Universidade Federal de Goiás (UFG)
Instituto de Matemática e Estatística (IME)
Programa de Pós-Graduação em Matemática
em Rede Nacional (PROFMAT/UFG)

Josiane Bailão de Morais

As olimpíadas de matemática e uma introdução ao estudo de equações funcionais

Goiânia
2024

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO (TECA) PARA DISPONIBILIZAR VERSÕES ELETRÔNICAS DE TESES

E DISSERTAÇÕES NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), regulamentada pela Resolução CEPEC nº 832/2007, sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei 9.610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

O conteúdo das Teses e Dissertações disponibilizado na BDTD/UFG é de responsabilidade exclusiva do autor. Ao encaminhar o produto final, o autor(a) e o(a) orientador(a) firmam o compromisso de que o trabalho não contém nenhuma violação de quaisquer direitos autorais ou outro direito de terceiros.

1. Identificação do material bibliográfico

[X] Dissertação [ ] Tese [ ] Outro*:_____________

*No caso de mestrado/doutorado profissional, indique o formato do Trabalho de Conclusão de Curso, permitido no documento de área, correspondente ao programa de pós-graduação, orientado pela legislação vigente da CAPES.

Exemplos: Estudo de caso ou Revisão sistemática ou outros formatos.

2. Nome completo do autor

Josiane Bailão de Morais

3. Título do trabalho

As olimpíadas de matemática e uma introdução ao estudo de equações funcionais

4. Informações de acesso ao documento (este campo deve ser preenchido pelo orientador)

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. Após esse período, a possível disponibilização ocorrerá apenas mediante:
a) consulta ao(à) autor(a) e ao(à) orientador(a);
b) novo Termo de Ciência e de Autorização (TECA) assinado e inserido no arquivo da tese ou dissertação.
O documento não será disponibilizado durante o período de embargo.
Casos de embargo:
- Solicitação de registro de patente;
- Submissão de artigo em revista científica;
- Publicação como capítulo de livro;
- Publicação da dissertação/tese em livro.

Obs. Este termo deverá ser assinado no SEI pelo orientador e pelo autor.

Josiane Bailão de Morais

As olimpíadas de matemática e uma introdução ao estudo de equações funcionais

Dissertação apresentada ao Programa de Pós–Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT/UFG), do Instituto de Matemática e Estatística(IME), da Universidade Federal de Goiás(UFG), como requisito para obtenção do título de Mestra em Matemática.

Área de concentração: Matemática do Ensino Básico.

Orientadora: Profa. Kamila da Silva Andrade

Co–Orientadora: Profa. Ana Paula de Araújo Chaves

Goiânia
2024

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do
Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UFG.

Morais, Josiane Bailão de
As olimpíadas de matemática e uma introdução ao estudo das equações funcionais [manuscrito] / Josiane Bailão de Morais. - 2024.
CX, 110 f.: il.

Orientador: Profa. Dra. Kamila da Silva Andrade; co-orientadora Dra. Ana Paula de Araújo Chaves.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME), PROFMAT - Programa de Pós graduação em Matemática em Rede Nacional - Sociedade Brasileira de Matemática (RG), Goiânia, 2024.
Bibliografia. Apêndice.
Inclui siglas, tabelas, lista de figuras.

1. Competições. 2. Equações. 3. Funções. 4. Olimpíadas. 5. Matemática. I. Andrade, Kamila da Silva, orient. II. Título.

CDU 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

Ata nº 27 da sessão de defesa de Dissertação da aluna Josiane Bailão de Morais, que confere o título de Mestra em Matemática, na área de concentração em Matemática do Ensino Básico.

Aos treze dias do mês de dezembro de dois mil e vinte e quatro, a partir das 14h, no Auditório do IME/UFG, realizou-se a sessão pública de defesa de Dissertação intitulada **"As olimpíadas de matemática e uma introdução ao estudo de equações funcionais"**. Os trabalhos foram instalados pela Orientadora, Professora Doutora Kamila da Silva Andrade (IME/UFG) com a participação dos demais membros da Banca Examinadora: A Professora Doutora Ana Paula de Araújo Chaves (IME/UFG), o Professor Doutor Tiago Moreira Vargas (IME/UFG) e a Professora Doutora Simone Vasconcelos da Silva (UnB), membra titular externo. Durante a arguição os membros da banca **não fizeram** sugestão de alteração do título do trabalho A Banca Examinadora reuniu-se em sessão secreta a fim de concluir o julgamento da Dissertação, tendo sido a candidata **aprovada** pelos seus membros. Proclamados os resultados pela Professora Doutora Kamila da Silva Andrade, Presidenta da Banca Examinadora, foram encerrados os trabalhos e, para constar, lavrou-se a presente ata que é assinada pelos Membros da Banca Examinadora, aos treze dias do mês de dezembro de dois mil e vinte e quatro.

TÍTULO SUGERIDO PELA BANCA

À minha filha, Thaís, aos meus sobrinhos e afilhados, Thaísa, José Augustho, Analú, Michel Herik, Luís Fernando, João Pedro e José Pedro. Que este trabalho seja um reflexo de que sonhos podem ser alcançados com determinação e fé.

Vocês são uma fonte inesgotável de inspiração, e está dissertação é a prova de que o esforço e a dedicação podem abrir portas para um futuro melhor.

Que esta conquista não seja apenas minha, mas um lembrete de que a educação e a perseverança são os caminhos mais seguros para transformar nossos sonhos em realidade.

Com todo o meu carinho, Josiane.

Agradecimentos

Neste momento de grande realização em minha vida meu coração se enche de gratidão, pois sei que sozinha seria impossível contabilizar mais essa vitória.

Agradeço primeiramente a Deus por ter chegado ao término dessa caminhada, ele tem sido o meu alicerce em todos os momentos. Ao longo do percurso tive muitos altos e baixos, mas pude sentir Tua mão me amparando a todo instante e o Teu amor me levantando a cada tropeço. Sua luz sempre me conduziu e por Tua graça e infinita generosidade hoje posso celebrar esta grande conquista

Agradeço minha família, pois nunca me abandonaram nos momentos em que me senti frágil. Compartilharam comigo essa batalha, me deram coragem e por muitas vezes, compreenderam minhas renúncias e minhas ausências, demonstrando apoio na realização deste sonho. Torceram por mim desde o primeiro momento e acreditaram no meu sucesso.

Aos meus colegas, os quais tive o prazer de conhecer e de compartilhar momentos juntos ao longo destes dois anos. Em especial ao nosso grupo: "Meninas do Profmat", Alissany, Daniele, Leiliane, Lidiane e Lydia; dos primeiros dias de nervosismo até esse momento de orgulho, enfrentamos muitos desafios juntas e sobrevivemos a tantas noites de estudo. Dividimos muitas gargalhadas e também nos amparamos em horas difíceis. Daqui a alguns anos ainda lembraremos de todos esses momentos e nosso coração irá se apertar de saudade, no entanto iremos sorrir no sabor das recordações. É muito bom celebrar o final de uma etapa carregando uma bagagem de novos conhecimentos e também de novas amizades.

Meus sinceros agradecimentos aos professores pelo importante apoio, compreensão e dedicação nesta longa caminhada. Em especial as professoras orientadoras Kamila e Ana Paula. reconheço a paciência e compreensão comigo, ajudando a facilitar essa jornada. Vocês me desafiaram a pensar e descobrir minha melhor versão. Obrigada por não desistirem de mim e acreditarem quando eu mesma duvidava do meu potencial. Minha eterna gratidão por tudo!

Não posso deixar de expressar meu grande apreço e gratidão à equipe do colégio CEPMG Benedito Pinheiro de Abreu por apoiar meu desenvolvimento profissional e acreditando em mim, conceder a oportunidade de continuar fazendo parte dessa equipe. Isso só fortalece meu compromisso com essa entidade, que valoriza e acredita em seus colaboradores.

Deixo aqui também meus sinceros agradecimentos aos meus alunos e ex-alunos, pois vocês foram a motivação para que eu buscasse essa realização profissional.

Aos meus amigos, agradeço pela parceria e incentivo. Vocês estiveram presentes em todos os momentos da minha vida e agora não seria diferente. Tiveram um papel fundamental neste ciclo da minha vida; com um abraço de acolhimento nos momentos difíceis ou com um sorriso nas horas de alegria, sempre estavam ali me acompanhando. Muito obrigada!

Essa conquista não seria possível sem a colaboração de tantas outras pessoas envolvidas e que, de diferentes formas, contribuíram para a realização deste trabalho. Não consigo nomear cada uma, mas diretamente ou indiretamente os serviços prestados por vocês me apoiaram muito ao longo desses anos de curso e foram imprescindíveis para que eu chegasse até aqui. Externo a vocês minha gratidão e alegria por me acompanharem nesta jornada.

"Lembra quando estava por um fio pra desistir
E quando faltou isso aqui pra você cair
E mesmo assim você tentou mais uma vez
Era a mão de Deus"

Kailane Frauches,
Era a mão de Deus.

Resumo

de Morais, Josiane Bailão. **As olimpíadas de matemática e uma introdução ao estudo de equações funcionais**. Goiânia, 2024. 110p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

As Olimpíadas de Matemática são competições de alcance internacional as quais buscam estimular o interesse pela disciplina, além de vir a testar as habilidades dos participantes no que se refere aos problemas complexos.

Ao analisar as questões propostas nessas competições, se observa a presença frequente de equações funcionais, as quais consistem em equações envolvendo funções desconhecidas.

Mediante a isto, o objetivo geral desta pesquisa se pauta em discorrer sobre o uso das equações funcionais nas Olimpíadas de Matemática.

Como metodologia optou-se por uma pesquisa bibliográfica qualitativa, de modo que inicialmente foi feita uma revisão bibliográfica sobre os conceitos aprofundados no estudo, depois trouxe à tona um breve relato da pesquisadora sobre as oficinas que foram ministradas para alguns professores e alunos com o intuito de justamente vir a discutir sobre as olimpíadas de matemática e como estas podem contribuir tanto nos saberes dos professores quanto dos estudantes.

Nesta pesquisa, propomos o desenvolvimento de um ciclo de palestras voltado para as Olimpíadas de Matemática, juntamente com uma sequência didática sobre Equações Funcionais, a ser aplicada em grupos de estudo focados nas competições olímpicas. Essa sequência foi elaborada de acordo com as diretrizes estabelecidas para a criação de um Produto Educacional, com o objetivo de proporcionar uma abordagem estruturada e eficaz para o aprendizado e a preparação dos estudantes para os desafios das Olimpíadas de Matemática.

O ciclo de palestras foi uma ação de extensão promovida pelo IME/UFG e PROFMAT para a popularização e divulgação da Matemática.

Palavras–chave

Competições, Equações, Funções, Olimpíadas, Matemática

Abstract

de Morais, Josiane Bailão. **The Mathematics Olympiads and an Introduction to Study of Functional Equations** . Goiânia, 2024. 110p. MSc. Dissertation. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

The Mathematics Olympiads are international competitions that seek to stimulate interest in the subject, in addition to testing the participants' skills with regard to complex problems.

When analyzing the questions proposed in these competitions, the frequent presence of functional equations is observed, which consist of equations involving unknown functions.

Therefore, the general objective of this research is to discuss the use of functional equations in Mathematics Olympiads.

As a methodology, a qualitative bibliographical research was chosen, so that initially a bibliographical review was carried out on the concepts in depth in the study, then it brought to light a brief report by the researcher about the workshops that were given to some teachers and students with the aim of precisely to discuss the mathematics olympiads and how they can contribute to both the knowledge of teachers and students.

In this research, we propose the development of a series of lectures focused on the Mathematics Olympics, together with a didactic sequence on Functional Equations, to be applied in study groups focused on Olympic competitions. This sequence was prepared in accordance with the guidelines established for the creation of an Educational Product, with the aim of providing a structured and effective approach to learning and preparing students for the challenges of the Mathematics Olympiads. The lecture cycle was an extension action promoted by IME/UFG and PROFMAT for the popularization and dissemination of Mathematics.

Keywords

Competitions, Equations, Functions, Olympiads, Mathematics.

Lista de Siglas

Sumário

Lista de Figuras

INTRODUÇÃO

A Matemática sempre foi a minha inspiração, comecei a ser docente desta disciplina em 1997 quando atuava pelo regime de contrato temporário no Colégio Estadual Jardim América, na cidade de Goiânia, estado de Goiás. Enquanto ainda cursava o segundo ano de licenciatura em Matemática na Universidade Federal de Goiás (UFG).

Nunca tive dúvidas em relação ao curso que eu queria fazer, a minha paixão pela Matemática começou quando eu ainda cursava as séries iniciais do Ensino Fundamental I. Depois que concluí o Ensino Médio em Itaberaí-GO fui para Goiânia fazer um curso preparatório para vestibular em 1995, mas não mudei de ideia em relação ao curso que eu queria. Em 1996 comecei a faculdade de Matemática na UFG, concluí em 1999. Em agosto de 1999 ingressei como professora efetiva do Estado de Goiás e comecei a trabalhar no Colégio Estadual Bandeirantes, também em Goiânia, posteriormente em 2001, depois de concluir o curso voltei para Itaberaí, minha cidade natal, onde trabalho até hoje. Trabalhei também em algumas escolas públicas e particulares, mas desde 2017 estou somente no Colégio Estadual da Polícia Militar de Goiás - Benedito Pinheiro de Abreu.

Minha paixão pelas olimpíadas surgiu em 2006 e se intensificou em 2017 quando já estava trabalhando no Colégio Estadual da Polícia Militar de Goiás-Benedito Pinheiro de Abreu (CEPMG-BPA) em Itaberaí. Apresentei para a equipe gestora um projeto de grupo de estudos para olimpíadas, voltado para os estudantes, obtive apoio da equipe e começamos naquele ano mesmo com três grupos:

Nível 1(Ensino Fundamental: 6º e 7º anos), nível 2 (Ensino Fundamental: 8º e 9º anos) e nível 3 (Ensino Médio).

No primeiro ano, já tivemos estudantes premiados com menção honrosa e no ano seguinte estes começaram a ganhar medalhas. Os grupos de estudos eram em contra turno, não houve nenhum processo de seleção, todos estudantes foram convidados. Mas a participação foi daqueles que realmente queriam estar ali.

Nesta pesquisa realizou se um copilado das Olimpíadas de Matemática, a sua evolução histórica,premiações, oportunidades para os medalhistas, conceitos, funcionalidades e modalidades, posto que elas promovem possibilidades de ampliação do conhecimentos dos estudantes e também dos professores.

Além disso, o presente trabalho tem a finalidade de colaborar com um estudo introdutório as Equações Funcionais aplicadas nas Olimpíadas de Matemática. Este tema surgiu em decorrência do meu interesse enquanto pesquisadora, pois o estudo das equações funcionais desempenha um papel determinante na resolução de problemas matemáticos e também possui uma relevância em competições como as Olimpíadas de Matemática.

Desta maneira, convém destacar que conforme o site da PROFMAT, o trabalho de conclusão de curso deve primar por temas, os quais contemplem a educação básica, sabendo disto, essa linha e pesquisa cientifica possui como foco a Matemática e o seu interesse na área (Olimpíadas de Matemática e equações funcionais) o intuito é tornar essa disciplina acessível para os estudantes, uma vez que as olimpíadas estimulam o pensamento crítico e também o raciocínio logico.

A pesquisa voltada para essa temática corrobora com a minha formação pessoal e acadêmica, pois ao longo dos anos percebi que esses eventos não apenas estimulam o aprendizado da Matemática, mas ainda desenvolvem habilidades essenciais como por exemplo, o raciocínio lógico, trabalho em equipe e inclusive, a perseverança. Deste modo, a motivação para escrever esta pesquisa surge, da percepção de que as equações funcionais não são apenas vistas como um tópico relevante dentro da Matemática, mas também como sendo uma ferramenta que pode enriquecer as experiências educacionais dos estudantes e dos professores de Matemática. Compreender como essas equações se manifestam nas competições possibilita compreender como elas são utilizadas no ensino e na aprendizagem.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Básica do estado de Goiás (DC/GO)também elucidam importância do ensino de Matemática como sendo um meio para o desenvolvimento de competências e das habilidades que vão além do mero conhecimento técnico. A BNCC, por exemplo propõe que a educação Matemática seja capaz de preparar os estudantes para problemas do cotidiano e em meio a situações reais, estimulando sobretudo, o raciocínio lógico, a resolução de problemas e a criatividade do estudante.

As DC/GO, também enfatiza a relevância de uma formação integral, a qual possa incluir o desenvolvimento do pensamento crítico e até mesmo, da capacidade do estudante vir a aplicar conhecimentos matemáticos em diversas situações. Nesse contexto, o estudo e a prática de equações funcionais se tornam uma crucial, pois permiti que os estudantes desenvolvam um maior entendimento em relação as funções, equações, relações e variáveis, dentre outras promovendo assim, a abstração e até mesmo, a generalização dos conceitos matemáticos

As Olimpíadas de Matemática são reconhecidas mundialmente, estas desempenham um papel fundamental na promoção do interesse pela disciplina e até mesmo, na avaliação das habilidades dos participantes no que se refere, a resolução de problemas complexos. Estas competições colaboram para o desenvolvimento do raciocínio lógico e da criatividade essenciais na formação dos estudantes. Assim, ao se analisar as questões apresentadas nas olimpíadas, um padrão tem se destacado que é justamente a frequente utilização das equações funcionais. Essa observação suscita diretamente a inquietação sobre a necessidade de explorar mais a fundo o uso dessas equações no contexto das Olimpíadas de Matemática.

Além disso, a presença das equações funcionais nas olimpíadas ressoa com a realidade escolar, pois a familiaridade com esse tipo de questão influencia diretamente o desempenho dos estudantes em exames e até mesmo, em desafios futuros. Assim, promover discussões e as práticas em torno das equações funcionais nas aulas de Matemática, é um passo essencial para que se possa preparar os estudantes para essas competições, para um futuro acadêmico e também profissional tendo a Matemática como sendo a um papel central. Essa preparação pode envolver atividades práticas, também exemplos contextualizados, garantindo que os estudantes se sintam confiantes e preparados para que possam enfrentar os desafios que ainda estão por vir.

Assim, salienta-se que o objetivo geral deste trabalho é discutir o uso das equações funcionais nas Olimpíadas de Matemática, enfatizando o seu papel tanto na formação dos competidores e na atuação dos professores. Logo, este estudo se formulou por meio da seguinte problemática: De que modo a inserção das equações funcionais nas Olimpíadas de Matemática contribui para que ocorra o desenvolvimento das habilidades dos competidores e também para a prática pedagógica dos professores?

Para tanto, optou-se por uma metodologia qualitativa com uma revisão bibliográfica inicial, a qual foi seguida de um relato das oficinas que foram ministradas, se discutiu a relação entre as olimpíadas e sua contribuição no desenvolvimento dos saberes de estudantes e dos professores.

Essa pesquisa se estruturou em capítulos, o primeiro *"Olimpíadas de Matemática no Brasil",* fala sobre a Olimpíada Internacional de Matemática, tece discussão sobre a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e no Estado de Goiás, os torneios Meninas na Matemática dos programas de OBMEP, da Iniciação Científica e Mestrado, da Bolsa Instituto TIM OBMEP, das Vagas Olímpicas nas universidades, das Olimpíadas de Matemática e a Base Nacional Comum Curricular e no Documento Curricular de Goiás. Além disso, este capítulo também discorre sobre o PIC Encontro do Hotel Hilbert e a IMPA Tech: Graduação em Matemática da Inovação e tecnologia.

No segundo capítulo "Equações Funcionais"são abordados alguns conceitos preliminares, fundamentais para a resolução das equações funcionais, se fala sobre os conceitos os numéricos, funções. No terceiro, "Relato de Experiência", é realizado um breve relato da pesquisa sobre o seu contato com o tema. Nas considerações finais se trás os achados da pesquisa, por meio das impressões da pesquisadora.

Além disto, foi realizado ainda a elaboração de uma sequência didática (Apêndice A), visando elucidar a temática supracitada sobre as equações funcionais. Deste modo, se espera que esta sirva como fonte de pesquisa para os professores que atuam e desenvolvem estudos sobre a temática. Assim, além de ser uma ferramenta rica para o desenvolvimento das aulas, acredita-se ainda que essa sequência didática é pensada como sendo uma fonte de pesquisa e de referência para os professores os quais, buscam vir a aprofundar seus conhecimentos e as metodologias de ensino. Ela oferece sugestões de atividades, recursos didáticos, avaliações e reflexões, as quais podem ser adaptadas e também personalizadas favorecendo deste modo um ensino mais dinâmico e também significativo.

Nesse contexto, é fundamental ressaltar que no Apêndice B deste trabalho estão disponibilizadas algumas imagens dos folders utilizados na divulgação do Ciclo de Palestras sobre Olimpíadas de Matemática. Esses folders foram criados com o objetivo de atrair a atenção do público-alvo, destacando informações essenciais sobre o evento, como os temas abordados, os palestrantes convidados, as datas das palestras, bem como as instruções para participação e inscrição.

O material foi projetado para despertar o interesse de professores, estudantes e demais profissionais da educação, reforçando a relevância do Ciclo de Palestras no contexto educacional.

Adicionalmente, no Apêndice B, é possível observar os detalhes desses folders. Essa documentação permite não apenas a apreciação do material produzido, mas também serve como referência para futuros projetos similares, fornecendo uma visão mais ampla do impacto visual e comunicativo dos materiais desenvolvidos.

CAPÍTULO 1

OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA NO BRASIL

Este capítulo discute sobre as Olimpíadas de Matemática no Brasil, fala sobre a Olimpíada Internacional de Matemática, tece discussão sobre a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e no Estado de Goiás, os torneios Meninas na Matemática dos programas de Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas e Particulares (OBMEP), da Iniciação Científica e Mestrado, da Bolsa Instituto TIM OBMEP, das Vagas Olímpicas nas universidades, das Olimpíadas de Matemática e a Base Nacional Comum Curricular e no Documento Curricular de Goiás. Além disso, convém destacar que este capítulo também fala sobre o PIC Encontro do Hotel Hilbert e a IMPA Tech: Graduação em Matemática da Inovação e tecnologia.

1.1 ASPECTOS HISTÓRICOS

Ao longo da história, a Matemática tem desempenhado um papel cada vez mais crucial na vida humana, seja dentro ou fora do contexto escolar. Ela teve o seu surgimento em tempos remotos e desde então tem sido desenvolvida tendo como base as contribuições de grandes gênios, como exemplo, Sócrates, Pitágoras e até mesmo, Euclides. Neste sentido, salienta-se que pensadores brilhantes enriqueceram o conhecimento matemático com as suas descobertas e genialidades.

As olimpíadas Matemáticas, são consideradas por historiadores como sendo as principais competições que são realizadas por estudantes talentosos desde séculos passados até o Renascimento na Europa, estas eram iniciadas através de encontros entre professores e estudantes em praças públicas. A divulgação desses eventos acontecia por meio de cartas enviadas aos estudantes participantes, além da tradicional prática de ter que repassar as informações de modo oral. Essas cartas possuíam informações relativas as datas e os locais das competições, bem como os detalhes das provas e critérios de avaliação.

Deste modo, acrescenta-se que a prática de repassar informações oral também era comum, era disseminada pelos próprios estudantes participantes, que por sua vez compartilhavam as notícias com os seus colegas de estudo. Neste ínterim, convém acrescentar que nesses encontros nas praças públicas, os estudantes talentosos de muitas regiões se reuniam para competir entre si, demonstrando as suas principais habilidades Matemáticas.

As olimpíadas Matemáticas eram consideradas como sendo eventos de prestígio que atraiam a atenção de destacados matemáticos, que por vezes participavam como juízes ou orientadores dos estudantes. Além disso, acredita-se que as olimpíadas Matemáticas ajudaram a estabelecer padrões e até mesmo, critérios de excelência na disciplina, influenciando o currículo das escolas e também das universidades. Estas também contribuíram para que ocorresse a formação de uma comunidade Matemática mais unida e também colaborativa, permitindo que os estudantes de diferentes regiões e também instituições pudessem interagir e vir aprender uns com os outros.

No que diz respeito às divulgações, o feito matemático de Scipione Del Ferro, especificamente no século XVI, ao resolver uma equação cúbica de terceiro grau, era visto como algo extraordinário pelos matemáticos italianos, os quais possuíam os seus trabalhos fundamentado nos trabalhos dos árabes.

O ensino da Matemática possui diversas técnicas que são vistas por muitos historiadores como sendo também a implantação de olimpíadas com objetivo de proporcionar aos estudantes conquistas do saber por meio das "disputas", elencadas inicialmente na Itália, especificamente no final do século XIX em que se tinha como premissa básica promover a Matemática sob formas inovadoras desta época.

As Olimpíadas de Matemática representam competições de destaque no mundo acadêmico, que tem raízes profundas na história da educação e no desenvolvimento do pensamento matemático. Esses eventos têm como objetivo principal estimular o interesse e promover o talento matemático entre os jovens estudantes. A história das Olimpíadas de Matemática remonta ao século XX, com suas origens associadas a competições e desafios matemáticos que se desenvolveram em diferentes partes do mundo, (Pinheiro, 2003)

A precursora das Olimpíadas de Matemática modernas é a competição Matemática criada na antiga União Soviética em meados da década de 1930 em Roman, na Romênia. Esta competição, conhecida como olimpíada Matemática da União Soviética, foi uma das primeiras a desafiar os estudantes do Ensino Médio com problemas matemáticos complexos e não convencionais (Fapesp,2024).

Posteriormente, após a Segunda Guerra Mundial, outras nações começaram a organizar competições semelhantes. A mais notável delas foi a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) fundada em 1959 , na Romênia. Essa iniciativa partiu do matemático denominado Romeno Radu Theodorescu. Ela reuniu estudantes de vários países para competir em problemas matemáticos desafiadores. A IMO rapidamente se tornou o evento mais prestigiado do mundo no campo das Olimpíadas de Matemática, proporcionando uma plataforma para os jovens talentos mostrarem suas habilidades e se envolverem em desafios intelectuais estimulantes.

Desde então, as Olimpíadas de Matemática cresceram em popularidade e alcance. Muitos países começaram a realizar suas próprias competições nacionais de Matemática, com o objetivo de identificar e desenvolver talentos matemáticos desde a escola primária até o Ensino Médio. Essas competições desempenham um papel crucial na educação Matemática ao promover o pensamento criativo, a resolução de problemas e o rigor matemático entre os estudantes. Deste modo, convém destacar que:

> No Brasil, a primeira iniciativa foi a Olimpíada Paulista de Matemática, realizada em 1977 pela Academia de Ciências do Estado de São Paulo. Desde 1979, a Sociedade Brasileira de Matemática promove a Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), que vem sendo realizada anualmente, nacional e regionalmente, envolvendo escolas públicas e particulares. Hoje, 85 países adotam Olimpíadas de Matemática em variados formatos. Aqui no Brasil são realizadas cerca de 20 olimpíadas regionais, municipais e estaduais. (Caldas e Viana, 2022,p.1).

Neste sentido, acrescenta-se que de 1979 até o ano 1989 a olimpíada de Matemática no cenário brasileiro era disputada em uma única fase, em uma prova possuindo em torno de cinco ou seis questões discursivas e estas não eram separadas por níveis, fazendo com que os seus premiados fossem apenas estudantes do Ensino Médio (naquele período popularmente conhecido como segundo grau). Já no começo do ano 1990, a OBM passou a ser realizada em duas etapas, contendo em média de 20 a 25 questões discursivas e em dois níveis, sendo o OBM Sênior (estudantes do Ensino Médio) e o OBM Jr que contava com a participação de estudantes do Ensino Fundamental, exceto os estudantes da 5ª série).

A partir do ano de 1998, ocorreram outras alterações no formato da Olimpíada Brasileira de Matemática, e esta ficou diferente da que vinha sendo praticado sobretudo, nos últimos, visto que passou a atingir os estudantes desde a 5ª série do Ensino Fundamental. Antes, a OBM era apenas um instrumento para detectar talentos e desenvolvê-los, no entanto, no cenário contemporâneo também visa promover em âmbito nacional a melhoria do ensino de Matemática nas escolas, com o desenvolvimento em conjunto entre estudantes e professores (Pinheiro, 2003).

Além da OBM, que se tornou mais inclusiva ao envolver estudantes desde a 5ª série do Ensino Fundamental, no entanto, surgiram outras iniciativas no Brasil para que se pudesse estimular o talento matemático. Um exemplo, é justamente a OBMEP, ela criada em 2005 visando estimular o estudo da Matemática nas escolas públicas e ainda identificar talentos nessa área, esta é tida como um dos maiores eventos educacionais do país, que conta com a participação de milhões de estudantes por ano.

O Brasil passou a sediar importantes competições internacionais de Matemática. A IMO, por exemplo, foi realizada no país em 2017, na cidade do Rio de Janeiro, e depois novamente no ano 2021, na cidade São Paulo. Esses eventos por sua vez, proporcionaram uma oportunidade única para que jovens brasileiros pudessem participassem de uma olimpíada mundial justamente em seu próprio país, além de vir a promover a divulgação da Matemática e até mesmo, do intercâmbio acadêmico.

As Olimpíadas de Matemática não se limitam apenas aos estudantes mais talentosos. Elas também têm um impacto significativo na cultura Matemática em geral, ao estimular o interesse público pela Matemática e demonstrar a importância da disciplina como uma ferramenta essencial em diversas áreas, como ciência, tecnologia, engenharia e economia.logo, se acrescenta-se que:

A participação das Olimpíadas de Matemática é vista por todos os países como uma ferramenta muito importante e seus objetivos essenciais para o desenvolvimento dos estudantes a níveis internacionais, ou seja, trazendo as práticas e conhecimentos equiparados como uma única linguagem em que todos os participantes expressem seus conhecimentos de modo universal, trazendo para dentro de suas salas tais experiências podendo dividi-las com outros estudantes que ainda não participaram ou possuam algumas dificuldades de aprendizagem na área da Matemática (Caldas e Viana, 2022,p.13).

Ao longo das décadas, as Olimpíadas de Matemática evoluíram para incluir uma variedade de competições e eventos, desde desafios individuais até olimpíadas por equipes e até mesmo competições internacionais para estudantes universitários. Essas iniciativas continuam a inspirar gerações de jovens matemáticos e a fortalecer o reconhecimento da Matemática como uma forma poderosa de pensamento e descoberta (Fapesp, 2023).

Outros marcos importantes na história das Olimpíadas de Matemática incluem o crescimento exponencial do número de países participantes, ao longo das décadas, bem como o estabelecimento de competições regionais e continentais que preparam os estudantes para a IMO. Essas iniciativas desempenham um papel fundamental no desenvolvimento do pensamento matemático entre os jovens, promovendo a criatividade, resolução de problemas e colaboração. A seguir, trataremos um pouco das principais olimpíadas brasileiras e/ou com equipes brasileiras participantes.

1.2 OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

A OBM é uma competição nacional que desafia estudantes a resolverem problemas matemáticos complexos e estimulantes. Fundada em 1979, a OBM tem desempenhado um papel crucial na promoção do estudo da Matemática e no desenvolvimento de habilidades analíticas entre jovens brasileiros.

A OBM teve suas raízes na década de 70, quando professores e matemáticos brasileiros buscavam maneiras de estimular o interesse dos estudantes pela Matemática e identificar talentos excepcionais nessa área. Inspirada por competições internacionais, como a IMO, a OBM foi oficialmente fundada em 1979 pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) em parceria com o Ministério da Educação.

> A Olimpíada Brasileira de Matemática é a precursora no âmbito competitivo brasileiro. É uma realização da Associação da Olimpíada Brasileira de Matemática (AOBM) e conta com o apoio da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Desde a sua primeira edição, em 1979 agrega conhecimento e prêmios aos seus participantes, que vão desde estudantes do Ensino Fundamental a estudantes de graduação das Redes Pública e Privada do Brasil. Formada por membros de mais de dez estados da federação, a OBM pode ser considerada a principal olimpíada nacional, uma vez que gera resultados visíveis nacionais e internacionais (Oliveira, 2020,p.10).

Desde então, a OBM cresceu significativamente em escopo e participação. A competição é dividida em quatro níveis, abrangendo estudantes do Ensino Fundamental ao ensino superior. Além disso, tem sido uma plataforma importante para identificar jovens talentosos e promover o estudo da Matemática em todo o Brasil.

Atualmente, OBM é composta por uma única fase, realizada por estudantes convidados. As formas de ingresso são diversas, dependendo do desempenho do aluno em competições como: a OBMEP, as olimpíadas regionais apoiadas pela OBM, a Competição Jacob Palis Jr. de Matemática, o Torneio Meninas na Matemática, dentre outras. Os problemas apresentados na OBM são cuidadosamente selecionados para desafiar os participantes e estimular o raciocínio lógico, a criatividade e a aplicação de conceitos matemáticos.

Os problemas da OBM muitas vezes transcendem o currículo escolar convencional, exigindo dos estudantes uma abordagem analítica e inovadora para resolvêlos. Os participantes são encorajados a desenvolver habilidades de resolução de problemas e a explorar diferentes estratégias Matemáticas.

A OBM tem um impacto na educação Matemática no Brasil, pois além de incentivar o interesse pela Matemática entre os estudantes, promove a excelência acadêmica e eleva o prestígio da disciplina. A competição também inspira o desenvolvimento de programas educacionais complementares, como cursos de preparação e atividades extracurriculares, que beneficiam toda a comunidade escolar. Neste sentido, convém acrescentar que os objetivos da OBM são diversos, tais como:

> Interferir decisivamente em prol da melhoria do ensino de Matemática no Brasil, estimulando estudantes e professores a um aprimoramento maior propiciado pela participação em olimpíadas; descobrir jovens com talento matemático excepcional e colocá-los em contato com matemáticos profissionais e instituições de pesquisa de alto nível, propiciando condições favoráveis para a formação e o desenvolvimento de uma carreira de pesquisa; selecionar os estudantes que representarão o Brasil em competições internacionais de Matemática a partir do seu desempenho na OBM, realizando o seu devido treinamento; apoiar as competições regionais de Matemática em todo o Brasil; e organizar as diversas competições internacionais de Matemática, quando sediadas no Brasil (Almeida, 2022,p.17).

São diversos objetivos da OBM e o principal deles é incentivar o aprimoramento de estudantes e dos professores por meio da participação em olimpíadas, visando identificar os jovens com talento excepcional em Matemática e ainda conectá-los com profissionais e com instituições de pesquisa renomadas. Além disso, a OBM visa selecionar estudantes para representarem o Brasil em competições internacionais, apoiar as competições regionais e também organizar competições internacionais sediadas no cenário brasileiro. Esses objetivos são cruciais para que se possa desenvolver e até mesmo, vir a valorizar o potencial matemático no país, proporcionando deste modo, oportunidades de aprendizagem, bem como o crescimento e reconhecimento para os estudantes e também para os professores envolvidos. Além disso, ao se realizar treinamentos e apoiar competições regionais, acredita-se que a OBM contribui para que ocorra disseminação e ao mesmo, tempo o fortalecimento do ensino de Matemática em todo o Brasil. Posto, isto ao sediar competições internacionais, o Brasil promove a troca de conhecimentos e experiências entre estudantes de diferentes países, impulsionando assim, o avanço científico e acadêmico nesta área específica.

1.3 O BRASIL NA OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA

A IMO é uma das competições mais prestigiadas e desafiadoras do mundo para estudantes de Ensino Médio interessados em Matemática. Fundada em 1959, ela reúne talentosos jovens matemáticos de todo o mundo para competir em um ambiente estimulante, onde são apresentados problemas matemáticos complexos e inovadores.

A IMO teve suas origens na competição Matemática internacional entre os países do bloco comunista durante a Guerra Fria. Em 1959, a primeira IMO foi realizada em Roman, Romênia, com a participação de sete países. Desde então, a IMO cresceu significativamente em escopo e participação, tornando-se um evento anual que atrai estudantes de mais de 100 países.

Neste cenário, destaca-se que a IMO foi criada visando promover a excelência na Matemática e ao mesmo tempo incentivar estudantes talentosos a desenvolver as suas habilidades Matemáticas. Inicialmente, acrescenta-se que essa competição era restrita apenas aos países do bloco comunista, mas com o passar dos anos, ela foi aberta para os demais países que desejasse vir a participar.

Hoje em dia, a IMO é um evento anual, o qual atrai estudantes de mais de 100 países ao redor do mundo. No decorrer da competição estes são desafiados a virem resolver problemas de Matemática teórica, o que por sua vez exigem pensamento criativo, bem como as habilidades de resolução de problemas e de conhecimento avançado de conceitos matemáticos.

A evolução da IMO reflete o crescente reconhecimento da importância da educação Matemática e do estímulo ao talento jovem em todo o mundo. As competições nacionais de Matemática em muitos países servem como etapas de seleção para identificar os melhores estudantes que participarão da IMO, refletindo a diversidade e o alcance global da competição.

Durante a IMO, os estudantes são desafiados com problemas matemáticos excepcionalmente difíceis, que exigem criatividade, raciocínio lógico e profundidade de conhecimento matemático para serem resolvidos. Os problemas são projetados para estimular o pensamento abstrato e a busca por soluções elegantes, muitas vezes ultrapassando os limites do currículo escolar convencional.

A competição é realizada ao longo de vários dias, permitindo aos participantes mergulharem nos problemas propostos e explorar diferentes abordagens de solução. Os resultados da IMO não apenas reconhecem o desempenho individual dos estudantes, mas também promovem o intercâmbio de ideias Matemáticas e o estímulo à excelência acadêmica.

A IMO desempenha um papel crucial na promoção da educação Matemática de alta qualidade e no desenvolvimento de futuros líderes acadêmicos no campo da Matemática. Além de proporcionar uma experiência desafiadora aos participantes, inspira milhões de estudantes em todo o mundo a se envolverem com a Matemática de forma mais profunda e criativa.

Os participantes da IMO frequentemente se tornam líderes em suas áreas de estudo, contribuindo para avanços significativos em Matemática e disciplinas relacionadas. Além disso, a experiência adquirida durante a preparação e a participação contribui para o desenvolvimento de habilidades valiosas, como resolução de problemas, trabalho em equipe e perseverança.

A OBM também é vista como uma oportunidade para os estudantes testarem as suas habilidades Matemáticas e se desafiarem em um ambiente altamente competitivo. Além disso, acredita-se que a participação na OBM pode vir a abrir portas para oportunidades acadêmicas e até mesmo, as profissionais no futuro.

O Brasil participa da IMO, ela é vista como sendo uma das competições de Matemática mais prestigiosas e também desafiadoras do mundo, desde o ano e 1979. O país possui uma história significativa neste evento, selecionando estudantes talentosos, através de competições internas.

A participação do Brasil na IMO é coordenada justamente pela SBM e, no decorrer dos anos, o país tem tido resultados expressivos, conquistando inclusive, diversas medalhas, incluindo as de ouro, prata e também de bronze. Esses resultados refletem no talento individual dos jovens matemáticos brasileiros e no trabalho das escolas e os professores que os preparam para estarem participando desta competição.

A participação do Brasil na IMO tem ajudado na promoção do estudo da Matemática no país, incentivando sobretudo, aos mais jovens a se interessarem por essa disciplina e também se envolverem em diversas competições Matemáticas. A IMO também é vista como sendo um intercâmbio cultural e científico entre os países que são participantes.

1.4 OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS

A OBMEP é um evento de destaque no cenário educacional brasileiro, promovendo a excelência em Matemática entre os estudantes das escolas públicas do país. Esta competição, fundada em 2005, tem como objetivo estimular o estudo da

Matemática, identificar talentos e promover a inclusão social por meio da educação Matemática de qualidade.

A OBMEP foi criada como uma iniciativa do IMPA, com o apoio do Ministério da Educação e do Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação. Sua fundação foi motivada pela necessidade de incentivar o estudo da Matemática nas escolas públicas e identificar jovens talentosos em todo o Brasil.

Desde a primeira edição em 2005, a OBMEP cresceu exponencialmente, tornando-se a maior competição de Matemática do país. Milhões de estudantes participam anualmente, demonstrando o alcance e a relevância desse evento para a comunidade escolar brasileira.

A OBMEP é dividida em três níveis de participação: Nível 1 (6º e 7º anos do Ensino Fundamental), Nível 2 (8º e 9º anos do Ensino Fundamental) e Nível 3 (Ensino Médio). Os estudantes competem por meio de uma prova com questões desafiadoras, que incentivam o raciocínio lógico, a criatividade e o domínio dos conceitos matemáticos. De forma geral, a OBMEP foi desenvolvida com o intuito de:

> - Estimular e promover o estudo da Matemática; - Contribuir para a melhoria da qualidade da educação básica, possibilitando que um maior número de estudantes brasileiros possa ter acesso a material didático de qualidade; - Identificar jovens talentos e incentivar seu ingresso em universidades, nas áreas científicas e tecnológicas; - Incentivar o aperfeiçoamento dos professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional; - Contribuir para a integração das escolas brasileiras com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e com as sociedades científicas; - Promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento.

Pode-se perceber que a competição vai além de apenas estimular e ainda promover o estudo da Matemática, esta busca também melhorar a qualidade da educação básica, com o intuito de proporcionar o acesso a materiais didáticos de qualidade, bem como identificar talentos e ainda incentivar seu ingresso nas áreas científicas e também tecnológicas. Além disso, nota-se que a OBMEP, também promove o aperfeiçoamento dos professores e contribui para que ocorra a integração entre escolas brasileiras, as universidades públicas, institutos de pesquisa e as sociedades científicas. Além disso, ela também tem como objetivo central vir a promover a inclusão social por meio, da difusão do conhecimento.

Além da prova, a OBMEP também promove atividades complementares, como o Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC Jr.), que oferece a oportunidade para os estudantes aprofundarem seus estudos em Matemática sob a orientação de professores especializados.

A OBMEP tem um impacto significativo na educação Matemática brasileira. Além de identificar talentos individuais, a competição estimula o interesse pela Matemática entre os estudantes, professores e comunidades escolares em geral. O reconhecimento e premiação dos participantes contribuem para elevar a autoestima e o desempenho acadêmico dos estudantes, além de promover a importância da educação Matemática na sociedade. Deste modo, destaca-se ainda que no ano de 2018, por exemplo

> a OBMEP ampliou seu alcance. A competição nacional que reunia cerca de 18 milhões de crianças e de jovens se ampliou aos estudantes dos 4º e 5º anos do Ensino Fundamental de escolas públicas municipais, estaduais e federais. A iniciativa expande o potencial de participantes da OBMEP em mais 5,2 milhões de estudantes de 87 mil unidades de ensino. Com 20 questões objetivas, as provas foram aplicadas em 30 de outubro nas próprias escolas em todo o país (Liell, 2020,p.5

Com a aplicação das provas nas próprias escolas, a OBMEP também se torna mais acessível e ainda tende a facilitar a participação dos estudantes. Isso incentiva a participação de um número maior de estudantes e ainda reduz as possíveis barreiras as quais, poderiam existir caso a competição fosse realizada apenas em local centralizado (Liell, 2020).

Mediante a isto, nota-se que essa ampliação do alcance da OBMEP contribui para incentivar o interesse pela Matemática entre os estudantes brasileiros e ainda visa promover a descoberta de novos talentos que atuam nessa área. Ela é uma iniciativa que merece ser valorizada, uma vez que ocasiona impactos positivos no ensino de Matemática no Brasil. Destarte:

> Da mesma maneira que a competição realizada anualmente desde 2005, a 1ª Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas – Nível A (OBMEP Nível A 2018) apresentou como objetivo estimular o estudo da Matemática, contribuir para a melhoria da qualidade da Educação Básica, identificar jovens talentos e promover a inclusão social. Os organizadores acreditam que a olimpíada pode evitar que os estudantes dos anos iniciais percam o gosto pela Matemática, que é mais intenso e aguçado nessa fase de desenvolvimento da criança (Liell, 2020,p.5-6).

A OBMEP Nível A tem sido considerada como sendo uma forma eficaz de despertar o interesse dos estudantes pela Matemática, tudo isto deve se ao seu caráter desafiador e motivador. A competição cria um ambiente que é estimulante e competitivo, de modo que os estudantes podem testar os seus conhecimentos e habilidades Matemáticas, mas ao mesmo tempo podem desenvolver pensamento crítico e capacidade de resolver problemas diversos. Outrossim, para Oliveira (2020), desde a sua criação, a OBMEP tem alcançado diversos resultados positivos, promovendo sobretudo, a melhoria na qualidade do ensino de Matemática nas escolas públicas. Além disso, em sua concepção a olimpíada tem contribuído para a descoberta e até mesmo, para a valorização de talentos matemáticos entre os estudantes, posto que estes muitas vezes são vindos de comunidades carentes.

> Além de contribuir para o processo de ensino-aprendizagem, a OBMEP atua como um grande incentivo ao estudo da Matemática, assim como para a melhoria da educação pública do Brasil, fazendo uma relação entre escolas, universidades, institutos de pesquisa e sociedades científicas. É um evento inclusivo, visto que inclui participantes dos grandes quanto das zonas rurais, os indígenas, quilombolas e portadores de necessidades especiais A OBMEP também leva o professor a adaptar suas práticas pedagógicas à metodologia proposta pela olimpíada, proporcionando aos estudantes uma nova forma de aprender Matemática e acabam mudando a visão negativa que possuíam da disciplina (Bezerra, 2021,p.24).

Entende-se ante ao exposto, que a OBMEP desempenha um papel fundamental ao contribuir para a melhoria da qualidade do ensino de Matemática no cenário brasileiro de modo, a incentivar não apenas os estudantes a se dedicarem aos estudos, mas também os professores a se adaptarem as suas práticas pedagógicas. Essa olimpíada vai além de uma competição, ela é considerada como uma oportunidade de inclusão e integração, envolvendo as diferentes regiões, culturas e até mesmo, diferentes grupos sociais.

Assim, ao promover a participação de estudantes de todas as partes do país, pode se entender que a OBMEP possibilita que os talentos sejam descobertos e também incentivados, muitas vezes em lugares em que o acesso à educação de qualidade é limitado. Além disso, ao se incluir grupos como indígenas, quilombolas e os portadores de necessidades especiais, a olimpíada demonstra seu o quão grande é o seu comprometimento com a igualdade de oportunidades e o com o respeito à diversidade.

Outrossim, ao propor uma metodologia desafiadora e diferenciada, acredita-se que os professores são estimulados a estarem repensando as suas práticas pedagógicas, buscando algumas alternativas para tornar a Matemática atrativa e acessível aos estudantes. Com isso, é possível que a visão negativa que muitos estudantes tinham da disciplina sejam transformada, despertando sobretudo, o interesse e incentivando o estudo da Matemática.

A OBMEP é tida como uma competição destinada para os estudantes do Ensino Fundamental e médio de escolas públicas e privadas em todo o cenário brasileiro. Ela busca incentivar o estudo da Matemática e de descobrir talentos na área. Desse modo, Goiás, como outros estados, participa diretamente dessa olimpíada, e os estudantes goianos têm se destacado de forma considerável em diversas edições.

Os resultados da OBMEP normalmente são divulgados anualmente e ainda podem conforme o desempenho dos estudantes nas provas, muitas escolas no Estado de Goiás promovem o treinamento para os estudantes com o objetivo de aumentar o desempenho na competição. Além disso, estes tem sido convidados para participarem de programas de formação e eventos de relacionados com à Matemática.

A OBMEP atinge praticamente todos os estudantes da 6ª série até o final do Ensino Médio. Participaram da 19ª edição 18,5 milhões de estudantes de todas as regiões do país alcançando, o recorde de 56.516 instituições participantes, de 5.564 cidades. É a maior competição escolar do mundo.

1.5 OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DE GOIÁS

A Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás (OMEG) é uma competição educacional que desempenha um papel fundamental no estímulo ao estudo da Matemática entre os estudantes do estado de Goiás, Brasil. Esta olimpíada, realizada desde 1992 pelo Instituto de Matemática e Estatística (IME) com apoio da OBM, busca promover o interesse pela Matemática, identificar talentos e incentivar a excelência acadêmica nessa disciplina.

A OMEG foi criada com o intuito de enriquecer o ensino de Matemática nas escolas de Goiás, proporcionando aos estudantes uma oportunidade única de testar suas habilidades Matemáticas em um ambiente competitivo e estimulante. Ao longo dos anos, a olimpíada tem crescido em popularidade e participação, atraindo estudantes de diversas escolas públicas e privadas em todo o estado.

A iniciativa da OMEG reflete o compromisso das instituições educacionais e do governo estadual de promover o ensino da Matemática e cultivar o talento matemático entre os jovens goianos. A competição é realizada anualmente e tem se consolidado como um evento significativo no calendário acadêmico de Goiás.

A OMEG é composta por diferentes categorias de participação, abrangendo estudantes do Ensino Fundamental e médio. Os participantes são desafiados com problemas matemáticos variados, que exigem habilidades de raciocínio lógico, criatividade e aplicação dos conceitos aprendidos em sala de aula.

Atualmente a competição é dividida em duas etapas, que incluem uma prova objetiva na plataforma Moode Ipê e outra na forma de avaliação discursiva presencial. A OMEG oferece medalhas e reconhecimentos aos estudantes e também a escola e professores mais bem-sucedidos, incentivando o aprimoramento contínuo e o interesse pela Matemática. Esse reconhecimento promove uma competição saudável entre as escolas e ainda estimula o aperfeiçoamento dos métodos de ensino e aprendizagem da disciplina de Matemática. Neste cenário, os professores são incentivados a buscarem novas formas de transmitir conhecimento e a ainda a desenvolverem estratégias de ensino as quais, despertem o interesse e até mesmo, o entusiasmo dos estudantes por essa disciplina. Além disso, a OMEG também contribui para elevar o prestígio da Matemática como disciplina acadêmica, posto que ao valorizar e até mesmo, reconhecer o talento e o esforço dos estudantes nessa área, a competição demonstra justamente a relevância da Matemática em diversas áreas do conhecimento e até mesmo, da sociedade como um todo

A OMEG tem um impacto significativo na educação Matemática em Goiás. Além de promover o estudo da Matemática, a competição estimula a busca pelo conhecimento, o desenvolvimento de habilidades analíticas e a superação de desafios intelectuais entre os estudantes. A participação na OMEG também contribui para elevar o prestígio da Matemática como disciplina acadêmica.

1.6 TORNEIO MENINAS NA MATEMÁTICA

A intenção deste tópico é discorrer sobre o Torneio meninas na Matemática, no entanto antes de se adentrar a este assunto convém ressaltar que:

> No Brasil, assim como no resto do mundo, a educação das mulheres não era vista como algo necessário, uma vez que elas eram preparadas para seu "destino": o casamento. Só em 1822, que surgiu interesse na educação feminina, quando o ensino primário virou responsabilidade do estado, e passou a ser ofertado também para meninas. Como o ensino para as meninas deveria ser regido por mulheres, surgiu a oportunidade do magistério, que se tornou uma possível profissão para as mulheres, com algumas restrições. Para as meninas ficavam reservados os níveis mais baixos da educação, os mais altos eram exclusivos para os homens (Nunes, 2021,p.21).

Foi apenas no ano de 1881 foi que as mulheres tiveram acesso ao ensino superior, depois no ano de 1985, com a expansão das universidades privadas, elas foram as mais favorecidas com o aumento das vagas, e desde então, puderam a ter um maior acesso a todos os níveis de ensino, inclusive no ensino superior. (Nunes, 2021). Assim, ao se conhecer um pouco da história da Matemática no cenário brasileiro, é mister destacar a história de algumas Matemáticas brasileiras as quais, tiveram contribuições significativas para a construção dessa história, como por exemplo, Maria Laura Mouzinho Leite Lopes, Marília Chaves Peixoto, Elza Furtado Gomide, Arlete Cerqueira Lima e Keti Tenenblat (Nunes, 2021).

Maria Laura Mouzinho Leite Lopes foi uma Matemática brasileira, se destacou principalmente na área de análise funcional, nasceu em 1922, e foi tida como primeira mulher a se tornar professora titular de Matemática no IMPA no ano de 1960. Além disso, também foi uma das fundadoras da SBM e da Sociedade Brasileira de Riemann especificamente no 1968. Marília Chaves Peixoto nasceu em 19 de setembro do ano 1944, se destacou na área de equações diferenciais parciais, considerada como sendo uma pioneira nessa área no Brasil. Ela foi uma das primeiras mulheres a se tornar professora doutora em Matemática no Brasil, e uma das Associação de Mulheres Matemáticas Brasil (AMMB). No que se refere a Elza Furtado Gomide nasceu em 1943, se dedicou principalmente à geometria diferencial, com ênfase a à teoria de subvariedades. Ela foi uma das fundadoras da AMMB e é considerada uma como sendo uma referência na área de Matemática no Brasil.

Arlete Cerqueira Lima nasceu em 1939 e se dedicou principalmente ao estudo de sistemas dinâmicos, foi uma das pioneiras nessa área no cenário brasileiro. Keti Tenenblat, foi uma Matemática brasileira que nasceu em 1943, se destacou na área de geometria diferencial, com ênfase nos estudos de geometrias não euclidianas. Essa Matemática foi uma das fundadoras da AMMB e considerada como sendo uma das maiores autoridades brasileiras em termos de geometria diferencial. Como se nota as mulheres foram inserindo de forma gradual no ensino de Matemática no Brasil, historicamente, as Olimpíadas de Matemática têm sido dominadas por homens, tanto no Brasil quanto de forma global. Isso se atribuí a diversos fatores como por exemplo, os estereótipos de gênero, falta de incentivo e representatividade, além das desigualdades socioeconômicas que afetam o acesso à educação e os recursos. No entanto, o Brasil tem tomado medidas visando incentivar a participação das mulheres nas Olimpíadas de Matemática como por exemplo, a OBMEP tem trabalhado ativamente para aumentar a presença feminina.

O Torneio Meninas na Matemática (TM^2) é uma iniciativa educacional que visa promover e incentivar a participação de meninas no estudo e na prática da Matemática. Fundado em 2017, o TM^2 tem como objetivo combater estereótipos de gênero, encorajando o interesse das meninas pela Matemática e fornecendo uma plataforma para desenvolver suas habilidades nessa área.

O TM^2 surgiu da necessidade de enfrentar as disparidades de gênero observadas no campo da Matemática e ciências correlatas. A iniciativa foi inspirada por estudos que destacam a baixa representação de mulheres em carreiras Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática (STEM) (Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática), muitas vezes atribuída a estereótipos culturais e falta de incentivo.

O torneio busca desafiar essas barreiras ao oferecer um ambiente inclusivo e estimulante, onde meninas podem demonstrar seu talento e potencial em Matemática. Ao promover a participação feminina nesse campo, o TM^2 aspira a contribuir para uma maior diversidade e representatividade na comunidade acadêmica e profissional.

O TM^2 é organizado como uma competição anual que envolve meninas do Ensino Fundamental e médio. Durante o torneio, as participantes são desafiadas com problemas matemáticos que incentivam o pensamento crítico, a resolução de problemas e a criatividade.

Além da competição em si, o TM^2 promove atividades complementares, como workshops, palestras e mentorias, que visam capacitar e inspirar as participantes. Essas iniciativas são fundamentais para fortalecer a confiança das meninas em suas habilidades Matemáticas e encorajá-las a considerar carreiras nas áreas STEM.

O TM^2 possui um impacto positivo e abrangente na educação Matemática e na sociedade em geral. Ao proporcionar um ambiente favorável para as meninas explorarem seu interesse pela Matemática, o torneio contribui para a quebra de estereótipos de gênero e para a construção de uma comunidade mais inclusiva e diversificada.

Segue abaixo uma tabela com as informações sobre as Olimpíadas de Matemática.

Tabela 1.1: Informações sobre a **Olimpíada Internacional de Matemática (IMO)**, a **Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM)**, a **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)**, a **Olimpíada de Matemática do Estado de Goiás (OMEG)** e o **Torneio Meninas na Matemática (TM^2)**

:

Olimpíada	**IMO**	**OBM**	**OBMEP**	**OMEG**	**TM^2**
Abrangência	Internacional	Nacional (Brasil)	Nacional (Brasil)	Estadual (Goiás, Brasil)	Nacional (Brasil)
Público-Alvo	Estudantes do ensino médio com até 20 anos	Estudantes do ensino fundamental, médio e universitário	Estudantes do 6º ao 9º ano do ensino fundamental e ensino médio de escolas públicas e privadas	Estudantes do ensino fundamental e médio do estado de Goiás	Estudantes do 8º ano do ensino fundamental ao 3º ano do ensino médio do sexo feminino
Seleção	Cada país realiza seletivas para formar equipes	Inscrição voluntária pelas instituições de ensino	Inscrição realizada pelas escolas participantes	Inscrição realizada pelas escolas ou individual	Inscrição individual ou por indicação
Fases	Fase única	Fase única	Duas fases	Duas fases	Fase única
Tipo de Prova	Prova dissertativa	Prova dissertativa	Prova objetiva (1ª fase) e prova discursiva (2ª fase)	Prova objetiva (on-line) e prova discursiva (presencial)	Prova dissertativa
Premiação	Medalhas de ouro, prata e bronze; menções honrosas	Medalhas de ouro, prata e bronze; menções honrosas; participação em programas de iniciação científica	Medalhas de ouro, prata e bronze; menções honrosas; bolsas de iniciação científica	Medalhas de ouro, prata e bronze; certificados de participação	Medalhas de ouro, prata e bronze; menções honrosas; incentivo à participação feminina em competições matemáticas
Ano de Início	1959	1979	2005	1992	2019
Número de Participantes em 2024	Aproximadamente 600 estudantes de 100 países	Cerca de 3 mil estudantes	Mais de 18 milhões de estudantes	Dados não disponíveis	Dados não disponíveis

Fonte: Produzida pela autora.

1.7 OPORTUNIDADES PARA ESTUDANTES MEDALHISTAS

Neste tópico se discute sobre o acesso das Universidades nas vagas olímpicas.

1.7.1 Acesso as Universidades

As vagas olímpicas nas universidades representam uma iniciativa importante para reconhecer e incentivar talentos acadêmicos e científicos que se destacaram em competições educacionais, como Olimpíadas de Matemática, física, química e outras áreas. Essas vagas especiais são destinadas a estudantes que se destacaram em competições nacionais e internacionais, oferecendo-lhes oportunidades exclusivas de acesso ao ensino superior em instituições renomadas.

As vagas olímpicas surgiram no ano de 2019, no Brasil, como uma resposta ao reconhecimento de que os estudantes talentosos que se destacam em olimpíadas acadêmicas têm potencial para contribuir significativamente para a comunidade acadêmica e científica. No Brasil e em outros países, instituições de ensino superior têm implementado políticas de reserva de vagas para medalhistas e participantes bem-sucedidos em olimpíadas científicas, como forma de atrair e reter talentos promissores.

Essa iniciativa promove a excelência acadêmica desde a fase escolar, valorizando o mérito e proporcionando oportunidades únicas para jovens talentosos prosseguirem seus estudos em ambientes acadêmicos estimulantes.

As Vagas Olímpicas nas universidades oferecem uma série de benefícios tanto para os estudantes contemplados quanto para as instituições de ensino superior:

I- Reconhecimento do mérito: a vagas reservadas reconhecem o mérito acadêmico e o esforço dos estudantes que se destacam em olimpíadas educacionais, incentivando a busca pela excelência desde cedo.

II- Diversidade e inovação: a presença de estudantes olímpicos contribui para a diversidade intelectual das universidades, trazendo novas perspectivas e ideias inovadoras para o ambiente acadêmico.

III- Estímulo à pesquisa e desenvolvimento: o estudante olímpicos tendem a se envolver ativamente em atividades de pesquisa e desenvolvimento, contribuindo para o avanço do conhecimento em suas áreas de interesse.

IV- Formação de lideranças: esses estudantes têm potencial para se tornarem líderes em suas áreas de atuação, inspirando e influenciando positivamente seus colegas e futuras gerações.

Várias universidades brasileiras oferecem vagas especiais para estudantes medalhistas de competições de conhecimento, como as Olimpíadas Científicas, através de programas conhecidos como Vagas Olímpicas. Essas vagas são uma forma de reconhecer o talento e o esforço de estudantes que se destacam em competições acadêmicas.

Aqui estão algumas das universidades que possuem programas de Vagas Olímpicas:

Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP).

A UNICAMP oferece vagas para estudantes medalhistas de diversas olimpíadas científicas, como as Olimpíadas de Matemática, Física, Química, Biologia, e outras. O programa é destinado a estudantes que participaram de competições acadêmicas de grande porte e conquistaram medalhas. As vagas são disponibilizadas para cursos em diversas áreas do conhecimento.

Universidade de São Paulo (USP).

A USP também tem vagas reservadas para estudantes medalhistas de olimpíadas científicas. Estudantes premiados em olimpíadas como a OBM, Física (OBF), Química (OBQ), Biologia (OBB), entre outras, podem se inscrever para concorrer a essas vagas. O programa da USP é uma maneira de incentivar a busca pelo conhecimento e premiar aqueles que se destacam nas competições.

Universidade Estadual Paulista (UNESP).

A UNESP oferece vagas para estudantes medalhistas de competições como a OBM, Olimpíada Brasileira de Física (OBF), Olimpíada Brasileira de Química (OBQ), entre outras. O programa de vagas olímpicas da UNESP tem como objetivo atrair jovens talentos que se destacaram em competições de Ensino Médio.

Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)

A UFPE oferece vagas olímpicas para estudantes medalhistas de olimpíadas científicas, com o intuito de valorizar o esforço de quem se dedica ao estudo e à pesquisa. As competições aceitas pela universidade incluem as Olimpíadas de Matemática, Física, Química, entre outras.

Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG)

A UFMG disponibiliza vagas olímpicas para estudantes que conquistaram medalhas em competições científicas de nível nacional e internacional. O programa é uma forma de reconhecer o potencial acadêmico dos estudantes e facilitar seu ingresso na universidade.

Universidade Estadual de Londrina (UEL)

A UEL oferece vagas especiais para estudantes que foram medalhistas em competições de conhecimento, como as Olimpíadas de Matemática, Física, Química, entre outras.

Além dessas universidades, outras instituições públicas e privadas também têm programas semelhantes, embora a maioria das vagas seja oferecida por universidades estaduais e federais.

Cada universidade tem critérios específicos para as olimpíadas aceitas, os cursos que oferecem as vagas e os requisitos de inscrição.

1.7.2 Programa de Iniciação Científica

O Programa de Iniciação Científica (PIC) da OBMEP é uma iniciativa que visa estimular e desenvolver o interesse pela ciência e pela pesquisa entre os estudantes brasileiros. Fundado em 2005, o PIC oferece oportunidades únicas para os participantes aprofundarem seus conhecimentos em Matemática e explorarem áreas científicas relacionadas.

O Programa de iniciação científica da OBMEP foi criado com o propósito de ampliar o impacto da competição além da fase de resolução de problemas matemáticos. Ao identificar talentos durante a OBMEP, o PIC oferece aos estudantes a oportunidade de realizar pesquisas orientadas por profissionais renomados, explorando questões Matemáticas mais avançadas e suas aplicações práticas. Logo:

> Programas institucionais de iniciação científica e tecnológica são aqueles que visam contribuir na formação de jovens para as carreiras de ciência e tecnologia bem como ajudar na formação científica de profissionais aptos a enfrentarem os desafios da sociedade foi a definição que o CNPq escolheu, em 2021, para resumir as suas iniciativas de destacar jovens talentos para a ciência e fazê-los deslumbrar uma carreira no meio acadêmico ou no setor produtivo. A missão dessa fundação pública vinculada ao MCTIC está centrada no fomento à ciência, à tecnologia e à inovação, o que torna o CNPq o principal apoiador e financiador de programas de iniciação científica do Brasil (Almeida, 2022,p.20).

Os objetivos do PIC incluem estimular o pensamento científico, promover a formação de futuros cientistas e engenheiros, e contribuir para o desenvolvimento de habilidades de pesquisa e análise entre os participantes. O programa visa inspirar uma nova geração de talentos científicos e fortalecer o interesse pela ciência no Brasil. Além disto, convém pontuar que o PIC consiste em um programa que visa transmitir aos estudantes/bolsistas uma iniciação científica que esteja relacionada à Matemática, inserindo-os no rigor da leitura bem como na escrita de resultados, bem como nas técnicas e métodos, na independência do raciocínio analítico, dentre outros, visando sobretudo, despertar a vocação científica do aluno/bolsista, além de vir a estimular sua criatividade, por meio diferentes situações-problema.

O PIC oferece bolsas de iniciação científica para os estudantes medalhistas e menções honrosas da OBMEP. Os selecionados têm a oportunidade de participar de projetos de pesquisa supervisionados por professores e pesquisadores qualificados, geralmente ligados a instituições de ensino superior e centros de pesquisa.

Durante o programa, os participantes realizam estudos aprofundados sobre tópicos específicos em Matemática ou áreas correlatas, apresentando resultados em eventos científicos e publicando artigos acadêmicos. Além disso, o PIC oferece workshops, seminários e outras atividades que enriquecem a experiência de aprendizado e estimulam o desenvolvimento acadêmico dos estudantes.

O Programa de Iniciação Científica da OBMEP tem um impacto significativo na formação científica dos estudantes brasileiros. Os participantes do PIC desenvolvem habilidades avançadas de resolução de problemas, aprendem a trabalhar de forma independente em projetos de pesquisa e ganham exposição ao ambiente acadêmico e científico.

Os estudantes que participam do PIC geralmente demonstram um aumento no interesse pela ciência e uma maior probabilidade de seguir carreiras científicas e tecnológicas. O programa contribui para a criação de uma rede de contatos profissionais valiosa para o desenvolvimento futuro dos participantes. Conforme os dados do SIOP, em 2020 foram beneficiados por bolsas do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) mais de 120 mil estudantes de todo o Brasil. Entretanto, apesar dos inúmeros benefícios e dos resultados positivos que todos esses programas trazem, detalhados a seguir apenas dois deles, o PIC-OBMEP e o PICME (Almeida, 2022).

PIC Encontro do Hotel Hilbert

O PIC é uma iniciativa que visa fomentar o interesse pela pesquisa e pelo desenvolvimento acadêmico entre estudantes de diversas áreas do conhecimento. Uma das atividades mais marcantes do PIC é o Encontro do Hotel Hilbert, um evento anual que reúne participantes do programa para apresentação de trabalhos, troca de experiências e debates sobre temas relevantes nas respectivas áreas de estudo. O Encontro do Hotel Hilbert teve suas origens na necessidade de proporcionar um espaço de interação e colaboração entre os participantes do PIC. Inspirado no ambiente acolhedor e intelectualmente estimulante dos hotéis de conferência, o evento foi concebido como uma oportunidade para os estudantes apresentarem seus projetos de pesquisa, receberem feedback de colegas e mentores, e se inspirarem com o trabalho de outros pesquisadores. O nome “Hotel Hilber” é uma homenagem ao matemático David Hilbert, cujo famoso problema dos 23 desafios matemáticos propostos no início do século XX simboliza o espírito de desafio e inovação que permeia o encontro.

O Encontro do Hotel Hilbert é organizado em formato de conferência, com apresentações orais, sessões de pôsteres e mesas-redondas sobre diversos temas acadêmicos. Os participantes têm a oportunidade de compartilhar os resultados de suas pesquisas, discutir ideias e estabelecer conexões com outros estudantes e profissionais da área. Além das atividades acadêmicas, o Encontro também inclui momentos de integração e socialização, como jantares, passeios e atividades recreativas, que contribuem para fortalecer os laços entre os participantes e criar uma atmosfera de colaboração e camaradagem. O Encontro do Hotel Hilbert tem um impacto significativo no desenvolvimento acadêmico e profissional dos participantes do PIC. Ao apresentarem seus trabalhos e interagirem com colegas e especialistas da área, os estudantes têm a oportunidade de aprimorar suas habilidades de comunicação, receber feedback construtivo e expandir seus horizontes intelectuais. Além disso, o Encontro do Hotel Hilbert contribui para promover uma cultura de pesquisa e inovação entre os participantes do PIC, incentivando-os a perseguir objetivos acadêmicos mais ambiciosos e a considerar a possibilidade de seguir carreiras na área da pesquisa.

O Encontro do Hotel Hilbert é uma peça fundamental do programa de iniciação científica, proporcionando uma plataforma única para os participantes do PIC compartilharem seus trabalhos, fortalecerem suas habilidades acadêmicas e se inspirarem mutuamente em sua jornada de desenvolvimento científico e acadêmico.

1.7.3 Programa de Iniciação Científica e Mestrado

O Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME) é uma iniciativa educacional que combina a oportunidade de iniciação científica com a realização de estudos de mestrado, proporcionando aos participantes uma experiência única de imersão na pesquisa acadêmica. Fundado no ano de 2010 pela UNICAMP, a qual se encontra localizada no estado de São Paulo, Brasil. Neste ínterim, convém salientar que o programa é destinado a estudantes de graduação os quais, possuam interesse em desenvolver projetos de pesquisa científica em junção com docentes da universidades. O PICME tem como objetivo estimular o interesse pela ciência, promover a formação de jovens pesquisadores e contribuir para o avanço do conhecimento em diversas áreas do saber.

O programa de iniciação científica e mestrado surge da necessidade de oferecer oportunidades mais abrangentes e integradas de pesquisa e formação acadêmica para estudantes talentosos. Combinando a experiência de iniciação científica com a realização de estudos de mestrado, o PICME visa proporcionar uma formação sólida e multidisciplinar aos participantes, preparando-os para carreiras de sucesso na academia, na indústria e em outras áreas profissionais.

Os objetivos do PICME incluem:

I- Estimular o interesse pela pesquisa científica desde o nível de graduação.
II- Proporcionar uma formação acadêmica avançada e interdisciplinar.
III- Desenvolver habilidades de pesquisa, análise crítica e comunicação científica.
IV- Contribuir para a produção de conhecimento relevante e inovador.

O PICME é estruturado como um programa de duração média, geralmente com a duração de dois a três anos. Durante esse período, os participantes têm a oportunidade de se envolver em projetos de pesquisa sob a supervisão de professores e pesquisadores experientes. Os projetos podem abranger uma ampla gama de disciplinas acadêmicas, incluindo ciências naturais, ciências sociais, humanidades, engenharia, entre outras.

Além da realização de pesquisas, os participantes do PICME são incentivados a cursar disciplinas de mestrado, aprofundando seus conhecimentos teóricos e metodológicos. O programa também oferece atividades complementares, como seminários, workshops e conferências, que enriquecem a experiência de aprendizado e promovem o intercâmbio de ideias entre os participantes.

O programa de iniciação científica e mestrado tem um impacto significativo na educação superior e na pesquisa acadêmica. Os participantes do PICME desenvolvem habilidades avançadas de pesquisa e análise, aprendem a trabalhar de forma independente em projetos complexos e ganham experiência em publicação e divulgação científica.

Estudos mostram que os estudantes que participam do PICME geralmente apresentam um desempenho acadêmico excepcional e uma maior probabilidade de ingressar em programas de doutorado e seguir carreiras acadêmicas e científicas. Além disso, o programa contribui para o desenvolvimento de uma cultura de pesquisa e inovação nas instituições de ensino superior, fortalecendo a produção científica e tecnológica no país.

1.7.4 Bolsa Instituto TIM OBMEP

O Programa de Bolsa Instituto TIM OBMEP é uma iniciativa voltada para estimular o interesse pela Matemática e promover a inclusão digital entre estudantes brasileiros. Desta maneira, são elegíveis para participar deste programa os estudantes que tiverem sido premiados com medalhas de ouro, bem como de prata, bronze e até mesmo, a menção honrosa nas diversas edições que ocorreram da OBMEP.

Criado em parceria entre o Instituto TIM e a OBMEP, o programa oferece bolsas de estudo para participantes da OBMEP, com o objetivo de apoiar o desenvolvimento acadêmico e tecnológico desses jovens talentos

O Programa de Bolsa Instituto TIM OBMEP teve início como uma extensão da OBMEP, visando ampliar o impacto da competição ao oferecer oportunidades educacionais e tecnológicas para os participantes. O programa é parte do compromisso do Instituto TIM em promover a educação, a ciência e a tecnologia como pilares para o desenvolvimento social e econômico do país.

Os objetivos do programa incluem:

I- Apoiar o desenvolvimento acadêmico de estudantes talentosos em Matemática.
II- Promover o acesso à tecnologia e estimular a inclusão digital.
III- Incentivar o interesse pela ciência, tecnologia, engenharia e Matemática (STEM).
IV- Contribuir para a formação de uma nova geração de profissionais qualificados e inovadores.

O Programa de Bolsa Instituto TIM OBMEP oferece bolsas de estudo para estudantes medalhistas e menções honrosas da OBMEP, selecionados com base em seu desempenho e potencial acadêmico. Os beneficiários das bolsas têm a oportunidade de participar de atividades educacionais e tecnológicas, como cursos, workshops e projetos de pesquisa. O Programa de Bolsa Instituto TIM OBMEP tem um impacto significativo na educação e na inclusão digital no Brasil. Ao oferecer bolsas de estudo e acesso a recursos tecnológicos, o programa amplia as oportunidades de aprendizado e desenvolvimento para os estudantes, especialmente aqueles de comunidades menos favorecidas.

1.7.5 IMPA Tech: Graduação em Matemática da Inovação e tecnologia

A Graduação em Matemática da Inovação e tecnologia (IMPA Tech), lançado pelo renomado Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), é uma iniciativa revolucionária no cenário acadêmico brasileiro, direcionada especificamente para medalhistas das Olimpíadas de Matemática. Esse programa busca valorizar e potencializar o talento dos jovens que se destacaram nessas competições, oferecendo-lhes uma formação diferenciada e de excelência.

O IMPA Tech combina o rigor tradicional da Matemática com uma abordagem inovadora, prática e voltada para a solução de problemas reais, criando um ambiente educacional dinâmico que prepara os estudantes para os desafios do mundo contemporâneo. Além de manter os elevados padrões acadêmicos do IMPA, o programa enfatiza a aplicação do conhecimento matemático em contextos concretos e multidisciplinares.

Objetivos do Programa: O programa de graduação em Matemática do IMPA Tech foi estruturado com objetivos claros e abrangentes:

• Proporcionar uma formação matemática sólida e abrangente: A grade curricular foi projetada para oferecer uma base teórica robusta, abrangendo áreas fundamentais da Matemática, como Álgebra, Geometria, Análise e Probabilidade, além de aplicações práticas em áreas como computação, economia e engenharia.

• Desenvolver habilidades de pensamento crítico e resolução de problemas: Os estudantes são incentivados a enfrentar desafios matemáticos complexos, aprimorando sua capacidade de análise, raciocínio lógico e criatividade na busca por soluções inovadoras.

• Aprimorar a comunicação matemática: O programa inclui disciplinas e atividades que ajudam os alunos a se expressarem com clareza e precisão, seja em contextos acadêmicos ou profissionais, tornando-os capazes de transmitir ideias matemáticas de forma acessível e eficaz.

• Estimular o interesse pela pesquisa matemática: Com acesso a recursos avançados e orientação de pesquisadores renomados, os estudantes têm a oportunidade de explorar áreas emergentes da Matemática, despertando seu interesse por estudos avançados e carreiras acadêmicas.

• Preparar para carreiras multidisciplinares: O IMPA Tech capacita os alunos para aplicarem suas habilidades matemáticas em setores como tecnologia, ciência de dados, finanças, inteligência artificial e outros campos de alta demanda.

Diferenciais do Programa:

Além de sua estrutura acadêmica de ponta, o IMPA Tech se destaca por oferecer uma experiência única aos seus alunos:

• Foco exclusivo em medalhistas olímpicos: O programa reconhece e valoriza o esforço e a dedicação desses jovens, oferecendo-lhes um ambiente que respeita suas conquistas e potencializa seu talento.

• Acesso a pesquisadores de renome internacional: Os alunos têm contato direto com especialistas em Matemática pura e aplicada, permitindo uma troca de experiências que enriquece sua formação.

• Integração de tecnologia e inovação: As disciplinas incorporam ferramentas tecnológicas modernas, preparando os estudantes para enfrentar desafios em áreas como programação, modelagem matemática e análise de dados.

• Ambiente colaborativo e estimulante: O programa promove uma comunidade acadêmica vibrante, onde os alunos podem compartilhar ideias, participar de projetos interdisciplinares e explorar novas fronteiras do conhecimento.

Com essa iniciativa, o IMPA reafirma seu compromisso com a excelência acadêmica e a inovação, criando um programa que não apenas forma matemáticos excepcionais, mas também contribui para o avanço da ciência e da tecnologia no Brasil e no mundo. O IMPA Tech é um marco na educação superior, oferecendo aos medalhistas olímpicos uma oportunidade única de transformar seu talento em uma carreira brilhante e impactante.

1.8 OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA E OS DOCUMENTOS CURRICULARES

A seguir se fala das Olimpíadas de Matemática na BNCC e no Documento Curricular de Goiás, pois as olimpíadas se alinham com os objetivos educacionais os quais são propostos por estes documentos com o intuito de promover uma educação Matemática contextualizada que valoriza a capacidade de aprendizagem dos estudantes .

1.8.1 Base Nacional Comum Curricular

A BNCC é um documento que estabelece os conhecimentos e habilidades essenciais que todos os estudantes do ensino infantil, fundamental e médio necessitam desenvolver ao longo de sua trajetória no cenário educacional. Ela passou por três versões e cada uma destas traz modificações e ajustes para adequar o currículo e às demandas da educação brasileira.

A primeira versão da BNCC foi publicada em 2015 e contou com a participação de gestores, especialistas e professores da educação básica, a participação popular aconteceu por meio de consulta virtual. Na primeira versão, o seu objetivo foi sinalizar percursos de aprendizagem e de desenvolvimento dos estudantes. Assim, com o intuito de cumprir este papel ao longo da educação básica, a proposta foi mobilizar recursos de todas as áreas de conhecimento e de cada um de seus componentes curriculares, de modo articulado e progressivo. A 2ª versão da BNCC, veio a público em abril de 2016, e foi produzida por uma equipe de 135 profissionais, entre professores da educação básica e do ensino superior, representantes de todas as unidades da federação.

O diferencial da segunda versão da BNCC em relação a primeira foi o fato de abordar a concepção de educação como direitos individuais e coletivos, visando capacitar diretamente o indivíduo ao exercício da cidadania.

A terceira e última versão da BNCC foi disponibilizada em abril de 2017 e reforçou a ideia de currículo integrado via competências, contextualização e interdisciplinaridade. Para a BNCC, a competência é definida como sendo a mobilização de conhecimento que é entendido como conceitos e procedimentos; bem como pelas habilidades como práticas cognitivas e as socioemocionais; atitudes e os valores para resolver as demandas complexas da vida cotidiana no que se refere ao pleno exercício da cidadania e até mesmo, do mundo do trabalho. Desse modo, convém destacar que um diferencial entre a segunda e a terceira versão é que em lugar dos direitos de aprendizagem e desenvolvimento, na última versão, estabeleceu-se que os conteúdos curriculares se organizassem em competências.

O ensino da Matemática no Brasil nas últimas décadas, sobretudo, após a homologação da BNCC, tem passado por um processo de uma intensa reflexão contínua no que se refere, às questões curriculares, bem como à postura do professor e até mesmo, do planejamento e da implementação das práticas pedagógicas.

As Olimpíadas de Matemática desempenham um papel significativo no contexto da BNCC ao promoverem o desenvolvimento do pensamento matemático, estimulando a resolução de problemas complexos e incentivando o interesse pela Matemática entre os estudantes.

A BNCC estabelece diretrizes e competências essenciais que os estudantes devem desenvolver ao longo de sua escolaridade. Essas competências incluem, entre outras, a capacidade de resolver problemas matemáticos, aplicar conceitos matemáticos em diferentes contextos e desenvolver raciocínio lógico e crítico. As Olimpíadas de Matemática são uma ferramenta eficaz para promover tais competências, uma vez que os problemas apresentados nessas competições exigem habilidades Matemáticas avançadas e criatividade na sua resolução.

Uma das características fundamentais das Olimpíadas de Matemática é o estímulo ao pensamento criativo e à abordagem inovadora na resolução de problemas. Os participantes são desafiados a pensar além dos conceitos básicos aprendidos em sala de aula, aplicando princípios matemáticos de maneira original e criativa para resolver problemas complexos. Essa abordagem está alinhada com os objetivos da BNCC de desenvolver habilidades cognitivas avançadas e preparar os estudantes para enfrentar desafios reais na vida acadêmica e profissional.

As Olimpíadas de Matemática abrangem uma ampla variedade de temas e competências Matemáticas, indo além do currículo escolar tradicional. Os problemas propostos nas competições muitas vezes envolvem geometria avançada, álgebra, combinatória e teoria dos números, entre outros tópicos. Essa diversidade de temas permite que os estudantes explorem diferentes áreas da Matemática, ampliando seus horizontes e estimulando o interesse por disciplinas específicas.

O envolvimento dos estudantes em Olimpíadas de Matemática tem demonstrado impactos positivos no ensino e aprendizagem da Matemática. Além de desenvolverem habilidades Matemáticas avançadas, os participantes das olimpíadas geralmente demonstram maior confiança e motivação na disciplina. Esse engajamento contribui para a formação de uma cultura de excelência Matemática nas escolas e para o fortalecimento da educação como um todo. A BNCC estabelece as competências e habilidades essenciais que os estudantes brasileiros desenvolvam ao longo da educação básica.

As Olimpíadas de Matemática desempenham um papel de extrema relevância no cenário educacional, contribuindo de forma significativa para o desenvolvimento do pensamento matemático avançado e para a formação de estudantes talentosos e engajados com o aprendizado. Essas competições se destacam como um espaço privilegiado para que os alunos explorem seus potenciais e enfrentem desafios intelectuais que vão além do ensino tradicional, promovendo um ambiente de estímulo à criatividade, ao raciocínio lógico e à resolução de problemas complexos.

Alinhadas aos princípios e diretrizes estabelecidos pela BNCC, as Olimpíadas de Matemática reforçam a importância de integrar habilidades cognitivas de alto nível ao desenvolvimento acadêmico dos estudantes. A BNCC, que norteia a educação básica no Brasil, prioriza uma formação integral, com foco na construção de competências que sejam aplicáveis tanto no âmbito acadêmico quanto em contextos práticos e profissionais. Nesse sentido, as competições matemáticas se apresentam como um recurso pedagógico eficaz para potencializar as habilidades estabelecidas como metas pela BNCC.

Essas competições criam oportunidades para que os alunos desenvolvam competências essenciais, como a capacidade de abstração, o pensamento crítico, o raciocínio dedutivo e a habilidade de interpretar e resolver problemas de maneira estruturada. Ao participar das Olimpíadas, os estudantes são incentivados a ultrapassar os limites do currículo escolar convencional, aprofundando-se em conteúdos e abordagens que estimulam o aprendizado contínuo e a curiosidade científica.

Além disso, as Olimpíadas de Matemática desempenham um papel motivador na formação de estudantes talentosos, oferecendo uma plataforma para que eles demonstrem suas habilidades e se destaquem em um ambiente competitivo saudável. Esse reconhecimento contribui para a construção da autoconfiança e do interesse pela Matemática como uma área de conhecimento rica e desafiadora, abrindo portas para futuras oportunidades acadêmicas e profissionais.

Outro aspecto importante é o impacto positivo dessas competições na comunidade escolar como um todo. As Olimpíadas incentivam professores a adotarem práticas pedagógicas inovadoras, incorporando novos métodos de ensino e materiais didáticos que promovam o engajamento dos alunos. Além disso, elas estimulam a formação de grupos de estudo e o fortalecimento do trabalho em equipe, criando uma cultura de colaboração e aprendizado coletivo. Portanto, as Olimpíadas de Matemática se consolidam como uma ferramenta valiosa para o aprimoramento do ensino, a identificação de talentos e a promoção de uma educação alinhada aos objetivos da BNCC, que visa formar cidadãos críticos, criativos e preparados para os desafios do mundo moderno.

Assim, as Olimpíadas de Matemática não apenas fortalecem o aprendizado e a aplicação prática dos conceitos matemáticos, mas também contribuem para a formação integral dos estudantes, alinhando-se aos objetivos da BNCC de preparar cidadãos críticos, criativos e preparados para os desafios futuros.

1.8.2 Documento Curricular de Goiás

O Documento Curricular de Goiás (DC-GO) é uma diretriz que orienta o ensino nas escolas do estado de Goiás, este estabelece as competências, as habilidades e conteúdo que devem ser trabalhados no decorrer da educação básica, visando garantir uma formação integral e que seja de qualidade para os estudantes. O currículo é organizado por etapas de ensino, as quais incluem a educação infantil, bem como o Ensino Fundamental e até mesmo, o Ensino Médio. Ele busca atender às necessidades locais e as regionais, respeitando as diversidades culturais e as sociais. Ademais, o Documento Curricular de Goiás inclui diretrizes sobre práticas pedagógicas, bem como avaliação e formação continuada dos professores.

> O DC-GO Ampliado foi elaborado a partir da BNCC da Educação Infantil e do Ensino Fundamental, aprovada em 2017 e tem por objetivo explicitar as aprendizagens essenciais que todas as crianças e estudantes têm o direito de se apropriarem ao longo da Educação Básica

O DC-GO Ampliado (Diretrizes Curriculares – Goiás) é visto como sendo um documento que se fundamenta na BNCC e busca justamente vir a orientar a prática educativa nas escolas do estado de Goiás, visando sobretudo, assegurar que todas as crianças e os estudantes possuam acesso a aprendizagens significativas e também essenciais. Outrossim, acrescenta-se que o objetivo principal do DC-GO Ampliado é justamente vir a proporcionar um currículo que garanta a equidade e a também a qualidade da educação, abordando de maneira ampla as principais competências e as habilidades que devem ser desenvolvidas no decorrer da Educação Básica.

> A estrutura do Documento Curricular para Goiás assemelha-se à BNCC, pois mantém a apresentação da Educação Infantil ancorada em direitos de aprendizagens e desenvolvimento, campos de experiências e objetivos de aprendizagens e desenvolvimento, e do Ensino Fundamental em áreas de conhecimento (Linguagens, Matemática, Ciências da Natureza e Ciências Humanas) e componentes curriculares (Língua Portuguesa, Língua Inglesa, Arte, Educação Física, Matemática, Ciências da Natureza, História e Geografia). A exemplo da BNCC, o DC-GO também é regido pelas dez competências gerais que permeiam todas as etapas da Educação Básica, bem como todas as áreas de conhecimento e seus respectivos componentes curriculares. Estas competências gerais se articulam aos direitos de aprendizagens e desenvolvimento nana Educação Infantil e são o alicerce das competências específicas de área e de componentes;[23]

As diretrizes do DC-GO enfatizam a importância de um ensino que estimule a curiosidade, a criatividade e o pensamento crítico dos estudantes, também estimula a construção de uma cidadania ativa e consciente. Isso inclui as práticas pedagógicas que conectem o conhecimento escolar com à realidade dos estudantes, possibilitando que eles se tornem protagonistas do seu ensino e aprendizagem. O DC-GO é uma referência fundamental para orientar o ensino e a aprendizagem nas escolas do estado. Ele estabelece competências, habilidades e conteúdos essenciais que os estudantes devem desenvolver ao longo de sua educação básica, incluindo a área de Matemática. Além disso, o DC-GO incentiva a interdisciplinaridade, possibilitando que os conceitos matemáticos sejam conectados com as demais áreas do conhecimento, o que tende a enriquecer o aprendizado e torna deste modo, a Matemática como sendo uma cada vez mais atrativa para os estudantes. Através de atividades que sejam práticas e contextualizadas, os estudantes passam a serem encorajados a explorarem diferentes estratégias de resolução, promovendo sobretudo, uma compreensão mais profunda e também duradoura dos conteúdos.

As Olimpíadas de Matemática desempenham um papel importante no contexto educacional de Goiás, conforme estabelecido pelo DC-GO. O DC-GO é uma referência fundamental para orientar o ensino e a aprendizagem nas escolas do estado. Ele estabelece competências, habilidades e conteúdos essenciais que os estudantes devem desenvolver ao longo de sua educação básica, incluindo a área de Matemática.

As Olimpíadas de Matemática complementam e enriquecem o ensino da Matemática em Goiás, alinhando-se aos objetivos e princípios estabelecidos pelo DC-GO. Essas competições oferecem aos estudantes a oportunidade de aplicar e aprofundar seus conhecimentos matemáticos, desenvolvendo habilidades de resolução de problemas e raciocínio lógico.

Participar das Olimpíadas de Matemática estimula o desenvolvimento de competências avançadas em Matemática, indo além do currículo escolar tradicional. Os estudantes são desafiados a resolver problemas complexos, explorando conceitos matemáticos de maneira criativa e inovadora. Essa abordagem está alinhada com as expectativas de aprendizagem estabelecidas pelo DC-GO, que valoriza o desenvolvimento do pensamento crítico e a aplicação de conceitos matemáticos em diferentes contextos.

Além de promover o desenvolvimento de habilidades Matemáticas, as Olimpíadas de Matemática também estimulam o interesse dos estudantes pela disciplina. O desafio e a competição saudável proporcionam motivação adicional para os estudantes se envolverem com a Matemática e explorarem novos conceitos e técnicas.

O envolvimento dos estudantes em Olimpíadas de Matemática tem demonstrado impactos positivos no ensino e aprendizagem da Matemática em Goiás. Os participantes das competições geralmente apresentam um desempenho melhor em sala de aula, demonstram maior confiança em suas habilidades Matemáticas e estão mais preparados para enfrentar desafios acadêmicos futuros.

As Olimpíadas de Matemática desempenham um papel relevante no contexto educacional de Goiás, complementando o ensino de Matemática conforme estabelecido pelo DC-GO. Essas competições promovem o desenvolvimento de habilidades avançadas em Matemática, estimulam o interesse dos estudantes pela disciplina e contribuem para o sucesso acadêmico e profissional dos participantes. As Olimpíadas de Matemática em Goiás são organizadas e também promovidas pela Secretaria de Estado da Educação de Goiás (SEDUC-GO) juntamente com as instituições de ensino, como universidades e até mesmo, em parceria com as escolas. Essas olimpíadas possuem o intuito de estimular o estudo e a até mesmo, a aprendizagem da Matemática, além de vir a identificar e até mesmo, a capacitar jovens talentos desta área. Em Goiás, a OBMEP, consiste em uma das principais competições que abrange os estudantes do Ensino Fundamental e médio de escolas públicas e também das privadas.

Dessa forma, o DC-GO pode abordar as Olimpíadas de Matemática como sendo uma estratégia para que se possa promover o ensino desta disciplina, uma vez que este sugeri a participação dos estudantes nessas competições como uma atividade extracurricular, a qual estimula o estudo mais aprofundado da Matemática, bem como o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas e até mesmo, a busca contínua por novos desafios, desenvolvendo um pensamento crítico e também criativo no que se refere, a resolução de problemas matemáticos.

CAPÍTULO 2

EQUAÇÕES FUNCIONAIS

As equações funcionais são um ramo fascinante da Matemática, que se dedica à investigação de equações em que as incógnitas são funções, em vez de números. Diferentemente das equações algébricas tradicionais, onde se busca determinar valores específicos para variáveis, o foco das equações funcionais está em encontrar funções que satisfaçam determinadas relações. Este campo tem aplicações diretas em áreas como análise Matemática, teoria dos números, geometria, física e até mesmo em disciplinas .

Mediante a isto, convém salientar que sem a utilização da álgebra, a humanidade não teria alcançado muitos, progressos, uma vez uma equação consiste em uma expressão Matemática que tende a apresentar uma igualdade, envolvendo uma ou mais letras, conhecidas como as incógnitas, estas representam valores desconhecidos.Dentro do domínio das equações funcionais que envolve uma variável, se destaca o matemático Niels Henrik Abel (1802-1829). Além disso, um outro exemplo notável também foi Srinivasa Ramanujan (1887-1920), que trouxe contribuições para o entendimento de equações funcionais na exploração dos radicais múltiplos.

Assim, uma equação é uma igualdade Matemática a qual possui, uma ou até mais incógnitas que expressa sobretudo, a relação entre dois valores ou expressões, onde o objetivo é encontrar o valor ou os valores da incógnita que tornam a igualdade de forma verdadeira. Neste contexto, a importância da abordagem das equações nas aulas de Matemática é o desenvolvimento do raciocínio lógico, bem como da capacidade de resolver problemas e da aplicação dos conceitos matemáticos nas diferentes situações reais. Outrossim, as equações também são fundamentais para o estudo de diversos áreas da Matemática, como na álgebra, na geometria, no cálculo, dentre outros.

Além disso, as equações possibilitam modelar e ainda, resolver problemas do mundo real, como por exemplo, os cálculos de distância, o tempo, velocidade, juros, dentre outros.

Um tipo de equações que tem sido crucial para grandes matemáticos desde o século XIV são as funcionais. Foi por meio de uma equação funcional, que o matemático Nicole Oresme (1320-1382), ofereceu uma definição indireta das funções lineares, ele publicou um tratado significativo sobre uniformidade e a deformidade de intensidades, denominado como Tractatus de *configurationibus qualitatum et motuum*. Oresme, definiu nesta obra uma relação funcional entre duas variáveis e ainda introduziu a noção de que essa relação poderia ser representada na forma geométrica (Wilker, 2000).

A Equação Funcional é toda equação que a solução seja uma função.

> Primeiramente entenderemos o conceito de equação funcional, basicamente um sistema de equações no qual as variáveis são funções. Geralmente em todo problema de equação funcional possuímos um domínio e um contra-domínio, que devem ser respeitados durante a resolução do problema (Borck, 2024,p.1).

As equações funcionais aparecem em algumas competições, como a OBM e a IMO, que são altamente valorizadas e reconhecidas internacionalmente. Estudar esses problemas não só ajuda a desenvolver habilidades Matemáticas avançadas, como também prepara os estudantes para competir em alto nível.

Por muitos anos, diversas equações foram aplicadas por matemáticos, mesmo antes que se formalizasse a teoria correspondente. Entre esses matemáticos, destacou-se Gregório de Saint-Vincent (1584- 1667), pois por meio da pesquisa sobre a hipérbole este incorporou conceitos de equações funcionais sendo ainda um precursor no estudo do logaritmo. A sua obra mais significativa, foi intitulada *"Opus Geometricum quadraturae circuli et sectionum coni"*, publicada no ano de 1647, este abordou métodos para calcular áreas e também analisar propriedades de seções cônicas. No entanto, embora a definição de linearidade proposta por Oresme fosse vista como um exemplo inicial de equação funcional, ela infelizmente não constitui uma fundação sólida para a sua teoria (Small, 2007).

O conceito de equações funcionais foi realizado por meio das contribuições de Augustin Louis Cauchy (1789-1857) Cauchy fez avanços em várias áreas da Matemática, especificamente no cálculo, ele é reconhecido neste âmbito (Small, 2007).

Jean D'Alembert (1717-1783), também foi um outro matemático que usou as equações funcionais a sua trajetória, que antecede Cauchy. Uma característica comum entre as equações de Cauchy e d'Alembert é que, apesar destes lidarem com funções de uma única variável, estas são apresentadas usando duas variáveis, x e y. Por outro lado, acredita-se que uma categoria distinta de equações funcionais foi estudada pelo matemático britânico Charles Babbage (1791- 1871).

Para um melhor desempenho no estudo das equações funcionais, serão abordados alguns conceitos preliminares essenciais, que são fundamentais para a compreensão do tema proposto.

2.1 CONCEITOS PRELIMINARES

Os conjuntos numéricos são categorias fundamentais na Matemática que agrupam números com características e propriedades específicas. A compreensão e a utilização correta desses conjuntos são essenciais para o desenvolvimento de teorias Matemáticas, a resolução de problemas e a aplicação em diversas ciências.

Um conjunto numérico consiste em uma coleção de objetos e os objetos de um conjunto, por sua vez, são denominados de elementos. Deste modo, se todo elemento de um conjunto S também for um elemento de um conjunto T, então S será um subconjunto de T e denota-se $S \subseteq T$.

2.1.1 Conjuntos Numéricos

Os conjuntos numéricos podem ser classificados em várias categorias, cada uma com suas próprias características e elementos. No que segue descreveremos os principais conjuntos numéricos que serão considerados nesse trabalho, com a finalidade de estabelecer uma notação sólida.

Os números naturais compõem o primeiro conjunto numérico com o qual temos contato, são os números utilizados para contar objetos. O conjunto dos números naturais é denotado pelo símbolo $\mathbb{N}$ e definido por

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}.$$

É comum considerarmos o conjunto dos números naturais com o número zero, para isso usaremos a seguinte notação

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}.$$

O conjunto dos números inteiros estende o conjunto dos números naturais para incluir números negativos, ele é denotado por $\mathbb{Z}$ e definido como:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Em alguns casos considerarmos o conjunto dos números inteiros sem o número zero, para isso usaremos a seguinte notação:

$$\mathbb{Z}^* = \{\ldots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Em outras situações, podemos restringir o conjunto dos números inteiros somente com números positivos, com a seguinte notação:

$$\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, 4, 5 \ldots\},$$

note que $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$.

Podemos também restringir o conjunto dos números inteiros somente com números negativos, com a seguinte notação.

$$\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -5, -4, -3 - 2, -1\},$$

note que $\mathbb{Z}_- = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$.

Os números racionais são aqueles que podem ser expressos como a razão entre dois inteiros. O conjunto dos números racionais é denotado por $\mathbb{Q}$ e definido como:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b};\ a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}.$$

Os números irracionais são aqueles que não podem ser expressos como a razão entre dois inteiros. Exemplos incluem $\sqrt{2}$, π e e. Eles têm expansões decimais infinitas não periódicas.

O conjunto dos números reais incluem todos os números racionais e irracionais. O conjunto dos números reais é denotado por $\mathbb{R}$ e definido como:

$$\mathbb{R}\ = \{x;\ x \text{ é um número racional ou irracional}\}.$$

2.1.2 Funções

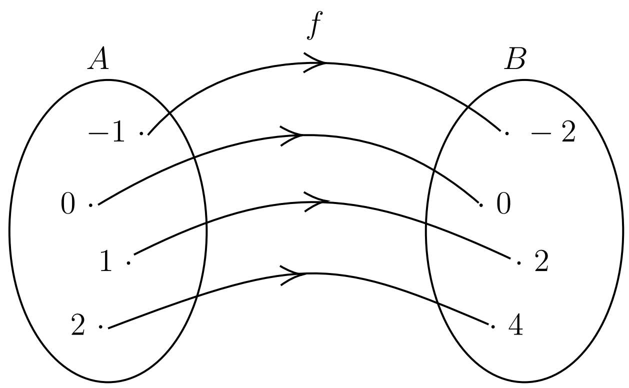
As funções são ferramentas crucias em várias áreas da Matemática e de suas aplicações em várias áreas da ciência. Elas permitem modelar fenômenos do mundo real, bem como resolver problemas e estudar comportamentos de sistemas. São conceitos fundamentais na Matemática, que servem como ferramentas essenciais para descrever relações entre conjuntos de números ou outros objetos matemáticos. De forma simplificada, uma função é uma relação entre dois conjuntos que associa a cada elemento de um deles exatamente um elemento do outro.

Definição 2.1. Uma **função** f, de um conjunto A para um conjunto B, é uma regra que atribui a cada elemento x de A um único elemento $f(x)$ em B, ou seja, $\forall x \in A, \exists!\ y \in B\ \text{ com } y = f(x)$. Denotamos uma função por $f : A \to B$.

Dada uma função $f : A \to B$, o conjunto A é chamado de **domínio** ($\mathbf{D}f$) da função f. O conjunto B é chamado de **contradomínio** ($\mathbf{CD}f$) ou co-domínio da função f. O elemento $f(x)$ é chamado de **imagem de** x sob f. O conjunto das imagens de todos os elementos de A é chamado de **imagem da função** ($\mathbf{Im}f$) e é um subconjunto do contradomínio, isto é, a $\mathbf{Im}f$=$\{f(x) : x \in A\} \subseteq B$.

Exemplo 2.2. Seja $f : A \to B$, onde $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-2, 0, 2, 4\}$ com $f(x) = 2x$. A Figura 2.1,

Figura 2.1: Função injetiva $f(x) = 2x$.



Fonte: Produzida pela autora.

Para esta função temos que $\mathbf{D}f = A$, $\mathbf{Im}f = \mathbf{CD} = B$.

As funções podem ser classificadas de várias maneiras, dependendo das suas propriedades. No que segue, apresentaremos algumas destas características que distinguem as funções.

Definição 2.3. Uma função $f : A \to B$ chama-se **injetiva** (ou **injetora**) quando, dados x, y quaisquer em A, $x \neq y$ tem-se $f(x) \neq f(y)$. Em outras palavras, se $f(x) = f(y)$ então $x = y$.

Exemplo 2.4. O exemplo mais simples de uma função injetiva é a identidade. Se $A \subseteq B$ são conjuntos não vazios, a função $f : A \to B$ definida pela regra $f(x) = x$, para todo $x \in A$, é chamada de inclusão e é, trivialmente, uma função injetiva.

Definição 2.5. Uma função $f : A \to B$ chama-se **sobrejetiva** (ou **sobrejetora**) quando, para todo $y \in B$ existe pelo menos um $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

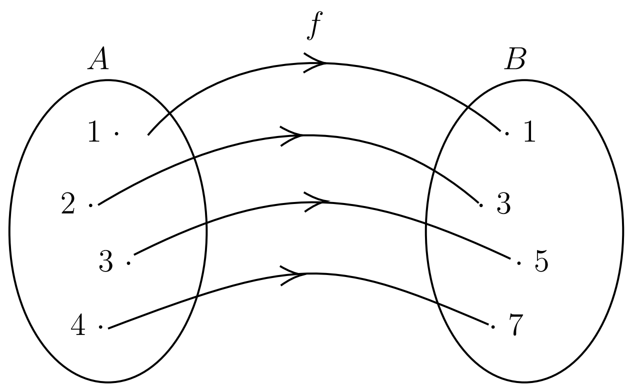
Exemplo 2.6. Exemplos de funções sobrejetivas são as projeções $\pi_1 : A \times B \to A$ e $\pi_2 : A \times B \to B$, de um produto cartesiano $A \times B$ nos fatores A e B, respectivamente. A primeira projeção, π_1, é definida por $\pi_1(a, b) = a$, enquanto a segunda projeção, π_2, é definida por $\pi_2(a, b) = b$.

Definição 2.7. Uma função $f : A \to B$ chama-se **bijetiva** (ou **bijetora**) quando é injetiva e sobrejetiva ao mesmo tempo.

Exemplo 2.8. A mais simples das bijeções é a função identidade $f : A \to A$, definida por $f(x) = x$, para todo $x \in A$.

Exemplo 2.9. Uma outra função bijetiva é $f : A \to B$, onde $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7\}$ definida por $f(x) = 2x - 1$, para todo $x \in A$. Veja a Figura 2.2.

Figura 2.2: Função bijetiva $f(x) = 2x - 1$.



Fonte: Produzida pela autora.

Algumas funções podem ser classificada como par ou ímpar com base na simetria de seus valores em relação ao eixo y ou à origem do sistema de coordenadas.

Definição 2.10. Seja f uma função definida em $\mathbb{R}$. Dizemos que f é uma **função par** se, para todo x, $f(-x) = f(x)$.

Isso significa que o gráfico da função é simétrico em relação ao eixo y.

Exemplo 2.11. A função $f : A \to B$, onde $A = \{-2, -1, 1, 2, \}$ e $B = \{0, 3\}$ definida por $f(x) = x^2 - 1$, para todo $x \in A$, é uma função par, veja a Figura 2.3,

Definição 2.12. Dizemos, por outro lado, que f é uma **função ímpar** se, para todo x, $f(-x) = -f(x)$.

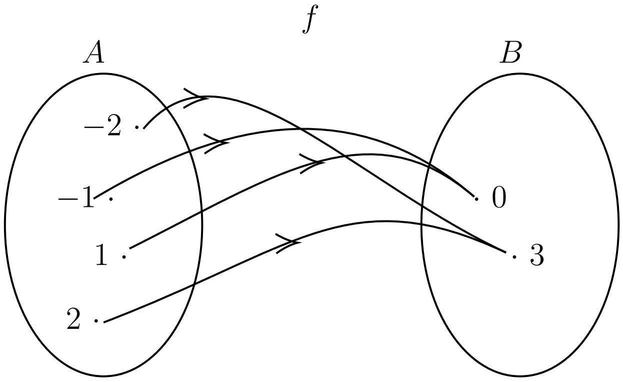
Isso significa que o gráfico da função possui simetria em relação à origem.

Exemplo 2.13. A função $f : A \to B$, onde $A = \{-2, -1, 1, 2\}$ e $B = \{-8, -4, 4, 8\}$ definida por $f(x) = 4x$, para todo $x \in A$, é uma função impar, veja a Figura 2.4.

Definição 2.14. Uma função $f : A \to B$ é dita **crescente** em um intervalo $I \subset A$ se, para quaisquer $x_1, x_2 \in I$ tais que $x_1 < x_2$ a relação $f(x_1) \leq f(x_2)$ for verdadeira.

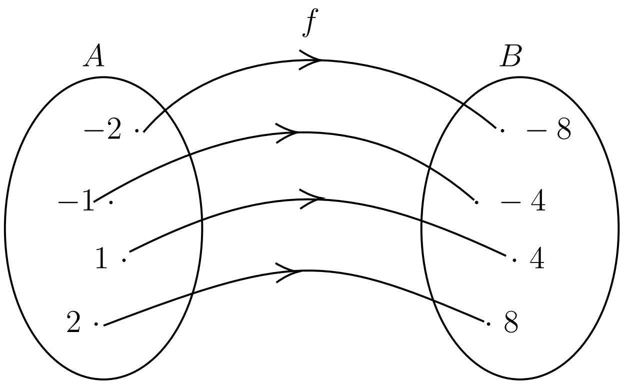
Exemplo 2.15. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + 1$ é uma função crescente, pois se $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ e $x_1 < x_2$, então $x_1 + 1 \leq x_2 + 1$, isto é, $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Figura 2.3: Função par $f(x) = x^2 - 1$.



Fonte: Produzida pela autora.

Figura 2.4: Função ímpar $f(x) = 4x$.



Fonte: Produzida pela autora.

Definição 2.16. Uma função $f : A \to B$ é dita **decrescente** em um intervalo $I \subset A$ se, para quaisquer $x_1, x_2 \in I$ tais que $x_1 \leq x_2$ a relação $f(x_1) \geq f(x_2)$ for verdadeira.

Exemplo 2.17. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x + 1$ é uma função decrescente, pois se $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ e $x_1 \leq x_2$, então $-x_2 \leq -x_1$, e consequentemente, $-x_2 + 1 \leq -x_1 + 1$ isto é, $f(x_2) \leq f(x_1)$.

Uma função pode ser caracterizada como crescente ou decrescente em um intervalo do seu domínio com base no comportamento dos valores da função em relação aos valores dos pontos do intervalo. Observamos que se f for crescente ou decrescente, então f será injetora.

Seja $f : A \to B$ uma função bijetora. Assim, para cada $x \in B$ existe um único $y \in A$ tal que $f(y) = x$. Podemos, então, considerar a função g, definida em B, e dada por $g(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$. Tal função g denomina-se **função inversa** de f. Observe que a função inversa $y = g(x)$ é dada implicitamente pela equação $f(y) = x$. Se f for uma função que admite função inversa, então diremos que f é uma função inversível. Observe que se f for uma função inversível, com inversa g, então g também será inversível, e sua inversa será f. Denotamos a inversa de f por f^{-1}.

Exemplo 2.18. Seja $f(x) = x+3$, então $f^{-1}(x) = x-3$. De fato, se $f(y) = x$ então $y + 3 = x$ ou $y = x - 3 = f^{-1}(x)$.

Definição 2.19. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita **periódica** se existe um número positivo p para o qual $f(x + p) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. O menor número positivo p que satisfaz essa condição é chamado de **período** da função.

2.1.3 Sequências Numéricas

Uma sequência numérica é uma função cujo domínio é o conjunto dos números naturais (ou um subconjunto deste) e cujo contradomínio é um conjunto numérico qualquer, geralmente o conjunto dos números reais ou complexos. Formalmente, uma sequência pode ser definida como uma função $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), onde cada $n \in \mathbb{N}$ é mapeado para um número real (ou complexo) a_n. Os elementos $a_1, a_2, a_3, \dots$ são chamados de termos da sequência. A sequência será denotada por $\{a_n\}$ e a_n é dito ser o **termo geral** da sequência.

Tipos específicos de sequências:

Definição 2.20. Uma sequência $\{a_n\}$ é chamada de **aritmética** se a diferença entre termos consecutivos é constante. Isto é, $a_{n+1} - a_n = d$, $\forall n \in \mathbb{N}$, d é chamado de razão da sequência. A forma do termo geral de uma sequência aritmética é:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r.$$

Exemplo 2.21. Seja a sequência $\{2, 5, 8, 11, 14, \dots\}$, é classificada como progressão aritmética de razão $r = 3$.

Definição 2.22. Uma sequência $\{a_n\}$ é chamada de **geométrica** se a razão entre termos consecutivos é constante. Isto é, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$, $\forall n \in \mathbb{N}$, onde q é chamado de razão da sequência. A forma do termo geral de uma sequência geométrica é:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Exemplo 2.23. Considere a sequência $\{2, 4, 8, 16, \dots\}$ é classificada como progressão geométrica de razão $q = 2$.

2.2 EQUAÇÕES FUNCIONAIS

No Brasil, a OBM e a OBMEP também utilizam problemas de equações funcionais em suas provas. A inclusão de equações funcionais nas olimpíadas Matemáticas visa desafiar os estudantes a aplicar conceitos teóricos de maneira criativa e inovadora, contribuindo para o desenvolvimento de suas habilidades em resolução de problemas. No que segue faremos uma breve discussão de alguns tipos de equações funcionais e problemas envolvendo tais equações. Como motivação inicial consideramos uma equação funcional de Cauchy que é uma equação da forma:

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Esta é uma das equações funcionais mais conhecidas e é central na teoria das funções lineares. As soluções contínuas desta equação são funções da forma

$$f(x) = cx,$$

onde c é uma constante.

A resolução de equações funcionais envolve a busca de todas as funções que satisfazem a equação dada. Dependendo da complexidade da equação, diversas técnicas podem ser aplicadas, incluindo:

Substituição: A técnica de substituição envolve substituir valores específicos das variáveis na equação funcional para obter informações sobre a função desconhecida. Esse método é frequentemente usado para simplificar a equação ou para determinar a forma da função.

Simetrias: Algumas equações funcionais exibem simetrias que podem ser exploradas para simplificar a resolução. Isso envolve analisar a equação para ver se ela é invariante sob certas transformações, como inversão, translação ou escala.

Sobrejetividade: Consiste em utilizar a propriedade de que a função mapeia o conjunto A em B de maneira completa. Isso pode ajudar a determinar a forma da função desconhecida ao assegurar que qualquer valor no contradomínio é atingível.

Injetividade: Pode ser utilizado para deduzir propriedades específicas da função desconhecida e, em alguns casos, determinar sua forma explícita.

Bijetividade: A técnica de bijetividade em equações funcionais envolve explorar as propriedades combinadas de injetividade e sobrejetividade para obter informações críticas sobre a função desconhecida. Isso pode ajudar a determinar a forma da função.

Sequência: A técnica de sequência para equações funcionais envolve analisar a função em uma série de valores específicos, formando uma sequência que pode revelar padrões ou propriedades da função. Ao estudar como a função se comporta em valores incrementais ou específicos. A aplicação da técnica de sequência em equações funcionais envolve a escolha de uma sequência apropriada de valores para as variáveis e a análise do comportamento da função nesses pontos. Isso pode ajudar a simplificar a equação funcional e a encontrar uma forma fechada para a função desconhecida.

Na sequência apresentaremos problemas que serão resolvidos utilizando algumas das técnicas mencionadas.

Problema 2.24. (OBM 2004) A função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, definida nos inteiros, satisfaz à equação $f(n) - (n+1)f(2-n) = (n+3)^2$, para todo n inteiro. Quanto vale $f(0)$?

Solução. Para $n = 0$ temos

$$\begin{aligned} f(0) - (0+1)f(2-0) &= (0+3)^2, \\ f(0) - f(2) &= 9. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Para $n = 2$ temos

$$\begin{aligned} f(2) - (2+1)f(2-2) &= (2+3)^2, \\ f(2) - 3f(0) &= 25. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Somando (2.1) e (2.2), obtemos

$$-2f(0) = 34.$$

Portanto, $f(0) = -17$. Observe que foi utilizado a técnica de substituição.

Problema 2.25. (OBM 2009) Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ uma função satisfazendo $f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 2$ e $f(x+12) = f(x+21) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{Z}$. Então, qual o valor de $f(2009)$?

Solução. Usando a substituição, podemos colocar $x - 12$ no lugar de x, assim

$$\begin{aligned} f(x+12) &= f(x+21), \\ f(x-12+12) &= f(x-12+21), \\ f(x) &= f(x+9). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Agora, substituindo x por $x-9$ em (2.3), temos

$$\begin{aligned} f(x-9) &= f(x-9+9), \\ f(x-9) &= f(x). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Como $f(x+12) = f(x)$, por hipótese, substituindo x por $x-9$, temos

$$\begin{aligned} f(x-9+12) &= f(x-9), \\ f(x+3) &= f(x-9). \end{aligned} \tag{2.5}$$

De (2.4) e (2.5) temos

$$f(x+3) = f(x).$$

Logo $f(x) = f(x+3) = f(x+6) = f(x+9) = f(x+12) = \cdots = f(x+2007)$, já que 2007 é multiplo de 3, assim

$$f(x) = f(x+2007). \tag{2.6}$$

Daí, considerando $x = 2$ em (2.6), temos

$$f(2) = f(2009).$$

Como $f(2) = 2$, portanto, $f(2009) = 2$.

Problema 2.26. (OBM 2002) Seja f uma função real de uma variável real que satisfaz a condição:

$$f(x) + 2f\left(\frac{2002}{x}\right) = 3x \tag{2.7}$$

para $x > 0$. O valor de $f(2)$ é igual a quanto?

Solução. Para $x = 2$ em (2.7) temos

$$\begin{aligned} f(2) + 2f\left(\frac{2002}{2}\right) &= 3 \cdot 2 \\ f(2) + 2f(1001) &= 6. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Para $x = 1001$ em (2.7) temos

$$\begin{aligned} f(1001) + 2f\left(\frac{2002}{1001}\right) &= 3 \cdot 1001, \\ f(1001) + 2f(2) &= 3003. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Multiplicando a equação (2.9) por -2 e somando com a equação (2.8) temos

$$\begin{aligned} -3f(2) &= -6000, \\ f(2) &= 2000. \end{aligned}$$

Portanto, o valor de $f(2)$ é igual a 2000.

Problema 2.27. (OBM 2003) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x)(f(x) - x) = 0$, então quantas funções f satisfazem o enunciado?

Solução. Para $f(x) = x$ vale.

Para $f(x) \neq x$, seja f dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq k \\ k, & \text{se } x = k, \end{cases}$$

com $k \in \mathbb{R}$.

Assim, para cada k fixado, temos uma função f, como k é um número real qualquer, temos uma infinidade de funções f.

Problema 2.28. (OBM 2003) A função f é definida para todos os pares ordenados (x, y) de inteiros positivos e tem as seguintes propriedades:

(i) $f(x, x) = x$;

(ii) $f(x, y) = f(y, x)$;

(iii) $(x + y)f(x, y) = (2x + y)f(x, x + y)$.

Qual é o valor de $f(21, 12)$?

Solução. De acordo com (ii), temos que

$$f(21, 12) = f(12, 21) = f(12, 12 + 9).$$

Com (iii), podemos escrever,

$$\begin{aligned} (12 + 9)f(12, 9) &= (2 \cdot 12 + 9)f(12, 21), \\ 21f(12, 9) &= 33f(12, 21) \quad \div (3), \\ 7f(12, 9) &= 11f(12, 21). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Usando (ii) novamente

$$f(12, 9) = f(9, 12) = f(9, 9 + 3).$$

Com (iii),

$$\begin{aligned}(9+3)f(9,3) &= (2\cdot 9+3)f(9,9+3),\\ 12f(9,3) &= 21f(9,12) \quad \div (3),\\ 4f(9,3) &= 7f(9,12).\end{aligned} \tag{2.11}$$

Vamos provar por indução que $(n+1)f(x,nx)=2x$.

Para $y=x$ em (iii) temos

$$\begin{aligned}(x+x)f(x,x) &= (2x+x)f(x,x+x),\\ 2xf(x,x) &= 3xf(x,2x),\end{aligned}$$

Por (i) $f(x,x)=x$, logo

$$\begin{aligned}2xx &= 3xf(x,2x),\\ \frac{2xx}{3x} &= f(x,2x),\\ \frac{2x}{3} &= f(x,2x),\\ 2x &= 3f(x,2x),\\ 2x &= (2+1)f(x,2x).\end{aligned} \tag{2.12}$$

Para $y=1x$, pela equação (2.12), vale. Hipótese de indução, suponha que vale para n em (iii), assim para $y=(n-1)x$ temos

$$\begin{aligned}(n+1)f(x,nx) = 2x,\\ f(x,nx) = \frac{2x}{n+1}\\ (n+1)f(x,nx) = 2x.\end{aligned} \tag{2.13}$$

Vamos provar que vale para $n+1$, isto é, provar que $(n+2)f(x,(n+1)x)=2x$.

Substituindo $y=nx$ em (iii) temos

$$(x+xn)f(x,nx) = (2x+nx)f(x,x(n+1)) \tag{2.14}$$

Substituindo (2.13) em (2.14) temos

$$\begin{aligned}(x+xn)\frac{2x}{n+1} &= x(2+n)f(x,x(n+1)),\\ x(n+1)\frac{2x}{n+1} &= x(1+(1+n))f(x,x(n+1)),\\ 2x &= (1+(1+n))f(x,x(n+1)).\end{aligned}$$

Portanto, a afirmação vale $\forall n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\begin{aligned}(3+1)f(3,3\cdot 3) &= 2\cdot 3,\\ 4f(3,3\cdot 3) &= 6,\\ f(9,3) &= \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Substituindo em (2.11), temos

$$\begin{aligned}4f(9,3) &= 7f(9,12),\\ 7f(9,12) &= 6\end{aligned}$$

Agora em (2.10), temos

$$\begin{aligned}7f(9,12) &= 11f(12,21),\\ 6 &= 11f(12,21).\end{aligned}$$

Portanto, $f(12,21) = \dfrac{6}{11}$.

Problema 2.29. (OBM 2000) Seja f uma função real tal que:

(i) Para todo x, y reais, $f(x+y) = x + f(y)$;
(ii) $f(0) = 2$;

Quanto vale $f(2000)$?

Solução. Fazendo $x = 2000$ e $y = 0$, em (i), temos

$$f(2000+0) = 2000 + f(0),$$

por (ii) $f(0) = 2$, portanto, $f(2000) = 2000 + 2 = 2002$.

Problema 2.30. (OBM 2003) Determine todas as funções $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ tais que, para todos $x, y \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x)f(y) - f(xy) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}. \tag{2.15}$$

Solução. Para $x \in \mathbb{R}^*$, perceba que, uma forma de simplificar a expressão, é fazer $y = 1$, nos dando

$$\begin{aligned}f(x)f(1) - f(x) &= x + \frac{1}{x},\\ f(x)(f(1)-1) &= x + \frac{1}{x}, \qquad (2.16)\end{aligned}$$

e assim, para determinar as possíveis funções que são soluções de (2.15), basta-nos encontrar os possíveis valores de $f(1)$. Para tal, veja que tomando $x = y = 1$ em (2.16), nos dá

$$[f(1)]^2 - f(1) = 2,$$

assim, $f(1)$ é raiz da equação $x^2 - x - 2 = 0$, isto é, $f(1) = -1$ ou $f(1) = 2$.

Considerando $f(1) = -1$ e substituindo em (2.16), temos

$$f(x) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Agora, precisamos verificar se, de fato, essa função satisfaz (2.15). Neste caso,

$$\begin{aligned}
f(x)f(y) - f(xy) &= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) \\
&- \left(-\frac{1}{2}\right)\left(xy + \frac{1}{xy}\right), \\
&= \frac{1}{4}\left(xy + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{1}{xy}\right) + \frac{1}{2}\left(xy + \frac{1}{xy}\right), \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \frac{3}{4}\left(xy + \frac{1}{xy}\right), \\
&\neq \frac{x}{y} + \frac{y}{x},
\end{aligned}$$

portanto, essa função não satisfaz a equação funcional dada.

Considerando agora $f(1) = 2$, temos

$$f(x) = x + \frac{1}{x},$$

e verificando, assim como caso anterior:

$$\begin{aligned}
f(x)f(y) - f(xy) &= \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) - \left(xy + \frac{1}{xy}\right), \\
&= xy + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{1}{xy} - xy - \frac{1}{xy}, \\
&= \frac{x}{y} + \frac{y}{x},
\end{aligned}$$

e portanto esta função satisfaz (2.15), sendo sua única solução.

Problema 2.31. (IMO 2010) Determine todas as $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que:

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x)\lfloor f(y) \rfloor \tag{2.17}$$

onde $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro que não excede x.

Solução. Para $x = y = 0$ em (2.17) temos

$$\begin{aligned} f(\lfloor 0 \rfloor 0) &= f(0)\lfloor f(0) \rfloor, \\ f(0) &= f(0)\lfloor f(0) \rfloor, \end{aligned}$$

assim, $f(0) = 0$ ou $\lfloor f(0) \rfloor = 1$, se $f(0) \neq 0$.

Vamos analisar dois casos.

Caso 1 Se $\lfloor f(0) \rfloor = 1$, então para $y = 0$ em (2.17) temos

$$\begin{aligned} f(\lfloor x \rfloor 0) &= f(x)\lfloor f(0) \rfloor, \\ f(0) &= f(x), \end{aligned}$$

assim, $f(x) = f(0) = a, \forall x \in \mathbb{R}$ e para algum $a \in \mathbb{R}^*$. Logo $f(x)$ é uma função constante. Como $\lfloor f(0) \rfloor = 1$, temos que $1 \leq f(0) < 2$, daí $a \in [1, 2)$.

Caso 2 Se $f(0 = 0$, para $x = y = 1$ em (2.17) temos

$$\begin{aligned} f(\lfloor 1 \rfloor 1) &= f(1)\lfloor f(1) \rfloor, \\ f(1) &= f(1)\lfloor f(1) \rfloor, \end{aligned}$$

daí, $f(1) = 0$ ou $\lfloor f(1) \rfloor = 1$.

Suponha $f(1) = 0$ e fazendo $x = 1$ em (2.17), temos

$$\begin{aligned} f(\lfloor 1 \rfloor y) &= f(1)\lfloor f(y) \rfloor, \\ f(y) &= f(1)\lfloor f(y) \rfloor, \\ f(y) &= 0\lfloor f(y) \rfloor, \\ f(y) &= 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Suponha $\lfloor f(1) \rfloor = 1$ e fazendo $y = 1$ em (2.17), temos

$$\begin{aligned} f(\lfloor x \rfloor 1) &= f(x)\lfloor f(1) \rfloor, \\ f(\lfloor x \rfloor) &= f(x), \\ f(x) &= f(\lfloor x \rfloor). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Agora, para $x = 2$ e $y = 1/2$ em (2.17) obtemos

$$\begin{aligned} f(\lfloor 2 \rfloor 1/2) &= f(2)\lfloor f(1/2) \rfloor, \\ f(2 \cdot 1/2) &= f(2)\lfloor f(1/2) \rfloor, \\ f(1) &= f(2)\lfloor f(1/2) \rfloor. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Por outro lado, para $x = 1/2$ em (2.18), temos

$$\begin{aligned} f(1/2) &= f(\lfloor 1/2 \rfloor), \\ &= f(0), \\ &= 0, \end{aligned}$$

daí $f(\lfloor 1/2 \rfloor) = 0$, substituindo em (2.19), obtemos

$$f(1) = f(2) \cdot 0 = 0,$$

logo $f(1) = 0$, o que é uma contradição, pois supomos que $\lfloor f(1) \rfloor = 1$.

Portanto, $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ou $f(x) = a, \forall x \in \mathbb{R}, a \in [1, 2)$.

Problema 2.32 (OBM 2001)**.** Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) = f(-x)$ e $f(x + y) = f(x) + f(y) + 8xy + 115$, para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

Solução. Fazendo $x = y = 0$, temos:

$$\begin{aligned} f(0 + 0) &= f(0) + f(0) + 8 \cdot 0 \cdot 0 + 115, \\ f(0) &= 2f(0) + 115, \\ -f(0) &= 115, \\ f(0) &= -115. \end{aligned}$$

Substituindo y por $-x$, conseguimos

$$\begin{aligned} f(x - x) &= f(x) + f(-x) + 8x(-x) + 115, \\ f(0 &= f(x) + f(-x) - 8x^2 + 115, \end{aligned}$$

temos que $f(x) = f(-x)$, e $f(0) = -115$, logo

$$\begin{aligned} f(0) &= 2f(x) - 8x^2 + 115, \\ -2f(x) &= -8x^2 + 115 - f(0), \\ -2f(x) &= -8x^2 + 115 - (-115), \\ -2f(x) &= -8x^2 + 230. \end{aligned}$$

Assim, $f(x) = 4x^2 - 115$. Verificando na equação funcional

$$f(x) = 4x^2 - 115 = f(-x)$$

e

$$\begin{aligned} f(x+y) &= 4(x+y)^2 - 115, \\ &= 4(x^2 + 2xy + y^2) - 115, \\ &= 4x^2 + 4y^2 + 8xy - 115, \\ &= 4x^2 + 4y^2 + 8xy - 115 + 115 - 115, \\ &= 4x^2 - 155 + 4y^2 - 115 + 8xy + 115, \\ &= f(x) + f(y) + 8xy + 115. \end{aligned}$$

Portanto $f(x) = 4x^2 - 115$ é a solução.

Problema 2.33. (PAGMO 2021) Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que a identidade

$$f(x + yf(x+y)) + xf(x) = f(xf(x+y+1)) + y^2 \tag{2.20}$$

é válida para todo par x, y de números reais.

Solução. Para $y = 0$ temos

$$\begin{aligned} f(x + 0f(x+0)) + xf(x) &= f(xf(x+0+1)) + 0^2, \\ f(x) + xf(x) &= f(xf(x+1)), \\ f(x)(1+x) &= f(xf(x+1)). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Para $x = -1$ em (2.21) temos

$$\begin{aligned} f(-1)(1-1) &= f(-1f(1-1)), \\ f(-1)0 &= f(-1f(0)), \\ 0 &= f(-f(0)). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Fazendo $-f(0) = k$ e substituindo em (2.22), temos

$$f(k) = 0. \tag{2.23}$$

Agora, vamos fazer $x = 0$ na identidade (2.20) temos

$$\begin{aligned} f(0 + yf(0+y)) + 0f(0) &= f(0f(0+y+1)) + y^2 \\ f(yf(y)) &= f(0) + y^2. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Fazendo $y = k$ em (2.24) temos:

$$f(kf(k)) = f(0) + k^2,$$

De (2.23) temos que $f(k) = 0$, então

$$\begin{aligned} f(k0) &= f(0) + k^2, \\ f(0) &= f(0) + k^2, \\ 0 &= k^2, \\ k &= 0. \end{aligned}$$

Como $-f(0) = k$, logo $f(0) = 0$. Para $y = 1$ em (2.24) temos:

$$\begin{aligned} f(1f(1)) &= f(0) + 1, \\ f(1f(1)) &= 0 + 1, \\ f(f(1)) &= 1. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Para $y = -x$ em (2.20) temos

$$\begin{aligned} f(x - xf(x-x)) + xf(x) &= f(xf(x-x+1)) + (-x)^2, \\ f(x - xf(0)) + xf(x) &= f(xf(1)) + x^2, \\ f(x) + xf(x) &= f(xf(1)) + x^2, \\ f(x)(1+x) &= f(xf(1)) + x^2. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Para $x = 1$ em (2.26), temos

$$\begin{aligned} f(1)(1+1) &= f(1f(1)) + 1^2, \\ 2f(1) &= f(1f(1)) + 1, \end{aligned}$$

como $f(1f(1)) = 1$, por (2.25), logo

$$\begin{aligned} 2f(1) &= 1+1, \\ 2f(1) &= 2, \\ f(1) &= 1. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Substituindo (2.27) em (2.26), temos

$$\begin{aligned} f(x)(1+x) &= f(x) + x^2, \\ f(x) + xf(x) &= f(x) + x^2, \\ f(x) + xf(x) - f(x) &= x^2, \\ xf(x) &= x^2, \end{aligned} \tag{2.28}$$

Para $x \neq 0$ temos

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2}{x}, \\ f(x) &= x. \end{aligned}$$

Em (2.23) temos que $f(0) = 0$, portanto, $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Problema 2.34. (Suiça 1999) Determine todas as funções $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ satisfazendo

$$\frac{1}{x} f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x, \tag{2.29}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^*$.

Solução. Fazendo $x \mapsto -1/x$ em (2.29), conseguimos uma nova expressão que também depende de $f(-x)$ e $f(1/x)$, como vemos a seguir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(-1/x)} f\left(-\left(-\frac{1}{x}\right)\right) + f\left(\frac{1}{(-1/x)}\right) &= -\frac{1}{x}, \\ -xf\left(\frac{1}{x}\right) + f(-x) &= -\frac{1}{x}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Assim, juntando (2.29) e (2.30), obtemos uma espécie de sistema, envolvendo $f(-x)$ e $f(1/x)$:

$$\frac{1}{x}f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x, \tag{2.31}$$

$$f(-x) - xf\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x}. \tag{2.32}$$

Com o objetivo de resolvê-lo, podemos operar $x \times$ (2.31) + (2.32) para obter:

$$2f(-x) = x^2 - \frac{1}{x} \Rightarrow f(-x) = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)$$

e fazendo $x \mapsto -x$,

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right).$$

Verificando se esta satisfaz a equação original:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{1}{x}\frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2} + x\right), \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x} + \frac{x}{2}, \\ &= x\end{aligned}$$

Assim, $f(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)$ é a única solução.

Ao longo deste capítulo, foi discutido sobre as equações funcionais e exemplificou se a temática por meio de problemas. Assim, é importante ressaltar que elaborou-se uma sequência didática (Apêndice A) voltada para o Ensino Médio, a qual envolve as equações e por conseguinte, alguns dos problemas que foram apresentados neste capítulo.

CAPÍTULO 3

RELATO DE EXPERIÊNCIA

A filósofa Marilena Chauí (2021,p.12), escreveu que "a democracia é atividade criadora dos cidadãos e aparece em sua essência quando existe igualdade, liberdade e participação". A afirmativa também se aplica dentro dos parâmetros da educação, visto que os pilares igualdade, liberdade e participação são necessários no processo de aprendizagem significativa. Assim, o professor deve buscar desenvolver essa trilogia dentro de suas aulas, tornando os estudantes autônomos, capazes, respeitados, criativos e participativos.

As Olimpíadas de Matemática consistem em competições educacionais as quais, visam promover o desenvolvimento do raciocínio lógico, bem como das habilidades Matemáticas dos estudantes, indo além do ensino tradicional de Matemática. No entanto, acredita-se que a participação dos estudantes nessas competições muitas vezes é influenciada sobretudo, pela preparação e pelo apoio que é oferecido pelos professores. Por isso, a importância de se realizar palestras direcionadas a estes sobre as Olimpíadas de Matemática.

Diante disto, destaca-se que realizar palestras direcionadas aos professores sobre a importância das Olimpíadas de Matemática e oferecer conhecimentos, bem como estratégias e suporte necessários para preparar os estudantes pode vir a ampliar as oportunidades de aprendizado, bem como estimular o interesse pela disciplina e ainda contribuir diretamente para a melhoria dos resultados no processo de ensino e aprendizado. No entanto, é fundamental que o corpo docente esteja engajado e até mesmo, preparado para que se possa vir a incentivar e até mesmo, orientar os estudantes nessa jornada que é desafiadora, tanto nas olimpíadas quanto na própria jornada escolar.

Além disso, é necessário que os professores tenham conhecimento das habilidades exigidas nas competições de Matemática, para que assim, possam direcionar o ensino seguindo estas demandas. Deste modo, ao se realizar palestras que sejam direcionadas a estes profissionais é possível apresentar as principais vantagens e os benefícios das Olimpíadas de Matemática, como por exemplo, estímulo ao pensamento crítico, a capacidade de vir a resolver problemas que sejam complexos, o desenvolvimento da criatividade e até mesmo, da melhoria do desempenho dos estudantes.

Com o desenvolvimento de palestras os professores podem ainda receber orientações de como organizar atividades de preparação para as competições, entender quais os materiais utilizar e como se deve adaptar os conteúdos curriculares para que se possa atender às principais exigências das olimpíadas.

Desta maneira, com o engajamento e com preparo dos professores é possível incentivar os estudantes a participarem das Olimpíadas de Matemática e a se dedicarem em seus estudos, motivados pelos desafios propostos nestas competições. Isso contribui para que ocorra o desenvolvimento do raciocínio lógico e para as possíveis habilidades Matemáticas dos estudantes, para a sua formação integral, estimulando justamente o trabalho em equipe, a persistência e ainda tende a ressaltar a criatividade.

Dessa forma, as palestras que são direcionadas aos professores sobre as Olimpíadas de Matemática ampliam as oportunidades de aprendizado dos estudantes estimula o interesse pela disciplina e ainda, melhorar os resultados no processo de ensino e aprendizado.

Ao longo dos anos, percebi que as Olimpíadas de Matemática possuem um papel fundamental na promoção do interesse e da excelência nessa disciplina. No entanto, muitos professores encontram desafios ao abordar esse tema e ainda desenvolver uma abordagem eficaz para que se possa envolver os estudantes. Ministro aulas no 8° e 9° do Ensino Fundamental e 1° e 2° ano do Ensino Médio em uma escola, sendo habitual para eu desenvolver a preparação para as olimpíadas e experiências internas com os estudantes sobre olimpíadas.

Foi a partir dessas experiências que surgiu a minha motivação para criar palestras dedicadas a apoiar e capacitar os professores neste processo. O objetivo principal dessas palestras é justamente fornecer a estes estratégias e recursos que ajudarão no incentivo aos seus estudantes para que estes participem das Olimpíadas de Matemática, além de destacar os benefícios, bem como as principais oportunidades que estas oferecem.

Entendo que, como professores, possuímos uma enorme responsabilidade em preparar os estudantes para que estes saibam como lidarem com os desafios do futuro, e as Olimpíadas de Matemática, por sua vez, podem ser uma ferramenta poderosa para que se possa alcançar esse objetivo. Ao participar dessas palestras, estes profissionais terão uma visão mais ampla sobre como integrar a participação nas competições Matemáticas em suas práticas diárias, ao mesmo tempo em que nutrem a paixão pela Matemática em seus estudantes.

Assim, visando destacar a relevância das Olimpíadas de Matemática como grande contribuinte da ampliação do conhecimento dos estudantes no que se refere ao raciocínio logico, atenção, concentração, autonomia, trabalho em grupo dentre outros, foi desenvolvido o "Ciclo de Palestras: Olimpíadas de Matemática"como parte deste projeto de dissertação de mestrado. Essa ação versou sobre as inúmeras oportunidades que os estudantes têm através das olimpíadas e formas de incentivo para eles e os professores se interessassem mais pelo tema. Considerando a importância do professor regente, que está junto ao estudante no dia a dia da sala de aula, foram oferecidas palestras online, voltadas aos professores, estudantes e quaisquer apaixonados pela Matemática.

O objetivo geral do projeto foi capacitar e incentivar professores de Matemática a atuarem de forma significativa para preparar os estudantes para as Olimpíadas de Matemática e, também, incentivar a participação deles nestes eventos, mostrando como funciona a organização, desenvolvimento, elaboração de questões com suas respectivas resoluções, colocando cada estudante ciente de todo o processo até o resultado esperado: sua participação com entusiasmo e êxito nas olimpíadas. Neste sentido, convém destacar que os objetivos específicos deste projeto foram:

I- Compreender a importância das Olimpíadas de Matemática no processo de formação e desenvolvimento do estudante;
II- Incentivar a estruturação de grupos de estudos voltados às Olimpíadas de Matemática;
III- Conscientizar os professores de Matemática das oportunidades oferecidas aos medalhistas olímpicos.

Somente por meio de sua imersão em determinada esfera social, o indivíduo teria como tomar consciência de um processo e, assim, refletir e agir no sentido de alterá-lo. Desta maneira, o alunado deixa de ser somente receptor de informação para se tornar agente efetivo no mundo que está inserido.

O "Ciclo de Palestras: Olimpíadas de Matemática" foi composto por quatro palestras:

Dia 06/06/23 - Palestra 1 : "Olimpíadas de Matemática Competições e Treinamentos", a professora Ana Paula Chaves (IME-UFG) ministrou uma palestra cujo tema foi a relevância das Olimpíadas de Matemática no cenário educacional e social. Durante sua apresentação, ela abordou a importância dessas competições como ferramentas de incentivo ao aprendizado e de fortalecimento do interesse pela Matemática, tanto para os estudantes quanto para os professores.

A palestrante explorou diversas modalidades de Olimpíadas de Matemática, desde as mais reconhecidas internacionalmente, como a IMO, até as competições regionais e nacionais, como a OBMEP. Além disso, ela detalhou como cada uma dessas competições possui características únicas e atende a diferentes públicos, ampliando as possibilidades de participação e inclusão.

Ana Paula também compartilhou vivências pessoais relacionadas às Olimpíadas, destacando o impacto positivo dessas experiências na formação acadêmica e no desenvolvimento de habilidades importantes para a vida. Ela ressaltou como a resolução de problemas desafiadores nas competições estimula o pensamento crítico, a criatividade e a perseverança nos alunos.

Ao longo da palestra, a professora enfatizou o papel dos professores no incentivo à participação dos estudantes e na criação de ambientes que promovam o aprendizado através de desafios. Ela destacou ainda que o envolvimento em competições matemáticas não se limita ao aprendizado técnico, mas contribui significativamente para o crescimento pessoal e o desenvolvimento de valores como disciplina, trabalho em equipe e autoconfiança.

Os participantes tiveram a oportunidade de interagir e trocar ideias sobre como integrar os treinamentos e as competições ao cotidiano escolar, tornando o aprendizado de Matemática mais dinâmico, interessante e acessível.

Dia 13/06/23 - Palestra 2: "Potência de Ponto e Ideias Potentes", o professor Davi Lopes (UFG): Durante sua apresentação, o professor abordou de forma abrangente o conceito de potência de um ponto, tema relevante em Geometria, destacando sua aplicação em diferentes contextos matemáticos e sua importância nas competições de Matemática, como as Olimpíadas.

O professor iniciou com uma explicação detalhada sobre o que é a potência de um ponto em relação a um círculo, explorando as bases teóricas do tema e demonstrando suas aplicações práticas em problemas clássicos da Geometria. Ele também explicou como esse conceito está relacionado a outros tópicos importantes, como tangências, mediatrizes e posições relativas de pontos e círculos, permitindo uma visão integrada e aprofundada da área.

Davi Lopes dedicou uma parte significativa da palestra à resolução de questões de Olimpíadas de Matemática, apresentando problemas que ilustravam o uso direto e criativo da potência de ponto. Ele destacou estratégias de abordagem, métodos de simplificação e maneiras de interpretar enunciados para facilitar a resolução, tornando o tema acessível para alunos e professores de diferentes níveis de conhecimento.

Além disso, o palestrante discutiu a relevância de temas como esse nas Olimpíadas, enfatizando como conceitos aparentemente específicos possuem grande potencial para desenvolver habilidades analíticas e fomentar o interesse pela Matemática. Ele encorajou os professores presentes a incluírem tópicos como potência de ponto em suas aulas, tanto como ferramenta de ensino quanto como forma de preparar os alunos para competições.

A interação com os participantes foi um ponto forte da palestra. O professor Davi Lopes incentivou perguntas e debates ao longo da apresentação, criando um ambiente dinâmico e colaborativo. Ele compartilhou ainda exemplos de sua experiência com o ensino e a preparação de estudantes para Olimpíadas, enriquecendo a discussão com s e reflexões sobre os desafios enfrentados no ensino de Matemática.

Ao final, os participantes saíram da palestra não apenas com uma melhor compreensão do tema abordado, mas também com inspiração e ideias para aplicar os conceitos discutidos em suas práticas pedagógicas e no incentivo aos alunos a participarem de competições matemáticas.

Dia 20/06/23 - Palestra 3:"Mesa Redonda - O Diferencial de Ser Olímpico: Carreira e Oportunidades", O evento contou com a participação de três ex-estudantes olímpicos de destaque: Jamile Falcão, atualmente no Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT); Jonatan Lima, estudante do Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA); e Luise D'Urso, vinculada ao IMPA. Durante a mesa redonda, os convidados compartilharam suas experiências pessoais com as Olimpíadas de Matemática e refletiram sobre como essas vivências influenciaram suas trajetórias acadêmicas e profissionais.

A conversa começou com cada um dos participantes relatando seu início no mundo das Olimpíadas, desde o momento em que tiveram o primeiro contato com as competições até as principais conquistas alcançadas. Eles destacaram como os desafios das Olimpíadas não só ajudaram a desenvolver habilidades avançadas em Matemática, mas também proporcionaram aprendizados valiosos, como persistência, raciocínio lógico e a capacidade de trabalhar sob pressão.

Jamile Falcão falou sobre como sua participação em competições internacionais abriu portas para estudar em uma das mais prestigiadas universidades do mundo, o MIT. Ela explicou como as habilidades adquiridas durante os anos de preparação para as Olimpíadas foram fundamentais não apenas para os estudo, mas também para enfrentar os desafios acadêmicos em uma instituição de ponta.

Jonatan Lima, por sua vez, destacou a importância das Olimpíadas para sua escolha de carreira no ITA. Ele enfatizou como a preparação rigorosa e o aprendizado obtido durante as competições foram cruciais para desenvolver a disciplina e o foco necessários para ingressar em uma instituição de alta performance como o ITA, onde a excelência acadêmica é exigida diariamente.

Luise D'Urso compartilhou sua jornada até o IMPA, um dos mais renomados centros de pesquisa em Matemática do mundo. Ela ressaltou como as Olimpíadas despertaram sua paixão pela Matemática pura e abriram caminho para oportunidades de pesquisa em áreas que antes pareciam distantes. Mencionou como as competições contribuíram para construir uma rede de contatos valiosa com outros estudantes e profissionais da área.

Os palestrantes discutiram ainda como o diferencial olímpico vai além das habilidades matemáticas, abrangendo aspectos como autoconfiança, trabalho em equipe e resiliência. Eles incentivaram os professores e alunos presentes a valorizar as Olimpíadas como uma plataforma não apenas para o aprendizado técnico, mas também para o crescimento pessoal e a ampliação de horizontes.

A sessão foi marcada por um rico diálogo com os participantes, que tiveram a oportunidade de fazer perguntas sobre os desafios e oportunidades enfrentados pelos palestrantes em suas jornadas. A mesa redonda encerrou com mensagens de inspiração e incentivo para que os alunos continuem explorando o mundo das Olimpíadas, aproveitando as possibilidades que essas experiências podem oferecer para o futuro acadêmico e profissional.

Dia 27/06/23 - Palestra 4:"Como Planejar um Projeto Olímpico", o professor Bruno Holanda(UFG), compartilhou suas experiências no desenvolvimento de projetos voltados para a preparação de estudantes nas Olimpíadas de Matemática.

O professor iniciou sua apresentação abordando a importância de um planejamento estruturado para projetos olímpicos. Ele enfatizou que a organização e o direcionamento adequado são essenciais para o sucesso tanto dos alunos quanto dos professores envolvidos. Bruno destacou os benefícios de criar iniciativas específicas para promover o interesse pela Matemática, além de capacitar os estudantes para resolverem problemas complexos e aplicarem o raciocínio lógico em diferentes contextos.

Durante a palestra, Bruno detalhou os elementos fundamentais de um projeto olímpico, como a definição de metas claras, o levantamento de recursos disponíveis e a identificação do público-alvo. Ele explicou que, para alcançar um impacto significativo, é necessário criar um cronograma detalhado que contemple momentos de teoria, prática e revisão. O professor também abordou a importância de incluir etapas de avaliação contínua para acompanhar o progresso dos alunos e ajustar as estratégias conforme necessário.

Bruno Holanda compartilhou exemplos de projetos que ele já desenvolveu e coordenou, descrevendo os desafios e as soluções encontradas durante a implementação. Entre os casos mencionados, destacou iniciativas que englobavam desde turmas de reforço para conceitos básicos até programas avançados focados em questões de alto nível, como as que aparecem nas competições nacionais e internacionais.

Outro ponto discutido foi a necessidade de criar um ambiente estimulante e motivador para os estudantes. O professor ressaltou a importância de atividades como simulações de provas, grupos de estudos colaborativos e momentos de troca de experiências entre alunos e ex-participantes de Olimpíadas. Segundo ele, esses elementos contribuem para a construção de confiança e para a melhoria do desempenho dos estudantes.

Além disso, o palestrante falou sobre a relevância do papel do professor como orientador nesse processo. Ele sugeriu que os professores se capacitem continuamente e busquem materiais atualizados e diversificados para apoiar o aprendizado dos alunos. Bruno também mencionou a importância de parcerias com instituições e organizações que possam oferecer suporte adicional, como materiais didáticos, treinamentos e oportunidades de participação em competições.

Ao final, os participantes tiveram a oportunidade de interagir com o palestrante, fazendo perguntas e compartilhando suas próprias experiências. A palestra encerrou com uma mensagem inspiradora do professor Bruno Holanda, que incentivou todos os presentes a investirem em projetos olímpicos como forma de transformar o aprendizado de Matemática em algo desafiador, enriquecedor e apaixonante.

A divulgação do evento foi realizada por meio de uma estratégia combinada que incluiu a distribuição de cartazes físicos nas escolas da cidade de Itaberaí-GO e a utilização das redes sociais para alcançar um público mais amplo. Os cartazes, distribuídos estrategicamente em locais de grande circulação dentro das instituições de ensino, continham informações detalhadas sobre o evento, incluindo o tema, as datas, o público-alvo e o site oficial para inscrições. O material também apresentava contatos para esclarecimento de dúvidas e fornecimento de informações adicionais.

Paralelamente, foi feito um trabalho de divulgação digital através das redes sociais, onde foram criadas postagens atrativas com imagens e textos explicativos sobre o evento. Essas postagens foram compartilhadas por perfis pessoais, grupos comunitários e página do IME-PROFMAT, buscando engajar tanto estudantes quanto professores interessados em participar. O material de divulgação, tanto físico quanto virtual (Apêndice B), foi planejado para ser acessível e informativo, facilitando o processo de inscrição e incentivando a interação.

Como resultado dessa ampla divulgação, foram realizadas 100 inscrições para o evento, um número que refletiu o interesse inicial da comunidade. No entanto, apesar do volume de inscrições, a frequência efetiva dos participantes ao longo do evento não foi tão intensa quanto o esperado. Este fator foi atribuído a possíveis desafios, como dificuldades de encerramento do semestre letivo, conflitos de agenda e, em alguns casos, falta de confirmação por parte dos inscritos.

Esse contraste entre o número de inscrições e a frequência reforçou a necessidade de ajustes na logística e na comunicação para eventos futuros. Sugestões como a implementação de lembretes por e-mail ou mensagens antes do evento para facilitar a participação e a realização de atividades prévias para manter o engajamento dos inscritos foram apontadas como melhorias possíveis para garantir maior adesão e envolvimento no futuro.

Durante essas palestras, foram também discutidos métodos de preparação e também estudo para as competições, foi ofertado ainda dicas de como lidar com a pressão e até mesmo, ansiedade, e a importância do trabalho em equipe, posto que é crucial ocorrer a colaboração entre os participantes.

As palestras online foram disponibilizadas de forma gratuita e transmitidas ao vivo para os professores permitindo que pessoas de diferentes locais pudessem participar. Outrossim, por meio desse ciclo de palestras, buscou-se disseminar o conhecimento sobre as Olimpíadas de Matemática e ainda incentivar estudantes e professores a explorarem essas oportunidades. Desta maneira, acredita-se que mostrar que qualquer estudante pode participar e se destacar nesses eventos, contribui para uma maior inclusão e até mesmo, valorização da Matemática que pode ser vista como uma disciplina desafiadora, mas ao mesmo tempo, estimulante para todos.

Durante essa palestra sobre as olimpíadas, percebemos o quão empolgados e também interessados alguns professores/as estavam em aprender mais sobre as Olimpíadas de Matemática no decorrer das palestras que foram desenvolvidas. Estes mostraram uma participação ativa no decorrer das mesmas, realizaram várias perguntas e contribuíram inclusive, com as suas próprias experiências. Após o termino as pessoas que participaram das 4 palestras ganharam certificado de 12 horas. Quem não participou de todas, as horas foram proporcionais.

Neste sentido, um dos principais resultados obtidos ao longo do ciclo de palestras foi o significativo enriquecimento de informações, especialmente no que diz respeito às Olimpíadas de Matemática. Muitos dos participantes, que eram professores da rede de ensino, inicialmente desconheciam os detalhes essenciais sobre como funcionam os processos de seleção dos participantes, as etapas das competições e os critérios de avaliação envolvidos. Além disso, havia uma falta de conhecimento sobre os impactos profundos que essas competições podem gerar na formação dos estudantes, tanto no aspecto acadêmico quanto no desenvolvimento de habilidades cognitivas e socioemocionais.

As palestras proporcionaram uma visão mais clara sobre o funcionamento das Olimpíadas de Matemática, explicando as diversas fases das competições, como as seletivas regionais, estaduais e nacionais, e o processo rigoroso de escolha dos melhores alunos para representar o Brasil em eventos internacionais. Também foram discutidos os benefícios que a participação em tais competições pode trazer para os estudantes, como o aprimoramento do raciocínio lógico, o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas complexos e a valorização da Matemática como área de conhecimento.

Ao final do ciclo de palestras, os professores estavam não apenas mais informados, mas também mais motivados e inspirados a incentivar seus alunos a participarem dessas competições. Eles passaram a entender a importância de engajar os estudantes nas Olimpíadas de Matemática como uma ferramenta poderosa para complementar o aprendizado formal e estimular o desenvolvimento de competências que vão além da sala de aula. Muitos expressaram o desejo de criar ou fortalecer grupos de estudo voltados para a preparação dos alunos, reconhecendo o impacto positivo que isso poderia ter no desempenho acadêmico e no futuro profissional dos estudantes. Além disso, houve um fortalecimento da conscientização sobre a importância de apoiar os alunos durante todo o processo de preparação, desde as primeiras etapas até a participação nas competições.

A dedicação dos participantes, uma pequena quantidade, foi um aspecto essencial para o sucesso das palestras realizadas. Notei que os professores e estudantes estavam de forma genuinamente interessados em aprender novas estratégias e metodologias que pudessem aplicar nas suas salas de aula. Essa troca de experiências e conhecimentos minha, enquanto mestranda, com os professores foi extremamente enriquecedora para ambos os lados, me senti gratificada por poder compartilhar conhecimentos e ver o entusiasmo dos professores em aprender. Além disso, também aprendi muito com as histórias compartilhadas por estes profissionais, o que contribui para minha própria formação profissional.

Ao término das palestras, senti realizada e satisfeita com os principais resultados que foram obtidos, posto que através desse compartilhamento de conhecimento, os professores se tornarão agentes multiplicadores, motivando e ainda preparando os estudantes para participarem das Olimpíadas de Matemática. Isso ajudará indubitavelmente, a formar uma nova geração de estudantes que são apaixonados pela Matemática e que poderão se destacar nas competições, alcançando deste modo, um novo patamar de aprendizado e conhecimento.

No decorrer das palestras os participantes compartilharam os desafios que são encontrados em trabalhar as Olimpíadas de Matemática. Primeiramente, muitos mencionaram a falta de tempo disponível para que se possa abordar conteúdos que são específicos das Olimpíadas de Matemática. Alegaram que com um currículo nacional extenso e com prazos apertados é muito desafiador encontrar espaço para que se possa explorar questões mais complexas e também desafiadoras com os estudantes.

Outro obstáculo encontrado mencionado pelos professores é a diversidade de níveis de conhecimento referente as habilidades de Matemática dos estudantes posto que nem todos os se encontram no mesmo patamar de desenvolvimento, o que exige que ocorra uma adaptação das atividades das olimpíadas para q atender às necessidades de cada um destes. Essa tarefa é muito desafiadora e requer atenção individualizada.

Além disso, muitos professores ainda destacaram também a falta de conhecimento sobre as Olimpíadas de Matemática, tanto por parte dos professores como dos próprios estudantes e inclusive, dos seus pais. Essa lacuna de informações na concepção destes acaba gerando uma falta de motivação dos estudantes em quererem participar dessas atividades e até mesmo uma resistência por parte de alguns pais, pois nem todos entendem a relevância dessa competição. Outro ponto citado pelos professores foi a pouca disponibilidade de materiais e de recursos didáticos que sejam adequados para o ensino de Matemática voltado justamente para as olimpíadas que dificulta de forma abrupta o desenvolvimento dessas atividades em sala de aula ocorra de forma efetiva.

Neste sentido, um dos desafios cruciais relatados pelos professores durante as palestras foi a necessidade de encontrar um equilíbrio adequado entre a preparação para as Olimpíadas de Matemática e o cumprimento do currículo escolar obrigatório. Muitos educadores expressaram preocupações válidas sobre o impacto que a dedicação intensa às competições poderia ter no aprendizado dos conteúdos tradicionais que fazem parte do currículo estabelecido.

Os professores ressaltaram que, embora as Olimpíadas de Matemática sejam uma excelente oportunidade para o desenvolvimento do pensamento lógico, habilidades de resolução de problemas e aprofundamento na Matemática, havia o receio de que o foco excessivo nessas competições pudesse prejudicar a cobertura dos temas essenciais para a formação acadêmica dos estudantes.

Essas foram algumas das dificuldades mencionadas pelos professores em sala de aula em relação ao trabalho das Olimpíadas de Matemática. Assim, é necessário refletirmos sobre esses obstáculos com o intuito de buscar alternativas para que possamos superá-los, possibilitando melhores resultados.

Considerações Finais

Ao longo desta pesquisa, constatou-se que a análise das equações funcionais no contexto das Olimpíadas de Matemática revela-se como sendo uma abordagem rica e frutífera para o desenvolvimento das habilidades dos competidores, bem como para a prática pedagógica dos professores desta disciplina. Desse modo, os dados coletados e as discussões levantadas pelos autores ao longo deste trabalho evidenciam que a inserção desse tópico nas competições desafia os estudantes a pensarem de maneira crítica e também criativa. Além disto, ainda proporciona um espaço significativo para que os professores possam vir a refletir sobre as suas estratégias de ensino.

A pesquisa demonstrou que, ao trabalharem com problemas envolvendo equações funcionais, os estudantes não apenas aprimoram seu raciocínio lógico, mas também ampliam seus conhecimentos matemáticos de forma contextualizada, aplicando conceitos teóricos em situações práticas. Para os professores a compreensão do papel das equações funcionais nas olimpíadas pode inspirar a construção de práticas pedagógicas mais inovadoras e dinâmicas, que fomentem o interesse de seus estudantes pela Matemática.

Desse modo, este estudo enfatizou a importância de um olhar atento em relação as Olimpíadas de Matemática como sendo um campo de pesquisa e de prática que pode servir de ligação entre a teoria e a aplicação da Matemática, contribuindo deste modo, para uma educação Matemática significativa e atrativa.

Ademais, o aprofundamento do uso das equações funcionais, deve ser incentivado nas competições e também nas salas de aula, visando garantir um desenvolvimento integral dos estudantes, bem como uma melhoria contínua sobre a formação dos professores.

Em relação ao meu relato de experiência acrescento que ao longo da minha trajetória como educadora, tive a oportunidade de lecionar para estudantes que participaram das Olimpíadas de Matemática. Esta experiência enriqueceu o meu entendimento sobre a teoria Matemática e me proporcionou uma visão prática dos desafios enfrentados pelos estudantes. A preparação para as competições exigia sobretudo, um cuidado especial na forma como apresentava os conceitos, visando buscar e despertar a curiosidade e o entusiasmo dos estudantes. As equações funcionais, de um modo singular, tornaram-se um tema central nas minhas aulas, pois estas me ofereceram uma excelente oportunidade para relacionar a teoria com a prática.

A cada aula dedicada para as olimpíadas, percebia como os estudantes se envolviam com intensidade. A resolução de problemas complexos os motivava a pensar de maneira crítica e a trabalhar em grupo, com a troca de ideias e de estratégias. Um dos momentos mais cruciais foi ver a transformação de alguns estudantes que, no início, se mostravam inseguros, mas ao longo do tempo estes se tornaram confiantes e criativos, contribuindo de maneira construtiva para as discussões em sala e também se destacando nas competições.

Além disso, essa experiência me motivou a também me atualizar e até mesmo, diversificar as minhas abordagens pedagógicas. Ao realizar atividades práticas que envolviam a resolução de equações funcionais em contextos do dia a dia, consegui conectar melhor os conteúdos matemáticos e com a vivência dos estudantes.

Ademais, convém salientar que o impacto das Olimpíadas de Matemática ao longo da minha carreira não se restringiu apenas à sala de aula; posto que esta também influenciou a minha prática profissional e até mesmo, a minha postura como professora.Realizar trocas de experiências com outros professores em outros eventos relacionados ao tema foi crucial para o meu crescimento. Ao vir a compartilhar metodologias, recursos e estratégias eficazes, pude não apenas contribuir diretamente para a formação de colegas, mas como também enriquecer a minha própria prática pedagógica.

Posto tudo isto, ressalto que os desafios propostos nas Olimpíadas de Matemática oferecem um ponto de partida para que ocorra o desenvolvimento de uma educação Matemática significativa, para os estudantes e para os professores.Assim, escrever sobre este tema trouxe contribuições cruciais para o meu desenvolvimento acadêmico e social.

Concluo enquanto pesquisadora, a qual já vivenciei essa temática na prática que as descobertas aqui apresentadas nesta pesquisa abrem caminhos para novas investigações e até mesmo, aplicações práticas, solidificando deste modo, os impacto das competições na educação Matemática contemporânea.

.

Referências Bibliográficas

[1] ALARCON, D., *Desenvolvimento do raciocínio lógico: uma abordagem pelo estudo de Grupos e pela Resolução de Problemas de olimpíadas de Matemática*, Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas. São Paulo, 2018.

[2] ALMEIDA, C. S., *Alcances da matemática via olimpíadas e projetos de iniciação científica: uma abordagem social e experimental*, Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, para obtenção do grau de Mestre em Matemática. Brasília, Agosto de 2022.

[3] ANDREESCU T., BOREICOI., *Functional Equations, 17 Chapters and 199 Problems With Solution*, Electronic Edition 2007.

[4] APROVA TOTAL, *Como as olimpíadas científicas garantem vagas nas universidades?*, São Paulo, 2024. Disponível em: https://aprovatotal.com.br/vagas-olimpicas-universidades/

[5] BEZERRA, J. A., *Olimpíada brasileira de matemática das escolas públicas como estímulo no ensino da matemática*, Monografia (Trabalho de conclusão de curso) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Curso de Licenciatura em Matemática, Maceió. 2021.

[6] BRASIL, *Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. Base nacional comum curricular*, Brasília: MEC, 2017.

[7] CALDAS. C. C., VIANA.C. S., *As olimpíadas brasileiras de matemática das escolas públicas na formação de professores e alunos*, Repositório Institucional da UFPA, 2013. Disponível em: https://repositorio.ufpa.br/bitstream/2011/12766/1/Artigo-OlimpiadasBrasileiraMatematica.pdf

[8] CARNEIRO, E., *Olimpíadas de Matemática – Uma porta para o futuro: Dicas para montar um projeto e 50 problemas de treinamento para iniciantes*, Salvador, Bahia, 2004.

[9] CHAVES, A. P., *Nível 2 - Equações Funcionais: Uma primeira abordagem*, 26^a SEMANA OLÍMPICA, https://sites.google.com/ufg.br/apchaves

[10] CHAUI, M., *Cidadania Cultural: O Direito à Cultura* , 2^a ed. – São Paulo: Fundação Perseu Abramo, 2021.

[11] FAPESP.R., *Acesso à universidade pela trilha olímpica*, São Paulo, 2023.Disponivel em: https://www.gov.br/cnpq/pt-br/assuntos/noticias/atualidades/acesso-a-universidade-pela-trilha-olimpica

[12] IMPATECH, *Programa de graduação do IMPA*, 2024. Disponível em: https://impatech.impa.br/

[13] INSTITUTO TIM, *Bolsas Instituto TIM-OBMEP*, 2024. Disponível em: https://institutotim.org.br/projetos/bolsas-it-obmep/

[14] LIELL, C. C., *Primeira olimpíada brasileira de matemática dos anos iniciais – obmep: uma análise dos resultados obtidos pelos alunos e das percepções dos professores sobre o instrumento aplicado*, Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT, Florianópolis, v. 15, p. 01-17, jan./dez., 2020.

[15] OLIMPIADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, *Saiba como participar das Olimpíadas de Matemática do 46° concurso*, 2024. Disponível em: https://www.obm.org.br/2024/08/11/regulamento-da-46a-olimpiada-brasileira-de-matematica-obm-e-divulgado/

[16] OLIVEIRA, F. A. L., *Olimpíadas de matemática no ensino Médio*, Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática do Departamento de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciatura em Matemática, Russas, 2020.

[17] OMEG, *Olimpíadas de Matemática do Estado de Goiás*, São Paulo, 2024. https://omeg.ime.ufg.br/

[18] PINHEIRO, N. A. M., *Uma reflexão sobre a importância do conhecimento matemático para ciência, para a tecnologia e para a sociedade*, Ponta Grossa: UFPG, 2003.

[19] PROGRAMA DE INICIAÇÃO CIENTIFICA E MESTRADO, *O que é o PICME?*, 2024. Disponível em: https://picme.obmep.org.br/

[20] REGULAMENTO, Disponível em: http://www.obmep.org.br/images/regulamento.pdf. Acesso em: 02 de julho de 2024.

[21] NUNES, M. S. A., *A desigualdade de gênero na matemática: aspectos históricos e atuais*, João Pessoa, 2021. 47 f. : il. Disponível em: https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/123456789/20616/1/MSAN06082021.pdf

[22] SMALL, C. G., *Functional Equations and How to Solve Them*, Springer Science+Business Media, LLC,2007.

[23] TORNEIO MENINAS NA MATEMÁTICA, *Conheça o Torneio Meninas na Matemática (TM²)*, São Paulo, 2024. https://www.tm2.org.br/

[24] 19º *OLIMPIADAS BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS*, Disponível em: http://www.obmep.org.br/noticias.DO?id=595

[25] 19º OLIMPIADAS BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS, *Programa de Iniciação Científica Jr. (PIC)*, São Paulo, 2024. Disponível em: http://www.obmep.org.br/pic.htm

APÊNDICE A

SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A sequência didática a seguir, elucida as equações funcionais, esta foi elaborada visando servir como uma valiosa fonte de pesquisa para os professores os quais, atuam e que desenvolvem estudos sobre o assunto. Ademais, se espera que essa sequência didática também funcione como sendo um recurso de referência para os professores que desejam aprofundar os seus conhecimentos e também aprimorar as suas metodologias de ensino. Além disto, nesta sequencia didática se repete os problemas para facilitar o uso do material para outros professores .

A.1 EQUAÇÕES FUNCIONAIS PARA O ENSINO MÉDIO

Modalidade de ensino e ano de escolaridade: Ensino Médio 1^o ao 3^o ano.

Projeto: Grupo de estudos para olimpíadas de matemática (em contra turno).

Número de encontros: 4 encontros num período de 4 semanas - cada encontro com duração de 2 horas/aula.

Carga horária: 8 horas/aula.

Recursos didáticos: quadro, data show. notebook e folhas de atividades.

Metodologia: Aula expositiva dialogada com resolução de problemas e atividades em grupo.

Conteúdo: Equações Funcionais.

Objetivo Geral: Compreender o conceito de equações funcionais, suas propriedades em métodos de resolução desenvolvendo habilidades de raciocínio lógico para resolver problemas em olimpíadas de matemática.

A.1.1 Aula 1: Ferramentas Básicas

Objetivo: Revisar conceitos básicos para o estudo de equações funcionais.

1. Abertura
    - Perguntar:
        * O que são conjuntos numéricos?
        * O que é uma função?
        * O que é uma sequência?
    - Anotar no quadro palavras chave citadas pelos alunos em relação a cada pergunta.
2. Exposição Teórica
    - Apresentar no data show o conceito e exemplos dos tópicos das três perguntas do início da aula. Sugestão: usar o material da Seção 2.1.
3. Atividade em Grupo
    - Dividir a turma em 4 grupos e pedir que cada um coloque num papel exemplos dos tópicos citados na aula.
4. Socialização
    - Um representante de cada grupo mostrará no quadro os exemplos criados peplo grupo.

A.1.2 Aula 2: Introdução às Equações Funcionais

Objetivo: Apresentar o conceito de equação funcional e resolver problemas simples.

1. Contextualização
    - Perguntar o que é uma equação funcional?
    - Ouvir as ideias dos alunos.
2. Exposição Teórica
    - Apresentar no data show o conceito de equação funcional. Sugestão, usar o material da Seção 2.2.
    - Apresentar exemplos de equações funcionais

      Problema A.1. (OBM 2004) A função $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, definida nos inteiros, satisfaz à equação $f(n) - (n+1)f(2-n) = (n+3)^2$, para todo n inteiro. Quanto vale $f(0)$?

      Solução. Para $n = 0$ temos

$$\begin{aligned} f(0) - (0+1)f(2-0) &= (0+3)^2, \\ f(0) - f(2) &= 9. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Para $n = 2$ temos

$$\begin{aligned} f(2) - (2+1)f(2-2) &= (2+3)^2, \\ f(2) - 3f(0) &= 25. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Somando (A.1) e (A.2), obtemos

$$-2f(0) = 34.$$

Portanto $f(0) = -17$.

Problema A.2. (OBM 2002) Seja f uma função real de variável real que satisfaz a condição:

$$f(x) + 2f\left(\frac{2002}{x}\right) = 3x \tag{A.3}$$

para $x > 0$. O valor de $f(2)$ é igual a quanto?

Solução. Para $x = 0$ em (A.3) temos

$$\begin{aligned} f(2) + 2f\left(\frac{2002}{2},\right) &= 3 \cdot 2 \\ f(2) + 2f(1001) &= 6. \end{aligned} \tag{A.4}$$

Para $x = 1001$ em (A.3) temos

$$\begin{aligned} f(1001) + 2f\left(\frac{2002}{1001}\right) &= 3 \cdot 1001, \\ f(1001) + 2f(2) &= 3003. \end{aligned} \tag{A.5}$$

Multiplicando a equação (A.5) por -2 e somando com a equação (2.8) temos

$$\begin{aligned} -3f(2) &= -6000, \\ f(2) &= 2000. \end{aligned}$$

Portanto, o valor de $f(2)$ é igual a 2000.

3. Atividades individuais

   - Proponha exercícios simples

Problema A.3. (OBM 2009) Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ uma função satisfazendo $f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 2$ e $f(x+12) = f(x+21) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{Z}$. Então, qual o valor de $f(2009)$?

Solução. Usando a substituição simples, podemos colocar $x - 12$ no lugar de x, assim

$$\begin{aligned} f(x+12) &= f(x+21), \\ f(x-12+12) &= f(x-12+21), \\ f(x) &= f(x+9). \end{aligned} \tag{A.6}$$

Agora, substituindo x por $x - 9$ em (A.6), temos

$$\begin{aligned} f(x-9) &= f(x-9+9), \\ f(x-9) &= f(x). \end{aligned} \tag{A.7}$$

Como $f(x+12) = f(x)$, por hipótese, substituindo x por $x - 9$, temos

$$\begin{aligned} f(x-9+12) &= f(x-9), \\ f(x+3) &= f(x-9). \end{aligned} \tag{A.8}$$

De (A.7) e (A.8) temos

$$f(x+3) = f(x).$$

Logo $f(x) = f(x+3) = f(x+6) = f(x+9) = f(x+12) = \cdots = f(x+2007)$, já que 2007 é multiplo de 3, assim

$$f(x) = f(x+2007). \tag{A.9}$$

Daí, considerando $x = 2$ em (A.9), temos

$$f(2) = f(2009).$$

Como $f(2) = 2$, portanto

$$f(2009) = 2.$$

Problema A.4. (OBM 2003) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x)(f(x) - x) = 0$, então quantas funções f satisfazem o enunciado?

Solução. Seja f dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq k \\ k, & \text{se } x = k, \end{cases}$$

com $k \in \mathbb{R}$.
Assim, para cada k fixado, temos uma função f, como k é um número real qualquer, temos uma infinidade de funções f.

4. Correção da atividade
   - Depois que os alunos resolverem a atividade, fazer a correção no quadro.

A.1.3 Aula 3: Métodos de Resolução de Equações Funcionais

Objetivo: Apresentar estratégias clássicas para resolver equações funcionais.

1. Revisão breve
   - Recapitular os problemas e soluções da aula anterior.
2. Explanação
   - Explique os métodos para resolver equações funcionais.
     * Substituição;
     * Simetria;
     * Sobrejetividade;
     * Injetividade;
     * Bijetividade;
     * Sequência.

3 Atividade em grupo
   - Dividir a turma em grupos para resolver os Problemas:

   Problema A.5. (OBM 2002) Seja f uma função real de variável real que satisfaz a condição:

$$f(x) + 2f\left(\frac{2002}{x}\right) = 3x \tag{A.10}$$

para $x > 0$. O valor de $f(2)$ é igual a quanto?

Solução. Para $x = 0$ em (A.10) temos

$$\begin{aligned} f(2) + 2f\left(\frac{2002}{2},\right) &= 3 \cdot 2 \\ f(2) + 2f(1001) &= 6. \end{aligned} \tag{A.11}$$

Para $x = 1001$ em (A.10) temos

$$\begin{aligned} f(1001) + 2f\left(\frac{2002}{1001}\right) &= 3 \cdot 1001, \\ f(1001) + 2f(2) &= 3003. \end{aligned} \tag{A.12}$$

Multiplicando a equação (A.12) por -2 e somando com a equação (2.8) temos

$$\begin{aligned} -3f(2) &= -6000, \\ f(2) &= 2000. \end{aligned}$$

Portanto o valor de $f(2)$ é igual a 2000.

Problema A.6 (PAGMO 2021)**.** Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que a identidade

$$f(x + yf(x + y)) + xf(x) = f(xf(x + y + 1)) + y^2 \tag{A.13}$$

é válida para todo par x, y de números reais.

Solução. Para $y = 0$ temos

$$\begin{aligned} f(x + 0f(x + 0)) + xf(x) &= f(xf(x + 0 + 1)) + 0^2, \\ f(x) + xf(x) &= f(xf(x + 1)), \\ f(x)(1 + x) &= f(xf(x + 1)). \end{aligned} \tag{A.14}$$

Para $x = -1$ em (A.14) temos

$$\begin{aligned} f(-1)(1 - 1) &= f(-1f(1 - 1)), \\ f(-1)0 &= f(-1f(0)), \\ 0 &= f(-f(0)). \end{aligned} \tag{A.15}$$

Fazendo $-f(0) = k$ e substituindo em (A.15), temos

$$f(k) = 0. \tag{A.16}$$

Agora, vamos fazer $x = 0$ na identidade (A.13) temos

$$\begin{aligned} f(0 + yf(0 + y)) + 0f(0) &= f(0f(0 + y + 1)) + y^2 \\ f(yf(y)) &= f(0) + y^2. \end{aligned} \tag{A.17}$$

fazendo $y = k$ em (A.17) temos:

$$f(kf(k)) = f(0) + k^2,$$

De (A.16) temos que $f(k) = 0$, então

$$\begin{aligned} f(k0) &= f(0) + k^2, \\ f(0) &= f(0) + k^2, \\ 0 &= k^2, \\ k &= 0. \end{aligned}$$

Como $-f(0) = k$, logo $f(0) = 0$. Para $y = 1$ em (A.17) temos:

$$\begin{aligned} f(1f(1)) &= f(0) + 1, \\ f(1f(1)) &= 0 + 1, \\ f(f(1)) &= 1. \end{aligned} \tag{A.18}$$

Para $y = -x$ em (A.13) temos

$$\begin{aligned} f(x - xf(x - x)) + xf(x) &= f(xf(x - x + 1)) + (-x)^2, \\ f(x - xf(0)) + xf(x) &= f(xf(1)) + x^2, \\ f(x) + xf(x) &= f(xf(1)) + x^2, \\ f(x)(1 + x) &= f(xf(1)) + x^2. \end{aligned} \tag{A.19}$$

Para $x = 1$ em (A.19), temos

$$\begin{aligned} f(1)(1 + 1) &= f(1f(1)) + 1^2, \\ f(1)2 &= f(1f(1)) + 1, \end{aligned}$$

como $f(1f(1)) = 1$, por (A.18),logo

$$\begin{aligned} f(1)2 &= 1+1, \\ f(1)2 &= 2, \\ f(1) &= 1. \end{aligned} \tag{A.20}$$

Substituindo (A.20) em (A.19), temos

$$\begin{aligned} f(x)(1+x) &= f(x)+x^2, \\ f(x)+xf(x) &= f(x)+x^2, \\ f(x)+xf(x)-f(x) &= x^2, \\ xf(x) &= x^2, \end{aligned} \tag{A.21}$$

Para $x \neq 0$ temos

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2}{x}, \\ f(x) &= x. \end{aligned}$$

Em (A.16) temos que $f(0) = 0$, portanto

$$f(x) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Problema A.7. (OBM 2003) A função f é definida para todos os pares ordenados (x, y) de inteiros positivos e tem as seguintes propriedades:

(i) $f(x, x) = x$;

(ii) $f(x, y) = f(y, x)$;

(iii) $(x+y)f(x, y) = (2x+y)f(x, x+y)$.

Qual é o valor de $f(21, 12)$?

Solução. De acordo com (ii), temos que

$$f(21, 12) = f(12, 21) = f(12, 12+9).$$

Com (iii), podemos escrever,

$$\begin{aligned}
(12+9)f(12,9) &= (2\cdot 12+9)f(12,21), \\
21f(12,9) &= 33f(12,21) \quad \div(3), \\
7f(12,9) &= 11f(12,21).
\end{aligned} \tag{A.22}$$

Usando (ii) novamente

$$f(12,9) = f(9,12) = f(9,9+3).$$

Com (iii),

$$\begin{aligned}
(9+3)f(9,3) &= (2\cdot 9+3)f(9,9+3), \\
12f(9,3) &= 21f(9,12) \quad \div(3), \\
4f(9,3) &= 7f(9,12).
\end{aligned} \tag{A.23}$$

Vamos provar por indução que $(n+1)f(x,nx) = 2x$.
Para $y = x$ em (iii) temos

$$\begin{aligned}
(x+x)f(x,x) &= (2x+x)f(x,x+x), \\
2xf(x,x) &= 3xf(x,2x),
\end{aligned}$$

Por (i) $f(x,x) = x$, logo

$$\begin{aligned}
2xx &= 3xf(x,2x), \\
\frac{2xx}{3x} &= f(x,2x), \\
\frac{2x}{3} &= f(x,2x), \\
2x &= 3f(x,2x).
\end{aligned} \tag{A.24}$$

Para $y = 1x$, pela equação (A.24), vale. Hipótese de indução, suponha que vale para $y = (n-1)x$ temos

$$\begin{aligned}
(n+1)f(x,nx) &= 2x, \\
f(x,nx) &= \frac{2x}{n+1}.
\end{aligned} \tag{A.25}$$

Vamos provar para $y = nx$.

Substituindo $y = nx$ em (iii) temos

$$(x + xn)f(x, nx) = (2x + nx)f(x, x(n + 1)) \tag{A.26}$$

Substituindo (A.25) em (A.26) temos

$$\begin{aligned}
(x + xn)\frac{2x}{n+1} &= x(2 + n)f(x, x(n + 1)),\\
x(n + 1)\frac{2x}{n+1} &= x(1 + (1 + n))f(x, x(n + 1)),\\
2x &= (1 + (1 + n))f(x, x(n + 1)).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
(3 + 1)f(3, 3 \cdot 3) &= 2 \cdot 3,\\
4f(3, 3 \cdot 3) &= 6,\\
f(9, 3) &= \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Substituindo em (A.23), temos

$$\begin{aligned}
4f(9, 3) &= 7f(9, 12),\\
7f(9, 12) &= 6
\end{aligned}$$

Agora em (A.22), temos

$$\begin{aligned}
7f(9, 12) &= 11f(12, 21),\\
6 &= 11f(12, 21).
\end{aligned}$$

Portanto $f(12, 21) = \dfrac{6}{11}$.

- Discutir as respostas no final da aula.

A.1.4 Aula 4: Desafios e Revisão

Objetivo: Resolver problemas mais desafiadores e aplicar os conceitos aprendidos em problemas avançados.

1 Problemas Avançados

- Propor os seguintes desafios individuais

Problema A.8. (OBM 2003) Determine todas as funções $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ tais que, para todos $x, y \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x)f(y) - f(xy) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}. \tag{A.27}$$

Solução. Para $x \in \mathbb{R}^*$, perceba que, uma forma de simplificar a expressão, é fazer $y = 1$, nos dando

$$\begin{aligned} f(x)f(1) - f(x) &= x + \frac{1}{x}, \\ f(x)(f(1) - 1) &= x + \frac{1}{x}, \end{aligned} \tag{A.28}$$

e assim, para determinar as possíveis funções que são soluções de (A.27), basta-nos encontrar os possíveis valores de $f(1)$. Para tal, veja que tomando $x = y = 1$ em (A.28), nos dá

$$[f(1)]^2 - f(1) = 2,$$

assim, $f(1)$ é raiz da equação $x^2 - x - 2 = 0$, isto é, $f(1) = -1$ ou $f(1) = 2$.
Caso $f(1) = -1$
Substituindo em (A.28) temos

$$f(x) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Agora, precisamos verificar se, de fato, essa função satisfaz (A.27). Neste caso,

$$\begin{aligned} f(x)f(y) - f(xy) &= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) \\ &- \left(-\frac{1}{2}\right)\left(xy + \frac{1}{xy}\right), \\ &= \frac{1}{4}\left(xy + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{1}{xy}\right) + \frac{1}{2}\left(xy + \frac{1}{xy}\right), \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \frac{3}{4}\left(xy + \frac{1}{xy}\right), \\ &\neq \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, \end{aligned}$$

portanto, essa função não satisfaz a equação funcional dada.

Caso $f(1) = 2$:
Neste caso, temos
$$f(x) = x + \frac{1}{x},$$
e verificando, assim como caso anterior:
$$\begin{aligned} f(x)f(y) - f(xy) &= \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) - \left(xy + \frac{1}{xy}\right), \\ &= xy + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{1}{xy} - xy - \frac{1}{xy}, \\ &= \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, \end{aligned}$$
e portanto esta função satisfaz (A.27), sendo sua única solução.

Problema A.9. (Suiça 1999) Determine todas as funções $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ satisfazendo
$$\frac{1}{x} f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x, \tag{A.29}$$
para todo $x \in \mathbb{R}^*$.

Solução. Fazendo $x \mapsto -1/x$ em (A.29), conseguimos uma nova expressão que também depende de $f(-x)$ e $f(1/x)$, como vemos a seguir:
$$\begin{aligned} \frac{1}{(-1/x)} f\left(-\left(-\frac{1}{x}\right)\right) + f\left(\frac{1}{(-1/x)}\right) &= -\frac{1}{x}, \\ -xf\left(\frac{1}{x}\right) + f(-x) &= -\frac{1}{x}. \end{aligned} \tag{A.30}$$
Assim, juntando (A.29) e (A.30), obtemos uma espécie de sistema, envolvendo $f(-x)$ e $f(1/x)$:
$$\frac{1}{x} f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x, \tag{A.31}$$
$$f(-x) - xf\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x}. \tag{A.32}$$
Com o objetivo de resolvê-lo, podemos operar $x \times$ (A.31) + (A.32) para obter:
$$2f(-x) = x^2 - \frac{1}{x} \Rightarrow f(-x) = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)$$
e fazendo $x \mapsto -x$,
$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right).$$

Verificando se esta satisfaz a equação original:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x}f(-x)+f\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{1}{x}\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+x\right), \\
&= \frac{x}{2}-\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x}+\frac{x}{2}, \\
&= x
\end{aligned}$$

Assim, $f(x)=\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{1}{x}\right)$ é a única solução.

Problema A.10. (Bielorússia 1995) Encontre todas as funções $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tais que

$$f(f(x+y))=f(x+y)+f(x)f(y)-xy$$

para todo $x,y\in\mathbb{R}$.

Problema A.11. (IMO 2008) Encontre todas as funções $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ para as quais

$$\frac{f(x)^2+f(y)^2}{f(z^2)+f(t^2)}=\frac{x^2+y^2}{z^2+t^2}$$

para todos $x,y,z,t\in(0,\infty)$ com $xy=zt$.

2 Discussão de estratégias

- Deixar livre para cada aluno que quiser apresentar suas soluções, destacando os raciocínios utilizados.
- Se necessário, apresentar as resoluções dos problemas

3 Encerramento e Reflexão

- Resumo dos métodos de resolução.
- Mostrar como a prática pode ajudar a identificar padrões de forma mais rápida
- Deixar uma lista de problemas para os estudantes que desejam aprofundar mais nos nos estudos ou para os professores prepararem uma segunda etapa do curso .

Problema A.12. (Japão 2004) Determine todas as $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tais que

$$f(xf(x)+f(y))=(f(x))^2+y,$$

para todos $x,y\in\mathbb{R}$.

Problema A.13. (Balcânica 2007) Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(f(x) + y) = f(f(x) - y) + 4f(x)y.$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema A.14. (USAMO 2002) Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(x^2 - y^2) = xf(x) - yf(y).$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema A.15. (Vietnã 2014) Encontre todas as funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tais que

$$f(2m + f(m) + f(m)f(n)) = nf(m) + m,$$

para todos $m, n \in \mathbb{Z}$.

Problema A.16. (Balcânica 2000) Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y,$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema A.17. Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(x - f(y)) = f(x) + xf(y) + f(f(y)),$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema A.18. Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(xy + 2x + 2y) = f(x)f(y) + 2x + 2y,$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema A.19. Encontre todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$f(x + y) - f(x) - f(y) = xy(x + y),$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

APÊNDICE B

CICLO DE PALESTRAS

Este apêndice tem como objetivo apresentar e destacar os folders do Ciclo de Palestras sobre Olimpíadas de Matemática, que foram uma parte essencial deste projeto de dissertação de mestrado. Os folders, com suas informações detalhadas, não apenas promovem a divulgação do evento, mas também ajudam a compreender o contexto e a estrutura das palestras realizadas. Eles evidenciam a proposta central do ciclo de palestras, que se focou em ressaltar a importância das Olimpíadas de Matemática como uma ferramenta pedagógica de grande relevância, capaz de expandir o conhecimento dos estudantes em diversas áreas do desenvolvimento cognitivo e social.

Essas palestras tiveram como principal objetivo destacar o impacto positivo que a participação nas Olimpíadas de Matemática pode gerar no desenvolvimento de habilidades fundamentais para o aprendizado, como o raciocínio lógico, a atenção, a concentração, a autonomia e a capacidade de trabalhar em grupo. Tais habilidades são cruciais para o crescimento intelectual dos alunos e, muitas vezes, vão além do que é trabalhado nas aulas convencionais, contribuindo para a formação de indivíduos mais preparados para enfrentar desafios acadêmicos e profissionais.

Além disso, as Olimpíadas de Matemática são uma excelente oportunidade para que os estudantes se envolvam com problemas complexos e desafiadores, desenvolvendo competências que são exigidas em diversas áreas do conhecimento.

Outro aspecto relevante que merece destaque é a organização do evento, que foi concebida como um produto educacional associado a este trabalho de dissertação, atendendo assim a uma das exigências do programa de mestrado. Através da organização e realização do ciclo de palestras, foi possível consolidar o conceito de que as Olimpíadas de Matemática não são apenas um conjunto de competições, mas uma rica oportunidade pedagógica que pode ser integrada ao ensino regular de maneira a enriquecer o processo educacional. Esse evento, além de ser uma parte fundamental da dissertação, também representa um exemplo prático da aplicação de um produto educacional que visa impactar positivamente a formação de professores e alunos, criando novas perspectivas para o ensino e aprendizado da Matemática.


Ciclo de Palestras
olimpíadas
de
matemática
06, 14, 20 e 26 de junho
Inscrições: de 25/05 a 05/06/23
Informações: profmat.ime.ufg.br
Palestrantes:
Ana Paula Chaves (IME/UFG)
Bruno Holanda (FACE/UFG)
Davi Lopes (Farias Brito)
Eduardo Henrique (Equipe BRA-IMO 2022/23)
Jamile Falcão (MIT)
Jonatan Lima (ITA)
Luíze D'Urso (IMPA)
Coordenadoras:
Kamila Andrade (UFG)
Ana Paula Chaves (UFG)
Josiane Morais (Discente -PROFMAT-UFG)
UFG
PROFMAT
SEDUC
GOIÁS
O ESTADO QUE DÁ CERTO


Ciclo de Palestras
olimpíadas de matemática
06, 14, 20 e 26 de junho
06 de Junho
Palestra
Olimpíadas de Matemática: Competições e Treinamento
Ana Paula Chaves (IMPA/UFG)
Informações: profmat.ime.ufg.br
UFG
PROFMAT
Adufg
GOIÁS


Ciclo de Palestras
olimpíadas de matemática
06, 14, 20 e 26 de junho
14 de Junho :: 16h
Palestra
Potência de Ponto e Ideias Potentes
Davi Lopes (UFC/Farias Brito)
Informações: profmat.ime.ufg.br
UFG
PROFMAT
Adufg
GOIÁS
O ESTADO QUE DÁ CERTO


Ciclo de Palestras
olimpíadas de matemática
06, 14, 20 e 26 de junho
Eduardo Henrique
Equipe BRA-IMO 2022/23
Jamile Falcão
MIT
Jonatan Lima
ITA
Luíze D'Urso
IMPA
Mesa Redonda - O Diferencial de Ser Olímpico: Carreira e Oportunidades
20 de Junho :: 16h
Informações: profmat.ime.ufg.br
UFG
PROFMAT
Adufg
GOIÁS


Ciclo de Palestras
olimpíadas de matemática
06, 14, 20 e 26 de junho
26 de Junho :: 19h
Palestra
Como Planejar um Projeto Olímpico
Bruno Holanda (UFG)
Informações: profmat.ime.ufg.br
UFG
PROFMAT
Adufg
SEDUC
GOIÁS
O ESTADO QUE DÁ CERTO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
Pró-Reitoria de Extensão e Cultura

CERTIFICADO

Certificamos que, o(a) Discente JOSIANE BAILÃO DE MORAIS, MATRÍCULA 2022100357, participou da Ação de Extensão CICLOS DE PALESTRAS: OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA, com carga horária de 10 hora(s), coordenada pelo(a) Professor(a) KAMILA DA SILVA ANDRADE, promovida pelo(a) INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA, na função de Integrante da Equipe, totalizando 12 hora(s) no período de 1 de Junho de 2023 a 30 de Junho de 2023.

Goiânia, 20 de Setembro de 2023

Luana Cássia Miranda Ribeiro
Pró-Reitor(a) de Extensão e Cultura

Código de verificação: **b26524853b**
Número do Documento: **138924**

PROEC PRÓ-REITORIA DE EXTENSÃO E CULTURA

UFG UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS

Para verificar a autenticidade deste documento acesse **https://sigaa.sistemas.ufg.br/sigaa/documentos**, informando o número do documento, data de emissão do documento e o código de verificação.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
PRO-REITORIA DE EXTENSÃO E CULTURA

CERTIFICADO

Certificamos que ____________________________________participou da ação de extensão "***Ciclo de Palestras: Olimpíadas de Matemática***", com carga horária de____ horas, promovida pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática e Estatística, no período de 06 a 26 de Junho de 2023.

PROEC PRO-REITORIA DE EXTENSÃO E CULTURA

UFG UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS