende a $x_1 + 2\pi$, e a traseira tende ao mesmo círculo menor.

iii) *Caso parabólico: Se $L = 1$, $\frac{d\alpha}{dx} = 1 - \sin\alpha$, $\alpha(t)$ tende a $\pi/2$, ou seja, a traseira tende ao centro.*

Agora, vamos demonstrar que se α passa por $\pm\frac{\pi}{2}$, então, $\gamma(t)$ é um ponto de cúspide de Whitney.

Sejam $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$ e $\gamma(t) = (u(t), v(t))$, e também considere a tractrix circular (u, v) , definida implicitamente pelo sistema das equações diferenciais,

$$x^2 + y^2 = 1, \quad (x - u)^2 + (y - v)^2 = L^2, \quad y - v = \frac{dv}{du}(x - u).$$

Substituindo a terceira equação na segunda, obtemos,

$$(x - u)^2 + \left(\frac{dv}{du}\right)^2(x - u)^2 = L^2, \quad \text{logo} \quad (x - u)^2\left(\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + 1\right) = L^2.$$

Suponha que $x > 0$, e $y > 0$, então,

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{L^2}{\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + 1}} + u \quad e \quad x^2 = \frac{L^2}{\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + 1} + u^2 + 2u\sqrt{\frac{L^2}{\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + 1}}; \\ y &= \frac{dv}{du}(x - u) + v \quad e \quad y^2 = \left(\frac{dv}{du}\right)^2(x - u)^2 + v^2 + 2v(x - u)\frac{dv}{du}. \\ x^2 + y^2 &= L^2 \quad e \quad x^2 + \left(\frac{dv}{du}\right)^2(x - u)^2 + v^2 + 2v(x - u)\frac{dv}{du} = 1 \quad , \text{logo}, \\ \frac{L^2}{\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + 1} + u^2 + 2u\sqrt{\frac{L^2}{\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + 1}} + \left(\frac{dv}{du}\right)^2\frac{L^2}{\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + 1} + v^2 + 2v\frac{dv}{du}\sqrt{\frac{L^2}{\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + 1}} &= 1 \\ \implies L^2 + u^2 + v^2 - 1 &= \sqrt{\frac{L^2}{\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + 1}}(-2u - 2v\frac{dv}{du}) \\ \iff (L^2 + u^2 + v^2 - 1)^2 &= \frac{L^2 du^2}{dv^2 + du^2}(-2u - 2v\frac{dv}{du})^2 \\ \implies (L^2 + u^2 + v^2 - 1)^2 du^2 + (L^2 + u^2 + v^2 - 1)^2 dv^2 &= L^2 du^2(2u + 2v\frac{dv}{du})^2 \\ L^2 du^2(4u^2 + 4v^2\frac{dv^2}{du^2} + 8uv\frac{dv}{du}) &= 4u^2 L^2 du^2 + 4L^2 v^2 dv^2 + 8L^2 uv dudv \\ \implies du^2(L^2 + u^2 + v^2 - 1 - 2uL)(L^2 + u^2 + v^2 - 1 + 2uL) &- 8L^2 uv dudv \\ + dv^2(L^2 + u^2 + v^2 - 1 - 2vL)(L^2 + u^2 + v^2 - 1 + 2vL) &= 0 \\ \implies [(u^2 + (v - L)^2 - 1)(u^2 + (v + L)^2 - 1)]dv^2 - 8L^2 uv dudv \\ + [((u - L)^2 + v^2 - 1)((u + L)^2 + v^2 - 1)]du^2 &= 0. \end{aligned}$$

Enfim, temos a equação diferencial,

$$[u^2 + (v-L)^2 - 1][u^2 + (v+L)^2 - 1] \frac{dv^2}{du^2} = 8L^2 uv \frac{dv}{du} - [(u-L)^2 + v^2 - 1][(u+L)^2 + v^2 - 1].$$

Tome $\frac{dv}{du} = q$ e reorganize a última equação, assim,

$$\begin{aligned} & [u^2 + v^2 + L^2 - 1 - 2vL][u^2 + v^2 - 1 + 2vL]q^2 \\ &= 8L^2 uvq - [u^2 + v^2 + L^2 - 1 - 2uL][u^2 + v^2 - 1 + 2uL], \end{aligned}$$

e ainda,

$$[(u^2 + v^2 + L^2 - 1)^2 - 4v^2L^2]q^2 = 8L^2 uvq - [(u^2 + v^2 + L^2 - 1)^2 - 4u^2L^2].$$

Derivando a equação em relação a t ,

$$\begin{aligned} & [2(u^2 + v^2 + L^2 - 1)(2uu' + 2vv') - 8vv'L^2]q^2 + [(u^2 + v^2 + L^2 - 1)^2 - 4v^2L^2]2qq' = \\ & -2(u^2 + v^2 + L^2 - 1)(2uu' + 2vv') + 8uu'L^2 + 8L^2(u'v + uv')q + 8L^2 uvq', \end{aligned}$$

temos,

$$\begin{aligned} & \{[(u^2 + v^2 + L^2 - 1)^2 - 4v^2L^2]q - 4L^2 uv\}q' \\ &= [- (u^2 + v^2 + L^2 - 1)(2uu' + 2vv') + 4vv'L^2]q^2 \\ &+ 4L^2(u'v + uv')q - (u^2 + v^2 + L^2 - 1)(2uu' + 2vv') + 4uu'L^2. \end{aligned}$$

Dividindo por u' ,

$$\begin{aligned} & \frac{\{[(u^2 + v^2 + L^2 - 1)^2 - 4v^2L^2]q - 4L^2 uv\}}{u'}q' \\ &= [- (u^2 + v^2 + L^2 - 1)(2u + 2vq) + 4vqL^2]q^2 \\ &+ 4L^2(v + uq)q - (u^2 + v^2 + L^2 - 1)(2u + 2vq) + 4uL^2. \end{aligned}$$

Então, temos,

$$\begin{aligned} & \frac{\{[(u^2 + v^2 + L^2 - 1)^2 - 4v^2L^2]q - 4L^2 uv\}}{u'}q' \\ &= [-2v(u^2 + v^2 + L^2 - 1) + 4vL^2]q^3 + [-2u(u^2 + v^2 + L^2 - 1) + 4uL^2]q^2 + \\ & [-2v(u^2 + v^2 + L^2 - 1) + 4vL^2]q + [-2u(u^2 + v^2 + L^2 - 1) + 4uL^2]. \end{aligned}$$

Tome $u' = [(u^2 + v^2 + L^2 - 1)^2 - 4v^2L^2]q - 4L^2uv$, e,

$$\begin{aligned} q' &= [-2v(u^2 + v^2 - L^2 - 1)]q^3 + \\ &\quad [-2u(u^2 + v^2 - L^2 - 1)]q^2 + \\ &\quad [-2v(u^2 + v^2 - L^2 - 1)]q + \\ &\quad [-2u(u^2 + v^2 - L^2 - 1)]. \end{aligned}$$

Como só queremos estudar o caso $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$, então, por enquanto consideramos o caso,

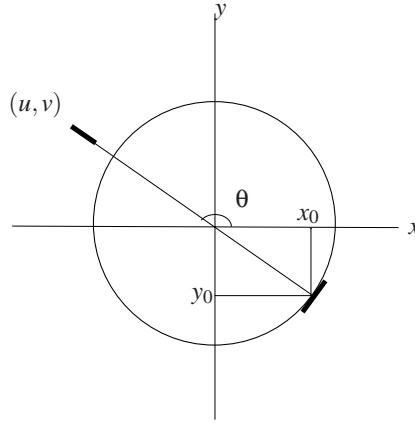


Figura 3.4:

$\alpha = \frac{\pi}{2}$, então $u(0) = (L-1)\cos\theta$, $v(0) = (L-1)\sin\theta$ e $q(0) = \tan\theta$, veja na Figura (3.4).

$$\begin{aligned} u'(0) &= [(u^2 + v^2 + L^2 - 1)^2 - 4v^2L^2]q - 4L^2uv \\ &= [((L-1)^2 + L^2 - 1)^2 - 4L^2(L-1)^2\sin^2\theta] \frac{\sin\theta}{\cos\theta} - 4L^2(L-1)^2\sin\theta\cos\theta \\ &= 0. \end{aligned}$$

E,

$$v'(0) = u'(0)q(0) = 0 \implies (u'(0), v'(0)) = (0, 0).$$

$$\begin{aligned} q'(0) &= q^3(4vL) + q(4vL) + q^2(4uL) + (4uL) \\ &= 4vLq \frac{1}{\cos^2\theta} + 4uL \frac{1}{\cos^2\theta} \\ &= 4L(L-1) \left(\frac{\sin^2\theta}{\cos^3\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^3\theta} \right) \\ &= 4L(L-1) \frac{1}{\cos^3\theta}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u''(0) &= [2(u^2 + v^2 + L^2 - 1)(2uu' + 2vv') - 8vv'L^2]q \\
&\quad + [(u^2 + v^2 + L^2 - 1)^2 - 4v^2L^2]q' + 4L^2(u'v + uv') \\
&= [4L^2(L-1)^2 - 4L^2v^2]4L(L-1)\frac{1}{\cos^3\theta} \\
&= 16L^3(l-1)^3\frac{1}{\cos\theta} \\
&= [16L^3(l-1)^3\frac{1}{\cos^2\theta}] \cos\theta.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v''(0) &= u'q' + u''q, \\
&= 16L^3(L-1)^3\frac{1}{\cos\theta}\frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} \\
&= [16L^3(L-1)^3\frac{1}{\cos^2\theta}] \text{sen}\theta.
\end{aligned}$$

Notamos que, $a(0) = \frac{v''(0)}{u''(0)} = \text{tg}\theta$.

$$\begin{aligned}
q''(0) &= [-2v(u^2 + v^2 - L^2 - 1)]3q^2q' + \\
&\quad [-2u(u^2 + v^2 - L^2 - 1)]2qq' + \\
&\quad [-2v(u^2 + v^2 - L^2 - 1)]q' \\
&= 3q^2q'(4Lv) + 2qq'(4Lu) + q'(4Lv) \\
&= 48L^2(L-1)^2\frac{\text{sen}\theta}{\cos^5\theta}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u'''(0) &= [2(u^2 + v^2 + L^2 - 1)(2uu'' + 2vv'') - 8vv''L^2]q + \\
&\quad [(u^2 + v^2 + L^2 - 1)^2 - 4v^2L^2]q'' - 4L^2(u''v + uv'') \\
&= [-8L16L^3(l-1)^4\frac{1}{\cos^2\theta} + 8L^216L^3(L-1)^4\frac{\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}]\frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} + \\
&\quad 4L^2[(L-1)^2 - (L-1)^2\text{sen}^2\theta]48L^2(L-1)^2\frac{\text{sen}\theta}{\cos^5\theta} - \\
&\quad 4L^2[16L^3(L-1)^4\frac{\text{sen}\theta\cos\theta}{\cos^2\theta}]2 \\
&= 64L^4(L-1)^4\frac{\text{sen}\theta}{\cos^3\theta} + 128L^5(L-1)^4(\frac{\text{sen}^3\theta}{\cos^3\theta} - \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v'''(0) &= u'''q + 2u''q' + u'q'' \\
&= [64L^4(L-1)^4 + 128L^5(L-1)^4 \left(\frac{\text{sen}^3\theta}{\text{cos}^3\theta} - \frac{\text{sen}\theta}{\text{cos}\theta} \right)] \frac{\text{sen}\theta}{\text{cos}\theta} + \\
&\quad 32L^3(L-1)^3 \frac{1}{\text{cos}^3\theta} \\
&= 64L^4(L-1)^4 \frac{\text{sen}^2}{\text{cos}^4\theta} - 128L^5(L-1)^4 \left(\frac{\text{sen}^4\theta}{\text{cos}^4\theta} - \frac{\text{sen}^2\theta}{\text{cos}^2\theta} \right) + \\
&\quad 128L^4(L-1)^4 \frac{1}{\text{cos}^4\theta}.
\end{aligned}$$

Notamos que, se $L = 1$ e $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$, o ponto não é cúspide. Se $L \neq 1$ e $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$, aparecem pontos de cúspide.

Agora, vamos introduzir um novo conceito chamado "comprimento algébrico". Sabe-se que $\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{dx} \frac{dx}{dt}$, então, $|\frac{d\gamma}{dx}| = |\text{cos}\alpha|$, isto é, o comprimento da γ é igual a $\int_{\Gamma} |\gamma'(x)| dx = \int_{\Gamma} |\text{cos}\alpha(x)| dx$. É conveniente introduzir a seguinte convenção, o sinal do comprimento troca em cada cúspide, pois, pela observação, $\text{cos}\alpha$ troca de sinal quando passa pelo ângulo $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$, por isso, definimos que,

Definição 3.9 No intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ se $|\alpha| \leq \frac{\pi}{2}$, então, o comprimento é positivo; se $|\alpha| > \frac{\pi}{2}$, então, o comprimento é negativo. Assim o comprimento algébrico da γ é:

$$\text{compri.}(\gamma) = \int_{\Gamma} \text{cos}\alpha(x) dx,$$

onde $\text{compri.}(\gamma)$ é o comprimento algébrico da γ

Teorema 3.10 Seja T hiperbólica ou parabólica e seja γ a curva fechada da roda traseira correspondendo a ponto fixo α_0 , então,

$$\pi'(\alpha_0) = e^{-\text{compr.}(\gamma)},$$

onde "compr." é o comprimento algébrico de γ após Γ percorrer uma volta de comprimento de \bar{P} .

Prova: Considere as equações

$$\begin{aligned}
K(x) &= \frac{\text{sen}\alpha(x)}{L} + \frac{d\alpha}{dx}, \\
\alpha(0) &= \alpha_0.
\end{aligned}$$

Como $K(x)$ é periódica de período $P > 0$, no caso hiperbólico ou parabólico existirá solução periódica α_0 . Derivando a equação com respeito a α_1 , temos,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d\alpha(x, \alpha_1)}{d\alpha_1} \right) + \frac{\cos \alpha(x, \alpha_1)}{L} \frac{d\alpha(x, \alpha_1)}{d\alpha_1} = 0,$$

onde $\frac{d\alpha}{d\alpha_1}(0, \alpha_0) = 1$, logo,

$$\begin{aligned} \frac{\frac{d(d\alpha/d\alpha_1)}{dx}}{d\alpha/d\alpha_1} &= -\frac{\cos \alpha(x, \alpha_0)}{L} \Rightarrow \int_0^P \frac{\frac{d(d\alpha/d\alpha_1)}{dx}}{d\alpha/d\alpha_1} dx = \int_0^P -\frac{\cos \alpha(x, \alpha_0)}{L} dx, \\ &\Rightarrow \ln \left| \frac{d\alpha}{d\alpha_1}(P, \alpha_0) \right| = -\int_0^P \frac{\cos(x, \alpha_0)}{L} dx \\ &\Rightarrow \pi'(\alpha_0) = \left| \frac{d\alpha}{d\alpha_1}(P, \alpha_0) \right| = \exp \left[-\int_0^P \frac{\cos \alpha(x, \alpha_0)}{L} dx \right]. \end{aligned}$$

E mais ainda, temos $\frac{dt}{dx} = \cos \alpha(x)$ e $k(x) = \frac{\tan \alpha(x)}{L}$, portanto, tem-se,

$$\pi'(\alpha_0) = \exp \left[-\int_0^{l_1} \frac{1}{L} dt \right] = \exp \left[\frac{-\text{compr}(\gamma)}{L} \right].$$

Corolário 3.11 *Se Γ é hiperbólico e γ e γ^* são duas curvas fechadas das rodas traseiras, então, γ e γ^* tem o mesmo comprimento algébrico.*

Prova: Sejam α_1 e α_2 os pontos fixos de γ e γ^* , $\pi'(\alpha_1) \pi'(\alpha_2) = 1 = e^0 = e^{-\text{compr}(\gamma)} e^{-\text{compr}(\gamma^*)}$, logo, $\text{compr}(\gamma) + \text{compr}(\gamma^*) = 0$, ou seja, a soma do comprimento algébrico de γ e γ^* é 0, então o comprimento de γ e γ^* são iguais, porém, com sinais diferentes.

Teorema 3.12 *A aplicação π é parabólica se, e somente se, o comprimento algébrico total de γ é zero.*

Prova: No caso parabólico $\pi'(\alpha_0) = 1$, com α_0 ponto fixo. De fato, $T'(u_0) = \frac{ad-bc}{(cu_0+d)^2}$, com $u_0 = \frac{(d-a)}{2c}$, e $(d-a)^2 + 4bc = 0$, implica que, $(d+a)^2 = 4ad - 4bc$ então, $T'(u_0) = \frac{ad-bc}{(a+d)^2} = \frac{ad-bc}{\frac{(a+d)^2}{4}} = \frac{ad-bc}{ad-bc} = 1 = \pi'(\alpha_0)$, assim, $\exp[-\text{compr}(\gamma_0)] = 1$ e, concluímos que, $\text{compr}(\gamma_0) = 0$.

Corolário 3.13 *No caso parabólico, a curva γ possui cúspide.*

Prova: Como a soma algébrica de comprimento é 0, então no ponto que muda o sinal, aparece cúspide, e como γ é fechada, podemos dizer que no mínimo existem duas cúspides.

3.2 Oscilação do monociclo

Imagina-se uma situação, se uma bicicleta anda em linha reta, então naturalmente no chão vai deixar um só rastro de curva, pois o traço da curva γ coincide com a curva Γ .

Será que além do deslocamento em linha reta existe outra maneira de andar de bicicleta e deixar um único rastro no chão?

Consideramos uma curva "semente" $\gamma_0 : [0, L_0] \rightarrow \mathbb{R}^2$ de \mathbb{C}^∞ , tal que $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, parametrizada pelo comprimento de arco, de modo que as derivadas de qualquer ordem $\frac{d^n y}{dx^n} = 0$ nos pontos $\gamma_0(0) = (0, 0)$ e $\gamma_0(L_0) = (1, 0)$. Essa curva é uma trajetória inicial da roda traseira. Defina-se $\gamma_1(t) = \gamma_0 + \gamma'_0$ como a roda dianteira, daí a união dos traços de γ_0 e γ_1 vão ser uma curva contínua, pois, $\gamma_1(0) = \gamma_0(0) + \gamma'_0(0) = (0, 0) + (1, 0) = \gamma_0(1)$. Além disso, não aparecerão singularidades na conexão das duas curvas, pois, $\gamma'_1(0)$ é paralelo ao vetor $\gamma'_0(L_0)$, ou seja, definimos uma função $T(\gamma_i) = \gamma_i + \gamma'_i/|\gamma'_i| = \gamma_{i+1}$ no intervalo $[0, L_0]$, tal que, γ_i seja da traseira, e γ_{i+1} seja da dianteira. Repetindo o mesmo procedimento, assim construímos uma curva \mathcal{T} monociclo de uma bicicleta com um único rastro no chão. No caso em que γ_0 não esteja parametrizada pelo comprimento de arco definimos, que $\gamma_1 = \gamma_0 + \gamma'_0/|\gamma'_0|$. Agora, vamos construir uma curva semente.

Exemplo 3.14 *Seja uma função $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a(t) = (t, \exp(-1/t))$ se $t > 0$ e $a(t) = 0$ se $t \leq 0$, seja $b(t) = a(1-t)$ e $\gamma(t) = a(t)b(t)$, tirando o parâmetro, implica que $y(x) = 1000 \exp(1/x(1-x))$. Observamos que a derivada de qualquer ordem com relação a x sempre é 0, veja a Figura (3.5) feita pelo Maple.*

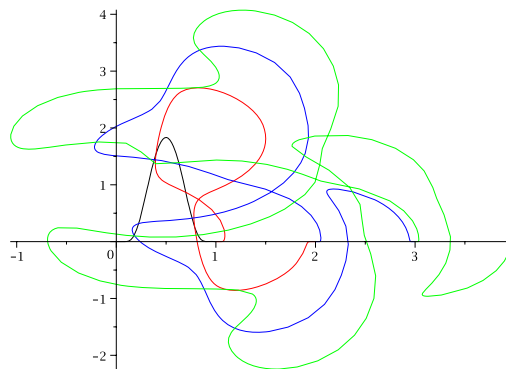


Figura 3.5:

Lema 3.15 *O comprimento de Γ é igual a,*

$$\int_0^L \sqrt{1 + k^2(t)} dt > L$$

onde $k(t) = |\gamma''(t)|$ é a curvatura de γ

Prova: Temos:

$$\Gamma'(t) = \gamma'(t) + \gamma''(t), |\Gamma'(t)|^2 = 1 + |\gamma''(t)|^2$$

então, o comprimento de Γ é,

$$\int_0^L |\Gamma'(t)| dt = \int_0^L \sqrt{1 + k^2(t)} dt > \int_0^L dt = L.$$

Proposição 3.16 *Consideremos o número de pontos de interseção da curva $\gamma(t)$, $t \in (0, L)$, com o eixo x denotado por $Z(\gamma)$ e assumimos que $Z(\gamma)$ é finito. Então $Z(\Gamma) > Z(\gamma)$.*

Prova: Sem considerar os pontos de interseção nos momentos t_0 e L , nota-se que $\Gamma = \gamma + \gamma'$, implica $e^t \Gamma = (\gamma + \gamma')e^t = (e^t \gamma)'$ e, ainda que,

$$\Gamma(t) = e^{-t} (e^t \gamma(t))'. \quad (3-4)$$

Seja $Z(\gamma) = n$ e sejam $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = L$ os momentos consecutivos de interseções de $\gamma(t)$ com o eixo x . Então, t_i também são os momentos consecutivos de interseções da curva $\Delta(t) := e^t \gamma(t)$ com o eixo x . Pelo Teorema de Rolle, para cada $i = 0, 1, \dots, n$, existe $t \in (t_i, t_{i+1})$, tal que, a curva $\Delta(t)$ tem o vetor tangente horizontal, isto é, o vetor $\Delta'(t)$ é horizontal no mínimo $i + 1$ instantes. Então com a Equação 3-4, $\Gamma(t)$ interceptam nos mesmos instantes. Assim $Z(\Gamma) > Z(\gamma)$.

Corolário 3.17 *Seja $\Gamma(x) = (x, y(x))$ uma curva cujas derivadas de todas as ordens em y se anulam nos pontos extremos x_1 e x_2 no qual $|x_2 - x_1| = 1$ e $\gamma(x_1) = \gamma(x_2) = 0$. Suponha que Γ intercepte o eixo x n vezes. Então, não existe uma curva $\gamma(x) = (x, y(x))$ cujas derivadas de todas as ordens de y se anulam nos pontos extremos x_3 e x_4 no qual $|x_3 - x_4| = 1$ e $\Gamma(x_3) = \Gamma(x_4) = 0$, tal que, $T^{n+1}(\gamma) = \Gamma$.*

Prova: Se existe uma curva γ , tal que, $T^{n+1}(\gamma) = \Gamma$, pela proposição anterior, $Z(\gamma) \leq -1$, absurdo.

Existe uma outra propriedade da oscilação da curva \mathcal{T} .

Proposição 3.18 *Seja $E(\gamma)$ a quantidade total finita dos pontos máximos locais e mínimos locais da curva γ em relação ao eixo x , e seja também $\Gamma = T(\gamma)$. Então, $E(\Gamma) > E(\gamma)$.*

Prova: Em um ponto máximo local de γ , a curva Γ tem a direção para baixo, e em um ponto mínimo local de γ , a curva Γ tem a direção para cima, veja na Figura (3.6), isto quer dizer que, entre um máximo local e mínimo local consecutivos da γ , temos um

mínimo local da Γ , e entre um mínimo local e máximo local consecutivos da γ , temos um máximo local da Γ . Considerando os pontos finais da γ como os pontos locais extremos, conseguimos o resultado.



Figura 3.6:

Seja γ_0 uma curva "semente" parametrizada pelo comprimento de arco, e tome um p qualquer onde $0 < p < L_0$. Seja $\gamma_0(p) = x_0$ e $T^n(\gamma_0(p)) = x_n$ onde $x_n \in \mathbb{R}^2$, assim encontramos um conjunto $X = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ e além disso,

$$|x_i - x_{i+1}| = 1$$

De fato, $|x_i - x_{i+1}| = |\gamma_i(p) - \gamma_{i+1}(p)| = |\gamma_i(p) - (\gamma_i(p) + \frac{\gamma'_i(p)}{|\gamma'_i(p)|})| = 1$.

Denotamos por v_i o vetor unitário $x_i x_{i+1}$ e por α_i o ângulo entre v_{i-1} e v_i . Se t_i é a velocidade de x_i , então,

$$t_i = t_{i+1} \cos \alpha_{i+1}.$$

De fato, $t_i = \gamma'_i$ e $t_{i+1} = \gamma'_{i+1} = \gamma'_i + (\frac{\gamma'_i}{|\gamma'_i|})'$, como $\frac{\gamma'_i}{|\gamma'_i|}$ é sempre unitário, então sua derivada é perpendicular a γ'_i , e α_{i+1} é o ângulo entre t_i e t_{i+1} , então, $t_i = t_{i+1} \cos \alpha_{i+1}$.

A construção do rastro de uma bicicleta como o monociclo pode ser interpretado como o seguinte; seja \mathcal{M} um conjunto com cada elemento $X \in \mathcal{M}$ tal que $X = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ onde x_i seja um ponto no \mathbb{R}^2 e $|x_i - x_{i+1}| = 1$ para cada i . Denota-se por v_i o vetor unitário $x_i x_{i+1}$ e por α_i o ângulo entre v_{i-1} e v_i . Seja \mathcal{M}_0 um subconjunto aberto do \mathcal{M} dado pela condição $\alpha_i \neq \pm\pi/2$ para cada i .

Considere que a velocidade do ponto x_i seja proporcional a v_i . Se t_i é a velocidade no ponto x_i , então,

$$t_i = t_{i+1} \cos \alpha_{i+1},$$

para todo i . Em \mathcal{M}_0 , onde $\cos \alpha_i \neq 0$, todas as velocidades são bem definidas e $t_0 = 1$. Se $\alpha_i = \pi/2$ para algum i , então a velocidade de todo x_j com $j < i$ é zero, isto implica que $t_0 = 0$, que contraria a hipótese. O absurdo acontece pois pelo Lema 1.9 não deve acontecer a cúspide.

Seja \mathcal{J} o conjunto dos jatos das curvas sementes no ponto $x_0 = \gamma(p)$, onde p está no domínio da função, então definimos uma função $\Phi : \mathcal{J}(\gamma(p)) \rightarrow \mathcal{M}_0$ e acabamos

de demonstrar que a função é injetora. Será que a função é uma bijeção? Ou seja, dado um ponto $X = (x_0, x_1, x_2, x_3, \dots)$, será que conseguimos o jato $(r'_0, r''_0, r'''_0, \dots)$? Antes de demonstrar o Teorema, vamos calcular numericamente.

Pelos vetores $(x_0, x_1, x_2, x_3, \dots)$, encontramos (c_1, c_2, c_3, \dots) , onde $c_i = \cos \alpha_i$. Como γ_0 é parametrizada pelo comprimento de arco, então, $t_0 = 1$, $t_0 = t_1 \cos \alpha_1$, implica que $t_1 = \frac{1}{c_1}$, assim, $t_k = \frac{1}{\prod_{i=1}^k c_i}$, além disso,

$$x_{n+1} = \gamma_{n+1} = \gamma_n + \frac{\gamma_n}{|\gamma_n|} \rightarrow x'_{n+1} = \gamma'_{n+1} = \gamma'_n + \left(\frac{\gamma_n}{|\gamma_n|}\right)',$$

e ainda,

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= x_0, \\ \gamma'_0 &= x'_0 = (x_1 - x_2)t_0 = (x_1 - x_0), \\ \gamma'_1 &= x'_1 = \gamma'_0 + \gamma''_0 = t_1(x_2 - x_1), \\ \gamma''_0 &= t_1(x_2 - x_1) - (x_1 - x_0), \\ \gamma_2 &= x'_2 = \gamma'_1 + \left(\frac{\gamma'_1}{|\gamma'_1|}\right)' = \gamma'_0 + \gamma''_0 + [\gamma'_1 \langle \gamma'_1, \gamma'_1 \rangle^{-1/2}]', \\ \gamma'_2 &= \gamma'_0 + \gamma''_0 + \frac{\gamma''_1}{|\gamma'_1|} - \frac{\gamma'_1}{|\gamma'_1|^3} \langle \gamma'_1, \gamma'_1 \rangle, \\ \gamma'_2 &= \gamma'_0 + \gamma''_0 + \frac{\gamma''_1}{|\gamma'_1|} - \frac{\gamma'_1}{|\gamma'_1|^3} (\langle \gamma'_0, \gamma''_0 \rangle + \langle \gamma'_0, \gamma''_0 \rangle + \langle \gamma'_0, \gamma''_0 \rangle). \end{aligned}$$

Como $\langle \gamma'_0, \gamma''_0 \rangle = 0$, implica que $\langle \gamma'_0, \gamma''_0 \rangle' = \langle \gamma''_0, \gamma''_0 \rangle + \langle \gamma'_0, \gamma'''_0 \rangle = 0$, então

$$\begin{aligned} \gamma'_2 &= \gamma'_0 + \gamma''_0 + \frac{\gamma''_0 + \gamma'''_0}{t_1} - \frac{\gamma'_0 + \gamma''_0}{t_1^3} \langle \gamma''_0, \gamma''_0 \rangle \\ \langle \gamma'_2, \gamma''_0 \rangle &= \langle \gamma'_0, \gamma''_0 \rangle + \langle \gamma''_0, \gamma''_0 \rangle + \frac{\langle \gamma''_0, \gamma''_0 \rangle + \langle \gamma''_0, \gamma''_0 \rangle}{t_1} - \\ &\quad \frac{\langle \gamma'_0, \gamma''_0 \rangle + \langle \gamma''_0, \gamma''_0 \rangle}{t_1^3} \langle \gamma''_0, \gamma''_0 \rangle \\ \langle \gamma''_0, \gamma''_0 \rangle &= \frac{\langle \gamma'_2, \gamma''_0 \rangle - \langle \gamma'_0, \gamma''_0 \rangle - |\gamma''_0|^2 \left(1 + \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_1^3}\right)}{\frac{1}{t_1} - \frac{|\gamma''_0|}{t_1^3}}. \end{aligned}$$

Tomemos a última equação e substituimos na equação de $\gamma'_2 = t_2(x_3 - x_2)$, então encontraremos o termo γ'''_0 . Repetindo o mesmo procedimento, encontramos o jato de γ .

Definição 3.19 *O polinomial Laurent com coeficiente no corpo F é uma expressão da forma,*

$$p = \sum_k p_k X_k, \quad p_k \in F.$$

Teorema 3.20 *Sejam $\mathcal{J}(\gamma(p))$ o conjunto do jato da curva semente γ no ponto $x_0 = \gamma(p)$ e \mathcal{M}_0 um conjunto tal que cada elemento $X = (x_0, x_1, x_2, \dots)$ possui as seguintes propriedades:*

A) $x_i \in \mathbb{R}^2$ e $|x_i - x_{i+1}| = 1$,

B) o ângulo α_i entre $x_i x_{i+1}$ e $x_{i+1} x_{i+2}$ é diferente de $\pm \frac{\pi}{2}$.

Então, existe uma bijeção entre $\mathcal{J}(\gamma(p))$ e \mathcal{M}_0 .

Prova: Seja $\Phi : \mathcal{J}(\gamma(p)) \rightarrow \mathcal{M}_0$. As observações acima já mostraram que Φ é injetora. Agora vamos demonstrar a bijeção. Construímos a aplicação inversa $\Psi : \mathcal{M}_0 \rightarrow \mathcal{J}(\gamma(p))$. Seja $X = (x_0, x_1, \dots) \in \mathcal{M}_0$ e o conjunto $C_i = \cos \alpha_i \neq 0$. Então,

$$t_0 = 1, \quad t_k = \frac{1}{\prod_{i=1}^k C_i}.$$

Usamos a indução para demonstrar que $x_j^{(r)} = F_{j,r}(x_i, C_i)$, onde F é um polinomial em x_i e polinomial Laurent em C_i , onde $i = 0, 1, \dots$

No caso $r = 1$, temos $x'_j = t_j(x_{j+1} - x_j) = \frac{1}{C_j}(x_{j+1} - x_j)$.

Suponha que $x_j^{(r)} = F_{j,r}(x_i, C_i)$ então,

$$x_j^{(r+i)} = \sum_i \frac{\partial F_{j,r}}{\partial x_i} x_i + \frac{\partial F_{j,r}}{\partial C_i} C'_i.$$

Se conseguirmos demonstrar que C'_i também é polinomial em x_i e C_i , então fechamos a demonstração. De fato, $C_i = \langle (x_i - x_{i-1}), (x_{i+1} - x_i) \rangle$, assim,

$$C'_i = \langle (t_i(x_{i+1} - x_i) - t_{i-1}(x_i - x_{i-1})), (x_{i+1} - x_i) \rangle + \\ \langle (x_i - x_{i-1}), (t_{i+1}(x_{i+2} - x_{i+1}) - t_i(x_{i+1} - x_i)) \rangle.$$

Em particular, X determina todas as derivadas $\gamma^{(r)}(p)$, isto é, o jato infinito da curva no ponto x_0 .

Curvas de bicicleta em \mathbb{S}^2

Nos capítulos 1 e 2 estudamos as trajetórias de bicicleta em \mathbb{R}^2 e neste capítulo vamos reconstruir a noção de bicicleta na esfera de raio 1.

4.1 Par de curvas na esfera \mathbb{S}^2

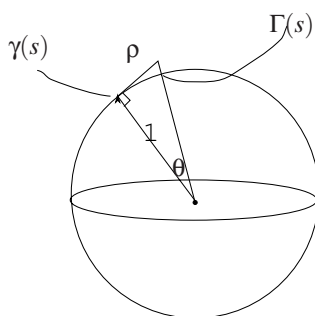


Figura 4.1:

Podemos definir o mesmo conceito de bicicleta no \mathbb{S}^2 . Seja $\gamma \in \mathbb{S}^2$ uma curva de classe C^k , onde $k \geq 3$, parametrizada pelo comprimento de arco s como trajetória da roda traseira, e seja também ρ o comprimento Euclidiano do eixo da bicicleta entre a roda traseira e a roda dianteira. Para que a curva da dianteira esteja na esfera podemos definir,

$$\Gamma(x(s)) = \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}}(\gamma(s) + \rho\gamma'(s)). \quad (4-1)$$

Veja a Figura (4.1), onde x e s são os parâmetros de comprimento de arco, respectivamente, de Γ e de γ . Assim podemos definir o triedro de Darboux $\{\gamma, \gamma', \gamma \times \gamma'\}$. Para mais informações veja ([St]).

Seja $N(p)$ o vetor normal a esfera \mathbb{S}^2 no ponto p e supomos que $\gamma(s) = N(s)$. Agora, derivando $\gamma'(s)$ em relação a s , em termos do triedro de Darboux temos,

$$\gamma''(s) = y(s)\gamma(s) \times \gamma' + z(s)\gamma(s) + x(s)\gamma'(s),$$

onde $y(s)$, $z(t)$ e $x(t)$ são coordenadas em relação à base. Consequentemente, $x(t) = 0$, pois $\langle \gamma', \gamma'' \rangle = 0$; $z(t) = \langle \gamma''(s), N(s) \rangle = k_n = -1$ e $|k(s)|^2 = |\gamma''(s)|^2 = |y(s)|^2 + 1$, que implica que $y(s) = k_g$, onde k_n e k_g são, respectivamente, as curvaturas normal e geodésica.

Assim, temos,

$$\begin{aligned}\gamma'' &= k_g \gamma \times \gamma' - \gamma, \\ \gamma''' &= k'_g \gamma \times \gamma' + k_g \gamma \times \gamma'' - \gamma' \\ &= k'_g \gamma \times \gamma' - (k_g^2 + 1) \gamma' \\ &= k'_g \gamma \times \gamma' - k^2 \gamma', \\ \gamma' \times \gamma''' &= \gamma' \times (k'_g \gamma \times \gamma' - k^2 \gamma') \\ &= k'_g \gamma.\end{aligned}$$

Consideremos também a torção τ da curva Γ ,

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{\langle \gamma'(s) \times \gamma'''(s), \gamma''(s) \rangle}{|\gamma'(s) \times \gamma''(s)|^2} \\ &= \frac{-k'_g}{k^2} = \frac{-[(k^2 - 1)^{1/2}]'}{k^2} \\ &= \frac{-k_s}{k\sqrt{k^2 - 1}}.\end{aligned}$$

Entre os vetores (γ, Γ) sempre existe um ângulo fixo θ , e assim, temos $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}} = \lambda$, $\sin\theta = \frac{\rho}{\sqrt{1+\rho^2}} = \xi$ e $\lambda^2 + \xi^2 = 1$. Pela notação de Frennet $\{t, n, b\}$, onde $t = \gamma'(s)$, $n' = -kt$, $b = t \times n$, e sejam também τ e $\bar{\tau}$ as torções da γ e Γ , então, $\Gamma(x(s)) = \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}}(\gamma(s) + \rho t) = \lambda\gamma(s) + \xi\gamma'(s)$, e isso implica que $\Gamma' = \lambda\gamma' + \xi\gamma''$, e mais ainda, que $\langle \Gamma', \gamma' \rangle = \lambda = |\Gamma'| \cos\alpha(s)$. Como $\lambda > 0$ então, $\cos\alpha(s) > 0$, e enfim, $-\frac{\pi}{2} < \alpha(s) < \frac{\pi}{2}$.

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{\lambda}{\cos \alpha(s)} &= |\Gamma'| = \sqrt{\lambda^2 + \xi^2 k^2}, \\ \frac{\lambda^2}{\cos \alpha^2(s)} &= \lambda^2 + \xi^2 k^2, \\ \lambda^2(\sec^2(s) - 1) &= \xi^2 k^2, \\ \lambda^2 \operatorname{tg}^2 \alpha(s) &= \xi^2 k^2, \\ \frac{\lambda}{\xi} |\operatorname{tg} \alpha(s)| &= k \\ k &= \frac{|\operatorname{tg} \alpha(s)|}{\rho}.\end{aligned}$$

No caso $\alpha > 0$, $k = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\rho} = \frac{\operatorname{sen} \rho}{\rho \cos \alpha}$, implica que, $k_s = \frac{\sec^2 \alpha \cdot \alpha'}{\rho}$, e no caso $\alpha < 0$, implica que, $k = -\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\rho} = -\frac{\operatorname{sen} \rho}{\rho \cos \alpha}$ e $k_s = -\frac{\sec^2 \alpha \cdot \alpha'}{\rho}$. Como $\frac{d\alpha}{dx} = \frac{d\alpha}{ds} \frac{ds}{dx}$, então, $\frac{d\alpha}{dx} = \alpha'(s) \sqrt{1 + \rho^2 \cos \alpha(s)}$.

Sabe-se que, $\Gamma_s = \Gamma_t \frac{dx}{ds}$ e pelo mesmo raciocínio do Lema 1.1 temos $\frac{\lambda}{\cos \alpha(s)} = \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + \rho^2 \cos \alpha(s)}}$, e $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \rho^2 \cos \alpha(s)}$.

Agora, vamos caracterizar a curva Γ . Temos,

$$\begin{aligned}\Gamma'(s) &= \lambda \gamma'(s) + \xi \gamma''(s) = \lambda t + \xi k n, \\ \Gamma''(s) &= \lambda k n + \xi k' n + d(-k^2 t - k \tau b) \\ &= (-\xi k^2) t + (\lambda k + \xi k') n + (-\xi k \tau) b, \\ \Gamma'''(s) &= \lambda k' n + \lambda k(-k t - \tau b) + \xi k'' n + \xi k'(-k t - \tau b) \\ &\quad + \xi(-2kk't - k^3 n - k'\tau b - k\tau'b - k\tau^2 n) \\ &= (-\lambda k^2 - dkk' - 2dkk') t + (\lambda k' + \xi k'' - \xi k \tau^2 - \xi k^3) n \\ &\quad + (-\lambda k \tau - \xi k \tau' - 2\xi k' \tau) b, \\ |\Gamma'(s)|^3 &= (\sqrt{\lambda^2 + \xi^2 k^2})^3.\end{aligned}$$

E, também,

$$\begin{aligned}\Gamma'(s) \times \Gamma''(s) &= [\lambda t + (\xi k) n] \times [(-k^2 \xi) t + (\lambda k + \xi k') n + (-\xi k \tau) b] \\ &= (-k^2 \tau \xi^2) t + (k \tau \lambda \xi) n + (k^3 \xi^2 + k \lambda^2 + k' \lambda \xi) b.\end{aligned}$$

Por isso, a curvatura K da curva Γ é,

$$\begin{aligned}
K &= \frac{|\Gamma'(s) \times \Gamma''(s)|}{|\Gamma'(s)|^3} \\
&= \frac{[(-k^2\tau\xi^2)^2 + (k\tau\lambda\xi)^2 + (k^3\xi^2 + k\lambda^2 + k'\lambda\xi)^2]^{1/2}}{[(\lambda^2 + \xi^2k^2)^3]^{3/2}} \\
&= \frac{\sqrt{1+\rho^2} [k^4\tau^2\rho^4 + k^2\tau^2\rho^2 + (k^3\rho^2 + \rho k_s + k)^2]^{1/2}}{(1+\rho^2k^2)^{3/2}} \\
&= \frac{\sqrt{1+\rho^2} \left[\frac{\rho^2k_s^2(1+\rho^2k^2)}{k^2-1} + (k^3\rho^2 + \rho k_s + k)^2 \right]^{1/2}}{(1+\rho^2k^2)^{3/2}} \\
&= \sqrt{1+\rho^2} \left[\frac{\rho^2k_s^2}{(k^2-1)(1+\rho^2k^2)^2} + \frac{(k^3\rho^2 + \rho k_s + k)^2}{(1+\rho^2k^2)^3} \right]^{1/2} \\
&= \left\{ \frac{(1+\rho^2)^2\rho^2k_s}{(k^2-1)(1+\rho^2k^2)^2} + \frac{(1+\rho^2)(k^3\rho^2 + \rho k_s + k)^2}{(1+\rho^2k^2)} \right\}^{1/2} \\
&= \left\{ \frac{(1+\rho^2)\rho^2\cos^2\alpha \cdot \alpha_s^2}{\sin^2\alpha - \rho^2\cos^2\alpha} + (1+\rho^2) \left[k(1+\rho^2k^2)^{-1/2} + \frac{\sec^2\alpha \cdot \alpha_s}{(1+\rho^2k^2)^{3/2}} \right]^2 \right\}^{1/2} \\
&= \left\{ \frac{\rho^2(\frac{d\alpha}{dx})^2}{1-\cos^2\alpha(1+\rho^2)} + \left[\sqrt{1+\rho^2} \frac{\sin\alpha}{\rho} + \sqrt{1+\rho^2} \cos\alpha \cdot \alpha_s \right]^2 \right\}^{1/2} \\
&= \left[\frac{\rho^2(\frac{d\alpha}{dx})^2}{1-(\frac{ds}{dx})^2} + \left(\sqrt{1+\rho^2} \frac{\sin\alpha}{\rho} + \frac{d\alpha}{dx} \right)^2 \right]^{1/2}.
\end{aligned}$$

Assim, demonstramos o lema.

Lema 4.1 *Seja $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva de classe C^k , onde $k \geq 3$, parametrizada pelo comprimento de arco e $\Gamma(s) = \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}}(\gamma(s) + \rho\gamma'(s))$, então,*

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha(s) < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}\cos\alpha(s)}, \quad k = \frac{|\operatorname{tg}\alpha|}{\rho},$$

e,

$$K = \left[\frac{\rho^2(\frac{d\alpha}{dx})^2}{1-(\frac{ds}{dx})^2} + \left(\sqrt{1+\rho^2} \frac{\sin\alpha}{\rho} + \frac{d\alpha}{dx} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

No caso do plano \mathbb{R}^2 , capítulo 1, sempre temos que $|\Gamma'| \geq |\gamma'|$. Será que o mesmo acontece no caso esférico? De fato,

$$\begin{aligned}
|\Gamma'(s)| &\geq |\gamma'(s)| \Leftrightarrow \\
|\Gamma'| &= \left| \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}}(\gamma' + \rho\gamma'') \right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}} \sqrt{\gamma'^2 + \rho^2\gamma''^2} \geq |\gamma'| = 1 \Leftrightarrow \\
\sqrt{\gamma'^2 + \rho^2\gamma''^2} &\geq \sqrt{1+\rho^2} \Leftrightarrow \\
\gamma'^2 + \rho^2\gamma''^2 &\geq 1 + \rho^2 \Leftrightarrow \\
1 + \rho^2k^2 &\geq 1 + \rho^2 \Leftrightarrow \\
k &\geq 1.
\end{aligned}$$

Como $k^2 = k_g^2 + k_n^2$ e $k_n = 1$, então, $k \geq 1$, ou seja, $|\Gamma'| \geq |\gamma'|$. Conseqüentemente, se a traseira percorre um círculo maior, então a dianteira também percorre o círculo maior.

Agora, vamos considerar outra questão: Se a roda traseira percorre um círculo que não seja um círculo máximo, o que acontecerá com a roda dianteira?

Seja $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s)) = (\text{sen}(t_0)\cos(s), \text{sen}(t_0)\text{sen}(s), \cos(t_0)) = (p_0\cos(s), p_0\text{sen}(s), q_0)$, onde $p_0 > 0$ e $q_0 > 0$, então

$$\begin{aligned}
\Gamma(s) &= (X(s), Y(s), Z(s)) \\
&= \lambda\gamma(s) + \xi\gamma'(s)/|\gamma'(s)| \\
&= \lambda(p_0\cos(s), p_0\text{sen}(s), q_0) + \xi(-\text{sen}(s), \cos(s), 0).
\end{aligned}$$

Como $Z(s) = \lambda q_0 < q_0$ e $(X(s), Y(s))$ é um círculo, então concluímos que Γ percorre outro círculo de comprimento maior que o círculo de γ .

Lema 4.2 Se γ é de classe C^k , $k \geq 1$, então Γ é de classe C^{k-1} para todo $\rho > 0$.

Prova: Seja γ uma função parametrizada pelo comprimento de arco em s . Como $\Gamma(s) = \frac{1}{\sqrt{1+\rho^2}}(\gamma(s) + \rho\gamma'(s))$ e γ é de classe C^k , então γ' é de classe C^{k-1} e Γ é de classe C^{k-1} .

Agora, vamos considerar γ de classe C^k , onde $k \geq 3$, não parametrizada pelo comprimento de arco, então,

$$\Gamma = \lambda\gamma + \xi(\gamma'/|\gamma'|).$$

Seja $t_0 \in \mathbb{R}$, tal que, $\gamma'(t_0) = 0$ e definimos $\Gamma = \lambda\gamma + \xi(\gamma'/|\gamma'|)$ se $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0)$; e $\Gamma = \lambda\gamma - \xi(\gamma'/|\gamma'|)$ se $(t_0, t_0 + \varepsilon]$.

Vamos apresentar exemplos de pontos singulares dos tipos cúspides e não cúspides.

Exemplo 4.3 Seja γ a união de arcos de círculos na esfera \mathbb{S}^2 definida por: $\gamma(t) = (\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(t), \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(t), \frac{1}{2})$, se $0 \leq t \leq \pi/2$, e $\gamma(t) = (-\frac{1}{2}\cos(t), \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\sin(t))$, se $\pi/2 \leq t \leq \pi$.

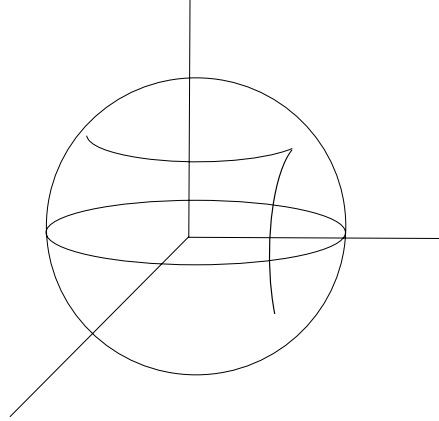


Figura 4.2:

Notamos que γ é contínua no ponto $\gamma(\pi/2) = (0, \sqrt{3}/2, 1/2)$, e aparece uma singularidade no ponto $\gamma(\pi/2)$, porém não é cúspide de Whitney, pois $\gamma'(\pi/2)$ não é nula e não é contínua, veja Figura (4.2).

Para entender melhor esta singularidade, consideramos uma reparametrização de γ , tal que, $\gamma(\theta(t_0)) = \gamma(\pi/2)$.

Seja $\gamma(\theta(t)) = (\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\theta(t)), \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\theta(t)), \frac{1}{2}) = \gamma_1(t)$ se $-1 \leq t \leq 0$, e $\gamma(t) = (-\frac{1}{2}\cos(\theta(t)), \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\sin(\theta(t))) = \gamma_2(t)$ se $0 \leq t \leq 1$. Tome $\gamma_1(t)$ e derivamos,

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (-\theta' \sin \theta(t), \theta' \cos \theta(t), 0), \\ \gamma''(t) &= (-\theta'^2 \cos \theta(t) - \theta'' \sin \theta(t), -\theta'^2 \sin \theta(t) + \theta'' \cos \theta(t), 0), \\ \gamma'''(t) &= (\theta'^3 \sin \theta(t) - 3\theta' \theta'' \cos \theta(t) - \theta''' \sin \theta(t) \\ &\quad - \theta'^3 \cos \theta(t) - 3\theta' \theta'' \sin \theta(t) + \theta''' \cos \theta(t), 0).\end{aligned}$$

Para que γ tenha cúspide de Whitney em $\gamma(0)$, precisamos primeiro que $\gamma'(0) = 0$, implicando que $\theta'(0) = 0$. Porém, $\gamma''(0) = (-\theta'' \sin \theta(0), \theta'' \cos \theta(0), 0)$ e $\gamma'''(0) = (-\theta''' \sin \theta(0), \theta''' \cos \theta(0), 0)$, ou seja, $\gamma''(0)$ e $\gamma'''(0)$ são linearmente dependentes, então, não existe função θ para que γ possua cúspide de Whitney.

Exemplo 4.4 Seja $\gamma(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t), \sqrt{1 - \cos^6(t) - \sin^6(t)})$, Figura (4.3). Aparentemente, pela figura, encontramos um exemplo de 4 singularidades de Whitney.

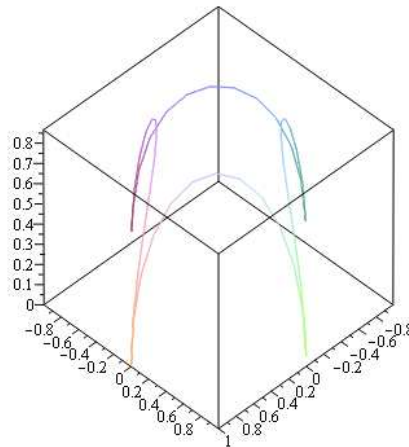


Figura 4.3: A curva γ que tem 4 singularidades

Quando $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$, os pontos poderiam ser de Whitney, e vamos verificar o que ocorre.

Temos que,

$$\gamma'(t) = (-3\text{sen}(t)\cos^2(t), 3\text{sen}^2(t)\cos(t), \frac{\sqrt{3}\text{sen}(t)\cos(t)(-1 + 2\cos^2(t))}{\sqrt{\text{sen}^2(t)\cos^2(t)}}).$$

Assim, γ' é descontínua nos pontos $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$; ou seja, os pontos citados não são cúspides de Whitney.

Exemplo 4.5 Seja $\gamma(t) = (t^2, t^3, \sqrt{1-t^4-t^6})$. O ponto 0 é um exemplo de cúspide, pois, $\gamma'(0) = (0, 0, 0)$, $\gamma''(0) = (2, 0, 0)$ e $\gamma'''(0) = (0, 6, 0)$, veja na figura (4.4).

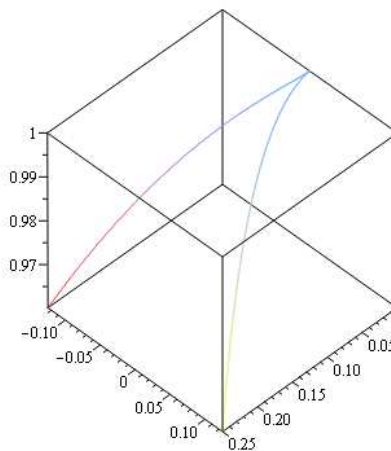


Figura 4.4: A curva γ possui singularidade do tipo cúspide de Whitney

Referências Bibliográficas

- [AC] A. Abrams, J. Cantarella, J. Fu, M. Ghomi and R. Howard, *Circles minimize most knot energies*, *Topology* 42(2003), 381-394.
- [Al] Alcides Lins Neto, *Funções de uma variável complexa, segunda edição*, Projeto Euclides, (1996).
- [HG] Heinrich W. Guggenheimer, *Differential Geometry*, Dover Publications (1977).
- [Hi] H. Alencar e W. Santos, *Geometria das Curvas planas*, XII Escola de Geometria Diferencial- Goiânia- (2002).
- [LT] Mark Levi and Serge Tabachnikov, *On Bicycle Tire Tracks Geometry, Hatchet Planimeter, Menzin's Conjecture and Oscillation of Unicycle Tracks*, *Experiment. Math.* Volume 18, Issue 2 (2009), 173-186.
- [Mf] Manfredo Perdigão do Carmo, *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, Coleção Textos Universitários, (2005).
- [St] D. Struik, *Lectures on Classical Differential Geometry*, Addison Wesley, (1950), Reprinted by Dover Collections, (1988).
- [TA] Serge Tabachnikov, *Tire Track Geometry: Variation on a Theme*, *Israel Journal of Mathematic* 151 (2006), 1-28.
- [SO] J. Sotomayor, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides (1979).