

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA

MILTON JAVIER CÁRDENAS MENDEZ

Hipersuperfícies de tipo Ribaucour

Goiânia
2022



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a [Lei 9.610/98](#), o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

Dissertação Tese Outro*: _____

*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

Exemplos: Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

2. Nome completo do autor

Milton Javier Cárdenas Mendez

3. Título do trabalho

Hipersuperfícies de tipo Ribaucour

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:

a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);

b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.

O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.

Casos de embargo:

- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.



Documento assinado eletronicamente por **Armando Mauro Vasquez Corro, Professor do Magistério Superior**, em 28/09/2022, às 13:37, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **MILTON JAVIER CARDENAS MENDEZ, Discente**, em 28/09/2022, às 14:08, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3222475** e o código CRC **99F34CE6**.

MILTON JAVIER CÁRDENAS MENDEZ

Hipersuperfícies de tipo Ribaucour

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de matemática e estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Programa de Pós-Graduação Matemática.

Área de concentração: Geometria.

Orientador: Prof. Dr. Armando Mauro Vasquez Corro

Goiânia
2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Mendez, Milton Javier Cárdenas
Hipersuperfícies de tipo Ribaucour [manuscrito] / Milton Javier Cárdenas Mendez. - 2022.
LXXII, 72 f.

Orientador: Prof. Dr. Armando Mauro Vasquez Corro.
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), Programa de Pós-Graduação em Matemática, Goiânia, 2022.

Bibliografia.
Inclui gráfico, lista de figuras.

1. Superfícies de Ribaucour . 2. Superfícies de Weingarten . 3. Representação de Weierstrass. 4. Função Holomorfa. I. Corro, Armando Mauro Vasquez , orient. II. Título.

CDU 514.77



UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE TESE

Ata nº 03 da sessão de Defesa de Tese de **Milton Javier Cárdenas Mendez**, que confere o título de Doutor em Matemática, **na área de concentração de Geometria**.

Ao vigésimo sétimo dia do mês de setembro do ano de dois mil e vinte e dois, a partir das nove horas e trinta minutos, via Web Vídeokonferência, realizou-se a sessão pública de Defesa de Tese intitulada "**Hipersuperfícies de tipo Ribaucour**". Os trabalhos foram instalados pelo Orientador e presidente da banca, Professor Doutor **Armando Mauro Vasquez Corro - IME/UFG** com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: Professor Doutor **Levi Rosa Adriano - IME/UFG** membro titular interno, Professor Doutor **Benedito Leandro Neto - IME/UFG** membro titular interno, Professor Doutor **Carlos Maber Carrion Riveros - MAT/UnB** membro titular externo e o Professor Doutor **João Paulo dos Santos - MAT/UnB**, membro titular externo. Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho. A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Tese, tendo sido o candidato **aprovado** pelos seus membros. Proclamados os resultados pelo Professor Doutor **Armando Mauro Vasquez Corro - IME/UFG**, Presidente da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, ao vigésimo sétimo dia do mês de setembro do ano de dois mil e vinte e dois.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

Hipersuperfícies de tipo Ribaucour



Documento assinado eletronicamente por **Armando Mauro Vasquez Corro, Professor do Magistério Superior**, em 27/09/2022, às 13:43, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Carlos Maber Carrión Riveros, Usuário Externo**, em 27/09/2022, às 14:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Levi Rosa Adriano, Professor do Magistério Superior**, em 27/09/2022, às 16:53, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **João Paulo dos Santos, Usuário Externo**, em 27/09/2022, às 17:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Benedito Leandro Neto, Professor do Magistério Superior**, em 28/09/2022, às 10:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no § 3º do art. 4º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **3036161** e o código CRC **9B235B35**.

Referência: Processo nº 23070.037092/2022-79

SEI nº 3036161

Aos meus pais Rafael Cárdenas e Ana Elvia Mendez

Agradecimentos

A meu orientador Dr. Armando Mauro Vasquez Corro pela confiança paciência e dedicação em me orientar na produção deste trabalho.

Aos professores e funcionários do IME pelo apoio e à CAPES pelo apoio financeiro para a realização desta tese.

Aos professores da banca pelas contribuições a este trabalho.

A minha família por sua amor e carinho.

Finalmente agradeço aos grandes amigos que fiz e que foram de ajuda neste processo.

A todos os meus sinceros agradecimentos.

Geometria é a arte de pensar bem desenhando mal.

Henri Poincaré ,

.

Resumo

Cárdenas Mendez, Milton Javier. **Hipersuperfícies de tipo Ribaucour**. Goiânia, 2022. 72p. Tese de Doutorado Relatório de Graduação. Programa de Pós-Graduação Matemática, Instituto de matemática e estatística, Universidade Federal de Goiás.

Neste trabalho definimos as superfícies do tipo Ribaucour (abreviadamente, superfícies-TR). Essas superfícies satisfazem uma relação semelhante as superfícies de Ribaucour que estão relacionadas ao problema de Élie Cartan. Esta classe fornece o que parece ser o primeiro exemplo de pares de superfícies não congruentes no espaço euclidiano tal que, sob um difeomorfismo, as linhas de curvatura são preservadas e as curvaturas principais são trocadas. Mostramos que toda superfícies-TR compacta e conexa é a esfera com centro na origem. Obtemos uma representação do tipo Weierstrass para superfícies-TR com aplicação normal de Gauss prescrito que depende de duas funções holomorfas. Apresentamos exemplos explícitos de superfícies-TR. Além disso, usamos essa representação para classificar as superfícies-TR de rotação. Definimos as superfícies-TRG que é uma generalização das superfícies-TR, mostramos uma parametrização local desta classe de superfícies e classificamos no caso em que são de rotação e generalizamos as superfícies-TR para o caso de hipersuperfícies em \mathbb{R}^{n+1} , exibimos uma parametrização para os casos rotacionais e analisamos o comportamento geral das curvas geratrizes quando as hipersuperfícies de rotação são 3-dimensionais.

Palavras-chave

Superfícies de Ribaucour, superfície Weingarten Generalizada, representação de Weierstrass, função holomorfa, função harmônica.

Abstract

Cárdenas Mendez, Milton Javier. **Ribaucour-type hypersurfaces** . Goiânia, 2022. 72p. PhD. Thesis Relatório de Graduação. Programa de Pós-Graduação Matemática, Instituto de matemática e estatística, Universidade Federal de Goiás.

In this work we define the Ribaucour-type surfaces (in short, RT-surfaces), These surfaces satisfy a relationship similar to the Ribaucour surfaces that are related to the Élie Cartan problem. This class furnishes what seems to be the first examples of pairs of noncongruent surfaces in Euclidean space such that, under a diffeomorphism, lines of curvatures are preserved and principal curvatures are switched. We show that every compact and connected RT-surface is the sphere with center at the origin. We obtain present a Weierstrass type representation for RT-surfaces with prescribed Gauss map which depends on two holomorphic functions. We give explicit examples of RT-surfaces. Also, we use this representation to classify the RT-surfaces of rotation.

We define the GRT-surfaces which are a generalization of the RT-surfaces, show a local parameterization of this class of surfaces and classify them in the in which case they are of rotation and generalize as RT-surfaces for the case of hypersurfaces in \mathbb{R}^{n+1} , display a parameterization for the rotational cases and analyze the general of generatrix curves when hypersurfaces and rotation behavior are 3-dimensional.

Keywords

Ribaucour surfaces, generalized Weingarten surfaces, Weierstrass type representation, holomorphic function, harmonic function.

Sumário

Lista de Figuras	8
1 Preliminares	14
1.1 Hipersuperfícies no Espaço Euclidiano	14
1.2 Funções Holomorfas	17
2 Superfícies de tipo Ribaucour	23
3 Superfícies de tipo Ribaucour generalizadas	44
4 Hipersuperfícies de tipo Ribaucour	58
Referências Bibliográficas	71

Lista de Figuras

2.1	$f(z) = g(z) = z$	40
2.2	$f(z) = z^2, g(z) = z$	40
2.3	$f(z) = z, g(z) = z^2$	41
2.4	$a = -1$	43
2.5	$a = 0$	43
2.6	$a = \frac{1}{2}$	43
3.1	$l(t) = t^2 + t + 1, f(z) = g(z) = z$	52
3.2	$l(t) = \cos(t), f(z) = g(z) = z = u_1 + iu_2$	52
3.3	$l(t) = \sinh(t), f(z) = g(z) = z = u_1 + iu_2$	53
3.4	$l(t) = t^2 + t + 1, f(z) = z^2, g(z) = z$	53
3.5	$l(t) = \cos(t), f(z) = z^2, g(z) = z$	53
3.6	$l(t) = \sinh(t), f(z) = z^2, g(z) = z$	53
3.7	$l(t) = t^2 + t + 1, f(z) = z, g(z) = z^2$	54
3.8	$l(t) = \cos(t), f(z) = z, g(z) = z^2$	54
3.9	$l(t) = \sinh(t), f(z) = z, g(z) = z^2$	54
3.10	$l(t) = t^2 + t + 1, a = 1, b = 0$	56
3.11	$l(t) = t^2 + t + 1, a = 0, b = 1$	56
3.12	$l(t) = \cos(t), a = 1, b = 0$	56
3.13	$l(t) = \cos(t), a = 0, b = 1$	57
3.14	$l(t) = \sinh(t), a = 1, b = 0$	57
3.15	$l(t) = \sinh(t), a = 0, b = 1$	57
4.1	$k_1 = -2, k_3 = 0, k_4 = k_5 = 1$	67
4.2	$k_1 = 0 = k_3 = 0, k_4 = k_5 = 1$	68
4.3	$k_1 = k_3 = k_4 = k_5 = c = 0$	69
4.4	$k_1 = k_3 = -1, k_4 = k_5 = 0, c = 2$	70

Introdução

Uma superfície orientada $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ é dita uma superfície Weingarten se existe uma relação diferenciável W entre as curvaturas média H e Gaussiana K de Σ tal que $W(H, K) = 0$. A classificação geral das superfícies Weingarten é ainda uma questão aberta. No caso em que o funcional W é linear, isto é, $a + bH + cK = 0$ para a, b e c constantes, as superfícies são chamadas de superfícies Weingarten linear.

Exemplos simples de superfícies Weingarten linear são as superfícies de curvatura Gaussiana constante ($c \neq 0$ e $b = 0$) e as superfícies de curvatura média constante ($b \neq 0$ e $c = 0$).

Schief [16], estudou duas classes de superfícies $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ que satisfazem uma relação de Weingarten da forma $(\mu^2 \pm \rho^2)K + 2\mu H + 1 = 0$, onde $\mu, \rho : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ são funções harmônicas segundo uma certa métrica e mostra que tais superfícies são integráveis. Essas classes incluem as superfícies clássicas de Bianchi, as superfícies de Bianchi de curvatura positiva e as superfícies com curvatura média inversa harmônica (veja [3]).

Em [5], Corro apresentou uma maneira de parametrizar superfícies como envelopes de congruência de esferas na qual o outro envelope está contido em um plano e com função raio associada a um sistema de tipo hidrodinâmico. Como aplicação, ele estuda superfícies $X : M \rightarrow \mathbb{H}^3$ no espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 , no modelo do semi-espaço positivo, tal que a aplicação hiperbólica de Gauss G define uma congruência de esferas para a qual $X(M)$ e $G(X(M))$ são envelopes e o raio de cada esfera define a função raio h . Então X é dita uma superfície Weingarten generalizada do tipo Bryant (superfícies-BGM) se a curvatura média H , a curvatura Gaussiana K_I e a função raio h satisfazem a relação

$$2ach^{\frac{2(c-1)}{c}}(H-1) + (a+b - ach^{\frac{2(c-1)}{c}})K_I = 0.$$

Para $a, b, c \in \mathbb{R}, a + b \neq 0, c \neq 0$. Esta classe de superfícies incluem as superfícies de Bryant e as superfícies flat do \mathbb{H}^3 (veja [4] e [12]).

Seja $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície orientada pela normal de Gauss N , as funções

$\psi, \Lambda : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $\psi(p) = \langle p, N(p) \rangle$, $\Lambda(p) = \langle p, p \rangle$, $p \in \Sigma$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto escalar euclidiano em \mathbb{R}^3 , são chamadas de função suporte e função distância quadrática, respectivamente. Geometricamente, $\psi(p)$ mede a distância da origem ao plano tangente $T_p\Sigma$ de Σ em p e $\Lambda(p)$ calcula a distância quadrática de p à origem.

Em 1888 Appell [2] estudou uma classe de superfícies orientadas em \mathbb{R}^3 associadas a transformações na esfera que preservam área. Mais tarde Ferreira e Roitman [11] constataram que estas superfícies satisfazem a relação de Weingarten

$$H + \psi K = 0.$$

Em 1907, Tzitzéica [17] estudou superfícies hiperbólicas orientadas $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ tais que existe uma constante não nula $c \in \mathbb{R}$ para a qual se cumpre a seguinte relação

$$K + c^2\psi^4 = 0$$

Martínez e Roitman, em [14], exibem o que parece ser o primeiro exemplo encontrado para o segundo caso do problema proposto por Élie Cartan em seu clássico livro a respeito de sistemas diferenciais exterior e suas aplicações a Geometria Diferencial. Tais exemplos são dados por uma classe de superfícies Weingarten que satisfazem a relação

$$\frac{H}{K} = -\frac{\Lambda}{2\Psi} - \frac{1}{2\Psi}.$$

Estas superfícies são chamadas de **superfícies de Ribaucour**.

Seja Σ uma hipersuperfície com $\Psi \neq 0$, para cada $p \in \Sigma$, existe uma esfera que tangencia Σ em p e passa pela origem. Esta esfera tem raio dado por $R = -\frac{\Lambda}{2\Psi}$, que chamaremos de função raio. Seja Σ uma superfície com aplicação normal de Gauss N , para cada $p \in \Sigma$ a esfera de centro $p + \frac{H}{K}N(p)$ e raio $\frac{H}{K}$ é chamada de **esfera média**. Uma superfície é chamada de **tipo esférico** se as esferas medias tangenciam um plano fixo.

As superfícies Weingarten generalizada do tipo suporte distância (ou, por abreviação, superfícies-WGSD) são superfícies Weingarten que satisfazem uma relação da forma $A + BH + CK = 0$, onde $A, B, C : S \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis que dependem da função suporte ψ e da função distância quadrática Λ , a partir delas, Dias em [9] introduz novas classes de superfícies-WGSD, aplicando inversões e dilatações. Para uma classe especial de superfícies-WGSD, que é invariante por dilatações e inversões, chama-

das superfícies-EDSGW. As superfícies-EDSGW satisfazem uma relação da forma

$$2\psi H + \Lambda K = 0.$$

Esta classe de superfícies tem a propriedade geométrica de que todas as esferas médias passam por um ponto fixo. Em [7] os autores apresentam uma representação do tipo Weierstrass para superfícies-EDSGW com aplicação normal de Gauss prescrito que depende de duas funções holomorfas. Também classificam as superfícies-EDSGW isotérmicas em relação à terceira forma fundamental parametrizada por linhas planas de curvatura.

Pereira [15] introduz as superfícies Weingarten generalizadas do tipo suporte radial ou, abreviadamente, superfícies WGSR. Elas são definidas por estarem localmente associadas a uma esfera unitária de centro C por uma congruência de esferas e que satisfazem a relação de Weingarten dada por

$$[4\Lambda(\psi - 1)^2 - (1 - \Lambda)^2]H + [(\lambda - 1)(\psi - 2\Lambda + \Lambda\psi)]K + 2(\psi - 1)(1 - \Lambda) + 4\psi(\psi - 1)^2 = 0.$$

Motivados pelos trabalhos [7], [9], [11] e [14], , introduzimos as **superfícies de tipo Ribaucour** ou, abreviadamente, superfícies-TR. Seja Σ uma superfície com aplicação normal de Gauss N tal que para cada $p \in \Sigma$ a esfera de centro $p + (\frac{H(p)}{K(p)} + \frac{\Psi(p)}{2})N(p)$ e raio $\frac{H(p)}{K(p)} + \frac{\Psi(p)}{2}$ passa pela origem, em este caso Σ é chamada de superfície-TR e satisfaz a seguinte relação de Weingarten generalizada com função suporte Ψ e a função distância quadrática Λ

$$\frac{H}{K} = -\frac{\Lambda}{2\Psi} - \frac{\Psi}{2}.$$

Dada uma hipersuperfície Σ em \mathbb{R}^{n+1} com curvaturas principais k_i , $1 \leq i \leq n$, definimos as curvaturas radiais R_i e a curvatura média radial H_R como

$$R_i = \frac{1}{k_i}, \quad H_R = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i.$$

O problema de Christoffel: Dados $F : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $N : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ encontrar uma hipersuperfície Σ em \mathbb{R}^{n+1} , com aplicação normal de Gauss N e F prescrita como $F = H_R$. Para o caso $n = 2$ e F dado por $F = -\frac{\Lambda}{2\Psi} - \frac{\Psi}{2}$, temos que as superfícies-TR são soluções do problema de Christoffel.

Encontramos uma representação do tipo Weierstrass para essas superfícies dependendo de duas funções holomorfas e as classificamos no caso em que são de rotação, também introduzimos uma classe mais geral de superfícies-TR que dependem de uma

função real C . Em outras palavras, seja Σ uma superfície com aplicação de Gauss N , existe uma aplicação harmônica μ com respeito a terceira forma fundamental e uma função $C: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $p \in \Sigma$ a esfera com centro $p + \left(\frac{H}{C(\mu)K} + \frac{\Psi(2-C(\mu))}{2C(\mu)} \right) N(p)$ e raio $\left(\frac{H}{C(\mu)K} + \frac{\Psi(2-C(\mu))}{2C(\mu)} \right)$, tangenciam uma esfera fixa, chamada de **Superfície de tipo Ribaucour generalizada** ou abreviadamente Superfície-TRG, estas superfícies satisfazem a seguinte relação de Weingarten generalizada

$$\frac{H}{K} = C(\mu) \left(\frac{-\Lambda}{2\Psi} + \frac{\Psi}{2} \right) - \Psi.$$

Mostramos uma parametrização local e classificamos as superfícies-TRG no caso de rotação.

Finalmente generalizamos a noção de superfícies-TR para o caso de hipersuperfícies em \mathbb{R}^{n+1} . Dizemos que uma hipersuperfície orientável $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma **hipersuperfície de tipo Ribaucour** ou por abreviação, uma hipersuperfície-TR, se a curvatura de Gauss-Kronecker $H_n \neq 0$, a $(n-1)$ -ésima curvatura média H_{n-1} , a função suporte Ψ e a função distância quadrática Λ , satisfazem

$$\frac{H_{n-1}}{H_n} = c \left(\frac{-\Lambda}{n\Psi} + \frac{\Psi}{n} \right) - \Psi$$

aqui c é uma constante. Exibimos uma parametrização para tais hipersuperfícies quando são de rotação.

Nosso trabalho está estruturado da seguinte forma: No Capítulo 1, apresentamos definições e fatos básicos que serão utilizado do decorrer do texto.

No Capítulo 2, definimos as superfícies do tipo Ribaucour. Essas superfícies satisfazem uma relação semelhante as superfícies de Ribaucour que estão relacionadas ao problema de Élie Cartan. Esta classe fornece o que parece ser o primeiro exemplo de pares de superfícies não congruentes no espaço euclidiano tal que, sob um difeomorfismo, as linhas de curvatura são preservadas e as curvaturas principais são trocadas. Mostramos que toda superfície-RT compacta e conexa é uma esfera com centro na origem. Apresentaremos uma representação tipo Weierstrass para essas superfícies que dependem de duas funções holomorfas e classificamos os casos rotacionais.

No Capítulo 3, definimos classes de superfícies-TRG que é uma generalização das superfícies-TR. Quando a função C depende de uma função real ℓ , estas superfícies dependem de duas funções holomorfas. Mostramos uma parametrização local desta classe de superfícies e classificamos as superfícies -TRG de rotação contidas nesta classe.

No Capítulo 4, generalizamos o conceito de superfícies-TR para o caso de hipersuperfícies em \mathbb{R}^{n+1} . Exibimos uma parametrização para os casos rotacionais e analisamos o comportamento geral das curvas geratrizes quando as hipersuperfícies são 3-dimensionais.

Preliminares

Neste capítulo introduziremos algumas definições e alguns resultados básicos que serão usados neste trabalho, encontrados em [10].

1.1 Hipersuperfícies no Espaço Euclidiano

Ao longo do trabalho denotamos por \mathbb{R}^n o espaço euclidiano n -dimensional. Para uma função diferenciável $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, indicamos sua derivada parcial em relação à i -ésima variável x_i por $f_{,i}$.

Definição 1.1 *Seja Σ um subconjunto não vazio de \mathbb{R}^{n+1} , $n \geq 2$. Dizemos que Σ é uma hipersuperfície de \mathbb{R}^{n+1} se, para cada $p \in \Sigma$, existem uma vizinhança $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ de p , um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ e um homeomorfismo diferenciável $X : U \rightarrow V \cap \Sigma$, tal que a diferencial $dX_q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é injetora para todo $q \in U$.*

A aplicação X é chamada uma parametrização de Σ . Se X_1, X_2, \dots, X_{n+1} indicarem suas funções componentes, então X é diferenciável se, e somente se, X_i for diferenciável para todo $i = 1, \dots, n+1$. Além disso, a diferencial dX_q é injetora se, e somente se, os vetores

$$X_{,i}(q) = \frac{\partial X}{\partial u_i}(q), \quad 1 \leq i \leq n,$$

são linearmente independentes.

Um vetor tangente a Σ em um ponto $p \in \Sigma$ é um vetor tangente a uma curva parametrizada diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$, com $\alpha(0) = p$. O hiperplano tangente a Σ em p , denotado por $T_p\Sigma$, é o conjunto de todos os vetores tangentes a Σ em p . Seja Σ uma hipersuperfície no espaço euclidiano e X uma parametrização de Σ então $T_p\Sigma$ coincide com o espaço vetorial gerado por $\{X_{,i}(u); 1 \leq i \leq n\}$, onde $p = X(u)$.

Seja $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Sigma$, $n \geq 3$, uma parametrização de uma hipersuperfície Σ e $N : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ um campo vetorial unitário normal à X , isto é, N satisfaz $\langle N, X_{,i} \rangle(u) = 0$, $1 \leq i \leq n$, para todo $u \in U$. Dessa forma, o campo N é normal a $T_p\Sigma$, para

cada $p = X(u) \in \Sigma$. Dizemos que N é a aplicação normal de Gauss de Σ e que tal campo determina uma orientação em Σ .

Considerando $\{X_1, \dots, X_n, N\}$ como uma base de \mathbb{R}^{n+1} , podemos escrever o vetor $X_{,ij}$, $1 \leq i, j \leq n$, como

$$X_{,ij} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k X_{,k} + b_{ij} N. \quad (1-1)$$

Os coeficientes Γ_{ij}^k são chamados de símbolos de Christoffel. Se tomarmos a parametrização X de Σ tal que a métrica $g_{ij} = \langle X_{,i}, X_{,j} \rangle$ seja conforme a euclidiana, isto é, $g_{ii} \neq 0$ e $g_{ij} = 0$, para $i \neq j$, O seguinte lema mostra como são os símbolos de Christoffel

Lema 1.2 *Os símbolos de de Christoffel da métrica g_{ij} são dados por*

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^m &= 0 \quad \text{para } i, j, k \text{ distintos,} \\ \Gamma_{ij}^j &= \frac{g_{jj,i}}{2g_{jj}} \quad \text{para todo } i, j, \\ \Gamma_{ii}^j &= -\frac{g_{ii,j}}{2g_{jj}} = -\frac{g_{ii}}{L_{jj}} \Gamma_{ji}^i \quad \text{para } i \neq j. \end{aligned}$$

Prova. As funções Γ_{ij}^k definidas em U por $\nabla_{X_{,i}} X_{,j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_{,k}$ são os coeficientes da conexão ∇ em U ou os símbolos de Christoffel da conexão, temos que

$$\sum_{\ell} \Gamma_{ij}^k g_{\ell k} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\},$$

onde $g_{ij} = \langle X_{,i}, X_{,j} \rangle$.

Como a matriz (g_{km}) admite uma inversa (g^{km}) , teremos que

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km}. \quad (1-2)$$

A equação (1-2) é a expressão clássica dos símbolos de Christoffel da conexão Riemanniana em termos dos g_{ij} dados pela métrica. Como a parametrização X é ortogonal então $g^{ij} = 0$, para todo $i \neq j$ e $g^{ii} = g_{ii}^{-1}$, então

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^m &= \frac{1}{2} (g_{jm,i} + g_{mi,j} - g_{ij,m}) g^{mm} \\ &= \frac{1}{2g_{mm}} (g_{jm,i} + L_{mi,j} - g_{ij,m}), \end{aligned}$$

- se i, j, m distintos então

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2g_{mm}} (g_{jm,i} + g_{mi,j} - g_{ij,m}) = 0.$$

- Se $m = j$ e para todo i, j então

$$\Gamma_{ij}^j = \frac{1}{2g_{jj}} (g_{jj,i} + g_{ji,j} - g_{ij,j}) = \frac{g_{jj,i}}{2g_{jj}}.$$

- Para $i \neq j$

$$\Gamma_{ii}^j = \frac{1}{2g_{jj}} (g_{ij,i} + g_{ji,i} - g_{ii,j}) = -\frac{g_{ii,j}}{2g_{jj}} = -\frac{g_{ii}\Gamma_{ji}^i}{g_{jj}}.$$

□

Se X é uma parametrização de uma hipersuperfície Σ , dizemos que Σ está parametrizada por linhas de curvatura se

$$N_{,i} = -k_i X_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

onde $-k_i$ são as curvaturas principais de Σ . Neste caso, os coeficientes b_{ij} em (1-1) são tais que $b_{ij} = 0$, $i \neq j$, e $b_{ii} = -k_i g_{ii}$, quando a métrica L_{ij} é conforme à euclidiana.

De fato, derivando a equação $\langle N, X_i \rangle = 0$ em relação i -ésima variável, obtemos $\langle N_{,i}, X_i \rangle = -\langle N, X_{,ii} \rangle$, por um lado

$$\langle N_{,i}, X_i \rangle = \langle -k_i X_i, X_i \rangle = -k_i g_{ii}.$$

Por outro lado

$$-\langle N, X_{,ii} \rangle = -\left\langle N, \sum_{k=1}^n \Gamma_{ii}^k X_k + b_{ii} N \right\rangle = -b_{ii},$$

de modo que $b_{ii} = -k_i g_{ii}$.

Agora derivando $\langle N, X_i \rangle = 0$ em relação j -ésima variável com $i \neq j$, obtemos $\langle N_{,j}, X_i \rangle = -\langle N, X_{,ij} \rangle$, por um lado

$$\langle N_{,j}, X_i \rangle = \langle -k_j X_j, X_i \rangle = 0.$$

por outro lado

$$\langle N, X_{,ij} \rangle = \left\langle N, \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k X_k + b_{ij} N \right\rangle = b_{ij}.$$

Portanto $b_{ij} = 0$.

A primeira forma fundamental I de Σ é a restrição do produto interno canônico de \mathbb{R}^{n+1} aos hiperplanos tangentes $T_p\Sigma$, isto é, para cada $p \in \Sigma$,

$$I_p(w_1, w_2) = \langle w_1, w_2 \rangle, \quad w_1, w_2 \in T_p\Sigma.$$

As segunda e terceira formas fundamentais de Σ , denotadas por II e III respectivamente, são definidas por

$$II_p(w_1, w_2) = \langle -dN_p(w_1), w_2 \rangle, \quad w_1, w_2 \in T_p\Sigma;$$

$$III_p(w_1, w_2) = \langle -dN_p(w_1), -dN_p(w_2) \rangle, \quad w_1, w_2 \in T_p\Sigma,$$

onde $p \in \Sigma$ e dN_p é a diferencial da aplicação normal de Gauss em p .

As curvaturas principais k_1, \dots, k_n de Σ , em um ponto p , são os autovalores de $-dN_p$. Dessa forma, define-se a curvatura média H e a curvatura de Gauss-Kronecker K por

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i = \frac{1}{n} \operatorname{tr}(-dN_p) \quad \text{e} \quad K = \prod_{i=1}^n k_i = \det(-dN_p)$$

respectivamente, onde tr e \det indicam o traço e o determinante de $-dN_p$. Por outro lado, a r -ésima curvatura média H_r de Σ , $1 \leq r \leq n$, é definida por

$$H_r = \binom{n}{r}^{-1} \sum_{j_1 < \dots < j_r} k_{j_1} \cdots k_{j_r}.$$

Note que $H = H_1$ e $K = H_n$.

1.2 Funções Holomorfas

Denotaremos por \mathbb{C} o corpo dos números complexos. Além disso, identificaremos \mathbb{C} com \mathbb{R}^2 pelo isomorfismo $z = x + iy \in \mathbb{C} \rightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Considere uma função $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, onde U é um subconjunto aberto do plano complexo \mathbb{C} . Denotando por

$$\langle 1, f \rangle = \operatorname{Re}(f) \quad \text{e} \quad \langle i, f \rangle = \operatorname{Im}(f)$$

como partes real $\operatorname{Re}(f)$ e imaginária $\operatorname{Im}(f)$ de f , diremos que f é \mathbb{R} -diferenciável em $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$ se $\langle 1, f \rangle$ e $\langle i, f \rangle$ forem diferenciáveis em (x_0, y_0) . Por outro lado, f é dita holomorfa em $z = x + iy \in U$ se existe o limite

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

O número complexo $f'(z_0)$ é chamado de derivada de f em z_0 . Se f for holomorfa em todos os pontos de U , diremos que f é uma função holomorfa. Uma consequência importante das definições acima é o seguinte Teorema, cuja demonstração pode ser vista em [13].

Teorema 1.3 *Dada a função $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, onde U é um subconjunto aberto de \mathbb{C} , as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. f é holomorfa em $z_0 \in U$.
2. f é diferenciável em $z_0 \in U$ e as partes real e imaginária de f respectivamente $\langle 1, f \rangle$ e $\langle i, f \rangle$ satisfazem as equações de Cauchy-Riemann

$$\langle 1, f \rangle_{,1} = \langle i, f \rangle_{,2}, \quad \langle 1, f \rangle_{,2} = -\langle i, f \rangle_{,1} \quad (1-3)$$

em z_0 .

3. f possui derivada real em z_0 e esta transformação linear corresponde à uma multiplicação por um número complexo.

Observação 1.1 *Segue do Teorema acima que a derivada de uma função holomorfa $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ é dada por*

$$f' = f_{,1} = -if_{,2}.$$

Dizemos que uma função real $h : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, é harmônica se Δh é identicamente nulo, isto é,

$$\Delta h(x, y) = h_{,11} + h_{,22} = 0.$$

para todo $(x, y) \in U$. Observe que pelas equações de Cauchy-Riemann (1-3), a parte real $\langle 1, f \rangle$ de uma função holomorfa f é sempre harmônica.

Como consequência das equações de Cauchy-Riemann, pode-se mostrar que a parte real de uma função holomorfa é harmônica. A recíproca é válida sob certas condições conforme estabelece o próximo teorema, cuja demonstração pode ser vista em [1].

Teorema 1.4 *Se $h : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função harmônica, onde U é um aberto simplesmente conexo, então h é parte real de uma função holomorfa.*

A identificação de \mathbb{C} com \mathbb{R}^2 induz de maneira natural a noção de produto interno de funções holomorfas. Com efeito, dadas as funções holomorfas $f, g : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, o produto interno $\langle f, g \rangle$ é uma função real definida em U e dada por

$$\langle f, g \rangle = \langle 1, f \rangle \langle 1, g \rangle + \langle i, f \rangle \langle i, g \rangle. \quad (1-4)$$

Observe que a definição acima está de acordo com a notação já utilizada para representar as partes real e imaginária da função f . Caso $g = 1$, $\langle f, g \rangle$ resulta na parte real de f e, caso $g = i$, $\langle f, g \rangle$ resulta na parte imaginária de f .

Ao longo do trabalho usaremos as propriedades abaixo para produto interno de funções holomorfas.

Proposição 1.5 *Sejam $f, g, h : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ funções holomorfas. São válidas as seguintes propriedades*

1. $\langle f, g \rangle_1 = \langle f', g \rangle + \langle f, g' \rangle$.
2. $\langle f, g \rangle_2 = \langle if', g \rangle + \langle f, ig' \rangle$.
3. $\langle fh, g \rangle = \langle f, \bar{h}g \rangle$.
4. $\bar{f}g = \langle f, g \rangle + i\langle if, g \rangle$.
5. $\langle f, 1, f, 2 \rangle = 0$.
6. $\Delta(\langle f, g \rangle) = 4\langle f', g' \rangle$.

Prova.

1. Usando a Observação 1.1 para uma função holomorfa f , temos que $f' = f_{,1}$. Desta igualdade obtemos que $\langle 1, f \rangle_1 = \langle 1, f' \rangle$ e $\langle i, f \rangle_1 = \langle i, f' \rangle$. Portanto, para f, g holomorfas, tem-se

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_1 &= (\langle 1, f \rangle \langle 1, g \rangle + \langle i, f \rangle \langle i, g \rangle)_1 \\ &= \langle 1, f' \rangle \langle 1, g \rangle + \langle 1, f \rangle \langle 1, g' \rangle + \langle i, f' \rangle \langle i, g \rangle + \langle i, f \rangle \langle i, g' \rangle \\ &= \langle f', g \rangle + \langle f, g' \rangle. \end{aligned}$$

2. Usando a Observação 1.1, uma função holomorfa f , vale que $f' = -if_{,2}$ então $if' = f_{,2}$. Desta igualdade obtemos $\langle 1, f \rangle_2 = \langle 1, if' \rangle$ e $\langle i, f \rangle_2 = \langle i, if' \rangle$. Para f, g holomorfas, obtemos

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_2 &= (\langle 1, f \rangle \langle 1, g \rangle + \langle i, f \rangle \langle i, g \rangle)_2 \\ &= \langle 1, if' \rangle \langle 1, g \rangle + \langle 1, f \rangle \langle 1, ig' \rangle + \langle i, if' \rangle \langle i, g \rangle + \langle i, f \rangle \langle i, ig' \rangle \\ &= \langle if', g \rangle + \langle f, ig' \rangle. \end{aligned}$$

3. Usando (1-4) temos

$$fh = \langle 1, f \rangle \langle 1, h \rangle - \langle i, f \rangle \langle i, h \rangle + i(\langle 1, f \rangle \langle i, h \rangle + \langle i, f \rangle \langle 1, h \rangle),$$

$$\bar{h}g = \langle 1, h \rangle \langle 1, g \rangle + \langle i, h \rangle \langle i, g \rangle + i(\langle 1, h \rangle \langle i, g \rangle - \langle i, h \rangle \langle 1, g \rangle).$$

assim,

$$\begin{aligned}\langle fh, g \rangle &= (\langle 1, f \rangle \langle 1, h \rangle - \langle i, f \rangle \langle i, h \rangle) \langle 1, g \rangle + (\langle 1, f \rangle \langle i, h \rangle + \langle i, f \rangle \langle 1, h \rangle) \langle i, g \rangle \\ &= (\langle 1, h \rangle \langle 1, g \rangle + \langle i, h \rangle \langle i, g \rangle) \langle 1, f \rangle + (\langle 1, h \rangle \langle i, g \rangle - \langle i, h \rangle \langle 1, g \rangle) \langle i, f \rangle \\ &= \langle f, \bar{h}g \rangle.\end{aligned}$$

4. Usando (1-4), temos

$$\begin{aligned}\langle f, g \rangle + i \langle if, g \rangle &= (\langle 1, f \rangle \langle 1, g \rangle + \langle i, f \rangle \langle i, g \rangle) + i(-\langle i, f \rangle \langle 1, g \rangle + \langle 1, f \rangle \langle i, g \rangle) \\ &= (\langle 1, f \rangle - i \langle i, f \rangle) (\langle 1, g \rangle + i \langle i, g \rangle) \\ &= \bar{f}g.\end{aligned}$$

5. Como f é holomorfa tem-se $f_{,1} = f'$ e $f_{,2} = if'$, de modo que $\langle f_{,1}, f_{,2} \rangle = \langle f', if' \rangle$.

Entretanto, da propriedade (3) temos $\langle f', if' \rangle = -\langle if', f' \rangle$. Portanto, $\langle f', if' \rangle = 0$.

6. Das propriedades (1) e (2) obtemos

$$\begin{aligned}\Delta(\langle f, g \rangle) &= \langle f, g \rangle_{11} + \langle f, g \rangle_{22} \\ &= (\langle f', g \rangle + \langle f, g' \rangle)_{,1} + (\langle if', g \rangle + \langle f, ig' \rangle)_{,2} \\ &= \langle f'', g \rangle + 2\langle f', g' \rangle + \langle f, g'' \rangle - \langle f'', g \rangle + 2\langle if', ig' \rangle - \langle f, g'' \rangle \\ &= 2\langle f', g' \rangle + 2\langle if', ig' \rangle \\ &= 4\langle f', g' \rangle.\end{aligned}$$

□

Lema 1.6 *Sejam $f = f_1 + if_2$ e $g = g_1 + ig_2$ funções holomorfas na variável $z = x + iy$, onde f não se anula em nenhum ponto. Então $\langle f, g \rangle = 0$ se, e somente se, $g = ikf$, onde k é uma constante real.*

Prova. Temos que $\langle f, g \rangle = 0$, sendo $f \neq 0$ em todo ponto e usando as propriedades da proposição anterior, temos

$$\langle f, g \rangle = \langle f, g \rangle = \left\langle f, \frac{fg}{f} \right\rangle = \left\langle f\bar{f}, \frac{g}{f} \right\rangle = |f|^2 \left\langle 1, \frac{g}{f} \right\rangle.$$

Então $\left\langle 1, \frac{g}{f} \right\rangle = 0$, logo existe um $k \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{g}{f} = ik$, portanto $g = ikf$.

Reciprocamente, se $g = ikf$, para alguma constante real k , então $g = -kf_2 + ikf_1$ e, assim,

$$\langle f, g \rangle = -kf_1f_2 + kf_1f_2 = 0.$$

□

O seguinte resultado pode ser encontrado em [6].

Proposição 1.7 *Sejam f, g, h funções holomorfas. Então a igualdade*

$$\langle i, f \rangle + \langle g, h \rangle = 0 \quad (1-5)$$

é válida se, e somente se, existem constantes reais c_1, c_2 e uma constante complexa z_1 tais que

$$\begin{cases} h = ic_1g + z_1 \\ f = -\bar{z}_1g + ic_2. \end{cases}$$

Prova. Aplicando o laplaciano na equação (1-5) e utilizando a propriedade (4), da Proposição 1.5, obtemos

$$4\langle g', h' \rangle = 0.$$

Do Lema 1.6 temos que $h' = ic_1g'$, para uma constante real c_1 . Integrando esta última equação, ficamos com

$$h = ic_1g + z_1, \quad z_1 \in \mathbb{C}.$$

Substituindo agora h em (1-5), encontramos $\langle 1, f + \bar{z}_1g \rangle = 0$. Novamente usando Lema 1.6 existe uma constante real c_2 tal que $f + \bar{z}_1g = ic_2$, de onde segue a expressão para f . □

Definição 1.8 *Considere uma hipersuperfície Σ de \mathbb{R}^{n+1} com aplicação de Gauss N . Se X é uma parametrização local de Σ , a matriz $W = (W_{ij})$ tal que*

$$N_{,i} = \sum_{j=1}^n W_{ij}X_j, \quad 1 \leq i \leq n$$

é chamada a matriz de Weingarten de Σ .

A prova completa do seguinte teorema pode ser encontrada [11].

Teorema 1.9 *Seja $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientável e $N : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^n$ a aplicação normal de Gauss com curvatura de Gauss-kronecker não nula em todo ponto.*

Seja $U \subset \Sigma$ uma vizinhança de p_0 tal que $N : U \rightarrow N(U) = V \subset \mathbb{S}^n$ seja invertível e $h(q) = \langle q, N^{-1}(q) \rangle, q \in V$. Então

$$X(q) = \nabla_L h(q) + h(q)N(q).$$

Prova. Sejam $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de TN e N aplicação normal de Gauss, $\{e_1, \dots, e_n, N\}$ referencial ortonormal de \mathbb{R}^{n+1} , assim

$$X = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n + hN,$$

então

$$\langle X, N \rangle = \langle a_1 e_1 + \dots + a_n e_n + hN, N \rangle = h.$$

portanto,

$$dh_q(e_i) = \langle dX_q(e_i), N(q) \rangle + \langle X(q), dN_q(e_i) \rangle = \langle X(q), e_i(q) \rangle = a_i(q).$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned} X &= a_1 e_1 + \dots + a_n e_n + hN \\ &= dh_q(e_1)e_1 + \dots + dh_q(e_n)e_n + h(q)N(q) \\ &= \sum_{i=1}^n dh_q(e_i)e_i + h(q)N(q) = \nabla_L h(q) + h(q)N(q). \end{aligned}$$

□

Superfícies de tipo Ribaucour

Neste capítulo iniciaremos o estudo das superfícies de tipo Ribaucour. Além de apresentarmos alguns exemplos, fornecemos uma representação de Weierstrass dependendo de duas funções holomorfas para superfícies nesta classe e caracterizamos o caso em que tais superfícies são de rotação.

Teorema 2.1 *Seja $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície orientável com curvatura Gauss-Kronecker não nula. Então existe uma função diferenciável $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ e g uma função holomorfa tal que a aplicação normal de Gauss é dada por*

$$N = \frac{(2g(u), 1 - |g(u)|^2)}{1 + |g(u)|^2}, \quad (2-1)$$

os coeficientes da III forma fundamental são

$$L_{ij} = \frac{4|g'|^2 \delta_{ij}}{(1 + |g|^2)^2}, \quad (2-2)$$

e Σ é localmente parametrizada por

$$X(u) = \sum_{j=1}^2 \frac{h(u)_{,j}}{L_{jj}} N(u)_{,j} + h(u)N(u). \quad (2-3)$$

Neste caso $h(u) = \langle X(u), N(u) \rangle$ é a função suporte. Além disso a matriz de Weingarten é dada por $W = V^{-1}$ onde

$$V = V_{ij} \quad e \quad V_{ij} = \frac{1}{L_{jj}} \left(h_{,ij} - \sum_k^2 h_{,k} \Gamma_{ij}^k + h L_{ij} \delta_{ij} \right), \quad (2-4)$$

onde Γ_{ij}^k são os símbolos de Christoffel de N . A condição de regularidade de X é dada por

$$\det V \neq 0. \quad (2-5)$$

As formas fundamentais I e II de X , em coordenadas locais, são dadas por :

$$I = \langle X_i, X_j \rangle = \sum_{k=1}^2 V_{ik} V_{jk} L_{kk},$$

$$II = \langle X_i, N_j \rangle = V_{ij} L_{jj}.$$

Mais ainda,

$$\frac{\Delta h}{L_{11}} + 2h = \frac{-2H}{K}, \quad (2-6)$$

$$\Lambda = |\nabla_L h|^2 + h^2. \quad (2-7)$$

Prova. Primeiramente vamos mostrar que

$$X_{,i} = \sum_{j=1}^2 V_{ij} N_{,j}.$$

Seja $X = \sum_{j=1}^2 \frac{h_{,j}}{L_{jj}} N_{,j} + hN$ derivando temos,

$$\begin{aligned} X_{,i} &= \sum_{j=1}^2 \frac{L_{jj}(h_{,ji} N_{,j} + h_{,j} N_{,ji}) - h_{,j} N_{,j} L_{jj,i}}{L_{jj}^2} + h_{,i} N + h N_{,i} \\ &= \sum_{j=1}^2 \left[\left(\frac{h_{,ji}}{L_{jj}} - \frac{h_{,j} L_{jj,i}}{L_{jj}^2} \right) N_{,j} + \frac{h_{,j} N_{,ji}}{L_{jj}} \right] + h_{,i} N + h N_{,i} \end{aligned}$$

usando $\frac{L_{jji}}{L_{jj}} = 2\Gamma_{ij}^j$, obtemos

$$\begin{aligned} X_{,i} &= \sum_{j=1}^2 \left[\left(\frac{h_{,ji}}{L_{jj}} - 2 \frac{h_{,j}}{L_{jj}} \Gamma_{ij}^j \right) N_{,j} + \frac{h_{,j} N_{,ji}}{L_{jj}} \right] + h_{,i} N + h N_{,i} \\ &= \left(\frac{h_{,ii}}{L_{ii}} - 2 \frac{h_{,i}}{L_{ii}} \Gamma_{ii}^i \right) N_{,i} + \frac{h_{,i} N_{,ii}}{L_{ii}} \\ &\quad + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \left[\left(\frac{h_{,ji}}{L_{jj}} - 2 \frac{h_{,j}}{L_{jj}} \Gamma_{ij}^j \right) N_{,j} + \frac{h_{,j} N_{,ji}}{L_{jj}} \right] + h_{,i} N + h N_{,i} \\ &= \left(\frac{h_{,ii}}{L_{ii}} - 2 \frac{h_{,i}}{L_{ii}} \Gamma_{ii}^i \right) N_{,i} + \frac{h_{,i}}{L_{ii}} \left(\sum_{k=1}^2 \Gamma_{ii}^k N_{,k} - L_{ii} N \right) \\ &\quad + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \left[\left(\frac{h_{,ji}}{L_{jj}} - 2 \frac{h_{,j}}{L_{jj}} \Gamma_{ij}^j \right) N_{,j} + \frac{h_{,j}}{L_{jj}} (\Gamma_{ji}^j N_{,j} + \Gamma_{ji}^i N_{,i}) \right] + h_{,i} N + h N_{,i}. \end{aligned}$$

Como $\Gamma_{ij}^j = \Gamma_{ji}^j$ podemos concluir que

$$\begin{aligned} X_{,i} &= \left(\frac{h_{,ii}}{L_{ii}} - 2 \frac{h_{,i}}{L_{ii}} \Gamma_{ii}^i \right) N_{,i} + \frac{h_{,i}}{L_{ii}} \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ii}^k N_{,k} - h_{,i} N \\ &+ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \left(\frac{h_{,ji}}{L_{jj}} - \frac{h_{,j}}{L_{jj}} \Gamma_{ij}^j \right) N_{,j} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{h_{,j}}{L_{jj}} \Gamma_{ij}^j N_{,j} \\ &+ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{h_{,j}}{L_{jj}} \Gamma_{ji}^j N_{,j} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{h_{,j}}{L_{jj}} \Gamma_{ji}^i N_{,i} + h_{,i} N + h N_{,i}. \end{aligned}$$

Reescrevendo o primeiro somatório na expressão acima como

$$\frac{h_{,i}}{L_{ii}} \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ii}^k N_{,k} = \frac{h_{,i}}{L_{ii}} \Gamma_{ii}^i N_{,i} + \frac{h_{,i}}{L_{ii}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \Gamma_{ii}^j N_{,j},$$

conseguimos

$$\begin{aligned} X_{,i} &= \left(\frac{h_{,ii}}{L_{ii}} - \frac{h_{,i}}{L_{ii}} \Gamma_{ii}^i \right) N_{,i} - \frac{h_{,i}}{L_{ii}} \Gamma_{ii}^i N_{,i} + \frac{h_{,i}}{L_{ii}} \Gamma_{ii}^i N_{,i} + \frac{h_{,i}}{L_{ii}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \Gamma_{ii}^j N_{,j} \\ &+ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \left(\frac{h_{,ji}}{L_{jj}} - \frac{h_{,j}}{L_{jj}} \Gamma_{ij}^j \right) N_{,j} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{h_{,j}}{L_{jj}} \Gamma_{ji}^i N_{,i} + h N_{,i}; \\ X_{,i} &= \left(\frac{h_{,ii}}{L_{ii}} - \frac{h_{,i}}{L_{ii}} \Gamma_{ii}^i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{h_{,j}}{L_{jj}} \Gamma_{ji}^i + h \right) N_{,i} \\ &+ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \left(\frac{h_{,ji}}{L_{jj}} - \frac{h_{,j}}{L_{jj}} \Gamma_{ij}^j + \frac{h_{,i}}{L_{ii}} \Gamma_{ii}^j \right) N_{,j}, \end{aligned}$$

pela relação $\Gamma_{ii}^j = -\frac{L_{ii}}{L_{jj}}\Gamma_{ji}^i$ para $i \neq j$, temos que

$$\begin{aligned} X_{,i} &= \left(\frac{h_{,ii}}{L_{ii}} - \frac{h_{,i}}{L_{ii}}\Gamma_{ii}^i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \frac{h_{,j}}{L_{ii}}\Gamma_{ii}^j + h \right) N_{,i} \\ &+ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \left(\frac{h_{,ji}}{L_{jj}} - \frac{h_{,j}}{L_{jj}}\Gamma_{ij}^j - \frac{h_{,i}}{L_{jj}}\Gamma_{ji}^i \right) N_{,j} \\ &= \left(\frac{h_{,ii}}{L_{ii}} - \sum_{j=1}^2 \frac{h_{,j}}{L_{ii}}\Gamma_{ii}^j + h \right) N_{,i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^2 \left(\frac{h_{,ij}}{L_{jj}} - \frac{h_{,j}}{L_{jj}}\Gamma_{ij}^j - \frac{h_{,i}}{L_{jj}}\Gamma_{ij}^i \right) N_{,j}. \end{aligned}$$

Considerando a matriz $V = (V_{ij})$, $1 \leq i, j \leq 2$ dada por

$$V_{ij} = \frac{1}{L_{jj}} \left(h_{,ij} - \sum_{k=1}^2 h_{,k}\Gamma_{ij}^k + hL_{ij}\delta_{ij} \right)$$

conseguimos

$$X_{,i} = \sum_{j=1}^2 V_{ij}N_{,j}. \quad (2-8)$$

Por (2-8) obtemos que a matriz de Weingarten é dada por $W = V^{-1}$.

Para obter os coeficientes das formas fundamentais, usamos (2-8) e temos

$$\begin{aligned} I &= \langle X_{,i}, X_{,j} \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^2 V_{ik}N_{,k}, \sum_{m=1}^2 V_{jm}N_{,m} \right\rangle \\ &= \sum_{k,m=1}^2 V_{ik}V_{jm} \langle N_{,k}N_{,m} \rangle = \sum_{k=1}^2 V_{ik}V_{jk}L_{kk}; \end{aligned}$$

$$II = \langle X_{,i}, N_{,j} \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^2 V_{ik}N_{,k}, N_{,j} \right\rangle = \sum_{k=1}^2 V_{ik} \langle N_{,k}, N_{,j} \rangle = V_{ij}L_{jj}.$$

Finalmente, como $W = V^{-1}$, sejam σ_i os autovalores de V e λ_i os autovalores de W , então $\sigma_i = \frac{1}{\lambda_i}$, assim

$$trV = V_{11} + V_{22} = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{\lambda_1\lambda_2},$$

e

$$trV = \frac{-2H}{K}. \quad (2-9)$$

Pelo Lema 1.2 temos, $\Gamma_{11}^1 = \frac{L_{11,1}}{2L_{11}} = \frac{L_{22,1}}{2L_{22}} = \Gamma_{12}^2$ e $\Gamma_{21}^1 = \frac{L_{11,2}}{2L_{11}} = \frac{L_{22,2}}{2L_{22}} = \Gamma_{22}^2$, usando essas expressões e (2-4) obtemos,

$$\begin{aligned}
tr(V) &= V_{11} + V_{22} \\
&= \frac{h_{,11}}{L_{11}} - \frac{h_{,1}}{L_{11}}\Gamma_{11}^1 - \frac{h_{,2}}{L_{11}}\Gamma_{11}^2 + h + \frac{h_{,22}}{L_{22}} - \frac{h_{,1}}{L_{22}}\Gamma_{22}^1 - \frac{h_{,2}}{L_{22}}\Gamma_{22}^2 + h \\
&= \frac{h_{,11}}{L_{11}} + \frac{h_{,22}}{L_{22}} - \frac{h_{,1}}{L_{11}}(\Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2) - \frac{h_{,2}}{L_{22}}(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{21}^1) + 2h \\
&= \frac{h_{,11}}{L_{11}} + \frac{h_{,22}}{L_{22}} + 2h = \frac{\Delta h}{L_{11}} + 2h
\end{aligned}$$

usando (2-9) temos,

$$\frac{\Delta h}{L_{11}} + 2h = \frac{-2H}{K}.$$

Por outro lado, usando (2-3) obtemos

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \langle X, X \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^2 \frac{h_{,j}}{L_{jj}} N_{,j} + hN, \sum_{j=1}^2 \frac{h_{,j}}{L_{jj}} N_{,j} + hN \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^2 \left(\frac{h_{,j}}{L_{jj}} \right)^2 L_{jj} + h^2 |N|^2 \\
&= \sum_{j=1}^2 \frac{h_{,j}^2}{L_{jj}} + h^2 = |\nabla_L h|^2 + h^2.
\end{aligned}$$

□

O seguinte resultado vale para superfícies e será usado para classificar as superfícies de rotação.

Lema 2.2 *Seja $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientável com curvatura Gauss-Kronecker não-nula. Então existe uma função diferenciável $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que a aplicação normal de Gauss é dada por (2-1) e Σ é localmente parametrizada por (2-3). Então $X(U)$ é de rotação se, e somente se, h é função radial.*

Prova. Se $X(U)$ é de rotação, sem perda de generalidade, podemos supor que o eixo de rotação é o eixo x_{n+1} . Dessa forma, as seções ortogonais ao eixo de rotação determinam em $X(U)$ esferas $(n-1)$ dimensionais centradas neste eixo. Note que ao longo dessas esferas tanto $|X|^2$ quanto o ângulo entre X e N é constante. Já que

$$\langle X, N \rangle = h, \quad \langle X, X \rangle = |\nabla_L h|^2 + h^2, \quad L_{ij} = \langle N_{,i}, N_{,j} \rangle.$$

Concluimos que h e $|\nabla_L h|^2$ são constantes ao longo dessas esferas. Tomando N como a

inversa da projeção estereográfica obtemos,

$$L_{ij} = \frac{4\delta_{ij}}{(1 + |u|^2)^2},$$

de modo que,

$$|\nabla_L h|^2 = \left(\frac{1 + |u|^2}{2}\right)^2 |\nabla h|^2,$$

o que diz que $|u|^2$ é constante a medida que se percorre as seções ortogonais, portanto h é constante ao longo das esferas $(n - 1)$ dimensional centradas na origem, portanto h é função radial.

Seja h uma função radial, escrevemos $h(u) = J(|u|^2)$, $u \in U$ para J uma função diferenciável. Seja $|u|^2 = t$ e denotemos a derivada de J em relação a t como $J'(t)$. Assim, $h_{,i} = 2J'u_i$ e tomando N como a inversa da projeção estereográfica temos,

$$X = \left(\left(J'(1-t) + \frac{2J}{1+t} \right) u, -2tJ' + J\left(\frac{1-t}{1+t}\right) \right).$$

Se $-2tJ' + J\left(\frac{1-t}{1+t}\right)$ é constante então

$$\left| \left(J'(1-t) + \frac{2J}{1+t} \right) u \right|^2 = \left(\left(J'(1-t) + \frac{2J}{1+t} \right) \right)^2 t.$$

O que significa que as seções ortogonais ao eixo x_{n+1} determinam em $X(U)$ esferas $(n - 1)$ dimensional centradas neste eixo, de modo que $X(U)$ é de rotação. \square

Definição 2.3 *Seja uma superfície Σ com aplicação normal de Gauss N , tal que para cada $p \in \Sigma$ a esfera de centro $p + \left(\frac{H(p)}{K(p)} + \frac{\Psi(p)}{2}\right)N(p)$ e raio $\frac{H(p)}{K(p)} + \frac{\Psi(p)}{2}$ passa pela origem. Neste caso Σ é chamada de **superfície de tipo Ribaucour** ou por abreviação, uma superfície-TR e satisfaz a seguinte relação de Weingarten generalizada com função suporte Ψ e a função distância quadrática Λ*

$$\frac{H}{K} = -\frac{\Lambda}{2\Psi} - \frac{\Psi}{2}.$$

Para superfícies-TR com curvatura Gaussiana $K \neq 0$ apresentaremos uma completa caracterização por meio de pares de funções holomorfas. Essa representação de tipo Weierstrass permitirá classificar todas superfícies-TR de rotação. Antes disso, precisaremos do seguinte Lema.

Lema 2.4 *Considere funções holomorfas $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ e $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$, com $g' \neq 0$, onde Σ é uma superfície de Riemann. Tomando os parâmetros locais $z = u_1 + iu_2 \in \Sigma$ e $h = e^{\langle 1, f \rangle}$*

e considere a métrica dada por (2-2), temos a matriz

$$V_{ij} = \frac{1}{L_{jj}} \left(h_{,ij} - \sum_{k=1}^2 h_{,k} \Gamma_{ij}^k + h L_{ij} \delta_{ij} \right), \quad 1 \leq i, j \leq 2.$$

$$V_{11} = \frac{T^2 h}{4|g'|^2} [\langle 1, f' \rangle^2 - \langle 1, \xi \rangle] + h;$$

$$V_{12} = V_{21} = \frac{T^2 h}{4|g'|^2} \langle i, \xi - \frac{f'^2}{2} \rangle;$$

$$V_{22} = \frac{T^2 h}{4|g'|^2} [\langle 1, if' \rangle^2 + \langle 1, \xi \rangle] + h,$$

onde

$$T = 1 + |g|^2 \quad e \quad \xi = f' \left(\frac{g''}{g'} - \frac{2}{T} g' \bar{g} \right) - f''. \quad (2-10)$$

Temos ainda que

$$trV = \frac{h|f'|^2 T^2}{4|g'|^2} + 2h$$

e

$$detV = \frac{h^2 T^4}{16|g'|^4} [\langle \xi, f'^2 \rangle - |\xi|^2] + \frac{h^2 T^2 |f'|^2}{4|g'|^2} + h^2.$$

Prova. Seja $h = e^{\langle 1, f \rangle}$, temos que

$$h_{,1} = e^{\langle 1, f \rangle} \langle 1, f' \rangle$$

$$h_{,11} = e^{\langle 1, f \rangle} (\langle 1, f' \rangle^2 + \langle 1, f'' \rangle)$$

$$h_{,2} = e^{\langle 1, f \rangle} \langle 1, if' \rangle$$

$$h_{,22} = e^{\langle 1, f \rangle} (\langle 1, if' \rangle^2 - \langle 1, f'' \rangle)$$

$$h_{,12} = e^{\langle 1, f \rangle} (\langle 1, if' \rangle \langle 1, f' \rangle + \langle 1, if'' \rangle).$$

A fim de encontrar os símbolos de Christoffel para a métrica, calculemos as derivadas das funções reais T^2 e $|g'|^2$.

Uma vez que $T = 1 + |g|^2 = 1 + \langle g, g \rangle$, derivando e usando a Proposição 1.5, obtemos

$$T_{,1} = 2\langle g, g' \rangle, \quad e \quad T_{,2} = 2\langle g, ig' \rangle,$$

então

$$(T^2)_{,1} = 2TT_{,1} = 4T\langle g, g' \rangle, \quad e \quad (T^2)_{,2} = 2TT_{,2} = 4T\langle g, ig' \rangle.$$

Similarmente temos,

$$|g'|_{,1}^2 = \langle g', g' \rangle_{,1} = 2\langle g', g'' \rangle \quad |g'|_{,2}^2 = \langle g', g' \rangle_{,1} = 2\langle g', ig'' \rangle,$$

usando as expressões acima temos

$$\begin{aligned} L_{11,1} &= \left(\frac{4|g'|^2}{T^2} \right)_{,1} \\ &= \frac{8T\langle g', g'' \rangle - 16|g'|^2\langle g, g' \rangle}{T^3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{22,2} &= \left(\frac{4|g'|^2}{T^2} \right)_{,2} \\ &= \frac{8T\langle g', ig'' \rangle - 16|g'|^2\langle g, ig' \rangle}{T^3}. \end{aligned}$$

Pelo Lema 1.2 temos $\Gamma_{ij}^j = \frac{L_{jji}}{2L_{jj}}$ para todo i, j . Logo,

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{L_{11,1}}{2L_{11}} = \frac{8T\langle g', g'' \rangle - 16|g'|^2\langle g, g' \rangle}{T^3} \frac{T^2}{8|g'|^2}, \\ &= \frac{T\langle g', g'' \rangle - 2|g'|^2\langle g, g' \rangle}{T|g'|^2}, \end{aligned}$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{T\langle g', ig'' \rangle - 2|g'|^2\langle g, ig' \rangle}{T|g'|^2},$$

$$\Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2, \quad \text{e} \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{11}^1.$$

Analogamente se $\Gamma_{ii}^j = -\frac{L_{iij}}{2L_{jj}}$ para $i \neq j$, temos

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{2|g'|^2\langle g, ig' \rangle - T\langle g', ig'' \rangle}{T|g'|^2},$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{2|g'|^2\langle g, g' \rangle - T\langle g', g'' \rangle}{T|g'|^2}.$$

Usando as expressões anteriores e usando as propriedades da Proposição 1.5 temos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^2 \Gamma_{11}^k h_{,k} &= \Gamma_{11}^1 h_{,1} + \Gamma_{11}^2 h_{,2} \\
&= e^{\langle 1, f \rangle} \langle 1, f' \rangle \left[\frac{T \langle g', g'' \rangle - 2|g'|^2 \langle g, g' \rangle}{T|g'|^2} \right] \\
&\quad - e^{\langle 1, f \rangle} \langle i, f' \rangle \left[\frac{2|g'|^2 \langle g, ig' \rangle - T \langle g', ig'' \rangle}{T|g'|^2} \right] \\
&= e^{\langle 1, f \rangle} \left\langle \langle 1, f' \rangle + i \langle i, f' \rangle, \frac{\langle g', g'' \rangle}{|g'|^2} - \frac{2}{T} \langle g, g' \rangle + i \left(\frac{\langle g', ig'' \rangle}{|g'|^2} - \frac{2}{T} \langle g, ig' \rangle \right) \right\rangle \\
&= e^{\langle 1, f \rangle} \left\langle f', \frac{\langle g', g'' \rangle}{|g'|^2} + i \frac{\langle g', ig'' \rangle}{|g'|^2} - \frac{2}{T} (\langle g, g' \rangle + i \langle g, ig' \rangle) \right\rangle \\
&= e^{\langle 1, f \rangle} \left\langle f', \frac{\bar{g}'' g'}{|g'|^2} - \frac{2}{T} \bar{g}' g \right\rangle = e^{\langle 1, f \rangle} \left\langle f', \left(\frac{g''}{g'} \right) - \frac{2}{T} \bar{g}' g \right\rangle \\
&= e^{\langle 1, f \rangle} \left\langle f', \overline{\frac{g''}{g'} - \frac{2}{T} \bar{g}' g} \right\rangle = e^{\langle 1, f \rangle} \left\langle 1, f' \left(\frac{g''}{g'} - \frac{2}{T} g' \bar{g} \right) \right\rangle \\
&= e^{\langle 1, f \rangle} \langle 1, \xi + f'' \rangle.
\end{aligned}$$

Aqui $\xi = f' \left(\frac{g''}{g'} - \frac{2}{T} g' \bar{g} \right) - f''$. Analogamente,

$$\sum_{k=1}^2 \Gamma_{22}^k h_{,k} = -e^{\langle 1, f \rangle} \langle 1, \xi + f'' \rangle,$$

$$\sum_{k=1}^2 \Gamma_{12}^k h_{,k} = -e^{\langle 1, f \rangle} \langle i, \xi + f'' \rangle.$$

Então, podemos escrever

$$\begin{aligned}
V_{11} &= \frac{1}{L_{11}} \left(h_{,11} - \sum_{k=1}^2 \Gamma_{11}^k h_{,k} + hL_{11} \right) \\
&= \frac{T^2}{4|g'|^2} [h(\langle 1, f' \rangle^2 + \langle 1, f'' \rangle) - h \langle 1, \xi + f'' \rangle] + h \\
&= \frac{T^2 h}{4|g'|^2} [\langle 1, f' \rangle^2 - \langle 1, \xi \rangle] + h,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{22} &= \frac{1}{L_{22}} \left(h_{,22} - \sum_{k=1}^2 \Gamma_{22}^k h_{,k} + hL_{22} \right) \\
&= \frac{T^2}{4|g'|^2} [h(\langle 1, if' \rangle^2 - \langle 1, f'' \rangle) - (-h \langle 1, \xi + f'' \rangle)] + h \\
&= \frac{T^2 h}{4|g'|^2} [\langle 1, if' \rangle^2 + \langle 1, \xi \rangle] + h,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{12} &= \frac{1}{L_{22}} \left(h_{,12} - \sum_{k=1}^2 \Gamma_{12}^k h_{,k} \right) \\
&= \frac{T^2}{4|g'|^2} [h(\langle 1, if' \rangle \langle 1, f' \rangle - \langle i, f'' \rangle) - (-h\langle i, \xi + f'' \rangle)] \\
&= \frac{T^2 h}{4|g'|^2} [\langle 1, if' \rangle \langle 1, f' \rangle + \langle i, \xi \rangle] = \frac{T^2 h}{4|g'|^2} [\langle i, \xi - \frac{f'^2}{2} \rangle].
\end{aligned}$$

Dessa maneira,

$$\begin{aligned}
trV &= V_{11} + V_{22} \\
&= \frac{T^2}{4|g'|^2} [h(\langle 1, f' \rangle^2 - \langle 1, \xi \rangle)] + h + \frac{T^2}{4|g'|^2} [h(\langle 1, if' \rangle^2 + \langle 1, \xi \rangle)] + h \\
&= \frac{T^2}{4|g'|^2} [h(\langle 1, f' \rangle^2 + \langle 1, if' \rangle^2)] + 2h.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$trV = \frac{h|f'|^2 T^2}{4|g'|^2} + 2h.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
detV &= V_{11}V_{22} - V_{12}^2 \\
&= \left(\frac{hT^2}{4|g'|^2} [\langle 1, f' \rangle^2 - \langle 1, \xi \rangle] + h \right) \left(\frac{hT^2}{4|g'|^2} [\langle 1, if' \rangle^2 + \langle 1, \xi \rangle] + h \right) \\
&\quad - \left(\frac{hT^2}{4|g'|^2} [\langle 1, if' \rangle \langle 1, f' \rangle + \langle i, \xi \rangle] \right)^2 \\
&= \frac{h^2 T^4}{16|g'|^4} [\langle 1, f' \rangle^2 \langle 1, if' \rangle^2 + \langle 1, \xi \rangle (\langle 1, f' \rangle^2 - \langle 1, if' \rangle^2) - \langle 1, \xi \rangle^2] \\
&\quad + \frac{h^2 T^2}{4|g'|^2} [\langle 1, f' \rangle^2 - \langle 1, \xi \rangle + \langle 1, if' \rangle^2 + \langle 1, \xi \rangle] + h^2 \\
&\quad - \frac{h^2 T^4}{16|g'|^4} [\langle 1, f' \rangle^2 \langle 1, if' \rangle^2 + 2\langle 1, f' \rangle \langle 1, if' \rangle \langle i, \xi \rangle + \langle i, \xi \rangle^2] \\
&= \frac{h^2 T^4}{16|g'|^4} [\langle 1, \xi \rangle (\langle 1, f' \rangle^2 - \langle 1, if' \rangle^2) - \langle 1, \xi \rangle^2 - 2\langle 1, f' \rangle \langle 1, if' \rangle \langle i, \xi \rangle - \langle i, \xi \rangle^2] \\
&\quad + \frac{h^2 T^2}{4|g'|^2} [\langle 1, f' \rangle^2 + \langle 1, if' \rangle^2] + h^2 \\
&= \frac{h^2 T^4}{16|g'|^4} [\langle 1, \xi \rangle \langle 1, f'^2 \rangle + \langle i, \xi \rangle \langle 1, f'^2 \rangle - |\xi|^2] + \frac{h^2 T^2 |f'|^2}{4|g'|^2} + h^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$detV = \frac{h^2 T^4}{16|g'|^4} [\langle \xi, f'^2 \rangle - |\xi|^2] + \frac{h^2 T^2 |f'|^2}{4|g'|^2} + h^2.$$

□

No próximo teorema fornecemos uma representação do tipo Weierstrass para as superfícies-TR a partir de um par de funções holomorfas.

Teorema 2.5 *Sejam Σ uma superfície de Riemann e $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão tal que a curvatura Gauss-kronecker é não nula. Então $X(\Sigma)$ é uma superfície-TR se, e somente se, existem funções holomorfas $f, g : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, onde U é um aberto simplesmente conexo e $g' \neq 0$, tal que $X(\Sigma)$ é parametrizado localmente por*

$$X = \frac{e^{\langle 1, f \rangle}}{2|g'|^2} (Tg'\bar{f}' - 2g\langle g', gf' \rangle, -2\langle g', gf' \rangle) + e^{\langle 1, f \rangle} \frac{(2g, 2-T)}{T}, \quad (2-11)$$

com a aplicação normal de Gauss N dada por (2-1). Com a condição de regularidade (2-5) dada por

$$T^4 \langle \xi, f'^2 - \xi \rangle + 4T^2 |f'|^2 |g'|^2 + 16|g'|^4 \neq 0,$$

onde ξ é dado por (2-10), além disso, os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais de X tem expressões

$$\begin{aligned} E &= \langle X_{,1}, X_{,1} \rangle = \frac{T^2 h^2}{4|g'|^2} \left((\langle 1, f' \rangle^2 - \langle 1, \xi \rangle)^2 + \langle i, \xi - \frac{f'^2}{2} \rangle^2 \right) \\ &\quad + 2h^2 (\langle 1, f' \rangle^2 - \langle 1, \xi \rangle) + \frac{4h^2 |g'|^2}{T^2}, \\ F &= \langle X_{,1}, X_{,2} \rangle = \left(\frac{T^2 h^2 |f'|^2}{4|g'|^2} + 2h^2 \right) \langle i, \xi - \frac{f'^2}{2} \rangle, \\ G &= \langle X_{,2}, X_{,2} \rangle = \frac{T^2 h^2}{4|g'|^2} \left((\langle 1, if' \rangle^2 + \langle 1, \xi \rangle)^2 + \langle i, \xi - \frac{f'^2}{2} \rangle^2 \right), \\ &\quad + 2h^2 (\langle 1, if' \rangle^2 + \langle 1, \xi \rangle) + \frac{4h^2 |g'|^2}{T^2} \\ e &= \langle X_{,1}, N_{,1} \rangle = h (\langle 1, f' \rangle^2 - \langle 1, \xi \rangle) + \frac{4h |g'|^2}{T^2}, \\ f &= \langle X_{,1}, N_{,2} \rangle = h \langle i, \xi - \frac{f'^2}{2} \rangle, \\ g &= \langle X_{,2}, N_{,2} \rangle = h (\langle 1, if' \rangle^2 + \langle 1, \xi \rangle) + \frac{4h |g'|^2}{T^2}. \end{aligned} \quad (2-12)$$

Prova. Pela hipóteses Σ é uma superfície de Riemann, isto é, existe uma função holomorfa $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ e $g' \neq 0$ tal que $N : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ dada por $N(u) = (\pi^{-1} \circ g)(u)$ e π^{-1} é a inversa da projeção estereográfica. Dessa maneira, temos (2-1) e pelo Teorema 1.9 temos que X é parametrizada localmente por (2-3). Usando (2-6) e (2-7) temos

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta h}{L_{11}} + 2h &= \frac{-2H}{K} \\
\Leftrightarrow \frac{h\Delta h}{L_{11}} + 2h^2 &= \frac{-2Hh}{K} \\
\Leftrightarrow \frac{h\Delta h - |\nabla h|^2 + |\nabla h|^2}{L_{11}} + 2h^2 &= \frac{-2Hh}{K} \\
\Leftrightarrow \frac{h\Delta h - |\nabla h|^2}{L_{11}} + \frac{|\nabla h|^2}{L_{11}} + h^2 + h^2 &= \frac{-2Hh}{K} \\
\Leftrightarrow \frac{h\Delta h - |\nabla h|^2}{L_{11}} + \Lambda + \Psi^2 &= \frac{-2H\langle X, N \rangle}{K} \\
\Leftrightarrow \left(-\frac{h\Delta h - |\nabla h|^2}{2\Psi L_{11}} \right) - \frac{\Lambda}{2\Psi} - \frac{\Psi}{2} &= \frac{H}{K}.
\end{aligned}$$

Portanto $X(\Sigma)$ é uma superfície-TR se, e somente se

$$h\Delta h - |\nabla h|^2 = 0. \quad (2-14)$$

Seja h uma solução de (2-14), sem perda de generalidade podemos assumir que $h = e^\varphi$ onde $\varphi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, neste caso temos,

$$h_{,1} = e^\varphi \varphi_{,1} \quad e \quad h_{,2} = e^\varphi \varphi_{,2}$$

$$h_{,11} = e^\varphi (\varphi_{,1}^2 + \varphi_{,11}) \quad e \quad h_{,22} = e^\varphi (\varphi_{,2}^2 + \varphi_{,22}).$$

Usando os resultados anteriores e (2-14), obtemos que $\Delta \varphi = 0$. Pelo Teorema 1.4 φ é a parte real de uma função holomorfa, tal que $\varphi = \langle 1, f \rangle$, portanto $h = e^{\langle 1, f \rangle}$.

Considerando $L_{ii} = \langle N_{,i}, N_{,i} \rangle$, $1 \leq i \leq 2$ e $T = 1 + |g|^2$, temos $T_{,1} = 2\langle g, g' \rangle$ e $T_{,2} = 2\langle g, ig' \rangle$, e usando as propriedades das funções holomorfas dadas na Proposição 1.5, obtemos,

$$\begin{aligned}
N_{,1} &= \frac{(2g_{,1}, -T_{,1})T - T_{,1}(2g, 2 - T)}{T^2} \\
&= \frac{1}{T^2} [T(2g_{,1}, -2\langle g, g' \rangle) - 2\langle g', g \rangle(2g, 2 - T)] \\
&= \frac{2}{T^2} (Tg_{,1} - 2g\langle g', g \rangle, -T\langle g_{,1}, g \rangle - 2\langle g', g \rangle + T\langle g_{,1}, g \rangle) \\
&= \frac{2}{T^2} (Tg_{,1} - 2g\langle g', g \rangle, -2\langle g', g \rangle).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle N_{,1}, N_{,1} \rangle &= \left\langle \frac{2}{T^2}(Tg_{,1} - 2g\langle g', g \rangle), -2\langle g', g \rangle, \frac{2}{T^2}(Tg_{,1} - 2g\langle g', g \rangle), -2\langle g', g \rangle \right\rangle \\
&= \frac{4}{T^4}(T^2\langle g_{,1}, g_{,1} \rangle - 4T\langle g, g_{,1} \rangle\langle g, g' \rangle + 4\langle g, g \rangle\langle g', g \rangle^2 + 4\langle g, g' \rangle^2) \\
&= \frac{4}{T^4}(T^2\langle g_{,1}, g_{,1} \rangle - 4T\langle g, g_{,1} \rangle\langle g, g' \rangle + 4T\langle g, g' \rangle^2) \\
&= \frac{4}{T^4}T^2\langle g', g' \rangle = \frac{4|g'|^2}{T^2},
\end{aligned}$$

onde usamos a fato de que $g' = g_{,1}$, uma vez que g é holomorfa. Analogamente temos

$$\begin{aligned}
N_{,2} &= \frac{(2g_{,2}, -T_{,2})T - T_{,2}(2g, 2 - T)}{T^2} \\
&= \frac{1}{T^2}[T(2g_{,2}, -2t\langle g, ig' \rangle) - 2\langle g, ig' \rangle(2g, 2 - T)] \\
&= \frac{2}{T^2}(Tg_{,2} - 2g\langle g, ig' \rangle, -T\langle g, ig' \rangle - 2\langle g, ig' \rangle + T\langle g, ig' \rangle) \\
&= \frac{2}{T^2}(Tg_{,2} - 2g\langle g, ig' \rangle, -2\langle g, ig' \rangle).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle N_{,2}, N_{,2} \rangle &= \left\langle \frac{2}{T^2}(Tg_{,2} - 2g\langle g, ig' \rangle), -2\langle g, ig' \rangle, \frac{2}{T^2}(Tg_{,2} - 2g\langle g, ig' \rangle), -2\langle g, ig' \rangle \right\rangle \\
&= \frac{4}{T^4}(T^2\langle g_{,2}, g_{,2} \rangle - 4T\langle g, g_{,2} \rangle\langle g, ig' \rangle + 4\langle g, g \rangle\langle g, ig' \rangle^2 + 4\langle g, ig' \rangle^2) \\
&= \frac{4}{T^4}(T^2\langle g_{,2}, g_{,2} \rangle - 4T\langle g, g_{,2} \rangle\langle g, ig' \rangle + 4T\langle g, ig' \rangle^2) \\
&= \frac{4}{T^4}T^2\langle ig', ig' \rangle = \frac{4|g'|^2}{T^2},
\end{aligned}$$

onde usamos a igualdade $ig' = g_{,2}$, já que g é holomorfa. Finalmente temos

$$\begin{aligned}
\langle N_{,1}, N_{,2} \rangle &= \left\langle \frac{2}{T^2}(Tg_{,1} - 2g\langle g', g \rangle), -2\langle g', g \rangle, \frac{2}{T^2}(Tg_{,2} - 2g\langle g, ig' \rangle), -2\langle g, ig' \rangle \right\rangle \\
&= \frac{4}{T^4}(T^2\langle g_{,1}, g_{,2} \rangle - 2T\langle g, g_{,1} \rangle\langle g, ig' \rangle - 2T\langle g, g_{,2} \rangle\langle g, g' \rangle \\
&\quad + 4\langle g, g \rangle\langle g, g' \rangle\langle g, ig' \rangle + 4\langle g, g' \rangle\langle g, ig' \rangle) \\
&= \frac{4}{T^4}(T^2\langle g_{,1}, g_{,2} \rangle - 4T\langle g, g' \rangle\langle g, g_{,2} \rangle + 4T\langle g, g' \rangle\langle g, g_{,2} \rangle) \\
&= \frac{4}{T^4}(T^2\langle g_{,1}, g_{,2} \rangle) = \frac{4}{T^2}\langle g_{,1}, g_{,2} \rangle = 0.
\end{aligned}$$

Assim, ficamos com

$$L_{ij} = \frac{4|g'|^2}{T^2}\delta_{ij}, \quad T = 1 + |g|^2, \quad 1 \leq i \leq 2.$$

Logo, podemos escrever (2-3) como

$$\begin{aligned}
X(u) &= \sum_{j=1}^2 \frac{h_{,j}}{L_{jj}} N_{,j} + hN = \frac{1}{L_{11}} [h_{,1}N_{,1} + h_{,2}N_{,2}] + hN \\
&= \frac{T^2}{4|g'|^2} \left[e^{\langle 1, f \rangle} \langle 1, f' \rangle \frac{2}{T^2} (Tg_{,1} - 2g \langle g', g \rangle, -2 \langle g', g \rangle) \right] \\
&+ \frac{T^2}{4|g'|^2} \left[e^{\langle 1, f \rangle} \langle 1, if' \rangle \frac{2}{T^2} (Tg_{,2} - 2g \langle g, ig' \rangle, -2 \langle g, ig' \rangle) \right] \\
&+ e^{\langle 1, f \rangle} \frac{(2g, 2 - T)}{T} \\
&= \frac{e^{\langle 1, f \rangle}}{2|g'|^2} \left[\langle 1, f' \rangle (Tg' - 2g \langle g', g \rangle, -2 \langle g, g' \rangle) \right] \\
&+ \frac{e^{\langle 1, f \rangle}}{2|g'|^2} \left[\langle 1, if' \rangle (Tig' - 2g \langle ig', g \rangle, -2 \langle g, ig' \rangle) \right] + e^{\langle 1, f \rangle} \frac{(2g, 2 - T)}{T} \\
&= \frac{e^{\langle 1, f \rangle}}{2|g'|^2} \left[(Tg' \langle 1, f' \rangle - 2g \langle 1, f' \rangle \langle g', g \rangle, -2 \langle 1, f' \rangle \langle g, g' \rangle) \right. \\
&+ \left. (Tg' i \langle 1, if' \rangle - 2g \langle 1, if' \rangle \langle ig', g \rangle, -2 \langle 1, if' \rangle \langle g, ig' \rangle) \right] + e^{\langle 1, f \rangle} \frac{(2g, 2 - T)}{T} \\
&= \frac{e^{\langle 1, f \rangle}}{2|g'|^2} \left[(Tg' (\langle 1, f' \rangle + i \langle 1, if' \rangle) - 2g (\langle 1, f' \rangle \langle g', g \rangle + \langle 1, if' \rangle \langle ig', g \rangle), \right. \\
&- \left. 2 (\langle 1, f' \rangle \langle g, g' \rangle + \langle 1, if' \rangle \langle g, ig' \rangle)) \right] + e^{\langle 1, f \rangle} \frac{(2g, 2 - T)}{T} \\
&= \frac{e^{\langle 1, f \rangle}}{2|g'|^2} (Tg' \bar{f}' - 2g \langle g', gf' \rangle, -2 \langle g', gf' \rangle) + e^{\langle 1, f \rangle} \frac{(2g, 2 - T)}{T}.
\end{aligned}$$

Para obtermos os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais, usamos (2-8).

Logo,

$$\begin{aligned}
E &= \langle X_{,1}, X_{,1} \rangle = \langle V_{11}N_{,1} + V_{12}N_{,2}, V_{11}N_{,1} + V_{12}N_{,2} \rangle = V_{11}^2 L_{11} + V_{12}^2 L_{22} \\
&= \left[\left(\frac{T^2 h}{4|g'|^2} (\langle 1, f' \rangle^2 - \langle 1, \xi \rangle) + h \right)^2 + \left(\frac{T^2 h}{4|g'|^2} \langle i, \xi - \frac{f'^2}{2} \rangle \right)^2 \right] \frac{4|g'|^2}{T^2} \\
&= \left[\frac{T^4 h^2}{16|g'|^4} (\langle 1, f' \rangle^2 - \langle 1, \xi \rangle)^2 + \frac{T^2 h^2}{2|g'|^2} (\langle 1, f' \rangle^2 - \langle 1, \xi \rangle) + h^2 \right] \frac{4|g'|^2}{T^2} \\
&+ \left[\frac{T^4 h^2}{16|g'|^4} \langle i, \xi - \frac{f'^2}{2} \rangle^2 \right] \frac{4|g'|^2}{T^2} \\
&= \frac{T^2 h^2}{4|g'|^2} \left((\langle 1, f' \rangle^2 - \langle 1, \xi \rangle)^2 + \langle i, \xi - \frac{f'^2}{2} \rangle^2 \right) + 2h^2 (\langle 1, f' \rangle^2 - \langle 1, \xi \rangle) \\
&+ \frac{4h^2 |g'|^2}{T^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F &= \langle X_1, X_2 \rangle = \langle V_{11}N_{,1} + V_{12}N_{,2}, V_{21}N_{,1} + V_{22}N_{,2} \rangle \\
&= V_{11}V_{21}L_{11} + V_{12}V_{22}L_{22} \\
&= \left[\left(\frac{T^2h}{4|g'|^2} (\langle 1, f' \rangle^2 - \langle 1, \xi \rangle) + h \right) \left(\frac{T^2h}{4|g'|^2} \langle i, \xi - \frac{f'^2}{2} \rangle \right) \right] \frac{4|g'|^2}{T^2} \\
&+ \left[\left(\frac{T^2h}{4|g'|^2} (\langle 1, if' \rangle^2 + \langle 1, \xi \rangle) + h \right) \left(\frac{T^2h}{4|g'|^2} \langle i, \xi - \frac{f'^2}{2} \rangle \right) \right] \frac{4|g'|^2}{T^2} \\
&= \left(\frac{T^4h^2}{16|g'|^4} (\langle 1, f' \rangle^2 - \langle 1, \xi \rangle) \langle i, \xi - \frac{f'^2}{2} \rangle + \frac{T^2h^2}{4|g'|^2} \langle i, \xi - \frac{f'^2}{2} \rangle \right) \frac{4|g'|^2}{T^2} \\
&+ \left(\frac{T^4h^2}{16|g'|^4} (\langle 1, if' \rangle^2 + \langle 1, \xi \rangle) \langle i, \xi - \frac{f'^2}{2} \rangle + \frac{T^2h^2}{4|g'|^2} \langle i, \xi - \frac{f'^2}{2} \rangle \right) \frac{4|g'|^2}{T^2} \\
&= \left(\frac{T^4h^2|f'|^2}{16|g'|^4} \langle i, \xi - \frac{f'^2}{2} \rangle + \frac{T^2h^2}{2|g'|^2} \langle i, \xi - \frac{f'^2}{2} \rangle \right) \frac{4|g'|^2}{T^2} \\
&= \left(\frac{T^2h^2|f'|^2}{4|g'|^2} + 2h^2 \right) \langle i, \xi - \frac{f'^2}{2} \rangle,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G &= \langle X_2, X_2 \rangle = \langle V_{21}N_{,1} + V_{22}N_{,2}, V_{21}N_{,1} + V_{22}N_{,2} \rangle = V_{21}^2L_{11} + V_{22}^2L_{22} \\
&= \left[\left(\frac{T^2h}{4|g'|^2} \langle i, \xi - \frac{f'^2}{2} \rangle \right)^2 + \left(\frac{T^2h}{4|g'|^2} (\langle 1, if' \rangle^2 + \langle 1, \xi \rangle) + h \right)^2 \right] \frac{4|g'|^2}{T^2} \\
&= \left[\frac{T^4h^2}{16|g'|^4} \langle i, \xi - \frac{f'^2}{2} \rangle^2 \right] \frac{4|g'|^2}{T^2} \\
&+ \left[\frac{T^4h^2}{16|g'|^4} (\langle 1, if' \rangle^2 + \langle 1, \xi \rangle)^2 + \frac{T^2h^2}{2|g'|^2} (\langle 1, if' \rangle^2 + \langle 1, \xi \rangle) + h^2 \right] \frac{4|g'|^2}{T^2} \\
&= \frac{T^2h^2}{4|g'|^2} \left((\langle 1, if' \rangle^2 + \langle 1, \xi \rangle)^2 + \langle i, \xi - \frac{f'^2}{2} \rangle^2 \right) + 2h^2 (\langle 1, if' \rangle^2 + \langle 1, \xi \rangle) \\
&+ \frac{4h^2|g'|^2}{T^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e &= \langle X_1, N_{,1} \rangle = \langle V_{11}N_{,1} + V_{12}N_{,2}, N_{,1} \rangle = V_{11}L_{11} \\
&= \left[\frac{T^2h}{4|g'|^2} (\langle 1, f' \rangle^2 - \langle 1, \xi \rangle) + h \right] \frac{4|g'|^2}{T^2} \\
&= h(\langle 1, f' \rangle^2 - \langle 1, \xi \rangle) + \frac{4h|g'|^2}{T^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f &= \langle X_1, N_{,2} \rangle = \langle V_{11}N_{,1} + V_{12}N_{,2}, N_{,2} \rangle = V_{12}L_{22} \\
&= \left(\frac{T^2h}{4|g'|^2} \langle i, \xi - \frac{f'^2}{2} \rangle \right) \frac{4|g'|^2}{T^2} \\
&= h \langle i, \xi - \frac{f'^2}{2} \rangle,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g &= \langle X_2, N_2 \rangle = \langle V_{21}N_1 + V_{22}N_2, N_2 \rangle = V_{22}L_{22} \\
&= \left(\frac{T^2 h}{4|g'|^2} (\langle 1, if' \rangle^2 + \langle 1, \xi \rangle) + h \right) \frac{4|g'|^2}{T^2} \\
&= h(\langle 1, if' \rangle^2 + \langle 1, \xi \rangle) + \frac{4h|g'|^2}{T^2}.
\end{aligned}$$

□

Exemplo 2.1 Uma esfera de centro na origem e raio $r > 0$ é uma superfície-TR. De fato, usando o Teorema 2.5 e tomando $h(u) = r$, pelas equações (2-3) e (2-14) segue o resultado.

Corolário 2.6 Uma superfície-TR está parametrizada por linhas de curvatura se, e somente se, $\langle i, \xi - \frac{f'^2}{2} \rangle = 0$, onde ξ é dado por (2-10).

Prova. Seja Σ uma superfície-TR então Σ está parametrizada por linhas de curvatura se, e somente se, $F = f = 0$. Portanto, das equações (2-12) e (2-13) segue que Σ está parametrizada por linhas de curvatura se, e somente se, $\langle i, \xi - \frac{f'^2}{2} \rangle = 0$. □

Corolário 2.7 Uma superfície-TR Σ está parametrizada por linhas de curvatura se, e somente se, existem constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ e $z_1 \in \mathbb{C}$ tais que

$$\begin{cases} i \left(f'' + \frac{f'^2}{2} \right) - i \frac{f'g''}{g'} = -\bar{z}_1 g + ic_1, \\ g \left(i \left(f'' + \frac{f'^2}{2} \right) - i \frac{f'g''}{g'} + 2i \frac{f'g'}{g} \right) = ic_2 g + z_1. \end{cases}$$

onde f, g são os dados holomorfos da superfície Σ .

Prova. Seja Σ uma superfície-TR, pelo Corolário anterior, Σ está parametrizada por linhas de curvatura se, e somente se, $\langle i, \xi - \frac{f'^2}{2} \rangle = 0$. Por outro lado, usando as propriedade da

Proposição 1.5, obtemos

$$\begin{aligned}
\left\langle i, \xi - \frac{f'^2}{2} \right\rangle = 0 &\Leftrightarrow \left\langle i, f' \left(\frac{g''}{g'} - \frac{2}{T} g' \bar{g} \right) - f'' - \frac{f'^2}{2} \right\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \left\langle i, \frac{f' g''}{g'} \right\rangle - \frac{2}{T} \langle i, f' g' \bar{g} \rangle - \left\langle i, f'' + \frac{f'^2}{2} \right\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow T \left\langle i, \frac{f' g''}{g'} \right\rangle - 2 \langle i, f' g' \bar{g} \rangle - T \left\langle i, f'' + \frac{f'^2}{2} \right\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow -T \left\langle 1, i \frac{f' g''}{g'} \right\rangle - 2 \langle ig, f' g' \rangle + T \left\langle 1, i \left(f'' + \frac{f'^2}{2} \right) \right\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow -T \left\langle 1, i \frac{f' g''}{g'} \right\rangle - 2|g|^2 \left\langle i, \frac{f' g'}{g} \right\rangle + T \left\langle 1, i \left(f'' + \frac{f'^2}{2} \right) \right\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \left\langle 1, i \left(f'' + \frac{f'^2}{2} \right) - i \frac{f' g''}{g'} \right\rangle \\
&\quad + |g|^2 \left[\left\langle 1, -i \frac{f' g''}{g'} \right\rangle + 2 \left\langle 1, i \frac{f' g'}{g} \right\rangle + \left\langle 1, i \left(f'' + \frac{f'^2}{2} \right) \right\rangle \right] = 0 \\
&\Leftrightarrow \left\langle 1, i \left(f'' + \frac{f'^2}{2} \right) - i \frac{f' g''}{g'} \right\rangle + |g|^2 \left\langle 1, i \left(f'' + \frac{f'^2}{2} \right) - i \frac{f' g''}{g'} + 2i \frac{f' g'}{g} \right\rangle = 0 \\
&\Leftrightarrow \left\langle 1, i \left(f'' + \frac{f'^2}{2} \right) - i \frac{f' g''}{g'} \right\rangle + \left\langle g, g \left(i \left(f'' + \frac{f'^2}{2} \right) - i \frac{f' g''}{g'} + 2i \frac{f' g'}{g} \right) \right\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Desse modo, o resultado segue pela Proposição 1.7. \square

Teorema 2.8 *Seja Σ uma superfície-TR compacta e conexa então Σ é uma esfera.*

Prova. Seja Σ um compacto então existe uma esfera E com centro na origem e raio $r > 0$, tal que Σ está contida na bola fechada de centro na origem e raio r , $B[0, r]$ e seja $p \in (E \cap \Sigma)$ tal que $T_p E = T_p \Sigma$. Seja $h : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, onde h é a função suporte de Σ , então $h(p) = r$. Além disso, temos que $h(q) \leq |q|$, para todo $q \in \Sigma$. Então

$$h(q) \leq |q| \leq r, \quad \text{para todo } q \in \Sigma.$$

Σ é uma superfície-TR, logo pelo Teorema 2.5 e (2-3) pode ser parametrizada localmente em torno de p tal que a função suporte $h : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $h(u) = e^{\mu(u)}$, $u \in U$, existe $u_0 \in U$, tal que $X(u_0) = p$, como μ é harmônica então

$$e^{\mu(u)} \leq r \Rightarrow \mu(u) \leq \ln(r)$$

Além disso $h(p) = r$, então $e^{\mu(u_0)} = r$, logo $\mu(u_0) = \ln(r)$ assim $\mu(u) \leq \mu(u_0)$. Como μ é harmônica aplicando princípio do máximo, $\mu(u) = \ln(r)$ em U , logo $h(u) = r$ em U , pela compacidade e conexidade de Σ temos $h(q) = r$, para todo $q \in \Sigma$, portanto Σ é uma esfera

com centro na origem e raio r .

□

Os seguintes são exemplos de superfícies-TR para algumas funções holomorfas f e g com $z = u_1 + iu_2 \in \mathbb{C}$, usando (2-11) temos

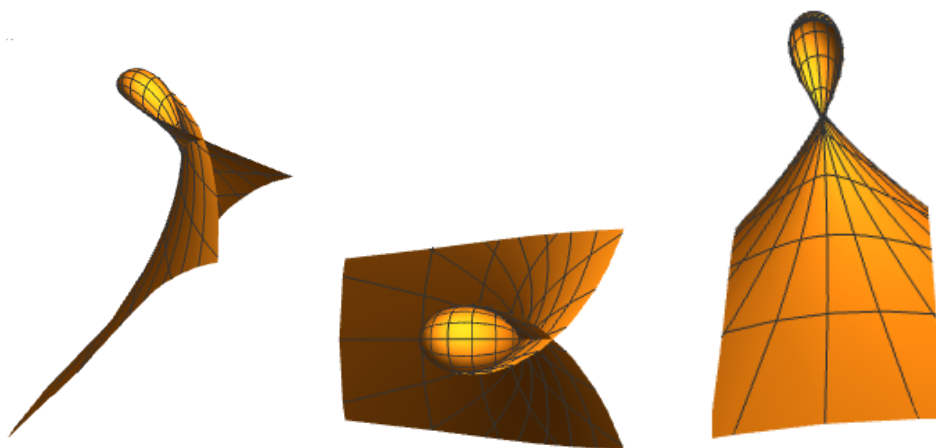


Figura 2.1: $f(z) = g(z) = z$

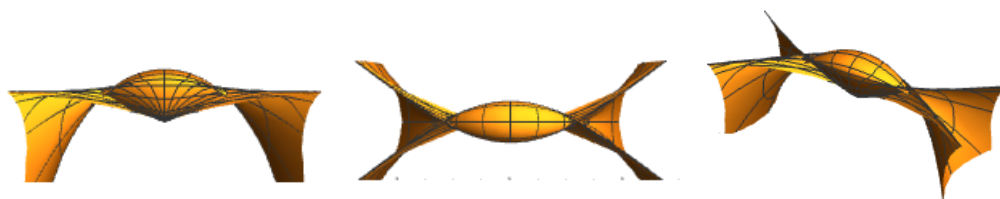


Figura 2.2: $f(z) = z^2, g(z) = z$

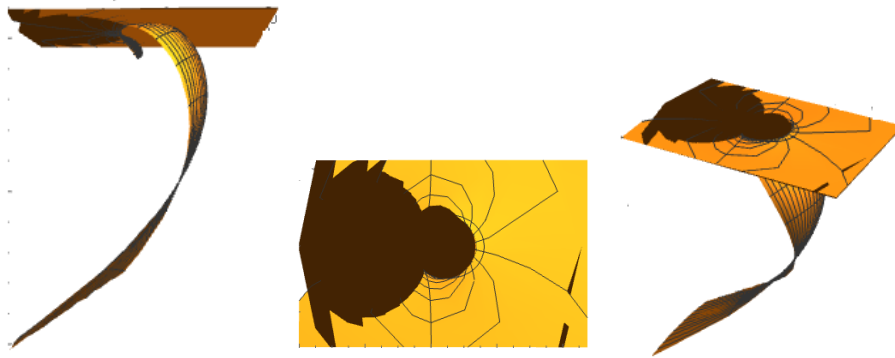


Figura 2.3: $f(z) = z$, $g(z) = z^2$

O teorema a seguir classifica as superfícies-TR de rotação.

Teorema 2.9 *Seja Σ uma superfície-TR conexa. Então Σ é de rotação se, e somente se, existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$, tais que Σ pode ser localmente parametrizada por*

$$X_{ab}(u_1, u_2) = (M(u_1) \cos(u_2), M(u_1) \sin(u_2), N(u_1)),$$

$$M(u_1) = e^{au_1+b} \left[\frac{a(1 - e^{2u_1})}{2} + \frac{2e^{u_1}}{1 + e^{2u_1}} \right]$$

e

$$N(u_1) = e^{au_1+b} \left[\frac{1 - e^{2u_1}}{1 + e^{2u_1}} - ae^{u_1} \right]$$

Prova. Do Teorema 2.5 temos que Σ é localmente parametrizada por

$$X = \frac{e^{\langle 1, f \rangle}}{2|g'|} (Tg' \bar{f}' - 2g \langle g', gf' \rangle, -2 \langle g', gf' \rangle) + e^{\langle 1, f \rangle} \frac{(2g, 2 - T)}{T},$$

com aplicação normal de Gauss $N = \frac{(2g, 2 - T)}{T}$, $T = 1 + |g|^2$ e onde f, g são funções holomorfas. Além disso, pelo Lema 2.2 temos que Σ é de rotação se, e somente se, $g(w) = w$ e $h(w) = J(|w|^2)$, $w \in \mathbb{C}$, para alguma função diferenciável J .

Fazendo a mudança de parâmetros

$$w = e^z, \quad e \quad z = u_1 + iu_2 \in \mathbb{C},$$

obtemos $g(z) = e^z$ e $h(z) = J(e^{2u_1})$. Consequentemente, $h_{,2} = 0$, lembrando que $h = e^{\langle 1, f \rangle}$ e $h_{,2} = e^{\langle 1, f \rangle} \langle 1, if' \rangle = 0$. Logo $\langle 1, if' \rangle = 0$, mas $\langle 1, if' \rangle = \langle 1, f' \rangle_{,2} = 0$ e assim pelas equações de Cauchy-Riemann, $\langle i, f' \rangle_{,1} = 0$. Por outro lado, a parte real de uma função holomorfa é harmônica

$$\langle 1, f' \rangle_{,11} + \langle 1, f' \rangle_{,22} = 0.$$

Como $\langle 1, f \rangle_{,2} = 0$, então $\langle 1, f \rangle_{,22} = 0$. Temos $\langle 1, f \rangle_{,11} = 0$, logo, $\langle 1, f \rangle_{,1} = a$ com $a \in \mathbb{R}$, o que mostra que $\langle 1, f \rangle = au_1 + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Dessa forma, temos

$$f(z) = az + z_0, \quad g(z) = e^z, \quad h(z) = e^{au_1+b}, \quad z = u_1 + iu_2, z_0 = b + ic \in \mathbb{C}.$$

De modo que $f'(z) = a$, $g'(z) = g(z)$ e $T = 1 + |g|^2 = 1 + |e^{u_1}(\cos u_2 + i \sin u_2)|^2 = 1 + e^{2u_1}$. Nestas condições temos que

$$\begin{aligned} X &= \frac{e^{\langle 1, f \rangle}}{2|g'|} (Tg' \bar{f}' - 2g \langle g', g f' \rangle, -2 \langle g', g f' \rangle) + e^{\langle 1, f \rangle} \frac{(2g, 2-T)}{T} \\ &= \frac{e^{au_1+b}}{2e^{u_1}} ((1 + e^{2u_1})e^z a - 2e^z \langle e^z, e^z a \rangle, -2 \langle e^z, e^z a \rangle) + e^{au_1+b} \left(\frac{2e^z}{1 + e^{2u_1}}, \frac{1 - e^{2u_1}}{1 + e^{2u_1}} \right) \\ &= \frac{e^{au_1+b}}{2e^{u_1}} ((a + ae^{2u_1})e^z - 2ae^{2u_1} e^z, -2ae^{2u_1}) + e^{au_1+b} \left(\frac{2e^z}{1 + e^{2u_1}}, \frac{1 - e^{2u_1}}{1 + e^{2u_1}} \right) \\ &= \frac{e^{au_1+b}}{2e^{u_1}} ((a - ae^{2u_1})e^z, -2ae^{2u_1}) + e^{au_1+b} \left(\frac{2e^z}{1 + e^{2u_1}}, \frac{1 - e^{2u_1}}{1 + e^{2u_1}} \right) \\ &= e^{au_1+b} \left(\frac{ae^z(e^{-u_1} - e^{u_1})}{2}, -ae^{u_1} \right) + e^{au_1+b} \left(\frac{2e^z}{1 + e^{2u_1}}, \frac{1 - e^{2u_1}}{1 + e^{2u_1}} \right) \\ &= e^{au_1+b} \left(\left(\frac{a(e^{-u_1} - e^{u_1})}{2} + \frac{2}{1 + e^{2u_1}} \right) e^z, \frac{1 - e^{2u_1}}{1 + e^{2u_1}} - ae^{u_1} \right) \\ &= e^{au_1+b} \left(\left(\frac{a(1 - e^{2u_1})}{2} + \frac{2e^{u_1}}{1 + e^{2u_1}} \right) (\cos(u_2) + i \sin(u_2)), \frac{1 - e^{2u_1}}{1 + e^{2u_1}} - ae^{u_1} \right). \end{aligned}$$

Portanto, Σ pode ser parametrizada localmente por

$$X_{ab}(u_1, u_2) = (M(u_1) \cos(u_2), M(u_1) \sin(u_2), N(u_1)),$$

$$M(u_1) = e^{au_1+b} \left[\frac{a(1 - e^{2u_1})}{2} + \frac{2e^{u_1}}{1 + e^{2u_1}} \right]$$

e

$$N(u_1) = e^{au_1+b} \left[\frac{1 - e^{2u_1}}{1 + e^{2u_1}} - ae^{u_1} \right].$$

□

Usando os coeficientes da primeira forma fundamental do Teorema 2.5, temos

$$EG - F^2 = \frac{(ae^{2u_1}(e^{2u_1} - 4) - a)^2 (ae^{4u_1}(a + 1) + 2e^{2u_1}(a^2 + 2) + a(a - 1))^2}{16(e^{2u_1+1})^4 e^{-4u_1(a-1)-4b}}.$$

Deste modo, X_{ab} é regular se, e somente se, $a = 0$. Se $a \neq 0$ a expressão anterior anula-se

para

$$u_1 = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2+\sqrt{4+a^2}}{a}\right) & \text{se } a > 0. \\ \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2-\sqrt{4+a^2}}{a}\right) & \text{se } a < 0. \\ \frac{1}{2} \ln\left(\frac{-(2+a^2)+\sqrt{4+5a^2}}{a^2+a}\right) & \text{se } 0 < a < 1. \\ \frac{1}{2} \ln\left(\frac{-(2+a^2)-\sqrt{4+5a^2}}{a^2+a}\right) & \text{se } -1 < a < 0. \end{cases}$$

As seguintes figuras são exemplos de superfícies-TR de rotação, consideramos o caso em que $b = 0$.

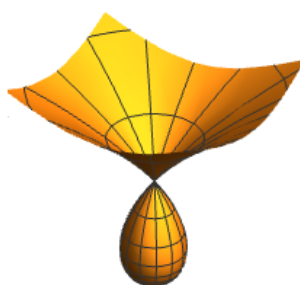


Figura 2.4: $a = -1$

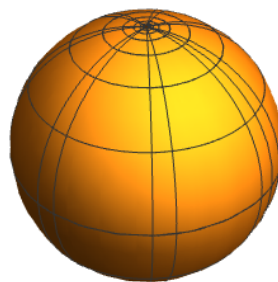


Figura 2.5: $a = 0$

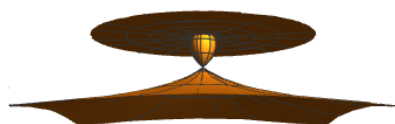


Figura 2.6: $a = \frac{1}{2}$

Superfícies de tipo Ribaucour generalizadas

Neste capítulo, introduzimos uma classe de superfícies chamadas de superfícies de tipo Ribaucour generalizada e a denominamos por superfícies-TRG, mostramos uma parametrização local desta classe de superfícies e caracterizamos o caso em que tais superfícies são de rotação.

Definição 3.1 *Seja Σ uma superfície com aplicação de Gauss N . Existe uma aplicação harmônica μ com respeito a terceira forma fundamental e uma função $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $p \in \Sigma$ a esfera com centro $p + \left(\frac{H}{C(\mu)K} + \frac{\Psi(2-C(\mu))}{2C(\mu)}\right)N(p)$ e raio $\left(\frac{H}{C(\mu)K} + \frac{\Psi(2-C(\mu))}{2C(\mu)}\right)$, tangencia uma esfera fixa e é chamada de **Superfície de tipo Ribaucour generalizada** ou abreviadamente Superfície-TRG e satisfaz a seguinte relação de Weingarten generalizada*

$$\frac{H}{K} = C(\mu) \left(\frac{-\Lambda}{2\Psi} + \frac{\Psi}{2} \right) - \Psi. \quad (3-1)$$

Observação 3.1 *Exibimos casos particulares das superfícies-TRG para diferentes valores de C .*

1. Se $C(t) = 0$ então

$$\begin{aligned} \frac{H}{K} &= C(t) \left(\frac{-\Lambda}{2\Psi} + \frac{\Psi}{2} \right) - \Psi = -\Psi \\ H + \Psi K &= 0. \end{aligned}$$

São as superfícies de Appell associadas a transformações na esfera que preservam área, estudadas por Ferreira e Roitman em [11].

2. Se $C(t) = 1$ então

$$\frac{H}{K} = C(t) \left(\frac{-\Lambda}{2\Psi} + \frac{\Psi}{2} \right) - \Psi = \frac{-\Lambda}{2\Psi} + \frac{\Psi}{2} - \Psi = -\frac{\Lambda}{2\Psi} - \frac{\Psi}{2}.$$

São superfícies -TR dadas na Definição 2.3.

Lema 3.2 *Considere funções holomorfas $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ e $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$, com $g' \neq 0$, onde Σ é uma superfície de Riemann. Tomando os parâmetros locais $z = u_1 + iu_2 \in \Sigma$ e $\mu = \langle 1, f \rangle$*

tal que $h = \ell(\mu)$, a matriz

$$V_{ij} = \frac{1}{L_{jj}} \left(h_{,ij} - \sum_{k=1}^2 h_{,k} \Gamma_{ij}^k + h L_{ij} \delta_{ij} \right), \quad 1 \leq i, j \leq 2.$$

Usando a métrica dada por (2-2), temos

$$\begin{aligned} V_{11} &= \frac{T^2}{4|g'|^2} [\ell''(\mu) \langle 1, f' \rangle^2 - \ell'(\mu) \langle 1, \xi \rangle] + \ell(\mu), \\ V_{12} &= V_{21} = \frac{T^2}{4|g'|^2} \left[\ell''(\mu) \left\langle 1, \frac{if''}{2} \right\rangle + \ell'(\mu) \langle i, \xi \rangle \right], \\ V_{22} &= \frac{T^2}{4|g'|^2} [\ell''(\mu) \langle 1, if' \rangle^2 + \ell'(\mu) \langle 1, \xi \rangle] + \ell(\mu). \end{aligned}$$

Aqui ξ é dada por (2-10), mais ainda,

$$\text{tr}V = \frac{\ell''(\mu) |f'|^2 T^2}{4|g'|^2} + 2\ell(\mu).$$

Prova. Seja $h = \ell(\mu) = \ell(\langle 1, f \rangle)$, as derivadas de h são dadas por:

$$\begin{aligned} h_{,1} &= \ell'(\mu) \langle 1, f' \rangle \\ h_{,11} &= \ell''(\mu) \langle 1, f' \rangle^2 + \ell'(\mu) \langle 1, f'' \rangle \\ h_{,2} &= \ell'(\mu) \langle 1, if' \rangle \\ h_{,22} &= \ell''(\mu) \langle 1, if' \rangle^2 - \ell'(\mu) \langle 1, f'' \rangle \\ h_{,12} &= \ell''(\mu) \langle 1, if' \rangle \langle 1, f' \rangle + \ell'(\mu) \langle 1, if'' \rangle. \end{aligned}$$

Usando os símbolos de Christoffel encontrados no Lema 2.4, podemos inferir que

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{T \langle g', g'' \rangle - 2|g'|^2 \langle g, g' \rangle}{T|g'|^2}, \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{T \langle g', ig'' \rangle - 2|g'|^2 \langle g, ig' \rangle}{T|g'|^2}, \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{2|g'|^2 \langle g, ig' \rangle - T \langle g', ig'' \rangle}{T|g'|^2}, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{2|g'|^2 \langle g, g' \rangle - T \langle g', g'' \rangle}{T|g'|^2}. \end{aligned}$$

Usando as expressões anteriores e a Proposição 1.5 temos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^2 \Gamma_{11}^k h_{,k} &= \Gamma_{11}^1 h_{,1} + \Gamma_{11}^2 h_{,2} \\
&= \ell'(\mu) \langle 1, f' \rangle \left[\frac{T \langle g', g'' \rangle - 2|g'|^2 \langle g, g' \rangle}{T|g'|^2} \right] \\
&\quad - \ell'(\mu) \langle i, f' \rangle \left[\frac{2|g'|^2 \langle g, ig' \rangle - T \langle g', ig'' \rangle}{T|g'|^2} \right] \\
&= \ell'(\mu) \left\langle \langle 1, f' \rangle + i \langle i, f' \rangle, \frac{\langle g', g'' \rangle}{|g'|^2} - \frac{2}{T} \langle g, g' \rangle + i \left(\frac{\langle g', ig'' \rangle}{|g'|^2} - \frac{2}{T} \langle g, ig' \rangle \right) \right\rangle \\
&= \ell'(\mu) \left\langle f', \frac{\langle g', g'' \rangle}{|g'|^2} + i \frac{\langle g', ig'' \rangle}{|g'|^2} - \frac{2}{T} (\langle g, g' \rangle + i \langle g, ig' \rangle) \right\rangle \\
&= \ell'(\mu) \left\langle f', \frac{\bar{g}'' g'}{|g'|^2} - \frac{2}{T} \bar{g}' g \right\rangle = \ell'(\mu) \left\langle f', \overline{\left(\frac{g''}{g'} \right)} - \frac{2}{T} \bar{g}' g \right\rangle \\
&= \ell'(\mu) \left\langle f', \overline{\left(\frac{g''}{g'} - \frac{2}{T} \bar{g}' g \right)} \right\rangle = \ell'(\mu) \left\langle 1, f' \left(\frac{g''}{g'} - \frac{2}{T} g' \bar{g} \right) \right\rangle \\
&= \ell'(\mu) \langle 1, \xi + f'' \rangle,
\end{aligned}$$

onde $\xi = f' \left(\frac{g''}{g'} - \frac{2}{T} g' \bar{g} \right) - f''$. Analogamente, sabendo que $\Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2, \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{11}^1$, obtemos

$$\sum_{k=1}^2 \Gamma_{22}^k h_{,k} = -\ell'(\mu) \langle 1, \xi + f'' \rangle,$$

e

$$\sum_{k=1}^2 \Gamma_{12}^k h_{,k} = -\ell'(\mu) \langle i, \xi + f'' \rangle.$$

Então, podemos escrever

$$\begin{aligned}
V_{11} &= \frac{1}{L_{11}} \left(h_{,11} - \sum_{k=1}^2 \Gamma_{11}^k h_{,k} + hL_{11} \right) \\
&= \frac{T^2}{4|g'|^2} [\ell''(\mu) \langle 1, f' \rangle^2 + \ell'(\mu) \langle 1, f'' \rangle - \ell'(\mu) \langle 1, \xi + f'' \rangle] + \ell(\mu) \\
&= \frac{T^2}{4|g'|^2} [\ell''(\mu) \langle 1, f' \rangle^2 + \ell'(\mu) [\langle 1, f'' \rangle - \langle 1, \xi + f'' \rangle]] + \ell(\mu) \\
&= \frac{T^2}{4|g'|^2} [\ell''(\mu) \langle 1, f' \rangle^2 - \ell'(\mu) \langle 1, \xi \rangle] + \ell(\mu)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{22} &= \frac{1}{L_{22}} \left(h_{,22} - \sum_{k=1}^2 \Gamma_{22}^k h_{,k} + hL_{22} \right) \\
&= \frac{T^2}{4|g'|^2} [\ell''(\mu) \langle 1, if' \rangle^2 - \ell'(\mu) \langle 1, f'' \rangle - (-\ell'(\mu) \langle 1, \xi + f'' \rangle)] + \ell(\mu) \\
&= \frac{T^2}{4|g'|^2} [\ell''(\mu) \langle 1, if' \rangle^2 + \ell'(\mu) [-\langle 1, f'' \rangle + \langle 1, \xi + f'' \rangle]] + \ell(\mu) \\
&= \frac{T^2}{4|g'|^2} [\ell''(\mu) \langle 1, if' \rangle^2 + \ell'(\mu) \langle 1, \xi \rangle] + \ell(\mu) \\
V_{12} &= \frac{1}{L_{22}} \left(h_{,12} - \sum_{k=1}^2 \Gamma_{12}^k h_{,k} \right) \\
&= \frac{T^2}{4|g'|^2} [\ell''(\mu) \langle 1, if' \rangle \langle 1, f' \rangle + \ell'(\mu) \langle 1, if'' \rangle - (-\ell'(\mu) \langle i, \xi + f'' \rangle)] \\
&= \frac{T^2}{4|g'|^2} [\ell''(\mu) \langle 1, if' \rangle \langle 1, f' \rangle + \ell'(\mu) [-\langle i, f'' \rangle + \langle i, \xi + f'' \rangle]] \\
&= \frac{T^2}{4|g'|^2} [\ell''(\mu) \langle 1, if' \rangle \langle 1, f' \rangle + \ell'(\mu) \langle i, \xi \rangle] \\
&= \frac{T^2}{4|g'|^2} \left[\ell''(\mu) \left\langle 1, \frac{if'^2}{2} \right\rangle + \ell'(\mu) \langle i, \xi \rangle \right].
\end{aligned}$$

Dessa maneira,

$$\begin{aligned}
trV &= V_{11} + V_{22} \\
&= \frac{T^2}{4|g'|^2} [\ell''(\mu) \langle 1, f' \rangle^2 - \ell'(\mu) \langle 1, \xi \rangle] + \ell(\mu) + \frac{T^2}{4|g'|^2} [\ell''(\mu) \langle 1, if' \rangle^2 + \ell'(\mu) \langle 1, \xi \rangle] + \ell(\mu) \\
&= \frac{T^2}{4|g'|^2} [\ell''(\mu) (\langle 1, f' \rangle^2 + \langle 1, if'^2 \rangle)] + 2\ell(\mu)
\end{aligned}$$

portanto,

$$trV = \frac{\ell''(\mu) |f'|^2 T^2}{4|g'|^2} + 2\ell(\mu).$$

□

Teorema 3.3 *Sejam X é dada por (2-3), $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, μ harmônica com respeito a terceira forma fundamental então X é uma superfície-TRG se, e somente se,*

$$h\Delta_L h - C(\mu) |\nabla_L h|^2 = 0. \quad (3-2)$$

Prova. Usando a equação (2-6) temos

$$\frac{H}{K} = -\frac{1}{2} (\Delta_L h + 2h). \quad (3-3)$$

Usando (3-1) e (3-3), obtemos a seguinte equivalência

$$-\frac{1}{2}(\Delta_L h + 2h) = C(\mu) \left(\frac{-\Lambda}{2\Psi} + \frac{\Psi}{2} \right) - \Psi = \frac{C(\mu)}{2\Psi}(-\Lambda + \Psi^2) - \Psi$$

$$\Leftrightarrow \Delta_L h + 2h = -\frac{C(\mu)}{\Psi}(-\Lambda + \Psi^2) + 2\Psi,$$

lembrando que $h = \Psi$, chegamos em

$$h\Delta_L h = C(\mu)(\Lambda - \Psi^2),$$

por (2-7) obtemos

$$h\Delta_L h = C(\mu)(|\nabla_L h|^2 + \Psi^2 - \Psi^2),$$

logo $h\Delta_L h - C(\mu)|\nabla_L h|^2 = 0$. □

O seguinte teorema permite obter uma classe de superfícies-TRG.

Teorema 3.4 *Seja Σ uma superfície de Riemann e $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão tal que a curvatura Gauss-kronecker é não-nula. Sejam $\ell : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\mu = \langle 1, f \rangle$, com f uma função holomorfa e $h = \ell(\mu)$. Então X é dada por (2-3) e é uma superfície-TRG com $C = \frac{\ell\ell''}{(\ell')^2}$, onde $\ell' \neq 0$. Além disso, seja g uma função holomorfa e $g' \neq 0$, então $X(\Sigma)$ é localmente parametrizada por*

$$X = \frac{\ell'(\mu)}{2|g'|^2} (Tg'\bar{f}' - 2g\langle g', gf' \rangle, -2\langle g', gf' \rangle) + \ell(\mu) \frac{(2g, 2-T)}{T}, \quad (3-4)$$

com $T = 1 + |g|^2$.

Prova. Seja $h(\mu) = \ell(\mu)$ onde ℓ uma função real e $\mu = \langle 1, f \rangle$, neste caso temos,

$$h_{,1} = \ell'(\mu)\mu_{,1} \quad e \quad h_{,2} = \ell'(\mu)\mu_{,2}$$

$$h_{,11} = \ell''(\mu)(\mu_{,1}^2 + \mu_{,11}) \quad e \quad h_{,22} = \ell''(\mu)(\mu_{,2}^2 + \mu_{,22}).$$

Substituindo as derivadas acima em (3-2) temos a seguinte equivalência

$$\ell(\mu)(\ell''(\mu)(\mu_{,1}^2 + \mu_{,2}^2) + \ell'(\mu)(\mu_{,11} + \mu_{,22})) - C(\mu)(\ell'^2(\mu)(\mu_{,1}^2 + \mu_{,2}^2)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ell(\mu)\ell''(\mu)|\nabla_L \mu|^2 = C(\mu)\ell'^2(\mu)|\nabla_L \mu|^2.$$

Portanto

$$C(\mu) = \frac{\ell(\mu)\ell''(\mu)}{\ell'^2(\mu)}.$$

Por outro lado, podemos escrever (2-3) como

$$\begin{aligned}
X(u) &= \sum_{j=1}^2 \frac{h_{,j}}{L_{jj}} N_{,j} + hN = \frac{1}{L_{11}} [h_{,1}N_{,1} + h_{,2}N_{,2}] + hN \\
&= \frac{T^2}{4|g'|^2} \left[\ell'(\langle 1, f \rangle) \langle 1, f' \rangle \frac{2}{T^2} (Tg_{,1} - 2g\langle g', g \rangle, -2\langle g', g \rangle) \right] \\
&+ \frac{T^2}{4|g'|^2} \left[\ell'(\langle 1, f \rangle) \langle 1, if' \rangle \frac{2}{T^2} (Tg_{,2} - 2g\langle g, ig' \rangle, -2\langle g, ig' \rangle) \right] \\
&+ \ell(\langle 1, f \rangle) \frac{(2g, 2-T)}{T} \\
&= \frac{\ell'(\langle 1, f \rangle)}{2|g'|^2} [\langle 1, f' \rangle (Tg' - 2g\langle g', g \rangle, -2\langle g, g' \rangle)] \\
&+ \frac{\ell'(\langle 1, f \rangle)}{2|g'|^2} [\langle 1, if' \rangle (Tig' - 2g\langle ig', g \rangle, -2\langle g, ig' \rangle)] + \ell(\langle 1, f \rangle) \frac{(2g, 2-T)}{T} \\
&= \frac{\ell'(\langle 1, f \rangle)}{2|g'|^2} [(Tg' \langle 1, f' \rangle - 2g \langle 1, f' \rangle \langle g', g \rangle, -2 \langle 1, f' \rangle \langle g, g' \rangle) \\
&+ (Tg' i \langle 1, if' \rangle - 2g \langle 1, if' \rangle \langle ig', g \rangle, -2 \langle 1, if' \rangle \langle g, ig' \rangle)] + \ell(\langle 1, f \rangle) \frac{(2g, 2-T)}{T} \\
&= \frac{\ell'(\langle 1, f \rangle)}{2|g'|^2} [(Tg'(\langle 1, f' \rangle + i \langle 1, if' \rangle) - 2g(\langle 1, f' \rangle \langle g', g \rangle + \langle 1, if' \rangle \langle ig', g \rangle), \\
&- 2(\langle 1, f' \rangle \langle g, g' \rangle + \langle 1, if' \rangle \langle g, ig' \rangle))] + \ell(\langle 1, f \rangle) \frac{(2g, 2-T)}{T} \\
&= \frac{\ell'(\langle 1, f \rangle)}{2|g'|^2} (Tg' \bar{f}' - 2g \langle g', gf' \rangle, -2 \langle g', gf' \rangle) + \ell(\langle 1, f \rangle) \frac{(2g, 2-T)}{T}.
\end{aligned}$$

□

Observação 3.2 *Os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais de X são dados por:*

$$\begin{aligned}
E &= \langle X_1, X_1 \rangle = \langle V_{11}N_1 + V_{12}N_2, V_{11}N_1 + V_{12}N_2 \rangle \\
&= V_{11}^2 L_{11} + V_{12}^2 L_{22} = (V_{11}^2 + V_{12}^2) L_{11} \\
&= \left[\left(\frac{T^2}{4|g'|^2} [\ell''(\mu) \langle 1, f' \rangle^2 - \ell'(\mu) \langle 1, \xi \rangle] + \ell(\mu) \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{T^2}{4|g'|^2} \left[\ell''(\mu) \left\langle 1, \frac{if'^2}{2} \right\rangle + \ell'(\mu) \langle i, \xi \rangle \right] \right)^2 \right] \frac{4|g'|^2}{T^2} \\
&= \left[\frac{T^4}{16|g'|^4} [\ell''(\mu) \langle 1, f' \rangle^2 - \ell'(\mu) \langle 1, \xi \rangle]^2 + \frac{\ell T^2}{2|g'|^2} [\ell''(\mu) \langle 1, f' \rangle^2 - \ell'(\mu) \langle 1, \xi \rangle] + \ell^2(\mu) \right. \\
&\quad \left. + \frac{T^4}{16|g'|^4} \left[\ell''(\mu) \left\langle 1, \frac{if'^2}{2} \right\rangle + \ell'(\mu) \langle i, \xi \rangle \right]^2 \right] \frac{4|g'|^2}{T^2} \\
&= \left[\frac{T^4}{16|g'|^4} [\ell''^2(\mu) \langle 1, f' \rangle^4 - 2\ell''\ell' \langle 1, f' \rangle^2 \langle 1, \xi \rangle + \ell'^2(\mu) \langle 1, \xi \rangle^2] \right. \\
&\quad \left. + \frac{T^4}{16|g'|^4} \left[\ell''^2(\mu) \left\langle 1, \frac{if'^2}{2} \right\rangle^2 + 2\ell''\ell' \left\langle 1, \frac{if'}{2} \right\rangle \langle i, \xi \rangle + \ell'^2(\mu) \langle i, \xi \rangle^2 \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{\ell T^2}{2|g'|^2} [\ell''(\mu) \langle 1, f' \rangle^2 - \ell'(\mu) \langle 1, \xi \rangle] + \ell^2(\mu) \right] \frac{4|g'|^2}{T^2} \\
&= \left[\frac{T^4}{16|g'|^4} [\ell''^2(\mu) \left(\langle 1, f' \rangle^4 + \left\langle 1, \frac{if'^2}{2} \right\rangle^2 \right) - 2\ell''\ell' \left(\langle 1, f' \rangle^2 \langle 1, \xi \rangle - \left\langle 1, \frac{if'}{2} \right\rangle \langle i, \xi \rangle \right) \right. \\
&\quad \left. + \ell'^2(\mu) |\xi|^2] + \frac{\ell T^2}{2|g'|^2} [\ell''(\mu) \langle 1, f' \rangle^2 - \ell'(\mu) \langle 1, \xi \rangle] + \ell^2(\mu) \right] \frac{4|g'|^2}{T^2} \\
&= \frac{T^2}{4|g'|^2} [\ell''^2(\mu) \left(\langle 1, f' \rangle^4 + \left\langle 1, \frac{if'^2}{2} \right\rangle^2 \right) - 2\ell''\ell' \left(\langle 1, f' \rangle^2 \langle 1, \xi \rangle - \left\langle 1, \frac{if'}{2} \right\rangle \langle i, \xi \rangle \right) \\
&\quad + \ell'^2(\mu) |\xi|^2] + 2\ell [\ell''(\mu) \langle 1, f' \rangle^2 - \ell'(\mu) \langle 1, \xi \rangle] + \frac{4\ell^2(\mu) |g'|^2}{T^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F &= \langle X_1, X_2 \rangle = \langle V_{11}N_1 + V_{12}N_2, V_{21}N_1 + V_{22}N_2 \rangle \\
&= V_{11}V_{21}L_{11} + V_{12}V_{22}L_{22} = (V_{11} + V_{22})V_{12}L_{11} \\
&= \left[\frac{T^2}{4|g'|^2} [\ell''(\mu) \langle 1, f' \rangle^2 - \ell'(\mu) \langle 1, \xi \rangle] + \ell(\mu) + \frac{T^2}{4|g'|^2} [\ell''(\mu) \langle 1, if' \rangle^2 + \ell'(\mu) \langle 1, \xi \rangle] + \ell(\mu) \right] \\
&\quad \cdot \left(\frac{T^2}{4|g'|^2} \left[\ell''(\mu) \left\langle 1, \frac{if'^2}{2} \right\rangle + \ell'(\mu) \langle i, \xi \rangle \right] \right) \frac{4|g'|^2}{T^2} \\
&= \left[\frac{T^2}{4|g'|^2} [\ell''(\mu) (\langle 1, f' \rangle^2 + \langle 1, if' \rangle^2)] + 2\ell(\mu) \right] \left[\ell''(\mu) \left\langle 1, \frac{if'^2}{2} \right\rangle + \ell'(\mu) \langle i, \xi \rangle \right] \\
&= \left[\frac{\ell''(\mu) |f'|^2 T^2}{4|g'|^2} + 2\ell(\mu) \right] \left[\ell''(\mu) \left\langle 1, \frac{if'^2}{2} \right\rangle + \ell'(\mu) \langle i, \xi \rangle \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G &= \langle X_2, X_2 \rangle = \langle V_{21}N_1 + V_{22}N_2, V_{21}N_1 + V_{22}N_2 \rangle = V_{21}^2 L_{11} + V_{22}^2 L_{22} \\
&= V_{22}^2 L_{22} + V_{21}^2 L_{11} = (V_{22}^2 + V_{21}^2) L_{11} \\
&= \left[\left(\frac{T^2}{4|g'|^2} [\ell''(\mu) \langle 1, if' \rangle^2 + \ell'(\mu) \langle 1, \xi \rangle] + \ell(\mu) \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{T^2}{4|g'|^2} \left[\ell''(\mu) \left\langle 1, \frac{if'^2}{2} \right\rangle + \ell'(\mu) \langle i, \xi \rangle \right] \right)^2 \frac{4|g'|^2}{T^2} \right] \\
&= \left[\frac{T^4}{16|g'|^4} [\ell''(\mu) \langle 1, if' \rangle^2 + \ell'(\mu) \langle 1, \xi \rangle]^2 + \frac{\ell T^2}{2|g'|^2} [\ell''(\mu) \langle 1, f' \rangle^2 - \ell'(\mu) \langle 1, \xi \rangle] + \ell^2(\mu) \right. \\
&\quad \left. + \frac{T^4}{16|g'|^4} \left[\ell''(\mu) \left\langle 1, \frac{if'^2}{2} \right\rangle + \ell'(\mu) \langle i, \xi \rangle \right]^2 \frac{4|g'|^2}{T^2} \right] \\
&= \left[\frac{T^4}{16|g'|^4} [\ell''^2(\mu) \langle 1, if' \rangle^4 + 2\ell''\ell' \langle 1, if' \rangle^2 \langle 1, \xi \rangle + \ell'^2(\mu) \langle 1, \xi \rangle^2] \right. \\
&\quad \left. + \frac{T^4}{16|g'|^4} \left[\ell''^2(\mu) \left\langle 1, \frac{if'^2}{2} \right\rangle^2 + 2\ell''\ell' \left\langle 1, \frac{if'^2}{2} \right\rangle \langle i, \xi \rangle + \ell'^2(\mu) \langle i, \xi \rangle^2 \right] \right] \\
&\quad + \frac{\ell T^2}{2|g'|^2} [\ell''(\mu) \langle 1, if' \rangle^2 + \ell'(\mu) \langle 1, \xi \rangle] + \ell^2(\mu) \frac{4|g'|^2}{T^2} \\
&= \left[\frac{T^4}{16|g'|^4} [\ell''^2(\mu) \left(\langle 1, if' \rangle^4 + \left\langle 1, \frac{if'^2}{2} \right\rangle^2 \right) + 2\ell''\ell' \left(\langle 1, if' \rangle^2 \langle 1, \xi \rangle + \left\langle 1, \frac{if'^2}{2} \right\rangle \langle i, \xi \rangle \right) \right. \\
&\quad \left. + \ell'^2(\mu) |\xi|^2] + \frac{\ell T^2}{2|g'|^2} [\ell''(\mu) \langle 1, if' \rangle^2 + \ell'(\mu) \langle 1, \xi \rangle] + \ell^2(\mu) \frac{4|g'|^2}{T^2} \right] \\
&= \frac{T^2}{4|g'|^2} [\ell''^2(\mu) \left(\langle 1, if' \rangle^4 + \left\langle 1, \frac{if'^2}{2} \right\rangle^2 \right) + 2\ell''\ell' \left(\langle 1, if' \rangle^2 \langle 1, \xi \rangle + \left\langle 1, \frac{if'^2}{2} \right\rangle \langle i, \xi \rangle \right) \\
&\quad + \ell'^2(\mu) |\xi|^2] + 2\ell [\ell''(\mu) \langle 1, if' \rangle^2 + \ell'(\mu) \langle 1, \xi \rangle] + \frac{4\ell^2(\mu) |g'|^2}{T^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e &= \langle X_1, N_1 \rangle = \langle V_{11}N_1 + V_{12}N_2, N_1 \rangle = V_{11} L_{11} \\
&= \left[\frac{T^2}{4|g'|^2} [\ell''(\mu) \langle 1, f' \rangle^2 - \ell'(\mu) \langle 1, \xi \rangle] + \ell(\mu) \right] \frac{4|g'|^2}{T^2} \\
&= \ell''(\mu) \langle 1, f' \rangle^2 - \ell'(\mu) \langle 1, \xi \rangle + \frac{4\ell(\mu) |g'|^2}{T^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f &= \langle X_1, N_2 \rangle = \langle V_{11}N_1 + V_{12}N_2, N_2 \rangle = V_{12} L_{22} \\
&= \left[\frac{T^2}{4|g'|^2} \left[\ell''(\mu) \left\langle 1, \frac{if'^2}{2} \right\rangle + \ell'(\mu) \langle i, \xi \rangle \right] \right] \frac{4|g'|^2}{T^2} \\
&= \ell''(\mu) \left\langle 1, \frac{if'^2}{2} \right\rangle + \ell'(\mu) \langle i, \xi \rangle,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g &= \langle X_2, N_2 \rangle = \langle V_{21}N_1 + V_{22}N_2, N_2 \rangle = V_{22}L_{22} \\
&= \left[\frac{T^2}{4|g'|^2} [\ell''(\mu)\langle 1, if' \rangle^2 + \ell'(\mu)\langle 1, \xi \rangle] + \ell(\mu) \right] \frac{4|g'|^2}{T^2} \\
&= \ell''(\mu)\langle 1, if' \rangle^2 + \ell'(\mu)\langle 1, \xi \rangle + \frac{4\ell(\mu)|g'|^2}{T^2}.
\end{aligned}$$

Os seguintes exemplos são superfícies-TRG para alguns funções holomorfas f e g com $z = u_1 + iu_2 \in \mathbb{C}$, usando (3-4) temos

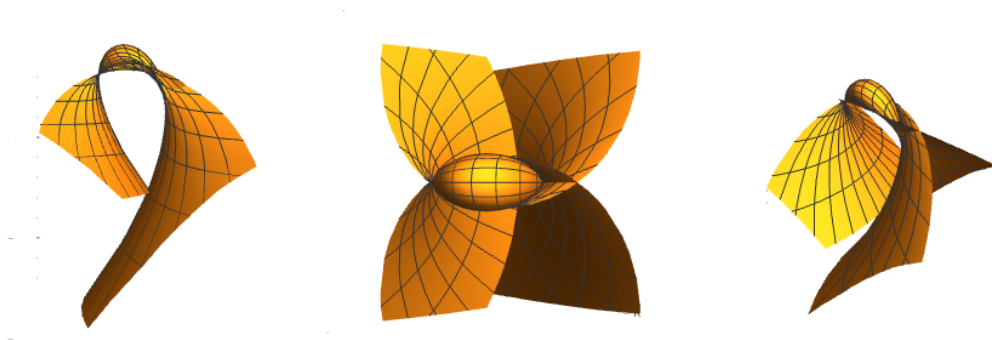


Figura 3.1: $\ell(t) = t^2 + t + 1$, $f(z) = g(z) = z$

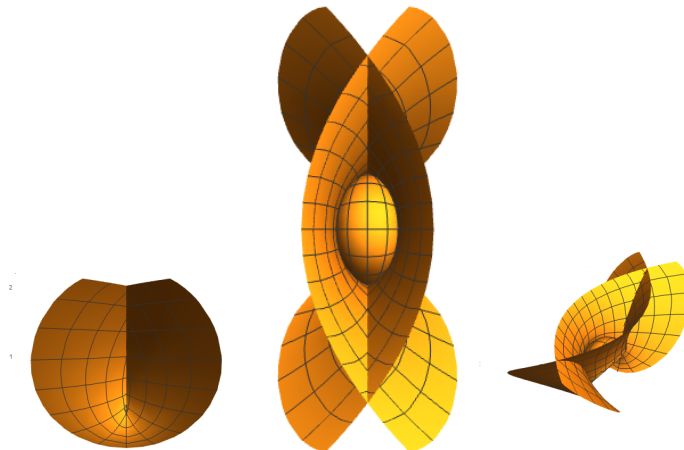


Figura 3.2: $\ell(t) = \cos(t)$, $f(z) = g(z) = z = u_1 + iu_2$

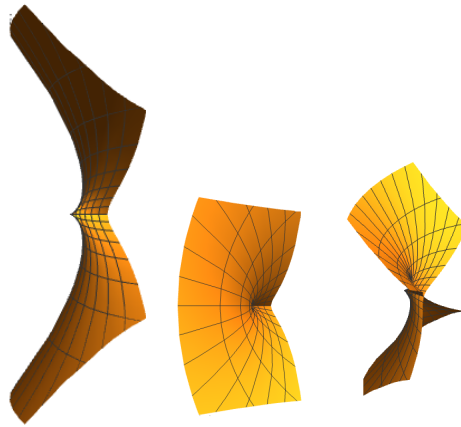


Figura 3.3: $\ell(t) = \sinh(t)$, $f(z) = g(z) = z = u_1 + iu_2$

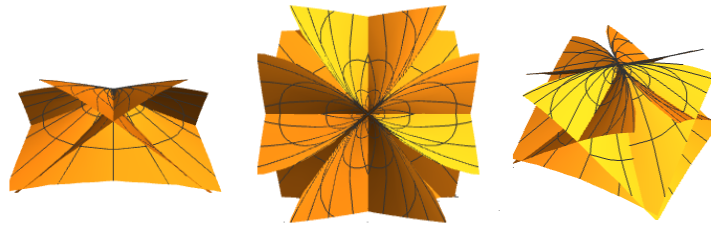


Figura 3.4: $\ell(t) = t^2 + t + 1$, $f(z) = z^2$, $g(z) = z$

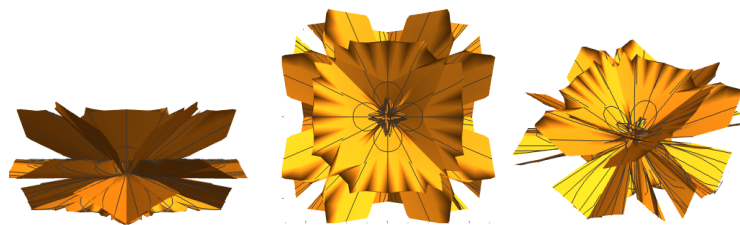


Figura 3.5: $\ell(t) = \cos(t)$, $f(z) = z^2$, $g(z) = z$

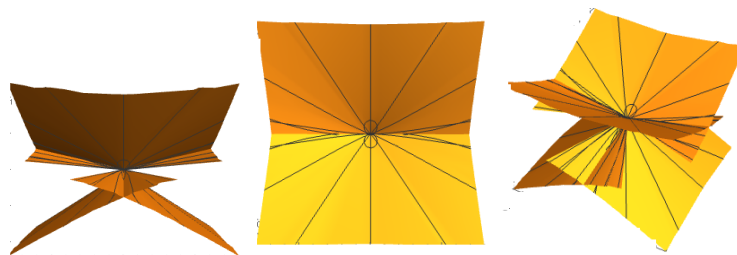


Figura 3.6: $\ell(t) = \sinh(t)$, $f(z) = z^2$, $g(z) = z$

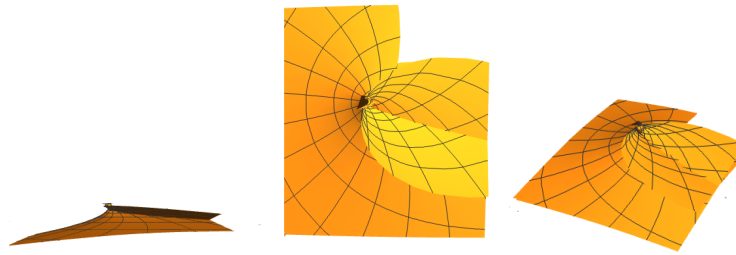


Figura 3.7: $\ell(t) = t^2 + t + 1$, $f(z) = z$, $g(z) = z^2$

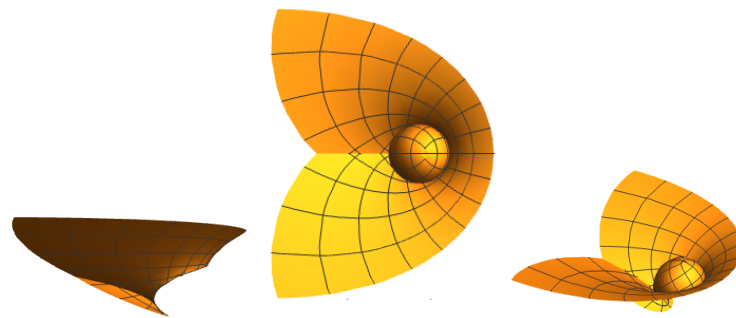


Figura 3.8: $\ell(t) = \cos(t)$, $f(z) = z$, $g(z) = z^2$

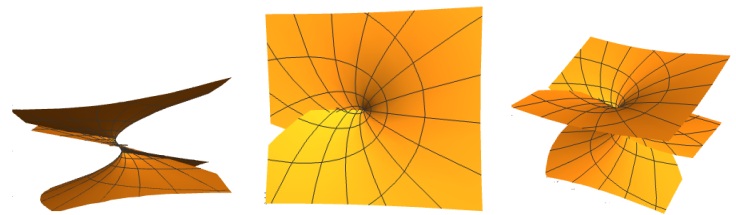


Figura 3.9: $\ell(t) = \sinh(t)$, $f(z) = z$, $g(z) = z^2$

O teorema a seguir classifica as superfícies-TRG de rotação dadas por (3-4).

Teorema 3.5 *Seja Σ uma superfície-TRG dada por (3-4), conexa, onde ℓ uma função real e $\mu = \langle 1, f \rangle$. Então Σ é de rotação se, e somente se, existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$, tais que Σ pode ser localmente parametrizada por*

$$X_{ab}(u_1, u_2) = (M(u_1) \cos(u_2), M(u_1) \sin(u_2), N(u_1)),$$

$$M(u_1) = \frac{1}{1 + e^{2u_1}} \left[\frac{al'(\mu)(e^{-u_1} - e^{3u_1}) + 4\ell(\mu)e^{u_1}}{2} \right]$$

e

$$N(u_1) = \frac{1}{1 + e^{2u_1}} [\ell(\mu)(1 - e^{2u_1}) - al'(\mu)(1 + e^{2u_1})].$$

Prova. Do Teorema 3.4, temos que Σ é localmente parametrizada por

$$X = \frac{\ell'(\mu)}{2|g'|^2} (Tg'\bar{f}' - 2g\langle g', gf' \rangle, -2\langle g', gf' \rangle) + \ell(\mu) \frac{(2g, 2-T)}{T},$$

onde f, g são funções holomorfas, ℓ não é constante e lembrando que $h = \ell(\mu)$, $h_{,2} = \ell'(\mu)\langle 1, if' \rangle = 0$ e $\langle 1, if' \rangle = 0$. As equações de Cauchy-Riemann (1-3) nos garantem que $f(z) = az + z_0$, com $z = u_1 + iu_2, z_0 = b + ic \in \mathbb{C}$, dessa forma, pelo Lema 2.2 temos que Σ é de rotação se, e somente se,

$$g(z) = e^z, \quad h(z) = \ell(au_1 + b),$$

de modo que $f'(z) = a$, $g'(z) = g(z)$ e $T = 1 + e^{2u_1}$. Nestas condições,

$$\begin{aligned} X &= \frac{\ell'(\mu)}{2|g'|^2} (Tg'\bar{f}' - 2g\langle g', gf' \rangle, -2\langle g', gf' \rangle) + \ell(\mu) \frac{(2g, 2-T)}{T} \\ &= \frac{\ell'(\mu)}{2e^{u_1}} ((1 + e^{2u_1})e^z a - 2e^z \langle e^z, e^z a \rangle, -2\langle e^z, e^z a \rangle) + \ell(\mu) \left(\frac{2e^z}{1 + e^{2u_1}}, \frac{1 - e^{2u_1}}{1 + e^{2u_1}} \right) \\ &= \frac{\ell'(\mu)}{2e^{2u_1}} ((a + ae^{2u_1})e^z - 2ae^{2u_1}e^z, -2ae^{2u_1}) + \ell(\mu) \left(\frac{2e^z}{1 + e^{2u_1}}, \frac{1 - e^{2u_1}}{1 + e^{2u_1}} \right) \\ &= \frac{\ell'(\mu)}{2e^{2u_1}} ((a - ae^{2u_1})e^z, -2ae^{2u_1}) + \ell(\mu) \left(\frac{2e^z}{1 + e^{2u_1}}, \frac{1 - e^{2u_1}}{1 + e^{2u_1}} \right) \\ &= \ell'(\mu) \left(\frac{ae^z(e^{-2u_1} - 1)}{2}, -a \right) + \ell(\mu) \left(\frac{2e^z}{1 + e^{2u_1}}, \frac{1 - e^{2u_1}}{1 + e^{2u_1}} \right) \\ &= \left(\frac{\ell'(\mu)ae^z(e^{-2u_1} - 1)}{2}, -\ell'(\mu)a \right) + \left(\frac{2\ell(\mu)e^z}{1 + e^{2u_1}}, \frac{\ell(\mu)(1 - e^{2u_1})}{1 + e^{2u_1}} \right) \\ &= \left(\left(\frac{a\ell'(\mu)(e^{-u_1} - e^{u_1})}{2} + \frac{2\ell(\mu)e^{u_1}}{1 + e^{2u_1}} \right) (\cos(u_2) + i\sin(u_2)), \frac{\ell(\mu)(1 - e^{2u_1})}{1 + e^{2u_1}} - a\ell'(\mu) \right). \end{aligned}$$

Portanto Σ pode ser parametrizada localmente por

$$X_{ab}(u_1, u_2) = (M(u_1) \cos(u_2), M(u_1) \sin(u_2), N(u_1)),$$

$$M(u_1) = \frac{1}{1 + e^{2u_1}} \left[\frac{a\ell'(\mu)(e^{-u_1} - e^{3u_1}) + 4\ell(\mu)e^{u_1}}{2} \right]$$

e

$$N(u_1) = \frac{1}{1 + e^{2u_1}} [\ell(\mu)(1 - e^{2u_1}) - a\ell'(\mu)(1 + e^{2u_1})].$$

□

As seguintes figuras são exemplos de superfícies-TRG de rotação.

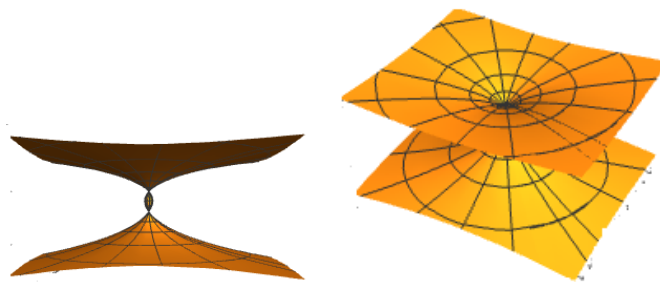


Figura 3.10: $\ell(t) = t^2 + t + 1$, $a = 1$, $b = 0$

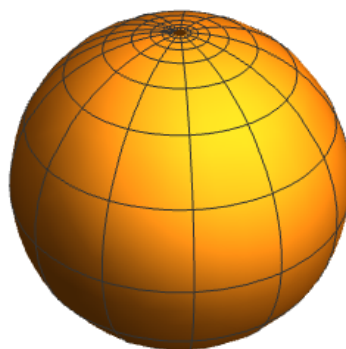


Figura 3.11: $\ell(t) = t^2 + t + 1$, $a = 0$, $b = 1$

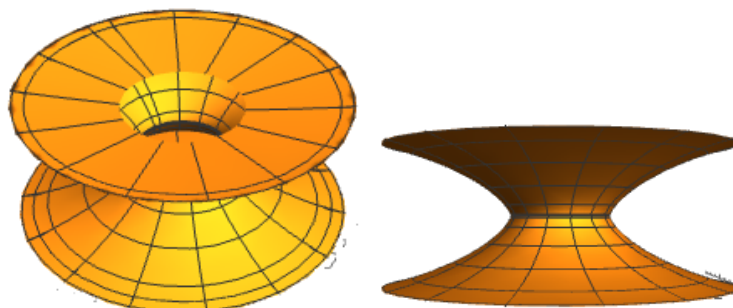


Figura 3.12: $\ell(t) = \cos(t)$, $a = 1$, $b = 0$

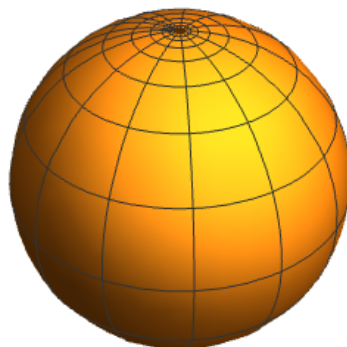


Figura 3.13: $\ell(t) = \cos(t)$, $a = 0$, $b = 1$

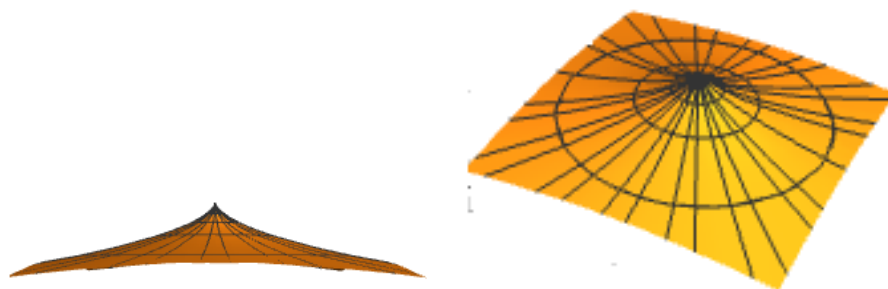


Figura 3.14: $\ell(t) = \sinh(t)$, $a = 1$, $b = 0$

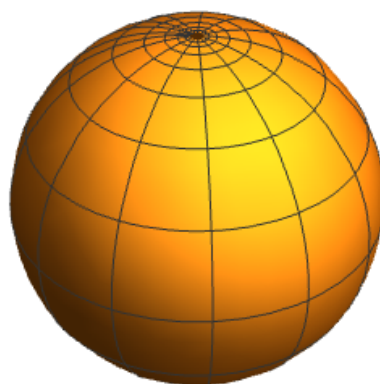


Figura 3.15: $\ell(t) = \sinh(t)$, $a = 0$, $b = 1$

Hipersuperfícies de tipo Ribaucour

Neste capítulo generalizaremos o conceito de superfícies-TR para o caso de hipersuperfícies em \mathbb{R}^{n+1} .

Definição 4.1 Dizemos que uma hipersuperfície orientável $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma **hipersuperfície de tipo Ribaucour** ou por abreviação, uma hipersuperfície-TR, se a curvatura de Gauss-Kronecker $H_n \neq 0$, a $(n-1)$ -ésima curvatura média H_{n-1} , a função suporte ψ e a função distância quadrática Λ satisfazem

$$\frac{H_{n-1}}{H_n} = c \left(\frac{-\Lambda}{n\Psi} + \frac{\Psi}{n} \right) - \Psi,$$

onde c é uma constante.

O enunciado e a prova do seguinte teorema é análogo ao Teorema 2.1.

Teorema 4.2 Seja $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$, uma hipersuperfície com curvatura Gauss-Kronecker não nula. Então existe uma função diferenciável $h : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que a aplicação normal de Gauss é dada por

$$N(u) = \frac{(2u, 1 - |u|^2)}{1 + |u|^2}, \quad u \in U. \quad (4-1)$$

Os coeficientes da III forma fundamental são

$$L_{ij} = \frac{4}{(1 + |u|^2)^2} \delta_{ij}, \quad (4-2)$$

e Σ é localmente parametrizada por

$$X(u) = \sum_{j=1}^n \frac{h(u),_j}{L_{jj}} N(u),_j + h(u)N(u). \quad (4-3)$$

Neste caso, $h(u) = \langle X(u), N(u) \rangle$ é a função suporte. Além disso a matriz de Weingarten é dada por $W = V^{-1}$ onde

$$\det V \neq 0. \quad (4-4)$$

As formas fundamentais I e II de X , em coordenadas locais, são dadas por :

$$I = \langle X_i, X_j \rangle = \sum_{k=1}^n V_{ik} V_{jk} L_{kk},$$

$$II = \langle X_i, N_j \rangle = V_{ij} L_{jj},$$

Além disso,

$$\Delta_L h + nh = \frac{-nH_{n-1}}{H_n} \quad (4-5)$$

e

$$\Lambda = |\nabla_L h|^2 + h^2. \quad (4-6)$$

Teorema 4.3 *Seja Σ uma hipersuperfície orientável em \mathbb{R}^{n+1} parametrizada por (4-3) com curvatura de Gauss-Kronecker $H_n \neq 0$. Então, Σ é hipersuperfície-TR se, e somente se, existe uma função diferenciável $h : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo*

$$h\Delta_L h - c|\nabla_L h|^2 = 0,$$

onde c é uma constante e N é dado por (4-1)

Prova. Usando (4-3), (4-5) e (4-6) temos as seguintes equivalências,

$$\begin{aligned} \Delta_L h + nh &= \frac{-nH_{n-1}}{H_n} \\ \Leftrightarrow h\Delta_L h + nh^2 &= \frac{-nhH_{n-1}}{H_n} \\ \Leftrightarrow h\Delta_L h - c|\nabla_L h|^2 + c|\nabla_L h|^2 + nh^2 &= \frac{-nhH_{n-1}}{H_n} \\ \Leftrightarrow h\Delta_L h - c|\nabla_L h|^2 + c(\Lambda - h^2) + nh^2 &= \frac{-nhH_{n-1}}{H_n} \\ \Leftrightarrow h\Delta_L h - c|\nabla_L h|^2 + c\Lambda + (n-c)h^2 &= \frac{-nhH_{n-1}}{H_n} \\ \Leftrightarrow -\frac{h\Delta_L h - c|\nabla_L h|^2}{nh} - \frac{c\Lambda + (n-c)h^2}{nh} &= \frac{H_{n-1}}{H_n} \\ \Leftrightarrow -\frac{h\Delta_L h - c|\nabla_L h|^2}{nh} + c\left(\frac{-\Lambda}{nh} + \frac{h}{n}\right) - h &= \frac{H_{n-1}}{H_n}, \end{aligned}$$

onde c é uma constante e lembrando que $h = \Psi$. Portanto Σ é uma hipersuperfície-TR se, e somente se,

$$h\Delta_L h - c|\nabla_L h|^2 = 0. \quad (4-7)$$

□

Outra classe importante de soluções da equação (4-7), são as soluções radiais. Estas soluções dão origem à hipersuperfícies-TR de rotação.

Teorema 4.4 *Seja Σ uma hipersuperfície-TR orientável em \mathbb{R}^{n+1} , com curvatura de Gauss-Kronecker K não nula e aplicação normal de Gauss dada por (4-1). Então Σ é de rotação se, e somente se, a função $h : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por uma das formas abaixo:*

1. Se a função h é constante então Σ é uma hiperesfera
2. Se a função h não é constante então

(a) $c = 1$ e n -par

$$h(u) = e^{c_1 \left[\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq \frac{n-2}{2}}}^{n-2} \binom{n-2}{k} \frac{2}{2(k+1)-n} |u|^{2(k+1)-n} + \left(\frac{n-2}{2}\right) \ln(|u|^2) + k_2 \right] + k_5},$$

onde $c_1 = e^{k_4 - k_1}, k_1, k_2, k_4, k_5 \in \mathbb{R}$ e $U = \{u \in \mathbb{R}; u \neq 0\}$.

(b) $c = 1$ e n -ímpar

$$h(u) = e^{c_1 \left[\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} \frac{2}{2(k+1)-n} |u|^{2(k+1)-n} + k_3 \right] + k_5},$$

onde $c_1 = e^{k_4 - k_1}, k_1, k_3, k_4, k_5 \in \mathbb{R}$ e $U = \{u \in \mathbb{R}; u \neq 0\}$.

(c) $c \neq 1$ e n -par

$$h(u) = \left[(1-c) \left(e^{k_4} \left[\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq \frac{n-2}{2}}}^{n-2} \binom{n-2}{k} \frac{2}{2(k+1)-n} |u|^{2(k+1)-n} + \left(\frac{n-2}{2}\right) \ln(|u|^2) + k_2 \right] + k_5 \right) \right]^{\frac{1}{1-c}},$$

onde $k_2, k_4, k_5 \in \mathbb{R}$ e $U = \{u \in \mathbb{R}; u \neq 0\}$

(d) $c \neq 1$ e n -ímpar

$$h(u) = \left[(1-c) \left(e^{k_4} \left[\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} \frac{2}{2(k+1)-n} |u|^{2(k+1)-n} + k_3 \right] + k_5 \right) \right]^{\frac{1}{1-c}},$$

onde $k_3, k_4, k_5 \in \mathbb{R}$ e $U = \{u \in \mathbb{R}; u \neq 0\}$.

Além disso, Σ pode ser parametrizada localmente por

$$X(u) = J'((1-t)u, -2t) + J \frac{(2u, 1-t)}{1+t},$$

com $h(u) = J(t)$, $t = |u|^2$.

Prova. Como Σ é uma hipersuperfície-TR em \mathbb{R}^{n+1} , pelo Teorema 4.3, existe uma função diferenciável h harmônica na métrica L , tal que Σ é localmente parametrizada por (4-3). Dessa forma, pelo Lema 2.2 temos que Σ é de rotação se, e somente se, h é solução radial de

$$h\Delta_L h - c|\nabla_L h|^2 = 0,$$

onde $h(u) = J(t)$, $t = |u|^2$. Logo, podemos escrever o laplaciano de h na métrica L como

$$\Delta_L h = \sum_{j=1}^n \frac{1}{L_{jj}} \left(h_{,jj} - \sum_{k=1}^n h_{,k} \Gamma_{jj}^k \right),$$

onde a métrica L é dada por (4-2), neste caso

$$L_{jj,k} = \frac{16u_k}{(1+|u|^2)^3}.$$

De modo que os símbolos de Christoffel da métrica L são dados por:

$$\Gamma_{jj}^k = \frac{2u_k}{1+|u|^2}, \quad k \neq j,$$

$$\Gamma_{jj}^j = -\frac{2u_j}{1+|u|^2}.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \Delta_L h &= \left(\frac{1+|u|^2}{2} \right)^2 \sum_j \left[h_{,jj} - \left(\frac{2}{1+|u|^2} \right) \sum_{k \neq j} h_{,k} u_k + \left(\frac{2}{1+|u|^2} \right) h_{,j} u_j \right] \\ &= \left(\frac{1+|u|^2}{2} \right)^2 \Delta h - \left(\frac{1+|u|^2}{2} \right) \sum_j \left[\sum_{k \neq j} h_{,k} u_k - h_{,j} u_j \right] \\ &= \left(\frac{1+|u|^2}{2} \right) \Delta h - \left(\frac{1+|u|^2}{2} \right) (n-2) \langle u, \nabla h \rangle \\ &= \left(\frac{1+|u|^2}{2} \right) \left[\left(\frac{1+|u|^2}{2} \right) \Delta h - (n-2) \langle u, \nabla h \rangle \right], \end{aligned}$$

então

$$\Delta_L h = \frac{\Delta h}{L_{11}} - (n-2) \left(\frac{1+|u|^2}{2} \right) \langle u, \nabla h \rangle. \quad (4-8)$$

A expressão para o gradiente de h na métrica L é dada por

$$\begin{aligned}
\nabla_L h &= \sum_{j=1}^n \frac{h_{,j}}{L_{jj}} N_{,j} \\
&= \sum_{j=1}^n u_j J' [-2u_j(u, 1) + (1 + |u|^2)e_j] \\
&= -2J'(u, 1) \sum_{j=1}^n u_j^2 + J'(1 + |u|^2) \sum_{j=1}^n u_j e_j \\
&= -2|u|^2 J'(u, 1) + (1 + |u|^2) J'(u, 0),
\end{aligned}$$

então

$$\nabla_L h = J'((1 - |u|^2)u, -2|u|^2). \quad (4-9)$$

Usando as expressões (4-8), (4-9) e

$$h_i = 2u_i J', \quad h_{,ii} = 4u_i^2 J'' + 2J', \quad 1 \leq i \leq n,$$

obtemos

$$\Delta_L h = \frac{(1+t)}{2} [J''(1+t)2t + J'(n + (4-n)t)]$$

e

$$|\nabla_L h|^2 = (J')^2(1+t)^2 t.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
h\Delta_L h - c|\nabla_L h|^2 &= \frac{(1+t)}{2} [J''J(1+t)2t + J'J(n + (4-n)t)] - c(J')^2(1+t)^2 t \\
&= \frac{(1+t)}{2} [J''J(1+t)2t + J'J(n + (4-n)t) - 2c(J')^2 t(1+t)].
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\frac{(1+t)}{2} [J''J(1+t)2t + J'J(n + (4-n)t) - 2c(J')^2 t(1+t)] &= 0 \\
\Leftrightarrow J''J(1+t)2t + J'J(n + (4-n)t) - 2c(J')^2 t(1+t) &= 0.
\end{aligned}$$

Fazendo $a = 2t(1+t)$ e $b = (n + (4-n)t)$, temos que

$$aJ''J + bJ'J - ac(J')^2 = 0 \Leftrightarrow J''J - c(J')^2 + dJ'J = 0$$

onde $d = \frac{b}{a} = \frac{(n+(4-n)t)}{2t(1+t)}$

- $J = \ell(f)$
- $J' = \ell' f'$
- $J'' = \ell'' f'^2 + \ell' f''$.

Logo,

$$\begin{aligned} J''J - c(J')^2 + dJ'J &= 0, \\ \Rightarrow (\ell''f'^2 + \ell'f'')\ell(f) - c(\ell'f')^2 + d\ell'f'\ell(f) &= 0, \\ \Rightarrow f'^2[\ell\ell'' - c\ell'^2] + \ell\ell'[f'' + df'] &= 0. \end{aligned}$$

- Se $\ell\ell'' - c\ell'^2 = 0$ então $f'' + df' = 0 \Leftrightarrow (\ln(f'))' = -d$

$$\ln(f') = - \int d dt \Rightarrow f' = e^{(-\int d dt)}$$

Como $d = \frac{(n+(4-n)t)}{2t(1+t)}$ então

$$\int \frac{(n+(4-n)t)}{2t(1+t)} dt = (2-n)\ln(t+1) + \frac{n}{2}\ln(t) + k_1$$

com $k_1 \in \mathbb{R}$, isso implica que

$$f' = e^{(n-2)\ln(t+1) - \frac{n}{2}\ln(t) - K_1} = t^{-\frac{n}{2}}(t+1)^{n-2}e^{-k_1}.$$

$$\Rightarrow f = e^{-k_1} \int t^{-\frac{n}{2}}(t+1)^{n-2} dt.$$

Para $n \geq 3$, fazendo $N = n - 2$ e usando binômio de Newton temos

$$\begin{aligned} f &= e^{-k_1} \int t^{-\frac{N+2}{2}}(t+1)^N dt = e^{-k_1} \left[\int \sum_{k=0}^N t^k \binom{N}{k} t^{-\frac{N+2}{2}} dt \right] \\ &= e^{-k_1} \left[\sum_{k=0}^N \binom{N}{k} \int t^{\frac{2k-(N+2)}{2}} dt \right] \end{aligned}$$

Para N -par (n -par) e $k = \frac{N}{2}$, temos

$$\begin{aligned} f &= e^{-k_1} \left[\sum_{k \neq \frac{N}{2}} \binom{N}{k} \int t^{\frac{2k-(N+2)}{2}} dt + \binom{N}{\frac{N}{2}} \int t^{-1} dt \right], \\ &= e^{-k_1} \left[\sum_{k \neq \frac{N}{2}} \binom{N}{k} \frac{2}{2k-N} t^{\frac{2k-N}{2}} + \binom{N}{\frac{N}{2}} \ln(t) + k_2 \right]. \end{aligned}$$

Para N -ímpar (n -ímpar)

$$f = e^{-k_1} \left[\sum_{k=0}^N \binom{N}{k} \frac{2}{2k-N} t^{\frac{2k-N}{2}} + k_3 \right],$$

onde $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$

Substituindo $N = n - 2$ e $t = |u|^2$ para n -par temos

$$f = e^{-k_1} \left[\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq \frac{n-2}{2}}}^{n-2} \binom{n-2}{k} \frac{2}{2(k+1)-n} |u|^{2(k+1)-n} + \binom{n-2}{\frac{n-2}{2}} \ln(|u|^2) + k_2 \right].$$

Para N -ímpar (n -ímpar)

$$f = e^{-k_1} \left[\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} \frac{2}{2(k+1)-n} |u|^{2(k+1)-n} + k_3 \right],$$

onde $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ assim,

$$f'^2[\ell\ell'' - c\ell'^2] + \ell\ell'[f'' + df'] = 0.$$

- Se $f'' + df' = 0$ então $\ell\ell'' - c\ell'^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} \frac{\ell''}{\ell'} - c\frac{\ell'}{\ell} = 0 &\Leftrightarrow (\ln(\ell'))' - c(\ln(\ell))' = 0 \\ &\Leftrightarrow \ln(\ell') - c\ln(\ell) = k_4 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{\ell'}{\ell^c}\right) = k_4 \\ &\Leftrightarrow \frac{\ell'}{\ell^c} = e^{k_4}. \end{aligned}$$

Vamos considerar dois casos para $\frac{\ell'}{\ell^c} = e^{k_4}$, $k_4, k_5 \in \mathbb{R}$

- Caso $c = 1$, assim temos

$$\begin{aligned} \frac{\ell'}{\ell} = e^{k_4} &\Leftrightarrow (\ln(\ell))' = e^{k_4} \\ &\Leftrightarrow \ln(\ell) = e^{k_4}t + k_5 \Leftrightarrow \ell = e^{e^{k_4}t + k_5} \end{aligned}$$

- Caso $c \neq 1$, assim temos

$$\begin{aligned} \frac{\ell'}{\ell^c} = e^{k_4} &\Leftrightarrow \left(\frac{\ell^{1-c}}{1-c}\right)' = e^{k_4} \\ &\Leftrightarrow \frac{\ell^{1-c}}{1-c} = e^{k_4}t + k_5 \Leftrightarrow \ell^{1-c} = (1-c)(e^{k_4}t + k_5) \\ &\Leftrightarrow \ell = [(1-c)(e^{k_4}t + k_5)]^{\frac{1}{1-c}}. \end{aligned}$$

Assim obtemos ℓ e f para os diferentes casos e lembramos que $h(u) = J(t)$, onde $t = |u|^2$ e $J = (\ell(f))$, segue o resultado. \square

Observação 4.1 *Do teorema anterior temos que uma hipersuperfície-TR de rotação é localmente parametrizada por*

$$X(u) = (p(t)u, q(t))$$

Onde p e q são funções reais de $t = |u|^2$. De modo que a curva geratriz de X pode ser dada por $\alpha(t) = (p(t)t^{1/2}, q(t))$.

A seguir, apresentamos o caso em que $n = 3$ e, sob análise para vários valores das constantes, fornecemos o comportamento geral das curvas geratrizes das hipersuperfícies de rotação nesta dimensão.

Exemplo 4.1 *Para h não constante e $n = 3$ consideramos os casos 2(b) e 2(d) do Teorema anterior, logo temos:*

- Caso $c = 1$ e $n = 3$,

$$\begin{aligned} h(u) &= e^{c_1 \left[\sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} \frac{2}{2(k+1)-3} |u|^{2(k+1)-3} + k_3 \right] + k_5} \\ &= e^{c_1 \left[\frac{-2}{|u|} + 2|u| + k_3 \right] + k_5} \\ &= e^{\frac{c_1}{|u|} [-2 + 2|u|^2 + k_3|u|] + k_5} \\ &= e^{\frac{c_1}{|u|} [2(|u|^2 - 1) + k_3|u|] + k_5}. \end{aligned}$$

De modo que,

$$\begin{aligned} h_{,j} &= c_1 \left[\frac{(4u_j + k_3 u_j |u|^{-1})|u| - (2(|u|^2 - 1) + k_3|u|)u_j |u|^{-1}}{|u|^2} \right] h(u) \\ &= c_1 \left[\frac{4|u|^2 - 2(|u|^2 - 1)}{|u|^3} \right] u_j h(u) \\ &= 2c_1 \left[\frac{1 + |u|^2}{|u|^3} \right] u_j h(u). \end{aligned}$$

Lembrando nossa aplicação de Gauss dada por $N = \frac{1}{1+|u|^2} (2u, 1 - |u|^2)$, $u \in U \subset \mathbb{R}$. Assim, obtemos

$$N_{,j} = \frac{2}{(1 + |u|^2)^2} [-2u_j(u, 1) + (1 + |u|^2)e_j].$$

Aqui, $e_j, 1 \leq j \leq 4$, é j -ésimo vetor canônico de \mathbb{R}^4 . Além disso,

$$\begin{aligned}
\nabla_L h &= \sum_{j=1}^3 \frac{h_{,j}}{L_{jj}} N_{,j} \\
&= \sum_{j=1}^3 \left[2c_1 \frac{(1+|u|^2)}{|u|^3} u_j h(u) \cdot \frac{(1+|u|^2)^2}{4} \cdot \frac{2}{(1+|u|^2)^2} [-2u_j(u, 1) + (1+|u|^2)e_j] \right] \\
&= \left[-2c_1 h \frac{(1+|u|^2)}{|u|^3} (u, 1) \right] \sum_{j=1}^3 u_j^2 + \left[c_1 h \frac{(1+|u|^2)^2}{|u|^3} \right] \sum_{j=1}^3 u_j e_j \\
&= -2c_1 h \frac{(1+|u|^2)}{|u|} (u, 1) + c_1 h \frac{(1+|u|^2)^2}{|u|^3} (u, 0) \\
&= c_1 h \frac{(1+|u|^2)}{|u|^3} [(-2u|u|^2, -2|u|^2) + ((1+|u|^2)u, 0)] \\
&= c_1 h \frac{(1+|u|^2)}{|u|^3} [(u+u|u|^2-2|u|^2, -2|u|^2)] \\
&= c_1 h \frac{(1+|u|^2)}{|u|^3} (u(1-|u|^2), -2|u|^2).
\end{aligned}$$

A partir dessas expressões, podemos reescrever $X(u) = \nabla_L h + hN$. Assim,

$$\begin{aligned}
X(u) &= c_1 h \frac{(1+|u|^2)}{|u|^3} (u(1-|u|^2), -2|u|^2) + h \frac{1}{1+|u|^2} (2u, 1-|u|^2) \\
&= \left[e^{\frac{c_1}{|u|} [2(|u|^2-1)+k_3|u|]+k_5} \right] \cdot \left(c_1 \frac{(1+|u|^2)}{|u|^3} (u(1-|u|^2), -2|u|^2) + \frac{1}{1+|u|^2} (2u, 1-|u|^2) \right) \\
&= \left[e^{\frac{c_1}{|u|} [2(|u|^2-1)+k_3|u|]+k_5} \right] \cdot \left(\frac{(c_1+c_1|u|^2)(u-u|u|^2)}{|u|^3}, \frac{(c_1+c_1|u|^2)(-2|u|^2)}{|u|^3} \right) \\
&\quad + \left(\frac{2u}{1+|u|^2}, \frac{1-|u|^2}{1+|u|^2} \right) \\
&= \left[e^{\frac{c_1}{|u|} [2(|u|^2-1)+k_3|u|]+k_5} \right] \cdot \left(\frac{c_1 u + c_1 u|u|^2 + c_1 u|u|^2 - c_1 u|u|^4}{|u|^3}, \frac{-2c_1|u|^2 - 2c_1|u|^4}{|u|^3} \right) \\
&\quad + \left(\frac{2u}{1+|u|^2}, \frac{1-|u|^2}{1+|u|^2} \right) \\
&= \left[e^{\frac{c_1}{|u|} [2(|u|^2-1)+k_3|u|]+k_5} \right] \cdot \left(\frac{c_1 u - c_1 u|u|^4}{|u|^3} + \frac{2u}{1+|u|^2}, \frac{-2c_1|u|^2 - 2c_1|u|^4}{|u|^3} + \frac{1-|u|^2}{1+|u|^2} \right) \\
&= \left[e^{\frac{c_1}{|u|} [2(|u|^2-1)+k_3|u|]+k_5} \right] \cdot \\
&\quad \left(\frac{c_1 u - c_1 u|u|^4 + c_1 u|u|^2 - c_1 u|u|^6 + 2u|u|^3}{|u|^3 + |u|^5}, \frac{-2c_1|u|^2 - 2c_1|u|^4 - 2c_1|u|^4 - 2c_1|u|^6 + |u|^3 - |u|^5}{|u|^3 + |u|^5} \right) \\
&= \left[\frac{e^{\frac{c_1}{|u|} [2(|u|^2-1)+k_3|u|]+k_5}}{|u|^3 + |u|^5} \right] \cdot \\
&\quad (c_1 u + c_1 u|u|^2 + 2u|u|^3 - c_1 u|u|^4 - c_1 u|u|^6, -2c_1|u|^2 + |u|^3 - 4c_1|u|^4 - |u|^5 - 2c_1|u|^6)
\end{aligned}$$

De acordo com a Observação 4.1, a curva geratriz de X , quando $n = 3$, é dada por

$$\alpha(t) = (p(t)t^{1/2}, q(t)).$$

Portanto,

$$p(t) = \left[\frac{e^{\frac{k_4 - k_1}{t^{1/2}} [2(t-1) + k_3 t^{1/2}] + k_5}}{t^{3/2} + t^{5/2}} \right] [c_1 + c_1 t + 2t^{3/2} - c_1 t^2 - c_1 t^3]$$

e

$$q(t) = \left[\frac{e^{\frac{k_4 - k_1}{t^{1/2}} [2(t-1) + k_3 t^{1/2}] + k_5}}{t^{3/2} + t^{5/2}} \right] [-2c_1 t + t^{3/2} - 4c_1 t^2 - t^{5/2} - 2c_1 t^3]$$

O comportamento geral das curvas geratrizes para hipersuperfícies-TR, quando $n = 3$, é dado por

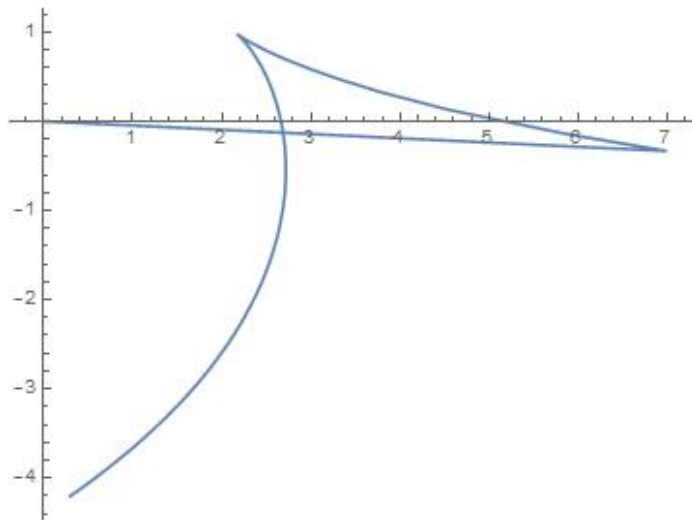


Figura 4.1: $k_1 = -2, k_3 = 0, k_4 = k_5 = 1$

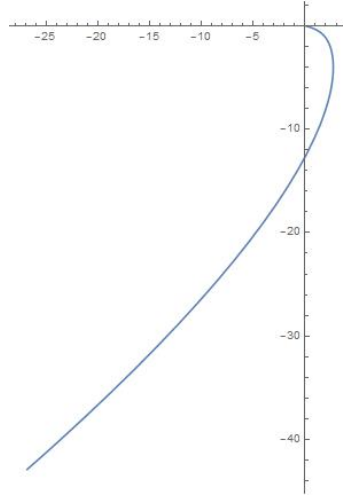


Figura 4.2: $k_1 = 0 = k_3 = 0, k_4 = k_5 = 1$

- Caso $c \neq 1$ e $n = 3$,

$$\begin{aligned}
 h(u) &= [(1-c)(c_1 \left[\sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} \frac{2}{2(k+1)-3} |u|^{2(k+1)-3} + k_3 \right] + k_5)]^{1/(1-c)} \\
 &= [(1-c)(c_1 \left[\frac{-2}{|u|} + 2|u| + k_3 \right] + k_5)]^{1/(1-c)} \\
 &= [(1-c) \left(\frac{c_1}{|u|} [-2 + 2|u|^2 + k_3|u|] + k_5 \right)]^{1/(1-c)} \\
 &= [(1-c) \left(\frac{c_1}{|u|} [2(|u|^2 - 1) + k_3|u|] + k_5 \right)]^{1/(1-c)}
 \end{aligned}$$

De modo que,

$$h_{,j} = 2c_1 \left[\frac{1 + |u|^2}{|u|^3} \right] u_j h^c.$$

Com nossa aplicação de Gauss dada por $N = \frac{1}{1+|u|^2} (2u, 1 - |u|^2)$, $u \in U \subset \mathbb{R}$, obtemos

$$N_{,j} = \frac{2}{(1 + |u|^2)^2} [-2u_j(u, 1) + (1 + |u|^2)e_j],$$

Onde $e_j, 1 \leq j \leq 4$, é j -ésimo vetor canônico de \mathbb{R}^4 . Mais ainda,

$$\begin{aligned}
 \nabla_L h &= \sum_{j=1}^3 \frac{h_{,j}}{L_{jj}} N_{,j} \\
 &= c_1 h^c \frac{(1 + |u|^2)}{|u|^3} (u(1 - |u|^2), -2|u|^2).
 \end{aligned}$$

A partir dessas expressões, podemos reescrever $X(u) = \nabla_L h + hN$. Assim,

$$\begin{aligned} X(u) &= \left(\left[\frac{h}{t^{3/2} + t^{5/2}} \right] [c_1 h^{c-1} + c_1 h^{c-1} t + 2t^{3/2} - c_1 h^{c-1} t^2 - c_1 h^{c-1} t^3] \cdot u, \right. \\ &\quad \left. \left[\frac{h}{t^{3/2} + t^{5/2}} \right] [-2c_1 h^{c-1} t + t^{3/2} - 4c_1 h^{c-1} t^2 - t^{5/2} - 2c_1 h^{c-1} t^3] \right) \\ &= (p(t)u, q(t)). \end{aligned}$$

De acordo com a Observação 4.1, a curva geratriz de X , quando $n = 3$, com $h = [(1-c)(\frac{e^{k_1-k_4}}{t^{1/2}} [2(t-1) + k_3 t^{1/2}] + k_5)]^{1/(1-c)}$ é dada por

$$\alpha(t) = (p(t)t^{1/2}, q(t)).$$

Portanto,

$$p(t) = \left[\frac{h}{t^{3/2} + t^{5/2}} \right] [c_1 h^{c-1} + c_1 h^{c-1} t + 2t^{3/2} - c_1 h^{c-1} t^2 - c_1 h^{c-1} t^3]$$

e

$$q(t) = \left[\frac{h}{t^{3/2} + t^{5/2}} \right] [-2c_1 h^{c-1} t + t^{3/2} - 4c_1 h^{c-1} t^2 - t^{5/2} - 2c_1 h^{c-1} t^3]$$

O comportamento geral das curvas geratrizes para hipersuperfícies-TR, quando $n = 3$, é dado por:

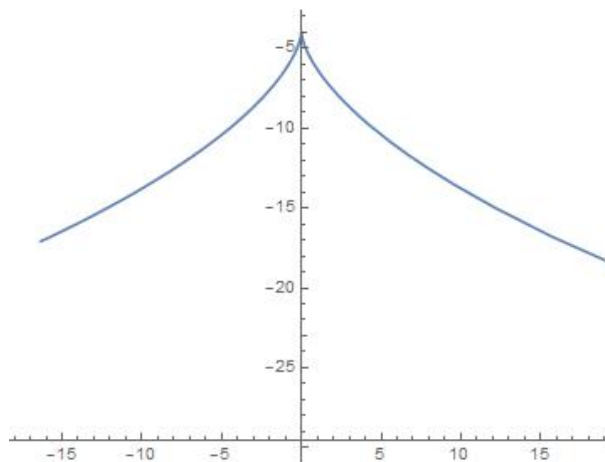


Figura 4.3: $k_1 = k_3 = k_4 = k_5 = c = 0$

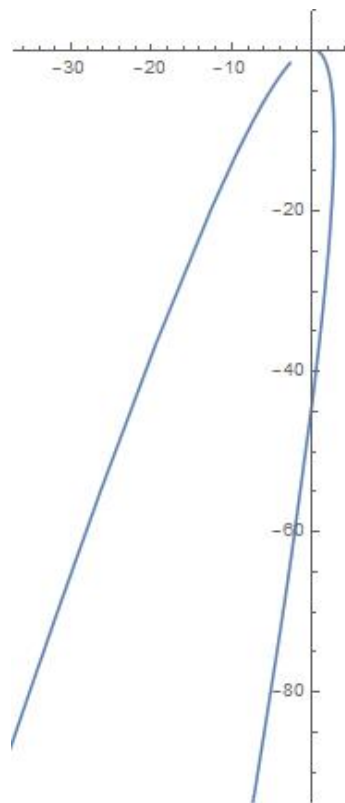


Figura 4.4: $k_1 = k_3 = -1, k_4 = k_5 = 0, c = 2$

Referências Bibliográficas

- [1] AHLFORS, L. V. **Complex Analysis**. McGraw-Hill Book Company, 1979.
- [2] APPELL, P. **Surfaces telles que l'origine se projette sur chaque normale au milieu des centres de courbure principaux**. *Amer. J. Math.*, 10(2):175–186, 1888.
- [3] BIANCHI, L. **Lezioni di geometria differenziale - terza edizione**. Nicola Zanichelli Editore, 1927.
- [4] BRYANT, R. L. **Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space**. *Astérisque.*, 12:286–316, 1987.
- [5] CORRO, A. V. **Generalized Weingarten surfaces of Bryant type in hyperbolic 3-space**. *Mat. Contemp.*, 30:71–89, 2006.
- [6] CORRO, A. V.; RIVEROS, C. **Surfaces with constant Chebyshev angle II**. *TOKYO J. MATH*, 35(2):359–366, 2012.
- [7] CORRO, A. V.; RIVEROS, C.; DIAS, D. **A class of generalized special Weingarten surfaces**. *International Journal of Mathematics*, 30:1950–1975, 2019.
- [8] CORRO, A. V.; TENEBLAT, K. **Ribacuor transformarions revisited**. *Comm. Anal. Geom.*, 12:1055–1082, 2004.
- [9] DIAS, D. G. **Classes de Hipersuperfícies Weingarten Generalizada no espaço Euclidiano**. PhD thesis, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2014.
- [10] DO CARMO, M. P. **Geometria Riemanniana**. IMPA, Rio de Janeiro, 2003.
- [11] FERREIRA, W.; ROITMAN, P. **Area preserving transformations in two-dimensional space forms and classical differential geometry**. *Israel J. Mat.*, 190:325–348, 2012.
- [12] GÁLVEZ, J. A.; MARTÍNEZ, A.; MILÁN, F. **Complete linear Weingarten surfaces of Bryant type. a plateau problem at infinity**. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 356:3405–3428, 2004.

- [13] LINS NETO, A. **Funções de uma variável complexa**. IMPA, Rio de Janeiro, 2016.
- [14] MARTINEZ, A.; ROITMAN, P. **A class of surfaces related to a problem posed by Élie Cartan**. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 195(2):513–527, 2016.
- [15] PEREIRA, L. R. **Uma classe de Hipersuperfícies Weingarten Generalizada Associadas a Esfera**. PhD thesis, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2019.
- [16] SCHIEF, W. K. **On Laplace-Darboux-type sequences of generalized Weingarten surfaces**. *J. Math. Phys.*, 41(9):6566–6599, 2000.
- [17] TZITZÉICA, G. **Sur une nouvelle classe de surfaces**. *C.R. Acad. Sci. Paris.*, 144:1257–1259, 1907.