

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DANILLO FLUGGE DE SOUZA

**Superfícies Helicoidais no Espaço
Euclidiano e de Minkowski**

Goiânia
2012

DANILLO FLUGGE DE SOUZA

Superfícies Helicoidais no Espaço Euclidiano e de Minkowski

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria.

Orientador: Prof. Dr. Romildo da Silva Pina

Goiânia
2012

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Souza, Danilo Flugge.

Superfícies Helicoidais no espaço Euclidiano e de Minkowski
[manuscrito] / Danilo Flugge de Souza. – 2012.

xv, 76 f. : il., figs, tabs.

Orientador: Prof. Dr. Romildo da Silva Pina.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás,
Instituto de Matemática e Estatística, 2012.

Bibliografia.

1. Superfícies helicoidais. 2. Espaço Euclidiano. 3. Espaço
Minkowski. I. Título.

CDU: 514.752

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

Danillo Flugge de Souza

Graduou-se em Matemática na UEG - Universidade Estadual de Goiás. Durante sua graduação, ministrou aulas para o ensino médio. Especialista em Matemática Pura pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás.

Dedico este trabalho à todos que diretamente ou indiretamente contribuíram pra confecção e conclusão deste trabalho. Para todos que utilizarão, utilizaram ou utilizam esta dissertação como fonte de pesquisa.

Agradecimentos

À Deus, pois à Ele seja dada toda Glória e Louvor. À Ieshua Ha Mashiah, meu Fiel Amigo sempre presente em minha vida. Àos meus pais. Ào meu orientador prof. Romildo da Silva Pina, pela enorme paciência e amizade. Àos meus colegas de mestrado. Àqueles que direta ou indiretamente contribuíram pela conclusão deste trabalho, ào prof. Levi Adriano, pela formação acadêmica na área de Geometria. E em especial, à minha querida e amada Flávia Cristina, a qual contribuiu bastante pela confecção deste trabalho.

"Do fruto da boca de cada um se fartará o seu ventre; dos renvos dos seus lábios se fartará. A morte e a vida estão no poder da língua; e aquele que a ama comerá do seu fruto."

Provérbios 18:20,21.

Resumo

Flugge de Souza, Danillo. **Superfícies Helicoidais no Espaço Euclidiano e de Minkowski**. Goiânia, 2012. 78p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Neste trabalho, baseado nos artigos [2] e [6] estudamos superfícies helicoidais no Espaço Euclidiano e no Espaço de Minkowski \mathbb{R}_1^3 com curvatura média ou Gaussiana dada por funções diferenciáveis. No Espaço de Minkowski \mathbb{R}_1^3 , consideramos três tipos especiais de superfícies helicoidais, correspondendo aos eixos de revolução space-like, time-like ou light-like e apresentamos alguns significados geométricos de superfícies helicoidais do tipo space-like. Também definimos superfícies (tubulares) solenóides em torno de uma hélice hiperbólica em \mathbb{R}_1^3 e estudamos algumas de suas propriedades geométricas.

Palavras-chave

Espaço de Minkowski \mathbb{R}_1^3 , Movimento helicoidal, Superfícies helicoidais.

Abstract

Flugge de Souza, Danillo. **Helicoidal surfaces in Euclidean space and Minkowski space**. Goiânia, 2012. 78p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

In this work, based in [2] and [6] we studies helicoidal surfaces of the Euclidean space and Minkowski space \mathbb{R}_1^3 with prescribed Gaussian or mean curvature given by smooth functions. In the Minkowski space we consider three especial kinds of helicoidal surfaces, corresponding to the space-like, time-like or light-like axes of revolution and show some geometric meanings of the helicoidal surfaces of the space-like type. We also define certain solinoid (tubular) surfaces around a hyperbolic helix in \mathbb{R}_1^3 and we study some of their geometric properties.

Keywords

Minkowski space \mathbb{R}_1^3 , Helicoidal motion, Helicoidal surfaces.

Introdução

Problemas de classificação de variedades em Geometria Diferencial são muito comuns e nem sempre triviais.

Por exemplo, Delaunay [4], por volta de 1841, classificou todas as superfícies de revolução com curvatura média constante e ainda deu um método geométrico para construí-las. 140 anos depois Kenmotsu [11] apresentou o seguinte: dada uma função $H(u)$ contínua, ele construiu uma família a três parâmetros de superfícies de revolução que admitia esta função como curvatura média. No entanto, este resultado é apenas local, uma vez que resultados globais não são simples de obter.

Como uma superfície helicoidal generaliza o conceito de superfície de revolução, em 1982, Do Carmo e Dajczer [14] estudaram as superfícies helicoidais em \mathbb{R}^3 com curvatura média constante. Em 1998, Baikoussis e Koufogiorgos [6] consideraram o mesmo problema para o caso onde as curvaturas média e Gaussiana são funções diferenciáveis quaisquer. Neste trabalho, eles mostraram que dadas funções $K(u)$ (respectivamente $H(u)$), existe uma família de superfícies helicoidais com curvatura Gaussiana dada por $K(u)$ (respectivamente curvatura média dada por $H(u)$). C. Beneki, G. Kaimakamis, B. Papantoniou [1], em 1998, consideraram uma superfície contida em um espaço não-euclidiano, isto é, munido de um produto interno não positivo definido e sim por uma forma bilinear simétrica semi-definida, a saber o espaço euclidiano \mathbb{R}^3 , dotado com a forma $\langle x, x \rangle = -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, onde $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Este espaço é conhecido como o espaço de Minkowski \mathbb{R}_1^3 . Eles deram uma classificação para as superfícies de revolução em \mathbb{R}_1^3 com curvaturas média e Gaussiana constante. Em 2002, os mesmos autores C. Beneki, G. Kaimakamis, B. Papantoniou [2] generalizaram o trabalho anterior, estudando superfícies helicoidais em \mathbb{R}_1^3 com curvaturas média ou Gaussiana dadas por funções diferenciáveis quaisquer.

No capítulo 1 enunciaremos alguns tópicos preliminares. Definimos curvas em \mathbb{R}^3 , superfícies regulares e enunciamos um resultado importante, conhecido como mudança de parâmetros. Relembramos o conceito orientação de uma superfície regular, o qual está ligado a existência de um campo diferenciável de vetores normais globalmente definido sobre a superfície. Definimos curvatura média e curvatura Gaussiana, explicitamos estas em coordenadas locais, isto é, em termos da primeira e segunda formas

fundamentais. Ainda neste capítulo definimos formas bilineares simétricas, grupos semi-ortogonais e o espaço de Minkowski \mathbb{R}_1^3 , que estará presente principalmente no capítulo 3.

No capítulo 2, definimos curva helicoidal e superfície helicoidal em \mathbb{R}^3 . Neste capítulo estamos interessados em determinar superfícies com curvaturas média ou Gaussiana dada. Isto é, resolvemos o seguinte problema: dada uma função real C^2 , definida num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, será que existe uma superfície helicoidal em \mathbb{R}^3 com curvaturas média ou Gaussiana dada justamente por esta função? Resolver este problema, consiste em resolvermos equações diferenciáveis ordinárias de segunda ordem não-linear.

No capítulo 3, definimos superfícies helicoidais no espaço de Minkowski \mathbb{R}_1^3 , que podem ser obtidas através de um movimento helicoidal $g_t : \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ ou através de uma transformação linear $A : \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ que fixa um vetor x numa dada direção ξ .

Como no capítulo 2, estamos interessados em resolver o problema de determinar se existe uma superfície helicoidal com curvatura média ou Gaussiana dada por uma função C^2 , só que agora no espaço de Minkowski. Isto é, como a métrica do espaço ambiente não é positiva definida vamos considerar superfícies helicoidais em torno de eixos space-like ou time-like (eixos onde a forma bilinear simétrica assume valores positivos ou negativos, respectivamente), e na direção de um eixo light-like (eixo onde a forma bilinear simétrica é nula). Finalmente provamos dois resultados interessantes para o helicóide e o catenóide. Mostraremos que a curvatura Gaussiana é auto-valor do operador laplaciano destas duas superfícies.

Sumário

1	Preliminares	11
1.1	Curvas Regulares	11
1.2	Formas Bilineares Simétricas	16
1.3	Espaço de Minkowski	18
1.4	Grupos Semi-ortogonais	19
2	Superfícies Helicoidais com Curvatura Média ou Gaussiana Dada no Espaço Euclidiano	23
2.1	Resultados Principais	24
3	Superfícies Helicoidais no Espaço de Minkowski	29
3.1	Definição e Parametrização de Superfícies Helicoidais em \mathbb{R}_1^3	29
3.2	Movimentos helicoidais em torno de um eixo space-like ou time-like	35
3.3	Movimento Helicoidal em torno do eixo light-like	48
3.4	Superfícies solenóides de tipo I^+ e I^- e algumas propriedades geométricas	58
	Referências Bibliográficas	77

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições e resultados que serão úteis ao longo do trabalho. Muitos dos resultados, que serão utilizados posteriormente, são apresentados de forma superficial, o que não prejudica o entendimento do trabalho. No entanto, os conceitos apresentados aqui podem ser conferidos com mais detalhes em [3].

1.1 Curvas Regulares

Definição 1.1 *Uma curva parametrizada diferenciável é uma aplicação diferenciável $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ de um intervalo aberto $I = (a, b)$ da reta real \mathbb{R} em \mathbb{R}^3 .*

Definição 1.2 *Uma curva diferenciável parametrizada $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ é chamada regular se $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.*

Se o parâmetro s é tal que $\|\gamma'(s)\| = 1$, onde $\gamma'(s) = \frac{d\gamma}{ds}$, então dizemos que a curva r está parametrizada pelo comprimento de arco s , o qual é definido como $s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(t)\| dt$.

Definição 1.3 *Seja $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco $s \in I$. O número $\|\gamma''(s)\| = k(s)$ chama-se curvatura de γ em s .*

Nos pontos onde $k(s) \neq 0$, fica bem definido pela equação $\gamma''(s) = k(s)n(s)$, um vetor unitário $n(s)$ na direção de $\gamma''(s)$. Além disso, $\gamma''(s)$ é normal a $\gamma'(s)$, pois derivando $\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = 1$ obtemos $\langle \gamma''(s), \gamma'(s) \rangle = 0$. Assim $n(s)$ é normal a $\gamma'(s)$ e é chamado o *vetor normal* em s .

No que se segue, nos restringimos às curvas parametrizadas pelo comprimento de arco sem pontos singulares de ordem 1, isto é, $\gamma'(s) \neq 0$. Indicaremos por $t(s) = \gamma'(s)$ o vetor unitário de γ em s . Temos então $t'(s) = k(s)n(s)$.

O vetor unitário $b(s) = t(s) \wedge n(s)$ é normal ao plano determinado por $t(s)$ e $n(s)$ e será chamado *vetor binormal* em s . Como $b(s)$ é unitário, o módulo $\|b'(s)\|$ indica quão rapidamente a curva se afasta, em uma vizinhança de s , do plano determinado por $t(s)$ e $n(s)$ em s . Observemos que $b'(s) = t(s) \wedge n'(s)$, isto é, $b'(s)$ é normal a $t(s)$. Decorre daí

que $b'(s)$ é paralelo a $n(s)$ e podemos escrever $b'(s) = \tau(s)n(s)$ para alguma função $\tau(s)$. Muitos autores escrevem $-\tau(s)$ ao invés de $\tau(s)$. Com isto temos a seguinte relação, as quais são chamadas de equações de Frenet:

$$\begin{cases} t'(s) = k(s)n(s) \\ n'(s) = k(s)t(s) + \tau(s)b(s) \\ b'(s) = \tau(s)n(s), \end{cases} \quad (1-1)$$

Definição 1.4 Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície regular se, para cada $p \in S$, existe uma vizinhança V de $p \in \mathbb{R}^3$ e uma aplicação $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S$ de abertos U de \mathbb{R}^2 em $V \cap S$ tais que

i) \mathbf{x} é diferenciável. Isto significa que se escrevemos

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

$(u, v) \in U$, as funções $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ têm derivadas parciais contínuas de todas as ordens em U .

ii) \mathbf{x} é um homeomorfismo. Como \mathbf{x} é contínua pela primeira condição, isto significa que \mathbf{x} tem inversa $\mathbf{x}^{-1} : V \cap S \rightarrow U$ que é contínua.

iii) (Condição de regularidade) Para todo $q \in U$, a diferencial $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva.

A definição acima merece alguns comentários. Primeiramente, em contraste com o nosso tratamento das curvas na seção anterior, definimos uma superfície como um subconjunto S de \mathbb{R}^3 , e não como uma aplicação. Conseguimos isso cobrindo S com imagens de parametrizações satisfazendo às condições 1, 2 e 3.

A condição 1 é bastante natural se esperamos fazer alguma geometria diferencial sobre S . A injetividade na condição 2 tem como objetivo excluir a possibilidade de auto-interseções em superfícies regulares. Evidentemente isso é necessário se queremos falar, digamos, sobre o plano tangente em um ponto p de S . Finalmente, a condição 3 garante a existência de um plano tangente em todos os pontos de S .

Proposição 1.5 Mudança de Parâmetros Seja $p \in S$, e sejam $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ e $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ duas parametrizações de S , tais que $p \in \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V) = W$. Então a mudança de parâmetros $h = \mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y} : \mathbf{y}^{-1}(W) \rightarrow \mathbf{x}^{-1}(W)$ é um difeomorfismo, ou seja, h é diferenciável e tem uma inversa diferenciável h^{-1} .

Em seguida, definiremos função diferenciável em uma superfície regular.

Definição 1.6 Seja $f : V \subset S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida em um subconjunto aberto V de uma superfície regular S . Então, f é diferenciável em $p \in V$ se, para alguma parametrização $\mathbf{x} : U \rightarrow S$, com $p \in \mathbf{x}(U) \subset V$, a composta $f \circ \mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em $\mathbf{x}^{-1}(p)$.

Entendemos por *vetor tangente* a S , em um ponto $p \in S$, o vetor tangente $\gamma'(0)$ de uma curva parametrizada diferenciável $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$, com $\gamma(0) = p$.

Proposição 1.7 Seja $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ uma parametrização de uma superfície regular S e seja $q \in U$. O subespaço vetorial de dimensão 2, $d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$, coincide com o conjunto de vetores tangentes a S em $\mathbf{x}(q)$.

Pela proposição acima, o plano $d\mathbf{x}_q(\mathbb{R}^2)$, que passa por $\mathbf{x}(q) = p$, não depende da parametrização \mathbf{x} . Este plano será chamado de *plano tangente* a S em p , e será denotado por $T_p S$.

A escolha de uma parametrização \mathbf{x} determina uma base $\{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(q), \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(q)\}$ de $T_p S$, chamada de *base associada* a \mathbf{x} . Convém, às vezes, escrever $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = \mathbf{x}_u$ e $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = \mathbf{x}_v$.

O produto interno natural do $\mathbb{R}^3 \supset S$, induz em cada plano tangente $T_p S$ de uma superfície regular S um produto interno, que indicaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$. Se $w_1, w_2 \in T_p S \subset \mathbb{R}^3$, então $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ é igual ao produto interno de w_1 e w_2 como vetores de \mathbb{R}^3 . A este produto interno, que é uma forma bilinear e simétrica, corresponde uma forma quadrática $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = \|w\|^2 \geq 0. \quad (1-2)$$

Definição 1.8 A forma quadrática I_p em $T_p S$ definida por (1-2), é chamada a *primeira forma fundamental da superfície regular* $S \subset \mathbb{R}^3$ em $p \in S$.

Portanto, a primeira forma fundamental é meramente a expressão de como a superfície S herda o produto interno natural do \mathbb{R}^3 . Geometricamente, a primeira forma fundamental nos possibilita fazer medidas sobre a superfície (comprimentos de curvas, ângulos de vetores tangentes, áreas de regiões), sem fazer menção ao espaço ambiente \mathbb{R}^3 , onde está a superfície.

Vamos agora expressar a primeira forma fundamental na base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ associada a uma parametrização $\mathbf{x}(u, v)$ em p . Como um vetor tangente w é o vetor tangente a uma curva parametrizada $\gamma(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$, onde $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, com $p = \gamma(0) = \mathbf{x}(u_0, v_0)$, obtemos

$$\begin{aligned}
I_p(\gamma'(0)) &= \langle \gamma'(0), \gamma'(0) \rangle_p \\
&= \langle \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v', \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \rangle_p \\
&= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p (u')^2 + 2\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p u'v' + \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p (v')^2 \\
&= E(u')^2 + 2F u'v' + G(v')^2,
\end{aligned}$$

onde os valores das funções envolvidas são calculados em $t = 0$, e

$$E(u_0, v_0) = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p,$$

$$F(u_0, v_0) = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p,$$

$$G(u_0, v_0) = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p$$

são os coeficientes da primeira forma fundamental na base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ de $T_p S$. Fazendo p variar na vizinhança coordenada a $\mathbf{x}(u, v)$, obtemos funções $E(u, v)$, $F(u, v)$, $G(u, v)$, que são diferenciáveis nessa vizinhança.

De agora em diante, omitiremos o índice p na indicação do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ ou da forma quadrática I_p , quando for claro o contexto a que ponto nos referimos.

Introduziremos em seguida a noção de orientação para superfícies.

Definição 1.9 *Uma superfície regular S é orientável se for possível cobri-la com uma família de vizinhanças coordenadas, de tal modo que se um ponto $p \in S$ pertence a duas vizinhanças dessa família, então a mudança de coordenadas tem Jacobiano positivo em p . A escolha de uma tal família é chamada uma orientação de S , e S , neste caso, diz-se orientada. Se uma tal escolha não é possível, a superfície é não-orientável. Se S é orientada, uma parametrização (local) \mathbf{x} é compatível com a orientação de S se, juntamente a família de parametrizações dada pela orientação, obtém-se ainda uma (logo, a mesma) orientação de S .*

Dada uma parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ de uma superfície regular S em um ponto $p \in S$, podemos escolher, para cada ponto de $\mathbf{x}(U)$, um vetor normal unitário dado por

$$N(q) = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|}(q),$$

$q \in \mathbf{x}(U)$. Assim temos uma aplicação diferenciável $N : \mathbf{x}(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$ que associa a cada $q \in \mathbf{x}(U)$ um vetor normal unitário $N(q)$.

De maneira geral, se $V \subset S$ é um conjunto aberto em S e $N : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável que associa a cada $q \in V$ um vetor normal unitário em q , dizemos que N é um *campo diferenciável de vetores normais unitários em V* .

Proposição 1.10 *Uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é orientável se e somente se existe um campo diferenciável $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ de vetores normais em S .*

Definição 1.11 *Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície com uma orientação N . A aplicação $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ toma seus valores na esfera unitária $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. A aplicação $N : S \rightarrow S^2$, assim definida, é chamada a aplicação normal de Gauss de S .*

É imediato verificar que a aplicação de Gauss é diferenciável. A diferencial dN_p de N em $p \in S$ é uma aplicação linear de T_pS em $T_{N(p)}S^2$. Como T_pS e $T_{N(p)}S^2$ são os mesmos espaços vetoriais, dN_p pode ser olhada como uma aplicação linear em T_pS .

A aplicação linear $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$ opera da seguinte forma. Para cada curva parametrizada $\gamma(t)$ em S , com $\gamma(0) = p$, consideremos a curva parametrizada $N \circ \gamma(t) = N(t)$ na esfera S^2 , isto equivale a restringir o vetor normal N à curva $\gamma(t)$. O vetor tangente $N'(0) = dN_p(\gamma'(0))$ é um vetor de T_pS . Ele mede a taxa de variação do vetor normal N , restrito à curva $\gamma(t)$, $t = 0$. Assim dN_p mede quanto N se afasta de $N(p)$ em uma vizinhança de p . No caso de curvas, esta medida é dada por um número, a curvatura. No caso das superfícies, esta medida é caracterizada por uma aplicação linear.

O vetor tangente a $\gamma(t)$ em p é $\gamma' = u'\mathbf{x}_u + v'\mathbf{x}_v$ e $dN(\gamma') = N'(u(t), v(t)) = u'N_u + v'N_v$. Como N_u e N_v pertencem a T_pS , podemos escrever

$$N_u = a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v,$$

$$N_v = a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v,$$

e portanto,

$$dN \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Isto mostra que, na base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$, dN é dada pela matriz (a_{ij}) , $i, j = 1, 2$.

É importante ressaltar que a diferencial $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$ da aplicação de Gauss é uma aplicação linear auto-adjunta. Com isto permite-nos associar a dN_p uma forma quadrática Q em T_pS , dada por $Q(v) = \langle dN_p(v), v \rangle$, $v \in T_pS$.

Definição 1.12 *A forma quadrática II_p , definida em T_pS por $II_p = -\langle dN_p(v), v \rangle$ é chamada a segunda forma fundamental de S em p .*

Por outro lado, a expressão da segunda forma fundamental na base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ pode ser expressa por:

$$II_p(\gamma') = -\langle dN_p(\gamma'), \gamma' \rangle = edu^2 + 2fdudv + gdv^2,$$

já que $\langle N, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_v \rangle = 0$,

$e = -\langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle$,

$f = -\langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{vu} \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = -\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle$,
 $g = -\langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle$. Neste caso e , f e g são chamados os coeficientes da segunda forma fundamental.

Definição 1.13 *Seja $p \in S$ e $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ a diferencial da aplicação de Gauss. O determinante de dN_p é chamado a curvatura Gaussiana K de S em p . O negativo da metade do traço de dN_p é chamado a curvatura média de S em p .*

Em termos dos coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais temos:

$$K = \det(dN_p) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad (1-3)$$

$$H = -\frac{1}{2} \text{traço}(dN_p) = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} \quad (1-4)$$

Considere uma superfície regular S imersa em \mathbb{R}^3 , dada pela parametrização $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$, de classe C^3 definida em um domínio limitado e simplesmente conexo $D \subset \mathbb{R}^2$. Sejam E , F e G os coeficientes da primeira forma fundamental de S . Com isto temos:

Definição 1.14 *Seja S uma superfície regular. Dada $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, definimos o laplaciano de f com respeito a primeira forma fundamental de S , como sendo o operador Δ definido por*

$$\Delta f : S \rightarrow \mathbb{R},$$

tal que $p \mapsto \Delta f(p)$. Em coordenadas locais temos

$$\Delta f = -\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left[\left(\frac{Gf_u - Ff_v}{\sqrt{EG - F^2}} \right)_u - \left(\frac{Ff_u - Ef_v}{\sqrt{EG - F^2}} \right)_v \right]. \quad (1-5)$$

Para ver mais detalhes à respeito do operador laplaciano Δ , consulte [7].

1.2 Formas Bilineares Simétricas

Nesta seção, iremos definir formas bilineares simétricas. Vimos que uma superfície em \mathbb{R}^3 herda o produto interno, o qual é uma forma bilinear simétrica, contudo definido positivo. Mas o nosso objetivo é dotar o \mathbb{R}^3 (consequentemente uma superfície neste espaço) de uma forma bilinear simétrica que pode ser também definida negativa. Sendo assim, seja V um espaço vetorial real (dimensão finita). Uma forma bilinear em V é uma função \mathbb{R} -bilinear $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. Consideremos somente o caso simétrico: $b(v, w) = b(w, v)$ para todo v, w .

Definição 1.15 *Uma forma bilinear simétrica b em M é*

(i) *positiva[negativa] definida se para $v \neq 0$ temos $b(v, v) > 0$ [< 0],*

(ii) *positiva[negativa] semi-definida* se para $v \neq 0$ temos $b(v, v) \geq 0$ [≤ 0] para todo $v \in V$,
 (iii) *não-degenerada* se $b(v, w) = 0$ para todo $w \in W$, então $v = 0$.

Também b é *definida[semi-definida]* se a alternativa (i) [(ii)] se verifica. Se b é definida então obviamente ela é *semi-definida e não-degenerada*.

Se b é uma forma bilinear simétrica em V , então para qualquer subespaço W de V a restrição $b|_{W \times W}$, denotada por $b|_W$, é novamente bilinear simétrica. Se b é [semi-]definida, o mesmo também ocorre para $b|_W$.

Definição 1.16 O índice ν de uma forma bilinear simétrica b em V é a dimensão de um subespaço $W \subset V$ em que $b|_W$ é negativa definida.

Consequentemente $0 \leq \nu \leq \dim(V)$, $\nu = 0$ se e somente se b é positiva semi-definida. A função $q: V \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $q(v) = b(v, v)$ é a forma quadrática associada a forma b . Com isto temos que vale a identidade de polarização

$$b(v, w) = \frac{1}{2}[q(v+w) - q(v) - q(w)].$$

Se e_1, \dots, e_n é uma base para V , a matriz $n \times n$ $(b_{ij}) = b(e_i, e_j)$ é chamada a matriz de b relativa a e_1, \dots, e_n . Como b é simétrica, esta matriz é simétrica. Claramente ela determina b pois

$$b\left(\sum v_i e_i, \sum w_j e_j\right) = \sum b_{ij} v_i w_j.$$

Lema 1.17 Uma forma bilinear simétrica é não-degenerada se e somente se, sua matriz relativa a uma (portanto toda) base é invertível.

Demonstração. Seja e_1, \dots, e_n uma base para V . Se $v \in V$, então $b(v, w) = 0$ para todo $w \in V$ se e somente se, $b(v, e_i) = 0$ para $i = 1, \dots, n$. Como (b_{ij}) é simétrica,

$$b(v, e_i) = b\left(\sum v_j e_j, e_i\right) = \sum b_{ij} v_j.$$

Consequentemente b é não-degenerada se e somente se, existe números v_1, \dots, v_n nem todos nulos tais que $\sum b_{ij} v_j = 0$ para $i = 1, \dots, n$. Mas isto é equivalente a dependência linear das colunas de (b_{ij}) , isto é, (b_{ij}) é singular. \square

Definição 1.18 Um produto escalar \langle, \rangle em um espaço vetorial V é uma forma bilinear simétrica não-degenerada em V .

Usaremos a notação \langle, \rangle para representarmos uma forma bilinear e simétrica b definida em V .

Um produto interno é um produto escalar positivo definido. Um exemplo canônico é o produto escalar em \mathbb{R}^n , tal que $v \cdot w = \sum v_i w_i$, $v = (v_1, \dots, v_n)$ e $w = (w_1, \dots, w_n)$ pertencentes a V .

1.3 Espaço de Minkowski

Para um inteiro v com $0 \leq v \leq n$, tomando os primeiros v sinais sendo negativos, obtemos uma forma bilinear simétrica \langle, \rangle tal que $\langle v, w \rangle = - \sum_{i=1}^v v_i w_i + \sum_{j=v+1}^n v_j w_j$ de índice v . Munindo \mathbb{R}^n com esta forma temos um espaço semi-Euclidiano \mathbb{R}_v^n , o qual se reduz ao espaço euclidiano usual se $v = 0$. Para $n \geq 0$, \mathbb{R}_1^n é chamado n -espaço de Minkowski; se $n = 4$ é um simples exemplo de um espaço-tempo relativístico.

Considerando

$$\varepsilon_i = \begin{cases} -1 & \text{para } 1 \leq i \leq v, \\ +1 & \text{para } v+1 \leq i \leq n, \end{cases}$$

E a forma bilinear simétrica de \mathbb{R}_v^n , pode ser escrita como

$$\langle, \rangle = \sum \varepsilon_i b_i \otimes b_i,$$

onde b_i é um elemento da base dual de \mathbb{R}_v^n .

O significado geométrico do índice de um espaço semi-Euclidiano deriva da seguinte tricotomia.

Definição 1.19 Um vetor $w \in \mathbb{R}_v^n$ é

$$\begin{aligned} \text{space-like} & \text{ se } \langle w, w \rangle > 0 \text{ ou } w = 0, \\ \text{light-like} & \text{ se } \langle w, w \rangle = 0 \text{ e } w \neq 0, \\ \text{time-like} & \text{ se } \langle w, w \rangle < 0. \end{aligned}$$

O conjunto de todos os vetores light-like em $w \in \mathbb{R}_v^n$ é chamado o *cone de luz*. Esta terminologia deriva da teoria da relatividade e particularmente no caso Lorentz(Minkowski), isto é, \mathbb{R}_1^n .

A norma de um vetor $w \in \mathbb{R}_v^n$ é definido como $\|w\| = |\langle w, w \rangle|^{1/2}$. Vetores unitários, ortogonalidade e ortonormalidade são definidas como no caso que são definidos em \mathbb{R}^n .

Agora conectando a definição de curvas em \mathbb{R}^3 com um caso particular de um espaço Semi-Euclidiano, a saber, \mathbb{R}_1^3 , o qual citamos anteriormente.

Seja $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1^3$, $\gamma(t) = (\gamma_0(t), \gamma_1(t), \gamma_2(t))$ uma curva regular em \mathbb{R}_1^3 (isto é, $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$), onde I é um intervalo aberto. A curva γ é chamada space-like se $\langle \gamma', \gamma' \rangle > 0$ e time-like $\langle \gamma', \gamma' \rangle < 0$ e light-like se $\langle \gamma', \gamma' \rangle = 0$. O comprimento de arco de uma curva space-like ou time-like γ , medido de $\gamma(t_0)$, $t_0 \in I$ é

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(t)\| dt.$$

Se o parâmetro s é determinado tal que $\|\gamma'(s)\| = 1$, onde $\gamma'(s) = \frac{d\gamma}{ds}$, então dizemos que a curva space-like ou time-like γ está parametrizada pelo comprimento de arco s . Vamos denotar $t(s) = \gamma'(s)$ um vetor tangente unitário de γ em s . Definimos a curvatura de γ por

$$k(s) = \sqrt{|\langle \gamma''(s), \gamma'(s) \rangle|}. \quad (1-6)$$

Se $k(s) \neq 0$ então o vetor normal unitário principal n de uma curva time-like γ em s é dado por $\gamma''(s) = k(s)n(s)$.

Para quaisquer vetores $v = (v_0, v_1, v_2)$, $w = (w_0, w_1, w_2) \in \mathbb{R}_1^3$, o pseudo-produto vetorial de v e w é definido como segue:

$$v \wedge w = -(v_2 w_3 - v_3 w_2) \frac{\partial}{\partial x_0} + (v_3 w_1 - v_1 w_3) \frac{\partial}{\partial x_1} + (v_1 w_2 - v_2 w_1) \frac{\partial}{\partial x_2} \quad (1-7)$$

Onde $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right\}$ é uma base ortonormal para \mathbb{R}_1^3 .

O vetor unitário $b(s) = t(s) \wedge n(s)$ é chamado um vetor binormal unitário da curva γ em s .

Seja γ uma curva space-like ou time-like em \mathbb{R}_1^3 e denotando $t(s) = \gamma'(s)$. Então temos a fórmula de Frenet-Serret dada por

$$\begin{cases} t'(s) = k(s)n(s) \\ n'(s) = k(s)t(s) + \tau(s)b(s) \\ b'(s) = -\tau(s)n(s), \end{cases} \quad (1-8)$$

onde $\tau(s)$ é a torção da curva γ em s .

Para mais informações sobre o que detalhamos ver [10].

1.4 Grupos Semi-ortogonais

Usamos a convecção vetor coluna, onde uma matriz $n \times n$ com entradas reais é identificada com um operador linear $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$(gx)_i = \sum g_{ij}x_j$$

para todo $1 \leq i \leq n$. Com esta identificação, a composição de operadores é vista como multiplicação de matrizes gh . Usando a notação matricial identificando uma n -upla x

com uma matriz $n \times 1$ (vetor coluna), gx pode ser dada pela multiplicação das matrizes:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum g_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum g_{nj}x_j \end{pmatrix}.$$

Para $0 \leq v \leq n$, a matriz assinatura ε é a matriz diagonal $(\delta_{ij}\varepsilon_j)$, cujas entradas na diagonal são $\varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_v = -1$ e $\varepsilon_{v+1} = \dots = \varepsilon_n = +1$. Daí $\varepsilon^{-1} = \varepsilon = \varepsilon^t$, onde g^t denota a transposta de g .

Pela identificação acima, o conjunto de todas isometrias $\mathbb{R}_v^n \rightarrow \mathbb{R}_v^n$ é o conjunto $O(v, n-v)$ de todas as matrizes $g \in GL(n, \mathbb{R})$ que preservam o produto escalar $\langle v, w \rangle = \varepsilon v \cdot w$ de \mathbb{R}_v^n . $O(v, n-v)$ é um subgrupo fechado de $GL(n, \mathbb{R})$, chamado de grupo semi-ortogonal.

Observação 1.20 Denotaremos $O(v, n-v)$ por apenas $O_v(n)$.

Lema 1.21 As seguintes condições são equivalentes, $g \in GL(n, \mathbb{R})$:

- (i) $g \in O_v(n)$;
- (ii) $g^t = \varepsilon g^{-1} \varepsilon$;
- (iii) As colunas [linhas] de g formam uma base ortonormal de \mathbb{R}_v^n (primeiros v vetores time-like);
- (iv) g leva uma base ortonormal de \mathbb{R}_v^n e uma base ortonormal.

Demonstração. (i) \Leftrightarrow (ii). A transposta de uma matriz $n \times n$ é sua adjunta relativa ao produto escalar. Consequentemente, (i) $\Leftrightarrow \langle gv, gw \rangle = \langle v, w \rangle$ para todo $v, w \Leftrightarrow \varepsilon gv \cdot gw = \varepsilon v \cdot w$ para todo $v, w \Leftrightarrow g^t \varepsilon gv \cdot w = \varepsilon v \cdot w$ para todo $v, w \Leftrightarrow g^t \varepsilon gv = \varepsilon v$ para todo $v \Leftrightarrow g^t \varepsilon g = \varepsilon \Leftrightarrow g^t = \varepsilon g^{-1} \varepsilon$.

(i) \Leftrightarrow (iv). Veja lema 2.27 em [15].

A implicação (iv) e (iii)(para colunas) é direta, já que as colunas de g são gu_1, \dots, gu_n , onde u_1, \dots, u_n é uma base para \mathbb{R}^n (ortonormal relativa ao produto escalar de \mathbb{R}_v^n para todo v). A equivalência de (iv) e (iii)(para linhas) segue da manipulação de (ii) mostrando que $g \in O_v(n)$ se e somente se, $g^t \in O_v(n)$. \square

Neste contexto, por exemplo, $(0, 1)$ e $(1, 0)$ são vetores ortogonais unitários de \mathbb{R}_1^2 mas $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ não pertence a $O_1(2)$, pois (ii) não se verifica.

Quando v é 0 ou n , o grupo $O(v, n-v)$ é o grupo ortogonal $O(n)$ de todas isometrias lineares do espaço Euclidiano \mathbb{R}^n . Para $n \geq 2$, $O_1(n) = O(1, n-1)$ é o grupo de Lorentz de todas isometrias lineares do espaço de Minkowski \mathbb{R}_1^n .

Exemplo 1.22

$O(2)$. Para cada número $\vartheta \in \mathbb{R}$, a matriz ortogonal

$$R_{\vartheta} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

é uma rotação(orientada) de ângulo ϑ de \mathbb{R}^2 em torno da origem. A função $\vartheta \rightarrow R_{\vartheta}$ é um homomorfismo diferenciável de \mathbb{R} sobre a adição em $O(2)$. Seu núcleo é $2\pi\mathbb{Z}$ e sua imagem é o grupo de rotação $O^+(2)$, a componente da identidade em $O(2)$. Consequentemente $O^+(2)$ e sua outra classe $O^-(2)$ são difeomorfos a círculos.

Exemplo 1.23

$O_1(2)$. Para cada $\varphi \in \mathbb{R}$, a matriz semi-ortogonal

$$B_{\varphi} = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi \end{pmatrix}$$

é chamada um *impulso* de Lorentz \mathbb{R}_1^2 (orientado) em torno da origem de ângulo φ . Como acima, $\varphi \rightarrow B_{\varphi}$ é um homomorfismo, mas neste caso ele é injetivo. Qualquer $a \in O_1(2)$ leva cada hipérbole $\langle p, p \rangle = 1$ e $\langle p, p \rangle = -1$ sobre si mesmo, contudo inverte o ramo de cada hipérbole. Estas duas escolhas decompõe $O_1(2)$ em quatro subconjuntos abertos disjuntos. O que preserva todos os ramos é exatamente o conjunto B de todos impulsos. B é um subgrupo difeomorfo a \mathbb{R} e consequentemente a componente da identidade em $O_1(2)$. Os outros três conjuntos são classes de B , daí $O_1(2)$ tem quatro componentes, cada uma difeomorfa a \mathbb{R} .

A partir da equivalência (ii) do lema 1.21, temos que para $A \in O_1(2)$

$$\varepsilon^t A = A^{-1} \varepsilon,$$

e o fato de que A é invertível (pois $\det A = \pm 1$) tem-se,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_{11} & -x_{21} & -x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{pmatrix} \\ & = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} -(x_{22}x_{33} - x_{23}x_{32}) & -x_{21}x_{33} - x_{31}x_{23} & x_{21}x_{32} - x_{31}x_{22} \\ x_{12}x_{33} - x_{32}x_{13} & x_{11}x_{33} - x_{31}x_{13} & -(x_{11}x_{32} - x_{31}x_{12}) \\ -(x_{12}x_{23} - x_{22}x_{13}) & -(x_{11}x_{23} - x_{21}x_{13}) & x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

onde $|A|$ é o determinante da matriz A . Portanto, obtemos as seguintes relações entre as

entradas de uma matriz $A \in O_1(2)$,

$$x_{11} = \frac{1}{|A|}(x_{22}x_{33} - x_{23}x_{32}) \quad (1-9)$$

$$x_{21} = \frac{1}{|A|}(x_{21}x_{33} + x_{31}x_{23}) \quad (1-10)$$

$$-x_{31} = \frac{1}{|A|}(x_{21}x_{32} - x_{31}x_{22}) \quad (1-11)$$

$$x_{12} = \frac{1}{|A|}(x_{12}x_{33} - x_{32}x_{13}) \quad (1-12)$$

$$x_{22} = \frac{1}{|A|}(x_{11}x_{33} - x_{31}x_{13}) \quad (1-13)$$

$$x_{32} = -\frac{1}{|A|}(x_{11}x_{32} - x_{31}x_{12}) \quad (1-14)$$

$$x_{13} = -\frac{1}{|A|}(x_{12}x_{23} - x_{22}x_{13}) \quad (1-15)$$

$$x_{23} = -\frac{1}{|A|}(x_{11}x_{23} - x_{21}x_{13}) \quad (1-16)$$

$$x_{33} = \frac{1}{|A|}(x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12}) \quad (1-17)$$

Estas relações serão importantes no capítulo 3, pois ao determinar as parametrizações de algumas superfícies helicóidais em \mathbb{R}_1^3 , devemos saber como se relaciona as entradas de uma matriz $A \in O_1(2)$.

Superfícies Helicoidais com Curvatura Média ou Gaussiana Dada no Espaço Euclidiano

Uma superfície M no Espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 parametrizada por

$$X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \lambda(u) + hv),$$

onde $h = \text{cte}$ e λ é uma função C^2 , é dita ser uma superfície helicoidal com eixo Oz e inclinação h . Se $h = 0$, então a superfície helicoidal é justamente uma superfície de revolução.

Uma curva γ é chamada curva helicoidal se as retas tangentes de γ fazem um ângulo constante com uma direção fixa. Supondo que $\tau(s) \neq 0$, $s \in I$, então γ é uma curva helicoidal se, e somente se, $k/\tau = \text{const.}$, onde k e τ são a curvatura e torção da curva γ respectivamente.

A superfície dada por $X(u, v)$ pode ser construída pelo movimento sobre uma curva helicoidal, isto é, um movimento rígido $g_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por

$$g_t(x, y, z) = (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t, z + ht),$$

$t \in \mathbb{R}$. Portanto uma superfície helicoidal é invariante sobre g_t para todo t . A curvatura média H e a curvatura Gaussiana K de $X(u, v)$ dependem somente de u e são dadas por equações diferenciais não-lineares de segunda ordem. A proposta deste capítulo é estudar estas equações. Mostraremos que dada uma função diferenciável $H : I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ e $h \in \mathbb{R}$, então para qualquer $u_0 \in I$ podemos encontrar uma família a dois-parâmetros de curvas $\gamma(u, H, h, c_1, c_2)$ definidas em uma vizinhança de u_0 . Aplicando um movimento helicoidal em γ obtemos uma família a dois-parâmetros de superfícies helicoidais com curvatura média H e inclinação h . Analogamente podemos construir uma família a dois-parâmetros de superfícies helicoidais com curvatura Gaussiana K dada e inclinação h .

2.1 Resultados Principais

Seja $\gamma(u) = (u, 0, \lambda(u))$, $u \in I$ uma curva C^2 definida em $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Aplicando um movimento helicoidal g_v em γ definimos a superfície helicoidal

$$\begin{aligned} X(u, v) = g_v(\gamma(u)) &= g_v(u, 0, \lambda(u)) \\ &= (u \cos v - 0 \sin v, u \sin v + 0 \cos v, \lambda(u) + hv) \\ &= (u \cos v, u \sin v, \lambda(u) + hv). \end{aligned} \quad (2-1)$$

Provaremos em seguida um resultado o qual diz que, dada uma função C^2 podemos encontrar uma família de superfícies helicoidais que possuem esta função como sua curvatura média.

Teorema 2.1 *Seja $(u, 0, \lambda(u))$, $u \in I$ uma curva que gera a superfície helicoidal dada por (2-1), cuja curvatura média no ponto $(u, 0, \lambda(u))$ é dada por H . Então temos que $H = (u, \gamma(u), h)$. Reciprocamente dadas constantes c_1, c_2 , h e uma função diferenciável $H = H(u)$, $u \in I$ existe uma família de curvas $(u, 0, \lambda(u)) = \gamma(u, H(u), h; c_1, c_2)$ que gera uma família a dois-parâmetros de superfícies helicoidais em \mathbb{R}^3 com curvatura média $H = H(u)$, $u \in I$ e inclinação h .*

Demonstração. Como $X(u, v) = (u \cos v, u \sin v, \lambda(u) + hv)$ temos que:

$$X_u = (\cos v, \sin v, \lambda')$$

$$X_v = (-u \sin v, u \cos v, h)$$

$$X_{uv} = (-\sin v, \cos v, 0)$$

$$X_{uu} = (0, 0, \lambda'')$$

$$X_{vv} = (-u \cos v, -u \sin v, 0)$$

$$X_u \wedge X_v = (h \sin v - \lambda' u \cos v, -h \cos v - \lambda' u \sin v, u)$$

$$|X_u \wedge X_v| = [h^2 + \lambda'^2 u^2 + u^2]^{1/2} = [u^2(1 + \lambda'^2) + h^2]^{1/2} = \alpha$$

$$N = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|} = \frac{1}{\alpha} (h \sin v - \lambda' u \cos v, -h \cos v - \lambda' u \sin v, u)$$

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = \lambda'^2 + 1$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = h \lambda'$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = u^2 + h^2$$

$$e = \langle N, X_{uu} \rangle = \frac{1}{\alpha} u \lambda''$$

$$f = \langle N, X_{uv} \rangle = -\frac{1}{\alpha} h$$

$$g = \langle N, X_{vv} \rangle = \frac{1}{\alpha} u^2 \lambda'.$$

Portanto temos que:

$$I = (\lambda'^2 + 1) du^2 + 2h \lambda' du dv + (u^2 + h^2) dv^2$$

e

$$II = \frac{1}{\alpha}(u\lambda'' du^2 - 2hdudv + u^2\lambda' dv^2)$$

Segue que a curvatura média H e curvatura Gaussiana K são dadas por

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - fF + gE}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{\alpha}u\lambda''(u^2 + h^2) + \frac{1}{\alpha}h^2\lambda' + \frac{1}{\alpha}u^2\lambda'(1 + \lambda'^2)}{(1 + \lambda'^2)(u^2 + h^2) - h^2\lambda'^2},$$

que é equivalente a

$$H = \frac{(u^2 + h^2)u\lambda'' + (1 + \lambda'^2)u^2\lambda' + 2h^2\lambda'}{2[u^2(1 + \lambda'^2) + h^2]^{3/2}}. \quad (2-2)$$

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\frac{1}{\alpha^2}u^3\lambda'\lambda'' - \frac{1}{\alpha^2}h^2}{u^2(1 + \lambda'^2) + h^2},$$

ou seja,

$$K = \frac{u^3\lambda'\lambda'' - h^2}{[u^2(1 + \lambda'^2) + h^2]^2}. \quad (2-3)$$

Se $\lambda' = 0$, a superfície (2-1) é um helicóide.

Agora estudando a equação (2-2) provaremos que dada qualquer função $H(u)$ diferenciável é possível encontrar $\lambda(u)$ localmente em função de $H(u)$ e conseqüentemente vai existir uma superfície helicoidal com curvatura média H . A equação (2-2) pode ser escrita como

$$2H = 2A + uA', \quad (2-4)$$

onde

$$A = \lambda'[u^2(1 + \lambda'^2) + h^2]^{-1/2}. \quad (2-5)$$

Então para $u \neq 0$, temos de (2-4) que

$$A' + \frac{2}{u}A = 2\frac{H}{u}. \quad (2-6)$$

Multiplicando por u^2 em (2-6), obtemos que $(Au^2)' = 2uH$. Integrando esta expressão temos que:

$$Au^2 = \int 2Hdu + c_1,$$

ou seja,

$$A = u^{-2}(2 \int uHdu + c_1), \quad (2-7)$$

onde c_1 é uma constante de integração. Segue de (2-5) e (2-7) que $u^{-2}(2 \int uHdu + c_1) = [u^2(1 + \lambda'^2) + h^2]^{-1/2}$. Isolando λ' obtemos,

$$\lambda' = u^{-2}(2 \int uHdu + c_1)\lambda'[u^2(1 + \lambda'^2) + h^2]^{1/2}.$$

Elevando a expressão acima ao quadrado segue que

$$\begin{aligned}\lambda'^2 &= u^{-4}(2 \int uHdu + c_1)^2[u^2(1 + \lambda'^2) + h^2] \\ &= u^{-4}(2 \int uHdu + c_1)^2(u^2 + h^2) + (2 \int uHdu + c_1)^2 u^{-2} \lambda'^2.\end{aligned}$$

Subtraindo $(2 \int uHdu + c_1)^2 u^{-2} \lambda'^2$ na expressão acima, temos que

$$\lambda'^2 - (2 \int uHdu + c_1)^2 u^{-2} \lambda'^2 = u^{-4}(2 \int uHdu + c_1)^2(u^2 + h^2),$$

daí

$$u^4 \lambda'^2 - u^2 (2 \int uHdu + c_1)^2 \lambda'^2 = (u^2 + h^2)(2 \int uHdu + c_1)^2$$

que é equivalente a

$$u^2[u^2 - (2 \int uHdu + c_1)^2] \lambda'^2 = (u^2 + h^2)(2 \int uHdu + c_1)^2. \quad (2-8)$$

Donde

$$\begin{aligned}u^2 - (2 \int uHdu + c_1)^2 &= \frac{u^{-2}(u^2 + h^2)(2 \int uHdu + c_1)^2}{\lambda'^2} \\ &= \frac{u^{-2}(u^2 + h^2)(2 \int uHdu + c_1)^2}{u^{-4}(2 \int uHdu + c_1)^2[u^2(1 + \lambda'^2) + h^2]} \\ &= u^2(u^2 + h^2)[u^2(1 + \lambda'^2) + h^2]^{-1} > 0,\end{aligned}$$

para $u \neq 0$. Então, integrando (2-8) temos a solução geral

$$\lambda(u) = \pm \int \frac{(u^2 + h^2)^{1/2} |2 \int uHdu + c_1| du}{|u|[u^2 - (2 \int uHdu + c_1)^2]^{1/2}} du + c_2,$$

onde c_2 é uma constante de integração. Agora, considerando $h \in \mathbb{R}$ e $H(u)$ uma função real diferenciável definida em uma intervalo aberto $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$, para qualquer $u_0 \in I$, existe um intervalo aberto I' em torno de u_0 ($I' \subset I$) e um intervalo aberto U de \mathbb{R} contendo $c'_1 = -(2 \int uHdu)(u_0)$, tal que a função contínua $F(u, c) = u^2 - (2 \int uHdu + c)^2 > 0$ para qualquer $(u, c_1) \in I' \times U$. De fato, como $F(u_0, c'_1) = u_0^2 > 0$, então pela continuidade de F , ela é positiva em um subconjunto de \mathbb{R}^2 da forma $I' \times U$. Daí para qualquer $(u, c_1) \in I' \times U$, $c_2 \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$ e dada uma função diferenciável $H(u)$ podemos definir uma família a dois-parâmetros de curvas

$$\gamma(u, H(u), h; c_1, c_2) = \left(u, 0, \pm \int \frac{(u^2 + h^2)^{1/2} |2 \int uHdu + c_1| du}{|u|[u^2 - (2 \int uHdu + c_1)^2]^{1/2}} du + c_2 \right). \quad (2-9)$$

Aplicando um movimento helicoidal de inclinação h nestas curvas temos então uma

família a dois-parâmetros de superfícies helicóidais com curvatura média $H(u)$, $u \in I'$ e inclinação h . \square

De maneira análoga ao que fizemos para a curvatura média faremos para curvatura Gaussiana. Isto é, dada uma função C^2 podemos encontrar uma família de superfícies helicóidais que possuem esta função como sua curvatura Gaussiana.

Teorema 2.2 *Seja $(u, 0, \lambda(u))$, $u \in I$ uma curva que gera a superfície helicoidal dada por (2-1), cuja curvatura Gaussiana no ponto $(u, 0, \lambda(u))$ é dada por K . Então temos que $K = K(u, \lambda(u), h)$. Reciprocamente dadas constantes c_1, c_2, h e uma função diferenciável $K = K(u)$, $u \in I$ existe uma família de curvas $(u, 0, \lambda(u)) = \beta(u, K(u), h; c_1, c_2)$ que gera uma família a dois-parâmetros de superfícies helicóidais em \mathbb{R}^3 com curvatura Gaussiana $K = K(u)$, $u \in I$ e inclinação h .*

Demonstração. Agora, para mostrar que dada qualquer função diferenciável K existe uma superfície helicoidal com curvatura Gaussiana K , consideremos a equação (2-3), a qual pode ser escrita por:

$$(B^2)' = 2Ku, \quad (2-10)$$

onde

$$B^2 = \frac{u^2\lambda'^2 + h^2}{u^2(1 + \lambda'^2) + h^2}. \quad (2-11)$$

Integrando (2-10) temos

$$B^2 = 2 \int Kudu + c_1, \quad (2-12)$$

onde c_1 é uma constante. Combinando (2-11) com (2-12) temos que:

$$\frac{u^2\lambda'^2 + h^2}{u^2(1 + \lambda'^2) + h^2} = 2 \int Kudu + c_1$$

e isolando $u^2\lambda'^2$ obtemos,

$$u^2\lambda'^2 = (2 \int Kudu + c_1)(u^2 + h^2) - h^2 + (2 \int Kudu + c_1)u^2\lambda'^2,$$

ou seja,

$$u^2\lambda'^2 - (2 \int Kudu + c_1)u^2\lambda'^2 = (2 \int Kudu + c_1)(u^2 + h^2) - h^2,$$

que é equivalente a

$$(1 - c_1 - 2 \int Kudu)u^2\lambda'^2 = (u^2 + h^2)(2 \int Kudu + c_1) - h^2. \quad (2-13)$$

Observe que

$$\begin{aligned}
 1 - c_1 - 2 \int Kudu &= 1 - \frac{u^2 \lambda'^2 + h^2}{u^2(1 + \lambda'^2) + h^2} \\
 &= \frac{u^2 \lambda'^2 + h^2 - u^2 \lambda'^2 - h^2}{u^2(1 + \lambda'^2) + h^2} \\
 &= u^2 [u^2(1 + \lambda'^2) + h^2]^{-1} > 0,
 \end{aligned}$$

para $u \neq 0$, com isto em (2-13) vemos que $(u^2 + h^2)(2 \int Kudu + c_1) - h^2 > 0$. Integrando (2-13) obtemos a solução geral

$$\lambda(u) = \pm \int \frac{[(u^2 + h^2)(2 \int Kudu + c_1) - h^2]^{1/2}}{|u|(1 - c_1 - 2 \int Kudu)^{1/2}} du + c_2,$$

onde c_2 é uma constante de integração.

Então considerando $h \in \mathbb{R}$ e $K(u)$ uma função real diferenciável definida em um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ para qualquer $u_0 \in I$, existe um intervalo aberto I' em torno de u_0 ($I' \subset I$) e um intervalo aberto U de \mathbb{R} contendo $c'_1 = -(2 \int Kudu)(u_0)$, tal que a função contínua $1 - c_1 - 2 \int Kudu > 0$ para qualquer $u \in I'$ e $c_1 \in U$. Daí para qualquer $(u, c_1) \in I' \times U$, $c_2 \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$ e dada uma função diferenciável $K(u)$ podemos definir uma família a dois-parâmetros de curvas

$$\beta(u, K(u), h; c_1, c_2) = \left(u, 0, \pm \int \frac{[(u^2 + h^2)(2 \int Kudu + c_1) - h^2]^{1/2}}{|u|(1 - c_1 - 2 \int Kudu)^{1/2}} du + c_2 \right). \quad (2-14)$$

Aplicando um movimento helicoidal de inclinação h nestas curvas temos então uma família a dois-parâmetros de superfícies helicoidais com curvatura Gaussiana $K(u)$, $u \in I'$ e inclinação h .

□

Superfícies Helicoidais no Espaço de Minkowski

3.1 Definição e Parametrização de Superfícies Helicoidais em \mathbb{R}_1^3

Neste capítulo, estudaremos superfícies helicoidais no espaço de Minkowski $\mathbb{R}_1^3 = (\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$, onde

$$\langle x, x \rangle = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2. \quad (3-1)$$

Para ver mais detalhes sobre definições de superfícies em \mathbb{R}_1^3 , consulte [12]. Seja $\gamma: I = (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \Pi$ uma curva num plano Π em \mathbb{R}_1^3 e seja ξ um segmento de reta em Π que não intercepta a curva γ . Uma superfície helicoidal M em \mathbb{R}_1^3 é definida como uma superfície não degenerada que é gerada pelo movimento rígido $g_t: \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$, $t \in \mathbb{R}$ em torno do eixo ξ . Em outras palavras, uma superfície helicoidal M com eixo ξ em \mathbb{R}_1^3 é invariante sobre um subgrupo de parâmetros de movimentos rígidos em \mathbb{R}_1^3 .

À partir desta definição obtemos quatro tipos de superfícies helicoidais em \mathbb{R}_1^3 . Se o eixo ξ é space-like (respectivamente, time-like) então existe uma transformação de Lorentz, isto é, $A: \mathbb{R}_1^3 \rightarrow \mathbb{R}_1^3$, tal que o eixo ξ é transformado no eixo x_2 , onde $Ox_0x_1x_2$ é considerado como sistema de coordenadas. Então, podemos assumir que o eixo de revolução é o eixo x_2 (respectivamente eixo x_0). Como a superfície é não degenerada é suficiente considerar o caso em que o plano Π é space-like ou time-like. Daí sem perda de generalidade, podemos assumir que Π é o plano x_1x_2 ou o plano x_0x_2 . Se o eixo de revolução é light-like então podemos assumir que esta é a reta gerada pelo vetor $(1, 1, 0)$.

Aqui não definiremos superfícies no espaço de Minkowski \mathbb{R}_1^3 , para ver definições e detalhes ver [12].

No resto deste capítulo, identificaremos um vetor (a, b, c) com seu transposto $(a, b, c)^t$. Portanto, distinguimos os seguintes três casos:

I-Primeiro caso:

Suponha que o eixo de revolução é uma reta space-like e sem perda de generalidade, podemos assumir que a curva γ está contida no plano x_1x_2 ou no plano $-x_0x_2$. Então, a

curva γ é parametrizada por $\gamma(u) = (0, f(u), g(u))$ ou $\gamma(u) = (f(u), 0, g(u))$, onde $f = f(u)$ é uma função positiva de classe C^1 e $g = g(u)$ é uma função de classe C^2 em $I = (a, b)$. Observemos que o subgrupo do grupo de Lorentz que fixa o vetor $(0, 0, 1)$ consiste das matrizes

$$A(v) = \begin{pmatrix} \cosh v & \sinh v & 0 \\ \sinh v & \cosh v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, v \in \mathbb{R}.$$

De fato, fazendo $x = (0, 0, 1)$ queremos encontrar $A \in O_1(2)$ tal que $Ax = x$, ou seja, se

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

então, $x_{13} = 0$, $x_{23} = 0$ e $x_{33} = 1$. Agora usando as relações (1-9)-(1-17), isto é,

$$x_{11} = \frac{1}{|A|}(x_{22}x_{33} - x_{23}x_{32})$$

$$x_{21} = \frac{1}{|A|}(x_{21}x_{33} + x_{31}x_{23})$$

$$x_{31} = -\frac{1}{|A|}(x_{21}x_{32} - x_{31}x_{22})$$

$$x_{12} = \frac{1}{|A|}(x_{12}x_{33} - x_{32}x_{13})$$

$$x_{22} = \frac{1}{|A|}(x_{11}x_{33} - x_{31}x_{13})$$

$$x_{32} = -\frac{1}{|A|}(x_{11}x_{32} - x_{31}x_{12})$$

$$x_{13} = -\frac{1}{|A|}(x_{12}x_{23} - x_{22}x_{13})$$

$$x_{23} = -\frac{1}{|A|}(x_{11}x_{23} - x_{21}x_{13})$$

$$x_{33} = \frac{1}{|A|}(x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12})$$

segue que

$$x_{11} = \frac{1}{|A|}x_{22} \tag{3-2}$$

$$x_{21} = \frac{1}{|A|}x_{21} \tag{3-3}$$

$$x_{22} = \frac{1}{|A|}x_{11} \quad (3-4)$$

$$x_{13} = 0 \quad (3-5)$$

$$x_{23} = 0 \quad (3-6)$$

$$x_{33} = 1. \quad (3-7)$$

Se $|A| = -1$, então, $x_{12} = x_{21} = 0$ e $x_{11} = -x_{22}$, daí $|A| = x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} = -x_{11}^2 = -1$, que implica que $x_{11} = \pm 1$. Portanto

$$A = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que não gera superfície helicoidal em \mathbb{R}_1^3 . Logo, $|A| = 1$. Então $x_{11} = x_{22}$, $x_{21} = x_{12}$, $x_{12} = x_{21}$. Tome $x_{12} = x_{21}$, então $|A| = x_{11}^2 - x_{12}^2 = 1$, temos que $x_{11} = x_{22} = \cosh v$ e $x_{12} = x_{21} = \sinh v$ é solução para $|A| = 1$. Agora, substituindo estes valores em (1-11) e (1-14) obtemos

$$x_{31} = -\sinh v x_{32} + \cosh v x_{31}$$

$$x_{32} = -\cosh v x_{32} + \sinh v x_{31},$$

que pode ser escrito como

$$\begin{pmatrix} x_{31} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh v & -\sinh v \\ \sinh v & -\cosh v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{31} \\ x_{32} \end{pmatrix},$$

isto é,

$$\left[I - \begin{pmatrix} \cosh v & -\sinh v \\ \sinh v & -\cosh v \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_{31} \\ x_{32} \end{pmatrix} = 0.$$

Logo $x_{31} = x_{32} = 0$. Portanto A , é dada por:

$$A(v) = \begin{pmatrix} \cosh v & \sinh v & 0 \\ \sinh v & \cosh v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, v \in \mathbb{R}_1^3.$$

Assim, a superfície helicoidal M pode ser parametrizada como

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} \cosh v & \sinh v & 0 \\ \sinh v & \cosh v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(u) \\ g(u) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ cv \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(u) \sinh v, f(u) \cosh v, g(u) + cv), f(u) > 0, c \in \mathbb{R}^+, \quad (3-8)$$

ou como

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} \cosh v & \sinh v & 0 \\ \sinh v & \cosh v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(u) \\ 0 \\ g(u) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ cv \end{pmatrix},$$

que pode ser reescrita como

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(u) \cosh v, f(u) \sinh v, g(u) + cv), f(u) > 0, c \in \mathbb{R}^+. \quad (3-9)$$

As superfícies helicoidais obtidas em (3-8) e (3-9), serão chamadas superfícies helicoidais do tipo *I* e *II*, respectivamente.

II-Segundo caso:

Suponha que o eixo de revolução é uma reta time-like e sem perda de generalidade assumamos que a curva γ está contida no plano x_0x_1 . Então, uma de suas parametrizações é $\gamma(u) = (g(u), f(u), 0)$, onde $f = f(u)$ é uma função positiva de classe C^1 e $g = g(u)$ uma função de classe C^2 em I . Neste caso, o subgrupo do grupo de Lorentz, que fixa o vetor $(1, 0, 0)$, consiste de matrizes da forma:

$$A(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v & \sin v \\ 0 & \sin v & -\cos v \end{pmatrix}, 0 \leq v \leq 2\pi.$$

De fato, como no caso anterior temos que

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Logo $x_{11} = 1, x_{21} = 0, x_{31} = 0$, isto é, $A = \begin{pmatrix} 1 & x_{12} & x_{13} \\ 0 & x_{22} & x_{23} \\ 0 & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$, com $|A| = x_{22}x_{33} - x_{32}x_{23}$.

Usando novamente as relações (1-9)-(1-17), obtemos:

$$x_{22} = \frac{1}{|A|}x_{33} \quad (3-10)$$

$$x_{32} = -\frac{1}{|A|}x_{23} \quad (3-11)$$

$$x_{23} = -\frac{1}{|A|}x_{23} \quad (3-12)$$

$$x_{33} = \frac{1}{|A|}x_{22}. \quad (3-13)$$

Note que $|A| = \pm 1$, pois $A \in O_1(2)$. Se $|A| = 1$, então $x_{33} = x_{22}$ e $x_{23} = x_{32} = 0$. Logo, $|A| = x_{22}x_{33} - x_{32}x_{23} = x_{22}^2 = 1$ que implica que $x_{22} = \pm 1$ e, portanto $x_{12} = 0$. Daí

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_{13} \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \text{ que não gera superfície helicoidal em } \mathbb{R}_1^3. \text{ Então, } |A| = -1, \text{ com}$$

isto temos pelas relações anteriores, $x_{32} = x_{23}$ bem como $x_{22} = -x_{33}$. Substituindo em $|A| = x_{22}x_{33} - x_{32}x_{23} = -x_{22}^2 - x_{32}^2 = -1$, logo $x_{22} = \cos v$ e $x_{32} = \sin v$ é solução. Voltando nas relações (1-12) e (1-15) e escrevendo na forma matricial vem

$$\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos v & \sin v \\ \sin v & -\cos v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix},$$

que possui solução $x_{12} = x_{13} = 0$. Portanto,

$$A(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v & \sin v \\ 0 & \sin v & -\cos v \end{pmatrix}, 0 \leq v \leq 2\pi.$$

Logo, a superfície helicoidal M em torno do eixo Ox_0 pode ser parametrizada como

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v & \sin v \\ 0 & \sin v & -\cos v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(u) \\ f(u) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cv \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

então,

$$\mathbf{x}(u, v) = (g(u) + cv, f(u) \cos v, f(u) \sin v), f(u) > 0, c \in \mathbb{R}^+. \quad (3-14)$$

Chamamos esta superfície helicoidal de tipo *III*.

III-Terceiro caso:

Suponha que o eixo de revolução é uma reta light-like, ou equivalentemente a reta do plano x_0x_1 gerada pelo vetor $(1, 1, 0)$. Como a superfície M é não degenerada, podemos assumir sem perda de generalidade, que a curva γ está contida no plano x_0x_1 e sua parametrização é dada por $\gamma(u) = (f(u), g(u), 0)$, $u \in I$, f, g são funções em I tal que

$f \neq g$, qualquer $u \in I$. Determinando $A \in O_1(2)$ de modo que fixe o vetor $(1, 1, 0)$, temos

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$x_{11} + x_{12} = 1 \quad (3-15)$$

$$x_{21} + x_{22} = 1 \quad (3-16)$$

$$x_{31} + x_{32} = 0 \quad (3-17)$$

$$|A| = x_{11}(x_{22}x_{33} - x_{32}x_{23}) - x_{12}(x_{21}x_{33} - x_{31}x_{23}) + x_{13}(x_{21}x_{32} - x_{31}x_{22}) = \pm 1. \quad (3-18)$$

Agora, observe que $x_{11} = 1 + \frac{v^2}{2}$ e $x_{12} = -\frac{v^2}{2}$ é solução de (3-15); $x_{21} = \frac{v^2}{2}$ e $x_{22} = 1 - \frac{v^2}{2}$ de (3-16) e $x_{31} = v$ e $x_{32} = -v$ de (3-17). Pela equação (1-17), temos:

$$x_{33} = \frac{1}{|A|}(x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12}) = \frac{1}{|A|} \left[\left(1 + \frac{v^2}{2}\right) \left(1 - \frac{v^2}{2}\right) - \left(\frac{v^2}{2}\right) \left(-\frac{v^2}{2}\right) \right] = \frac{1}{|A|} \left[1 - \left(\frac{v^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{2}\right)^2 \right] = \frac{1}{|A|} = \pm 1. \text{ Suponha que } |A| = 1. \text{ Por (3-18) temos } |A| = 1 - \frac{v^2}{2} + vx_{23} + \frac{v^2}{2} - \frac{v^4}{4} + \frac{v^3}{3}x_{23} + \frac{v^4}{4} - \frac{v^3}{3}x_{23} - vx_{13} = 1 + v(x_{23} - x_{13}) = 1, \text{ que implica que } x_{23} = x_{13}. \text{ Tome } x_{23} = x_{13} = v. \text{ Então, } A \text{ é dada por}$$

$$A(v) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{v^2}{2} & -\frac{v^2}{2} & v \\ \frac{v^2}{2} & 1 - \frac{v^2}{2} & v \\ v & -v & 1 \end{pmatrix}, v \in \mathbb{R}.$$

Portanto, a superfície helicoidal M pode ser parametrizada como

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{v^2}{2} & -\frac{v^2}{2} & v \\ \frac{v^2}{2} & 1 - \frac{v^2}{2} & v \\ v & -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(u) \\ g(u) \\ 0 \end{pmatrix} + cv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que pode ser reescrita como

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(\left(\left(1 + \frac{v^2}{2}\right) f(u) - \frac{v^2}{2} g(u) + cv, \frac{v^2}{2} f(u) + \left(1 - \frac{v^2}{2}\right) g(u) + cv, v(f(u) - g(u)) \right) \right). \quad (3-19)$$

Esta superfície é chamada superfície helicoidal de tipo *IV*.

Note que quando $c = 0$, a superfície helicoidal em \mathbb{R}_1^3 é justamente uma superfície de revolução.

Dizemos que uma superfície helicoidal M em \mathbb{R}_1^3 é de tipo I^+ ou

I^- (respectivamente II^+ ou II^- , III^+ ou III^- , IV^+ ou IV^-) se o discriminante $EG - F^2$ é positivo ou negativo, onde E , F e G são os coeficientes da primeira forma fundamental em M .

Na próxima seção iremos mostrar que a curvatura Gaussiana K (ou curvatura média H) de uma superfície helicoidal de tipo I depende somente do parâmetro u . Bem como se dermos uma função diferenciável $K : I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ para qualquer $u_0 \in I$ (ou $H = H(u)$) podemos determinar superfícies helicoidais com curvaturas Gaussiana ou média com essas tais funções. Então o problema em cada caso, se reduz a integrar algumas equações diferenciais não-lineares de segunda ordem.

As soluções para estas superfícies helicoidais em torno de um eixo space-like ou time-like são dadas explicitamente na seção 3.2. Para a superfície em torno do eixo light-like correspondem a equações exploradas somente para alguns casos particulares das curvaturas média ou Gaussiana e são apresentadas na seção 3.3.

Portanto, usando a dada função diferenciável $K = K(u)$ e $c > 0$ podemos encontrar uma família a dois-parâmetros de curvas $a(u) \equiv a(u, K(u), c; c_1, c_2)$ definidas em uma vizinhança de $u_0 \in I$. Aplicando um movimento helicoidal na curva a , temos uma família a dois-parâmetros de superfícies helicoidais em \mathbb{R}_1^3 com curvatura Gaussiana $K = K(u)$ e inclinação c . Da mesma maneira, podemos construir uma família a dois-parâmetros de superfícies helicoidais com curvatura média $H = H(u)$ dada e inclinação c . Este estudo consiste na generalização de [6],[14],[16] e [13].

3.2 Movimentos helicoidais em torno de um eixo space-like ou time-like

Seja $a(u) = (0, u, g(u))$, $u \in I$ uma curva C^2 definida em qualquer intervalo de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Como mencionamos anteriormente, aplicando um movimento helicoidal nesta curva podemos obter uma superfície helicoidal M de \mathbb{R}_1^3 que é descrita pela equação(3-8) ou equivalentemente por

$$\mathbf{x}(u, v) = (u \sinh v, u \cosh v, g(u) + cv). \quad (3-20)$$

Provaremos o seguinte teorema.

Teorema 3.1 *Seja $a(u) = (0, u, g(u))$, $u \in I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ uma curva geratriz da superfície helicoidal M imersa em \mathbb{R}_1^3 dada por (3-20). Então as curvaturas média e Gaussiana no ponto $(0, u, g(u))$ são funções apenas da variável u , i.e., $K = K(u)$, $H = H(u)$. Além disso, dadas constantes $c \in \mathbb{R}^+$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ e uma função diferenciável $K = K(u)$ (respectivamente $H = H(u)$), $u \in I$ existe uma família de curvas $a(u) \equiv a(K(u), c; c_1, c_2)$ (respectiva-*

mente $a(u) \equiv a(H(u, c; c_1, c_2))$, de modo que as superfícies helicoidais do tipo I^+ ou I^- geradas por estas curvas, imersas no espaço de Minkowski \mathbb{R}_1^3 têm curvatura Gaussiana $K = K(u)$, $u \in I$ (respectivamente curvatura média $H = H(u)$, $u \in I_1 = (-c, c) \subset I$).

Demonstração. Como $\mathbf{x}(u, v) = (u \sinh v, u \cosh v, g(u) + cv)$ segue que:

$$\mathbf{x}_u = (\sinh v, \cosh v, g'(u))$$

$$\mathbf{x}_v = (u \cosh v, u \sinh v, c)$$

$$\mathbf{x}_{uu} = (0, 0, g''(u))$$

$$\mathbf{x}_{uv} = (\cosh v, \sinh v, 0)$$

$$\mathbf{x}_{vv} = (u \sinh v, u \cosh v, 0).$$

Portanto,

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = -\sinh^2 v + \cosh^2 v + g'^2(u) = 1 + g'^2(u)$$

$$F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = -u \sinh v \cosh v + u \cosh v \sinh v + cg'(u) = cg'(u)$$

$$G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = -u^2 \cosh^2 v + u^2 \sinh^2 v + c^2 = -u^2(\cosh^2 v - \sinh^2 v) + c^2 = c^2 - u^2.$$

Daí,

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdu^2 = (1 + g'^2)du^2 + 2cg'dudv + (c^2 - u^2)dv^2 \quad (3-21)$$

A aplicação normal de Gauss é dada por

$$N(u, v) = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|},$$

onde

$$\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_0} & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ r_u^1 & r_u^2 & r_u^3 \\ r_v^1 & r_v^2 & r_v^3 \end{vmatrix} = -(r_u^2 r_v^3 - r_u^3 r_v^2) \frac{\partial}{\partial x_0} - (r_u^1 r_v^3 - r_u^3 r_v^1) \frac{\partial}{\partial x_1} + (r_u^1 r_v^2 - r_u^2 r_v^1) \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Como $\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| = |\langle \mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v \rangle|^{1/2}$, temos:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| &= | -(-c \cosh v + ug' \sinh v)^2 + (ug' \cosh v - c \sinh v)^2 + u^2 |^{1/2} \\ &= | -c^2(\cosh^2 v - \sinh^2 v) + u^2 g'^2(\cosh^2 v - \sinh^2 v) + u^2 |^{1/2} = |c^2 - u^2(1 + g'^2)|^{1/2} \\ &= w, \end{aligned}$$

temos

$$e = \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle = \frac{-ug''}{w},$$

$$\begin{aligned} f = \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle &= \frac{1}{w}(c \cosh^2 v - ug' \sinh v \cosh v + ug' \cosh v \sinh v - c \sinh^2 v) \\ &= \frac{1}{w}c(\cosh^2 v - \sinh^2 v) \\ &= \frac{c}{w} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g = \langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle &= \frac{1}{w}(u \cosh v \sinh v - u^2 g' \sinh^2 v + u^2 g' \cosh^2 v - uc \cosh v \sinh v) \\ &= \frac{1}{w}u^2 g'(\cosh^2 v - \sinh^2 v) = \frac{u^2 g'}{w}. \end{aligned}$$

Logo a segunda forma fundamental é dada por:

$$II = edu^2 + 2fdudv + gdv^2 = \frac{1}{w}(-ug''du^2 + 2cdudv + u^2g'dv^2). \quad (3-22)$$

A curvatura Gaussiana de M é dada pela seguinte expressão:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

Daí,

$$K = \frac{\frac{1}{w^2}(-ug'' - u^2g' - c^2)}{c^2 - u^2(1 + g'^2)} = \frac{-u^3g''g' - c^2}{w^2(c^2 - u^2(1 + g'^2))},$$

ou seja,

$$K = -\frac{u^3g''g' - c^2}{|c^2u^2(1 + g'^2)|(c^2 - u^2(1 + g'^2))}. \quad (3-23)$$

Bem como a curvatura média é

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + Eg}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{w}(-ug''(c^2 - u^2)) - 2\frac{1}{w}c^2g' + \frac{1}{w}u^2g'(1 + g'^2)}{(c^2 - u^2(1 + g'^2))} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{w}[(-ug''(c^2 - u^2)) - 2c^2g' + u^2g'(1 + g'^2)]}{(c^2 - u^2(1 + g'^2))}, \end{aligned}$$

isto é,

$$H = \frac{u^2g'(1 + g'^2) - ug''(c^2 - u^2) - 2c^2g'}{2(c^2 - u^2(1 + g'^2))|c^2 - u^2(1 + g'^2)|^{1/2}}. \quad (3-24)$$

Segue de (3-23) e (3-24) que as funções K e H só dependem da variável u . Suponha que $EG - F^2 = c^2 - u^2(1 + g'^2) > 0$. O caso $EG - F^2 < 0$ pode ser tratado analogamente e obter os resultados correspondentes. Então as equações (3-23) e (3-24) podem ser escritas

por

$$K(u) = -\frac{u^3 g'' g' - c^2}{[c^2 - u^2(1 + g'^2)]^2} \quad (3-25)$$

$$H(u) = \frac{u^2 g'(1 + g'^2) - u g''(c^2 - u^2) - 2c^2 g'}{2[c^2 - u^2(1 + g'^2)]^{3/2}} \quad (3-26)$$

respectivamente.

Agora estudando a equação (3-25) mostraremos que dada qualquer função K diferenciável, existe uma função g que depende de K , obtendo assim superfícies helicóidais com curvatura Gaussiana dada. A equação (3-25) pode ser escrita por

$$h'(u) = 2uK(u), \quad (3-27)$$

onde

$$h(u) = (u^2 g'^2 - c^2)[c^2 - u^2(1 + g'^2)]^{-1}. \quad (3-28)$$

A solução geral de (3-27) é

$$h(u) = c_1 + 2 \int uK(u)du, \quad c_1 \in \mathbb{R}. \quad (3-29)$$

De (3-28) e (3-29) obtemos

$$c_1 + 2 \int uKdu = (u^2 g'^2 - c^2)[c^2 - u^2(1 + g'^2)]^{-1} = u^2 g'^2 [c^2 - u^2(1 + g'^2)]^{-1} - c^2 [c^2 - u^2(1 + g'^2)]^{-1},$$

isolando g'^2 temos:

$$\begin{aligned} g'^2 &= \frac{c_1 + 2 \int uKdu + c^2 [c^2 - u^2(1 + g'^2)]^{-1}}{u^2 [c^2 - u^2(1 + g'^2)]^{-1}} \\ &= \frac{(c_1 + 2 \int uKdu)[c^2 - u^2(1 + g'^2)] + c^2}{u^2} \\ &= \frac{(c_1 + 2 \int uKdu)c^2 - (c_1 + 2 \int uKdu + c^2)u^2(1 + g'^2) + c^2}{u^2} \\ &= \frac{(c_1 + 2 \int uKdu)c^2 - (c_1 + 2 \int uKdu)u^2 - (c_1 + 2 \int uKdu)u^2 g'^2 + c^2}{u^2}, \end{aligned}$$

colocando os termos onde aparecem g'^2 no primeiro membro da equação acima obtemos

$$(c_1 + 2 \int uKdu)g'^2 + g'^2 = \frac{(c_1 + 2 \int uKdu)c^2 - (c_1 + 2 \int uKdu)u^2 + c^2}{u^2},$$

ou seja,

$$[(c_1 + 2 \int uKdu + c^2) + 1]g'^2 = \frac{[(c_1 + 2 \int uKdu) + 1]c^2 - (c_1 + 2 \int uKdu)u^2}{u^2}.$$

Portanto $g'^2 = \frac{c^2A - u^2(A-1)}{u^2A}$, $u \neq 0$, onde $A = 1 + c_1 + 2 \int uH du < 0$, para qualquer $u \neq 0$. Integrando g' obtemos,

$$g(u) = c_2 \pm \int \frac{[(c^2 - u^2)A + u^2]^{1/2}}{|u| |A|^{1/2}} du, c_2 \in \mathbb{R}, \quad (3-30)$$

onde c_2 é uma constante de integração. Agora suponha que $c \in \mathbb{R}^+$ e $K = K(u)$ seja uma função diferenciável dada definida em um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Consequentemente para qualquer $u_0 \in I$ podemos encontrar um sub-intervalo $U \ni u_0$ de I e um intervalo aberto $I' \subset \mathbb{R}$ contendo $c'_1 = -(2 \int uK du)(u_0)$ tal que a função contínua $F : U \times I' \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(u, c_1) = A - k$, $k > 1$ é negativa para qualquer $(u, c_1) \in U \times I'$. De fato, temos que $F(u_0, c'_1) = 1 + c'_1 + (2 \int uK du)(u_0) - k = 1 - (2 \int uK du)(u_0) + (2 \int uK du)(u_0) - k = 1 - k < 0$. Então pela continuidade de F , ela é negativa em um subconjunto de \mathbb{R}^2 da forma $U \times I'$. Daí, para qualquer $(u, c_1) \in U \times I'$, $c_2 \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^+$ e para dada $K = K(u)$ podemos definir a família a dois parâmetros de curvas

$$a(u) \equiv a(K(u), c; c_1, c_2) = \left(0, u, c_2 \pm \int \frac{[(c^2 - u^2)A + u^2]^{1/2}}{|u| |A|^{1/2}} du \right). \quad (3-31)$$

Aplicando um movimento helicoidal de inclinação c nestas curvas obtemos uma família a dois parâmetros de superfícies helicoidais do tipo I^+ em \mathbb{R}_1^3 com curvatura Gaussiana $K(u)$, $u \in I$ e inclinação c . Estas superfícies são dadas por

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(u \sinh v, u \cosh v, cv + c_2 \pm \int \frac{[(c^2 - u^2)A + u^2]^{1/2}}{|u| |A|^{1/2}} du \right). \quad (3-32)$$

Observação 3.2 *Se assumirmos que $EG - F^2 = c^2 - u^2(1 + g'^2) < 0$, então concluímos de maneira análoga que existe uma família a dois parâmetros de superfícies helicoidais do tipo I^- imersas em \mathbb{R}_1^3 com curvatura Gaussiana $K(u)$ e inclinação c .*

Estudaremos agora a equação (3-26). Ela pode ser escrita como:

$$\phi'(u) + \frac{2}{u}\phi(u) = 2\frac{H(u)}{u}, u \neq 0 \quad (3-33)$$

tal que

$$\phi(u) = -\frac{g'(u)}{[c^2 - u^2(1 + g'^2(u))]^{1/2}}. \quad (3-34)$$

Multiplicando (3-33) por u^2 obtemos

$$\phi' u^2 + 2u\phi = 2uH$$

$$(\phi u^2)' = 2uH,$$

integrando esta expressão segue que: $\phi u^2 = 2 \int uHdu + c_1$, ou seja,

$$\phi = \frac{1}{u^2} [2 \int uHdu + c_1], c_1 \in \mathbb{R}. \quad (3-35)$$

Combinando as equações (3-34) e (3-35) obtém-se

$$-\frac{g'(u)}{[c^2 - u^2(1 + g'^2(u))]^{1/2}} = \frac{1}{u^2} [2 \int uHdu + c_1]$$

$$-g' = \frac{1}{u^2} [2 \int uHdu + c_1] [c^2 - u^2(1 + g'^2(u))]^{1/2},$$

elevando esta expressão ao quadrado e somando $(2 \int uHdu + c_1)^2 \frac{1}{u^2} g'^2$, resulta em

$$g'^2 + (2 \int uHdu + c_1)^2 \frac{1}{u^2} g'^2 = \frac{1}{u^4} [2 \int uHdu + c_1]^2 (c^2 - u^2)$$

ou

$$u^4 g'^2 + (2 \int uHdu + c_1)^2 u^2 g'^2 = [2 \int uHdu + c_1]^2 (c^2 - u^2)$$

colocando g'^2 em evidência e isolando-o resulta em

$$g'^2 = \frac{(2 \int uHdu + c_1)^2 (c^2 - u^2)}{[u^4 + u^2(2 \int uHdu + c_1)^2]} = \frac{(c^2 - u^2)B^2}{u^2(u^2 + B^2)}, u \in I_1 = (-c, c), \quad (3-36)$$

onde

$$B(u) = 2 \int uHdu + c_1. \quad (3-37)$$

Integrando g' obtemos

$$g(u) = c_2 \pm \int \frac{|B|\sqrt{c^2 - u^2}}{|u|\sqrt{u^2 + B^2}} du, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (3-38)$$

Portanto, da mesma maneira podemos definir a família a dois parâmetros de curvas

$$a(u) \equiv a(H(u), c; c_1, c_2) = \left(0, u, c_2 \pm \int \frac{|B|\sqrt{c^2 - u^2}}{|u|\sqrt{u^2 + B^2}} du \right). \quad (3-39)$$

Aplicando um movimento helicoidal de inclinação c nestas curvas, obtemos uma família a dois parâmetros de superfícies helicoidais do tipo I^+ (respectivamente I^-) em \mathbb{R}_1^3 com curvatura média $H = H(u)$, $u \in I_1$. Estas superfícies são dadas por (ver Fig.3.1)

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(u \sinh v, u \cosh v, cv + c_2 \int \frac{|B|\sqrt{c^2 - u^2}}{|u|\sqrt{u^2 + B^2}} du \right) \quad (3-40)$$

e isto completa a prova do teorema.

□

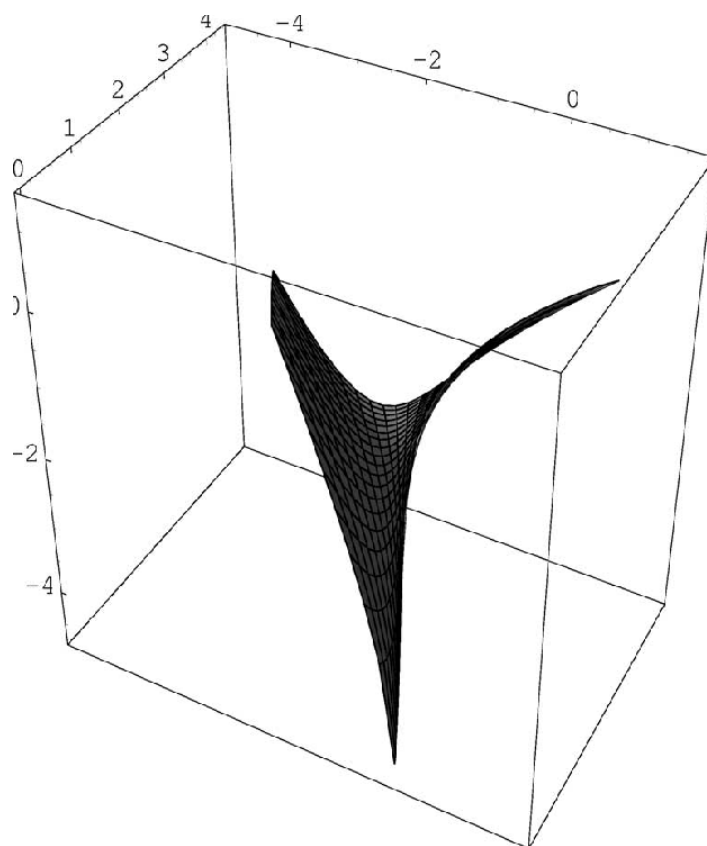


Figura 3.1: Superfície Helicoidal de tipo I^+ , $H(u) = 1/2u$

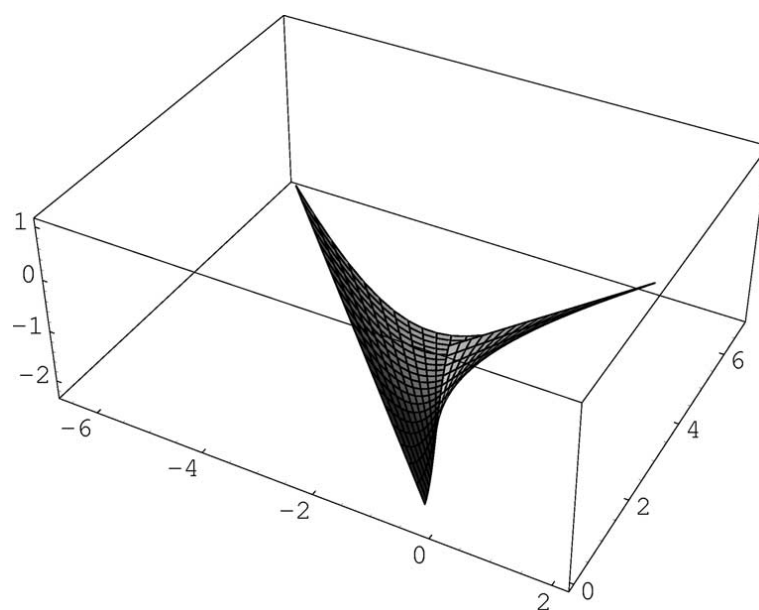


Figura 3.2: Helicóide a direita de tipo I^-

Observação 3.3 As superfícies helicóidais dadas por (3-32) e (3-40) são superfícies space-like de tipo I^+ .

Observação 3.4 Se assumirmos que $F = 0$ no teorema anterior, então $g(u) = c$ e a equação (3-20) se reduz a equação do helicóide em \mathbb{R}_1^3 . Pelas equações (3-23) e (3-24) as curvaturas Gaussianas e média destes helicóides de tipo I^+ ou I^- são

$$K(u) = -\frac{c^2}{(c^2 - u^2)^2} < 0, H(u) = 0$$

ou

$$K(u) = \frac{c^2}{(c^2 - u^2)^2} > 0, H(u) = 0$$

respectivamente. Daí as superfícies helicóidais a direita de tipo I^+ ou I^- , constituem superfícies mínimas imersas em \mathbb{R}_1^3 com curvaturas Gaussianas negativa ou positiva (ver Fig.3.2). O caso onde $a(u) = (u, 0, g(u))$ que corresponde superfícies helicóidais do tipo II^+ (ou II^-) são dadas por (3-9) ou equivalentemente por

$$\mathbf{x}(u, v) = (u \cosh v, u \sinh v, g(u) + cv)$$

são realmente similares ao caso anterior, doravante iremos omití-los.

Estudando agora o segundo caso.

Seja $a(u) = (g(u), f(u), 0), u \in I$ uma curva C^2 em \mathbb{R}_1^3 onde $f'^2 + g'^2 \neq 0$ e I um intervalo aberto não contendo o zero. Aplicando um movimento helicoidal nela com eixo Ox_0 (eixo time-like), obtemos a superfície helicoidal M em \mathbb{R}_1^3 dada pela parametrização

$$\mathbf{x}(u, v) = (cv + g(u), u \cos v, u \sin v) \quad (3-41)$$

onde estamos assumindo que $f(u) = u$. Provaremos então o seguinte teorema:

Teorema 3.5 Seja $a(u) = (g(u), u, 0), u \in I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ uma curva geratriz da superfície helicoidal M imersa em \mathbb{R}_1^3 dada por (3-41). Então as curvaturas Gaussianas e média no ponto $(g(u), u, 0)$ são funções apenas da variável u , i.e., $K = K(u)$, $H = H(u)$. Além disso, dadas constantes $c \in \mathbb{R}^+$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ e uma função diferenciável $K = K(u)$ (respectivamente $H = H(u)$), $u \in I$ existe uma família de curvas $a(u) \equiv a(K(u), c; c_1, c_2)$ (respectivamente $a(u) \equiv a(H(u), c; c_1, c_2)$), de modo que as superfícies helicóidais do tipo III^+ ou III^- geradas por estas curvas, imersas no espaço de Minkowski \mathbb{R}_1^3 têm curvatura Gaussiana $K = K(u), u \in I$ (respectivamente curvatura média $H = H(u), u \in I_1 = (-c, c) \subset I$).

Demonstração. Como $\mathbf{x}(u, v) = (cv + g(u), u \cos v, u \sin v)$ temos que:

$$\mathbf{x}_u = (g', \cos v, \sin v)$$

$$\mathbf{x}_v = (c, -u \sin v, u \cos v)$$

$$\mathbf{x}_{uu} = (g'', 0, 0)$$

$$\mathbf{x}_{vv} = (0, -u \cos v, -u \sin v)$$

$$\mathbf{x}_{uv} = (0, -\sin v, \cos v)$$

Segue que

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = -g'^2 + \cos^2 v + \sin^2 v = 1 - g'^2$$

$$F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = -cg' - u \cos v \sin v + u \sin v \cos v = -cg'$$

$$G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = -c^2 + u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v = u^2 - c^2$$

Assim a primeira forma fundamental é dada por:

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = (1 - g'^2)du^2 - 2cg'dudv + (u^2 - c^2)dv^2. \quad (3-42)$$

Como

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_0} & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ g' & \cos v & \sin v \\ c & -u \sin v & u \cos v \end{vmatrix} \\ &= -(u \cos^2 v + u \sin^2 v) \frac{\partial}{\partial x_0} - (ug' \cos v - c \sin v) \frac{\partial}{\partial x_1} + (-ug' \sin v - c \cos v) \frac{\partial}{\partial x_2} \\ &= -u \frac{\partial}{\partial x_0} + (c \sin v - ug' \cos v) \frac{\partial}{\partial x_1} - (ug' \sin v + c \cos v) \frac{\partial}{\partial x_2}, \end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| &= |-(u)^2 + (c \sin v - ug' \cos v)^2 + (ug' \sin v + c \cos v)^2|^{1/2} \\ &= |-u^2 + c^2 + u^2 g'^2|^{1/2} \\ &= |u^2(1 - g'^2) - c^2|^{1/2} = w. \end{aligned}$$

$$\text{Então } N = \frac{1}{w}(-u, c \sin v - ug' \cos v, -(ug' \sin v + c \cos v)).$$

Neste caso

$$e = \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle = -\frac{1}{w}(-ug'') = \frac{1}{w}ug'',$$

$$\begin{aligned} f = \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle &= \frac{1}{w}[-\sin v(c \sin v - ug' \cos v) - \cos v(ug' \sin v + c \cos v)] \\ &= \frac{1}{w}[-c \sin^2 v + ug' \sin v \cos v - ug' \cos v \sin v - c \cos^2 v] \\ &= -\frac{1}{w}c, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g = \langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle &= \frac{1}{w} [-u \cos v (c \sin v - ug' \cos v) + u \sin v (ug' \sin v + c \cos v)] \\
&= \frac{1}{w} [-uc \cos v \sin v + u^2 g' \cos^2 v + u^2 g' \sin^2 v + uc \sin v \cos v] \\
&= \frac{1}{w} u^2 g'.
\end{aligned}$$

Daí, a segunda forma fundamental é dada por

$$II = edu^2 + 2fdudv + gdv^2 = \frac{1}{w}(ug''du^2 - 2cdudv + u^2g'dv^2). \quad (3-43)$$

Portanto as curvaturas Gaussiana e média são dadas por

$$\begin{aligned}
K(u) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} &= \frac{\frac{1}{w}ug''\frac{1}{w}u^2g' - \frac{1}{w}c^2}{(1 - g'^2)(u^2 - c^2) - c^2g'^2} = \frac{u^3g''g' - c^2}{w^2[u^2(1 - g'^2) - c^2]} \\
K(u) &= \frac{u^3g'g'' - c^2}{[u^2(1 - g'^2) - c^2]|u^2(1 - g'^2) - c^2|} \quad (3-44)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = \frac{\frac{1}{w}ug''(u^2 - c^2) - 2\frac{1}{w}ccg' + \frac{1}{w}u^2g'(1 - g'^2)}{2[u^2(1 - g'^2) - c^2]} \\
&= \frac{\frac{1}{w}[ug''(u^2 - c^2) - 2c^2g' + u^2g'(1 - g'^2)]}{2[u^2(1 - g'^2) - c^2]},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$H(u) = \frac{1}{2} \frac{u^2g'(1 - g'^2) - ug''(c^2 - u^2) - 2c^2g'}{[u^2(1 - g'^2) - c^2]|u^2(1 - g'^2) - c^2|^{1/2}}, \quad (3-45)$$

respectivamente.

Vamos examinar o caso quando $EG - F^2 > 0$. Da mesma maneira poderíamos assumir que $EG - F^2 < 0$ e darmos os resultados correspondentes. As equações (3-44) e (3-45) podem ser escritas como

$$K(u) = \frac{-u^3g'g'' + c^2}{[c^2 - u^2(1 - g'^2)]^2} \quad (3-46)$$

e

$$H(u) = \frac{-u^2g'(1 - g'^2) + ug''(c^2 - u^2) + 2c^2g'}{2[c^2 - u^2(1 - g'^2)]^{3/2}}, \quad (3-47)$$

respectivamente.

Novamente, mostraremos que dadas funções $K(u)$ e $H(u)$ existem superfícies helicóidais com curvaturas Gaussiana $K(u)$ e média $H(u)$. A equação (3-46) pode ser escrita por

$$h'(u) = -2uK(u), \quad (3-48)$$

onde

$$h(u) = -(u^2 g'^2 + c^2)[c^2 - u^2(1 - g'^2)]^{-1}. \quad (3-49)$$

Integrando (3-48) obtemos,

$$h(u) = c_1 - 2 \int uKdu, c_1 \in \mathbb{R}. \quad (3-50)$$

Substituindo (3-49) em (3-50) temos que

$$c_1 - 2 \int uKdu = -(u^2 g'^2 + c^2)[c^2 - u^2(1 - g'^2)]^{-1},$$

ou

$$\begin{aligned} (-c_1 + 2 \int uKdu)[c^2 - u^2(1 - g'^2)] &= u^2 g'^2 + c^2, \\ (-c_1 + 2 \int uKdu)(c^2 - u^2) + (-c_1 + 2 \int uKdu)u^2 g'^2 - u^2 g'^2 &= c^2, \\ [(-c_1 + 2 \int uKdu)u^2 - u^2]g'^2 &= -(-c_1 + 2 \int uKdu)(c^2 - u^2) + c^2, \end{aligned}$$

isolando g'^2 obtemos,

$$g'^2 = \frac{-(-c_1 + 2 \int uKdu)(c^2 - u^2) + c^2}{[(-c_1 + 2 \int uKdu)u^2 - u^2]}.$$

Logo

$$g'^2 = \frac{-c^2[(-c_1 + 2 \int uKdu) - 1] + u^2(-c_1 + 2 \int uKdu)}{u^2[(-c_1 + 2 \int uKdu) - 1]} = \frac{-c^2A + u^2(A + 1)}{u^2A}, u \neq 0,$$

onde $A = -1 - c_1 + 2 \int uKdu > 0$, para qualquer $u \neq 0$. Portanto g' é dada por

$$g(u) = c_2 \pm \int \frac{|(u^2 - c^2)A + u^2A|^{1/2}}{|u|A^{1/2}} du, c_2 \in \mathbb{R}, \quad (3-51)$$

onde c_2 é uma constante de integração.

Seja $c \in \mathbb{R}^+$ e $K = K(u)$ uma função diferenciável dada definida em um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Portanto, para qualquer $u_0 \in I$ podemos encontrar um sub-intervalo aberto $U \ni u_0$ e um sub-intervalo I' de \mathbb{R} contendo $c'_1 = (2 \int uKdu)(u_0)$ tal que a função contínua $F : U \times I' \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(u, c_1) = A + k, k > 1$ é positiva para qualquer

$(u, c_1) \in U \times I'$. De fato, temos que

$$\begin{aligned} F(u_0, c_1') &= (-1 - c_1' + 2 \int uKdu)(u_0) + k \\ &= [-1 - (2 \int uKdu)(u_0) + (2 \int uKdu)(u_0)] + k \\ &= -1 + k > 0. \end{aligned}$$

Além disso pela continuidade de F , ela é positiva em um subconjunto de \mathbb{R}^2 da forma $U \times I'$. Daí para qualquer $(u, c_1) \in U \times I'$, $c_2 \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^+$ e dada função $K = K(u)$ podemos definir uma família a dois-parâmetros de curvas

$$a(u) \equiv a(K(u), c; c_1, c_2) = \left(c_2 \pm \int \frac{|(u^2 - c^2)A + u^2A|^{1/2}}{|u|A^{1/2}} du, u, 0 \right). \quad (3-52)$$

Aplicando agora um movimento helicoidal de inclinação c nestas curvas, obtemos uma família a dois-parâmetros de superfícies helicoidais de tipo III^- em \mathbb{R}_1^3 com curvatura Gaussiana $K(u)$, $u \in I$ e inclinação c . Estas superfícies são dadas por

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(c_2 \pm \int \frac{|(u^2 - c^2)A + u^2A|^{1/2}}{|u|A^{1/2}} du + cv, u \cos v, u \sin v \right). \quad (3-53)$$

Estudaremos agora a equação (3-47). Ela pode ser escrita como

$$\phi'(u) + \frac{2}{u}\phi(u) = 2\frac{H(u)}{u}, u \neq 0, \quad (3-54)$$

onde

$$\phi(u) = \frac{g'(u)}{[c^2 - u^2(1 - g'^2)]^{1/2}}. \quad (3-55)$$

Usando o mesmo argumento que usamos na equação (3-33) a solução geral de (3-54) é

$$\phi(u) = \frac{1}{u^2} [2 \int uHdu + c_1], c_1 \in \mathbb{R}. \quad (3-56)$$

Substituindo (3-55) em (3-56) vem

$$\frac{1}{u^2} [2 \int uHdu + c_1] = \frac{g'(u)}{[c^2 - u^2(1 - g'^2)]^{1/2}}.$$

Queremos isolar g'^2 , pois bem:

$$\begin{aligned} \frac{1}{u^4} [2 \int uHdu + c_1]^2 [c^2 - u^2(1 - g'^2)] &= g'^2, \\ [2 \int uHdu + c_1]^2 (c^2 - u^2) + u^2 [2 \int uHdu + c_1]^2 g'^2 &= u^4 g'^2, \end{aligned}$$

$$u^2[(2 \int uHdu + c_1)^2 - u^2]g'^2 = -[2 \int uHdu + c_1]^2(c^2 - u^2),$$

logo

$$g'^2 = -\frac{[2 \int uHdu + c_1]^2(c^2 - u^2)}{u^2[(2 \int uHdu + c_1)^2 - u^2]} = \frac{B^2(c^2 - u^2)}{u^2(u^2 - B^2)}, u \in I_1 = (-c, c), \quad (3-57)$$

onde

$$B(u) = 2 \int uHdu + c_1. \quad (3-58)$$

Daí

$$g(u) = c_2 \pm \int \frac{|B|\sqrt{c^2 - u^2}}{|u|\sqrt{u^2 - B^2}} du, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (3-59)$$

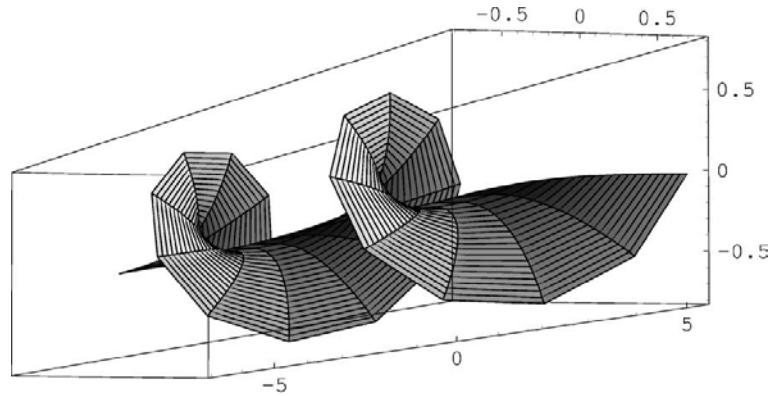
Portanto da mesma maneira podemos definir a família a dois-parâmetros de curvas

$$a(u) \equiv a(H(u), c; c_1, c_2) = \left(c_2 \pm \int \frac{|B|\sqrt{c^2 - u^2}}{|u|\sqrt{u^2 - B^2}} du, u, 0 \right). \quad (3-60)$$

Aplicando então um movimento helicoidal de inclinação c nestas curvas obtemos uma família a dois-parâmetros de superfícies helicoidais de tipo III^- (respectivamente de tipo III^+) em \mathbb{R}_1^3 com curvatura média $H = H(u), u \in I_1$. Estas superfícies são dadas por (ver Fig. 3.3)

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(c_2 \pm \int \frac{|B|\sqrt{c^2 - u^2}}{|u|\sqrt{u^2 - B^2}} du + cv, u \cos v, u \sin v \right) \quad (3-61)$$

e isto completa a demonstração do teorema. \square



Observação 3.6 As superfícies helicoidais dadas por (3-53) e (3-61) são superfícies time-like de tipo III^- .

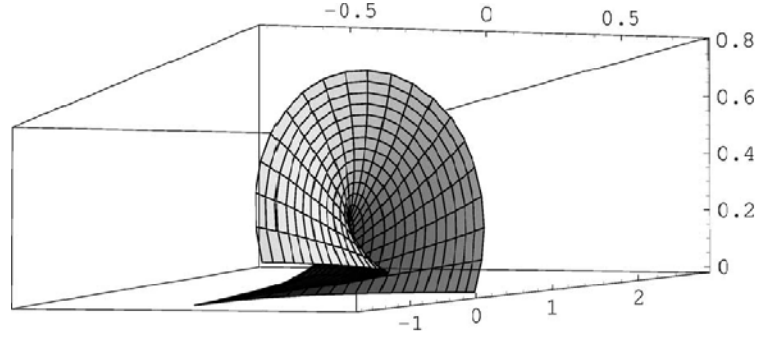


Figura 3.3: Superfície Helicoidal de tipo III⁻, $H(u) = 1/4u$

3.3 Movimento Helicoidal em torno do eixo light-like

Neste parágrafo iremos estudar o caso de superfícies helicoidais M em \mathbb{R}_1^3 que são obtidas por um movimento helicoidal de uma curva $a(u) = (f(u), g(u), 0)$, $f \neq g$, $a \in C^2$ em torno do eixo light-like. Vamos assumir que o eixo de rotação seja gerado pelo vetor $T = (1, 1, 0)$. Como foi mencionado anteriormente, a parametrização destas superfícies são dadas por

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(\left(1 + \frac{v^2}{2}\right)f(u) - \frac{v^2}{2}g(u) + cv, \frac{v^2}{2}f(u) + \left(1 - \frac{v^2}{2}\right)g(u) + cv, f(u)v - g(u)v \right). \quad (3-62)$$

Sem perda de generalidade, fazendo $f(u) = u$, a equação (3-62) se reduz a

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(\left(1 + \frac{v^2}{2}\right)u - \frac{v^2}{2}g(u) + cv, \frac{v^2}{2}u + \left(1 - \frac{v^2}{2}\right)g(u) + cv, (u - g(u))v \right). \quad (3-63)$$

Teorema 3.7 *Seja $a(u) = (u, g(u), 0)$, $u \in I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ uma curva geratriz da superfície helicoidal M imersa em \mathbb{R}_1^3 dada por (3-63). Então as curvaturas Gaussiana e média no ponto $(u, g(u), 0)$ são funções apenas de u , i.e., $K = K(u)$, $H = H(u)$. Além disso, dadas constantes $c \in \mathbb{R}^+$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ e uma função diferenciável $K = K(u)$ (respectivamente $H = H(u)$), $u \in I$ existe uma família de curvas $a(u) \equiv a(K(u), c; c_1, c_2)$ (respectivamente $a(u) \equiv a(H(u), c; c_1, c_2)$) que são soluções das seguintes equações diferenciais*

$$K(u) = \frac{g''(g-u)^3 - c^2(g'-1)^3}{(g'-1)[(g-u)^2(g'+1) - c^2(g'-1)]^2}$$

$$H(u) = \frac{g''(g-u)^3 - 2c^2(g'-1)^3 + (g-u)^2(g'+1)(g'-1)^2}{2(g'-1)[(g-u)^2(g'+1) - c^2(g'-1)][(g'-1)[(g-u)^2(g'+1) - c^2(g'-1)]^{1/2}}.$$

Demonstração. Derivando $\mathbf{x}(u, v)$ em relação a u e v temos:

$$\mathbf{x}_u = \left(\left(1 + \frac{v^2}{2}\right) - \frac{v^2}{2}g', \frac{v^2}{2} + \left(1 - \frac{v^2}{2}\right)g', (1 - g')v \right)$$

$$\mathbf{x}_{uu} = \left(-\frac{v^2}{2}g'', \left(1 - \frac{v^2}{2}\right)g'', -g''v \right)$$

$$\mathbf{x}_v = (vu - vg + c, vu - vg + c, u - g)$$

$$\mathbf{x}_{vv} = (u - g, u - g, 0)$$

$$\mathbf{x}_{uv} = (v - vg', v - vg', 1 - g').$$

Neste caso temos que

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = -\left[\left(1 + \frac{v^2}{2}\right) - \frac{v^2}{2}g'\right]^2 + \left[\frac{v^2}{2} + \left(1 - \frac{v^2}{2}\right)g'\right]^2 + [(1 - g')v]^2 = g'^2 - 1$$

$$F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle$$

$$= -\left[\left(1 + \frac{v^2}{2}\right) - \frac{v^2}{2}g'\right][v(u - g) + c] + \left[\frac{v^2}{2} + \left(1 - \frac{v^2}{2}\right)g'\right][v(u - g) + c] + (1 - g')(u - g)v$$

$$= c(g' - 1)$$

$$G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = -[v(u - g) + c]^2 + [v(u - g) + c]^2 + (u - g)^2 = (u - g)^2.$$

Para obter $N(u, v)$ vamos calcular $\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v$.

$$\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_0} & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \left(1 + \frac{v^2}{2}\right) - \frac{v^2}{2}g' & \frac{v^2}{2} + \left(1 - \frac{v^2}{2}\right)g' & (1 - g')v \\ v(u - g) + c & v(u - g) + c & u - g \end{vmatrix}$$

$$= -\left\{\left(\frac{v^2}{2} + \left(1 - \frac{v^2}{2}\right)g'\right)(u - g) - v(1 - g')[v(u - g) + c]\right\} \frac{\partial}{\partial x_0} + \left\{v(1 - g')[v(u - g) + c] - \left[\left(1 + \frac{v^2}{2}\right) - \frac{v^2}{2}g'\right](u - g)\right\} \frac{\partial}{\partial x_1} + \left\{(1 - g')[v(u - g) + c]\right\} \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Fazendo $\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| = w$. Logo $N = \frac{1}{w}\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v$.

Determinando e, f e g temos

$$e = \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle = \frac{g''(g - u)}{w}.$$

$$f = \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = \frac{1}{w}c(g' - 1)^2$$

$$g = \langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle = \frac{1}{w}(g - u)^2(g' - 1).$$

O discriminante da primeira forma fundamental correspondente é

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= (g'^2 - 1)(u - g)^2 - c^2(g' - 1)^2 \\ &= (g' + 1)(g' - 1)(u - g)^2 - c^2(g' - 1)(g' - 1) \\ &= (g' - 1)[(g' + 1)(u - g)^2 - c^2(g' - 1)] \\ &= (g' - 1)[(g - u)^2(g' + 1) - c^2(g' - 1)]. \end{aligned} \quad (3-64)$$

Daí a curvatura Gaussiana de M é

$$\begin{aligned} K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\frac{1}{w}g''(g - u)\frac{1}{w}(g - u)^2(g' - 1) - \frac{1}{w^2}c^2(g' - 1)^4}{(g' - 1)[(g - u)^2(g' + 1) - c^2(g' - 1)]} \\ &= \frac{g''(g - u)^3(g' - 1) - c^2(g' - 1)^4}{w^2(g' - 1)[(g - u)^2(g' + 1) - c^2(g' - 1)]}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$K = \frac{g''(g-u)^3(g'-1) - c^2(g'-1)^4}{(g'-1)[(g-u)^2(g'+1) - c^2(g'-1)]|(g'-1)[(g-u)^2(g'+1) - c^2(g'-1)]|} \quad (3-65)$$

o qual concluímos que K é uma função apenas de u . Como mencionado anteriormente, podemos estudar outras superfícies de tipo IV^+ , ou as superfícies de tipo IV^- .

A curvatura média da superfície helicoidal M dada por (3-19) no espaço de Minkowski \mathbb{R}_1^3 é dada por

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}.$$

Substituindo os coeficientes da primeira e segunda forma fundamental temos que

$$H = \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{w}g''(g-u)(u-g)^2 - 2\frac{1}{w}c(g'-1)^2c(g'-1) + \frac{1}{w}(g-u)^2(g'-1)(g'-1)^2}{(g'-1)[(g-u)^2(g'+1) - c^2(g'-1)]},$$

isto é,

$$H = \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{w}[g''(g-u)^3 - 2c^2(g'-1)^3 + (g-u)^2(g'+1)(g'-1)^2]}{(g'-1)[(g-u)^2(g'+1) - c^2(g'-1)]},$$

onde $w = |(g'-1)[(g-u)^2(g'+1) - c^2(g'-1)]|^{1/2}$. Portanto

$$H(u) = \frac{g''(g-u)^3 - 2c^2(g'-1)^3 + (g-u)^2(g'+1)(g'-1)^2}{2(g'-1)[(g-u)^2(g'+1) - c^2(g'-1)]|(g'-1)[(g-u)^2(g'+1) - c^2(g'-1)]|^{1/2}}, \quad (3-66)$$

onde concluímos que H é função somente da variável u . \square

Em seguida estudaremos alguns casos particulares destas equações.

Se assumirmos que

$$EG - F^2 = (g'-1)[(g-u)^2(g'+1) - c^2(g'-1)] > 0 \quad (3-67)$$

então a equação (3-65) se reduz a

$$K(u) = \frac{g''(g-u)^3 - c^2(g'-1)^3}{(g'-1)[(g-u)^2(g'+1) - c^2(g'-1)]^2}. \quad (3-68)$$

Conseqüentemente, o problema agora é reduzido a encontrar a solução desta equação diferencial em $g = g(u)$, onde a função $K = K(u)$ é uma função diferenciável dada.

Examinaremos a equação (3-68). Para isto faça $g(u) - u = h(u)$, então $g'(u) - 1 = h'(u)$ e $g''(u) = h''(u)$. Portanto a equação (3-68) toma a forma

$$K(u) = \frac{h^3h'' - c^2h^3}{h'[h^2(h'+2) - c^2h']^2}. \quad (3-69)$$

Esta é uma equação diferencial de segunda ordem não-linear com coeficientes não-constantas, a qual é difícil de ser estudada para qualquer função $K(u)$. Estudaremos esta equação para alguns casos particulares da curvatura Gaussiana.

Primeiro caso $K(u) = 0$.

A equação (3-69) se reduz a

$$h^3 h'' - c^2 h^3 = 0. \quad (3-70)$$

Suponha que $h' = p$, onde $p = p(h)$, daí

$$h'' = h' \frac{dp}{dh} = p \frac{dp}{dh}. \quad (3-71)$$

Portanto, a equação é escrita como

$$h^3 h'' - c^2 h^3 = p \frac{dp}{dh} h^3 - c^2 p^3 = 0. \quad (3-72)$$

Ou seja,

$$\frac{dp}{p^2} = c^2 \frac{dh}{h^3}$$

para $p \neq 0$ e $h \neq 0$. Integrando esta equação temos

$$p(h) = \frac{2h^2}{c^2 - 2c_1 h^2}, c_1 \in \mathbb{R}. \quad (3-73)$$

Da equação (3-71) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dh}{du} &= \frac{2h^2}{c^2 - 2c_1 h^2}, \\ \frac{(c^2 - 2c_1 h^2)}{2h^2} dh &= du \\ \left(\frac{c^2}{2h^2} - c_1 \right) dh &= du, \end{aligned}$$

daí $-\frac{c^2}{2} \frac{1}{h} - c_1 h = u + c_2, c_2 \in \mathbb{R}$.

Se $c_1 = 0$ então $h(u) = -\frac{c^2}{2(u+c_2)}$ e

$$g(u) = u + h(u) = u - \frac{c^2}{2(u+c_2)}, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (3-74)$$

Portanto podemos definir a família a um-parâmetro de curvas

$$a(u) \equiv a(K(u), c; c_2) = \left(u, u - \frac{c^2}{2(u+c_2)}, 0 \right) \quad (3-75)$$

com isto pela equação (3-63) a parametrização das superfícies é dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(u + \frac{c^2 u^2}{4(u+c_2)} + cv, u - \frac{c^2(2-v^2)}{4(u+c_2)} + cv, \frac{c^2 v}{2(u+c_2)} \right). \quad (3-76)$$

Se $c_1 \neq 0$ então $-\frac{c^2}{2h} - c_1 h = u + c_2, c_2 \in \mathbb{R}$ é tal que $\frac{-c^2 - 2c_1 h^2}{2h} = u + c_2$, logo $2c_1 h^2 + 2(u+c_2)h + c^2 = 0$, portanto h é dada por

$$h(u) = \frac{-2(u+c_2) \pm \sqrt{4(u+c_2)^2 - 8c_1^2}}{4c_1} = \frac{1}{2c_1} \left[-(u+c_2) \pm \sqrt{(u+c_2)^2 - 2c_1 c^2} \right]$$

e finalmente

$$g(u) = u + h(u) = u + \frac{1}{2c_1} \left[-(u+c_2) \pm \sqrt{(u+c_2)^2 - 2c_1 c^2} \right]$$

$$g(u) = \frac{1}{2c_1} \left[(2c_1 - 1)u - c_2 \pm \sqrt{(u+c_2)^2 - 2c_1 c^2} \right]. \quad (3-77)$$

Portanto podemos definir a família a dois-parâmetros de curvas

$$a(u) \equiv a(K(u), c; c_1, c_2) = \left(u, \frac{1}{2c_1} \left[(2c_1 - 1)u - c_2 \pm \sqrt{(u+c_2)^2 - 2c_1 c^2} \right], 0 \right). \quad (3-78)$$

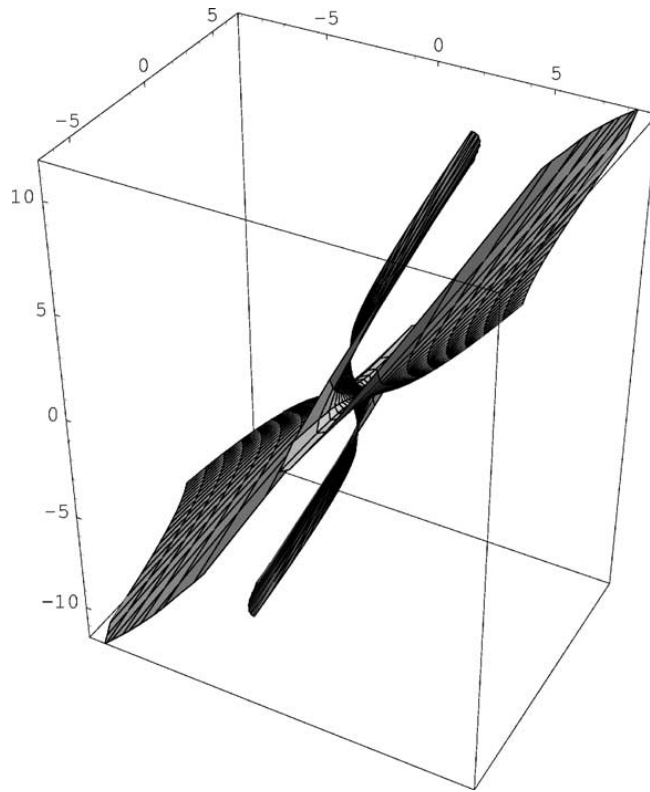


Figura 3.4: Superfície Helicoidal de tipo IV^+ , $K(u) = 0$

Consequentemente pela equação (3-63) a parametrização destas superfícies é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u, v) = & \left(\left(1 + \frac{v^2}{2}\right)u - \frac{v^2}{4c_1} [(2c_1 - 1)u - c_2 \pm \sqrt{(u + c_2)^2 - 2c_1c^2}] + cv, \right. \\ & \frac{v^2u}{2} + \frac{1}{2c_1} \left(1 - \frac{v^2}{2}\right) [(2c_1 - 1)u - c_2 \pm \sqrt{(u + c_2)^2 - 2c_1c^2}] + cv, \\ & \left. uv - \frac{v}{2c_1} [(2c_1 - 1)u - c_2 \pm \sqrt{(u + c_2)^2 - 2c_1c^2}] \right). \end{aligned} \quad (3-79)$$

A partir da análise acima deduzimos que dada a função $K(u) = 0$, podemos determinar uma família a um ou dois-parâmetros de curvas dadas por (3-75) ou (3-78) respectivamente e definir as correspondentes equações (3-76) e (3-79) de superfícies helicóidais imersas em \mathbb{R}_1^3 de tipo IV^+ , com curvatura Gaussiana nula.

Segundo caso.

(i) Considere

$$K(u) = \frac{-c^2a^2}{[(au + b)^2(a + 2) - c^2a]^2} < 0, a \neq 0, \quad (3-80)$$

onde $u \neq \pm \frac{c}{a} \left| \sqrt{\left| \frac{a}{a+2} \right|} - \frac{b}{a} \right|$ e $b \in \mathbb{R}$. Então a equação (3-69) pode ser escrita como

$$K(u) = \frac{h''h^3 - c^2h'^3}{h'[h^2(h' + 2) - c^2h']^2} = \frac{-c^2a^2}{[(au + b)^2(a + 2) - c^2a]^2}$$

onde $h(u) = au + b$ e $g(u) = u + h(u) = (a + 1)u + b$.

Daí, dada a função $K = K(u)$ por (3-80) e seguindo os mesmos processos, existe uma família de superfícies helicóidais imersas em \mathbb{R}_1^3 de tipo IV^+ (ver Fig.3.5), pela equação(3-63) suas parametrizações são dadas por

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(\left(1 - \frac{av^2}{2}\right)u - \frac{bv^2}{2} + cv, u\left(a + 1 - \frac{av^2}{2}\right) + \left(1 - \frac{v^2}{2}\right)b + cv, -(au + b)v \right).$$

(ii) Agora considere

$$K(u) = \frac{2c_1(c_1u^2 + c_2u + c_3)^3 - c^2(2c_1u + c_2)^3}{(2c_1u + c_2)[(c_1u^2 + c_2u + c_3)^2(2c_1u + c_2 + 2) - c^2(2c_1u + c_2)]^2}, \quad (3-81)$$

onde $c_i, i = 1, 2, 3$. Então a equação (3-69) toma a forma

$$K(u) = \frac{h''h^3 - c^2h'^3}{h'[h^2(h' + 2) - c^2h']^2} = \frac{2c_1(c_1u^2 + c_2u + c_3)^3 - c^2(2c_1u + c_2)^3}{(2c_1u + c_2)[(c_1u^2 + c_2u + c_3)^2(2c_1u + c_2 + 2) - c^2(2c_1u + c_2)]^2}.$$

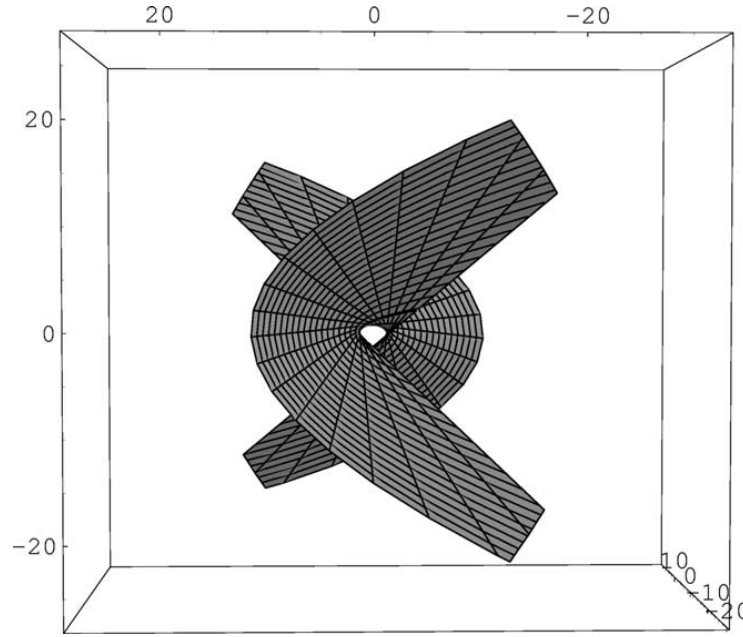


Figura 3.5: Superfície Helicoidal de tipo IV^+ , $K(u) = \frac{-c^2 a^2}{[(au+b)^2(a+2)-c^2 a]}$

Esta equação é satisfeita pela função $h(u) = c_1 u^2 + c_2 u + c_3$, $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$ e portanto $g(u) = u + h(u) = c_1 u^2 + (c_2 + 1)u + c_3$.

Consequentemente, dada a função $K = K(u)$ por (3-81), existe uma família de superfícies helicoidais imersas em \mathbb{R}_1^3 de tipo IV^+ , pela equação (3-63) a parametrização destas superfícies é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u, v) = & \left(-c_1 \frac{v^2}{2} u^2 + (1 - c_2 \frac{v^2}{2}) u - c_3 \frac{v^2}{2} + cv, \right. \\ & c_1 (1 - \frac{v^2}{2}) u^2 + (c_2 + 1 - c_2 \frac{v^2}{2}) u + (1 - \frac{v^2}{2}) c_3 + cv, \\ & \left. (-c_1 u^2 - c_2 u - c_3) v \right). \end{aligned} \quad (3-82)$$

Finalmente estudando a equação $h'' h^3 - c^2 h'^3 = a$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, fazendo a substituição $h' = p(h)$ a equação se reduz a $p \frac{dp}{dh} h^3 - c^2 p^3 = a$, como $h \neq 0$, fica

$$\frac{p dp}{a + c^2 p^3} = \frac{dh}{h^3},$$

multiplicando a igualdade por c^2 temos:

$$\frac{pdp}{p^3 + \left(\sqrt[3]{\frac{a}{c^2}}\right)^3} = c^2 \frac{dh}{h^3}.$$

Usando o método de integração por frações parciais no primeiro membro da equação diferencial tem-se

$$\frac{1}{3q} \left\{ -\frac{1}{p+q} + \left(\frac{p}{\left(p - \frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}q\right)^2} + \frac{q}{\left(p - \frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}q\right)^2} \right) \right\} dp,$$

integrando esta equação obtemos

$$-\frac{1}{3q} \ln|p+q| + \frac{1}{6q} \ln \left[\left(\frac{p - \frac{q}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}q} \right)^2 + 1 \right] + \frac{2}{3\sqrt{3}q} \arctan \left(\frac{p - \frac{q}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}q} \right),$$

que é igual a

$$\ln \left\{ \frac{\left[\left(\frac{p - \frac{q}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}q} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{1}{6q}}}{|p+q|^{\frac{1}{3q}}} \right\} + \frac{2}{3\sqrt{3}q} \arctan \left(\frac{p - \frac{q}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}q} \right),$$

onde $q = \sqrt[3]{\frac{a}{c^2}}$. Agora integrando o segundo membro temos $-\frac{c^2}{2h^2} + c_1, c_1 \in \mathbb{R}$. Portanto a solução da equação diferencial é dada pela equação implícita

$$\ln \left\{ \frac{\left[\left(\frac{p - \frac{q}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}q} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{1}{6q}}}{|p+q|^{\frac{1}{3q}}} \right\} + \frac{2}{3\sqrt{3}q} \arctan \left(\frac{p - \frac{q}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}q} \right) = -\frac{c^2}{2h^2} + c_1. \quad (3-83)$$

Da análise acima, concluímos que para toda função $h = h(u)$ que é solução para a equação diferencial $h' = p$, com $p = p(u)$ uma solução da equação implícita (3-83), podemos encontrar a curvatura $K = K(u)$ (3-69) das superfícies helicoidais de tipo IV^+ cuja parametrização é

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(\left(1 + \frac{v^2}{2}\right)u - \frac{v^2}{2}g(u) + cv, \frac{v^2}{2}u + \left(1 - \frac{v^2}{2}\right)g(u) + cv, (u - g(u))v \right).$$

Terceiro caso.

Está entendido que estamos interessados em funções $g = g(u)$ tal que $h'(u) = g'(u) - 1 \neq 0$ para qualquer $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Portanto podemos considerar a função inversa $u = u(h)$. Consequentemente, a equação (3-69) pode ser escrita como

$$K(u(h)) = \frac{h''h^3 - c^2h'^3}{h'[h^2(h' + 2) - c^2h']^2}. \quad (3-84)$$

Seja $h' = p, p = p(h)$, então

$$K = \frac{p \frac{dp}{dh} h^3 - c^2 p^3}{p[h^2(p + 2) - c^2 p]^2},$$

daí

$$Kp[h^2(p + 2) - c^2 p]^2 - p \frac{dp}{dh} h^3 + c^2 p^3 = 0$$

$$Kp[h^4(p + 2) - 2h^2 c^2 p(p + 2) + c^4 p^2] - p \frac{dp}{dh} h^3 + c^2 p^3 = 0.$$

Como $p \neq 0$, desenvolvendo a expressão e dividindo a mesma por p , obtemos

$$Kh^4(p^2 + 4p + 4) - 2c^2 Kh^2 p^2 - 4c^2 Kh^2 p + Kc^4 p^2 - \frac{dp}{dh} h^3 + c^2 p^2 = 0,$$

e finalmente

$$\frac{dp}{dh} h^3 - [c^2 + K(h^2 - c^2)^2] p^2 - 4Kh^2(h^2 - c^2)p - 4Kh^4 = 0 \quad (3-85)$$

que é a equação diferencial de Ricatti, como é sabido, não temos sua solução geral caso não conheçamos alguma solução particular.

Quarto caso.

Se assumirmos que

$EG - F^2 = (g' - 1)[(g - u)^2(g' + 1) - c^2(g' - 1)] > 0$ então a equação (3-66) se reduz a

$$H(u) = \frac{g''(g - u)^3 - 2c^2(g' - 1)^3 + (g - u)^2(g' + 1)(g' - 1)^2}{2\{(g' - 1)[(g - u)^2(g' + 1) - c^2(g' - 1)]\}^{1/2}}. \quad (3-86)$$

O problema agora é encontrar a solução desta equação em $g = g(u)$, onde a função $H = H(u)$ é uma função diferenciável dada. Podemos encontrar uma superfície helicoidal mínima de tipo IV^+ , basta encontrar a solução da equação

$$g''(g - u)^3 - 2c^2(g' - 1)^3 + (g - u)^2(g' + 1)(g' - 1)^2 = 0 \quad (3-87)$$

De fato, se fizermos $g(u) - u = h(u)$ e substituirmos na equação acima fica

$$h''h^3 - 2c^2h'^3 + h^2(h' + 2)h'^2 = h^3h'' + (h^2 - 2c^2)h'^3 + 2h^2h'^2 = 0$$

Agora fazendo $h' = p$, $p = p(h)$, facilmente obtemos

$$h^3 p \frac{dp}{dh} + (h^2 - c^2)p^3 + 2h^2 p^2 = 0,$$

dividindo por p^3 fica

$$h^3 p^{-2} \frac{dp}{dh} + (h^2 - 2c^2) + \frac{2h^2}{p} = 0,$$

tomando $\omega = \frac{1}{p}$, temos o seguinte:

$$h^3 \omega^2 \left(-\frac{1}{\omega^2} \frac{d\omega}{dh} \right) + (h^2 - 2c^2) + 2h^2 \omega = 0,$$

portanto

$$\frac{d\omega}{dh} - \frac{2}{h}\omega - \frac{h^2 - 2c^2}{h^3} = 0. \quad (3-88)$$

Multiplicando esta expressão por h^{-2} e isolando as parcelas que possuem termos em h no segundo membro da equação temos

$$h^{-2} \frac{d\omega}{dh} - 2h^{-3}\omega = h^{-2} \frac{h^2 - 2c^2}{h^3},$$

isto é,

$$(h^{-2}\omega)' = h^{-3} - 2c^2 h^{-5}.$$

Integrando esta equação obtemos a solução

$$\omega(h) = \frac{1}{p} = -\frac{1}{2} + \frac{c^2 h^{-2}}{2} + c_1 h^2 = \frac{2c_1 h^4 - h^2 + c^2}{2h^2}, c_1 \in \mathbb{R},$$

onde concluimos que a função $h = h(u)$ satisfaz a seguinte equação

$$2c_1 h^4 - 3h^2 - 6(u + c_2)h - 3c^2 = 0,$$

$c_2 \in \mathbb{R}$, e portanto a função $g = g(u)$ satisfaz a equação

$$2c_1 g^4 - 8c_1 u g^3 + 3(4c_1 u - 1)g^2 - 2(4c_1 u^3 + 3c_2)g + 2c_1 u^4 + 3u^2 + 6c_2 u - 3c^2 = 0. \quad (3-89)$$

Consequentemente, para qualquer função $g = g(u)$ que satisfaz a equação (3-89) existe uma superfície helicoidal mínima de tipo IV^+ em \mathbb{R}_1^3 cuja representação paramétrica é dada por (3-63). Por exemplo, se $c_1 = c_2 = 0$, temos que $h(u) = -u \pm \sqrt{u^2 - c^2}$, $u \in (-\infty, -c) \cup (c, \infty)$ e $g(u) = \pm \sqrt{u^2 - c^2}$.

Portanto, podemos definir a curva

$$a(u) \equiv a(H(u), c) = (u, \pm \sqrt{u^2 - c^2}, 0).$$

Daí, existe uma superfície helicoidal mínima de tipo IV^+ imersa em \mathbb{R}_1^3 cuja parametrização, pela equação (3-63) é dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(\left(1 + \frac{v^2}{2}\right)u \pm \frac{v^2}{2} \sqrt{u^2 - c^2} + cv, \frac{v^2}{2}u \pm \left(1 - \frac{v^2}{2}\right) \sqrt{u^2 - c^2} + cv, (u \pm \sqrt{u^2 - c^2})v \right).$$

Não conseguimos resolver a equação (3-86) para qualquer função $H(u)$. Contudo, poderíamos considerar valores especiais para função $H = H(u)$ e então dar soluções para equações correspondentes. Por exemplo, se

$$H(u) = \frac{e^{2u} + 3e^u - 2c^2}{2(e^{2u} + 2e^u - c^2)^{3/2}}, u \neq \ln |\sqrt{1 + c^2} - 1|, \quad (3-90)$$

então a equação (3-86) seria

$$\frac{e^{2u} + 3e^u - 2c^2}{2(e^{2u} + 2e^u - c^2)^{3/2}} = \frac{h''h^3 - 2c^2h'^3 + h^2(h' + 2)h'^2}{\{h'[h^2(h' + 2) - c^2h']\}^{3/2}}.$$

Esta equação é satisfeita pela função $h(u) = e^u$ e portanto para g , tal que $g(u) - u = h(u)$ é dada por $g(u) = u + e^u$.

Consequentemente, dada a função $H = H(u)$ por (3-90) existe uma superfície helicoidal de tipo IV^+ imersa em \mathbb{R}_1^3 cuja parametrização, pela equação (3-63) é dada por

$$r(u, v) = \left(\left(1 + \frac{v^2}{2}\right)u - \frac{v^2}{2}(u + e^u) + cv, u \frac{v^2}{2} + \left(1 - \frac{v^2}{2}\right)(u + e^u) + cv, -e^u v \right).$$

Para os demais casos, ver o artigo [8]

3.4 Superfícies solenóides de tipo I^+ e I^- e algumas propriedades geométricas

Considere uma superfície regular M imersa em \mathbb{R}_1^3 dada pela representação paramétrica $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ de classe C^3 que está definida em um domínio limitado e simplesmente conexo $D \subset \mathbb{R}^2$. Seja $N = N(u, v)$ o campo vetorial normal unitário e $E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle$, $F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle$ e $G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle$ os coeficientes da primeira forma fundamental em M .

O Laplaciano de uma função $\phi = \phi(u, v)|_D$ com respeito a primeira forma

fundamental de M é o operador Δ o qual é definido por

$$\Delta\phi = -\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \left[\left(\frac{G\phi_u - F\phi_v}{\sqrt{EG-F^2}} \right)_u - \left(\frac{F\phi_u - E\phi_v}{\sqrt{EG-F^2}} \right)_v \right]. \quad (3-91)$$

Seja $F(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v))$ uma função vetorial definida em um domínio D , então $\Delta F(u, v)$ é dado por

$$\Delta F(u, v) = (\Delta f_1(u, v), \Delta f_2(u, v), \Delta f_3(u, v)). \quad (3-92)$$

Considere agora o helicóide e o catenóide em \mathbb{R}_1^3 com parametrizações

$$\mathbf{x}(u, v) = (u \sinh v, u \cosh v, c_1 + cv), c > 0, c_1 \in \mathbb{R}, \quad (3-93)$$

$$\mathbf{x}^*(u, v) = (a \cosh \frac{u}{a} \sinh v, a \cosh \frac{u}{a} \cosh v, u), a \in \mathbb{R}. \quad (3-94)$$

Podemos agora demonstrar um resultado o qual diz que a curvatura Gaussiana é auto-valor para o operador laplaciano destas superfícies, o interessante disto é que o auto-vetor que encontramos não um vetor qualquer de \mathbb{R}^3 e sim o campo normal de Gauss.

Teorema 3.8 *O helicóide e o catenóide são ambas superfícies harmônicas. Além disso,*

$$\Delta N_h = 2K_h N_h \quad (3-95)$$

e

$$\Delta N_c = -2K_c N_c, \quad (3-96)$$

onde N_h, K_h, N_c, K_c são campos vetoriais normais unitários e as curvaturas Gaussianas das superfícies correspondentes.

Demonstração. Primeiro mostraremos que as tais superfícies são superfícies harmônicas. Suponha que o helicóide a direita seja de tipo I^- . Neste caso usando (3-92) e (3-93) temos

$$\Delta \mathbf{x}(u, v) = (\Delta(u \sinh v), \Delta(u \cosh v), \Delta(c_1 + cv)), \quad (3-97)$$

onde $f_1(u, v) = u \sinh v$, $f_2(u, v) = u \cosh v$ e $f_3(u, v) = c_1 + cv$. Como utilizaremos a relação (3-91) que está em termos dos coeficientes da primeira forma fundamental, iremos calculá-los. Temos

$$\mathbf{x}_u = (\sinh v, \cosh v, 0)$$

$$\mathbf{x}_v = (u \cosh v, u \sinh v, c), \text{ segue que}$$

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = -(\sinh v)^2 + (\cosh v)^2 = 1,$$

$$F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = -(u \sinh v \cosh v) + (u \cosh v \sinh v) = 0,$$

$$G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = -(u \cosh v)^2 + (u \sinh v)^2 + c^2 = c^2 - u^2.$$

Como estamos supondo I^- temos $EG - F^2 < 0$, isto é, $-(EG - F^2) = u^2 - c^2$.

Daí

$$\begin{aligned}
 \Delta f_1 = \Delta(u \sinh v) &= -\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left[\left(\frac{Gf_{1u} - Ff_{1v}}{\sqrt{EG - F^2}} \right)_u - \left(\frac{Ff_{1u} - Ef_{1v}}{\sqrt{EG - F^2}} \right)_v \right] \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{u^2 - c^2}} \left[\sinh v \left(\frac{c^2 - u^2}{\sqrt{u^2 - c^2}} \right)_u + \left(\frac{u \cosh v}{\sqrt{u^2 - c^2}} \right)_v \right] \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{u^2 - c^2}} \left[\sinh v \left(\frac{-2u(u^2 - c^2) - (c^2 - u^2)u}{\sqrt{u^2 - c^2}} \frac{1}{(u^2 - c^2)} + \frac{u}{\sqrt{u^2 - c^2}} \right) \right] \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{u^2 - c^2}} \left\{ \sinh v \left[\frac{(u^2 - c^2)(u - 2u)}{(u^2 - c^2)\sqrt{u^2 - c^2}} + \frac{u}{\sqrt{u^2 - c^2}} \right] \right\} \\
 &= -\frac{\sinh v}{(u^2 - c^2)} \{0\} = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta f_2 = \Delta(u \cosh v) &= -\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left[\left(\frac{Gf_{2u} - Ff_{2v}}{\sqrt{EG - F^2}} \right)_u - \left(\frac{Ff_{2u} - Ef_{2v}}{\sqrt{EG - F^2}} \right)_v \right] \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{u^2 - c^2}} \left[\cosh v \left(\frac{c^2 - u^2}{\sqrt{u^2 - c^2}} \right)_u + \left(\frac{u \sinh v}{\sqrt{u^2 - c^2}} \right)_v \right] \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{u^2 - c^2}} \left[\cosh v \left(\frac{-2u(u^2 - c^2) - (c^2 - u^2)u}{\sqrt{u^2 - c^2}} \frac{1}{(u^2 - c^2)} + \frac{u \cosh v}{\sqrt{u^2 - c^2}} \right) \right] \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{u^2 - c^2}} \left\{ \cosh v \left[\frac{(u^2 - c^2)(u - 2u)}{(u^2 - c^2)\sqrt{u^2 - c^2}} + \frac{u}{\sqrt{u^2 - c^2}} \right] \right\} \\
 &= -\frac{\cosh v}{\sqrt{(u^2 - c^2)}} \{0\} = 0.
 \end{aligned}$$

Para mostrarmos que $\Delta f_3 = 0$, faremos a seguinte mudança de parâmetros:

$$\begin{cases} u = c \sinh \bar{v}, & u \in \mathbb{R} \\ v = \bar{u} \end{cases}$$
 . Essa mudança é possível pois $T(\bar{u}, \bar{v}) = (c \sinh \bar{v}, \bar{u})$ é bijeção, visto que

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \\ \frac{\partial v}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial v}{\partial \bar{v}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & c \sinh \bar{v} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -c \cosh \bar{v} \neq 0.$$

Portanto a reparametrização do helicóide é dada por

$$\mathbf{y}(\bar{u}, \bar{v}) = (c \sinh \bar{v} \sinh \bar{u}, c \sinh \bar{v} \cosh \bar{u}, c_1 + c\bar{u}).$$

Calculando os coeficientes da primeira forma fundamental nesta parametrização obtemos:

$$\bar{E} = \langle \mathbf{y}_{\bar{u}}, \mathbf{y}_{\bar{u}} \rangle = -(c \sinh \bar{v} \cosh \bar{u})^2 + (c \sinh \bar{v} \sinh \bar{u})^2 + c^2 = c^2 - c^2 \sinh^2 \bar{v}$$

$$\bar{F} = \langle \mathbf{y}_{\bar{u}}, \mathbf{y}_{\bar{v}} \rangle = -(c^2 \sinh \bar{v} \cosh \bar{u} \cosh \bar{v} \sinh \bar{u}) + (c^2 \sinh \bar{v} \sinh \bar{u} \cosh \bar{v} \cosh \bar{u}) = 0$$

$$\bar{G} = \langle \mathbf{y}_{\bar{v}}, \mathbf{y}_{\bar{v}} \rangle = -(c \cosh \bar{v} \sinh \bar{u})^2 + (c \cosh \bar{v} \cosh \bar{u})^2 = c^2 \cosh^2 \bar{v}$$

$$\overline{EG} - \overline{F}^2 = (c^2 - c^2 \sinh^2 \bar{v})c^2 \cosh^2 \bar{v}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \Delta \bar{f}_3(\bar{u}, \bar{v}) &= -\frac{1}{\sqrt{\overline{EG} - \overline{F}^2}} \left[\left(\frac{\overline{G}f_{3\bar{u}} - \overline{F}f_{3\bar{v}}}{\sqrt{\overline{EG} - \overline{F}^2}} \right)_{\bar{u}} - \left(\frac{\overline{F}f_{3\bar{u}} - \overline{E}f_{3\bar{v}}}{\sqrt{\overline{EG} - \overline{F}^2}} \right)_{\bar{v}} \right] \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\overline{EG} - \overline{F}^2}} \left[\left(\frac{\overline{G}c}{\sqrt{\overline{EG} - \overline{F}^2}} \right)_{\bar{u}} - 0 \right] = 0, \end{aligned}$$

pois \overline{G} e $\overline{EG} - \overline{F}^2$ só dependem de \bar{v} . Daí $\Delta \mathbf{x}(u, v) = 0$ e portanto o helicóide de tipo I^- é uma superfície harmônica em \mathbb{R}_1^3 . Análogamente ocorre para o caso do helicóide de tipo I^+ .

Usando agora o mesmo processo podemos provar que $\Delta \mathbf{x}^*(u, v) = 0$. Neste caso veremos que o catenóide é uma superfície de tipo I^+ . Pela equação (3-92) e (3-94) temos: $\Delta \mathbf{x}^*(u, v) = (\Delta r^1(u, v), \Delta r^2(u, v), \Delta r^3(u, v)) = (\Delta(a \cosh \frac{u}{a} \sinh v), \Delta(a \cosh \frac{u}{a} \cosh v), \Delta(u))$.

Calculando E^* , F^* e G^* para o catenóide vem:

$$\begin{aligned} E^* &= \langle \mathbf{x}_u^*, \mathbf{x}_u^* \rangle = -(\sinh \frac{u}{a} \sinh v)^2 + (\sinh \frac{u}{a} \cosh v)^2 + 1^2 = \sinh^2 \frac{u}{a} + 1 = \cosh^2 \frac{u}{a}, \\ F^* &= \langle \mathbf{x}_u^*, \mathbf{x}_v^* \rangle = -(a \sinh \frac{u}{a} \sinh v \cosh \frac{u}{a} \cosh v) + (a \sinh \frac{u}{a} \cosh v \cosh \frac{u}{a} \sinh v) = 0, \\ G^* &= \langle \mathbf{x}_v^*, \mathbf{x}_v^* \rangle = -(a \cosh \frac{u}{a} \cosh v)^2 + (a \cosh \frac{u}{a} \sinh v)^2 + 0^2 = -a^2 \cosh^2 \frac{u}{a}. \end{aligned}$$

Usando a relação (3-91) para as funções coordenadas de $\mathbf{x}^*(u, v)$ obteremos:

$$\begin{aligned} \Delta r^1 &= \Delta(a \cosh \frac{u}{a} \sinh v) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{E^*G^* - F^{*2}}} \left[\left(\frac{G^*r_u^1 - F^*r_v^1}{\sqrt{E^*G^* - F^{*2}}} \right)_u - \left(\frac{F^*r_u^1 - E^*r_v^1}{\sqrt{E^*G^* - F^{*2}}} \right)_v \right] \\ &= -\frac{1}{\sqrt{E^*G^*}} \left[\left(\frac{-a^2 \cosh^2 \frac{u}{a} \sinh \frac{u}{a} \sinh v}{\sqrt{|a|^2 \cosh^4 \frac{u}{a}}} \right)_u + \left(\frac{\cosh^2 \frac{u}{a} a \cosh \frac{u}{a} \cosh v}{\sqrt{|a|^2 \cosh^4 \frac{u}{a}}} \right)_v \right] \\ &= -\frac{a^2}{|a|} \left(\sinh \frac{u}{a} \sinh v \right)_u + \frac{a}{|a|} \left(\cosh \frac{u}{a} \cosh v \right)_v \\ &= -\frac{a^2}{|a|} \frac{1}{a} \cosh \frac{u}{a} \sinh v + \frac{a}{|a|} \cosh \frac{u}{a} \sinh v = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta r^2 &= \Delta\left(a \cosh \frac{u}{a} \cosh v\right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{E^*G^* - F^{*2}}} \left[\left(\frac{G^*r_u^2 - F^*r_v^2}{\sqrt{E^*G^* - F^{*2}}} \right)_u - \left(\frac{F^*r_u^2 - E^*r_v^2}{\sqrt{E^*G^* - F^{*2}}} \right)_v \right] \\
&= -\frac{1}{\sqrt{E^*G^*}} \left[\left(\frac{-a^2 \cosh^2 \frac{u}{a} \sinh \frac{u}{a} \cosh v}{|a| \cosh^2 \frac{u}{a}} \right)_u + \left(\frac{\cosh^2 \frac{u}{a} a \cosh \frac{u}{a} \sinh v}{|a| \cosh^2 \frac{u}{a}} \right)_v \right] \\
&= -\frac{1}{\sqrt{E^*G^*}} \left[-\frac{a^2}{|a|} \frac{1}{a} \cosh \frac{u}{a} \cosh v + \frac{a}{|a|} \cosh \frac{u}{a} \cosh v \right] = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta r^3 &= \Delta(u) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{E^*G^* - F^{*2}}} \left[\left(\frac{G^*r_u^3 - F^*r_v^3}{\sqrt{E^*G^* - F^{*2}}} \right)_u - \left(\frac{F^*r_u^3 - E^*r_v^3}{\sqrt{E^*G^* - F^{*2}}} \right)_v \right] \\
&= -\frac{1}{\sqrt{E^*G^*}} \left[\left(\frac{-a^2 \cosh^2 \frac{u}{a}}{\sqrt{a^2 \cosh^4 \frac{u}{a}}} \right)_u - \left(-\frac{(\cosh^2 \frac{u}{a})0}{\sqrt{a^2 \cosh^4 \frac{u}{a}}} \right)_v \right] \\
&= -\frac{1}{\sqrt{E^*G^*}} \left[\left(\frac{-a^2 \cosh^2 \frac{u}{a}}{|a| \cosh^2 \frac{u}{a}} \right)_u \right] \\
&= -\frac{1}{\sqrt{E^*G^*}} \left[\left(\frac{-a^2}{|a|} \right)_u \right] = 0,
\end{aligned}$$

Portanto o catenóide também é uma superfície harmônica.

Agora provaremos as equações (3-95) e (3-96). Primeiro determinaremos o campo vetorial normal unitário do helicóide de tipo I^- .

$$\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_0} & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \sinh v & \cosh v & 0 \\ u \cosh v & u \sinh v & c \end{vmatrix} = -c \cosh v \frac{\partial}{\partial x_0} - c \sinh v \frac{\partial}{\partial x_1} - u \frac{\partial}{\partial x_2},$$

$\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| = |\langle \mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v \rangle|^{1/2} = |u^2 - c^2|^{1/2}$. Como $u^2 - c^2 = -(EG - F^2) > 0$ daí $\|r_u \wedge r_v\| = (u^2 - c^2)^{1/2}$. Portanto $N_h(u, v)$ é dado por:

$$N_h(u, v) = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|} = -\left(\frac{c \cosh v}{\sqrt{u^2 - c^2}}, \frac{c \sinh v}{\sqrt{u^2 - c^2}}, \frac{u}{\sqrt{u^2 - c^2}} \right) \quad (3-98)$$

e como $F = 0$, podemos determinar a curvatura Gaussiana do helicóide pela seguinte expressão:

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right].$$

Logo

$$K_h = -\frac{1}{2\sqrt{u^2 - c^2}} \left[0 + \left(\frac{-2u}{\sqrt{u^2 - c^2}} \right)_u \right] = \frac{1}{\sqrt{u^2 - c^2}} \left[\frac{(u^2 - c^2) - u^2}{\sqrt{u^2 - c^2}} \frac{1}{u^2 - c^2} \right],$$

portanto

$$K_h = -\frac{c^2}{(u^2 - c^2)^2}. \quad (3-99)$$

Como

$$\Delta N_h(u, v) = -\left(\Delta \left(\frac{c \cosh v}{\sqrt{u^2 - c^2}} \right), \Delta \left(\frac{c \sinh v}{\sqrt{u^2 - c^2}} \right), \Delta \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 - c^2}} \right) \right), \quad (3-100)$$

e fazendo

$$N_1 = \frac{c \cosh v}{\sqrt{u^2 - c^2}},$$

$$N_2 = \frac{c \sinh v}{\sqrt{u^2 - c^2}}$$

e

$$N_3 = \frac{u}{\sqrt{u^2 - c^2}}.$$

Temos pela equação (3-91) que

$$\begin{aligned} \Delta N_1 &= \Delta \left(\frac{c \cosh v}{\sqrt{u^2 - c^2}} \right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left[\left(\frac{GN_{1u} - FN_{1v}}{\sqrt{EG - F^2}} \right)_u - \left(\frac{FN_{1u} - EN_{1v}}{\sqrt{EG - F^2}} \right)_v \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{u^2 - c^2}} \left[\left(\frac{uc \cosh v}{\sqrt{u^2 - c^2}} \right)_u + \left(\frac{c \sinh v}{\sqrt{u^2 - c^2}} \right)_v \right] \\ &= \frac{c}{\sqrt{u^2 - c^2}} \left[\left(\frac{\cosh v (u^2 - c^2) - u \cosh v (2u)}{(u^2 - c^2)^2} + \frac{\cosh v}{u^2 - c^2} \right) \right] \\ &= \frac{c}{\sqrt{u^2 - c^2}} \cosh v \left[\frac{(u^2 - c^2) - 2u^2}{(u^2 - c^2)^2} + \frac{1}{u^2 - c^2} \right] = \\ &= \frac{c}{\sqrt{u^2 - c^2}} \cosh v \left[\left(\frac{(u^2 - c^2) - 2u^2 + (u^2 - c^2)}{(u^2 - c^2)^2} \right) \right] \\ &= -\frac{2c^2}{(u^2 - c^2)^2} \frac{c \cosh v}{\sqrt{u^2 - c^2}} \\ &= 2K_h N_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta N_2 &= \Delta \left(\frac{c \sinh v}{\sqrt{u^2 - c^2}} \right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left[\left(\frac{GN_{2u} - FN_{2v}}{\sqrt{EG - F^2}} \right)_u - \left(\frac{FN_{2u} - EN_{2v}}{\sqrt{EG - F^2}} \right)_v \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{u^2 - c^2}} \left[\left(\frac{uc \sinh v}{u^2 - c^2} \right)_u + \left(\frac{c \cosh v}{u^2 - c^2} \right)_v \right] \\
&= \frac{c}{\sqrt{u^2 - c^2}} \left[\left(\frac{\sinh v (u^2 - c^2) - u \sinh v (2u)}{(u^2 - c^2)^2} + \frac{\sinh v}{u^2 - c^2} \right) \right] \\
&= \frac{c}{\sqrt{u^2 - c^2}} \sinh v \left[\frac{(u^2 - c^2) - 2u^2}{(u^2 - c^2)^2} + \frac{1}{u^2 - c^2} \right] = \\
&= \frac{c}{\sqrt{u^2 - c^2}} \sinh v \left[\frac{(u^2 - c^2) - 2u^2 + (u^2 - c^2)}{(u^2 - c^2)^2} \right] \\
&= -\frac{2c^2}{(u^2 - c^2)^2} \frac{c \sinh v}{\sqrt{u^2 - c^2}} \\
&= 2K_h N_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta N_3 &= \Delta \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 - c^2}} \right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left[\left(\frac{GN_{3u} - FN_{3v}}{\sqrt{EG - F^2}} \right)_u - \left(\frac{FN_{3u} - EN_{3v}}{\sqrt{EG - F^2}} \right)_v \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{u^2 - c^2}} \left[\left(\frac{c^2}{u^2 - c^2} \right)_u - 0 \right] \\
&= \frac{c^2}{\sqrt{u^2 - c^2}} \left[\frac{-2u}{(u^2 - c^2)^2} \right] \\
&= -\frac{2c^2}{u^2 - c^2} \frac{u}{\sqrt{u^2 - c^2}} \\
&= 2K_h N_3
\end{aligned}$$

Portanto

$$\Delta N_h = -(\Delta N_1, \Delta N_2, \Delta N_3) = -2K_h(N_1, N_2, N_3) = 2K_h N_h.$$

O catenóide em \mathbb{R}_1^3 dado por (3-94) é uma superfície de revolução de tipo I^- , ver

[1]. Determinando o campo vetorial normal unitário para o catenóide temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u^* \wedge \mathbf{x}_v^* &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_0} & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \sinh \frac{u}{a} \sinh v & \sinh \frac{u}{a} \cosh v & 1 \\ a \cosh \frac{u}{a} \cosh v & a \cosh \frac{u}{a} \sinh v & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left(a \cosh \frac{u}{a} \sinh v \right) \frac{\partial}{\partial x_0} + \left(a \cosh \frac{u}{a} \cosh v \right) \frac{\partial}{\partial x_1} - \left(a \cosh \frac{u}{a} \sinh \frac{u}{a} \right) \frac{\partial}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_u^* \wedge \mathbf{x}_v^*\| &= |\langle \mathbf{x}_u^* \wedge \mathbf{x}_v^*, \mathbf{x}_u^* \wedge \mathbf{x}_v^* \rangle|^{1/2} \\ &= |-(a \cosh \frac{u}{a} \sinh v)^2 + (a \cosh \frac{u}{a} \cosh v)^2 + (a \cosh \frac{u}{a} \sinh \frac{u}{a})^2|^{1/2} \\ &= |a^2 \cosh^2 \frac{u}{a} [(\cosh^2 v - \sinh^2 v) + \sinh^2 \frac{u}{a}]|^{1/2} = |a^2 \cosh^4 \frac{u}{a}|^{1/2} \\ &= a^2 \cosh^2 \frac{u}{a}, \end{aligned}$$

onde estamos supondo $a > 0$. Daí

$$N_c(u, v) = \frac{\mathbf{x}_u^* \wedge \mathbf{x}_v^*}{\|\mathbf{x}_u^* \wedge \mathbf{x}_v^*\|} = \frac{1}{\cosh \frac{u}{a}} (\sinh v, \cosh v, -\sinh \frac{u}{a}). \quad (3-101)$$

Utilizando a mesma expressão da qual usamos para determinar a curvatura Gaussiana do helicóide, agora para o catenóide. Isto é,

$$\begin{aligned} K_c &= -\frac{1}{2\sqrt{E^*G^*}} \left[\left(\frac{E_v^*}{\sqrt{E^*G^*}} \right)_v + \left(\frac{G_u^*}{\sqrt{E^*G^*}} \right)_u \right], \\ K_c &= -\frac{1}{2\sqrt{a^2 \cosh^4 \frac{u}{a}}} \left[\frac{(-a^2 \cosh^2 \frac{u}{a})_u}{\sqrt{a^2 \cosh^4 \frac{u}{a}}} \right]_u = -\frac{1}{2|a| \cosh^2 \frac{u}{a}} (-a^2) \left[\frac{2 \frac{1}{a} \sinh \frac{u}{a} \cosh \frac{u}{a}}{2|a| \cosh^2 \frac{u}{a}} \right]_u = \frac{1}{a} \left(\frac{\sinh \frac{u}{a}}{\cosh \frac{u}{a}} \right)_u, \end{aligned}$$

ou seja,

$$K_c(u) = \frac{1}{a^2} \frac{1}{\cosh^4 \frac{u}{a}} \quad (3-102)$$

Agora aplicando o operador Δ em (3-101) temos

$$\Delta N_c = \left(\Delta \left(\frac{\sinh v}{\cosh \frac{u}{a}} \right), \Delta \left(\frac{\cosh v}{\cosh \frac{u}{a}} \right), \Delta \left(\frac{-\sinh \frac{u}{a}}{\cosh \frac{u}{a}} \right) \right),$$

onde

$$N_1^* = \frac{\sinh v}{\cosh \frac{u}{a}}, \quad N_2^* = \frac{\cosh v}{\cosh \frac{u}{a}} \quad \text{e} \quad N_3^* = -\frac{\sinh \frac{u}{a}}{\cosh \frac{u}{a}}.$$

Temos então que:

$$\begin{aligned}
\Delta N_1^* &= -\frac{1}{\sqrt{E^*G^* - F^{*2}}} \left[\left(\frac{G^*N_{1u}^* - F^*N_{1v}^*}{\sqrt{E^*G^* - F^{*2}}} \right)_u - \left(\frac{F^*N_{1u}^* - E^*N_{1v}^*}{\sqrt{E^*G^* - F^{*2}}} \right)_v \right] \\
&= -\frac{1}{a \cosh^2 \frac{u}{a}} \left[\left(\frac{-a^2 \cosh^2 \frac{u}{a} \left(-\frac{1}{a} \sinh v \sinh \frac{u}{a}\right)}{a \cosh^2 \frac{u}{a} \cosh^2 \frac{u}{a}} \right)_u - \left(\frac{-\cosh^2 \frac{u}{a} \cosh v / \cosh \frac{u}{a}}{a \cosh^2 \frac{u}{a}} \right)_v \right] \\
&= -\frac{1}{a \cosh^2 \frac{u}{a}} \left[\frac{a}{a} \sinh v \left(\frac{1 \cosh^3 \frac{u}{a} - 2 \cosh \frac{u}{a} \sinh^2 \frac{u}{a}}{\cosh^4 \frac{u}{a}} \right) + \frac{1}{a} \frac{\sinh v}{\cosh \frac{u}{a}} \right] \\
&= -\frac{1}{a \cosh^2 \frac{u}{a}} \left[\frac{\sinh v \ 2 \cosh \frac{u}{a} (\cosh^2 \frac{u}{a} - \sinh^2 \frac{u}{a})}{a \cosh^4 \frac{u}{a}} \right] \\
&= (-2) \frac{1}{a^2 \cosh^4 \frac{u}{a}} \left(\frac{\sinh v}{\cosh \frac{u}{a}} \right) \\
&= -2K_c N_1^*,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta N_2^* &= -\frac{1}{\sqrt{E^*G^* - F^{*2}}} \left[\left(\frac{G^*N_{2u}^* - F^*N_{2v}^*}{\sqrt{E^*G^* - F^{*2}}} \right)_u - \left(\frac{F^*N_{2u}^* - E^*N_{2v}^*}{\sqrt{E^*G^* - F^{*2}}} \right)_v \right] \\
&= -\frac{1}{a \cosh^2 \frac{u}{a}} \left[\left(\frac{-a^2 \cosh^2 \frac{u}{a} \left(-\frac{1}{a} \cosh v \sinh \frac{u}{a}\right)}{a \cosh^2 \frac{u}{a} \cosh^2 \frac{u}{a}} \right)_u - \left(\frac{-\cosh^2 \frac{u}{a} \sinh v / \cosh \frac{u}{a}}{a \cosh^2 \frac{u}{a}} \right)_v \right] \\
&= -\frac{1}{a \cosh^2 \frac{u}{a}} \left[\frac{a}{a} \cosh v \left(\frac{1 \cosh^3 \frac{u}{a} - 2 \cosh \frac{u}{a} \sinh^2 \frac{u}{a}}{\cosh^4 \frac{u}{a}} \right) + \frac{1}{a} \frac{\cosh v}{\cosh \frac{u}{a}} \right] \\
&= -\frac{1}{a \cosh^2 \frac{u}{a}} \left[\frac{\cosh v \ 2 \cosh \frac{u}{a} (\cosh^2 \frac{u}{a} - \sinh^2 \frac{u}{a})}{a \cosh^4 \frac{u}{a}} \right] \\
&= (-2) \frac{1}{a^2 \cosh^4 \frac{u}{a}} \left(\frac{\cosh v}{\cosh \frac{u}{a}} \right) \\
&= -2K_c N_2^*,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta N_3^* &= -\frac{1}{\sqrt{E^*G^* - F^{*2}}} \left[\left(\frac{G^*N_{3u}^* - F^*N_{3v}^*}{\sqrt{E^*G^* - F^{*2}}} \right)_u - \left(\frac{F^*N_{3u}^* - E^*N_{3v}^*}{\sqrt{E^*G^* - F^{*2}}} \right)_v \right] \\
&= -\frac{1}{a \cosh^2 \frac{u}{a}} \left[\left(\frac{-a^2 \cosh^2 \frac{u}{a} \left(-\frac{1}{a}\right)}{a \cosh^2 \frac{u}{a} \cosh^2 \frac{u}{a}} \right)_u \right] \\
&= -\frac{1}{a \cosh^2 \frac{u}{a}} \left[-\frac{2 \sinh \frac{u}{a}}{a \cosh^3 \frac{u}{a}} \right] \\
&= (-2) \frac{1}{a^2 \cosh^4 \frac{u}{a}} \left(-\frac{\sinh \frac{u}{a}}{\cosh \frac{u}{a}} \right) \\
&= -2K_c N_3^*.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\Delta N_c = (\Delta N_1^*, \Delta N_2^*, \Delta N_3^*) = -2K_c(N_1^*, N_2^*, N_3^*) = -2K_c N_c.$$

Daí a relação (3-96) se verifica e o teorema está provado. \square

Um resultado que daremos mostra que uma classe específica de superfície helicóidais são mínimas se, e somente se ela é harmônica, aqui escrevemos o laplaciano da superfície em termos da curvatura média e do campo normal de Gauss.

Teorema 3.9 *Para toda superfície helicoidal M^2 imersa em \mathbb{R}_1^3 de tipo I^+ dada pela equação (3-40), com curvatura média $H = H(u)$, a seguinte relação se verifica*

$$\Delta \mathbf{x}(u, v) = \frac{-2u\sqrt{c^2 - u^2}}{w\sqrt{u^2 + B^2}} H(u) N, \quad (3-103)$$

onde $w^2 = EG - F^2$, $B(u) = 2 \int uHdu + c_1$ e N é o campo vetorial normal unitário de M^2 .

Demonstração. Primeiramente calculando $N(u, v)$ para M^2 vem:

$$\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v = \left(-c \cosh v + u \sinh v \frac{|B|\sqrt{c^2 - u^2}}{|u|\sqrt{u^2 + B^2}} \right) \frac{\partial}{\partial x_0} + \left(-c \sinh v + u \cosh v \frac{|B|\sqrt{c^2 - u^2}}{|u|\sqrt{u^2 + B^2}} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} - u \frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\| &= \left| - \left[-c \cosh v + u \sinh v \frac{|B|\sqrt{c^2 - u^2}}{|u|\sqrt{u^2 + B^2}} \right]^2 + \left[-c \sinh v + u \cosh v \frac{|B|\sqrt{c^2 - u^2}}{|u|\sqrt{u^2 + B^2}} \right]^2 + u^2 \right|^{1/2} \\ &= \left| - \left[c^2 \cosh^2 v - 2uc \cosh v \sinh v \frac{|B|\sqrt{c^2 - u^2}}{|u|\sqrt{u^2 + B^2}} + u^2 \sinh^2 v \frac{|B|^2(c^2 - u^2)}{|u|^2(u^2 + B^2)} \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[c^2 \sinh^2 v - 2uc \sinh v \cosh v \frac{|B|\sqrt{c^2 - u^2}}{|u|\sqrt{u^2 + B^2}} + u^2 \cosh^2 v \frac{|B|^2(c^2 - u^2)}{|u|^2(u^2 + B^2)} \right] + u^2 \right|^{1/2} \\ &= \left| -c^2 \cosh^2 v + c^2 \sinh^2 v + u^2 \frac{|B|^2(c^2 - u^2)}{|u|^2(u^2 + B^2)} (\cosh^2 v - \sinh^2 v) + u^2 \right|^{1/2} \\ &= \left| \frac{(c^2 - u^2)[|B|^2 - u^2 - B^2]}{u^2 + B^2} \right|^{1/2} \\ &= | -u^2 |^{1/2} \left| \frac{c^2 - u^2}{u^2 + B^2} \right|^{1/2} \\ &= |u| \frac{\sqrt{c^2 - u^2}}{\sqrt{u^2 + B^2}}. \end{aligned}$$

Logo

$$N = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|} = \frac{1}{|u| \frac{\sqrt{c^2 - u^2}}{\sqrt{u^2 + B^2}}} (-c \cosh v + uk \sinh v, -c \cosh v + uk \sinh v, -u),$$

onde $k = \frac{|B|\sqrt{c^2 - u^2}}{|u|\sqrt{u^2 + B^2}}$. Observe que $|u| \frac{\sqrt{c^2 - u^2}}{\sqrt{u^2 + B^2}} = \frac{k}{|B|}|u|^2$, temos então que

$$N = \left(\frac{(uk \sinh v - c \cosh v)|B|}{|u|^2 k}, \frac{(uk \cosh v - c \sinh v)|B|}{|u|^2 k}, -\frac{u|B|}{|u|^2 k} \right).$$

Portanto o campo vetorial normal unitário da família a dois-parâmetros de superfícies helicóidais de tipo I^+ imersas em \mathbb{R}_1^3 com curvatura $H = H(u)$, dada por (3-40) é

$$N = \left(\frac{-i(uk \sinh v - c \cosh v)|B|}{u^2 k}, \frac{-i(uk \cosh v - c \sinh v)|B|}{u^2 k}, i \frac{|B|}{uk} \right), \quad (3-104)$$

onde $k = \frac{|B|\sqrt{c^2 - u^2}}{|u|\sqrt{u^2 + B^2}}$ e $B = B(u)$ é dada por (3-37).

Aplicando agora o operador de Laplace em (3-40) obtemos

$$\Delta \mathbf{x}(u, v) = \left(\Delta(u \sinh v), \Delta(u \cosh v), \Delta \left(cv + c_2 + \int \frac{|B|\sqrt{c^2 - u^2}}{|u|\sqrt{u^2 + B^2}} du \right) \right). \quad (3-105)$$

Por outro lado usando a relação (3-91) tem-se

$$\begin{aligned} \Delta(u \sinh v) &= -\frac{1}{w} \left[\left(\frac{(c^2 - u^2) \sinh v - cg' u \cosh v}{w} \right)_u - \left(\frac{cg' \sinh v - (1 + g'^2) u \cosh v}{w} \right)_v \right] \\ &= -\frac{1}{w} \left[\frac{-2u \sinh v - c \cosh v (ug'' + g')}{w} - \frac{1}{w^2} [(c^2 - u^2) \sinh v - cg' u \cosh v] w' \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{w} (cg' \cosh v - (1 + g'^2) u \sinh v) \right] \\ &= \frac{1}{w^3} [(u \sinh v - ug'^2 \sinh v + c(ug'' + 2g') \cosh v) w \\ &\quad + w'((c^2 - u^2) \sinh v - cg' u \cosh v)], \end{aligned} \quad (3-106)$$

onde

$$w' = \frac{-u(1 + g'^2) - u^2 g' g''}{\sqrt{c^2 - u^2} (1 + g'^2)}. \quad (3-107)$$

Agora substituindo a relação (3-107) em (3-106), colocando $(c \cosh v - ug' \sinh v)$ em

evidência e usando o fato que $EG - F^2 > 0$ temos

$$\Delta(u \sinh v) = \frac{(c \cosh v - ug' \sinh v)[ug''(c^2 - u^2) + g'(2c^2 - u^2 - u^2 g'^2)]}{w^3}.$$

Pela equação (3-38) g' é dada por $g' = \frac{|B|\sqrt{c^2 - u^2}}{|u|\sqrt{u^2 + B^2}}$, substituindo g' na expressão acima e manipulando o sinal dentro do colchete tem-se

$$\begin{aligned} & \Delta(u \sinh v) \\ = & \frac{u^2 g'(1 + g'^2) - ug''(c^2 - u^2) - 2c^2 g'}{[c^2 - u^2(1 + g'^2)]^{3/2}} \left\{ \frac{1}{|c^2 - u^2(1 + g'^2)|^{1/2}} \left[u \frac{|B|\sqrt{c^2 - u^2}}{|u|\sqrt{u^2 + B^2}} \sinh v - c \cosh v \right] \right\}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\Delta(u \sinh v) = \frac{2iu^2 k}{wB} H(u) \frac{-i(uk \sinh v - c \cosh v)|B|}{u^2 k} \quad (3-108)$$

onde $H = H(u)$ é dada por (3-26). De maneira análoga obtemos

$$\Delta(u \cosh v) = \frac{2iu^2 k}{wB} H(u) \frac{-i(uk \cosh v - c \sinh v)|B|}{u^2 k} \quad (3-109)$$

$$\Delta\left(cv + c_2 + \int \frac{|B|\sqrt{c^2 - u^2}}{|u|\sqrt{u^2 + B^2}} du\right) = \frac{2iu^2 k}{wB} H(u) \frac{i|B|}{uk}. \quad (3-110)$$

Substituindo as equações (3-108) à (3-110) na relação (3-105) e usando a relação (3-104) temos

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{x}(u, v) = & \left(\frac{2iu^2 k}{wB} H(u) \frac{-i(uk \sinh v - c \cosh v)|B|}{u^2 k}, \frac{2iu^2 k}{wB} H(u) \frac{-i(uk \cosh v - c \sinh v)|B|}{u^2 k}, \right. \\ & \left. \frac{2iu^2 k}{wB} H(u) \frac{i|B|}{uk} \right). \end{aligned}$$

Logo

$$\Delta \mathbf{x}(u, v) = \frac{2iu^2 k}{wB} H(u) \left(\frac{-i(uk \sinh v - c \cosh v)|B|}{u^2 k}, \frac{-i(uk \cosh v - c \sinh v)|B|}{u^2 k}, \frac{i|B|}{uk} \right).$$

Por fim

$$\Delta \mathbf{x}(u, v) = \frac{2iu^2 k}{wB} H(u) N = \frac{2iu^2 \left(\frac{|B|\sqrt{c^2 - u^2}}{|u|\sqrt{u^2 + B^2}} \right)}{wB} N,$$

portanto

$$\Delta \mathbf{x}(u, v) = \frac{2iu\sqrt{c^2 - u^2}}{w\sqrt{u^2 + B^2}} N.$$

Com isto concluímos que a relação (3-103) se verifica e a prova do teorema está completa.

□

Defina agora em \mathbb{R}^2 uma forma bilinear simétrica $\langle x, x \rangle = -x_0^2 + x_1^2$ que transforma um espaço bidimensional em um espaço pseudo-Euclidiano \mathbb{R}_1^2 . O conjunto G de todas as transformações lineares homogêneas que preservam esta forma é dada por

$$\begin{pmatrix} \pm \cosh \theta & \pm \sinh \theta \\ \pm \sinh \theta & \pm \cosh \theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R}. \quad (3-111)$$

Cada transformação $A : \mathbb{R}_1^2 \rightarrow \mathbb{R}_1^2$ aplica o conjunto $\{-x^2 + y^2 = 1\} \cup \{-x^2 + y^2 = -1\}$, isto é, um par de pseudo-círculos de raio real e um imaginário sobre este par. No caso de um espaço Euclidiano \mathbb{R}^2 cada rotação é descrita por um ângulo φ de rotação de um referencial ortogonal. Um parâmetro análogo é introduzido por um plano pseudo-Euclidiano \mathbb{R}_1^2 . Então, ao invés de uma rotação ordinária Euclidiana de ângulo φ podemos intruduzir o ângulo de rotação hiperbólica θ e neste caso G torna-se um grupo hiperbólico de rotações. Observe que este grupo consiste de quatro componentes conexas. Através destas componentes somente uma, isto é, $\begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix}$, é um subgrupo.

Considere agora uma curva parametrizada diferenciável $\gamma, \gamma = \gamma(s), s \in I \subset \mathbb{R}$ em \mathbb{R}_1^3 de classe C^3 , onde s é parâmetro natural e seja $\{t, n, b\}$ o referencial de Frenet(triedro). Seja ρ um número real tal que $0 < \rho < \min \frac{1}{|k|}$, onde k é a curvatura da curva γ . Considere um ponto P de γ e tome um plano normal de γ em P em \mathbb{R}_1^3 . Seja $C : -x^2 + y^2 = \rho^2$ um pseudo-círculo deste plano de raio real ρ . Como o ponto P se move ao longo da curva γ o pseudo-círculo C produz uma superfície solenóide. Uma representação paramétrica deste solenóide é

$$\mathbf{X}(s, \theta) = \gamma(s) + (\rho \cosh \theta)n + (\rho \sinh \theta)b. \quad (3-112)$$

Se supormos agora que a curva considerada γ é a hélice hiperbólica com representação paramétrica

$$\gamma(s) = (\alpha \sinh s, \alpha \cosh s, cs) \quad (3-113)$$

então a equação (3-112) da solenóide correspondente é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(s, \theta) = & ((\alpha + \rho \cosh \theta) \sinh s + c\rho \sinh \theta \cosh s, \\ & (\alpha + \rho \cosh \theta) \cosh s + c\rho \sinh \theta \sinh s, \\ & cs + \alpha\rho \sinh \theta). \end{aligned} \quad (3-114)$$

Um fato interessante que mostraremos agora, diz que o laplaciano de uma superfície solenóide com parametrização dada acima, pode ser escrito no referencial de Frenet $\{t, n, b\}$. Para ser mais preciso, o laplaciano se encontra no plano gerado pelos

vetores n e b , que são os vetores normal e binormal à hélice hiperbólica.

Teorema 3.10 *As superfícies solenóides dadas por (3-114) são superfícies imersas em \mathbb{R}_1^3 de tipo I^- cuja curvatura Gaussiana é função de um único parâmetro θ dada por*

$$K(\theta) = A(\theta) \cosh \theta. \quad (3-115)$$

Além disso, $\Delta \mathbf{X}(s, \theta) = B(\theta)n + C(\theta)b$, onde $A(\theta)$, $B(\theta)$, $C(\theta)$ são funções conhecidas do ângulo θ de rotações hiperbólicas e Δ é o operador de Laplace.

Demonstração. Se supusermos que $c^2 = 1 + \alpha^2$, para as constantes da hélice γ dada por (3-113), então facilmente temos $\|t\|^2 = \|\gamma'(s)\|^2 = |\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle| = |\langle (\alpha \sinh s, \alpha \cosh s, c), (\alpha \sinh s, \alpha \cosh s, c) \rangle| = |-\alpha^2 \sinh^2 s + \alpha^2 \cosh^2 s + c^2| = |c^2 - \alpha^2| = 1$. Daí, neste caso a curva está parametrizada pelo seu comprimento de arco s . Além disso, a curvatura k e torção τ desta hélice são dadas por $k = \alpha$, $\tau = c$. De fato, como γ é p.c.a, temos que $k(s) = \|\gamma''(s)\|$, $\gamma(s)$ é uma expressão local para a curva γ dada por $\gamma(s) = (\alpha \sinh s, \alpha \cosh s, cs)$ e $\gamma'(s)$ um campo de vetores tangentes definido ao longo de α , daí $\gamma'' = \alpha \sinh s \frac{\partial}{\partial x_0} + \alpha \cosh s \frac{\partial}{\partial x_1}$. E pela definição de curvatura $k = k(s)$, $k(s) = \|\gamma''(s)\| = |\langle \gamma'', \gamma'' \rangle|^{1/2} = |\langle \alpha \sinh s \frac{\partial}{\partial x_0} + \alpha \cosh s \frac{\partial}{\partial x_1}, \alpha \sinh s \frac{\partial}{\partial x_0} + \alpha \cosh s \frac{\partial}{\partial x_1} \rangle| = |-\alpha|^{1/2} = \alpha > 0$. Calculando agora a torção $\tau = \tau(s)$, pelas equações (1-8) $b'(s) = -\tau(s)n(s)$, onde $b(s) = t(s) \wedge n(s)$, com $t(s) = r'(s)$ e $n(s) = \frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|}$. Te-

mos que $b(s) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_0} & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \alpha \cosh s & \alpha \sinh s & c \\ \sinh s & \cosh s & 0 \end{vmatrix} = c \cosh s \frac{\partial}{\partial x_0} + c \sinh s \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha \frac{\partial}{\partial x_2}$, logo $b'(s) = c \sinh s \frac{\partial}{\partial x_0} + c \cosh s \frac{\partial}{\partial x_1}$. Usando $b'(s) = -\tau(s)n(s)$ obtem-se

$$c \sinh s \frac{\partial}{\partial x_0} + c \cosh s \frac{\partial}{\partial x_1} = -\tau(s) \left(c \sinh s \frac{\partial}{\partial x_0} + c \cosh s \frac{\partial}{\partial x_1} \right),$$

daí $\tau(s) = -c$.

Além disso, os coeficientes da primeira forma fundamental do solenóide, dado por (3-114) são:

$$\begin{aligned} E &= \langle \mathbf{X}_s, \mathbf{X}_s \rangle = -[(\alpha + \rho \cosh \theta) \cosh s + c \rho \sinh \theta \sinh s]^2 + [(\alpha + \rho \cosh \theta) \sinh s + c \rho \sinh \theta \cosh s]^2 + c^2 \\ &= -(\alpha + \rho \cosh \theta)[\cosh^2 s - \sinh^2 s] + c^2 \rho^2 \sinh^2 \theta (\cosh^2 s - \sinh^2 s) + c^2 \\ &= -\alpha^2 - 2\alpha \rho \cosh \theta - \rho^2 \cosh^2 \theta + c^2 \rho^2 \sinh^2 \theta + c^2 \\ &= 1 - 2\alpha \rho \cosh \theta - \rho^2 \cosh^2 \theta + \rho^2 \sinh^2 \theta + \alpha^2 \rho^2 \sinh^2 \theta \\ &= \lambda^2 - \rho^2 (1 + \alpha^2) \\ &= \lambda^2 - \rho^2 c^2 = \lambda^2 - \tau^2 \rho^2, \text{ onde } \lambda = (1 - k \rho \cosh \theta). \\ F &= \langle \mathbf{X}_s, \mathbf{X}_\theta \rangle = -[(\alpha + \rho \cosh \theta) \cosh s + c \rho \sinh \theta \sinh s][\rho \sinh \theta \sinh s + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c\rho \cosh \theta \cosh s] + [(\alpha + \rho \cosh \theta) \sinh s + c\rho \sinh \theta \cosh s][\rho \sinh \theta \cosh s + c\rho \cosh \theta \sinh s] + \\
& c\alpha\rho \cosh \theta \\
& = -c\rho(\alpha + \rho \cosh \theta) \cosh \theta(\cosh^2 s - \sinh^2 s) + c\rho^2 \sinh^2 \theta(\cosh^2 s - \sinh^2 s) + c\alpha\rho \cosh \theta \\
& = -c\rho\alpha \cosh \theta - c\rho^2 \cosh^2 \theta + c\rho^2 \sinh^2 \theta + c\alpha\rho \cosh \theta \\
& = -c\rho^2(\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta) = -c\rho^2 = \tau\rho^2. \\
G = \langle \mathbf{X}_\theta, \mathbf{X}_\theta \rangle & = -(\rho \sinh \theta \sinh s + c\rho \cosh \theta \cosh s)^2 + (\rho \sinh \theta \cosh s + c\rho \cosh \theta \sinh s)^2 + \\
& \alpha^2 \rho^2 \cosh^2 \theta \\
& = \rho^2 \sinh^2 \theta(\cosh^2 s - \sinh^2 s) - c^2 \rho^2 \cosh^2 \theta(\cosh^2 s - \sinh^2 s) + \alpha^2 \rho^2 \cosh \theta \\
& = \rho^2 \sinh^2 \theta - (1 + \alpha^2) \rho^2 \cosh^2 \theta + \alpha^2 \rho^2 \cosh^2 \theta \\
& = -\rho^2(\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta) - \alpha^2 \rho^2 \cosh^2 \theta + \alpha^2 \rho^2 \cosh^2 \theta = -\rho^2, \text{ isto é,}
\end{aligned}$$

$$E = \lambda^2 - \tau^2 \rho^2, F = \tau\rho^2, G = -\rho^2; \lambda = 1 = k\rho \cosh \theta. \quad (3-116)$$

Portanto, $EG - F^2 = -(\lambda^2 - \tau^2 \rho^2)\rho^2 - \tau^2 \rho^4 = -(\lambda^2 \rho^2) < 0$, que significa que este solenóide é uma superfície em \mathbb{R}_1^3 de tipo I^- .

Agora usando a fórmula de Frobenius para a curvatura Gaussiana, ver [17] em que $E_s = F_s = G_s = 0$, temos

$$\begin{aligned}
K & = -\frac{1}{4(EG - F^2)^2} \begin{vmatrix} E & F & G \\ E_s & F_s & G_s \\ E_\theta & F_\theta & G_\theta \end{vmatrix} - \frac{1}{2\sqrt{EG - F^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \frac{G_s - F_\theta}{\sqrt{EG - F^2}} - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{F_s - E_\theta}{\sqrt{EG - F^2}} \right\} \\
& = -\frac{1}{4(-\lambda^2 \rho^2)^2} \begin{vmatrix} E & F & G \\ 0 & 0 & 0 \\ E_\theta & 0 & 0 \end{vmatrix} - \frac{1}{2\sqrt{-\lambda^2 \rho^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \frac{0}{\sqrt{-\lambda^2 \rho^2}} - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{-2\lambda\lambda'}{\sqrt{-\lambda^2 \rho^2}} \right\} \\
& = -\frac{1}{2i\lambda\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{2\lambda\lambda'}{i\lambda\rho} \right\} \\
& = -\frac{1}{i\lambda\rho} \left\{ -\frac{k \cosh \theta}{i} \right\} \\
& = -\frac{k}{\lambda\rho} \cosh \theta,
\end{aligned}$$

provando que a curvatura Gaussiana é uma certa função somente do parâmetro θ .

O operador de Laplace com respeito a primeira forma fundamental do solenóide dado por (3-114) conforme conforme [9],[15] é

$$\Delta = -\frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{ij} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \right\}, \quad (3-117)$$

onde $ds^2 = \sum_{ij} g_{ij} dx^i dx^j$, $(g^{ij}) = (g_{ji})^{-1}$, g é o determinante de (g_{ij}) e $x^1 = s$, $x^2 = \theta$. A

partir da equação (3-112) obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_s &= (1 - k\rho \cosh \theta)t - (\tau\rho \sinh \theta)n + (\tau\rho \cosh \theta)b \\
\mathbf{X}_\theta &= (\rho \sinh \theta)n + (\rho \cosh \theta)b \\
\mathbf{X}_{ss} &= (k\tau\rho \sinh \theta)t + (k - k^2\rho \cosh \theta - \tau^2\rho \cosh \theta)n - (\tau^2\rho \sinh \theta)b \\
\mathbf{X}_{s\theta} &= -(k\rho \sinh \theta)t - (\tau\rho \cosh \theta)n + (\tau\rho \sinh \theta)b \\
\mathbf{X}_{\theta\theta} &= (\rho \cosh \theta)n + (\rho \sinh \theta)b,
\end{aligned} \tag{3-118}$$

tal que $k = \alpha$, $\tau = -c$, $t' = kn$, $n' = -kt + \tau b$, $b' = -\tau n$. Agora usando as relações (3-116) e o fato que o solenóide é uma superfície de tipo I^- o operador Laplaciano toma a forma

$$\begin{aligned}
\Delta &= -\frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{G}{\sqrt{g}} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \frac{G}{\sqrt{g}} \frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{F}{\sqrt{g}} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{F}{\sqrt{g}} \frac{\partial^2}{\partial s \partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{F}{\sqrt{g}} \right) \frac{\partial}{\partial s} - \frac{F}{\sqrt{g}} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial s} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{E}{\sqrt{g}} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{E}{\sqrt{g}} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ -\rho^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} - 2\frac{\tau\rho^2}{\sqrt{g}} \frac{\partial^2}{\partial s \partial \theta} - \tau\rho^2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \right) \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\lambda^2 - \tau^2\rho^2}{\sqrt{g}} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\lambda^2 - \tau^2\rho^2}{\sqrt{g}} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} \\
&= \left\{ \frac{-\rho^2}{\lambda^2\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} - 2\frac{\tau\rho^2}{\lambda^2\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial \theta} + \frac{\tau\lambda'}{\lambda^3} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\lambda'}{\lambda\rho^2} (\lambda^2 - \tau^2\rho^2) \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\lambda^2 - \tau^2\rho^2}{\lambda^2\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} \\
&= \left\{ \frac{-1}{\lambda^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} - 2\frac{\tau}{\lambda^2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial \theta} + \frac{\tau\lambda'}{\lambda^3} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\lambda'}{\lambda\rho^2} (\lambda^2 - \tau^2\rho^2) \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\lambda^2 - \tau^2\rho^2}{\lambda^2\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\}. \tag{3-119}
\end{aligned}$$

Aplicando o operador Δ em $\mathbf{X}(s, \theta)$ dada por (3-112) tem-se

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{X}(s, \theta) &= \left\{ \frac{-1}{\lambda^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} (\mathbf{X}(s, \theta)) - 2\frac{\tau}{\lambda^2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial \theta} (\mathbf{X}(s, \theta)) + \frac{\tau\lambda'}{\lambda^3} \frac{\partial}{\partial s} (\mathbf{X}(s, \theta)) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\lambda'}{\lambda\rho^2} (\lambda^2 - \tau^2\rho^2) \frac{\partial}{\partial \theta} (\mathbf{X}(s, \theta)) + \frac{\lambda^2 - \tau^2\rho^2}{\lambda^2\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (\mathbf{X}(s, \theta)) \right\}, \tag{3-120}
\end{aligned}$$

usando as relações (3-118) fica:

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{X}(s, \theta) &= \left\{ \frac{-1}{\lambda^2} [(k\tau\rho \sinh \theta)t + (k - k^2\rho \cosh \theta - \tau^2\rho \cosh \theta)n - (\tau^2\rho \sinh \theta)b] \right. \\
&\quad - 2\frac{\tau}{\lambda^2} [-(k\rho \sinh \theta)t - (\tau\rho \cosh \theta)n + (\tau\rho \sinh \theta)b] \\
&\quad + \frac{\tau\lambda'}{\lambda^3} [(1 - k\rho \cosh \theta)t - (\tau\rho \sinh \theta)n + (\tau\rho \cosh \theta)b] \\
&\quad + \frac{\lambda'}{\lambda\rho^2} (\lambda^2 - \tau^2\rho^2) [(\rho \sinh \theta)n + (\rho \cosh \theta)b] \\
&\quad \left. + \frac{\lambda^2 - \tau^2\rho^2}{\lambda^2\rho^2} [(\rho \cosh \theta)n + (\rho \sinh \theta)b] \right\} \\
&= \left[-\frac{k\tau\rho}{\lambda^2} \sinh \theta + \frac{2k\tau\rho}{\lambda^2} \sinh \theta + \frac{\tau\lambda'}{\lambda^3} (1 - k\rho \cosh \theta) \right] t \\
&\quad + \left[-\frac{1}{\lambda^2} (k - k^2\rho \cosh \theta - \tau^2\rho \cosh \theta) + \frac{2\tau^2\rho}{\lambda^2} \cosh \theta - \frac{\tau^2\lambda'\rho}{\lambda^3} \sinh \theta \right. \\
&\quad \left. + \frac{\lambda'}{\lambda^3\rho^2} (\lambda^2 - \tau^2\rho^2) \rho \sinh \theta + \frac{\lambda^2 - \tau^2\rho^2}{\lambda^2\rho^2} \rho \cosh \theta \right] n \\
&\quad + \left[\frac{\tau^2\rho}{\lambda^2} \sinh \theta - \frac{2\tau^2\rho}{\lambda^2} \sinh \theta + \frac{\tau^2\lambda'\rho}{\lambda^3} \cosh \theta + \frac{\lambda'}{\lambda^3\rho^2} (\lambda^2 - \tau^2\rho^2) \rho \cosh \theta \right. \\
&\quad \left. + \frac{\lambda^2 - \tau^2\rho^2}{\lambda^2\rho^2} \rho \sinh \theta \right] b.
\end{aligned}$$

Analisando separadamente em cada direção vemos que:

Na direção de t tem-se

$\left(-\frac{k\tau\rho}{\lambda^2} + \frac{2k\tau\rho}{\lambda^2} \right) \sinh \theta + \frac{\tau\lambda'}{\lambda^3} (1 - k\rho \cosh \theta)$, como $\lambda = 1 - k\rho \cosh \theta$ e $\lambda' = -k\rho \sinh \theta$ esta expressão resulta em $\frac{k\tau\rho}{\lambda^2 \sinh \theta} - \frac{k\tau\rho}{\lambda^2 \sinh \theta} = 0 = P(s, \theta)$.

Na direção de n ,

$$\begin{aligned}
&- \frac{1}{\lambda^2} (k - k^2\rho \cosh \theta - \tau^2\rho \cosh \theta) + \left[-\frac{\tau^2\lambda'\rho}{\lambda^3} + \frac{\lambda'}{\lambda^3\rho^2} (\lambda^2 - \tau^2\rho^2) \rho \right] \sinh \theta \\
&+ \left[\frac{\lambda^2 - \tau^2\rho^2}{\lambda^2\rho^2} \rho + \frac{2\tau^2\rho}{\lambda^2} \right] \cosh \theta - \frac{1}{\lambda^2} [k(1 - k\rho \cosh \theta) - \tau^2\rho \cosh \theta] \\
&+ \left[\frac{\tau^2\rho}{\lambda^2} + \frac{\lambda^2 - \tau^2\rho^2}{\lambda^2\rho} + \frac{2\tau^2\rho}{\lambda^2} \right] \cosh \theta + \left[\frac{\tau^2\rho^2 k}{\lambda^3} - \frac{k\lambda^2\rho}{\lambda^3} + \frac{\tau^2\rho^3 k}{\lambda^3} \right] \sinh^2 \theta \\
&= -\frac{k\lambda}{\lambda^2} + \left[\frac{2\tau^2\rho}{\lambda^2} + \frac{1}{\rho} \right] \cosh \theta + \frac{1}{\lambda^3} [\tau^2 k(\rho^2 + \rho^3) - k\rho\lambda^2] (1 + \cosh^2 \theta) \\
&= -\frac{1}{\lambda^3\rho} \{ -(2\tau^2\rho^2\lambda - \lambda^3) \cosh \theta + [-\tau^2 k(\rho^3 + \rho^4) + k\rho^2\lambda^2] \sinh^2 \theta - k\lambda^2\rho \} = B(\theta).
\end{aligned}$$

Na direção de b ,

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\tau^2 \rho}{\lambda^2} - \frac{2\tau^2 \rho}{\lambda^2} + \frac{\lambda^2 - \tau^2 \rho^2}{\lambda^2 \rho} \right] \sinh \theta + \left[\frac{\tau^2 \lambda' \rho}{\lambda^3} + \frac{\lambda'}{\lambda^3 \rho} (\lambda^2 - \tau^2 \rho^2) \right] \cosh \theta \\
= & \left[\frac{1}{\rho} - \frac{2\tau^2 \rho}{\lambda^2} \right] \sinh \theta + \left[-\frac{\tau^2 \rho^2 k \sinh \theta}{\lambda^3} - \frac{k \rho \sinh \theta}{\lambda^3 \rho} (\lambda^2 - \tau^2 \rho^2) \right] \cosh \theta \\
= & \frac{1}{\lambda^3 \rho} \{ \lambda^3 - 2\tau^2 \lambda \rho^2 - [\tau^2 \rho^3 k - k \rho (\lambda^2 - \tau^2 \rho^2)] \cosh \theta \} \sinh \theta \\
= & -\frac{1}{\lambda^3 \rho} [(2\tau^2 \rho^2 \lambda - \lambda^3 + k \rho \lambda^2 \cosh \theta) \sinh \theta] = C(\theta).
\end{aligned}$$

Consequentemente, $\Delta \mathbf{X}(s, \theta) = B(\theta)n + C(\theta)b$ e prova está completa. \square

Conclusão

Mostramos que no espaço Euclidiano, dada uma função diferenciável, existe uma superfície helicoidal com curvatura média ou Gaussiana dada por esta função. Com isto classificamos localmente todas as superfícies helicoidais em \mathbb{R}^3 com curvatura média ou Gaussiana dada.

Sabemos que formas bilineares simétricas em um domínio Euclidiano define geometrias mais ricas no sentido métrico do que produtos internos positivos definidos métricas Euclidianas. Por exemplo no espaço de Minkowski, conseguimos classificar localmente as superfícies helicoidais com eixos revolução space-like e time-like com curvatura média ou Gaussiana dada, uma vez que conseguimos explicitar soluções para as equações diferenciais relacionadas com estes eixos.

Existem várias direções para trabalhos adicionais. Um exemplo interessante é encontrar superfícies helicoidais, nestes espaços com alguma hipótese sobre a curvatura, onde a curva que gera a superfície esteja globalmente definida.

Referências Bibliográficas

- [1] C. BENEKI, G. KAIMAKAMIS, B. P. **A classification of surfaces of revolution of constant gaussian curvature in the minkowski space \mathbb{R}_1^3** . Bull. Calcutta Math. Soc, 90(1998):421–458, 1998.
- [2] C. BENEKI, G. KAIMAKAMIS, B. P. **Helicoidal surfaces in three-dimensional minkowski space**. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 275(2002):586–614, 2002.
- [3] CARMO, M. P. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. SBM, Rio de Janeiro, third edition, 2005.
- [4] C. DELAUNAY. **Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante**. J. Math. Pures. Appl, 6(1841):309–320, 1841.
- [5] CHAVEL, I. **Riemannian Geometry**. Cambridge University Press, New York, second edition, 2006.
- [6] CHR. BAIKOSSIS, T. K. **Helicoidal surfaces with prescribed mean or gaussian curvature**. J. Geom, 63(1998):25–29, 1998.
- [7] DIAS, D. G. **Sobre uma caracterização de pequena calota esférica**. 77p(Dissertação):IME–UFG, 19-02-2001PDF.
- [8] FENGHUI JI, Z. H. H. **A kind helicoidal surfaces in 3-dimensional minkowski space**. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 304(2005):632–643, 2005.
- [9] GARAY, O. **On a certain class of finite tipe surfaces of revolution**. Kodai Math, J, 11(1988):25–31, 1988.
- [10] H. BALGETIR, A. O. OGRENMIS, M. **Curves on ruled surfaces in minkowski 3-space**. Int. J. Contemp. Math. Sci, 1(2006):31–37, 2006.
- [11] K. KENMOTSU. **Surfaces of revolution with prescribed mean curvature**. Tohoku Math, J, 32(1980):147–153, 1980.

- [12] KÜHNEL, W. **Differential Geometry:curves-surfaces-manifolds**. AMS, Rhode Island, second edition, 1950.
- [13] L.HITT, I. **Computer graphics of helicoidal surfaces with constant mean curvature**. An,Acad.Brasil.Ciênc, 63(1991):211–228, 1991.
- [14] M. DO CARMO, M. D. **Helicoidal surfaces with constant mean curvature**. Tohoku Math, 34(1982):351–367, 1982.
- [15] O'NEIL, B. **Semi-Riemannian Geometry**. Academic Press, New York, 1986.
- [16] S.M.CHOI. **On the gauss map of surfaces of revolution in a 3-dimensional minkowski space**. Tsukuba J.Math, 19(1996):351–367, 1996.
- [17] STRUIK, D. **Lectures on Differential Geometry**. Addison-Wesley, New York, second edition, 1961.